



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUANTUM HALL OLAYI TABANLI ARAÇLARIN ÖZ-UYUMLU SİMÜLASYONU

Teoman ÖZTÜRK

DOKTORA TEZİ

Fizik Anabilim Dalı

Haziran-2012
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Teoman ÖZTÜRK

Tarih:

ÖZET

DOKTORA TEZİ

KUANTUM HALL OLAYI TABANLI ARAÇLARIN ÖZ-UYUMLU SİMÜLASYONU

Teoman ÖZTÜRK

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ülfet ATAV

2012, 97 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Ülfet ATAV
Prof. Dr. Hüseyin YÜKSEL
Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN
Doç. Dr. Yusuf YAKAR
Yrd. Doç. Dr. Berna GÜLVEREN

Bu çalışmada, yarıiletken eklem arayüzeylerde oluşturulan iki boyutlu elektron gazı kullanılarak üretilen bazı Kuantum Hall olayı tabanlı araçların davranışı Thomas-Fermi yaklaşımı çerçevesinde özuyumlu olarak incelenmiştir. Hesaplamalarda sistemin elektrostatik davranışını tanımlayan Poisson denklemi doğrudan sayısal olarak çözülmüştür. Poisson denkleminin çözümü sonlu farklar yöntemiyle yapılmış, elektron yoğunluğu ve potansiyel hesaplamalarının hızlandırılması için ardışık aşırı durulma ve multigrid yöntemleri kullanılmıştır.

Şiddetli magnetik alan altında iki boyutlu elektron gazında oluşan kenar durumları kullanılarak oluşturulabilen Kuantum Hall çubuğu, Aharonov-Bohm interferometresi ve Mach-Zehnder interferometresinin elektronik eşdeğerleri için elektron yoğunluğu ve potansiyel dağılımlarının uygulanan magnetik alan ve kapı gerilimi gibi çeşitli parametrelere bağlı davranışları ayrıntılı olarak incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar literatürde bulunan sonuçlarla karşılaştırılmıştır ve sonuçların genel olarak literatürdeki deneysel ve teorik çalışmalarla uyumlu olduğu görülmüştür. Özellikle Aharonov-Bohm interferometresinde Aharonov-Bohm osilasyonlarının gözlemlendiği magnetik alan aralığının ve interferometrenin çevrelediği alanın düşük kapı gerilimleri için deneysel çalışmalarda gözlemlendiği gibi lineer olarak arttığı fakat daha yüksek gerilimlere doğru ilerlenmesi halinde hesaplamalarımızda bu lineerliğin kaybolduğu gözlemlenmiştir. Maalesef bu bölgede karşılaştırma yapılacak deneysel veri bulunamamıştır.

Anahtar Kelimeler: Aharonov-Bohm interferometresi, iki boyutlu elektron gazı, kuantum Hall olayı, Mach-Zehnder interferometresi, Thomas-Fermi yaklaşımı.

ABSTRACT

Ph.D THESIS

SELF-CONSISTENT SIMULATIONS OF QUANTUM HALL EFFECT BASED DEVICES

Teoman ÖZTÜRK

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN PHYSICS

Advisor: Prof. Dr. Ülfet ATAV

2012, 97 Pages

Jury
Prof. Dr. Ülfet ATAV
Prof. Dr. Hüseyin YÜKSEL
Assoc. Prof. Dr. Mehmet ŞAHİN
Assoc. Prof. Dr. Yusuf YAKAR
Asst. Prof. Dr. Berna GÜLVEREN

In this study, some Quantum Hall effect based devices realised using the two dimensional electron gas formed on the semiconductor junction interfaces were investigated by using Thomas-Fermi approximation in a self consistent manner. Poisson equation, which describes the electrostatics of the system was solved numerically using the finite difference method and in order to speed up the calculations of electron density and potential profiles succesive over relaxiation and multigrid method were employed.

Quantum Hall bar and electronic equivalents of Aharonov-Bohm interferometer and Mach-Zehnder interferometer can be realized by using the edge states formed in a two dimensional electron gas under high magnetic fields. We have investigated in detail how the electron distribution and potential profiles depend on various parameters such as the applied magnetic field strength and the gate potential in quantum in these devices. Obtained results were compared with those found in the literature and it was observed that the results, in general, agree very well with both theoretical and experimental ones found in the literature. Especially, the magnetic field range for the observation of Aharonov-Bohm oscillations and the area enclosed by the interferometer were observed to increase linearly by the applied gate voltage in the low voltage region. This behaviour is consistent with the experimental results however as the gate voltage is increased our calculations predict that this linear behaviour diappears. Unfortunately, we could not reach to any experimental data in this range to make a comparison.

Keywords: Aharonov-Bohm interferometer, Mach-Zehnder interferometer, quantum Hall effect, Thomas-Fermi approximation, two dimensional electron gas.

ÖNSÖZ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne Doktora tezi olarak sunulan bu çalışmada düşük sıcaklık ve yüksek manyetik alan altındaki kuantum Hall olayı tabanlı araçlardaki elektron yoğunluğu ve potansiyel teorik olarak incelenmiştir. İki boyutlu elektron gazında gözlenen Kuantum Hall olayında oluşan kenar durumları, elektron demetine ve ışığa benzetilerek bazı interferometreler çalışılabilir. Böylece kuantum mekaniğinde ve optikteki bazı ilginç olayların kuantum Hall olayı yardımıyla inceleme fırsatı doğar. Biz de bu çalışmamızda bu interferometrelerin kuantum Hall olayı altındaki benzerlerini teorik olarak inceledik. Bu çalışmanın son yıllarda büyük bir hızla gelişen nano teknolojideki deneysel çalışmalara ışık tutabileceği kanaatindeyiz.

Sadece bu çalışma süresince değil aynı zamanda tüm akademik kariyerim boyunca benden maddi ve manevi yardımlarını ve desteklerini esirgememiş olan danışmanım sayın Prof. Dr. Ülfet ATAV'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Kuantum Hall olayı üzerine çalışmak amacıyla Prof. Dr. Hüseyin YÜKSEL, Prof. Dr. Ülfet ATAV, Arş. Gör. Dr. Ahmet Emre KAVRUK, Arş. Gör. Teoman ÖZTÜRK, Arş. Gör. Alptekin YILDIZ ve Abdullah ÖZTÜRK'den oluşan bir grup oluşturulmuştur. Bu grupla bilgilerini ve tecrübelerini paylaşan, maddi ve manevi yardımlarını esirgemeyen sayın Prof. Dr. Hüseyin YÜKSEL'e şükranlarımı sunarım. Grubun diğer elemanlarından başta Arş. Gör. Dr. Ahmet Emre KAVRUK olmak üzere Arş. Gör. Alptekin YILDIZ ve Abdullah ÖZTÜRK'e de büyük gayretleri ve yardımları nedeniyle teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bu konudaki geçmiş deneyimlerini bizlerle paylaşarak bu çalışmaya başlamamıza vesile olan Doç. Dr. Tuğrul HAKİOĞLU, Doç. Dr. Afif SIDDIKİ ve Prof. Dr. Rolf R. GERHARDTS'a da teşekkürlerimi sunarım

Tez çalışmam boyunca bizlerden yardımlarını esirgemeyen sayın Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN'e, sayın Yrd. Doç. Dr. Berna GÜLVEREN'e ve tüm S. Ü. Fizik Bölümü elemanlarına da teşekkürü borç bilirim. Bu çalışmada S. Ü. Bilimsel Araştırma Projesi (BAP) Koordinatörlüğünce desteklenen 07101003 numaralı projeden alınan yazılımlarla 07101037 numaralı projeden alınan Sun Fire X2200 makineler kullanılmıştır. Bu yardımlarından dolayı S.Ü. BAP Koordinatörlüğüne teşekkür ederim.

Son olarak benden desteklerini esirgemeyen sevgili aileme de çok teşekkür ederim.

Teoman ÖZTÜRK
KONYA-2012

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **ix**

1. GİRİŞ **1**

2. KLASİK HALL OLAYI **5**

2.1. Klasik Hall Olayının Açıklanması 5
2.2. Drude Modeli 7
2.3. Manyetik Alanda Hareket 10

3. KUANTUM HALL OLAYI **15**

3.1. Serbest Elektron Modeli 15
3.2. Enerji Bant Modeli 17
3.3. İki Boyutlu Elektron Gazı 24
3.4. Landau Seviyeleri 26
3.5. Doluluk Çarpanı 31
3.6. Gerçek Sistemlerde Tamsayı Kuantum Hall Olayı 34
3.7. Kenar Durum Modeli 35

4. KUANTUM HALL OLAYI TABANLI ARAÇLAR **40**

4.1. Kuantum Hall Çubuğu 40
4.2. Aharonov-Bohm İnterferometresi 41
4.3. Mach-Zehnder İnterferometresi 45

5. SİSTEMİN ELEKTROSTATİĞİ VE SAYISAL YÖNTEMLER **47**

5.1. Thomas-Fermi Yaklaşımı 50
5.2. Ardışık Aşırı Durulma Yöntemi 57
5.3. Multigrid Yöntemi 59

6. SONUÇLAR **63**

6.1. Kuantum Hall Çubuğu İçin Sonuçlar 63
6.1.1. Kuantum Hall Çubuğunun davranışına farklı kapı gerilimlerinin etkisi 64
6.1.2. Kuantum Hall Çubuğunun Farklı Manyetik alan şiddetlerindeki davranışı 66
6.1.3. Kuantum Hall Çubuğunun Farklı donor yoğunluklarındaki davranışı 68
6.2. Aharonov-Bohm İnterferometresi İçin Sonuçlar 70
6.2.1. AB İnterferometresi İçin Kapı Gerilimi Taraması 70

6.2.2. AB İnterferometresi İçin Manyetik Alan Taraması 76
6.2.3. Sıkıştırılamaz Şeritlerin Çevrelediği Alan ve AB Osilasyonları 78
6.3. Mach-Zehnder İnterferometresi İçin Sonuçlar 85
6.3.1. MZ İnterferometresi İçin Manyetik Alan Taraması 85
6.3.2. MZ İnterferometresi İçin Gerilim Taraması 88

7. DEĞERLENDİRME VE ÖNERİLER 90

KAYNAKLAR 92

ÖZGEÇMİŞ 97

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

I :	Akım
j :	Akım yoğunluğu
k_B :	Boltzmann sabiti
$\vec{p}$:	Çizgisel momentum
$\vec{k}$:	Dalga vektörü
λ :	Dalga boyu
ψ :	Dalga fonksiyonu
m_h :	Deşiğin kütlesi
ε :	Dielektrik sabiti
ν :	Doluluk Çarpanı
i :	Doluluk çarpanının tamsayı değeri
n_d :	Donor yoğunluğu
τ :	Durulma zamanı
$D(E)$:	Durum yoğunluğu
$\vec{E}$:	Elektrik alan
n_e :	Elektron yoğunluğu
e :	Elektron yükü
E :	Enerji özdeğeri
m^* :	Etkin kütle
ε_F :	Fermi enerjisi
k_F :	Fermi küresi yarıçapı
υ_g :	Grup hızı
E_H :	Hall elektrik alanı
V_H :	Hall gerilimi
H_n :	Hermite polinomu
$\hbar$:	İndirgenmiş Planck sabiti
μ :	Kimyasal potansiyel
m :	Elektron kütlesi
Φ :	Manyetik akı
Φ_0 :	Manyetik akı kuantası
B :	Manyetik alan
l :	Manyetik uzunluk
$\overline{n}_e$:	Ortalama elektron yoğunluğu
a :	Örgü sabiti
ρ :	Özdirenç
σ :	Öziletkenlik
h :	Planck sabiti
V :	Potansiyel
V^* :	Poisson denkleminin gerçek çözümü
δV :	Poisson denkleminde deneme çözümle gerçek çözüm arasındaki fark

U :	Potansiyel enerji
ω_c :	Siklotron frekansı
T :	Sıcaklık
g_s :	Spin dejenereliği
$\vec{G}$:	Ters örgü vektörü
N_o :	Toplam elektron sayısı
$\vec{A}$:	Vektör potansiyeli
R_K :	von Klitzing direnci
q :	Yük
V_g :	Kapı gerilimi
S_m :	Sıkıştırılamaz şeritlerin çevrelediği alan
ΔB :	Manyetik alana bağlı osilasyonların periyodunun büyüklüğü

Kısaltmalar

2BEG:	İki Boyutlu Elektron Gazı
AAD:	Ardışık Aşırı Durulma
AB:	Aharonov-Bohm
CSG:	Chklovskii-Shklovskii-Glazman
KG:	Kapı Gerilimi
KKHO:	Kesirli Kuantum Hall Olayı
KHO:	Kuantum Hall Olayı
MZ:	Mach-Zehnder
MOYAET:	Metal Oksit Yarıiletken Alan Etkili Transistör
MDE:	Moleküler Demet Epitaksi
SOR:	Succesive Over Relaxation
TF:	Thomas-Fermi

1. GİRİŞ

Hall Olayı; 1879 yılında bir üniversite öğrencisi olan E. H. Hall'ın manyetik alan içindeki akım taşıyan bir telde, manyetik alanın tele mi yoksa akıma mı etkidiğini merak etmesiyle başlamıştır. Bir deney düzeneği tasarlayarak manyetik alan içinde akım taşıyan telde hem akım yönüne, hem de manyetik alana dik bir potansiyel fark oluştuğunu gözlemiştir (Hall, 1879). Bu potansiyelin uygulanan akıma oranı da Hall direnci veya enine direnç olarak adlandırılır. Hall direnci normal sıcaklıklarda uygulanan manyetik alanla doğru orantılı olarak artar. Bu olayın Hall tarafından keşfedilmesinden yaklaşık bir asır sonra, yeterince düşük sıcaklıklarda, bu direncin basamaklı bir yapıda olduğu gözlemlenmiş ve 1980 yılında K. von Klitzing, enine dirençte gözlenen bu platoların $R_H = h/ie^2$ şeklinde kuantumlu olduğunu göstermiştir (von Klitzing ve ark., 1980). Burada h Planck sabiti, e elektronun yüküdür ve i' de doluluk çarpanının tamsayı değeridir. Buna göre $h/e^2 = 25812.807$ değeri evrenseldir ve 1990 yılından beri direnç standardı olarak kullanılmaktadır.

Kuantum Hall Olayı (KHO) oldukça düşük sıcaklıklarda ve yüksek manyetik alan altında Silisyum katkılı Metal Oksit Yarıiletken Alan Etkili Transistör (Si-MOYAET)' ün transport özellikleri incelenirken keşfedilmiştir. Düşük sıcaklık ve yüksek manyetik alan altında Si-MOYAET yapısının davranışının incelenmesi yönünde ilk ölçümler, Fowler ve ark. (1966) tarafından yapılmıştır. Aygıt üretimindeki gelişmeler sayesinde Si-MOYAET'de iki boyutlu elektron sistemleri elde edilebilmiş (Kawaji ve ark., 1975) ve bu tür yapılarda Hall direnç platoları gözlenmiştir (Englert ve von Klitzing, 1978). Ancak Hall platolarını h/e^2 temel değerine göre analiz etme fikri von Klitzing'den gelmiştir (von Klitzing ve ark., 1980). Bu keşfiyle K. von Klitzing 1985 Nobel fizik ödülünü almıştır.

KHO'nın Si-MOYAET' de keşfinden hemen sonra benzer ölçümler AlGaAs/GaAs heteroyapıları için yapılmıştır (Tsui ve Gossard, 1981). Çok daha yüksek manyetik alanlarda ve çok daha düşük sıcaklıklarda (Tsui ve ark., 1982) yapılan deneylerde direnç platolarının, doluluk çarpanının basit kesirli değerlerinde de gözlendiği keşfedilmiştir. Doluluk çarpanının kesirli değerlerinde Hall platolarının oluşumunu içeren olaya Kesirli Kuantum Hall Olayı (KKHO) denmektedir. KKHO'nın anlaşılması yönünde ilk teorik çalışmalar ise Laughlin (1983) tarafından yapılmıştır. Bu

çalışmaları sonucunda H. L. Störmer, D. C. Tsui ve R. B. Laughlin 1998 Nobel fizik ödülünü kazanmışlardır.

Tamsayı KHO konusunda ilk yayınlanan makalelerde platoların neden oluştuğu açıklanamamıştır. İlk dönemlerde platoların varlığının, Landau seviyelerinde oluşacak olan yerelleşmiş ve genişlemiş durumlardan kaynaklanabileceği düşünülmüştür (Laughlin, 1981). Ancak, sisteme dışarıdan uygulanan potansiyel hesaba katılmamış olduğu için bu teori de yetersiz kalmıştır. Bir dış potansiyel gibi değerlendirilebilecek olan kenar etkilerinin göz önüne alınmasıyla, elektronların yapının kenarı boyunca oluşan ve tam dolu Landau seviyeleri arasında kalan dar kanallar içinde hareket ettiği düşünülmüştür (Halperin, 1982). Daha sonra elektronların perdeleme etkisinin katılmasıyla etkin elektriksel yapının sıkıştırılamaz ve sıkıştırılabilir şeritlerin arka arkaya sıralanmasıyla oluştuğu fikri Beenakker (1990) ve Chang (1990) tarafından ortaya atılmıştır, ancak sıkıştırılabilir ve sıkıştırılamaz şeritlerin bu nitel tanımlamasında şeritlerin konum ve genişliklerinin nasıl elde edilebileceği üzerine nicel bir yaklaşım verilmemiştir. Sıkıştırılamaz ve sıkıştırılabilir şeritlerin genişliğinin hesaplarında Chklovskii ve ark. (1992), geliştirdikleri elektrostatik modelde problemi analitik olarak çözerek, sıkıştırılabilir ve sıkıştırılamaz şeritlerin genişliğini ve konumunu nicel olarak elde etmişlerdir. Chklovskii ve ark. (1992)'nın öncü çalışmalarının ardından Gerhardts ve arkadaşları (Lier ve Gerhardts, 1994; Oh ve Gerhardts, 1997) bu hesapları öz uyumlu olarak Thomas-Fermi yaklaşımı ile birleştirmişlerdir. Daha sonraki yıllarda daha gerçekçi hesaplamalarda Hartree yaklaşımı (Güven ve Gerhardts, 2003; Siddiki ve Gerhardts, 2004) ve Yoğunluk fonksiyoneli teorisi (Ihnatsenka ve Zozoulenko, 2006; Ihnatsenka ve Zozoulenko, 2008[a]) kullanılarak sıkıştırılabilir ve sıkıştırılamaz şeritler detaylı bir şekilde incelenmiştir. Tüm bu çalışmalarda etkin olarak bir veya iki boyutlu Poisson denkleminin çözümü, basitleştirilmiş geometrilerde analitik olarak ifade edilebilen Green fonksiyonları kullanılarak yapılmıştır. Gerçek üç boyutlu sistemlerde Green fonksiyonlarının elde edilmesi ve Poisson denkleminin sayısal çözümü için kullanımı pratik olarak neredeyse imkânsızdır. Bu sebeple şimdiye kadar geliştirilen yaklaşımların gerçek üç boyutlu sistemlerde kullanılması pek olası gözükmemektedir.

Yukarıda bahsi geçen kenar kanalı terimi ilk başlarda, esasında akımın aktığı yer olarak belirtilmiştir. İki boyutlu elektron gazında (2BEG) oluşan sıkıştırılamaz ve sıkıştırılabilir şeritlerden hangisinin akımı taşıdığı, devamlı bir tartışma konusu olmuştur. Uzun bir süre sıkıştırılabilir şeritlerin akımı taşıdığı ve sıkıştırılamaz şeritlerin bir yalıtkan gibi davrandığı ve kenar kanalı olarak da sıkıştırılabilir şeritler kabul

edilmiştir. 2000'li yılların başında yapılan bir seri deney sonucunda (Ahlswede ve ark., 2001; Ahlswede ve ark., 2002; Weitz ve ark., 2000[a]; Weitz ve ark., 2000[b]) akımın sıkıştırılamaz şeritler boyunca taşındığı ortaya konulmuştur. Bu sonuçlar, teorik olarak Gerhardts ve arkadaşları tarafından doğrulanmıştır (Güven ve Gerhardts, 2003; Siddiki ve Gerhardts, 2004; Siddiki ve Gerhardts, 2004; Gerhardts 2008).

KHO, ilk olarak kuantum Hall çubuğu adı verilen kuantum telinde oluşan 2BEG üzerinde gözlenmiştir. 2BEG, iki farklı yarıiletken arasındaki arayüzeyde şekillenir. Böyle bir yapı genelde, Moleküler Demet Epitaksi yöntemiyle büyütülmektedir. Ayrıca sistemi sınırlamak için kimyasal kesme (etching) veya gerilimle beslenmiş kapı kullanılır. Bu sınırlandırmalarla farklı şekil ve geometrilerde oluşturulan kenar kanallarının, elektron veya ışık demeti yerine kullanılmasıyla kuantum mekaniğinde ve optikte karşılaşılan bazı olayların kuantum Hall olayına dayanan benzerlerini deneysel olarak gözlemek olasıdır. Bu tür düzeneklere kuantum Hall olayı tabanlı araçlar adı verilir. Bunların en çok ilgi çekenleri Aharonov-Bohm (AB) interferometresi ve Mach-Zehnder (MZ) interferometresidir. AB interferometresindeki elektron demeti ve MZ interferometresindeki ışık demeti yerine, kuantum Hall rejimindeki sıkıştırılamaz şeritler kullanılarak bu interferometrelerin benzerleri tasarlanabilir. MZ interferometresinin elektronik olarak gözlenmesi (Ji ve ark., 2003), kuantum Hall olayı tabanlı araçlara olan ilgiyi artırmıştır. Bu olayı takiben kuantum Hall olayı tabanlı bir AB interferometresinde AB osilasyonları deneysel olarak gözlenmiştir (Camino ve ark. 2005). Ayrıca literatürde, kuantum Hall rejiminde bu etkiyi içeren teorik çalışmalar da mevcuttur (Jain, 1988; Büttiker, 1988).

Yukarıda bahsedilen kuantum Hall olayı tabanlı araçlarda sıkıştırılabilir ve sıkıştırılamaz şeritlerin uzaysal dağılımını belirlemek için Poisson denklemini üç boyutlu çözmek gerekir. Green fonksiyonları yöntemiyle Poisson denkleminin çözümü, bir veya iki boyutta özel sınır koşulları altında son derece basit geometriler için elde edilebilir. Daha karmaşık geometriler içeren uygulamalarda, Green fonksiyonlarının kullanımı imkânsızlaşır. Böyle durumlarda Poisson denkleminin doğrudan sayısal çözümünün yapılması daha uygulanabilir bir yaklaşım olacaktır. Bu amaçla tüm sistem yeterince ayrıntılı bir örgü (mesh) ile temsil edilir ve Poisson denklemi bu örgü üzerinde uygun bir sayısal yöntem kullanılarak çözülebilir (Kavruk, 2010). Ancak böyle bir yaklaşımla, sistemin üç boyutta bir örgüye bölünmesi sonucunda, tüm hesaplamaların çok büyük sayıda nokta üzerinde yapılması gerekir ve buna bağlı olarak hesaplama süresi çok büyümektedir. Bu sebeple hesaplama süresini azaltacak yöntemlerin

kullanımı son derece önemlidir. Bu çalışmada Poisson denkleminin sayısal çözümünü hızlandırmak için ardışık durulma ve multigrid yöntemleri kullanılmıştır. Çalışmamızda KHO'nı ve bu olaya dayanan araçların teorik incelemesini yapmaya ve bunların geometrik eşdeğerlerinin öz-uyumlu simülasyonlarını elde etmeye çalıştık.

Bu doktora tezinin II. bölümünde klasik Hall olayının ne olduğu ve hangi temellere dayandığı teorik olarak anlatılmıştır. III. bölümde Kuantum Hall olayının gözlenebilmesi için gerekli olan 2BEG ve Landau seviyelerine değinilmiş ve olayı açıklayabilecek olan modeller anlatılmıştır. IV. bölümde tezimizin adını oluşturan kuantum Hall olayı tabanlı araçlar anlatılmıştır. V. bölümde bu tezde kullanılmış olan sayısal yöntemlerden bahsedilmiş, VI. bölümde ise kuantum Hall olayı tabanlı araçlarda yapılan hesaplamalar ve sonuçlar kısmı verilmiştir. Son olarak VII. bölümde ise değerlendirme ve öneriler verilmiştir

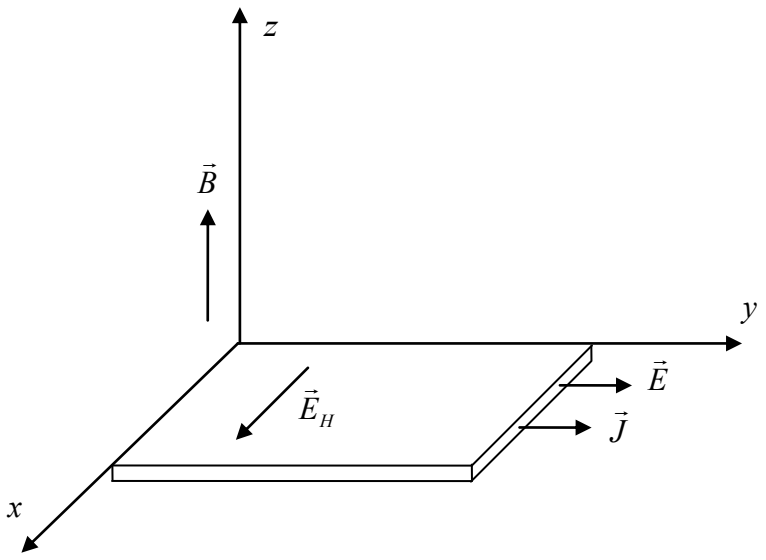
2. KLASİK HALL OLAYI

2.1. Klasik Hall Olayının Açıklanması

1879 yılında E.H. Hall'ın manyetik alan içindeki akım taşıyan bir tel için manyetik alanın, tele mi yoksa akıma mı etkidiğini gözleyebilmek amacıyla tasarladığı deneyde; bir manyetik alan içine yerleştirilen iletken bir telin her iki kenarına galvanometrenin probları bağlanmıştır. Böylelikle manyetik alan akıma etkirse, bu akımı telin bir tarafına doğru sürükleyecek ve böylece tel üzerinde enlemesine ölçülecek gerilimde bir artışa sebep olacaktır. Bu da, telin kenarlarına bağlanmış olan galvanometrede görülecek bir sapmaya sebep olacaktır.

Hall, başlangıçta deneyi gümüş bir tel ile yaparken başarısız oldu, bu nedenle hocası olan H. Rowland iletken tel yerine ince altın yapraktan oluşan bir şeritle deneyi tekrarlamasını önerdi. Deney altın şerit ile tekrarlanınca manyetik alanın etkisi sonucunda galvanometrede kalıcı bir sapma gözledi. Böylece kenarlar arasındaki enine potansiyel fark, bundan böyle Hall gerilimi olarak adlandırıldı. 1879 yılında elektron kavramı henüz yokken yapılan bu açıklama oldukça iyidir (Hall, 1879).

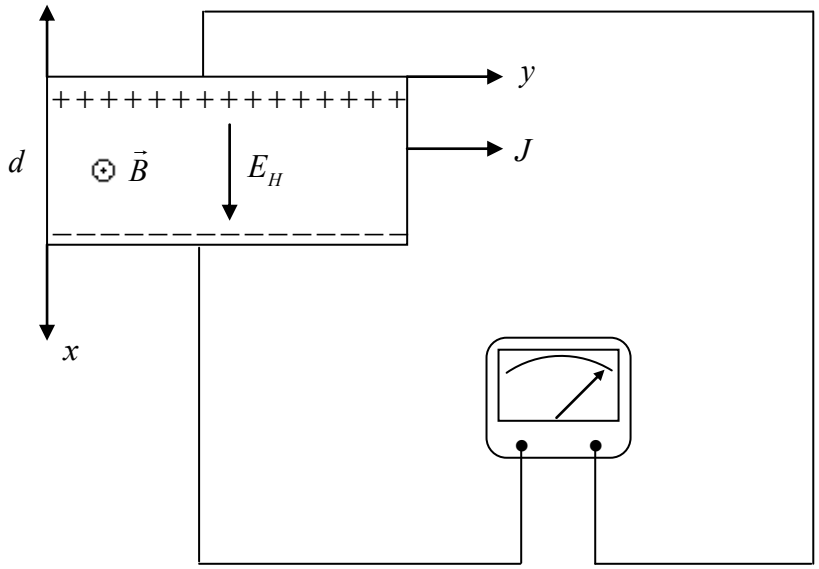
Hall olayı günümüzdeki teoriler çerçevesinde şöyle ifade edilir: İçinden *i* akımı geçen iletken bir şerit, iletken düzlemine dik z yönünde bir manyetik alan içine yerleştirildiğinde akım ve manyetik alanın her ikisine de dik doğrultuda enine bir gerilim gözlenir. Bu olaya Hall olayı, oluşan V_H gerilimine Hall gerilimi ve bu durumda enine oluşacak elektrik alanına da $\vec{E}_H$ Hall elektrik alanı denir.



Şekil 2.1. Bir manyetik alan altında içinden akım geçen iletken bir şerit

Şekil 2.1'de Hall olayı basit olarak gösterilmiştir. Burada oluşan Hall alanı $\vec{J}\times\vec{B}$ yönündedir. Şekilde akım $+y$ yönünde akarken elektronlar, $-y$ yönünde $\vec{v}$ hızı ile sürüklenirler. Manyetik alandaki yüklü parçacıklara etkiyen manyetik kuvvet $q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$ şeklindedir. Buna göre bu iletken içindeki $q=-e$ yüklü elektronlara etkiyen kuvvet

$$\vec{F}_B = q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) = -e\left(-v\hat{j}\times B\hat{k}\right) = evB\hat{i} \tag{2.1}$$



Şekil 2.2. Klasik Hall olayında iletkenin yan kenarları arasında elektrik alan oluşması

olur. Bu kuvvetin etkisiyle elektronlar $+x$ yönünde saptırılırlar. Bu sapma sonucunda iletkenin $+x$ yönünde negatif bir yüklenme olurken, $-x$ yönünde de elektron eksikliğinden dolayı pozitif bir yüklenme oluşur. Bu yüklenme sonucunda, kararlı duruma geçildiğinde iletkenin içinde $+x$ yönünde E_H elektrik alanı oluşur ve bu alan, manyetik alanın oluşturduğu kuvveti dengeleyecek büyüklükte olur. Böyle bir durum Şekil 2.2'de gösterilmiştir. Bu elektriksel kuvvet

$$\vec{F}_H = q\vec{E}_H = -eE_H\hat{i} \tag{2.2}$$

şeklindedir. Bunu büyüklük olarak manyetik kuvvete eşitlersek

$$E_H = Bv \tag{2.3}$$

şeklinde E_H elektrik alanı elde edilir ve neticesinde d genişlikli iletkende

$$V_H = E_H d = Bvd \tag{2.4}$$

olur.

Yükleri -*e* olan parçacıkların $\vec{v}$ ortalama hızı, akım yoğunluğuna

$$\vec{J} = -ne\vec{v} \tag{2.5}$$

denklemiyle bağlıdır. Burada *n*, birim hacimdeki yüklü parçacık sayısını vermektedir. Bu durumda Hall alanı

$$E_H = Bv = \left(-\frac{1}{ne}\right)JB \tag{2.6}$$

olacaktır. Buradaki $-1/ne$ katsayısına Hall katsayısı denir.

2.2. Drude Modeli

Diğer katılarda bulunmayan elektriği ve ısıyı iletme, genleşme, şekil verilebilme ve parlak yüzeye sahip olma gibi pek çok çarpıcı özellikleriyle, metaller katılar dünyasında oldukça özel bir konuma sahiptirler. Genelde karşılaşılan katıların çoğunluğu metal olmamasına rağmen katıhal fiziğinin anlaşılmasında metaller önemli bir rol oynamışlardır.

1897 yılında J. J. Thomson'un elektronu keşfi bilim dünyasında çok büyük bir etki yaptı (Thomson, 1897). Bu keşiften 3 yıl sonra 1900 yılında Paul Drude, gazların kinetik teorisini elektronları kullanarak metallerdeki iletim mekanizmasına uyarladı (Drude, 1900). Gazların kinetik teorisinde gaz molekülleri, özdeş katı küreler olarak kabul edilir ve bunlar birbirileriyle çarpışana kadar yollarında düz ilerlerler. Tek bir çarpışmada harcanan zamanın ihmal edildiği varsayılır ve her çarpışma esnasında meydana gelen kuvvetler hariç hiçbir kuvvetin parçacıklar arasında rol oynamadığı varsayılır.

Drude modeline göre metalik bir elementteki atomlar bir metal oluşturmak için bir araya getirildiğinde atomlardaki valans elektronları, diğer atomların potansiyelleri nedeniyle kopmuş hale gelir. Bu valans elektronları metal boyunca serbestçe hareket edebilirler. Bu kopmuş serbest elektronların sayısı kadar pozitif yüklü iyon oluşur. Bu modelde pozitif yüklü iyonların hareketsiz olduğu düşünülür.

Tek bir atomun çekirdeği eZ_0 yüküne sahip ise çekirdeğin çevresindeki Z_0 tane elektronun yükü $-eZ_0$'dır. Çekirdeğin biraz ilerisinde de zayıf bağlı valans elektronları *Z* tane olsun. Aradaki $Z_0 - Z$ farkına karşılık gelen elektronlar, çekirdeğe nispeten daha güçlü bağlıdır ve kor elektronları olarak bilinirler. Atomlar, metal oluşturmak için bir araya geldiklerinde kor elektronları çekirdeğe bağlı kalarak metalik iyon şekli

oluştururlar. Ancak zayıf bağlı valans elektronları ait oldukları atomdan çok uzakta gezinirler. Metalik yapıda bunlar iletim elektronları olarak adlandırılırlar. Böylece Drude, gazların kinetik teorisini "iletim elektronları gazına" uygulamıştır. Drude modelindeki temel varsayımlar şunlardır:

1. Elektronların birbirleriyle ve iyonlarla etkileşmesi ihmal edilir. Böylece dışarıdan uygulanan alanların varlığında, her elektronun hareketi Newton'un hareket kanunları ile belirlenir ancak diğer elektronlar ve iyonlar tarafından üretilen ilave karmaşık alanlar ihmal edilir.
2. Kinetik teorideki gibi Drude modelindeki çarpışmalar, bir elektronun hızını sert bir şekilde değiştiren ani olaylardır. Drude, bu çarpışmaları, elektronların içine girilemez iyon korlarından sıçraması olarak düşünmüştür.
3. Verilen bir anda rasgele seçilen bir elektron, bir çarpışmadan diğerine kadar τ süresince hareket edecektir. τ zamanı durulma (relaxation) zamanı olarak tanımlanır. Drude modelinin en basit uygulamalarında τ zamanı, bir elektronun hızından ve konumundan bağımsız alınır. Çoğu uygulama için bu oldukça iyi bir yaklaşımdır.
4. Elektronların çevreleriyle termal dengeye, sadece çarpışmalar yoluyla ulaştığı varsayılır. Her çarpışmadan sonra elektronun sahip olacağı hız, çarpışmadan önceki hızıyla ilişkili değildir. Ancak rasgele doğrultu ve hıza sahip çarpışmalar, çarpışmanın olduğu yerde etkili olan sıcaklık ile orantılıdır (Ashcroft ve Mermin, 1976).

Ohm yasasına göre bir telde akan *I* akımı, tel boyunca ölçülen *V* potansiyeli ile orantılıdır. Burada telin direnci olan *R*, telin boyutlarına bağlı iken, potansiyel fark ve akımdan bağımsızdır. Drude modeli bu davranışı hesaba katar ve telin yapıldığı metalin karakteristik bir özelliği olan ve nicel olarak ifade edilebilen özdirenç kullanılarak direncin, numune şekline olan bağımlılığı elimine edilir. Bu durumda ρ özdirenci, metalin içindeki bir noktadaki elektrik alan ve $\vec{j}$ akım yoğunluğu arasındaki orantı sabitidir, yani

$$\vec{E} = \rho \vec{j} \qquad (2.7)$$

şeklindedir. $\vec{j}$ akım yoğunluğunun büyüklüğü, $\vec{j}$ vektörüne dik birim alandan birim zamanda geçen yük miktarıdır. Böylece eğer tekdüze bir *I* akımı, *L* uzunluklu ve enine kesit alanı *A* olan bir tel boyunca akarsa akım yoğunluğu

$$j = \frac{I}{A} \tag{2.8}$$

olacaktır. Tel boyunca potansiyel fark $V=EL$ olduğundan

$$V = EL = \rho\, jL = I\rho L / A \tag{2.9}$$

elde edilir, ve böylece Ohm kanunundan

$$R = \frac{V}{I} = \rho \frac{L}{A} \tag{2.10}$$

olur.

Eğer birim hacim başına n tane elektronun hepsi $\vec{v}$ hızıyla hareket ederse, akım yoğunluğu ile hız paralel olacaktır. Dahası, bir dt zamanında elektronlar v hızıyla bir vdt mesafesi kadar ilerler ve bir A alanını geçen elektron sayısı $nvdtA$ olacaktır. Her elektron bir e yükü taşıdığından dt zamanında A yı geçen yük $-nevAdt$ olacaktır. Bu durumda akım yoğunluğu

$$\vec{j} = \frac{\vec{I}}{A} = \frac{1}{A}\left(\frac{dq}{dt}\right) = \frac{1}{A}\left(-\frac{ne\vec{v}dtA}{dt}\right) = -ne\vec{v} \tag{2.11}$$

olur.

Elektrik alanın yokluğunda elektronlar, herhangi bir yönde hareket edebilirler böylece hiç elektriksel akım yoğunluğu yoktur. Ancak bir E elektrik alanın varlığında, alana zıt yönde bir hız olacaktır.

Bir elektronun yaptığı son çarpışmadan bu yana geçen süre t olsun. Elektronun çarpışmadan hemen sonraki hızı v_0'a, çarpışmadan sonraki t süresi içinde kazanılan $-eEt/m$ hızı eklenir. Elektronun çarpışmadan sonraki hız dağılımının izotropik olduğunu varsayarsak v_0'ın ortalama hıza katkısı olmayacaktır. Ortalama hız böylece, $-eE\tau/m$ olur. τ burada ardışık çarpışmalar arasında geçen sürenin ortalaması olan durulma zamanıdır. Böylece akım yoğunluğu,

$$\vec{j} = \left(\frac{ne^2\tau}{m}\right)\vec{E} \tag{2.12}$$

olur. Özdirencin tersi iletkenlik olduğundan ($\sigma = 1/\rho$), Bu denklem

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} \tag{2.13}$$

olur ve iletkenlik

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} \tag{2.14}$$

olur.

Herhangi bir t zamanındaki ortalama hız $\vec{p}(t)/m$'dir. Burada *p*, elektron başına toplam momentumdur. Böylece akım yoğunluğu

$$\vec{j} = -ne\vec{v} = -ne\frac{\vec{p}(t)}{m} \tag{2.15}$$

olur. *t* anında elektron başına momentumun $\vec{p}(t)$ ile verildikten sonra, bir dt zaman sonraki elektron başına momentumu $\vec{p}(t+dt)$ ile hesaplayalım. Rasgele alınan bir elektronun *t* anı ile $t+dt$ anı arasında çarpışmaya uğrama olasılığı dt/τ iken çarpışmaya uğramama olasılığı $1-dt/\tau$ dur. Elektron çarpışmaya uğramasa da bir $\vec{f}(t)$ kuvvetinin etkisi altında $\vec{f}(t)dt$ momentumu kazanır. Böylece elektron başına ortalama momentum $\vec{p}(t)+\vec{f}(t)dt$ olur. $t+dt$ içindeki çarpışmaya uğramayan elektronlardan gelecek katkı,

$$\vec{p}(t+dt) = \left(1-\frac{dt}{\tau}\right)\left[\vec{p}(t)+\vec{f}(t)dt\right] = \vec{p}(t)+\vec{f}(t)dt-\left(\frac{dt}{\tau}\right)\vec{p}(t)-\frac{\vec{f}(t)}{\tau}(dt)^2 \tag{2.16}$$

olur, $\vec{p}(t)$ sola alınıp her iki taraf dt ile bölünerek $(dt)\to 0$ limitinde ortalama momentumun zamanla değişimi için

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = -\frac{\vec{p}(t)}{\tau}+\vec{f}(t) \tag{2.17}$$

denklemine ulaşırız.

2.3. Manyetik Alanda Hareket

Bir dış $\vec{E}$ elektrik alanında ve *z* yönündeki $\vec{B}$ manyetik alanında –*e* yüklü elektrona etkiyen Lorentz kuvveti,

$$\vec{F} = -e\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right) \tag{2.18}$$

şeklindedir. Drude'ye göre çarpışmalar yokken elektronların davranışını tanımlayan (2.17) denkleminden

$$\vec{f}(t) = \frac{d\vec{p}(t)}{dt}+\frac{\vec{p}(t)}{\tau} \tag{2.19}$$

olacaktır. Bu kuvveti Lorentz kuvvetine eşitlersek ve $\vec{p}=m\vec{v}$ yazarsak

$$\left(\frac{d(m\vec{v})}{dt}+\frac{1}{\tau}m\vec{v}\right) = -e\vec{E}-e\vec{v}\times\vec{B} \tag{2.20}$$

olur. Kararlı durumda akım zamandan bağımsız olur ve zamana bağlı türevler sıfır olur. Burada manyetik alanın z ekseni doğrultusunda olduğu göz önünde bulundurulursa, kararlı durum için $\vec{v}$ hızının bileşenleri

$$v_x = -\frac{e\tau}{m}E_x - \frac{e\tau}{m}v_y B$$
$$v_y = -\frac{e\tau}{m}E_y + \frac{e\tau}{m}v_x B \qquad (2.21)$$
$$v_z = -\frac{e\tau}{m}E_z$$

olur. Burada eB/m parametresi, ω_c siklotron frekansı olarak tanımlanıp E'li terimler yalnız bırakılırsa

$$v_x + \omega_c \tau v_y = -\frac{e\tau}{m}E_x \qquad (2.22)$$

$$v_y - \omega_c \tau v_x = -\frac{e\tau}{m}E_y \qquad (2.23)$$

$$v_z = -\frac{e\tau}{m}E_z \qquad (2.24)$$

ifadeleri elde edilir. (2.22) denklemini $\omega_c\tau$ ile çarpıp (2.22) ve (2.23) denklemlerini toplayalım.

$$\omega_c^2\tau^2 v_y + v_y = -\frac{e\omega_c\tau^2}{m}E_x - \frac{e\tau}{m}E_y \qquad (2.25)$$

Buradan v_y çekilerek $-ne$ ile çarpılırsa

$$-nev_y = \frac{1}{\left(1+\omega_c^2\tau^2\right)}\left[\frac{ne^2\omega_c\tau^2}{m}E_x + \frac{ne^2\tau}{m}E_y\right] \qquad (2.26)$$

elde edilir. Bu ifadenin sol tarafı, akım yoğunluğu $\vec{j}$ nin y bileşenidir ve burada $\frac{ne^2\tau}{m} = \sigma_0$ olarak tanımlandığında

$$j_y = -nev_y = \frac{\sigma_0}{\left(1+\omega_c^2\tau^2\right)}\left[\omega_c\tau E_x + E_y\right] \qquad (2.27)$$

elde edilir. Benzer şekilde (2.23) denklemini $-\omega_c\tau$ ile çarpıp (2.22) ve (2.23) ü toplarsak $\vec{j}$ nin x bileşenini elde ederiz.

$$j_x = -nev_x = \frac{\sigma_0}{\left(1+\omega_c^2\tau^2\right)}\left[E_x - \omega_c\tau E_y\right] \qquad (2.28)$$

Tensör olarak akım yoğunluğu

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \frac{\sigma_0}{\left(1+\omega_c^2\tau^2\right)} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c\tau \\ \omega_c\tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

şeklinde yazılabilir. $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ olduğundan buradaki σ ifadesi

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{\left(1+\omega_c^2\tau^2\right)} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c\tau \\ \omega_c\tau & 1 \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

şeklinde iletkenlik tensörü olarak adlandırılır. İletkenliği tensör bileşenleri cinsinden

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

şeklinde yazabiliriz. (2.30) ve (2.31) denklemlerinin karşılaştırılmasıyla

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\sigma_0}{\left(1+\omega_c^2\tau^2\right)}, \ \sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = -\frac{\sigma_0\omega_c\tau}{\left(1+\omega_c^2\tau^2\right)} \tag{2.32}$$

elde edilir. Burada σ_{xx} boyuna iletkenlik, σ_{xy} Hall iletkenliği olarak adlandırılır. Bunların yardımıyla özdirençler de bulunabilir.

Özdirenç tensörünü bileşenleri cinsinden

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

şeklinde yazabiliriz. $\sigma = \rho^{-1}$ olduğundan (2.33) matrisinin tersini alıp özdirenç bileşenlerini

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho_{xx}^2+\rho_{xy}^2} \begin{pmatrix} \rho_{xx} & -\rho_{xy} \\ \rho_{xy} & \rho_{xx} \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

şeklinde bulabiliriz. Bu ifadeden öziletkenlik ve özdirenç bileşenleri arasında

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}^2+\rho_{xy}^2} \text{ ve } \sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = -\frac{\rho_{xy}}{\rho_{xx}^2+\rho_{xy}^2} \tag{2.35}$$

bağıntıları elde edilebilir.

Benzer şekilde özdirenç, $\rho = \sigma^{-1}$ şeklinde öziletkenliğin tersi olduğundan

$$\begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma_{xx}^2+\sigma_{xy}^2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & -\sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

ifadesi bulunabilir. Buradan da özdirenç bileşenleri öziletkenlikler cinsinden

$$\rho_{xx} = \rho_{yy} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2+\sigma_{xy}^2} \text{ ve } \rho_{xy} = -\rho_{yx} = -\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2+\sigma_{xy}^2} \tag{2.37}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi varsayalım ki bir *I* akımı dikdörtgen bir numune boyunca aksın. Böyle bir yapıda akım yoğunlukları denklem (2.27) ve denklem (2.28) deki gibidir. Gerçek bir numunede akım y yönünde çubuktan çıkamayacağı için $j_y = 0$ alınır. Böylece denklem (2.27)

$$0 = \frac{\sigma_0}{\left(1+\omega_c^2\tau^2\right)}\left[\omega_c\tau\, E_x + E_y\right] \tag{2.38}$$

olur. Buradan da

$$E_y = -\omega_c\,\tau\, E_x \tag{2.39}$$

olur. Böylece *x* yönündeki akım yoğunluğu

$$j_x = \frac{\sigma_0}{\left(1+\omega_c^2\,\tau^2\right)}\left[-\frac{E_y}{\omega_c\tau} - \omega_c\tau E_y\right] = -\frac{\sigma_0}{\left(1+\omega_c^2\,\tau^2\right)}E_y\left(\frac{1}{\omega_c\tau} + \omega_c\tau\right) = -\frac{\sigma_0 E_y}{\omega_c\tau} \tag{2.40}$$

şeklinde elde edilir. (2.40) denkleminde $\omega_c = eB/m$ ve $\sigma_0 = ne^2\tau/m$ ifadeleri yerine koyulursa

$$j_x = -\frac{ne}{B}E_y \tag{2.41}$$

olur. Aynı ifade $E_y = -\omega_c\,\tau\, E_x$ için düzenlenirse

$$j_x = \frac{\sigma_0}{\left(1+\omega_c^2\,\tau^2\right)}\left[E_x - \omega_c\tau(-\omega_c\tau E_x)\right] = \frac{\sigma_0}{\left(1+\omega_c^2\,\tau^2\right)}\left(1+\omega_c^2\tau^2\right)E_x = \sigma_0 E_x \tag{2.42}$$

ifadesi bulunur.

$\vec{j} = \sigma\vec{E}$ şeklinde yazılabiliyorsa $\vec{E} = \rho\,\vec{j}$ şeklinde yazılabilir. Tensörlü olarak bu ifade

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} \tag{2.43}$$

şeklinde yazılır.

$$E_x = \rho_{xx}j_x + \rho_{xy}j_y \tag{2.44}$$

$$E_y = \rho_{yx}j_x + \rho_{yy}j_y \tag{2.45}$$

ifadelerinde $j_y = 0$ 'ı koyarsak

$$E_x = \rho_{xx}j_x \tag{2.46}$$

$$E_y = \rho_{yx}j_x \tag{2.47}$$

bulunur, Denk.(2.46)'da Denk.(2.42) kullanılırsa

$$\rho_{xx} = \frac{E_x}{j_x} = \frac{E_x}{\sigma_0 E_x} = \frac{1}{\sigma_0} = \frac{m}{ne^2\tau} \tag{2.48}$$

olur. Diğer taraftan Denk.(2.47)'de Denk.(2.41) kullanılırsa

$$\rho_{yx} = \frac{E_y}{j_x} = \frac{E_y}{-\frac{ne}{B}E_y} = -\frac{B}{ne} \tag{2.49}$$

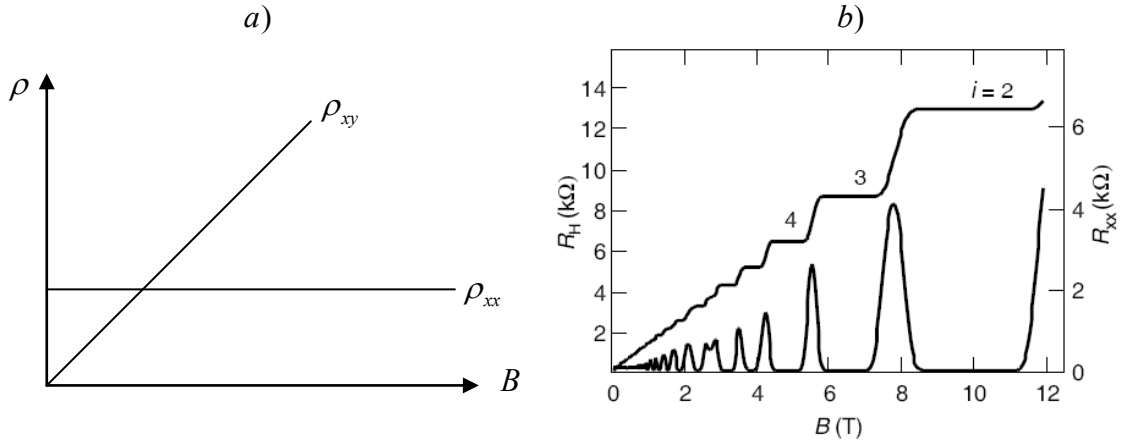
bulunur. Burada

$$\rho_{xx} = \frac{m}{ne^2\tau} \tag{2.50}$$

boyuna özdirenç görüldüğü gibi bir sabit iken

$$\rho_{xy} = -\rho_{yx} = \frac{B}{ne} \tag{2.51}$$

Hall özdirencidir. Bu ifadelerin manyetik alanla değişimi Şek.2.2 de gösterilmiştir. Buna göre Hall özdirenci olan ρ_{xy}, B manyetik alanı ile doğru orantılıdır. Deneysel olarak yüksek manyetik alan altında ve düşük sıcaklıklarda bu özdirençlerin manyetik alanla değişimi, Şekil 2.2.b'de gösterilmiştir (Jeckelmann ve Jeanneret, 2001). Denklem 2.57 ve 2.58'in öngördüğünden farklı olarak Hall direncinde basamaklı bir yapı gözlenirken, boyuna direnç basamaklara karşılık gelen bölgelerde sıfırlanıp basamak geçişlerinde maksimumlar sergilemektedir. Böyle farklı bir sonucun elde edilmesinin kuantum mekaniksel olarak açıklanması bir sonraki bölümde ele alınacaktır.



Şekil 2.2. a) Klasik Hall olayında boyuna (ρ_{xx}) ve enine özdirençlerin (ρ_{xy}) manyetik alanla değişimi. b) Bu özdirençlerin yüksek manyetik alan altında ve düşük sıcaklıklardaki değişimi (Şekil, Jeckelmann ve Jeanneret (2001)'den alıntılanmıştır.)

3. KUANTUM HALL OLAYI

3.1. Serbest Elektron Modeli

2. Bölümde ele alınan Drude modeli, katıların elektriksel davranışlarını açıklamakta birçok açıdan yetersiz kalmıştır. Bu yetersizliklerin giderilmesi için Drude modelinin kuantum fiziğiyle birleştirilmesiyle serbest elektron modeli geliştirilmiştir. Serbest elektron modelinde elektronlar, sonlu derinlikteki bir kare potansiyel içinde bağımsız olarak hareket eden parçacıklar olarak düşünülür. Bu modelde iletken içindeki elektronlar, serbest parçacıkların oluşturduğu bir gaz gibi davranır. Ayrıca elektronlar arası etkileşmeler ihmal edilir. Elektronların içinde bulunduğu kuyuyu, *xyz* koordinat sisteminde bulunan *L* kenarlı ve *V* hacimli bir küp olarak düşünelim. Üç boyutta serbest parçacıklar için Schrödinger denklemi,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(\vec{r})=\varepsilon\psi(\vec{r}) \tag{3.1}$$

olur. Her bir kenarı *L* olan bir küp içindeki elektronların dalga fonksiyonu için periyodik sınır koşulları

$$\begin{aligned}\psi(x+L,y,z)&=\psi(x,y,z)\\ \psi(x,y+L,z)&=\psi(x,y,z)\\ \psi(x,y,z+L)&=\psi(x,y,z)\end{aligned} \tag{3.2}$$

olur. Bu koşullar altında Schrödinger denkleminin çözümü

$$\psi_k(\vec{r})=\frac{1}{\sqrt{N}}e^{i\vec{k}\vec{r}} \tag{3.3}$$

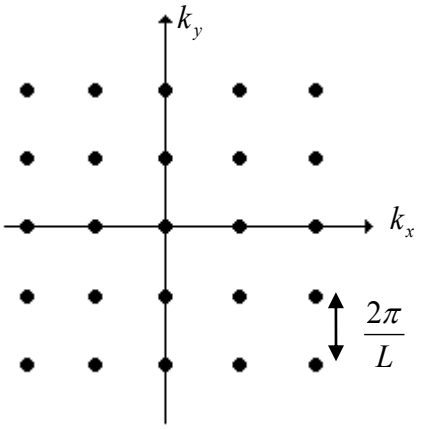
ifadesi şeklinde ilerleyen düzlem dalga yapısında olurlar. Burada $\sqrt{N}$ normalizasyon katsayısıdır ve bu dalga fonksiyonları, (3.2) denklemindeki periyodiklik koşulunu sağlamalıdır. k_x için:

$$\psi(x+L,y,z)=e^{ik_x(x+L)}\psi(y,z)=e^{ik_xL}e^{ik_xx}\psi(y,z)=e^{ik_xL}\psi(x,y,z) \tag{3.4}$$

Burada periyodiklik şartının sağlanabilmesi için $e^{ik_xL}=1$ olmalıdır. n_x bir tamsayı olmak üzere $e^{i2\pi n_x}=1$ olduğuna göre $k_xL=2\pi n_x$ olacağı kolayca görülür. Diğer bileşenler içinde benzer sonuçlar elde edilir ve n_x,n_y,n_z tamsayılar olmak üzere $\vec{k}$ dalga vektörünün bileşenleri

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L},\ k_y = \frac{2\pi n_y}{L},\ k_z = \frac{2\pi n_z}{L} \tag{3.5}$$

şeklinde verilir. $\vec{k}$ uzayındaki dalga vektörleri $2\pi / L$ ile ölçeklidir. İki boyutlu durum Şekil 3.1' de gösterilmiştir. Burada birim nokta başına hacim $(2\pi / L)^3$ ile verilir.



Şekil 3.1. İki boyutlu $\vec{k}$ uzayındaki noktalar. Burada birim nokta başına alan $(2\pi / L)^2$ dir.

Denk.(3.3) ile verilen dalga fonksiyonu

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right) \tag{3.6}$$

enerjisine ve

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} \tag{3.7}$$

momentumuna karşılık gelir. Dalga vektörünün büyüklüğü ile λ dalga boyu arasında $k = 2\pi / \lambda$ ilişkisi vardır.

Kuantum mekaniğinde $\vec{p}$ çizgisel momentumu $\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ operatörüyle ifade edilir. Denklem (3.3) teki dalga fonksiyonu, $\vec{p}$ operatörü için

$$\vec{p}\,\psi_k(\vec{r}) = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\psi_k(\vec{r}) = \hbar\vec{k}\,\psi_k(\vec{r}) \tag{3.8}$$

ifadesi yazıldığında $\hbar\vec{k}$ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon olur. Buradan da $\vec{k}$ durumundaki parçacığın hızı

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} = \frac{\hbar\vec{k}}{m} \tag{3.9}$$

olur.

Bu sistemde elektronların etkileşmediğini varsaydığımızdan *N* tane elektronu en düşük enerji seviyesinden itibaren yukarıya doğru doldururuz. Bu seviyelerin enerjileri

dalga vektörünün karesiyle doğru orantılı olduğundan N tane serbest elektronun taban durumu bir küreyle ifade edilebilir. Kürenin yüzeyindeki en üst dolu olan seviyenin enerjisi, Fermi enerjisi olarak adlandırılır ve

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} k_F^2 \tag{3.10}$$

ile gösterilir. Buradaki kürenin yarıçapı k_F ve hacmi $\frac{4}{3}\pi k_F^3$ olarak yazılır. k uzayında her $(2\pi / L)^3$ hacim elemanı içinde bir dalga vektörü yer alır. $\frac{4}{3}\pi k_F^3$ hacmi içindeki toplam durum sayısı

$$2\frac{4\pi k_F^3 / 3}{(2\pi / L)^3} = \frac{L^3}{3\pi^2} k_F^3 = N \tag{3.11}$$

olup burada 2 çarpanı, her k durumuna spin dejenerasyonu sebebiyle iki elektron yerleşebilmesinden kaynaklanır. Burada $L^3 = V$ hacim olarak tanımlanırsa (3.11) denkleminden

$$k_F = \left(\frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{1/3} \tag{3.12}$$

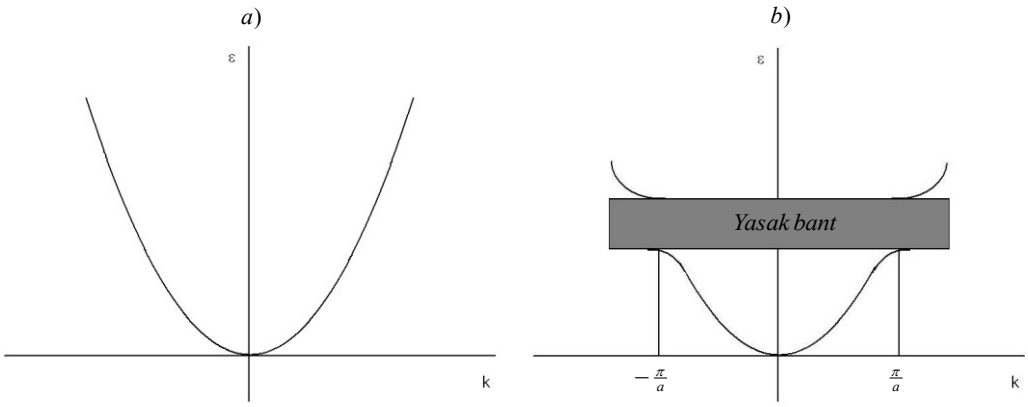
bulunur. k_F yardımıyla Fermi enerjisi

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} k_F^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{2/3} \tag{3.13}$$

şeklinde yazılabilir (Ashcroft ve Mermin, 1976; Kittel, 1996; Hook ve Hall, 2006).

3.2. Enerji Bant Modeli

Serbest elektron modelinde elektronların alabileceği enerji değerleri Denk.(3.6) ile gösterilmekte olup, serbest elektronların dalga fonksiyonları ilerleyen dalga yapısındadır. Elektronların enerjilerinin $\vec{k}$ uzayındaki grafiği Şekil 3.2.a'daki gibidir. Bu yaklaşımda elektronların, malzeme içinde tamamen serbest olduğu kabul edilir. Gerçekte elektronlar sınırlı malzeme içinde tam anlamıyla serbest değildir ve bu model metaller, yarıiletkenler ve yalıtkanlar arasındaki farkı açıklayamamaktadır. Bunların arasındaki farkı açıklayabilmek için serbest elektron modelini, kristallerdeki periyodik örgü yapısını hesaba katacak şekilde genişletmek gerekir.



Şekil 3.2. a) Serbest elektron modelinde enerjinin *k* dalga vektörüyle değişimi. b) Örgü sabiti a olan doğrusal bir örgüde enerjinin dalga vektörüyle değişimi. Şekilde gösterilen enerji aralığı $k = \pm\pi / a$ daki Bragg yansımasıyla ilişkilidir.

Atomlar ve moleküller maddeyi oluştururken özellikle kristallerde belirli bir periyodik düzene göre yerleşirler. Bu periyodik düzene *örgü* denir. Şimdi örgü sabiti a olan doğrusal bir kristali ele alalım. Bu yapıda *k* dalga vektörlü bir dalga, $(\vec{k} + \vec{G})^2 = k^2$ Bragg koşuluna göre kırılacaktır ve *k* tek boyutta

$$k = \pm\frac{1}{2}G = \pm n\pi / a \qquad (3.14)$$

haline gelir. Burada $G = 2\pi n / a$ ters örgü vektörü ve *n* bir tamsayıdır. İlk kırılma ve ilk enerji aralığı $k = \pm\pi / a$'da oluşur. *k* uzayında $-\pi / a$ ve π / a arasındaki bölgeye bu örgünün *birinci Brillouin bölgesi* denir.

Yarı serbest elektron modelinde elektronlar arası etkileşimler, tamamen ihmal edilir. Bu yaklaşım bize periyodik bir örgüdeki elektronların bir örgü ötelemesi altında değişmeyen

$$\psi_k(\vec{r}) = u_k(\vec{r})e^{i\vec{k}\vec{r}} \qquad (3.15)$$

şeklinde dalga fonksiyonlarına sahip olduğunu söyleyen Bloch teoremini kullanmamıza müsaade eder (Bloch, 1928). Burada u_k kristal örgünün periyoduna sahip bir fonksiyondur.

Şimdi tek boyutlu örgü sabiti *a* olan bir örgüde potansiyeli $U(x)$ ile gösterelim. Bu potansiyelin $U(x) = U(x + a)$ örgü öteleme işlemi altında değişmez olduğunu biliyoruz. Kristal örgü ötelemesi altında bir fonksiyon, $\vec{G}$ ters örgü vektörleri cinsinden Fourier serisine

$$U(x) = \sum_G U_G e^{iGx} \tag{3.16}$$

şeklinde açılabilir. Bu ifadeyi dalga denkleminde yerine koyarsak

$$\left(\frac{p^2}{2m} + U(x)\right)\psi(x) = \left(\frac{p^2}{2m} + \sum_G U_G e^{iGx}\right)\psi(x) = \varepsilon\psi(x) \tag{3.17}$$

ifadesi elde edilir. $\psi(x)$ dalga fonksiyonu sınır koşullarını sağlayan tüm *k* dalga sayıları üzerinden bir Fourier serisi olarak yazılabilir:

$$\psi(x) = \sum_k C(k) e^{ikx} \tag{3.18}$$

Burada *C(k)* bir katsayıdır. Bu denklemi Denk.(3.17) de yerine koyarsak

$$\frac{\hbar^2}{2m}\sum_k k^2 C(k) e^{ikx} + \sum_G \sum_k U_G e^{iGx} C(k) e^{ikx} = \varepsilon \sum_k C(k) e^{ikx} \tag{3.19}$$

ifadesine ulaşırız. Her Fourier bileşeninin katsayısı denklemin her iki tarafında da aynı olmalıdır. Burada $\lambda_k = \hbar^2 k^2 / 2m$ dersek denklem

$$(\lambda_k - \varepsilon)C(k) + \sum_G U_G C(k - G) = 0 \tag{3.20}$$

haline gelir. Burada $k + G \to G$ şeklinde periyodikliği sağladığı düşünülmüştür.

Öncelikle Denk. (3.20)' i birinci Brillouin bölgesinin sınırında yani $k = \pm\frac{1}{2}G$ de çözelim. $k = \frac{1}{2}G$ ve $\lambda_k = \hbar^2\left(\frac{1}{2}G\right)^2 / 2m$ için

$$(\lambda - \varepsilon)C(\tfrac{1}{2}G) + U\,C(-\tfrac{1}{2}G) = 0 \tag{3.21}$$

ve $k = -\frac{1}{2}G$ için

$$(\lambda - \varepsilon)C(-\tfrac{1}{2}G) + U\,C(\tfrac{1}{2}G) = 0 \tag{3.22}$$

olurlar. Bu iki denklemin çözümünün olması için katsayılar determinantı sıfır olmalıdır:

$$\begin{vmatrix} \lambda - \varepsilon & U \\ U & \lambda - \varepsilon \end{vmatrix} = 0 \tag{3.23}$$

buradan da

$$\left(\lambda - \varepsilon\right)^2 = U^2 \text{ ve } \varepsilon = \lambda \pm U = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\tfrac{1}{2}G\right)^2 \pm U \tag{3.24}$$

bulunur. Enerji iki köke sahiptir, bunlardan birisi serbest elektron enerjisinden U kadar az, diğeri de U kadar fazladır. Denklem (3.21)'den veya (3.22)'den C katsayıları oranı bulunabilir:

$$\frac{C\left(-\frac{1}{2}G\right)}{C\left(\frac{1}{2}G\right)} = \frac{\varepsilon - \lambda}{U} = \pm 1 \tag{3.25}$$

O halde $\psi(x)$'in bölge sınırında Fourier açılımının iki çözümü vardır:

$$\psi(x) = e^{iGx/2} \pm e^{-iGx/2} \tag{3.26}$$

Çözümlerden biri enerji aralığının altındaki dalga fonksiyonu, diğeri ise aralığın üstündeki dalga fonksiyonudur.

Şimdi k dalga vektörünün $\frac{1}{2}G$ bölge sınırı civarında olduğu durum için çözümü bulalım. Bu durumda dalga fonksiyonu

$$\psi(x) = C(k)e^{ikx} + C(k-G)e^{i(k-G)x} \tag{3.27}$$

alınır ve temel denklem (3.21) den iki denklem elde edilir.

$$(\lambda_k - \varepsilon)C(k) + U\,C(k-G) = 0 \tag{3.28}$$

$$(\lambda_{k-G} - \varepsilon)C(k-G) + U\,C(k) = 0 \tag{3.29}$$

Bu denklemlerin çözümünün olması için katsayılar determinantı

$$\begin{vmatrix} \lambda_k - \varepsilon & U \\ U & \lambda_{k-G} - \varepsilon \end{vmatrix} = 0 \tag{3.30}$$

şeklinde sıfır olmalıdır. Buradan da $\varepsilon^2 - \varepsilon(\lambda_{k-G} + \lambda_k) + \lambda_{k-G}\lambda_k - U^2 = 0$ olur.

Enerji denklemini iki kökü

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}(\lambda_{k-G} + \lambda_k) \pm \left[\tfrac{1}{4}(\lambda_{k-G} - \lambda_k)^2 + U^2\right]^{1/2} \tag{3.31}$$

olup her bir kök ayrı bir enerji bandını oluşturur.

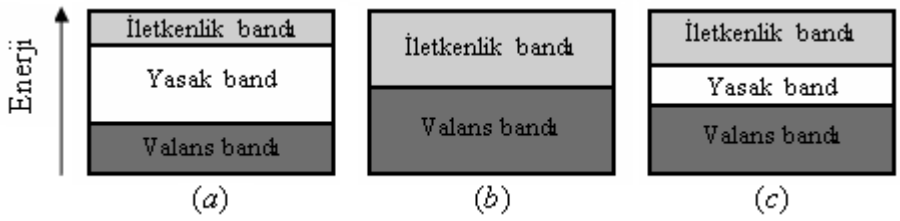
Örgü sabiti *a* olan ve çift *N* sayıda ilkel hücreden oluşan doğrusal bir örgü ele alalım. Birinci Brillouin bölgesinde *k* dalga vektörünün alabileceği değerler

$$k = 0 \;;\; \pm\frac{2\pi}{L} \;;\; \pm\frac{4\pi}{L} \;;\; \cdots;\; \frac{N\pi}{L} \tag{3.32}$$

şeklindedir. Her ilkel hücre, her enerji bandına bağımsız tek bir *k* değeri ile katkıda bulunur. Elektron spininin iki bağımsız yönde olabileceği de hesaba katılırsa, her enerji bandında 2*N* tane bağımsız yörünge bulunur. Eğer her ilkel hücrede bir valans elektronu varsa bandın yarısı elektronlarla dolu olur. Her atom banda iki valans elektronu veriyorsa bant tamamen dolu olur veya her ilkel hücrede tek valanslı iki atom bulunuyorsa bant yine tamamen doludur. Elektronlarla tamamen dolu olan en düşük enerji bandına *valans bandı* denir. Elektron bakımından boş olan en üst enerji bandına ise *iletkenlik bandı* denir. Kristal içinde valans bandıyla iletkenlik bandı arasındaki enerji bölgesinde elektronların yerleşebileceği durumlar bulunmadığından buraya *yasak enerji bandı* denir.

Valans elektronları bir veya daha çok bandı tamamen dolduruyor ve diğerlerini boş bırakıyorsa ve dolu bant ile boş bant arasında yeterince geniş bir yasak enerji bölgesi varsa, kristal yalıtkan olur. Dolu bir bant, bir sonraki boş banttan yeterli bir enerji aralığı ile ayrılmışsa dışarıdan bir elektrik alan uygulandığında elektronların geçebileceği boş enerji durumları olmadığından yapıda bir değişiklik olmaz. Şekil 3.3.a'da gösterildiği gibi yalıtkan bir kristalin geniş bir yasak enerji aralığı vardır. Yalıtkanlarda valans bandı elektronlarla tamamen dolu, iletkenlik bandı ise boştur. İletkenlik bandında taşıyıcılığı üstlenecek hiçbir elektron olmadığından üst bant elektronik iletkenliği oluşturamaz. Valans bandını tamamen dolduran elektronlar da elektriği iletemez çünkü bir elektrik alan altında elektronun alacağı enerji iletkenlik bandına geçmesine yetmez. Ayrıca her komşu seviye dolu olduğundan valans bandındaki bir elektronun elektrik alanla hızlandırılması mümkün değildir. Bundan dolayı kristal yalıtkandır.

Bir kristalde ilkel hücre başına iki valans elektronu olduğu durumda bantların birbirini örtüp örtmediğine bakmak gerekir. Bant enerjileri birbirini örtüyorsa tamamen dolu bir bant ve dolayısıyla yalıtkan oluşumu yerine kısmen dolu iki bant ve dolayısıyla metal yapı elde edilir. Metallerin atomik ve kristal yapıları, valans ve iletkenlik bandı üst üste gelecek biçimdedir. Bu durum Şekil 3.3.b de gösterilmiştir. Bir metal kristalinde yasak enerji bandı olmadığından, pek çok bağ elektronundan herhangi biri katı içinde serbestçe gezebilir ve bir elektrik alan etkisinde hareket edebilir. Bundan dolayı metaller mükemmel iletkenlerdir.



Şekil 3.3. a) Yalıtkan için, b) Metal için, c) Yarıiletken için enerji bant modelleri

Bir yarıiletkenin enerji bant modeli, yalıtkanlarınkine benzer (Şekil 3.2.c), ancak yalıtkanlara göre daha dar bir yasak enerji aralığına sahiptirler. Sıcaklık artışıyla elektronlar valans bandından iletkenlik bandına ısısal uyarma yoluyla çıkabilirler. Hem iletkenlik bandına çıkan elektronlar, hem de valans bandında oluşan elektron boşlukları elektrik iletkenliğine katılırlar. Valans bandındaki bu boş seviyelere *deşik (hole)* adı verilir. Bu boşluklar, iletkenlik bandındaki negatif yüklü elektronlara benzetilerek

pozitif yüklü taşıyıcılar olarak düşünülebilir. Metallerden daha az sayıda taşıyıcısı olduğundan yarıiletkenler, metallerden daha zayıf fakat yalıtkanlardan daha iyi iletkendirler.

Yarıiletkenler arasında daha geniş yasak enerji aralığına sahip olanlar daha çok tercih edilir. Çünkü bunlarda yüksek sıcaklıkta iletkenlik bandına çıkan elektronların sayısı küçük ve yasak enerji aralığı geniş olduğundan sıcaklıkla aygıt belirtgenlerindeki değişim daha az şiddettedir. Bu nedenle KHO'nı içeren son zamanlardaki çalışmalarda, yasak enerji aralığı 1.1 *eV* olan silisyum (Si) yerine 1.34 *eV*'luk yasak enerji aralığına sahip galyum arsenit (GaAs) daha çok kullanılır.

Bir yarıiletkenin elektriksel özellikleri yabancı ya da *safsızlık (impurity)* atomlarının kristal içine yerleştirilmesiyle belirgin bir biçimde değişir. Bu safsızlık atomlarının bağ elektronlarının, kristali oluşturan atomların sahip olduğu bağ elektronlardan fazla olduğunu düşünelim. Safsızlık atomunun fazla elektronu ısı enerjisi ile kolayca ayrılır ve iletkenlik bandında serbestçe hareket eder. Bu tür safsızlıklara *verici (donor)* denir. Kristal içinde her bir verici atom için iletkenlik bandında bir elektron bulunur ama valans bandında eşit sayıda deşik bulunmaz. Kristal, iletkenlik bandındaki elektronlar aracılığıyla elektrik akımını iletir ve böyle bir kristale negatif yüklerin akım taşıyıcısı olması nedeniyle *n-tipi yarıiletken* denir.

Benzer şekilde safsızlık atomlarının bağ elektronlarının kristali oluşturan atomların sahip olduğu bağ elektronlardan az olduğunu düşünelim. Bu durumda kristali oluşturan atomların bağ elektronları safsızlık atomuna geçer yani yabancı atom bağ elektronunu alır, bu tür safsızlıklara da *alıcı (acceptor)* adı verilir. Kristalin içindeki alıcılar valans bandında deşik yaratırlar ve her deşik üzerinde pozitif yük etkin olduğundan bir *p-tipi yarıiletken* oluştururlar.

Yasak enerji aralığından atlayarak uyarılmış duruma geçen bazı elektronlar olduğundan bir n-tipi kristalin dolu şeridinde birkaç deşik bulunur. Bağıl yoğunlukları nedeniyle bu boşluklara *azınlık taşıyıcıları* ve elektronlara da *çoğunluk taşıyıcıları* denir. Bunun aksine bir p-tipi yarıiletkende iletkenlik bandındaki elektronlar azınlık taşıyıcıları olduğundan, elektron boşlukları çoğunluk taşıyıcılarıdır. Çoğunluk taşıyıcılarının istenen yoğunluğunu oluşturmak için yarıiletkenler içine kontrollü olarak safsızlık atomlarının katılmasına *katkılama (doping)* denir.

Enerji bandındaki elektronların hareket denklemlerini elde etmek için bir dış kuvvete maruz kalan bir dalga paketinin hareketini ele alalım. Serbest elektron

modelinde elektronik dalga fonksiyonu $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ şeklindedir. Bu dalga paketinin grup hızı $\upsilon_g = d\omega/dk$ olur. Enerjisi ε olan bir dalganın frekansı $\omega = \varepsilon/\hbar$ olduğundan

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\left(\frac{\varepsilon}{\hbar}\right) = \hbar^{-1}\frac{d\varepsilon}{dk} \tag{3.33}$$

olur. Dalga momentumu ise $p = \hbar k$ olacaktır. Şimdi p 'nin zamana göre türevi alınırsa,

$$\frac{dp}{dt} = \hbar\frac{dk}{dt} = F \tag{3.34}$$

şeklinde kuvvete eşit olacaktır. Denklem (3.33) deki grup hızı ifadesinin zamana göre türevi alınırsa

$$\frac{d\upsilon_g}{dt} = \frac{1}{\hbar}\frac{d^2\varepsilon}{dkdt} = \frac{1}{\hbar}\left(\frac{d^2\varepsilon}{dk^2}\frac{dk}{dt}\right) \tag{3.35}$$

ifadesi elde edilir. Denklem (3.34)'den $dk/dt = F/\hbar$ olduğu alınırsa

$$\frac{d\upsilon_g}{dt} = \left(\frac{1}{\hbar^2}\frac{d^2\varepsilon}{dk^2}\right)F \text{ veya } F = \frac{\hbar^2}{\left(d^2\varepsilon/dk^2\right)}\frac{d\upsilon_g}{dt} \tag{3.36}$$

yazılır. Buradaki $\hbar^2/\left(d^2\varepsilon/dk^2\right)$ terimi bir kütle olarak alındığında bu ifade Newton'un ikinci yasasına benzer. O halde bu ifadeyi *etkin kütle* olarak m^* şeklinde

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar^2}\frac{d^2\varepsilon}{dk^2} \tag{3.37}$$

tanımlayabiliriz. Etkin kütle, kuantum mekaniksel sonuçları klasik hareket denklemlerine bağlayan bir parametredir. Pozitif etkin kütleli durumlar bandın dip tarafında olurlar çünkü burada band yukarı yönde eğime sahiptir. Yani $d^2\varepsilon/dk^2$ pozitif olur, negatif etkin kütleli durumlar da bandın üst tarafında bulunur, eğim negatiftir ($d^2\varepsilon/dk^2 < 0$).

Denklem (3.24) deki sonucu pozitif bir U için özetlersek, ikinci bandın (ε_c) alt kıyısına yakın bir elektronun enerjisi

$$\varepsilon = \varepsilon_c + \left(\hbar^2/2m_e\right)k^2 \tag{3.38}$$

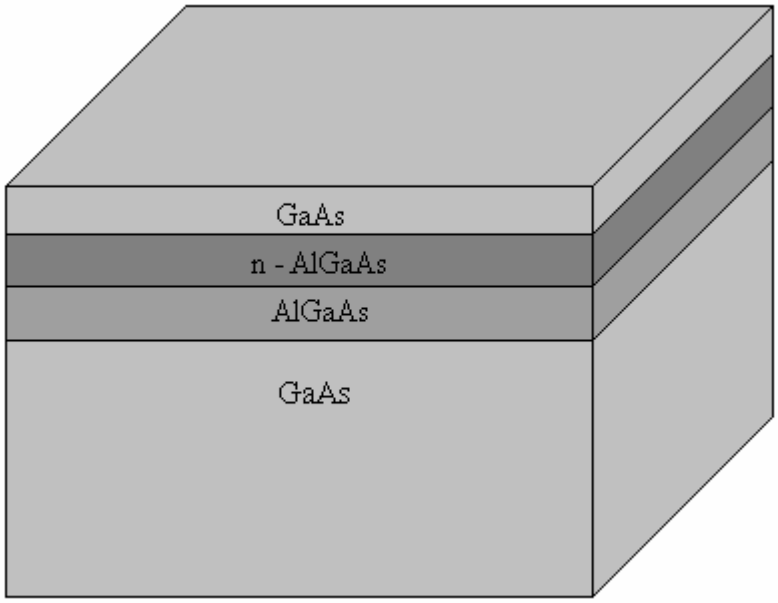
olup m_e elektronun ikinci band kıyısı yakınındaki etkin kütlesini gösterir. Birinci bandın (ε_v) üst tarafına yakın bir elektronun enerjisi ise

$$\varepsilon = \varepsilon_v - \left(\hbar^2/2m_h\right)k^2 \tag{3.39}$$

olup m_h deşiğin kütlesini gösterir ve değeri eksidir.

Kısaca özetlemek gerekirse bir kristaldeki enerji bant yapısı, elektronlar ile periyodik örgü potansiyelinin etkileşmesinden kaynaklanır. Böyle bir etkileşme Hamiltoniyende ek bir pertürbasyon terimi olarak gözükür. Hatta kristalin içinde bulunan safsızlıklarda bu etkileşmeye katılır. Böyle bir Hamiltoniyen için Schrödinger denkleminin çözümündeki enerji özdeğerinde yer alan kütle de etkin kütle olarak alınabilir. Gerçekçi yapılarda bu tür ek katkılar sadece örgü potansiyelinden veya safsızlıktan değil aynı zamanda malzemenin üstündeki kapı potansiyelinden, kenar etkilerinden ve elektronların birbirileriyle etkileşmelerinden kaynaklanır. O halde bu yaklaşıma, etkin Hamiltoniyen yaklaşımı da denebilir (Davies, 1997; Kittel, 2005; Brophy, 2000; Seeger, 2004).

3.3. İki Boyutlu Elektron Gazı

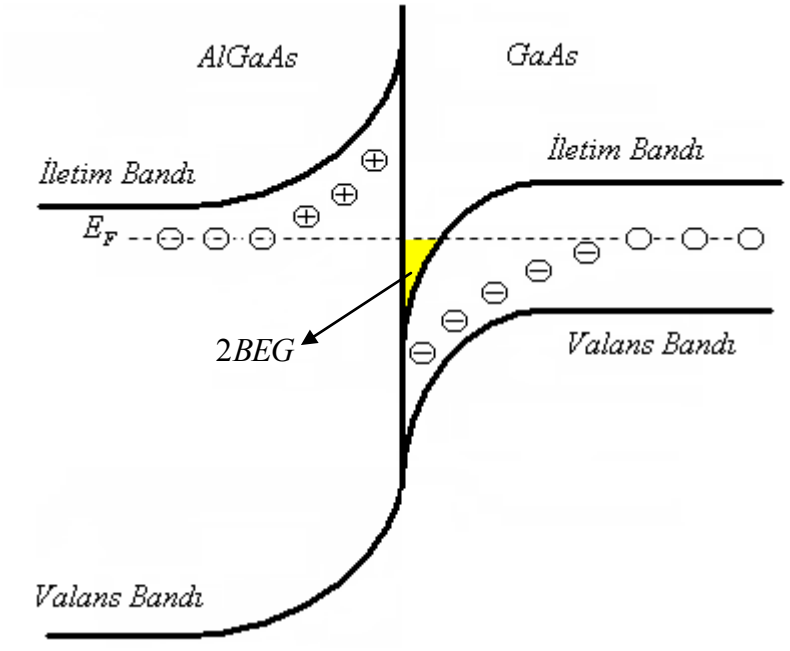


Şekil 3.4. AlGaAs/GaAs heteroyapısının üç boyutlu görünüşü

İki Boyutlu Elektron Gazı, bir heteroeklemde yasak band aralığı farklı malzemeler arasındaki arayüzeyde şekillenir. Si-MOYAET' lerde 2BEG Si/SiO_2 arayüzeyinde şekillenir diğer taraftan günümüzdeki heteroyapılarda 2BEG oluşturmak için daha çok AlGaAs/GaAs eklemi kullanılmaktadır. Kuantum Hall Olayı ilk olarak daha önce de bahsettiğimiz gibi bir Si-MOYAET'de bulunan 2BEG üzerinde gözlenmiştir (von Klitzing ve ark., 1980). Ancak günümüzde yasak enerji aralığı daha büyük olan AlGaAs/GaAs heteroyapıları kullanılmaktadır. Böylelikle kusurlardan

dolayı oluşabilecek saçılmalar en aza indirilmeye çalışılır. Biz de burada bu yapıyı ele alacağız.

Şekil 3.4'de gösterilen AlGaAs/GaAs heteroyapısında AlGaAs malzemesi *n* katkılıdır ve elektronlar iletkenlik bandında toplanırlar. *n* katkılı AlGaAs ile GaAs bir eklem oluşturmak için bir araya getirildiklerinde, *n* katkılı AlGaAs'in iletkenlik bandındaki elektronlar, daha düşük band enerjisine sahip olan GaAs'daki iletkenlik bandına geçerler. Bu esnada *n* katkılı AlGaAs'da pozitif bir verici yük tabakası oluşur. Bu da bir elektrik alana sebep olup elektronları arayüze doğru iter ve Poisson denklemine göre ikinci türevi pozitif yani yukarı doğru eğilen bir bant yapısı oluşturur. GaAs'de ise elektron fazlalığı nedeniyle negatif yük oluşur ve bu bant aşağı doğru eğilir. Elektronların transferi, her iki kısımdaki Fermi enerjileri eşitleninceye kadar devam eder. Böylece elektronlar kuyuya benzer arayüzeye sıkışırlar ve elektronların hareketi iki boyuta sınırlanır. Buradaki sınırlanmış elektronlara İki Boyutlu Elektron Gazı denir. Bu şekillenim Şekil 3.5'de gösterilmiştir. Şekil 3.4'de *n* katkılı AlGaAs ve GaAs tabakaları arasında bir ara tabaka olarak katkılanmamış AlGaAs yerleştirilmiştir. Bu, safsızlık atomlarının neden olacağı saçılmaların önüne geçer (Davies, 1997; Kittel, 1996; Jeckelman ve Jeanneret, 2001).



Şekil 3.5. AlGaAs ve GaAs arasındaki arayüz civarında şekillenen 2BEG

3.4. Landau Seviyeleri

Bir elektromanyetik alan içerisinde hareket eden $-e$ yüklü bir elektrona etkiyen kuvvet için Newton'un hareket yasası, $m\vec{v}$ momentumu cinsinden yazılırsa Lorentz denklemi

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = -e\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{3.40}$$

olur. Burada, $\vec{B}$ manyetik alanını, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ Maxwell denklemine göre

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{3.41}$$

şeklinde bir $\vec{A}$ vektör potansiyelinin rotasyoneli şeklinde yazabiliriz. II. Maxwell denklemi olan Faraday yasası ise

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{3.42}$$

şeklindedir. (3.41) ifadesini Denklem (3.42) de yerine yazarsak

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \tag{3.43}$$

elde edilir. Rotasyoneli sıfır olan bir büyüklük, skaler bir potansiyelin gradyenti olarak yazılabilir:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} V \tag{3.44}$$

Buradan da elektrik alan

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{3.45}$$

olacaktır. Bunu yukarıdaki Lorentz denkleminde yerine yazarsak

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = -e\left(-\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)\right) \tag{3.46}$$

olur. Burada $\vec{v}$ ve $\vec{A}$ gibi iki vektörün skaler çarpımının gradyentini

$$\nabla\left(\vec{v} \cdot \vec{A}\right) = \vec{v} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{A} \tag{3.47}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada eşitliğin sağındaki ilk terimi çekip Denk. (3.46)'da yerine koyarsak

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = -e\left(-\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla\left(\vec{v} \cdot \vec{A}\right) - \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{A}\right) \tag{3.48}$$

elde edilir. Burada parantez içindeki birinci ve üçüncü terimleri birlikte yazıp düzenlersek

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = e\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} + \vec{\nabla}\left(V - \vec{v}\cdot\vec{A}\right)\right) \tag{3.49}$$

denklemine ulaşırız.

$\vec{A}(\vec{r},t)$ vektör potansiyelinin tam diferansiyelini yazarsak

$$d\vec{A}(x,y,z,t) = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}dz + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}dt \tag{3.50}$$

ifadesindeki küçük değişimleri $dx = \frac{dx}{dt}dt$, $dy = \frac{dy}{dt}dt$, $dz = \frac{dz}{dt}dt$ şeklinde yazalım. Böylece

$$d\vec{A}(x,y,z,t) = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\frac{dx}{dt}dt + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\frac{dy}{dt}dt + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}\frac{dz}{dt}dt + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}dt \tag{3.51}$$

olur. Burada $\frac{dx}{dt} = v_x$, $\frac{dy}{dt} = v_y$, $\frac{dz}{dt} = v_z$ olacağından denklem (3.51)

$$d\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}v_x dt + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}v_y dt + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}v_z dt + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}dt \tag{3.52}$$

haline gelir. Her iki taraf dt ile bölünüp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{3.53}$$

ifadesine ulaşırız. Bu tam türevin tanımıdır. Burada eşitliğin sağındaki ikinci terimi çekip Denk. (3.46)'daki Lorentz kuvvetinde yerine koyarsak

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = e\left(\frac{d\vec{A}}{dt} - \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} + \vec{\nabla}\left(V - \vec{v}\cdot\vec{A}\right)\right) \tag{3.54}$$

ifadesini ve buradan da

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = e\left(\frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\nabla}\left(V - \vec{v}\cdot\vec{A}\right)\right) \tag{3.55}$$

ifadesine ulaşırız. Eşitliğin sağındaki ilk terimi sola atıp düzenlersek

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{v} - e\vec{A}\right) = -\vec{\nabla}\left(-e\left(V - \vec{v}\cdot\vec{A}\right)\right) \tag{3.56}$$

ifadesine ulaşırız. Bir parçacığın U potansiyel enerjisi ile momentumu arasındaki ilişki $\frac{d\vec{p}}{dt} = -\vec{\nabla}U$ şeklinde olduğundan (3.56) denklemindeki toplam (kanonik) momentum

$$\vec{p} = m\vec{v} - e\vec{A} \tag{3.57}$$

olur. U potansiyeli ise

$$U = -e\left(V - \vec{v}\cdot\vec{A}\right) \tag{3.58}$$

olacaktır (Griffiths, 1996). (3.57) denkleminde eşitliğin sağındaki ilk terim kinetik momentum $\vec{p}_{kin} = m\vec{v}$ olup diğeri de $\vec{p}_{alan} = -e\vec{A}$ potansiyel momentumu veya alan momentumudur. (3.57) denkleminde kinetik momentumu yalnız bırakırsak

$$m\vec{v} = \vec{p} + e\vec{A} \tag{3.59}$$

olur.

Bir elektromanyetik alan ile etkileşen $-e$ yüklü bir elektron için Hamiltoniyen, kinetik ve potansiyel enerjilerinin toplamıdır:

$$H = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mv^2 - e\phi \tag{3.60}$$

Burada ikinci terim elektrik alandan kaynaklanır, elektrik alan sıfır ise ikinci terimi almaya gerek yoktur. Böylelikle elektrik alan sıfır iken ki Hamiltoniyen, Denk. (3.59)' un kullanılmasıyla

$$H = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2m}(m\vec{v})^2 = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} + e\vec{A}\right)^2 \tag{3.61}$$

şeklinde yazılır. Schrödinger denkleminin

$$H\psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) \tag{3.62}$$

şeklinde olduğu hatırlanarak $\psi(r,t) = \psi(r)e^{-iEt/\hbar}$ yazıp gerekli işlemler yapıldıktan sonra özdeğer denklemi

$$\left[\frac{1}{2m}\left(p + e\vec{A}\right)^2\right]\psi(r) = E\psi(r) \tag{3.63}$$

olur. Burada momentum operatörü $\vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ ifadesini kullanıp parantezi açarsak

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi + \frac{\hbar e}{2mi}\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{A}\psi\right) + \frac{\hbar e}{2mi}\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\psi + \frac{e^2}{2m}\vec{A}^2\psi = E\psi \tag{3.64}$$

ifadesine ulaşırız, burada $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{A}\psi\right) = \psi\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\psi$ olduğundan

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi + \frac{\hbar e}{2mi}\psi\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{\hbar e}{mi}\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\psi + \frac{e^2}{2m}\vec{A}^2\psi = E\psi \tag{3.65}$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemin çözümü $\vec{A}$ vektör potansiyelinin seçimine bağlıdır. Vektör potansiyeli için sınırsız sayıda farklı seçim yapılabilir. Bunların her

birine ayar (gauge) denir. $\vec{A} = Bx\,\hat{j}$ veya $\vec{A} = -By\,\hat{i}$ seçilirse bu durum Landau ayarı olarak adlandırılır. Biz burada $A = Bx\,\hat{j}$ seçelim. Bu durumda *xy* düzleminde 2BEG için

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j}\right)\cdot\left(Bx\,\hat{j}\right) = 0 \tag{3.66}$$

olur ve Denk.(3.65)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi + \frac{\hbar e}{mi}\left(Bx\,\hat{j}\right)\cdot\vec{\nabla}\psi + \frac{e^2}{2m}\left(Bx\,\hat{j}\right)^2\psi = E\psi \tag{3.67}$$

haline dönüşür. Laplasyen

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{3.68}$$

ve nabla operatörü

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} \tag{3.69}$$

olduğundan Denk.(3.67)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\hbar e}{mi}Bx\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{e^2B^2}{2m}x^2\psi = E\psi \tag{3.70}$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi burada çözüm dalga fonksiyonunu $\psi(x,y) = e^{ik_y y}\phi(x)$ olarak alalım. Bunu bu şekilde yazmamızın sebebi, Hamiltoniyenin y ile komüte etmesidir. Bu ifadeyi denklemde yerine koyup gerekli düzenlemeleri yaptıktan sonra

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{\hbar^2k_y^2}{2m}\phi + \frac{\hbar e}{m}Bxk_y\phi + \frac{e^2B^2}{2m}x^2\phi = E\phi \tag{3.71}$$

denklemine ulaşırız. Burada eşitliğin solundaki ikinci terimi sağ tarafa atıp

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{\hbar e}{m}Bxk_y\phi + \frac{e^2B^2}{2m}x^2\phi = \left(E - \frac{\hbar^2k_y^2}{2m}\right)\phi \tag{3.72}$$

$E - \dfrac{\hbar^2k_y^2}{2m} = E'$ ve $eB/m = \omega_c$ kısaltmalarıyla

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega_c^2\left(x^2 + \frac{2\hbar k_y}{m\omega_c}x\right)\phi = E'\phi \tag{3.73}$$

denklemini elde ederiz. Burada

$$x^2 + \frac{2\hbar k_y}{m\omega_c}x = x^2 + \frac{2\hbar k_y}{m\omega_c}x + \frac{\hbar^2k_y^2}{m^2\omega_c^2} - \frac{\hbar^2k_y^2}{m^2\omega_c^2} = \left(x - \frac{\hbar k_y}{m\omega_c}\right)^2 - \frac{\hbar^2k_y^2}{m^2\omega_c^2} \tag{3.74}$$

ifadesini ve

$$\frac{\hbar k_y}{m\omega_c} = x_0 \tag{3.75}$$

değerini kullanırsak Denk.(3.73)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega_c^2\left[(x-x_0)^2 - x_0\right]\phi = E'\phi \tag{3.76}$$

haline dönüşür. $\frac{1}{2}m\omega_c^2 x_0\phi$ terimini sağa atıp

$$E' + \frac{1}{2}m\omega_c^2 x_0 = E'' \tag{3.77}$$

dersek

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega_c^2\left[(x-x_0)^2\right]\phi = E''\phi \tag{3.78}$$

denklemine ulaşırız. Bu denklem aslında x_0 merkezli bir harmonik osilatör denklemidir. Her iki tarafı $2/\hbar\omega_c$ ile çarparsak ve $2E''/\hbar\omega_c = \varepsilon_n$ dersek

$$-\frac{\hbar}{m\omega_c}\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{m\omega_c}{\hbar}(x-x_0)^2\phi = \varepsilon_n\phi \tag{3.79}$$

ifadesine ulaşırız. Burada $\frac{m\omega_c}{\hbar}(x-x_0)^2 = u^2$ deyip kısmi türevleri buna göre düzenlersek

$$\frac{d^2\phi}{du^2} + (\varepsilon_n - t^2)\phi = 0 \tag{3.80}$$

olacaktır. Eğer $\phi = H(u)e^{-u^2/2}$ dersek

$$\frac{d^2H}{du^2} - 2\frac{dH}{du} + (\varepsilon_n - 1)H = 0 \tag{3.81}$$

olur. Burada $\varepsilon_n - 1 = 2n$ gibi bir tamsayıya eşitse, (3.81) denklemi Hermite diferansiyel denklemidir ve H Hermite polinomudur. Buradaki ε_n den başlayarak diğer enerji ifadelerini bulalım. $\varepsilon_n = 2n+1$ ise $E'' = \hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right)$ olacaktır. Buradan da $E' = \hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}m\omega_c^2 x_0$ olacaktır ve

$$E = \hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}m\omega_c^2 x_0 + \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m} \tag{3.82}$$

elde edilir. Burada $x_0 = \hbar k_y / m\omega_c$ ifadesi yerine konursa

$$E = \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{3.83}$$

elde edilir. Burada $n = 0,1,2,3,...$ sayılarına karşılık gelen enerji seviyelerine Landau seviyeleri denir. Dalga fonksiyonu ise

$$\psi(x,y) = e^{ik_y y}\phi(x) = e^{ik_y y}H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_c}{\hbar}}(x - x_0)\right)e^{-\frac{m\omega_c}{2\hbar}(x-x_0)^2} \tag{3.84}$$

olacaktır. Burada $\omega_c = eB/m$ ifadesi yerine yazılırsa

$$\sqrt{\frac{\hbar}{eB}} = l \tag{3.85}$$

şeklinde bir büyüklük tanımlarız. Bu, manyetik uzunluk olarak adlandırılır ve buna göre dalga fonksiyonunu

$$\psi(x,y) = e^{ik_y y}H_n\left(\frac{(x - x_0)}{l}\right)e^{-\left(\frac{x-x_0}{l}\right)^2} \tag{3.86}$$

şeklinde yeniden yazabiliriz.

Landau seviyeleri ile harmonik osilatörün enerji seviyeleri birbirine oldukça benzerdir. Aradaki en önemli fark B=0 için Landau seviyelerinin sonsuz mertebeden dejenere olması yani sonsuz sayıda farklı kuantum sayısına karşılık gelen enerji özdeğerlerinin B=0 için aynı olması ve ω_c siklotron frekansının B manyetik alan şiddetine bağlı olmasıdır.

3.5. Doluluk Çarpanı

Eğer elektronlar xy düzleminde sonlu boyutlu bir $L_x L_y$ dikdörtgenine sınırlanırsa Landau seviyelerinin dejenereliği de sonlu olacaktır. Denklem (3.75)'de bulduğumuz harmonik osilatörün merkezi olan x_0 ifadesini siklotron frekansı $\omega_c = eB/m$ cinsinden yazarsak

$$x_0 = \frac{\hbar k_y}{m\omega_c} = \frac{\hbar}{eB}k_y \tag{3.87}$$

olur. İki harmonik osilatör arası mesafe

$$\Delta x_0 = \frac{\hbar}{eB}\Delta k_y \tag{3.88}$$

olacaktır.

Dalga vektörünün y yönündeki bileşeni, daha önce bulduğumuz gibi

$$k_y = \frac{2\pi}{L_y} n_y \tag{3.89}$$

şeklinde kuantumludur. Ardışık iki dalga arası mesafeye Δk_y dersek

$$\Delta k_y = \frac{2\pi}{L_y} \tag{3.90}$$

olur. Bu durumda denklem (3.88)

$$\Delta x_0 = \frac{\hbar}{eB} \Delta k_y = \frac{h}{2\pi eB} \frac{2\pi}{L_y} = \frac{h}{eBL_y} \tag{3.91}$$

olacaktır.

Şimdi L_x'in Δx_0 aralıklı N tane adımdan oluştuğunu düşünelim. Bu durumda N sayısını denklem (3.91)' i de kullanarak

$$N = \frac{L_x}{\Delta x_0} = \frac{L_x}{\frac{h}{eBL_y}} = \frac{L_x L_y}{\frac{h}{e}} B \tag{3.92}$$

ifadesine ulaşırız. $L_x L_y = A$ olduğundan bu alandan geçen manyetik akı $\Phi = BA$ olur. Ayrıca, $\frac{h}{e} = \Phi_0$ olacak şekilde manyetik akı kuantası olarak tanımlanırsa Denk. (3.92)

$$N = \frac{\Phi}{\Phi_0} \tag{3.93}$$

olur. Bu sayı numunedeki manyetik akı kuantalarının sayısına eşittir.

Şimdi, birim alan başına düşen manyetik akı kuantası sayısına n_ν dersek

$$n_\nu = \frac{N}{L_x L_y} = \frac{eB}{h} \tag{3.94}$$

olur. Toplam elektron sayısını N_{el} ile tanımlarsak birim alan başına düşen elektron sayısı, yani elektron yoğunluğu da n_e olsun:

$$n_e = \frac{N_{el}}{L_x L_y} \tag{3.95}$$

Buradan n_e'nin n_ν'ye oranı doluluk çarpanı olarak adlandırılır ve

$$\nu = \frac{n_e}{n_\nu} = \frac{n_e}{\frac{eB}{h}} = \frac{n_e \Phi_0}{B} = \frac{n_e}{B} \frac{h}{e} \tag{3.96}$$

şeklinde gösterilir. Burada $\sqrt{\hbar / eB} = l$ şeklinde manyetik uzunluk olarak tanımlanırsa doluluk çarpanı

$$\nu = 2\pi l^2 n_e \tag{3.97}$$

olur. (3.96) denklemi *i* (integer) gibi bir tamsayıya eşit iken bir Landau seviyesi tam doludur ve birim alan başına düşen elektron sayısı $n_e = in_\nu$ olur. Böylece Hall özdirenci

$$\rho_{xy} = \frac{B}{n_e e} = \frac{B}{\frac{Bei}{h} e} = \frac{h}{ie^2} \tag{3.98}$$

haline gelir. Bu olay ilk defa 1980 yılında Grenoble yüksek manyetik alan laboratuarında Alman fizikçi Klaus von Klitzing tarafından gözlenmiştir (von Klitzing ve ark., 1980). Bu buluş nedeniyle von Klitzing 1985 Nobel fizik ödülünü almıştır. Denk. (3.98)'deki

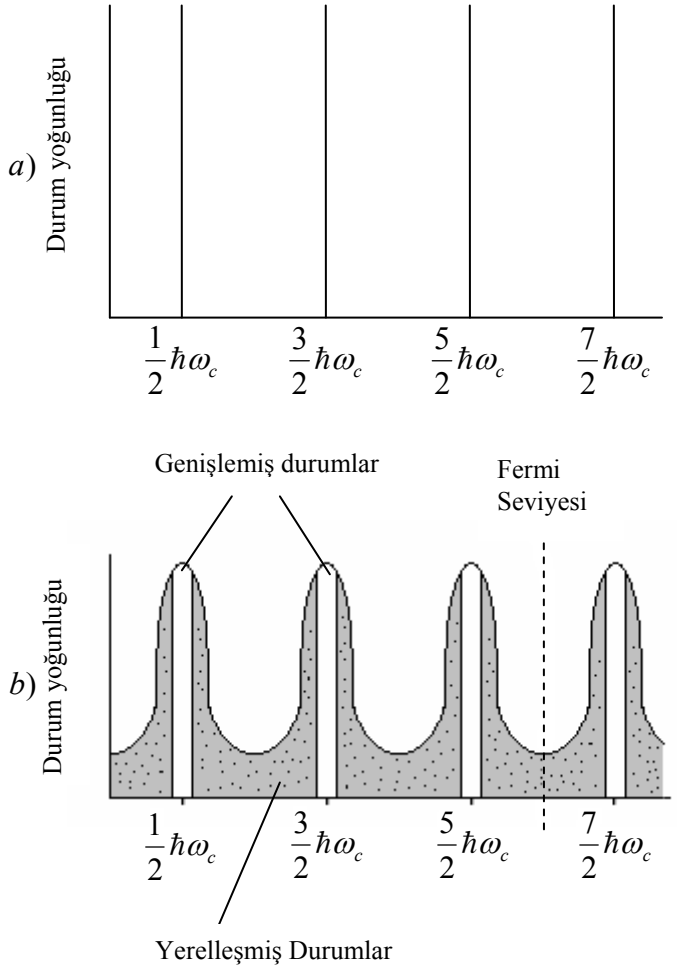
$$R_K = \frac{h}{e^2} = 25812.807\,\Omega \tag{3.99}$$

ifadesi evrensel bir sabittir ve 1990 yılından beri bir direnç standartı, von Klitzing direnci (R_K), olarak adlandırılmaktadır. Bu ölçümler, bir Si-MOYAET'de bulunan 2BEG üzerinde gözlenmiştir. Ölçümler düşük sıcaklıklarda (T=1-4 K) ve yüksek manyetik alanlarda (B=3-15 T) yapılmıştır (von Klitzing ve ark., 1980). 1982 yılında çok daha yüksek manyetik alanlarda ve daha düşük sıcaklıklarda yapılan deneyler Denk.(3.96)'daki doluluk çarpanının $\nu = p/q$ (q bir tamsayı iken p ve q göreli asal) şeklinde basit kesirli değerler için de geçerli olduğu gözlenmiştir (Tsui ve ark., 1982). Böylelikle kuantum Hall olayı, ν tamsayı iken Tamsayı Kuantum Hall olayı, ν basit bir kesir iken Kesirli Kuantum Hall olayı olarak adlandırılır.

von Klitzing'in makalesinde (1980), Hall özdirencinde *i* tamsayı değerleri için $\frac{h}{e^2}$ değerlerinin katlarında platolar gözlenir. Aynı zamanda bu bölgelerde boyuna direnç sıfır olmaktadır. Ancak von Klitzing'in bu çalışmasında platoların neden oluştuğu ve genişliği açıklanmamıştır. Platoların varlığını açıklamak için önerilen gerçek sistemlerdeki düzensizlikleri içeren bir model bir sonraki alt başlıkta incelenecektir.

3.6. Gerçek Sistemlerde Tamsayı Kuantum Hall Olayı

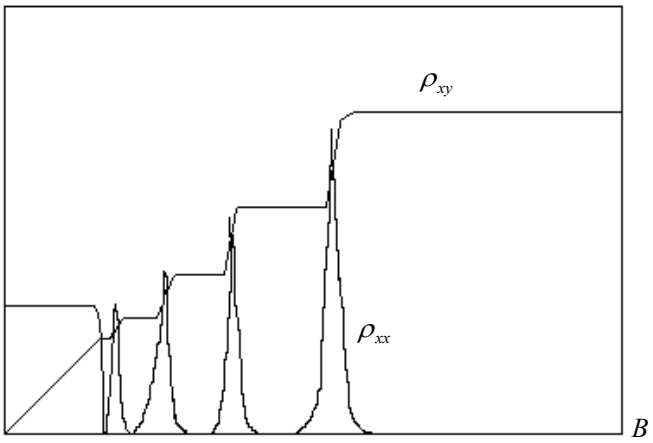
Gerçek Hall numunelerinde elektronlar, kristal bir örgüde hareket ederler. Teknolojide ulaşılan son tekniklere rağmen kusursuz bir örgü elde etmek imkânsızdır. Kristaldeki her kusur veya safsızlık, Landau seviyelerinin yerelleşmiş ve genişlemiş seviyeler diye ikiye ayrılmasına neden olacaktır. Burada yerelleşmiş durumlar enerji boyunca yayılırken genişlemiş durumlar, Landau seviyeleri etrafında toplanırlar. Böyle bir durum Şekil 3.6'da gösterilmiştir (Laughlin, 1980).



Şekil 3.6. a) Manyetik alan altındaki ideal bir 2BEG için durum yoğunluğu. b) Gerçekçi bir 2BEG içerisinde Landau seviyeleri safsızlık ve kusurlar nedeniyle yerelleşmiş ve genişlemiş durumlara ayrılır.

Elektron yoğunluğu artarken Fermi enerjisi de yukarı doğru kayacaktır. Fermi enerjisi yerelleşmenin olduğu bölgede hareket ettiği sürece Hall platoları arası bir geçiş gözlenir. Bu geçiş olurken boyuna dirençte ani bir pik gözlenir. Fermi enerjisi genişlemiş duruma ulaştığı anda boyuna direnç kaybolur. Böylelikle Hall platoları

gözlenir. Çünkü Landau seviyeleri tamsayı iken $\rho_{xy} = \frac{h}{ie^2}$ değeri sabit kalmakta ve boyuna direnç sıfıra gitmektedir (Şekil 3.7). Böylece kuantum Hall olayı, Fermi enerjisinin durum yoğunluğu boyunca hareket ederken yerelleşmiş ve yerelleşmemiş geçişlerin bir sırası olarak düşünülebilir. Ancak bu teori de yetersiz kalmıştır çünkü sisteme dışarıdan uygulanan potansiyel hesaba katılmamıştır.



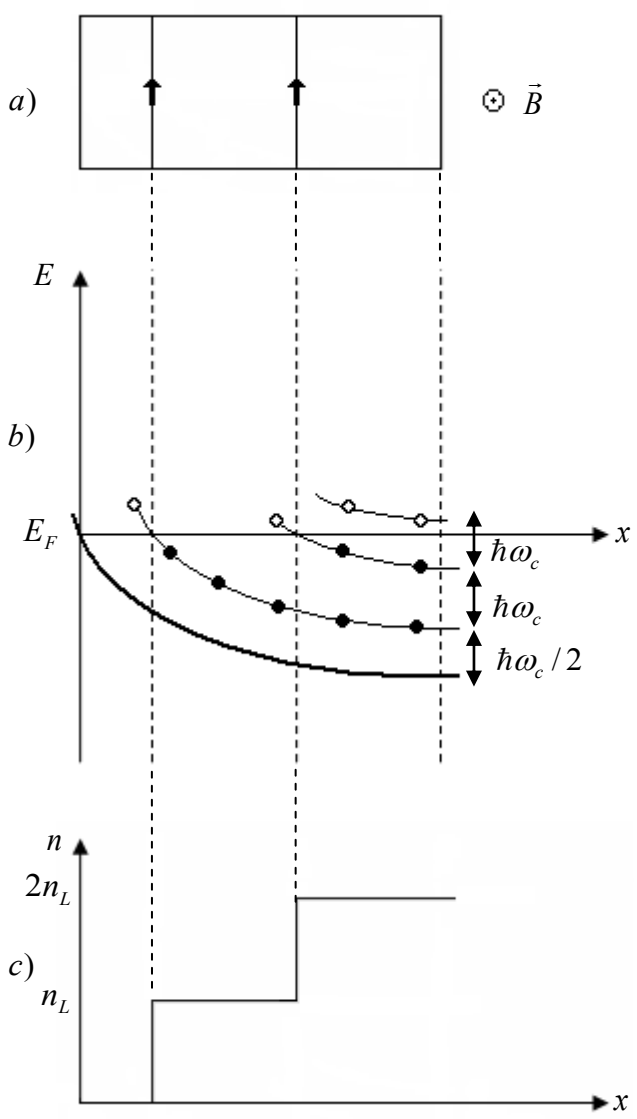
Şekil 3.7. Hall özdirenci ve boyuna özdirenç manyetik alan B'nin bir fonksiyonu olarak gösterilmiştir.

3.7. Kenar Durum Modeli

Şimdiye kadar olan modellerde ideal sistemler düşünülmüştür. Gerçekçi numunelerin kenarlarında sınırlayıcı bir potansiyel vardır. Bu sınırlayıcı potansiyel ya kapı potansiyeli ya da kimyasal kesme (etching) potansiyelidir. Böyle bir durumda Hamiltoniyen

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} + e\vec{A}\right)^2 + V(\vec{x}) \qquad (3.100)$$

olacaktır. Burada $V(\vec{x})$ gibi bir sınırlayıcı potansiyelin varlığında Landau enerji seviyeleri numunenin kenarlarına doğru eğrilir.

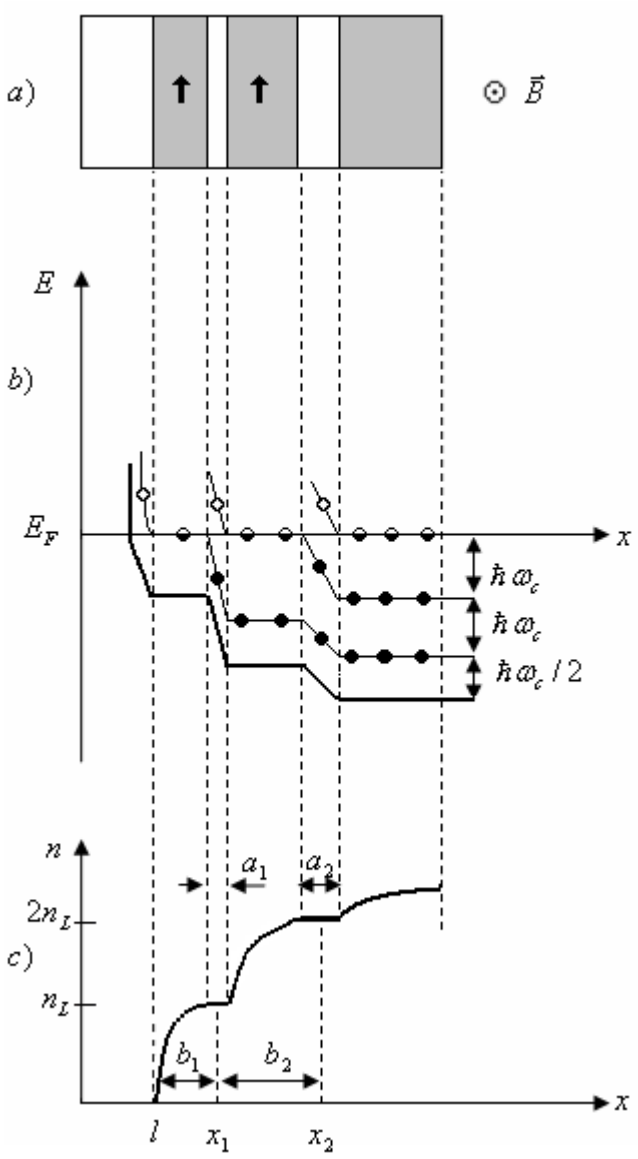


Şekil 3.8. Elektronlar arası etkileşmelerin göz önüne alınmadığı durumda a) Kenar kanallarının üstten görünüşü. b) Sınırlayıcı potansiyel Landau seviyelerini büker ve Fermi seviyesinin üstündeki seviyeler dolmaz. Buradaki halkalar ● : Dolu, ○ : Boş ve ◒ : Yarı dolu Landau seviyelerini temsil eder. c) Böyle seviyeler için oluşacak yoğunluk (Chklovskii ve ark., 1992)

Fermi enerjisiyle kesişen her Landau seviyesi için bir kenar kanalı şekillenir (Halperin, 1982). Klasik olarak bu, manyetik alandaki numunenin kenarı boyunca hareket eden bir elektronun izlediği yola karşılık gelir. Buradaki Landau seviyeleri Fermi enerjisine kadar dolacaktır. Buna göre elektron yoğunluğu çizilirse Şekil 3.8'deki gibi her kanalda sabit bir yoğunluk olacaktır.

Şekil 3.8c.'deki gibi bir yoğunluk gerçekçi değildir. Ayrıca bu model elektronların birbirileriyle etkileşmesini de hesaba katmamıştır. Elektronların birbirileriyle etkileşmesinden bir perdeleme (screening) potansiyeli oluşur. Bu potansiyelin kullanımıyla, yapıda sıkıştırılamaz ve sıkıştırılabilir şeritlerin bir

diziliminin bulunduğu fikri ortaya atılmıştır (Beenakker, 1990; Chang, 1990). Chklovskii, Shklovskii ve Glazman (CSG) sıkıştırılabilir ve sıkıştırılamaz şeritlerin genişliği ve konumu için geliştirdikleri elektrostatik modelde, problemi analitik olarak çözerek, yeni bir model önermişlerdir (Chklovskii ve ark., 1992). Bu modelde Landau seviyelerinin doluluğu için yapılan öz uyumlu hesaplamalarda Landau seviyelerinin kısmi ve tam dolu olduğu şeritler vardır. Böyle bir modeli anlatan şema, Şekil (3.9) da çizilmiştir.



Şekil 3.9. CSG modeline göre a) Kenar kanallarının üstten görünüşü. b) Perdelemenin hesaba katılmasıyla oluşan basamaklı yapı, buradaki halkalar ● : Dolu, ○ : Boş ve ⊖ : Yarı dolu Landau seviyelerini temsil eder. c) Böyle bir yapıda oluşacak elektron dağılımı. Burada l elektron dağılımının başladığı nokta, x_1 ve x_2 sıkıştırılamaz şeritlerin konumlarını, a_1 ve a_2 sıkıştırılamaz şeritlerin kalınlıklarını ve en son olarak b_1 ve b_2 de sıkıştıramaz şeritler arası uzaklığı göstermektedir. (Chklovskii ve ark., 1992)

Kenar durum modelindeki gibi Landau seviyeleri, uygulanan gerilim nedeniyle bükülürler. Elektronlar Landau seviyelerini doldururken Fermi enerjisiyle kesişirler. Bu kesişme bölgesinde bazı bölgelerin tam dolması gerekirken bazı bölgelerin kısmen dolması gerekecektir. Şimdi elektronların 1. Landau seviyesini doldurması durumunu düşünelim. Kenardan içeriye doğru giderken Landau seviyesi, Fermi enerjisiyle kesişinceye kadar bu kısma elektron yerleşemez. Fermi enerjisi Landau seviyesi ile kesiştikten sonra elektronlar Landau seviyesine karşılık gelen durumları doldurmaya başlar. Kısmen dolmaya başlayan 1. Landau seviyesinde elektronların rahat hareket etmelerine olanak sağlayan boş yerler olduğu için bu bölge tıpkı bir metal gibi davranacaktır. Bu esnada hareketli elektronlar birbirileriyle etkileşerek bir perdeleme potansiyeli oluştururlar. Bu kısmen dolması gereken yerler dolduktan sonra elektronlar, tam dolması gereken yerleri doldururlar. Tam dolu kısımdaki elektronlar hareket edemezler ve perdeleme potansiyeli oluşmaz. 1. Landau seviyesinde elektronların dolma işlemi tamamlandıktan sonra diğer Landau seviyeleri benzer şekilde doldurulmaya başlanır. Bu durumda yapı, tam ve kısmen dolu seviyelerin bir sırasına sahiptir. Tam dolu Landau seviyelerine sahip bölgelere yeni bir elektron eklenemez. Bu nedenle bu bölgeler, sıkıştırılamaz şerit olarak adlandırılır ve yalıtkan gibi davranır. Yarı dolu Landau seviyelerine sahip bölgeler ise sıkıştırılabilir şerit olarak adlandırılır ve bu kısımlara elektron eklenebilir. Bu nedenle sıkıştırılabilir şeritler, perdeleme açısından bir metal gibi davranırken, sıkıştırılamaz şeritler bir yalıtkan gibi davranır. Bunun sonucunda ilk dönemlerde sadece sıkıştırılabilir şeritlerin akım iletimine katkıda bulunduğu düşünülmüştür, ancak daha sonra özellikle boyuna direncin sıfıra düştüğü plato bölgelerinde akım iletiminin öncelikle sıkıştırılamaz şeritler üzerinden olduğu anlaşılmıştır.

Sıkıştırılabilir bölgelerde potansiyel tam olarak perdelenir ve bu sırada bir Landau seviyesi Fermi enerjisine sabitlenir. Böylece perdeleme için gereken kadar elektron bu Landau seviyesine yerleşir. Böyle bir Landau seviyesi tam dolu hale geldikten sonra, perdeleme için yeterli elektron sayısı o bölgeye yerleştirilemez ve potansiyel tekrar düşmeye başlar. Bu düşüş, bir sonraki Landau seviyesi Fermi enerjisine ulaşana kadar devam eder. CSG modeline göre perdelenmiş potansiyelin de, Landau enerji seviyelerinin de platolardan oluştuğu görülür (Şekil 3.9).

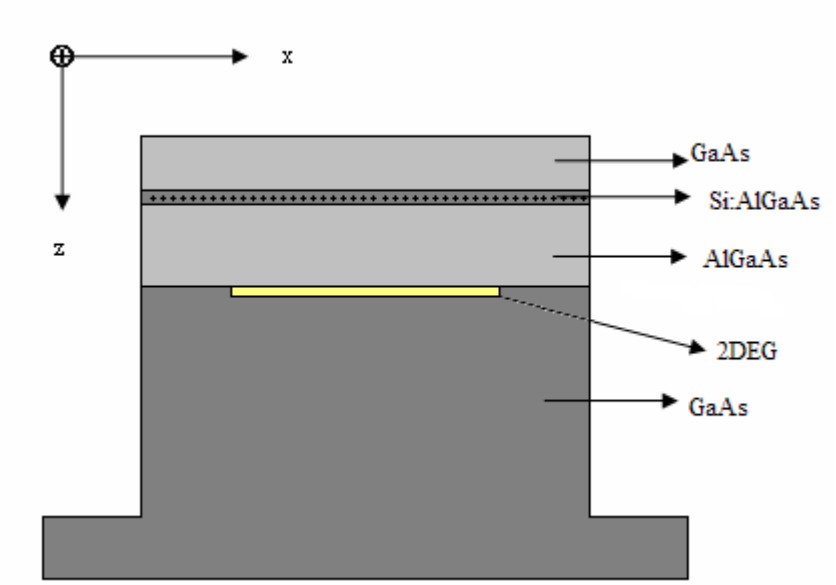
CSG modelinde elektron gazının sıkıştırılabilir şeritler içinde dış potansiyeli mükemmel bir şekilde perdelediği varsayılmıştır. Ancak bu tam olarak doğru değildir, bu noktada elektronların sistem içerisindeki davranışlarını belirleyen Schrödinger

denklemi ile sistemdeki elektrostatik potansiyeli belirleyen Poisson denklemi birlikte ele alınmalı ve her iki denklem özuyumlu bir şekilde çözülmelidir. Ancak bu şekilde tam bir çözümün elde edilmesi oldukça zordur. Bu nedenle kolaylık sağlaması için, Schrödinger denklemi yerine Thomas-Fermi yaklaşımı kullanılabilir. Böyle bir sistem için Thomas-Fermi yaklaşımı daha sonraki bölümlerde ele alınacaktır.

4. KUANTUM HALL OLAYI TABANLI ARAÇLAR

4.1. Kuantum Hall Çubuğu

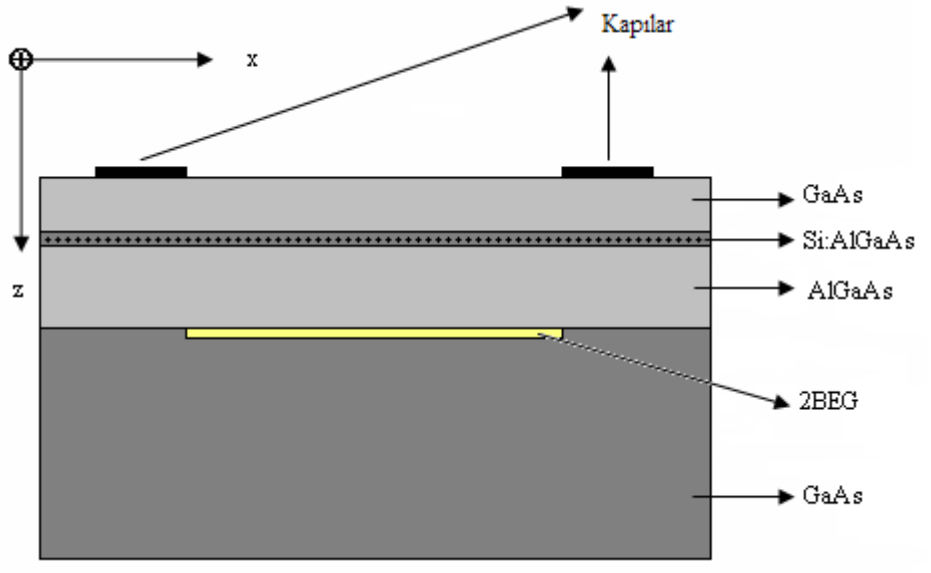
1960'lı yıllarda Si-MOYAET yapılarda 2BEG elde edilebilmekteydi. Fowler ve ark. (1966) Si-MOYAET yapıda oluşturulan bir 2BEG kullanarak düşük sıcaklık ve yüksek manyetik alan altında transport özelliklerini incelerken platolar gözlemlemiştir. Kawaji ve ark. (1978) ölçümleri geliştirerek devam ettirdi. Bu platoların h/e^2 temel değerine göre açıklanabileceği ise von Klitzing'den geldi (1980). Benzer sonuçlar AlGaAs/GaAs heteroyapısında ise Tsui ve Gossard (1981) tarafından elde edilmiştir.



Şekil 4.1. Kimyasal kesme (etching) kullanılarak elde edilmiş kuantum Hall çubuğu

Bu ölçümler kuantum Hall çubuğu olarak adlandırılan kuantum telinde yapılmıştır. Günümüzde Si-MOYAET yapı yerine daha düzgün sonuçlar elde edilebilen AlGaAs/GaAs heteroyapıları kullanılmaktadır. Bu kuantum telini oluşturabilmek için tabakalı bir yapı AlGaAs/GaAs heteroekleminde 2BEG oluşturacak şekilde yerleştirilir. Ayrıca sistemi bir çubuk şeklinde sınırlamak için kimyasal kesme (etching) veya ters beslemeli kapılar kullanılır (Davies, 1997). Bu yapıların şematik gösterimi Şekil 4.1 ve Şekil 4.2'de gösterilmiştir. Burada kullanılan tabakalar yukarıdan aşağıya şöyledir: En üstte kapak (cap) olarak kullanılan bir GaAs tabakası vardır. Onun altında silisyum katkılı bir AlGaAs tabakası vardır ve bu tabakada, verici tabakası oluşur. Bu tabakanın altında ara levha (spacer) olarak adlandırılan katkılanmamış AlGaAs tabakası vardır. Bu

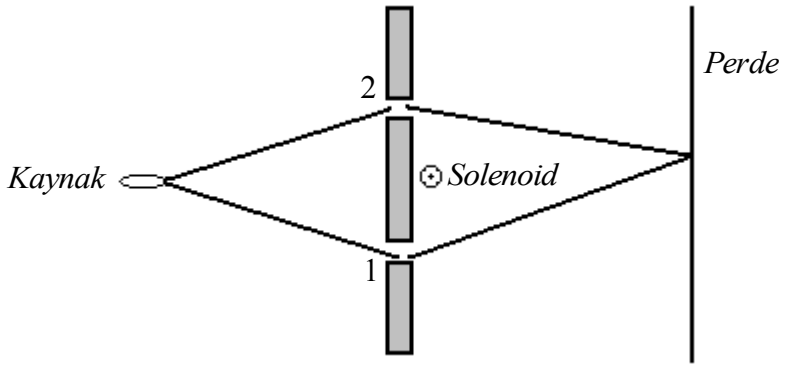
ara tabaka, donorlarla elektronlar arasında uzaysal boşluk oluşturur ve elektronların donorlardan saçılmasını önlerler. Ara levhanın altında, elektronların toplandığı GaAs tabakası vardır ve 2BEG, ara levha ile GaAs arasında oluşur. Bu yarıiletken kristallerin büyütülmesinde çoğunlukla Moleküler Demet Epitaksi (MDE) (Molecular Beam Epitaxy (MBE)) kullanılır (Cho ve Arthur, 1975). *Epitaxy* Latince bir sözcük olup "üzerinde oluşturma" gibi bir anlama sahiptir. MDE'de kaynak malzeme bir parçacık demeti oluşturmak için ısıyla buharlaştırılır. Bu parçacık demeti, çok yüksek vakum altında bu demetin yoğunlaşacağı malzemenin üzerine gönderilir. Böylelikle nispeten düzgün ve temiz heteroeklemler elde edilir.



Şekil 4.2. Kapı kullanımı ile elde edilmiş kuantum Hall çubuğu

4.2. Aharonov-Bohm İnterferometresi

Aharonov-Bohm olayı, alanların sıfır olduğu bölgede potansiyellerin kuantum mekaniksel etkiler oluşturması olayıdır (Aharonov ve Bohm, 1959). Şimdi Şekil 4.3'de şematik olarak gösterilen çift yarıklı düzeneği ele alalım. Burada elektron kaynağından çıkan elektron demeti, yarıklardan geçecek şekilde gönderilsin. İki yarık arasındaki engelin arkasına da sonsuz uzunluklu çok küçük bir solenoid sayfa düzlemine dik olarak yerleştirilsin. Buradaki düzenek, solenoidin içinde $\vec{B} = B\hat{z}$ şeklinde bir manyetik alan varken solenoidin dışında elektronların hareket ettiği bölgede manyetik alan sıfır olacak şekilde tasarlanmıştır.



Şekil 4.3. Aharonov-Bohm deney düzeneği şeması

Solenoidin içinde $\vec{B} = B\hat{z}$ şeklinde bir manyetik alan varken elektronların hareket ettiği bölgedeki m kütleli ve –*e* yüklü bir elektronun Hamiltoniyeni

$$H = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A}\right)^2 - e\phi \tag{4.1}$$

Şeklindedir. Burada $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ alınmıştır. Bu Hamiltoniyene göre Schrödinger denklemi

$$H\psi = E\psi \tag{4.2}$$

şeklindedir ve denklemin çözümü ψ'dir. Burada E enerji operatörüdür. Burada elektronların hareket ettiği bölgede manyetik alan $\vec{B} = 0$ sıfır olduğundan $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ koşuluyla A vektör potansiyeli

$$\vec{A} = \vec{\nabla} f \tag{4.3}$$

şeklinde skaler bir fonksiyonun gradyenti olarak yazılabilir.

Solenoidden akım geçmiyorken yani her yerde manyetik alan sıfırken m kütleli ve $-e$ yüklü bir elektronun Hamiltoniyeni,

$$H_0 = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\vec{\nabla}\right)^2 - e\phi \tag{4.4}$$

şeklindedir. Bu Hamiltoniyene göre Schrödinger denklemi

$$H_0\psi_0 = E\psi_0 \tag{4.5}$$

olmalıdır. Çünkü ayar dönüşümleri altında Schrödinger denklemi kuantum mekaniğinde değişmez kalır. Denklem (4.5)'in çözümü, $\psi_0(r)$ olsun. Burada (4.1) deki Hamiltoniyenin çözümü olan $\psi(r)$ ile $\psi_0(r)$ arasında

$$\psi = \exp(i\Lambda)\psi_0 \tag{4.6}$$

şeklinde bir faz çarpanı ilişkisi vardır. Schrödinger denkleminin değişmez kalması için Denk. (4.6)'daki ifadeyle (4.1) deki Hamiltoniyenin özdeğer denklemini

$$\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\vec{\nabla}+e\vec{A}\right)^2\exp(i\Lambda)\psi_0-e\phi\exp(i\Lambda)\psi_0=E\psi \tag{4.7}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada eşitliğin sol tarafındaki ilk kısmı düzenlersek

$$\left(-i\hbar\vec{\nabla}+e\vec{A}\right)^2\exp(i\Lambda)\psi_0=\left(-i\hbar\vec{\nabla}+e\vec{A}\right)\left(-i\hbar\vec{\nabla}+e\vec{A}\right)\exp(i\Lambda)\psi_0 \tag{4.8}$$

olur. Buradan da

$$\left(-i\hbar\vec{\nabla}+e\vec{A}\right)\exp(i\Lambda)\psi_0=\exp(i\Lambda)\left(\hbar\nabla\Lambda+e\vec{A}\right)\psi_0+\exp(i\Lambda)\left(-i\hbar\vec{\nabla}\right)\psi_0 \tag{4.9}$$

ifadesi elde edilir. Burada,

$$\Lambda=-\frac{e}{\hbar}f \tag{4.10}$$

seçersek ve $\vec{A}=\vec{\nabla}f$ ifadesini yerine yazarsak

$$\hbar\nabla\Lambda+e\vec{A}=-e\nabla f+e\nabla f=0 \tag{4.11}$$

olacaktır. Böylece (4.9) denklemi

$$\left(-i\hbar\vec{\nabla}+e\vec{A}\right)\exp(i\Lambda)\psi_0=\exp(i\Lambda)\left(-i\hbar\vec{\nabla}\right)\psi_0 \tag{4.12}$$

olur. Bunu (4.8) denkleminde yerine koyarsak

$$\begin{aligned}\left(-i\hbar\vec{\nabla}+e\vec{A}\right)^2\exp(i\Lambda)\psi_0&=\left(-i\hbar\vec{\nabla}+e\vec{A}\right)\exp(i\Lambda)\left(-i\hbar\vec{\nabla}\right)\psi_0\\&=\left(\exp(i\Lambda)\left(\hbar\vec{\nabla}\Lambda+eA\right)\psi_0-i\hbar\exp(i\Lambda)\vec{\nabla}\psi_0\right)\left(-i\hbar\vec{\nabla}\right)\end{aligned} \tag{4.13}$$

olur. Burada (4.11) ifadesini kullanırsak

$$\left(-i\hbar\vec{\nabla}+e\vec{A}\right)^2\exp(i\Lambda)\psi_0=\exp(i\Lambda)\left(-i\hbar\vec{\nabla}\right)^2\psi_0 \tag{4.14}$$

olur. Hamiltoniyen için böylece

$$\begin{aligned}H\psi&=\frac{1}{2m}\exp(i\Lambda)\left(-i\hbar\vec{\nabla}\right)^2\psi_0-e\phi\exp(i\Lambda)\psi_0\\&=\exp(i\Lambda)H_0\psi_0=\exp(i\Lambda)E\psi_0=E\psi\end{aligned} \tag{4.15}$$

ifadesini elde ederiz. Böylelikle ayar dönüşümünde kuantum mekaniği yasalarının değişmez kaldığı görülür.

Denklem (4.11) de $\hbar\nabla\Lambda+e\vec{A}=0$ olduğundan

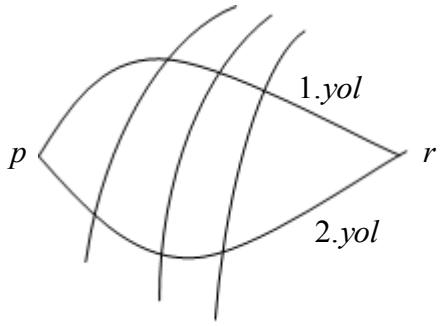
$$\Lambda=-\frac{e}{\hbar}\int\vec{A}\,d\vec{r} \tag{4.16}$$

olur. Buna göre (4.6) denklemi

$$\psi=\exp\left(-\frac{ie}{\hbar}\int\vec{A}\,d\vec{r}\right)\psi_0 \tag{4.17}$$

şeklinde yazılabilir.

Şekil 4.4'de gösterildiği gibi buradaki çizgi integralini, bir p noktasından bir r noktasına kadar solenoidi saran kapalı bir ilmek üzerinden alalım. Şekilde görülen iki yol boyunca alınan çizgi integralleri aynı değildir. Çizgi integralleri arasındaki fark, kapalı ilmek ile çevrelenmiş Φ manyetik akısına eşittir.



Şekil 4.4. 1 ve 2 yolu boyunca çizgi integralleri aynı değildir.

$$\int_1 \vec{A}\,d\vec{r} - \int_2 \vec{A}\,d\vec{r} = \oint \vec{A}\,d\vec{r} = \Phi \tag{4.18}$$

Stokes teoremine göre bir vektörün çizgi integrali, o vektörün rotasyonelinin yüzey integraline eşit olup vektör potansiyelinin rotasyoneli manyetik alanı verir.

$$\oint \vec{A}\,d\vec{r} = \iint \vec{\nabla} \times \vec{A}\,d\vec{S} = \iint \vec{B}\,d\vec{S} = \Phi \tag{4.19}$$

Şimdi tekrar düzeneğe dönersek sadece 1. yarık açıkken dalga fonksiyonu $\psi_{1,B}$ olsun. Solenoidin varlığında

$$\psi_{1,B} = \exp\left(-\frac{ie}{\hbar}\int_1 \vec{A}\,d\vec{r}\right)\psi_{1,0} \tag{4.20}$$

yazılır. Burada $\psi_{1,0}$ alan yokken ki dalga fonksiyonudur. Buradaki integral, 1 yolu boyunca kaynaktan perdeye kadardır. Benzer şekilde sadece 2. yarık açık iken dalga fonksiyonu

$$\psi_{2,B} = \exp\left(-\frac{ie}{\hbar}\int_2 \vec{A}\,d\vec{r}\right)\psi_{2,0} \tag{4.21}$$

şeklindedir. Buradaki integral de 2 yolu boyunca, kaynaktan perdeye kadardır. Perdede iki elektron demetinin üst üste geldiği durumu düşünelim. Denklem (4.20) ve 4.21'i toplarsak

$$\psi = \exp\left(-\frac{ie}{\hbar}\int_1 \vec{A}\,d\vec{r}\right)\psi_{1,0} + \exp\left(-\frac{ie}{\hbar}\int_2 \vec{A}\,d\vec{r}\right)\psi_{2,0} \tag{4.22}$$

elde ederiz. Denklem (4.18)'i burada kullanırsak

$$\begin{aligned}\psi &= \exp\left(-\frac{ie}{\hbar}\int_1 \vec{A}\,d\vec{r}\right)\psi_{1,0} + \exp\left[-\frac{ie}{\hbar}\left(-\Phi + \int_1 \vec{A}\,d\vec{r}\right)\right]\psi_{2,0} \\ &= \exp\left(-\frac{ie}{\hbar}\int_1 \vec{A}\,d\vec{r}\right)\left[\psi_{1,0} + \exp\left(+\frac{ie}{\hbar}\Phi\right)\psi_{2,0}\right]\end{aligned} \tag{4.23}$$

ifadesi elde edilir. Burada faz farkı olan $\Delta\varphi = \frac{ie}{\hbar}\Phi$ manyetik akı kuantası $\Phi_0 = \frac{h}{e}$'ye

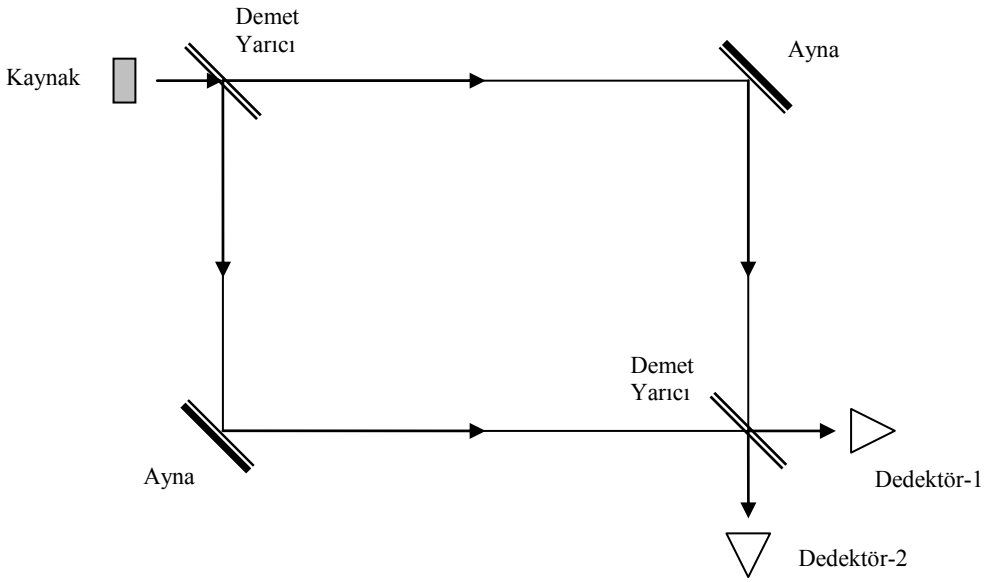
$$\Delta\varphi = \frac{ie}{\hbar}\Phi = \frac{ie}{\frac{h}{2\pi}}\Phi = \frac{2\pi i}{\frac{h}{e}}\Phi = 2\pi i\frac{\Phi}{\Phi_0} \tag{4.24}$$

şeklinde bağlıdır. Böylelikle faz farkı, çevrelenmiş akıya bağlı olan bir sabitle değişecektir. Bu olay aslında, çevrelenmiş akıya bağlı bir büyüklük ile girişim şeklinin pikini önceki merkezden kaydırma etkisidir. Y. Aharonov ve D. Bohm (1959) tarafından ortaya atılan bu teori oldukça büyük bir tartışma yaratmıştır. Olayın deneysel doğrulaması R. G. Chambers (1960) ile Tonomura ve ark.(1982,1986) tarafından yapılmıştır.

Kuantum Hall olayı tabanlı bir AB interferometresinde, kenar kanalları elektron demetleri gibi düşünülerek halka benzeri bir yapıda bu kanalların birbirileriyle girişim yaptığı düşünülebilir (Jain, 1988; Büttiker, 1988). Kuantum Hall rejiminde AB olayı üzerine pek çok teorik ve deneysel çalışma mevcuttur (Dayi ve Jellal, 2002; Ihnatsenka ve Zozoulenko, 2008[b]; Camino ve ark., 2005; Çiçek ve ark., 2010). Bu çalışmalardan en çok dikkat çekenlerden Camino ve ark. (2005)'nın yaptığı çalışma olup, yüzük şekilli bir yapıda direnç osilasyonlarını AB olayına benzeterek yorumlamışlardır.

4.3. Mach-Zehnder İnterferometresi

Mach-Zehnder (MZ) interferometresi Şekil 4.5'te de görüldüğü gibi iki adet yarı-geçirgen demet yarıcıdan ve iki adet tam yansıtıcı aynadan ibarettir (Zehnder, 1891; Mach, 1892). Kaynaktan gelen ışık demeti, yarı-geçirgen demet yarıcı tarafından iki yola ayrılır. Daha sonra her iki demet, aynalardan yansıyarak yarı-geçirgen diğer demet yarıcıda birleşirler ve girişim yaparlar. Sonra bu iki demet, detektörlere gelir. Detektörlerde gözlenecek olan saçak desenini değiştirebilmek için, optik yollar arasında bir fark oluşturmak gerekir. Bunun için demet yarıcılardan birine, hafif bir eğim verilebilir ya da demetlerden birisinin önüne, faz kaydırıcı bir obje eklenebilir.

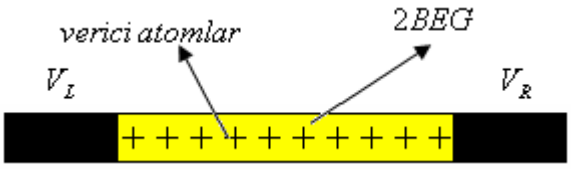


Şekil 4.5. Mach-Zehnder İnterferometresi

MZ interferometresinin elektronik benzeri, Ji ve ark. (2003) tarafından 2BEG kullanılarak yapılmıştır. Bu çalışmada gerçek optiksel MZ interferometresinde kullanılan ışık demeti yerine kuantum Hall rejiminde 2BEG içerisinde oluşacak olan kenar kanalları kullanılmış ve elektronların girişimi gözlenmiştir. Kenar kanallarının, dolayısıyla sıkıştırılamaz şeritlerin öz-uyumlu hesaplamaları, Thomas-Fermi yaklaşımı altında yapılarak (Siddiki ve Marquart, 2007; Kavruk, 2010; Siddiki ve ark., 2008,) olayın kuantum Hall rejimindeki resmi, ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

5. SİSTEMİN ELEKTROSTATİĞİ VE SAYISAL YÖNTEMLER

Kuantum Hall olayıyla başlayan deneysel çalışmalar sonrasında daha önce değindiğimiz gibi olay, sıkıştırılabilir ve sıkıştırılamaz şeritlerin fiziğine ulaşmıştır. Chklovskii ve ark.(1992)'nın önerdiği gibi bu şeritlerin genişliği ve konumu, doluluk çarpanına başka bir deyişle yük yoğunluğuna bağlıdır. Bu durumda Poisson denkleminin çözümü oldukça önemli hale gelir. Poisson denkleminin çözümü için yapılan ilk teorik çalışmalarda, problemi daha basit ve anlaşılır kılmak için tüm yüklerin ve yapıların aynı düzlem içinde bulunduğu yaklaşımı kullanılmıştır (Glazman ve Larkin, 1991; Chklovskii ve ark., 1992; Chklovskii ve ark., 1993). Bu yaklaşımda Şek.5.1 de görüldüğü gibi kuantum Hall çubuğundaki 2BEG, kapılar ve donorların aynı düzlemde olduğu varsayılmıştır. Ayrıca bu yaklaşımda, akım yönünde yük dağılımının ötelenmesi değişmez seçilmiş, böylelikle problem etkin olarak bir boyutlu elektrostatik probleme indirgenmiştir.



Şekil 5.1. Verici atomlar, kapılar ve 2BEG düzlem yaklaşımında hepsi aynı düzlemdedir. Sarı çizgi 2BEG, + işaretleri verici atomları ve siyah kısımlar kuantum Hall çubuğunun üzerinde bulunan sol ve kapıları temsil etmektedir. V_L ve V_R sırasıyla sol ve sağ kapılara uygulanan gerilimlerdir.

Poisson denkleminin çözümünde sınır koşulları oldukça önemlidir. Sayısal hesaplamalarda sınır koşulunu periyodik olarak almak işlemleri kolaylaştırır. Ancak periyodik bir yapıda çözümü yapılacak sistemin de simetrik olması gerekir. Periyodik sınır koşullarının kullanımıyla düzlem yaklaşımının öz-uyumlu genelleştirilmeleri Gerhardts ve arkadaşları tarafından Thomas-Fermi ve Hartree yaklaşımlarıyla yapılmıştır (Lier ve Gerhardts, 1994; Oh ve Gerhardts, 1997; Güven ve Gerhardts, 2003; Siddiki ve Gerhardts, 2003; Siddiki ve Gerhardts, 2004).

Düzlem yükler yaklaşımı her ne kadar makul sonuçlar verse de, problemin daha gerçekçi bir analizi için yapının üç boyutlu olduğunun göz önünde bulundurulması gerekir. Özellikle bu çalışmada ele alınan AB ve MZ interferometreleri gibi aygıtlar için problemin üç boyutlu olarak ele alınması kaçınılmazdır. Davies ve ark. (1994,1995)

tarafından yapının üst yüzeyinde sınır koşulu olarak kapıların bulunduğu bölgelerde gerilim kapı gerilimine eşit, diğer her yerde sıfır alınarak belirli bir derinlikteki potansiyel analitik bir biçimde ifade edilmiştir. Yarıiletken aygıtlarda yapının üç boyutlu olduğunun göz önünde bulundurulduğu bu çalışmada, Davies ve arkadaşları yüzeydeki kapılar nedeniyle 2BEG üzerinde oluşan potansiyelin, 2BEG içerisindeki elektronik dağılımdan bağımsız olduğunu varsaymıştır. Davies ve ark. (1994,1995) tarafından verilen kapıların 2BEG üzerinde oluşturacağı potansiyelin analitik ifadesinin kullanıldığı birçok teorik çalışma literatürde mevcuttur (Ihnatsenka ve Zozoulenko, 2006; Ihnatsenka ve Zozoulenko, 2007[b]; Siddiki ve Marquart, 2007; Siddiki ve ark., 2008). Ancak bu potansiyel ifadesi, sistemdeki yükler (yani donorlar ve 2BEG) arasındaki etkileşmeleri ve bu yüklerin kapılar üzerindeki etkisini içermez. Bazı çalışmalarda yapı içindeki yük dağılımındaki değişmeler nedeniyle, kapılarda oluşacak etki tamamen ihmal edilmiştir (Siddiki ve Marquart, 2007; Siddiki ve ark., 2008) . Diğer taraftan eğer kapılar sadece yüzeye yerleştirilir ve yapının tüm yüzeyi iliştirilmiş yüzey yaklaşımındaki gibi kapılarla kaplandığı varsayılırsa, bazı yazarların yaptığı gibi (Ihnatsenka ve Zozoulenko, 2006; Ihnatsenka ve Zozoulenko, 2007[b]) bu etkileri düşünmek için ayna yük tekniği kullanılabilir.

Şimdiye kadar yapılan teorik çalışmalarda, Poisson denklemini çözmek için ağırlıklı olarak Green fonksiyonları kullanılmıştır. Bir veya iki boyutlu Poisson denkleminin çözümü basit geometriler için Green fonksiyonları kullanılarak elde edilebilir. Ancak gerçek üç boyutlu sistemlerde ve daha karmaşık geometrilerde Green fonksiyonlarının elde edilmesi ve Poisson denkleminin sayısal çözümü için kullanımı pratik olarak neredeyse imkânsızdır. Böyle durumlarda Poisson denkleminin doğrudan sayısal çözümünün yapılması daha uygulanabilir bir yaklaşım olacaktır. Bu amaçla tüm sistem yeterince ayrıntılı bir örgü (mesh) ile temsil edilebilir ve Poisson denklemi bu örgü üzerinde uygun bir sayısal yöntem kullanılarak çözülebilir. Sonlu farklar yaklaşımı kullanıldığında Poisson denklemi, bir matris denklemine dönüşür. Böyle bir matris denkleminin çözümü için literatürde yoğun olarak kullanılan sayısal yöntemlerden birisi de iyi bilinen Ardışık Aşırı Durulma (AAD) (Successive Over Relaxation (SOR)) yöntemidir.

Bu yaklaşımla Poisson denkleminin çözümünde sınır koşullarının, uygun bir şekilde verilmesi gerekir. Göz önüne alınan yapının yüzeylerindeki potansiyelin bilinmesi halinde sınır koşulları, yüzeydeki gerilimlerle belirlenir. Ancak birçok gerçek yapıda yüzeylerdeki potansiyel bilinmemekte, serbest bir şekilde sistemin elektrostatiği

tarafından belirlenmektedir. Literatürdeki çalışmalardan Weichselbaum ve Ulloa (2003)'nın yaptığı, belirli bir yükten potansiyele AAD yöntemiyle ulaşarak yaptığı çözüm dikkat çekicidir. Böylelikle kenarları açık bir sistemde dahi potansiyel elde edilebilir. Weichselbaum ve Ulloa (2003)'nın yaklaşımıyla bir Kuantum Hall çubuğunda Poisson denkleminin çözümü Arslan ve ark. (2008) tarafından kullanılmıştır. Ancak bu çalışmada Poisson denklemini sadece B=0 durumu için çözmüşler ve aynı sınırlayıcı potansiyeli sonlu B durumu içinde kullanmışlardır. Bu durumda yaklaşımları tam olarak öz uyumlu olmamaktadır.

Davies'in analitik ifadelerini veya Green fonksiyonlarını kullanmadan, Poisson denklemi için doğrudan sayısal bir çözüm Kavruk (2010) tarafından AAD yöntemi kullanılarak yapılmıştır. Bu çalışmada üç boyutta öz-uyumlu bir çözüm elde etmek için sistem, bir örgü ile temsil edilir ve her bir iterasyon adımında bu öz-uyumlu hesap tekrarlanarak, çözüm adım adım elde edilir. Ancak böyle bir yaklaşımla sistemin üç boyutta bir örgüye bölünmesi sonucunda hesaplamaların, çok büyük sayıda nokta üzerinde yapılması gerekir ve bunun sonucunda, hesaplama süresi çok büyümektedir. AB interferometresi gibi yapıların farklı koşullar altındaki davranışının incelenebilmesi için bu denklemlerin, yüzlerce farklı parametre seti için çözülmesi gerekebilir. Bu sebeple hesaplama süresini azaltacak yöntemlerin kullanımı son derece önemlidir. Bu tez çalışması ile Poisson denkleminin sayısal çözümünü hızlandırmak üzere multigrid yöntemi kullanılmıştır. Multigrid yöntemi, temel olarak kabadan inceye doğru farklı inceliğe sahip örgülerin yinelemeli olarak hesaba katılması şeklinde özetlenebilir. Böylece AB interferometresi ve benzeri yapılarda birçok farklı parametre için hesaplama yapılması ve sonuçların literatürdeki deneysel çalışmalarla karşılaştırılması olanağı elde edilmiştir.

Hesaplamaların bir diğer ayağı olan elektron yoğunluğu ise Thomas-Fermi yöntemiyle elde edilir. Bu yöntem oldukça iyi bilinen bir yöntemdir. Thomas-Fermi yöntemi, çok elektronlu sistemlerde elektron yoğunluğunu bulmak için kullanılır ve KHO'nı içeren hesaplamalarda çokça kullanılan bir yöntemdir (Lier ve Gerhardts, 1994; Oh ve Gerhardts, 1997; Güven ve Gerhardts, 2003; Siddiki ve Gerhardts, 2003).

Bu bölümde önce Thomas-Fermi yaklaşımı, ardından çiftlenmiş Thomas-Fermi ve Poisson denklemlerinin çözümü için kullanılacak olan algoritma sunulacaktır. Daha sonra bu denklemlerin sayısal çözümünde kullanılan AAD ve multigrid yöntemleri ayrıntılı olarak incelenecektir.

5.1. Thomas-Fermi Yaklaşımı

Thomas-Fermi (TF) yaklaşımı, çok sayıda elektrona sahip kompleks atomların (veya iyonların) taban durumu için Thomas ve Fermi tarafından ayrı ayrı geliştirilen istatistiksel ve yarı klasik incelemeleri içeren bir kuramdır. Sistemin N tane elektronu, bir $V(r)$ potansiyeli tarafından uzayın bir bölgesine hapsedilmiş taban durumundaki bir Fermi elektron gazı gibi ele alınır.

TF yaklaşımının amacı, $V(r)$ potansiyelini ve $n_{el}(r)$ elektron yoğunluğunu hesaplayan bir yöntem elde etmektir. TF yaklaşımında elektron yoğunluğu yani elektronların dağılımı

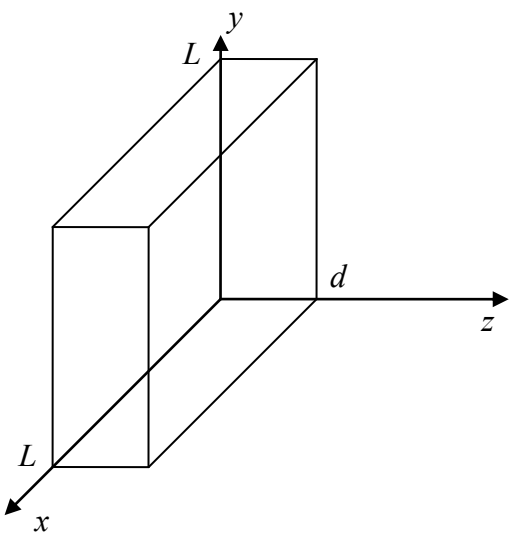
$$n_{el}(\vec{r}) = \int dE\, D(E)\, f\left[\left(E + V(\vec{r}) - \mu\right)/ k_B T\right] \tag{5.1}$$

denklemi ile verilir. Burada $D(E)$ durum yoğunluğu, $V(\vec{r})$ elektrostatik potansiyel ve $f\left[\left(E + V(r) - \mu\right)/ k_B T\right]$ Fermi fonksiyonudur. Bu fonksiyon

$$f\left[\left(E + V(r) - \mu\right)/ k_B T\right] = \frac{1}{1 + e^{\left(E + V(r) - \mu\right)/ k_B T}} \tag{5.2}$$

ile ifade edilir. Burada μ kimyasal potansiyel, k_B Boltzmann sabiti ve T de sıcaklıktır.

TF yaklaşımındaki en önemli parametrelerden birisi de $D(E)$ durum yoğunluğudur. 2BEG ile ilgilendiğimizden iki boyutlu durum yoğunluğunu çıkartalım. Böyle bir yapıda elektronların heteroyapıdaki arayüzde x ve y kenarları L olan z yönünde de d kalınlığı bulunan bir potansiyel kuyusuna hapsolduğunu düşünelim. Böyle bir yapı Şekil 5.2'de gösterilmiştir.



Şekil 5.2. 2BEG için düşünülmüş olan potansiyel kuyusu

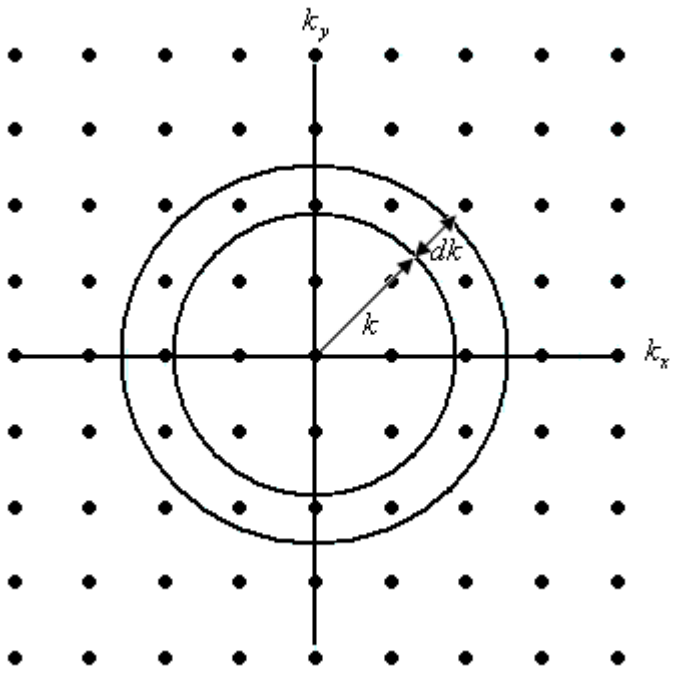
Böyle bir geometri için sınır koşulları

$$V(x,y,z)=\begin{cases}\infty & z<0,\ z>d\\ 0 & 0<z<d\end{cases} \tag{5.3}$$

şeklindedir. Bu durumda etkileşmeyen elektronlar için Schrödinger denkleminin çözümü, x ve y yönlerinde ilerleyen dalga formunda iken z yönünde duran dalga olacaktır. Böyle bir çözüm 2. bölümde verilmiş olup x ve y yönleri için k dalga sayıları

$$k_x=\frac{2\pi n_x}{L}, k_y=\frac{2\pi n_y}{L} \tag{5.4}$$

şeklindedir. Buradaki n_x ve n_y tamsayılardır. Kenarı L olan kuyu içindeki enerji düzeyleri arası uzaklıkların çok küçük olması nedeniyle, enerji düzeylerinin sürekliymiş gibi göz önüne alınması iyi bir yaklaşımdır. Bu durumda birim enerji aralığı başına elektronların kuantum durumlarının sayısı, $D(E)$ durum yoğunluğu olur. $D(E)$'yi bulmak için k uzayını düşünelim. 2 boyutlu k uzayında izinli değerleri çizelim (Şekil 5.3). Burada durumlar, kenarı $2\pi/L$ olan basit küresel örgüye yerleşmiştir.



Şekil 5.3. İki boyutlu k uzayında yarıçapları k ve $k+dk$ olan daireler

Her k durumu başına düşen k uzayı alanı $(2\pi/L)^2$ dir. k vektörünün büyüklüğü $k=\left(k_x^2+k_y^2\right)^{1/2}$ şeklindedir. Yarıçapları k ve $k+dk$ olan daireler arasında k uzayında $2\pi k\,dk$'lık bir alandaki girilebilir durumların sayısı

$$D(k)dk = \frac{2\pi k}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2} dk = \frac{L^2 k}{2\pi} dk \tag{5.5}$$

şeklindedir. Birim alanda ($L^2 = 1$) birim enerji bölgesi $D(E)$ içindeki durumların yoğunluğunu elde etmek için $D(E)dE = 2D(k)dk$ alalım, buradaki 2 çarpanı spinden kaynaklanmaktadır. Buna göre

$$D(E) = 2D(k)\frac{dk}{dE} \tag{5.6}$$

yazılabilir. Enerji özdeğeri $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ olduğundan $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ ve buradan da

$$\frac{dk}{dE} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\frac{1}{2}E^{-1/2} \tag{5.7}$$

yazılır. Bu durumda

$$D(E) = 2\frac{k}{2\pi}\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\frac{1}{2}E^{-1/2} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}E^{1/2}\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\frac{1}{2}E^{-1/2} = \frac{m}{\pi\hbar^2} \tag{5.8}$$

olur. Bu ifade enerjiden bağımsız bir sabittir ve D_0 olarak adlandırılabilir.

Şimdi TF yaklaşımındaki elektron dağılımının sıcaklık ve manyetik alanla nasıl değiştiğine bakalım. Fermi fonksiyonu $f\left[\left(E + V(r) - \mu\right)/k_B T\right] = \frac{1}{1 + e^{(E+V(r)-\mu)/k_B T}}$ şeklinde idi. Burada T=0 ve B=0 için

$$e^{(E+V(\vec{r})-\mu)/k_B T} \to \begin{cases} \infty & E > \mu - V(\vec{r}) \\ 0 & E \le \mu - V(\vec{r}) \end{cases} \tag{5.9}$$

olur. Bu durumda Fermi dağılım fonksiyonu

$$f\left[\left(E + V(\vec{r}) - \mu\right)/k_B T\right] = \begin{cases} 0 & E > \mu - V(\vec{r}) \\ 1 & E \le \mu - V(\vec{r}) \end{cases} = \Theta\left(E - \left(\mu - V(\vec{r})\right)\right) \tag{5.10}$$

şeklinde bir basamak fonksiyonu olur. Bu ifadeyi ve durum yoğunluğunu (5.1) denklemindeki elektron dağılımında yerine koyarsak

$$n_{el}(\vec{r}) = \int dE\, D(E)\, f\left[\left(E + V(\vec{r}) - \mu\right)/k_B T\right] = \int dE \frac{m}{\hbar^2 \pi}\Theta\left(E - \left(\mu - V(\vec{r})\right)\right) \tag{5.11}$$

olur. Bir basamak fonksiyonunun integrali

$$\int_0^\infty dx\, f(x)\,\Theta(y - x) = \int_0^y dx\, f(x) \quad (y > x \ \ ise) \tag{5.12}$$

şeklindedir. Böylelikle (5.11) denklemi

$$n_{el} = \frac{m}{\hbar^2 \pi} \int_0^{\mu - V(r)} dE = \frac{m}{\hbar^2 \pi} \left(\mu - V(r) \right) \tag{5.13}$$

olacaktır.

$T \neq 0$ ve $B = 0$ için TF yaklaşımına göre elektron dağılımının nasıl olacağına bakalım. (5.2) denklemindeki Fermi fonksiyonunda pay ve paydayı $e^{-[(E+V(r)-\mu)/k_B T]}$ ile çarpalım. Böylece

$$f\left[\left(E + V(r) - \mu \right) / k_B T \right] = \frac{e^{-[(E+V(r)-\mu)/k_B T]}}{1 + e^{-[(E+V(r)-\mu)/k_B T]}} \tag{5.14}$$

ifadesi elde edilir. Böylece (5.1) denklemi

$$n_{el} = D_0 \int dE \, \frac{e^{-[(E+V(r)-\mu)/k_B T]}}{1 + e^{-[(E+V(r)-\mu)/k_B T]}} \tag{5.15}$$

haline dönüşür. Bu integralin sonucu da

$$n_{el} = D_0 k_B T \ln\left[1 + e^{[(\mu - V(r))/k_B T]} \right] \tag{5.16}$$

olur.

Son olarak $T \neq 0$ ve $B \neq 0$ için TF yaklaşımına göre elektron dağılımının nasıl olacağına bakalım. Eğer manyetik alan varsa durum yoğunluğu değişecektir. Enerji seviyeleri sürekli olmaktan çıkıp Landau seviyeleri olarak bilinen kesikli enerji seviyeleri halini alır. Denklem (3.97) ile tanımladığımız $\nu = 2\pi l^2 n_{el}$ doluluk çarpanı, Landau seviyelerinin doluluğunu gösterir. Buradan elektron yoğunluğu

$$n_{el} = \frac{\nu}{2\pi l^2} \tag{5.17}$$

olacaktır. Doluluk çarpanı bir tamsayıya eşitse Landau seviyesi tam doludur. Burada şimdilik $\nu = 1$ alıp elektronların spin dejenereliği de hesaba katılırsa

$$n_{el} = 2 \frac{1}{2\pi l^2} = \frac{g_s}{2\pi l^2} \tag{5.18}$$

şeklinde olur. Burada $g_s = 2$ alınmış olup spin dejenereliğini göstermektedir. Bu durumda durum yoğunluğu

$$D(E) = \frac{g_s}{2\pi l^2} \sum_{n=0}^{\infty} \delta\left(E - E_n \right) \tag{5.19}$$

şeklinde olur. Böylece elektron dağılımı

$$n_{el}(\vec{r}) = \frac{g_s}{2\pi l^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int dE \, \delta\left(E - E_n \right) f\left[\left(E + V(\vec{r}) - \mu \right) / k_B T \right] \tag{5.20}$$

şekline dönüşür. Dirac delta fonksiyonunun integral özelliğinden elektron yoğunluğu

$$n_{el}(\vec{r}) = \frac{g_s}{2\pi l^2} \sum_{n=0}^{\infty} f\left[\left(E_n + V(\vec{r}) - \mu\right)/k_B T\right] \tag{5.21}$$

olur.

Elektron yoğunluğunun (5.13), (5.16) veya (5.21) denklemlerindeki gibi $V(\vec{r})$ potansiyeli cinsinden ifadesi Poisson denkleminde yerine yazılırsa

$$\nabla^2 V = -\frac{q}{\varepsilon} n_{el}(V(\vec{r})) \tag{5.22}$$

şeklinde bir denklem elde edilir. Bu denklemin toplam elektron sayısının korunumu şartı olan

$$N_o = \int d^3 r \; n_{el}(\vec{r}) \tag{5.23}$$

şartı ile birlikte çözülmesi sonucunda, aranan kimyasal potansiyel, $V(\vec{r})$ potansiyeli ve elektron yoğunluğu elde edilebilir. Ancak, (5.13), (5.16) veya (5.21) denklemleri $V(\vec{r})$ potansiyeline nonlineer olarak bağlı olduğundan (5.22) denklemi de nonlineer bir diferansiyel denklem olur ve bu denklemin sayısal çözümü oldukça zordur. Bu noktada sayısal problemde karşılaşılan kararsızlık ve ıraksama problemlerini aşmak için daha önce Gerhardts ve arkadaşları (Lier ve Gerhardts, 1994; Oh ve Gerhardts, 1997; Güven ve Gerhardts, 2003; Siddiki ve Gerhardts, 2003) tarafından kullanılan yaklaşıma benzer bir yaklaşım kullanılmıştır. Bu yaklaşımla ilgili temel algoritma aşağıda sunulmuştur.

Thomas-Fermi-Poisson denklemlerinin çözümü için kullanılan algoritma

Yukarıda tanımlanan TF yaklaşımı çerçevesinde (5.22) ve (5.23) denklemleri ile birlikte (5.13), (5.16) veya (5.21) denklemlerinden biri kullanıldığında, sistemin elektrostatiğini tanımlayan kapalı bir denklemler takımı elde edilir. Bu denklem takımının özellikle sonlu sıcaklık ve sonlu manyetik alan durumundaki çözümünü elde etmek için şu yol takip edilir.

İlk önce sıfır sıcaklık ve sıfır manyetik alana karşılık gelen (5.13) denklemi, (5.22) ve (5.23) denklemleriyle birlikte özuyumlu olarak çözülerek manyetik alanın yokluğunda ve sıfır sıcaklıktaki elektron dağılımı elde edilir. Bundan sonra yeterince yüksek bir T sıcaklığında, manyetik alan yokken sistemin elektrostatiğini tanımlayan (5.16), (5.22) ve (5.23) denklemleri, yine özuyumlu olarak çözülerek kimyasal potansiyel, $V(\vec{r})$ potansiyeli ve elektron yoğunluğu elde edilir. Bu aşamada çözümü elde etmek için normal fonksiyonların köklerini bulmakta kullanılan Newton-Raphson

algoritmasının fonksiyoneller için uygun şekilde genelleştirilmiş bir formu kullanılır. Bu genelleştirilmiş Newton-Raphson algoritması temel olarak şu şekilde çalışmaktadır:

(5.16), (5.22) ve (5.23) denklemlerinin gerçek çözümüne karşılık gelen kimyasal potansiyel μ^* ve elektriksel potansiyel $V^*(\vec{r})$ olsun. Öte yandan bir önceki adımdan elde ettiğimiz potansiyel fonksiyonunun $V(\vec{r})$ olduğunu ve bir ilk tahmin olarak kullandığımızı varsayalım. Gerçek potansiyelle bu ilk tahmin arasındaki farkı $\delta V(\vec{r})$ ile gösterirsek

$$V^*(\vec{r}) = V(\vec{r}) + \delta V(\vec{r}) \tag{5.24}$$

şeklinde yazabiliriz. Denklem (5.24)'deki elektron yoğunluğu n_{el} bu durumda (5.16) denklemiyle verilir. Bu durumda Poisson denklemi

$$\nabla^2 V^* = \nabla^2 V + \nabla^2 \delta V = -\frac{q}{\varepsilon} n_{el}(V + \delta V) \tag{5.25}$$

şeklinde yazılabilir. n_{el}'yi V civarında Taylor serisine

$$n_{el}(V + \delta V) = n_{el}(V) + \frac{\partial n_{el}}{\partial V}\delta V + \cdots \tag{5.26}$$

şeklinde açabiliriz. Böylece (5.25) denkleminde sadece birinci mertebe terimler tutulursa

$$\nabla^2 V + \nabla^2 \delta V = -\frac{q}{\varepsilon} n_{el}(V) - \frac{q}{\varepsilon}\frac{\partial n_{el}}{\partial V}\delta V \tag{5.27}$$

denklemi elde edilir. Denklem (5.16) ve (5.21)'e göre elektron yoğunluğu n_{el}'in, potansiyele ve kimyasal potansiyele göre türevleri arasındaki ilişkiyi

$$\frac{\partial n_{el}}{\partial V} = -\frac{\partial n_{el}}{\partial \mu} \tag{5.28}$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece (5.27) denklemi

$$\nabla^2 V + \nabla^2 \delta V = -\frac{q}{\varepsilon} n_{el}(V) + \frac{q}{\varepsilon}\frac{\partial n_{el}}{\partial \mu}\delta V \tag{5.29}$$

ya da

$$\nabla^2 \delta V - \frac{q}{\varepsilon}\frac{\partial n_{el}}{\partial \mu}\delta V = -\nabla^2 V - \frac{q}{\varepsilon} n_{el}(V) \tag{5.30}$$

şeklinde yazılabilir. Burada eşitliğin sol tarafındaki ikinci terimin katsayısını p ile, eşitliğin sağ tarafını ise f ile gösterirsek

$$\nabla^2 \delta V - p\delta V = f \tag{5.31}$$

potansiyel fonksiyonundaki hata δV için poisson denklemine benzer lineer bir terim içeren bir denklem elde edilir. Burada $p = \frac{q}{\varepsilon}\frac{\partial n_{el}}{\partial \mu}$, $f = -\nabla^2 V - \frac{q}{\varepsilon} n_{el}(V)$ dir. Denklem (5.31), δV için Poisson denklemi formunda bir denklemdir. Bu denklemin sayısal çözümü ile ilgili ayrıntılı bilgi daha sonra verilecektir. Bu denklemin çözümünden elde edilen δV, bir önceki adımdan elde edilen potansiyele eklenerek yeni potansiyel fonksiyonu elde edilmiş olur. Ardışık iki adımda elde edilen potansiyel fonksiyonlarını V^{n+1} ve V^n ile gösterirsek Newton-Raphson algoritmasının bir adımı

$$V^{n+1} = V^n + \delta V \tag{5.32}$$

şeklinde ifade edilir. Daha sonra bu yeni potansiyele karşılık gelen kimyasal potansiyel ve elektron yoğunluğu (5.16) ve (5.23) denklemleri kullanılarak elde edilir. Ardışık iki adım arasında potansiyelde meydana gelen değişim, yeterince küçük olana kadar bu işleme devam edilir.

Manyetik alanın yokluğunda yüksek sıcaklıkta çözüm elde edildikten sonra, aynı sıcaklık için manyetik alan varken çözüm elde edilir. Bunun için yukarıda verilen Newton-Raphson algoritmasında başlangıç değeri olarak manyetik alan yokken elde edilen sonuçlar kullanılır. Daha sonra, sıcaklık kademeli olarak hedeflenen sıcaklığa kadar düşürülür. Bu aşamada her bir sıcaklık adımında Newton-Raphson algoritması tekrarlanır. Her sıcaklık adımında başlangıç değeri için bir önceki sıcaklık adımında elde edilen sonuç kullanılır.

Yukarıda verilen Newton-Raphson yaklaşımına dayalı algoritmanın uygulanması sırasında her iterasyon adımında, Denk. (5.31) ile verilen Poisson denklemine benzer denklemin çözülmesi gerekir. Bu denklemin birçok defa çözülmesi gerektiğinden bu denklemin çözümünde kullanılan yaklaşımlar, burada ele alınan KHO tabanlı araçların incelenmesi açısından son derece önemlidir. Bu denklemin çözümünde mümkün olduğunca hızlı yaklaşımlar kullanılması faydalı olacaktır. Bu açıdan bir sonraki bölümde, bu çalışmada Poisson denkleminin çözümü için kullanılan yöntemler anlatılacaktır.

5.2. Ardışık Aşırı Durulma Yöntemi

Denklem (5.31) ile verilen Poisson denklemi benzeri ifadenin sayısal çözümü için, ilk aşamada incelenecek yapıyı temsil eden uygun bir mesh oluşturulur. Daha sonra (5.31) denklemi bu mesh üzerinde uygun bir fark yaklaşımı kullanarak düzenlenir. Bu durumda (5.31) denklemi bir matris denklemi formuna dönüşür. Şimdi bir $\phi(x,y,z)$ fonksiyonu için oluşturulan mesh için, x ekseni doğrultusunda adım aralığının h_x olduğunu varsayarsak sonlu farklar yaklaşımı çerçevesinde

$$\frac{d^2\phi(x,y,z)}{dx^2} = \frac{\phi(x+h_x,y,z)+\phi(x-h_x,y,z)-2\phi(x,y,z)}{h_x^2} + O(h_x^2) \tag{5.33}$$

olur. Burada h_x^2 mertebesinde olan hata terimini ihmal edersek ve benzer şekildeki açılımları y ve z doğrultuları için yazarsak

$$\frac{d^2\phi(x,y,z)}{dy^2} = \frac{\phi(x,y+h_y,z)+\phi(x,y-h_y,z)-2\phi(x,y,z)}{h_y^2} \tag{5.34}$$

$$\frac{d^2\phi(x,y,z)}{dz^2} = \frac{\phi(x,y,z+h_z)+\phi(x,y,z-h_z)-2\phi(x,y,z)}{h_z^2} \tag{5.35}$$

ifadeleri elde edilir, h_y ve h_z, sırasıyla y ve z yönlerindeki mesh aralıklarıdır.

Şimdi (5.31) denklemini ϕ fonksiyonu için yazarsak

$$\nabla^2\phi - p\phi = f \tag{5.36}$$

olur ve bu denklemin, kartezyen koordinatlarda açık hali

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - p\phi = f \tag{5.37}$$

şeklindedir. Buradaki kısmi türevler için (5.33), (5,34) ve (5.35) denklemlerini kullanıp $\phi(x,y,z)$'yi çekersek ve elde ettiğimiz sonucu $\widetilde{\phi}$ ile gösterirsek

$$\begin{aligned}\widetilde{\phi} = \phi(x,y,z) = & \frac{h_y^2 h_z^2}{2\left(h_y^2 h_z^2 + h_x^2 h_z^2 + h_x^2 h_y^2\right) + p(x,y,z) h_x^2 h_y^2 h_z^2} \times \\ & [\phi(x+h_x, y, z) + \phi(x-h_x, y, z)] \\ & + \frac{h_x^2 h_z^2}{2\left(h_y^2 h_z^2 + h_x^2 h_z^2 + h_x^2 h_y^2\right) + p(x,y,z) h_x^2 h_y^2 h_z^2} \times \\ & [\phi(x, y+h_y, z) + \phi(x, y-h_y, z)] \\ & + \frac{h_x^2 h_y^2}{2\left(h_y^2 h_z^2 + h_x^2 h_z^2 + h_x^2 h_y^2\right) + p(x,y,z) h_x^2 h_y^2 h_z^2} \times \\ & [\phi(x, y, z+h_z) + \phi(x, y, z-h_z)] \\ & - \frac{h_x^2 h_y^2 h_z^2}{2\left(h_y^2 h_z^2 + h_x^2 h_z^2 + h_x^2 h_y^2\right) + p(x,y,z) h_x^2 h_y^2 h_z^2} f(x,y,z)\end{aligned} \tag{5.38}$$

ifadesini elde ederiz. Bu denklemden de görüldüğü gibi uzaydaki bir noktada ϕ fonksiyonunu belirleyebilmek için komşu 6 noktada ϕ fonksiyonunun değerini bilmek gerekir. Eğer başlangıçta ϕ fonksiyonunun her noktadaki değerini yaklaşık olarak bildiğimizi varsayarsak, o zaman belirli bir nokta etrafındaki altı noktada ϕ fonksiyonunun eski değerlerini kullanarak bu noktadaki ϕ fonksiyonu için yeni bir $\widetilde{\phi}$ değeri hesaplayabiliriz. Bu işlemi örgü üzerindeki her nokta için tekrar ederek ilerlediğimizde, eğer bir önceki adımda bulduğumuz değerlerle bir sonraki adımda bulduğumuz değerler arasındaki fark sıfırsa (veya yeterince küçükse) bu durumda aradığımız çözümü elde etmiş oluruz. Bu yaklaşıma ardışık durulma yaklaşımı denir. Ardışık durulma yaklaşımında her bir adımı *n* üst indisi ile gösterirsek bu yaklaşım sembolik olarak $\phi^{n+1} = \widetilde{\phi}$ veya $\phi^{n+1} = \phi^n + (\widetilde{\phi} - \phi^n)$ şeklinde ifade edilebilir. Burada $(\widetilde{\phi} - \phi^n)$ farkı, *n*'inci adımda fonksiyona getirilen düzeltmedir. Ardışık durulma iterasyonlarını hızlandırmak için bu düzeltme terimi belirli bir oranda artırılarak orijinal fonksiyona eklenebilir. Yani

$$\phi^{n+1} = \phi^n + w\left(\widetilde{\phi} - \phi^n\right) = (1-w)\phi^n + w\widetilde{\phi} \tag{5.39}$$

şeklinde yazılabilir. *w* burada bir ağırlık katsayısıdır. Bu durumda *w* değeri 1 ile 2 arasında seçilirse bu yönteme Ardışık Aşırı Durulma (AAD) (Successive Over Relaxation (SOR)) yöntemi adı verilir. AAD yönteminin hızını artırmak için uygun bir *w* değeri seçmek gereklidir. Ancak en uygun *w* değeri kullanılsa bile buradaki problemde (5.31) denkleminin birçok defa çözülmesi gerektiğinden bu çözümün çok hızlı bir şekilde yapılması oldukça önemlidir.

AAD yönteminin daha da hızlandırılması için birçok farklı yaklaşım geliştirilmiştir. Bunların arasında multigrid yöntemi oldukça etkin bir yöntem olarak karşımıza çıkmaktadır.

5.3. Multigrid Yöntemi

AAD yöntemi kullanılırken karşılaşılan hatanın Fourier analizi incelendiğinde kısa dalga boylu hataların hızla azalmasına karşın, uzun dalga boylu hataların daha yavaş azaldığı görülmüştür. Bu gerçekten yola çıkılarak yakınsama sürecini hızlandırmak için multigrid yöntemi geliştirilmiştir (Briggs ve ark., 2000). Multigrid yönteminde mesh aralığı küçük olan bir örgüde bir miktar AAD iterasyonu yapıldıktan sonra kalan hata hesaplanır. Bu hata daha geniş mesh aralıklarına sahip daha kaba bir örgüye taşınır ve kaba örgüde tekrar bir miktar AAD iterasyonu yapılır. Bu sefer bu kaba örgüde kalan hata daha da kaba bir örgüye taşınır ve aynı süreç tekrar edilir. Bu şekilde istenilen sayıda farklı örgü kullanılabilir. En kaba örgüye ulaşıldığında elde edilen fark denkleminin tam çözümüne ulaşana kadar AAD iterasyonlarına devam edilir. Ancak bu aşamada örgüdeki nokta sayısı çok az olduğu için bu işlem oldukça kısa zaman alır. Daha sonra kaba örgüde elde edilen hata, ince örgüye genişletilerek çözüm fonksiyonuna eklenir. Hatanın kaba örgüye taşınması restriction ve bulunan çözümün ince örgüye taşınması süreci prolongation olarak adlandırılır.

Şimdi AAD iterasyonları sonucunda (5.36) denklemi için ince örgüde elde edilen yaklaşık çözümü ϕ^* ile gösterelim. Bu fonksiyona karşılık gelen (5.36) denkleminin sağ tarafındaki yük terimi ise f^* olsun yani

$$\nabla^2\phi^* - p\phi^* = f^* \tag{5.40}$$

şeklinde yazılsın. Şimdi (5.36) denklemini bu denklemden taraf tarafa çıkarırsak

$$\nabla^2(\phi - \phi^*) - p(\phi - \phi^*) = f - f^* \tag{5.41}$$

elde edilir. Bu ifadede $\varepsilon = (\phi - \phi^*)$ hata terimi ve $\sigma = f - f^*$ artık yük terimi (residual) olarak adlandırılırsa hata ile artık yük için

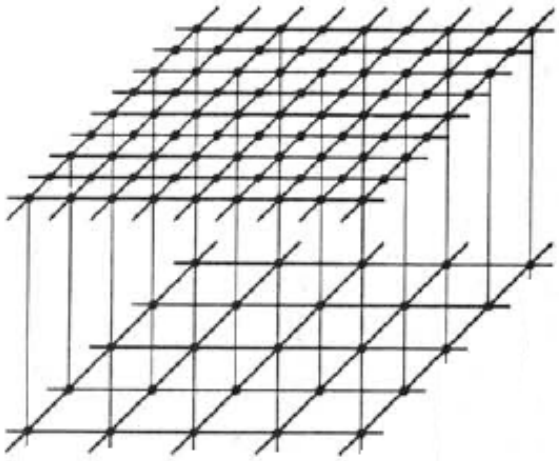
$$\nabla^2\varepsilon - p\varepsilon = \sigma \tag{5.42}$$

denklemi elde edilir ve bu denklem, başlangıçtaki (5.36) denklemi ile aynıdır. Bu şekilde hesaplanan artık yük daha kaba örgüye taşınır ve hata terimi için çözüm kaba örgüde yapılır. Elde edilen hata terimi önceki fonksiyona eklenerek

$$\phi = \phi^* + \varepsilon \tag{5.43}$$

yeni çözüm elde edilir. Bu işlemler tekrarlanarak ilerlendiğinde ardışık olarak elde edilen sonuçlar, gerçek çözüme AAD yöntemine göre daha hızlı yakınsar.

Artık yük teriminin kaba örgüye taşınması



Şekil 5.4. Multigrid yönteminde kullanılan ince, orta ve kaba örgülerin 2 boyutlu durum için gösterimi

Uygulamada kolaylık olması açısından genellikle kaba örgüdeki örgü aralıkları ince örgüdekinin tam iki katı olarak seçilir. Böyle bir durum iki boyut için Şekil 5.4 de gösterilmiştir. Burada alt tabakada gösterilen kaba gride ait örgü noktaları ince örgüdeki noktalarla çakışır. Üstte gösterilen örgü ise ince örgüdür Şimdi her bir ince örgü noktasındaki artık yük terimini $\sigma_{i,j,k}^{ince}$ ile ve her bir kaba noktadaki artık yük terimini $\sigma_{i,j,k}^{kaba}$ gösterelim.

Bu durumda kaba örgüde, sadece ince örgüdeki çift indislere karşılık gelen noktalar yer alacaktır ve kaba örgüde yer alan bir nokta etrafında bulunan ve kaba örgüde bulunmayan noktalardan gelen artık yük bilgilerini de taşımalıdır. Bu amaçla değişik stratejiler kullanılabilir. Eğer basit ağırlıklı ortalamaları kullanacak olursak iki boyut için kaba örgüdeki artık yükler

$$\sigma_{i,j}^{kaba} = \frac{1}{4}\sigma_{2i,2j,}^{ince} + \frac{1}{8}(\sigma_{2i+1,2j}^{ince} + \sigma_{2i-1,2j}^{ince} + \sigma_{2i,2j+1}^{ince} + \sigma_{2i,2j-1}^{ince}) + \frac{1}{16}(\sigma_{2i+1,2j+1}^{ince} + \sigma_{2i-1,2j+1}^{ince} + \sigma_{2i-1,2j-1}^{ince} + \sigma_{2i+1,2j-1}^{ince}) \tag{5.44}$$

ifadesinden hesaplanabilir. Aynı ifade üç boyut için yazıldığında kaba örgüde yer alan bir nokta etrafında bulunan ince örgüye ait 26 noktadan katkı gelir. Bu durumda kaba örgüde yer alan bir noktadaki artık yük

$$\sigma_{i,j,k}^{kaba} = \frac{1}{8}\sigma_{2i,2j,2k}^{ince}$$
$$+\frac{1}{16}\left(\sigma_{2i+1,2j,2k}^{ince}+\sigma_{2i-1,2j,2k}^{ince}+\sigma_{2i,2j+1,2k}^{ince}+\sigma_{2i,2j-1,2k}^{ince}+\sigma_{2i,2j,2k+1}^{ince}+\sigma_{2i,2j,2k-1}^{ince}\right)+$$
$$\frac{1}{32}\left(\sigma_{2i+1,2j+1,2k}^{ince}+\sigma_{2i-1,2j+1,2k}^{ince}+\sigma_{2i,2j+1,2k+1}^{ince}+\sigma_{2i,2j-1,2k+1}^{ince}+\right.$$
$$\sigma_{2i+1,2j,2k+1}^{ince}+\sigma_{2i+1,2j,2k-1}^{ince}+\sigma_{2i+1,2j-1,2k}^{ince}+\sigma_{2i-1,2j-1,2k}^{ince}+ \qquad (5.45)$$
$$\left.\sigma_{2i,2j+1,2k-1}^{ince}+\sigma_{2i,2j-1,2k-1}^{ince}+\sigma_{2i-1,2j,2k+1}^{ince}+\sigma_{2i-1,2j,2k-1}^{ince}\right)+$$
$$\frac{1}{64}\left(\sigma_{2i+1,2j+1,2k+1}^{ince}+\sigma_{2i+1,2j+1,2k-1}^{ince}+\sigma_{2i+1,2j-1,2k+1}^{ince}+\sigma_{2i+1,2j-1,2k-1}^{ince}+\right.$$
$$\left.\sigma_{2i-1,2j+1,2k+1}^{ince}+\sigma_{2i-1,2j+1,2k-1}^{ince}+\sigma_{2i-1,2j-11,2k+1}^{ince}+\sigma_{2i-1,2j-1,2k-1}^{ince}\right)$$

ifadesinden hesaplanır.

Hata teriminin ince örgüye yayılması

Yukarıda anlatılan şekilde artık yük terimi kaba örgüye taşınıp kaba örgüde hata terimi elde edildikten sonra, bu hata teriminin ince örgüye yayılması için bir starateji kullanılması gerekir. Bu anlamda en basit strateji, ince örgüdeki noktalarda hata teriminin bulunması için basit interpolasyon kullanmaktır.

Böyle bir durumda ince örgüdeki bir nokta, dört farklı konumda bulunabilir.

i) İnce örgüdeki nokta kaba örgü ile çakışır. Bu durumda ince örgüdeki noktanın bütün indisleri çifttir ve bu noktadaki hata terimi

$$\varepsilon_{2i,2j,2k}^{ince} = \varepsilon_{i,j,k}^{kaba} \qquad (5.46)$$

ile verilir.

ii) İnce örgüdeki nokta, kaba örgüdeki iki nokta arasındadır. Bu durumda ince örgüdeki noktanın bütün indislerinden birisi tektir. Tek olan indisin x doğrultusuna karşılık geldiğini varsayalım. Bu noktadaki hata terimi

$$\varepsilon_{2i+1,2j,2k}^{ince} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{i,j,k}^{kaba}+\varepsilon_{i+1,j,k}^{kaba}) \qquad (5.47)$$

ile verilir. Diğer doğrultulara karşılık gelen indislerden birirnin tek olması halinde de benzer ifadeler kullanılır.

iii) İnce örgüdeki nokta kaba örgüdeki noktalara göre köşegen doğrultuda dört noktanın ortasında yer alır. Bu durumda, ince örgüdeki noktanın indislerinden ikisi tektir. Bu noktadaki hata terimi

$$\varepsilon^{ince}_{2i+1,2j+1,2k} = \frac{1}{4}(\varepsilon^{kaba}_{i,j,k} + \varepsilon^{kaba}_{i+1,j,k} + \varepsilon^{kaba}_{i,j+1,k} + \varepsilon^{kaba}_{i+1,j+1,k}) \tag{5.48}$$

ile verilir. Tek olan indislerin olası diğer kombinasyonları için de benzer ifadeler kullanılır.

iv) İnce örgüdeki nokta kaba örgüdeki noktalara göre cisim köşegeni doğrultusunda yer alır. Bu durumda, etrafında kaba örgüye ait en yakın sekiz nokta vardır ve ince örgüdeki noktanın indislerinin hepsi tektir. Bu noktadaki hata terimi

$$\begin{aligned}\varepsilon^{ince}_{2i+1,2j+1,2k+1} = \frac{1}{8}(&\varepsilon^{kaba}_{i,j,k} + \varepsilon^{kaba}_{i+1,j,k} + \varepsilon^{kaba}_{i,j+1,k} + \varepsilon^{kaba}_{i,j,k+1} + \\ &\varepsilon^{kaba}_{i+1,j+1,k} + \varepsilon^{kaba}_{i+1,j,k+1} + \varepsilon^{kaba}_{i,j+1,k+1} + \varepsilon^{kaba}_{i+1,j+1,k+1})\end{aligned} \tag{5.49}$$

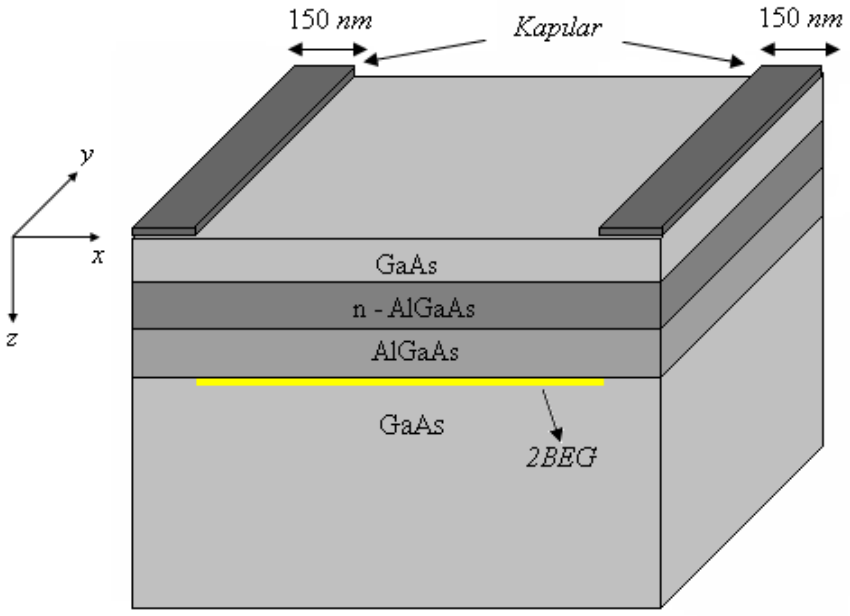
ile verilir.

6. SONUÇLAR

Hesaplamalarda, çiftlenmiş Thomas-Fermi-Poisson denklemlerinin çözümü 5. bölümde verilen genelleştirilmiş Newton-Raphson algoritması aracılığıyla elde edilmiştir. Bu amaçla Newton-Raphson algoritmasının her adımında Poisson denklemi AAD ve multigrid yöntemleri kullanılarak çözülmüştür. Böylece daha önce 4. Bölümde tartışılan KHO tabanlı araçlar için elektron dağılımları ve elektrostatik potansiyel elde edilmiştir.

6.1. Kuantum Hall Çubuğu İçin Sonuçlar

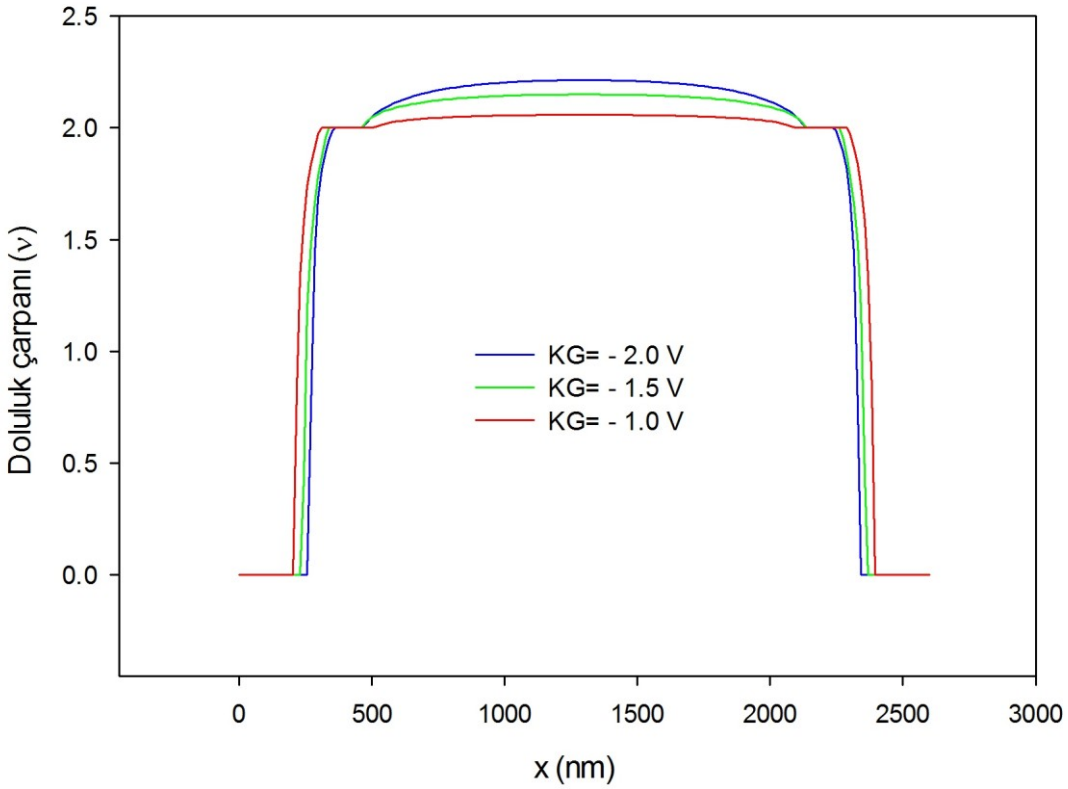
Hesaplamalarımızda ilk olarak ele aldığımız yapı, Şek. 6.1. de görülen kuantum Hall çubuğudur. Hesaplamalarımızda bu çubuğun boyutlarını x yönünde 2600 nm, y yönünde 2000 nm ve z yönünde de 1000 nm aldık. İki düğüm noktası arası mesafe 10 nm olarak alınmıştır. Çubuğun her iki yanında sınır koşulları için 150 nm'lik iki kapı yerleştirilmiştir. 2BEG yüzeyden 90 nm, donor tabakası ise 50 nm derindedir. Hesaplamalar üç boyutlu Poisson denklemi ve TF denkleminin öz-uyumlu olarak çözülmesiyle elde edilmiştir. Kuantum Hall çubuğu için hesaplamalar kapı geriliminin değişimi, uygulanan manyetik alanın değişimi ve farklı donor yoğunlukları için yapılmıştır.



Şekil 6.1. Kuantum Hall Çubuğunun şematik gösterimi. Yapının boyutları x yönünde 2600 nm, y yönünde 2000 nm ve z yönünde de 1000 nm dir.

6.1.1. Kuantum Hall Çubuğunun davranışına farklı kapı gerilimlerinin etkisi

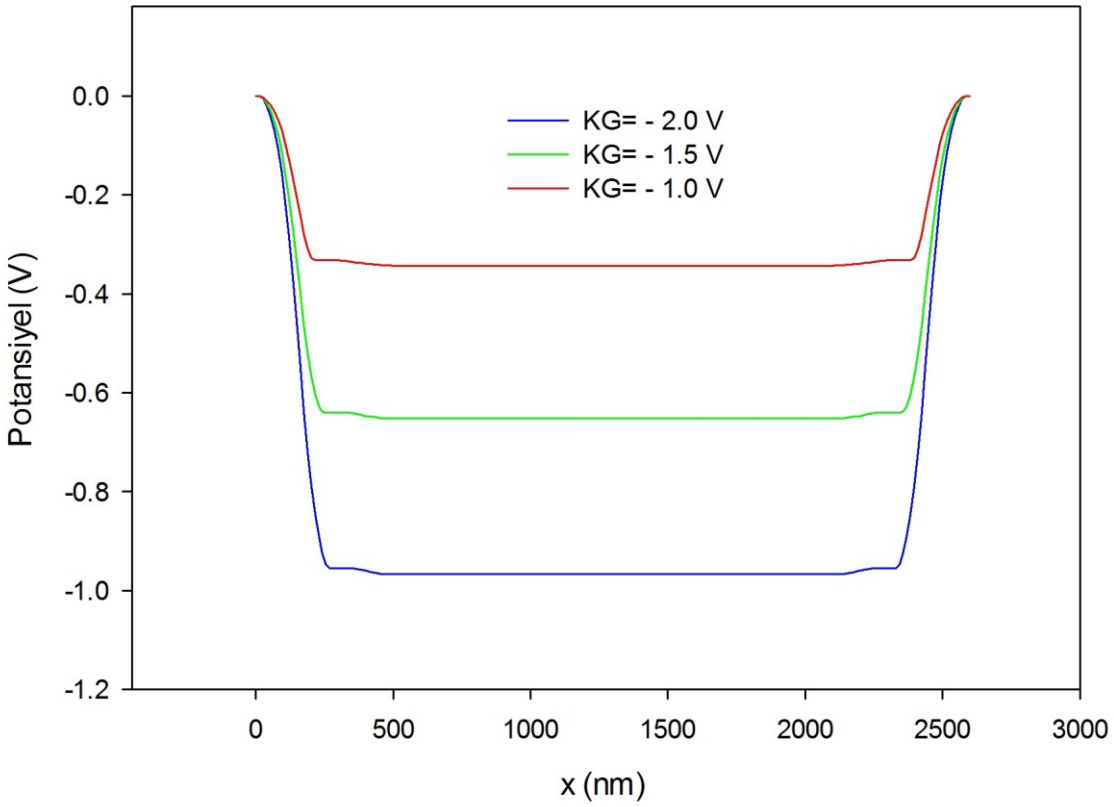
Şekil 6.1 deki yapıda 1.4 K sıcaklıkta ve 7.4 T manyetik alan altında kapı gerilimlerini -1.0 V, -1.5 V ve -2.0 V değerleri için Şekil 6.2'de görülen konuma bağlı elektron dağılımı grafiği ile Şekil 6.3'de görülen konuma bağlı potansiyel grafikleri elde edilmiştir. Ortalama elektron yoğunluğu $\overline{n}_e$ ve donor yoğunluğu n_d çubuk boyunca $\overline{n}_e = n_d = 3.0 \times 10^{11} cm^{-2}$ olacak şekilde eşit alınmıştır. Yani nötrallik sağlanmıştır.



Şekil 6.2. Şekil 6.1'de görülen yapıda 1.4 K sıcaklıkta ve 7.4 T manyetik alan altında kapı gerilimlerinin - 1.0 V, - 1.5 V ve - 2.0 V değerleri için elde edilen konuma bağlı elektron dağılımının doluluk çarpanı cinsinden gösterimi

Şekil 6.2'de -1.0 V kırmızı renk, -1.5 V yeşil renk ve -2.0 V mavi renk ile belirtilmiştir. Şekil 6.2'de kapılara uygulanan tüm gerilimlerde elektron yoğunluğu $\nu = 2$ civarında platolu bir yapı göstermektedir. Kenardan içeriye doğru giderken elektronlar 1. Landau seviyesine karşılık gelen durumları doldurmaya başlar. Kısmen dolmaya başlayan 1. Landau seviyesinde elektronların rahat hareket etmelerine olanak sağlayan boş yerler olduğu için bu bölge tıpkı bir metal gibi davranacaktır ve sıkıştırılabilir şerit olarak adlandırılır. Bu esnada hareketli elektronlar, birbirileriyle etkileşerek bir perdeleme potansiyeli oluştururlar. Elektronlar daha sonra Landau

seviyesini tam olarak doldurmaya başlarlar. Tam dolu kısma yeni bir elektron eklenemez ve perdeleme potansiyeli oluşmaz. Bu nedenle bu bölgeler sıkıştırılamaz şerit olarak adlandırılır ve yalıtkan gibi davranır. Şekil 6.2'de $\nu = 2$ civarında gözlenen platolar sıkıştırılamaz şeritlere karşılık gelmektedir. Bu sonuç Chklovskii ve ark.(1992) geliştirdiği modelle uyum göstermektedir.

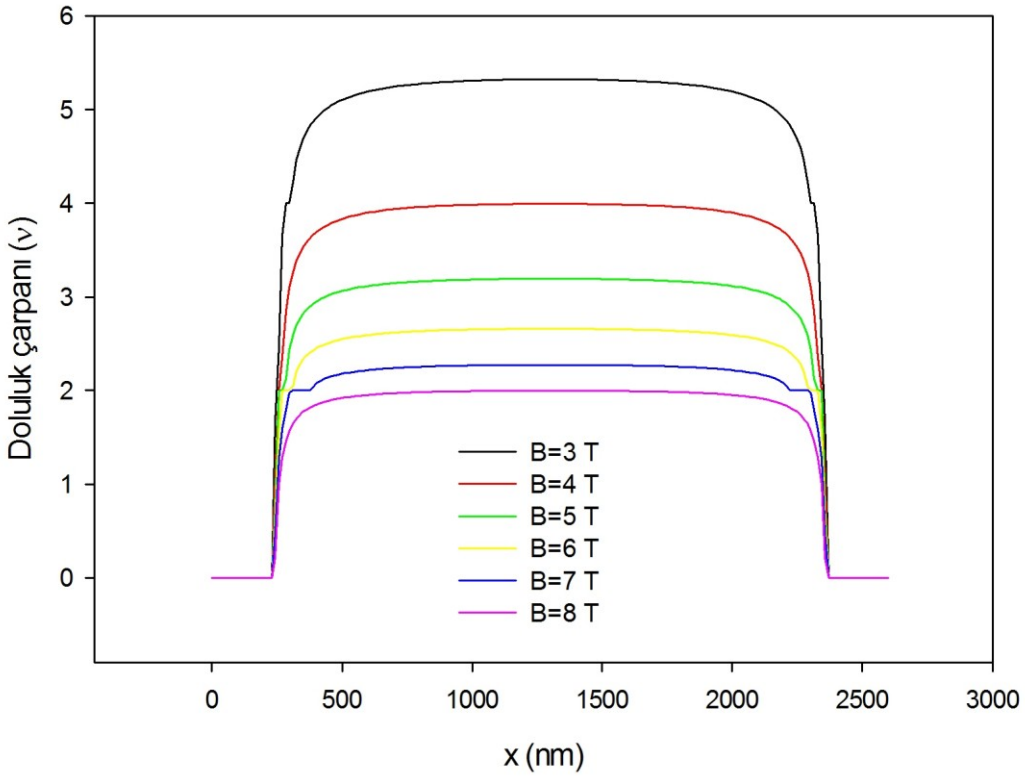


Şekil 6.3. Şekil 6.1'de görülen yapıda 1.4 K sıcaklıkta ve 7.4 T manyetik alan altında kapı gerilimlerini - 1.0 V, - 1.5 V ve - 2.0 V olarak değiştirilmesi sonucu elde edilen konuma bağlı potansiyelinin gösterimi

Şekil 6.3 Poisson denkleminin çözümünden elde edilen potansiyelleri göstermektedir. Potansiyellerde gözlenen platolar, sıkıştırılabilir şeritlere denk gelen potansiyellerdir. Kapı geriliminin artması elektronların merkeze doğru toplanmasına sebep olmakta ve kenarlardaki elektronların bulunmadığı bölgede perdeleme olmadığından potansiyel çok hızlı düşmektedir. Elektronların bulunmadığı bölgenin genişlemesi, potansiyelin daha derinleşmesine sebep olmaktadır. Aynı etki Şekil 6.2'de görüldüğü gibi kapı gerilimlerinin artması, sıkıştırılamaz şeritlerin genişliğinin azalmasına neden olmaktadır.

6.1.2. Kuantum Hall Çubuğunun Farklı Manyetik alan şiddetlerindeki davranışı

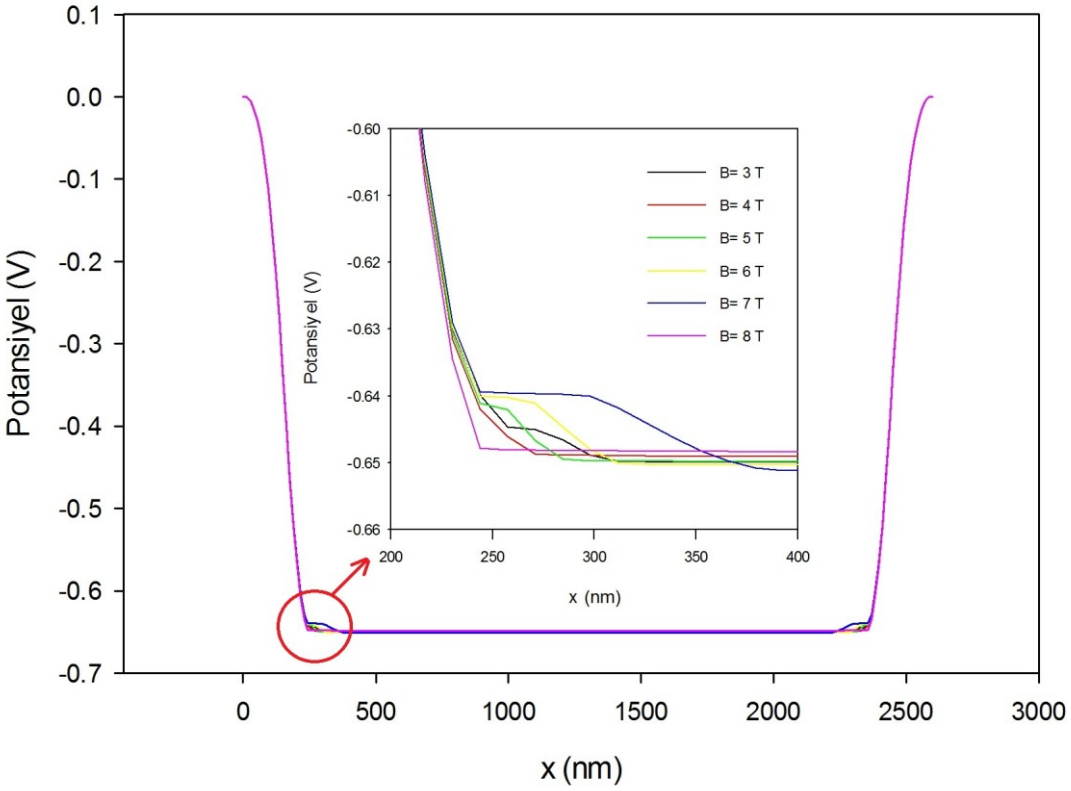
Şekil 6.1'deki yapıda sıcaklığı 1.4 K'de, kapı gerilimini -1.5 V'da ve donor yoğunluğunu $\bar{n}_e = n_d = 3.0\times10^{11} cm^{-2}$ değerlerinde sabit tutup manyetik alanı 3 T'dan 8 T'ya kadar değiştirirsek Şekil 6.4'de görülen konuma bağlı elektron dağılımı grafiği ile Şekil 6.5'de görülen konuma bağlı potansiyel grafiklerini elde ederiz.



Şekil 6.4. Şekil 6.1. de görülen yapıda manyetik alanın 3 T'dan 8 T'ya kadar değiştirilmesiyle elde edilen konuma bağlı elektron dağılımının doluluk çarpanı cinsinden gösterimi

Şekil 6.4'de doluluk çarpanının tam sayı olduğu yerlerde yani $\nu = 2$ ve $\nu = 4$'de sıkıştırılamaz şeritler gözlenmektedir. Denklem (3.97)'ye göre doluluk çarpanının değerinin manyetik alanla ters orantılı olması Şekil 6.4'de açıkça görülür. Sıkıştırılamaz şeritler önce yapının orta bölgelerinde ortaya çıkıp manyetik alan şiddetinin azalışıyla birlikte kenarlara doğru ilerler bu sırada genişlikleri de daralır. B=4 T civarında $\nu = 2$ ye karşılık gelen sıkıştırılamaz şerit hemen hemen kaybolur. Manyetik alan şiddeti daha da düşürüldüğünde $\nu = 4$ deki sıkıştırılamaz şerit ortaya çıkar. B=3 T da bu sıkıştırılamaz şerit oldukça belirgindir. Buna karşın B=7 T'daki sonuçta $\nu = 2$'deki sıkıştırılamaz şeridin kalınlığı oldukça geniştir ve $\nu = 4$'deki

sıkıştırılamaz şerit gözlenmez. Çünkü manyetik alan arttıkça Landau seviyelerinin dejenereliği yani bir Landau seviyesinin alabileceği elektron sayısı artar. Bu durumda yüksek manyetik alanda mevcut elektron sayısı ilk Landau seviyesini doldurur ve bir sonrakine gerek kalmaz. Bu durumda B= 8 T'da bir plato gözlenmemesi normaldir.

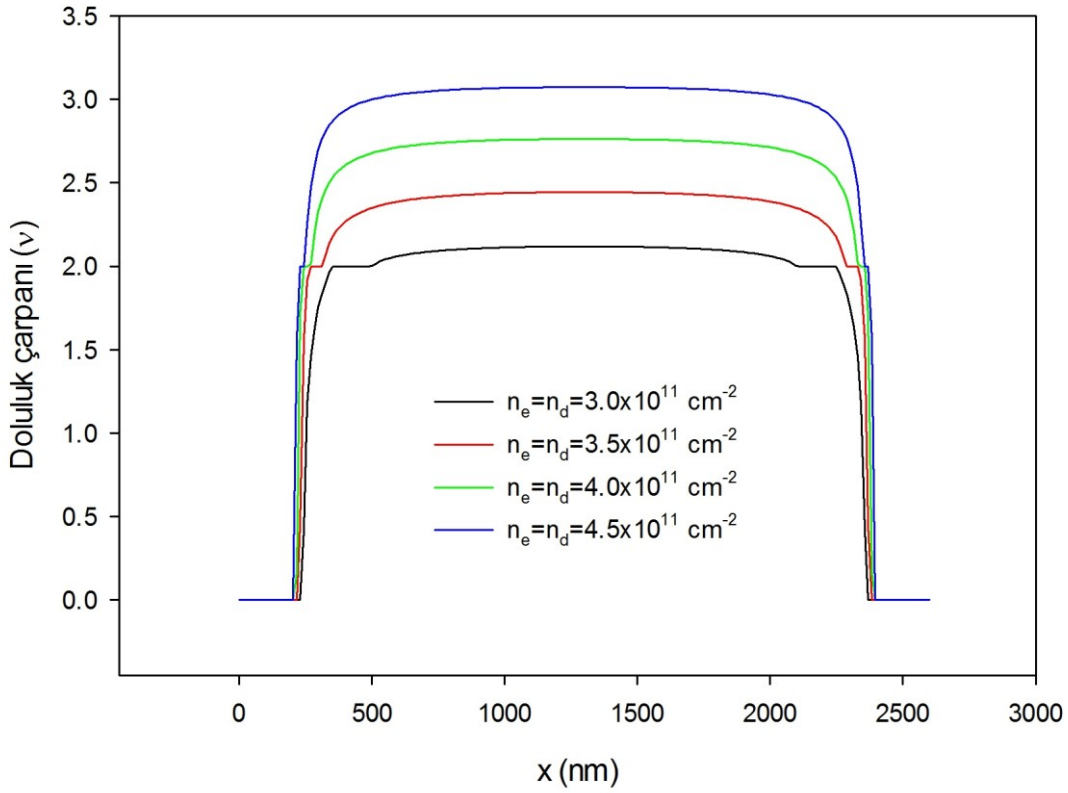


Şekil 6.5. Şekil 6.1'de görülen yapıda manyetik alanın 3 T'dan 8 T'ya kadar değiştirilmesiyle elde edilen konuma bağlı potansiyelin gösterimi

Şekil 6.5'deki potansiyel grafiğinde, potansiyelde değişimin gözlendiği küçük bölge içerdeki küçük ayrıntılı grafik ile gösterilmiştir. Bu ayrıntılı grafikte potansiyelin sabit gibi davrandığı plato bölgeleri sıkıştırılabilir şeritlere karşılık gelen bölgelerdir. Potansiyelin hızlı değiştiği bölgeler ise sıkıştırılamaz şeritlere ya da elektron bulunmayan bölgelere karşılık gelir. B=8 T'da manyetik alanlar çok büyük olduğundan sıkıştırılamaz şeritler gözlenmez ve potansiyelde ortada geniş bir plato oluşur. 3 T'dan 7 T' ya kadar sıkıştırılabilir şeritleri temsil eden platoların genişliği bariz artmaktadır. Sıkıştırılamaz şeritlerin dışında kalan bölgedeki kısımlar sıkıştırılabilir bölgeleri temsil eder.

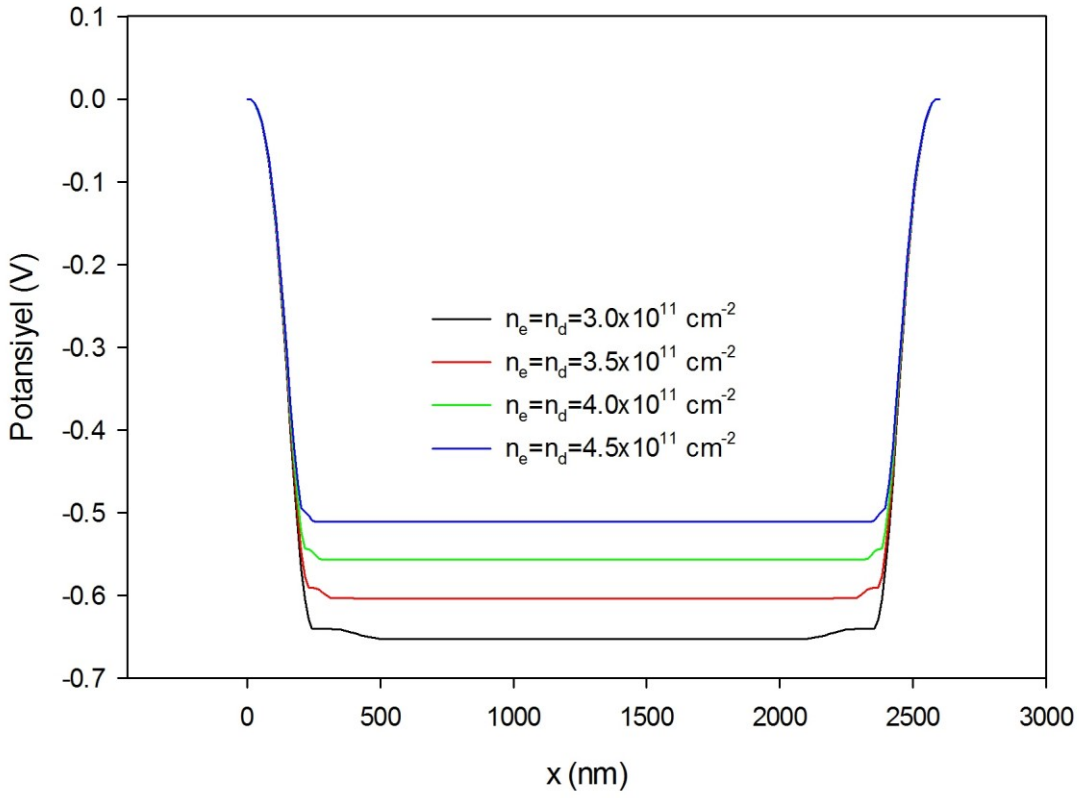
6.1.3. Kuantum Hall Çubuğunun Farklı donor yoğunluklarındaki davranışı

Şekil 6.1'deki yapıda sıcaklığı 1.4 K'de, kapı gerilimini -1.5 V'da ve manyetik alanı 7.4 T'da sabit tutup ortalama elektron ve donor yoğunlukları $\bar{n}_e = n_d = 3.0\times10^{11} cm^{-2}$, $\bar{n}_e = n_d = 3.5\times10^{11} cm^{-2}$, $\bar{n}_e = n_d = 4.0\times10^{11} cm^{-2}$ ve $\bar{n}_e = n_d = 4.5\times10^{11} cm^{-2}$ olacak şekilde değiştirilerek Şekil 6.6'da görülen konuma bağlı elektron dağılımı grafiği ile Şekil 6.7'de görülen konuma bağlı potansiyel grafikleri elde edilmiştir.



Şekil 6.6. Şekil 6.1'de görülen yapıda ortalama elektron ve donor yoğunluğunun farklı değerleri için elde edilen konuma bağlı elektron dağılımının doluluk çarpanı cinsinden gösterimi

Sistem de toplam yük nötralitesi sağlandığı için donor yoğunluğunun artmasıyla elektron yoğunluğunun artması normaldir Şekil 6.6'da bu durum açıkça gözlenmektedir. $\nu = 2$ 'de gözlenen sıkıştırılamaz şeritler, donor yoğunluğunun artmasıyla kenara doğru kaymakta ve incelmektedir. Genel olarak donor yoğunluğunun ve dolayısıyla elektron yoğunluğunun artışı, manyetik alanın azalışı ile benzer etki göstermektedir. Manyetik alanın azalması bir Landau seviyesinde birim alana yerleşebilecek elektron sayısının azalmasına, dolayısıyla da net olarak bir elektron fazlalığına sebep olur.



Şekil 6.7. Şekil 6.1'de görülen yapıda ortalama elektron ve donor yoğunluğunun farklı değerleri için elde edilen potansiyelinin gösterimi

Şekil 6.7'de donor yoğunluğu ve buna karşılık da elektron yoğunluğu arttıkça 2BEG sisteminin perdeleme kapasitesi artmaktadır. Böylece perdelenmiş potansiyelin derinliği de, donor sayısındaki artışla birlikte azalmaktadır. Şekil 6.7'deki potansiyel grafiğinde, potansiyelin sabit gibi davrandığı plato bölgeleri sıkıştırılabilir şeritlere karşılık gelen bölgelerdir. Potansiyelin hızlı değiştiği bölgeler ise sıkıştırılamaz şeritlere karşılık gelir. $\bar{n}_e = n_d = 3.0\times10^{11} cm^{-2}$ yoğunluk değerinde perdelenmiş potansiyel en derinde olup bunun nedeni az elektron sayısı nedeniyle oluşacak perdelemenin, potansiyeli pek etkilememesidir. Buna karşın $\bar{n}_e = n_d = 4.5\times10^{11} cm^{-2}$ yoğunluk değerinde, çok sayıda elektronun oluşturacağı perdeleme, potansiyeli daha fazla etkileyecektir.

6.2. Aharonov-Bohm İnterferometresi İçin Sonuçlar

AB etkisiyle ilişkili düşük boyutlu deneyler, her yerde tekdüze manyetik alan kullanımı nedeniyle bu etkiyi tam olarak göstermezler (Datta, 1995). Orijinal AB etkisiyle benzerlikler sadece geometride ve bir manyetik alanın varlığındaki bir faz olayındadır. Bu deneysel çalışmalardan birisi de Camino ve ark. (2005) tarafından çalışılan kuantum Hall rejimindeki bir kuantum elektron interferometresidir. Bu araştırmacılar dirençteki osilasyonları deneysel olarak gözleyebilmek için yüksek mobiliteli bir AlGaAs/GaAs heteroeklem malzemede, kimyasal yakma ile tanımladıkları halka etrafında kuantum Hall rejimi altında 2BEG içerisinde şekillenen sıkıştırılamaz şeritleri, orijinal AB etkisindeki elektron demetlerinin yerine kullanmışlardır. Böylelikle, bu etkiyi anlamak için sıkıştırılamaz şeritlerin dağılımı hakkında bir bilgiye sahip olmak oldukça önemlidir.

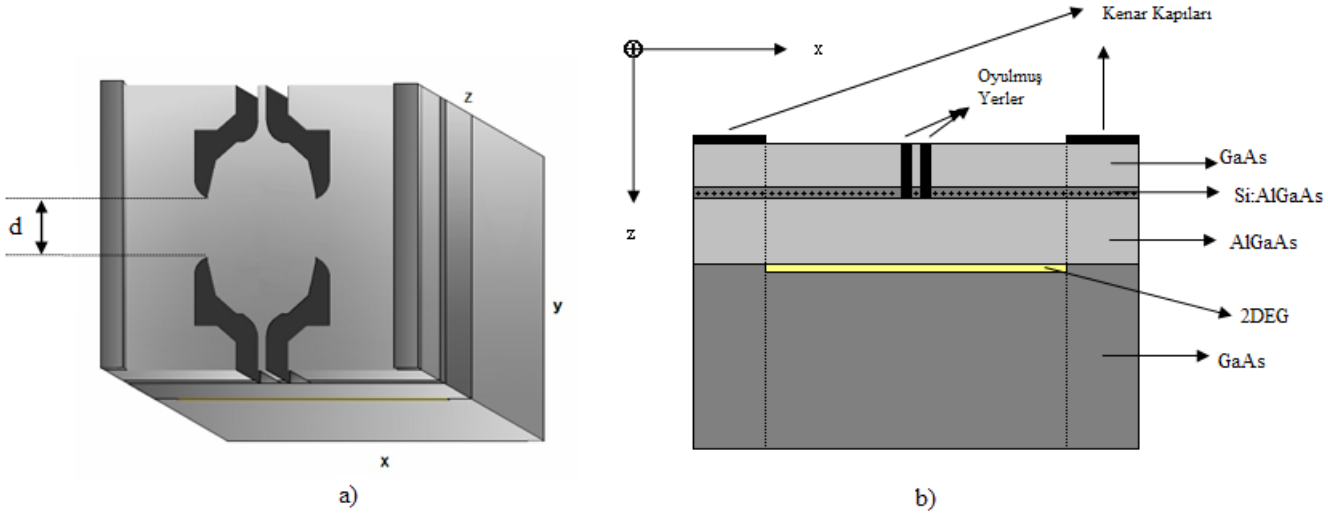
6.2.1. AB İnterferometresi İçin Kapı Gerilimi Taraması

Kuantum Hall olayı tabanlı araçlar üzerine teorik ve deneysel çalışmalar son yıllarda artmaktadır. MZ interferometresi gibi elektronik girişim aygıtlarının üretimine (Ji ve ark. 2003) yol açan nanoteknolojide, önemli ilerlemeler vardır. MZ interferometresinin başarılı olarak anlaşılması, benzer Hall olayı tabanlı araçlara olan ilgiyi uyarmıştır. Bu kuantum aygıtlarından biri de AB interferometresidir. AB interferometresi, alanlar sıfır olsa bile potansiyeller kullanarak kuantum mekaniksel etkilerin gözlenmesinden ibaret olan AB etkisidir (Aharonov ve Bohm, 1959). AB osilasyonlarını gözlemek için interferometreler, yüksek mobiliteli bir 2BEG üzerinde litografik yöntemlerle oluşturulabilir. Ancak, AB osilasyonlarını gözlemek için yapının boyutu, çok yüksek mobiliteli numunelerde 100 nm civarında olan faz uzunuluğu ile karşılaştırılabilir. Günümüzde kimyasal yakma yöntemlerindeki gelişmeler küçük, kuasi-balistik numunelere ve AB osilasyonlarının farklı durumlarının üretimine müsaade eder. Bu yönde son iki deneysel çalışma rapor edilmiştir. (Olshanetsky ve ark., 2005; Nomokonov ve Bykov, 2005).

KHO, AB osilasyonlarını gözlemede bir aygıt oluşturmak için bir alternatif sağlar. KHO koşulları altında sıkıştırılabilir ve sıkıştırılamaz şeritler, 2BEG kenarı boyunca şekillenirler ve kenar durumları olarak adlandırılırlar. Bazı son deneysel ve teorik çalışmalar göstermiştir ki akım, genellikle KHO koşulları altında sıkıştırılamaz

şeritler boyunca akar (Ahlswede ve ark., 2001; Güven ve Gerhardts, 2003). Böylece bu sıkıştırılamaz şeritler, elektron demetleri yerine kullanılabilir. Faz uzunluğu sıkıştırılamaz şeritte daha uzundur. Çünkü sıkıştırılamaz bir şeritte elektronlar, kollektif bir şekilde hareket ederler. Daha büyük boyutlara sahip bu yapılar bir AB interferometresini oluşturmak için KHO rejiminde kullanılabilir. Son zamanlarda Camino ve ark.(2005), Olshanetsky ve ark.(2005)'nın yaptığından yaklaşık olarak 10 kat büyük bir kuantum Hall olayı tabanlı AB interferometresi yapmışlardır ve kuantum Hall rejimi altında AB osilasyonlarını gözlemişlerdir. AB interferometresini anlamak için bu araştırmacılar, yüksek mobiliteli bir AlGaAs/GaAs heteroeklem malzeme kullanmışlardır. Yüzük şekilli bir yapı tanımlamak yerine kimyasal yakma ile disk şekilli bir yapı tanımlamışlardır ve AB halkası, bu disk etrafında şekillenen sıkıştırılamaz şeritlerle tanımlanır. Yapıyı tanımlayan oyuklar, sistemi sınırlamak için kullanılır ve aygıtın ön yüzündeki kapıların metalik katkıyla doldurulmasıyla elde edilir.

Bu kısımda teorik olarak Camino ve ark. (2005)'nın AB interferometre aygıtındaki sıkıştırılamaz şeritlerin kapı gerilimine ve kapı şekline olan bağımlılığı incelenmiştir. Ayrıca kapı gerilimi üzerine AB osilasyonlarının bağımlılığını ve kapı gerilimi varyasyonunun olası etkisini tartıştık. Burada kullanılan yaklaşım, orijinal olarak Gerhardts ve ark.(Güven ve Gerhardts, 2003; Lier ve Gerhardts, 1994; Oh ve Gerhardts, 1997; Siddiki ve Gerhardts, 2003; Siddiki ve Gerhardts, 2004) tarafından geliştirilmiştir ve bunu modifiye ederek keyfi geomerilere uygulabilir hale getirilmiş ve sistem üzerinden tüm yük nötralitesi korunmuştur.



Şekil 6.8. a) 3 boyutlu bir AB interferometresinin bir çizimi b) y yönü boyunca görülen AB interferometresinin şematik bir gösterimi

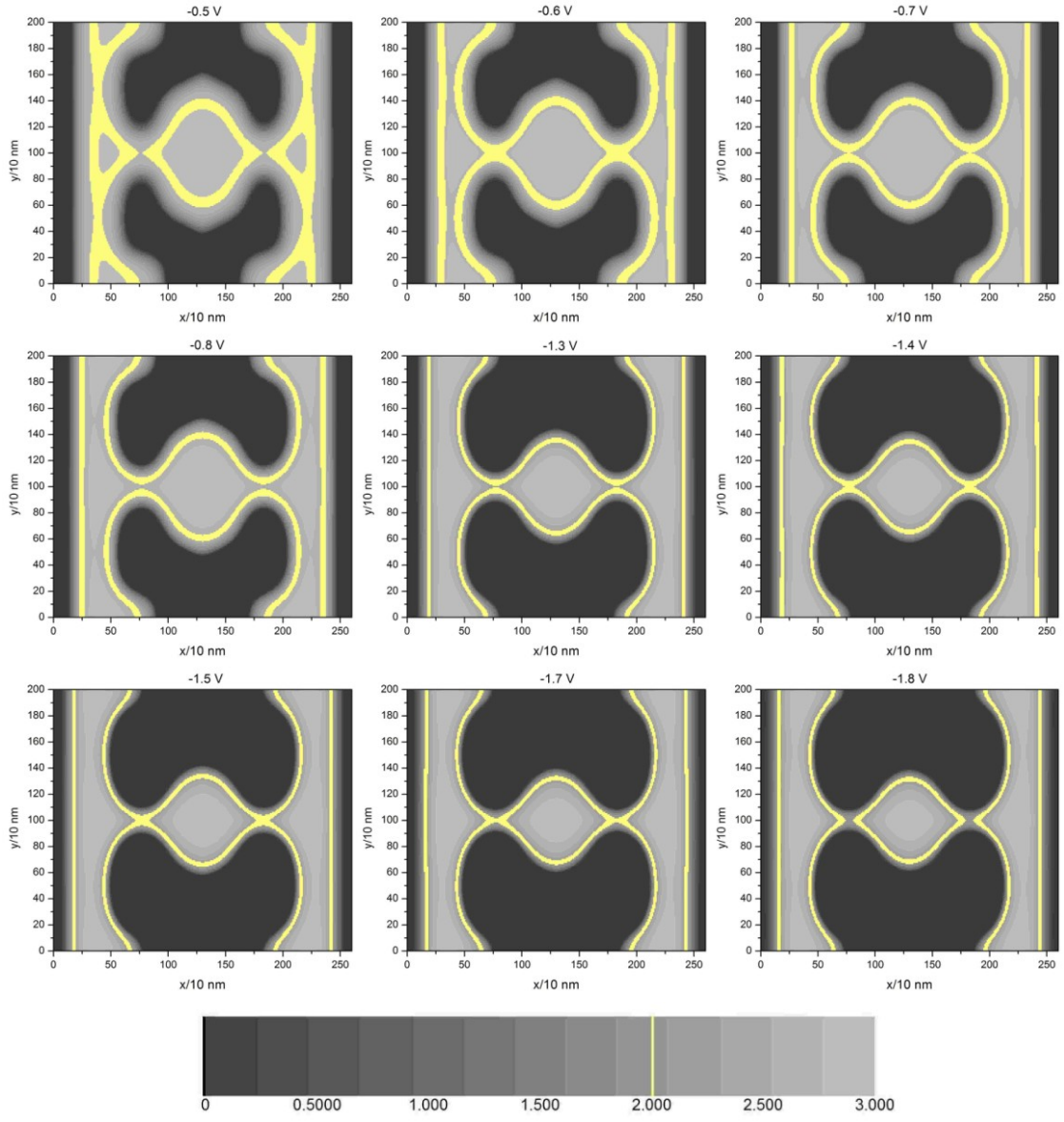
Camino ve ark.(2005)'nın AB interferometresi, epitaksiyel olarak büyütülmüş bir heteroyapının AlGaAs/GaAs arayüzünde bulunan 2BEG kullanılarak oluşturulmuştur. Onların AB interferometresini modellemek için bu çalışmada kullanılan yapı Şekil 6.8'de çizilmiştir. Yüzeydeki oyuklar, metalik kapılarla doldurulmuştur. Bu geometri için ne Davies'in analitik ifadeleri ne de ayna yük tekniği kullanılabilir. Böylece kapıların 3 boyutlu kompleks geometrisi, sistemin elektrostatiğinin tam bir tanımı için uygun sınır koşullarıyla Poisson denklemini nümerik olarak çözmeye zorlar.

Daha önce yapılan bir çalışmada (Cicek ve ark., 2010) AB interferometresindeki sıkıştırılamaz şeritlerin uzaysal dağılımı, sadece tek bir kapı potansiyeli için elde edilmiştir ve AB osilasyonlarının gözlenebilirliği ve sıkıştırılamaz şeritlerin uzaysal dağılımları arasındaki ilişki tartışılmıştır. Ancak Poisson denklemini sadece B=0 durumu için çözmüşler ve aynı sınırlayıcı potansiyeli, sonlu B durumu içinde kullanmışlardır. Böylece yaklaşımları, bizim burada tanımladığımız gibi tam olarak öz uyumlu değildir.

Hesaplamalarımızda, AB interferometresindeki sıkıştırılamaz şeritlerin uzaysal dağılımının uygulanan kapı gerilimlerine bağımlılığını inceledik. Bunu yapmak için Şekil 6.8'de gösterilen yapıyı göz önüne aldık. Yapının boyutları x, y ve z yönlerinde sırasıyla 2600 nm, 2000 nm ve 1000 nm alınmıştır. x yönündeki sınırlamayı sağlamak için x yönünde yapının kenarlarına iki yan kapı yerleştirdik. Bu kenar kapılarının genişliği 50 nm alınmıştır ve bu kapılara uygulanan gerilim -0.7 V alınmıştır. Camino ve ark.(2005)'nın deneysel düzeneğindeki gibi oyuk yerler yüzeyden 80 nm aşağıya kadar doldurulmuştur ve bu oyuklar metalik kapılar olarak düşünülmüştür. 2BEG yüzeyden 210 nm aşağıdadır. Sabit bir manyetik alan şiddeti B=3 Tesla düşündük ve sıcaklık T=1.4 K'dir. n_d iyonize donor yoğunluğu, $n_d = 0.97 \times 10^{11} cm^{-2}$ olarak alınmıştır ve yukarıda değinildiği gibi tüm yükler üzerinden nötralite korunmuştur. Kapılar arasındaki mesafenin etkisini belirlemek için hesaplamaları üç farklı kapı mesafesi için yaptık (Bu mesafe Şekil 6.8'de d olarak belirtilmiştir).

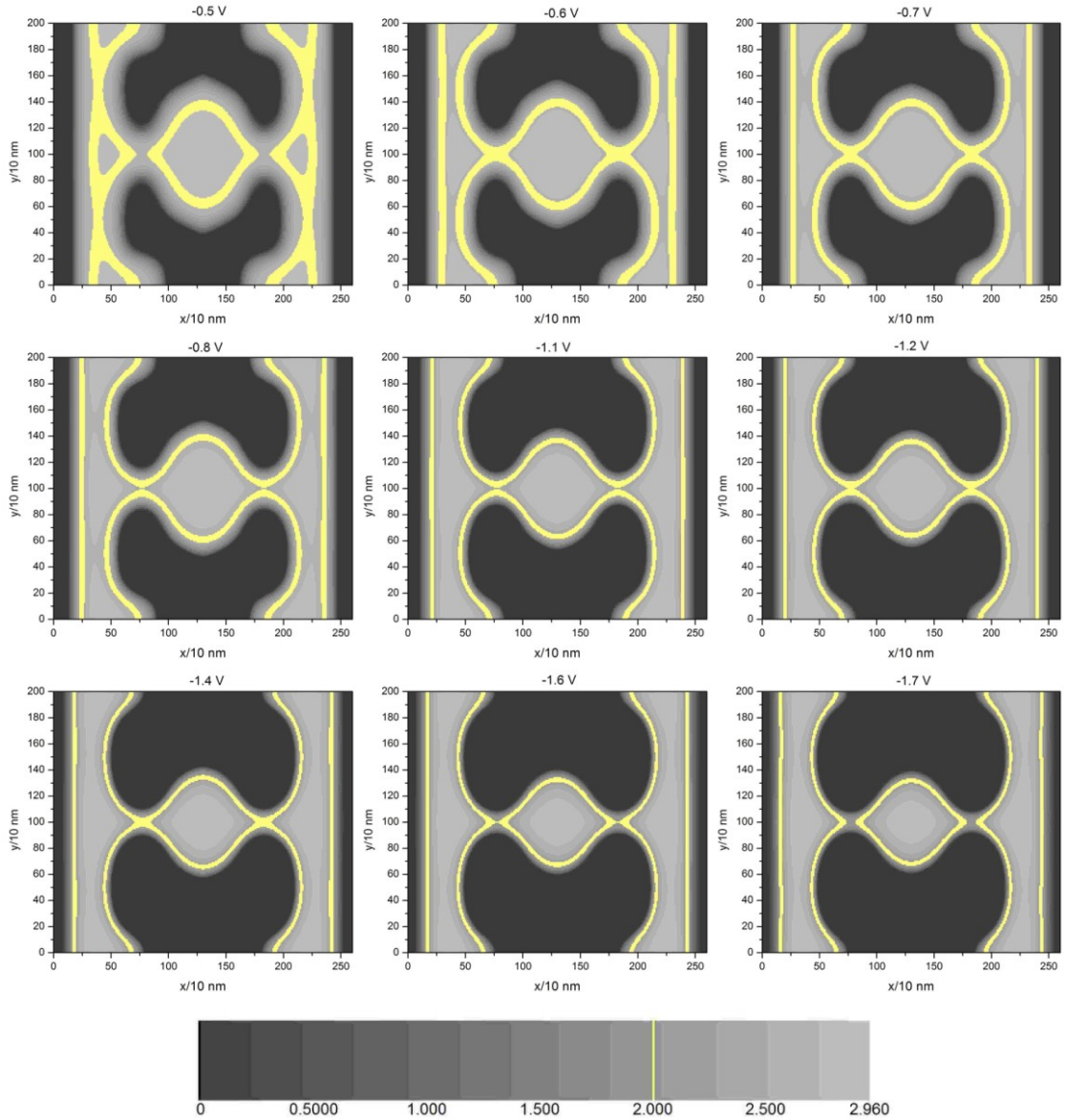
430 nm'lik bir kapı mesafesi için sonuçlar Şekil 6.9'da gösterilmiştir. Burada dokuz tane panel vardır ve bu panellere denk gelen kapı potansiyel değerleri panelin üstünde belirtilmiştir. Her panel 2BEG elektron yoğunluğunun bir kontur çizimini gösterir, bir Landau seviyesinin tam dolu olduğu sıkıştırılamaz şeritler sarı renkte gösterilmiştir. Şekil 6.9'dan da görüldüğü gibi boğazlardaki (kapılar arasındaki

boşluklar) sıkıştırılamaz şeritler, -0.5 V'a kadar kapı gerilimleri için üst üste binmez. Eğer kapı gerilimi artırılırsa, sıkıştırılamaz şeritler üst üste binmeye başlar. Sıkıştırılamaz şeritler üst üste bindiğinde boğaz, bir elektron demet yarıcı gibi davranır ve AB osilasyonları gözlenebilir. Ancak -0.7 V civarında sıkıştırılamaz şeritler yeniden ayrılır böylelikle AB osilasyonları daha fazla gözlenemez. Kapı voltajındaki daha ileri bir artış -1.4 V civarında sıkıştırılamaz şeritler ikinci bir üst üste binmesine yol açar, böylece yeniden AB osilasyonları gözlenebilir hale gelir. Kapı geriliminin daha fazla artışı -1.8 V civarında sıkıştırılamaz şeritleri ayırır ve AB osilasyonları kaybolur.



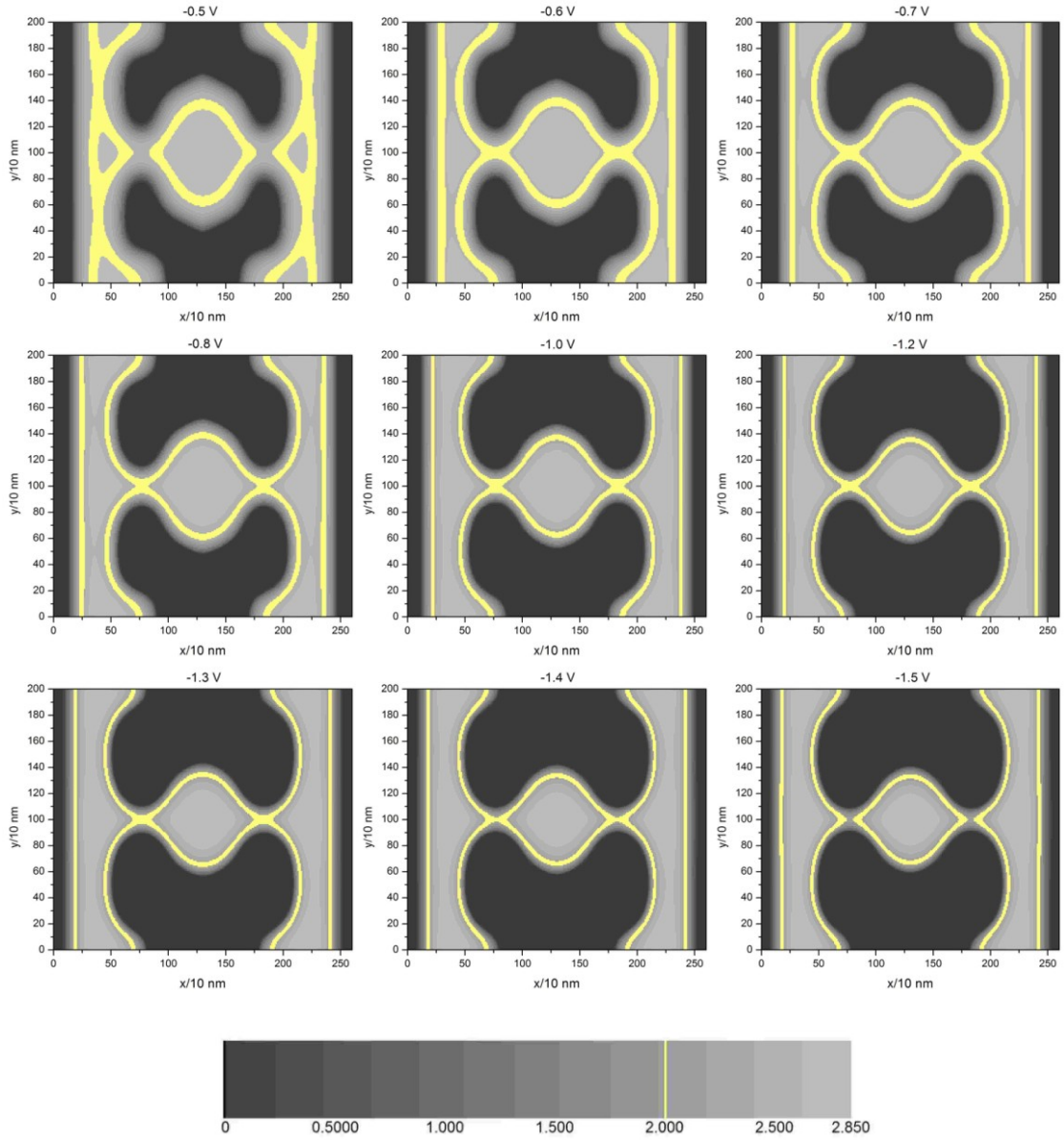
Şekil 6.9. Farklı kapı gerilimleri için elektron dağılımlarının kontur grafikleri. Kapılar arası d mesafesi 430 nm'dir. Renk skalası grafiklerin altında verilmiştir. Sıkıştırılamaz şeritler sarı olarak gösterilmiştir.

420 nm'lik bir kapı aralığı için sonuçlar Şekil 6.10'da gösterilmiştir. Şeklin düzenlenimi Şekil 6.9'a benzemektedir. Sıkıştırılamaz şeritlerin genel davranışı, 430 nm'lik kapı aralığı için olan duruma benzemektedir. Bu sefer durumların üst üste binmesi -0.6 V'da başlar, -0.8V'da ayrılır, -1.2V'da yeniden üst üste binerler ve sıkıştırılamaz şeritler sonunda -1.7V'da ayrılır. Daha dar bir kapı aralığına sahip olmak daha küçük bir aralığa neden olur bu aralık, AB osilasyonlarının gözlenemediği potansiyel aralığıdır. Ancak toplam potansiyel aralığının genişliği fazla değişmez.



Şekil 6.10. Farklı kapı gerilimleri için elektron dağılımlarının kontur grafikleri. Kapılar arası d mesafesi 420 nm'dir. Renk skalası grafiklerin altında verilmiştir. Sıkıştırılamaz şeritler sarı olarak gösterilmiştir.

Şekil 6.11, 410 nm'lik bir kapı aralığı için çeşitli kapı gerilimlerindeki sıkıştırılamaz şeritlerin uzaysal dağılımını gösterir. Bu durumda sıkıştırılamaz şeritlerin üst üste binmesi yeniden -0.6 V'da başlar, ancak, bu sefer kapı gerilimini artırmak -1.5 V'a kadar AB osilasyonlarının bir kesişimine yol açmaz. AB osilasyonları tüm aralıkta gözlenebilir olmasına rağmen osilasyonların genliği kapı gerilimi ile değişir. Bu genlik değişimi, sıkıştırılamaz şeritlerin üst üste binmesine göre açıklanabilir. Boğazlar arasındaki sıkıştırılamaz şeritlerin girişim bölgesinin ortalama yarıçapı, büyük olduğunda girişimin güçlü olduğu düşünülebilir ve üst üste binme küçük olduğunda girişim de zayıf hale gelecektir.



Şekil 6.11. Farklı kapı gerilimleri için elektron dağılımlarının kontur grafikleri. Kapılar arası d mesafesi 410 nm'dir. Renk skalası grafiklerin altında verilmiştir. Sıkıştırılamaz şeritler sarı olarak gösterilmiştir.

Camino ve ark.(2005), orijinal deneysel çalışmalarında, kapı potansiyellerini sabit tutup manyetik alan şiddeti üzerinden bir tarama yapmışlardır. Burada biz gösterdik ki manyetik alanı sabit tutmak ve kapı potansiyellerinin bir taramasını yapmak AB osilasyonlarınındaki benzer bir gözlenime neden olacaktır. AB interferometresinde gözlenen osilasyonların sayısı, elektron demetleri ile çevrelenmiş manyetik akı kuantası sayısındaki değişime eşit olacaktır. Kapı potansiyelini değiştirdiğimizde sadece sıkıştırılamaz şeritler ile çevrelenmiş alanı değiştiririz bu yüzden manyetik akı kuantasındaki değişim, manyetik alanın değişimiyle karşılaştırıldığında oldukça küçük kalacaktır. Böylelikle kapı potansiyeli taramasıyla gözlenebilecek sadece birkaç osilasyon beklenir.

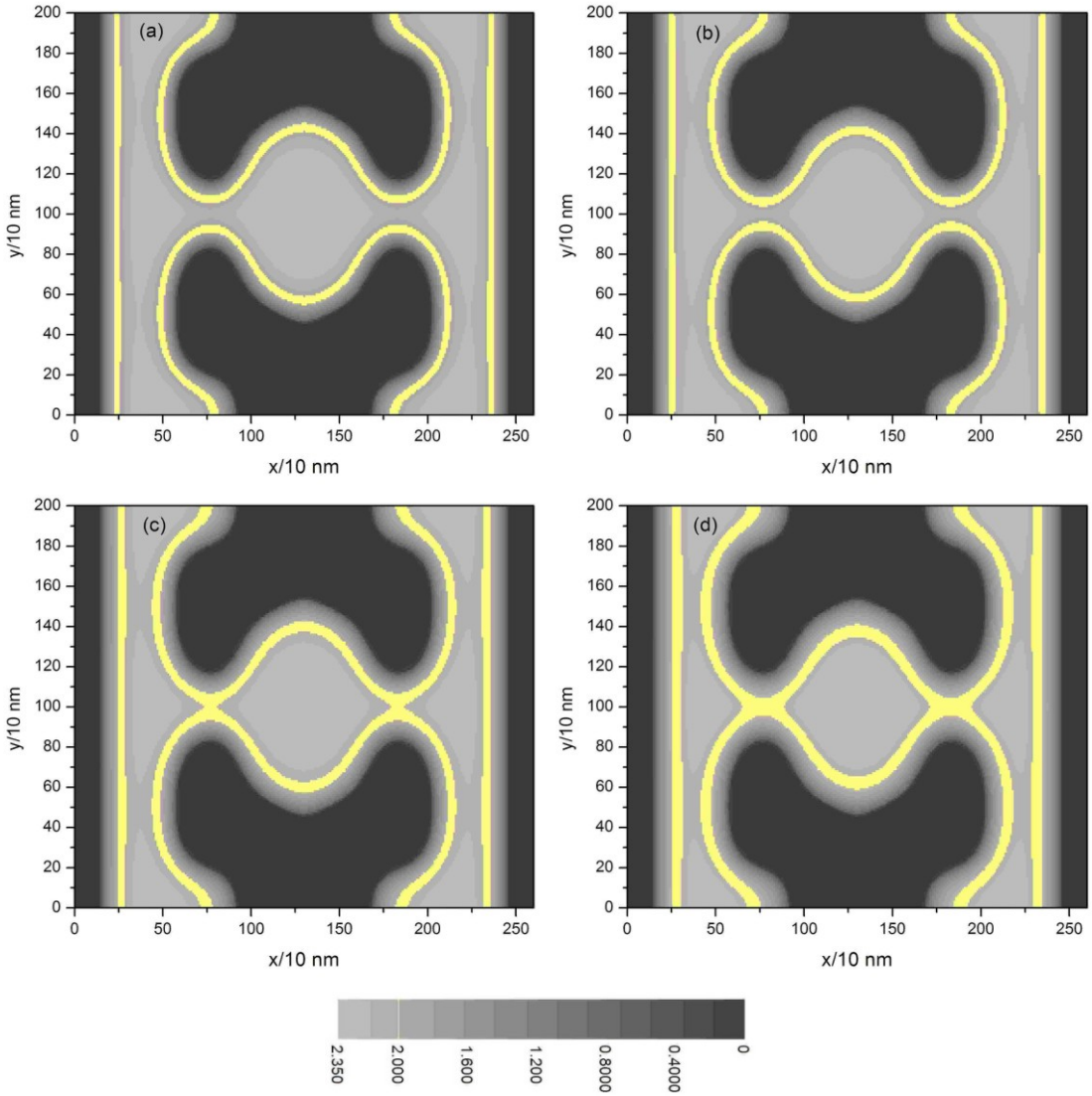
Bu kısımdaki hesaplamalar ardışık durulma yöntemiyle yapılmıştır ve sonuçlar *Superlattices and Microstructures* dergisine sunulmuş olup kabul edilmiştir (Öztürk ve ark., 2012).

6.2.2. AB İnterferometresi İçin Manyetik Alan Taraması

Manyetik alanın etkisini gözleyebilmek için Şekil 6.8'de çizilmiş yapıya farklı manyetik alan şiddetleri uygulanarak sıkıştırılamaz şeritlerin birbiriyle teması gözlenmeye çalışılmıştır. Şekil6.8'deki kapılar oyuklara doldurulmuştur. Deneysel çalışmayla benzerlik için Şekil6.8'deki oyuklu yapıyı düşündük. Kapılar bu oyukların yüzeyden 80 nm aşağıya doğru doldurulmasıyla elde edilir. Tüm kapılara uygulanan potansiyel -0.7 V değerindedir. x yönünde yapının kenarına doğru iki kapı yerleştirdik. Bu kapıların genişliği 50 nm'dir, yapının y yönündeki uzunluğu 2000 nm'dir. 2BEG yüzeyden 210 nm aşağıdadır. Ortalama elektron yoğunluğu n_e ve iyonize donor yoğunluğu n_d, $n_d = n_e = 0.97 \times 10^{11} cm^{-2}$ şeklinde eşit alınmıştır böylelikle tüm yükler üzerinden nötralite sağlanmıştır. x,y ve z yönlerinde yapının boyutları sırasıyla 2600 nm, 2000 nm ve 1000 nm alınmıştır.

Tamamıyla dolu Landau seviyeleriyle şekillenen sıkıştırılamaz şeritler doluluk çarpanı $\upsilon = n_{el} h / eB$ nin çift bir tamsayıya eşit olduğu yerde bulunurlar. AB benzeri bir yapıda bunu elde etmek için sıkıştırılamaz şeritler bir manyetik akı ile çevrelenmiş dairesel bir yol oluşturmalıdırlar. Sonuçlar Şekil 6.12'de gösterilmiştir burada doluluk çarpanları farklı manyetik alan değerleri için uzaysal koordinatların bir fonksiyonu olarak gösterilir. Şekil 6.12'de gösterildiği gibi, manyetik alanın farklı değerleri için

sıkıştırılamaz şeritler elektron dağılımında kolayca görülebilir, sıkıştırılamaz şeritler doluluk çarpanı ikiye denk gelmektedir ve sarı renkle belirtilmiştir. Şekil 6.12a'da manyetik alan 2.8 T'dedir, sıkıştırılamaz şeritler gözlenir ancak birbiriyle temas etmez. Manyetik alanın bu değerinde bir girişim örneği gözlemeyi beklemeyiz. Şekil 6.12b'de manyetik alan şiddeti 2.9 T dır, burada sıkıştırılamaz şeritler birbirine yaklaşır ancak hala üst üste binme yoktur ve yine bir girişim beklenmez. Şekil 6.12c ve 6.12d sırasıyla 3.0 T ve 3.1 T 'ya karşılık gelir, manyetik alanın bu değerlerinde sıkıştırılamaz şeritler birbirine dokunur ve bir girişim deseninin gözlenmesini bekleriz. Eğer manyetik alanı daha fazla artırırsak sıkıştırılamaz şeritler tekrar ayrılacaktır (bu sefer dikey yönde) ve yeniden bir girişim gözlenmeyecektir. Burada elde edilen sıkıştırılamaz şeritlerin genel davranışı Camino ve ark. (2005)'nın deneysel sonuçlarıyla uyumludur. Buradaki hesaplamalar multgrid yöntemiyle yapılmış olup sonuçlar HMF-19*(The 19th International Conference on the Application of High Magnetic Fields in Semiconductor Physics and Nanotechnology)*'da tam metinli poster olarak sunulmuştur (Ozturk ve ark., 2011).



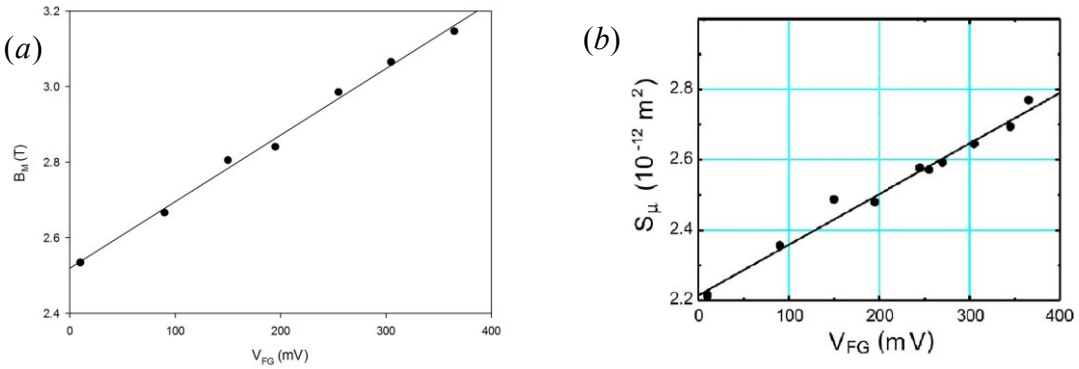
Şekil 6.12. Farklı manyetik alan değerleri için doluluk çarpanlarının kontur grafikleri. Sarı renk doluluk çarpanı iki için sıkıştırılamaz şeritleri belirtir.

6.2.3. Sıkıştırılamaz Şeritlerin Çevrelediği Alan ve AB Osilasyonları

AB interferometresi deneylerinde yapınının boyuna direnci, manyetik alanın değişimiyle birlikte salınımlar yapar. Elektron demetleri arasında kalan bölgenin çevrelediği magnetik akının bir magnetik akı kuantası kadar artması, dirençteki bir tam osilasyona karşılık gelir. Sıkıştırılamaz şeritler, kapalı bir alan oluşturacak şekilde birbirleri ile temas etmezlerse AB osilasyonları da gözlenmez. Manyetik alana bağlı olarak meydana gelen osilasyonların periyodunun büyüklüğü (ΔB) eğer uygulanan manyetik alanın şiddetinden çok küçükse, bu periyot sıkıştırılamaz şeritlerin oluşturduğu kapalı alanın büyüklüğüyle ters orantılıdır:

$$S_m = \frac{\Phi_0}{\Delta B} \qquad (6.1)$$

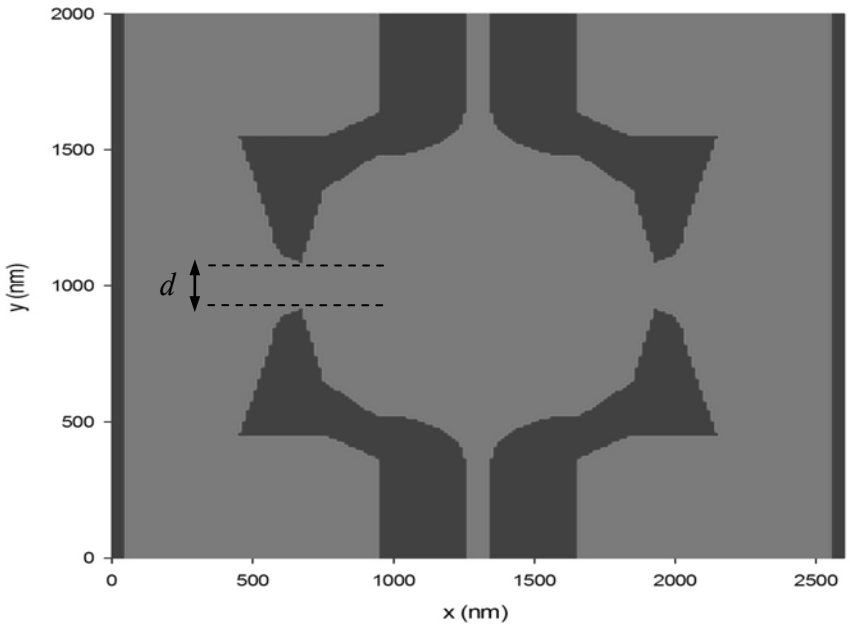
Burada $\Phi_0 = \frac{h}{e}$ magnetik akı kuantası ve S_m çevrelenen alandır. Deneysel olarak osilasyon periyodu belirlenerek buradan kapalı alanın büyüklüğü elde edilebilir. Yukarıda bahsedilen deneysel düzeneği kullanarak Camino ve ark.(2005) bu alanın uygulanan kapı gerilimi ile değişimini incelemişler ve Şekil 6.13'de verilen sonuçları elde etmişlerdir.



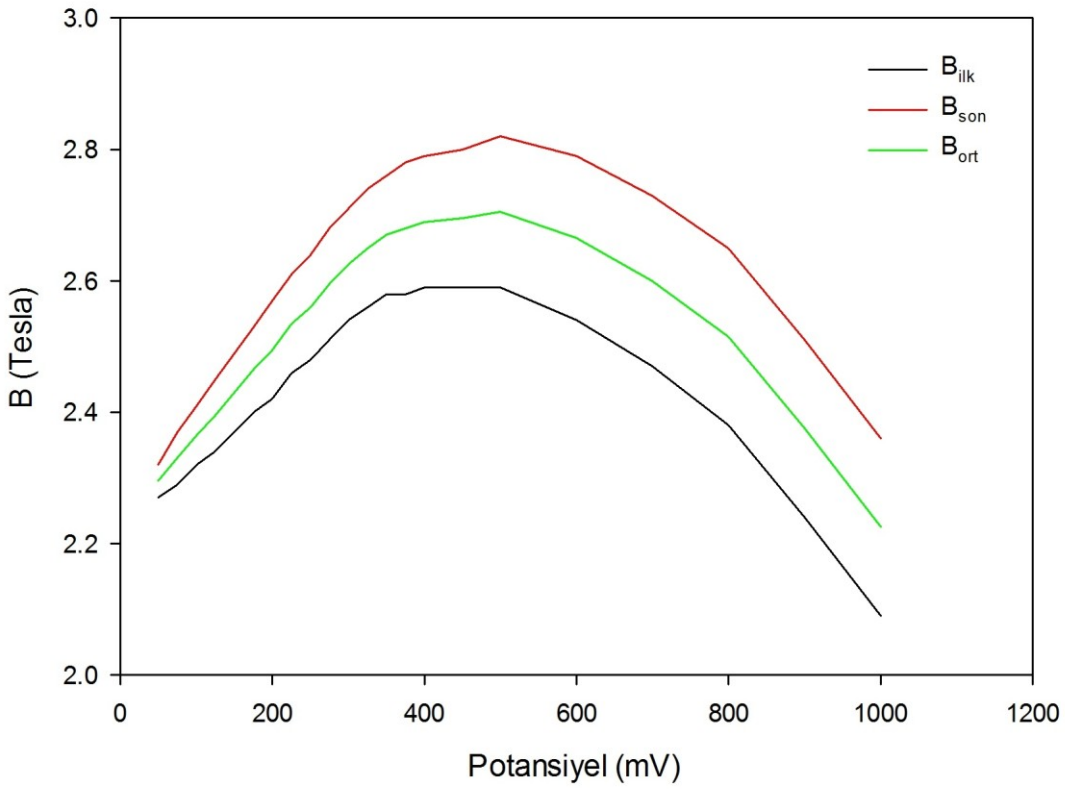
Şekil 6.13. a) Ortalama manyetik alanın uygulanan kapı gerilimine göre grafiği b) Osilasyon esnasında hesaplanan alanın uygulanan kapı gerilimine göre grafiği (Şekil Camino ve ark.(2005)'dan alıntılanmıştır).

Bu çalışmada, oluşan bu kapalı alanın uygulanan kapı gerilimi ve manyetik alanla değişimini teorik olarak incelemek için Şekil 6.8'deki geometriye benzer bir geometri alınmış ancak kapıların derinde değilde sadece yüzeyde olduğu varsayılmıştır. Kapılar arası mesafe olarak tanımlanan d, 160 nm alınmıştır. Kullanılan kapı geometrisi Şekil 6.14'de ayrıntılı olarak gösterilmiştir. Bu kapılara uygulanan belirli gerilimlerde AB osilasyonlarının gözlenmesi beklenen sıkıştırılamaz şeritlerin birleşerek kapalı bir alan oluşturacağı manyetik alan değerlerini belirlemek için, manyetik alan taraması yapılmıştır. Taramaya kapı gerilimi V_g=-50 mV'dan başlanmış ve -400 mV'a kadar -25 mVluk aralıklarla gidilmiştir. Daha sonra, daha yüksek kapı gerilimlerindeki etkiyi gözeleyebilmek için -100 mV'luk aralıklarla, -1000 mV'a kadar her bir kapı geriliminde manyetik alan taraması yapılmıştır. Burada yine daha önce yaptığımız gibi x yönünde yapının kenarına doğru genişliği 50 nm olan iki kapı yerleştirilmiş ve bunlara uygulanan gerilimler -0.7 V alınmıştır. Ortalama elektron yoğunluğu ve iyonize donor yoğunluğu $0.97 \times 10^{11} cm^{-2}$ olarak eşit alınarak tüm yükler üzerinden nötralite sağlanmıştır. x,y ve z

yönlerinde yapının boyutları sırasıyla 2600 nm, 2000 nm ve 1000 nm alınmıştır. 2BEG yüzeyden 130 nm aşağıda olup donorlar 60 nm derinliktedir.

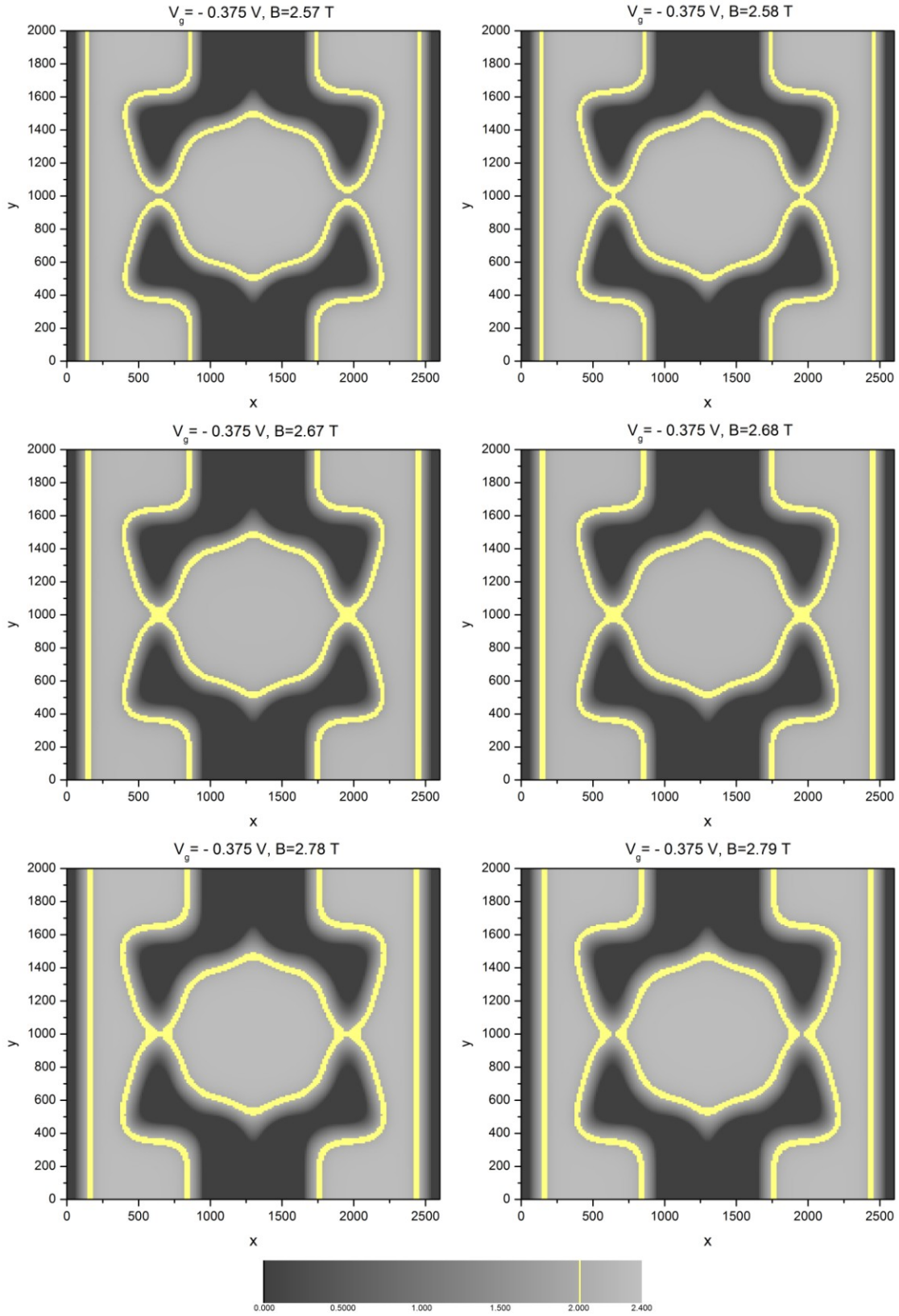


Şekil 6.14. Kapılar arası mesafenin *d*=160 nm alındığı farklı bir AB interferometresi şekli



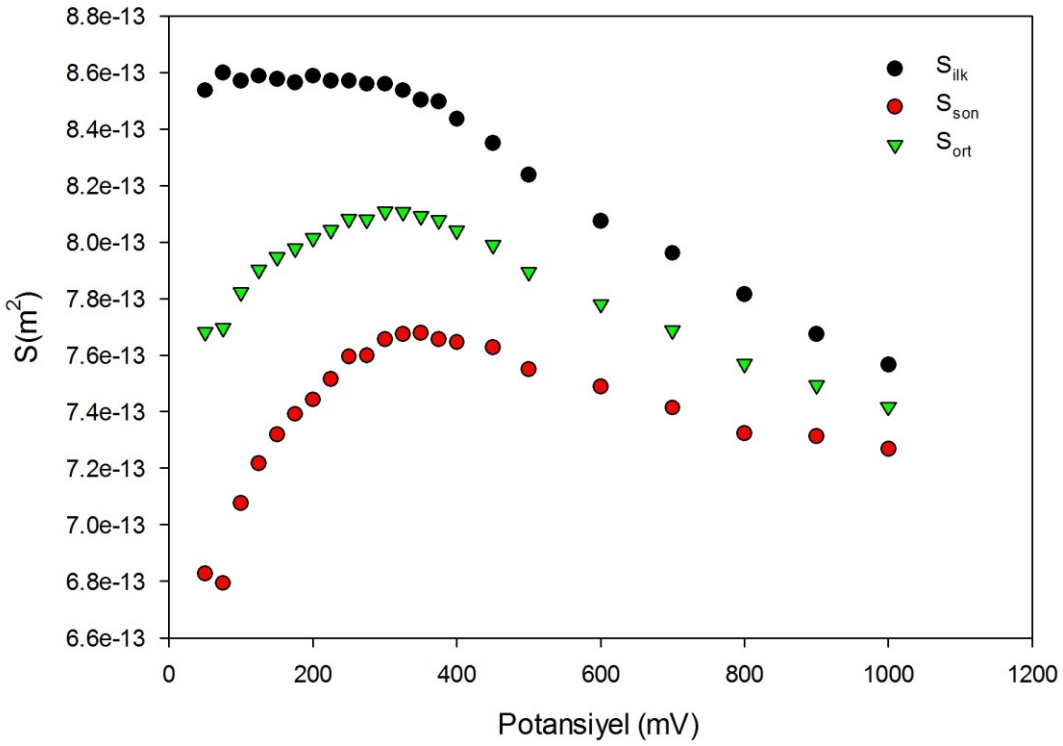
Şekil 6.15. AB interferometresinde sıkıştırılamaz şeritlerin kapalı bir alan oluşturduğu yani osilasyonların gözlemlenmesi beklenen en düşük manyetik alan (B_{ilk}), ve en yüksek manyetik alan (B_{son}) ve bunların ortalama değerlerinin (B_{ort}) uygulanan kapı gerilimine karşı grafikleri.

Sıkıştırılamaz şeritlerin birleşerek çevrelediği kapalı alanlar belirli manyetik alan değerleri arasında gözlenmiş olup şeritlerin ilk olarak birleştiği ve yeniden ayrıldığı alanlar ve ortalama değerleri Şekil 6.15'de çizilmiştir. Şekil 6.15'deki siyah çizgi kapalı alanın oluştuğu ilk manyetik alan değerleridir (B_{ilk}). Bu değerde sıkıştırılamaz şeritler birbirine temas etmeye başlar ve farklı sıkıştırılamaz şeritler boyunca ilerleyen elektronların girişimi sonucunda osilasyonlar gözlemlenmeye başlar. Kırmızı çizgi ise temasın kesildiği andaki manyetik alan değerlerine karşılık gelen yani, osilasyonun bittiği andaki manyetik alan değerleridir (B_{son}). Yeşil çizgi ise ilk manyetik alan ve son manyetik alan değerlerinin ortalamasıdır (B_{ort}). Hesaplamalarımız sonucunda kapı geriliminin neredeyse 375 mV'a kadar olan değerleri için, bu en düşük ve en yüksek manyetik alan değerleri uygulanan kapı gerilimi ile hemen hemen lineer bir artış göstermektedir. Camino ve ark.(2005) da deneysel çalışmalarında bu kapı gerilimi bölgesinde benzer sonuçlar elde etmişlerdir (Şekil 6.13b). Şekil 6.15'te bu noktadan sonra manyetik alan değerlerinin önce bir maksimuma ulaşıp daha sonra da düşüşe başladığı görülmektedir. Yaklaşık olarak lineer davranışın sona erdiği kapı geriliminin 375 mV değeri için sıkıştırılamaz şeritlerin manyetik alanla değişimi Şekil 6.16'da gösterilmiştir. Şekil 6.16'da B=2.57 T'da sıkıştırılamaz şeritler birbiriyle temas etmemektedirler. Manyetik alan B=2.58 T'ya çıkartıldığında sıkıştırılamaz şeritler birbirileriyle temas ederek, kapalı alanı oluşturmaya başlarlar. Kapalı alan oluşumu, manyetik alan B=2.78 T'da son kez gözlenir B=2.79 T'da sıkıştırılamaz şeritler birbirinden ayrılır ve temas kesilir.



Şekil6.16. V_g= -0.375 V için farklı manyetik alan değerlerinde sıkıştırılamaz şeritlerin kapalı alan oluşturması. Renk skalası grafiklerin altında verilmiştir. Sıkıştırılamaz şeritler sarı olarak gösterilmiştir.

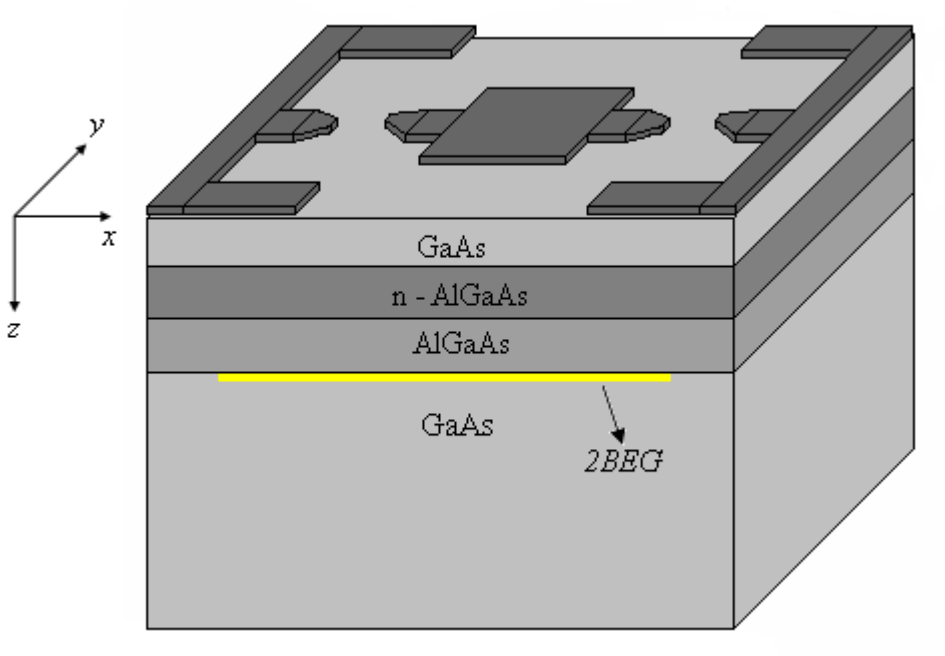
Şekil 6.17'de sıkıştırılamaz şeritlerin oluşturduğu kapalı alanlar hesaplanmış olup kapı gerilimine karşı grafikleri çizilmiştir. Burada siyah noktalar osilasyonun başladığı ilk andaki kapalı alanlara (S_{ilk}) karşılık gelmektedir. Kırmızı noktalar ise osilasyonun sona erdiği andaki son kapalı alanlara (S_{son}) karşılık gelmektedir. Yeşil ters üçgenler ise bu alanların ortalama değerlerine (S_{ort}) karşılık gelmektedir. 375 mV'a kadar ilk kapalı alanların neredeyse sabit kaldığı, son ve ortalama kapalı alanların neredeyse lineer bir şekilde arttığı gözlenmektedir. 375 mV'dan sonra kapalı alan büyüklükleri beraber düzgün bir şekilde azalmaya başlamıştır. Grafikten de görüldüğü gibi deneysel ölçümler esnasında kullanılan $S_m = \frac{\Phi_0}{\Delta B}$ ifadesinin türetilmesi, kapalı alanın büyüklüğünün magnetik alanla birlikte değişmediği varsayımına dayalıdır. Ancak Şekil 6.17'de de görüldüğü gibi kapalı alanın büyüklüğü, özellikle düşük kapı gerilimlerinde magnetik alanla önemli ölçüde (%10-%20) değişir. Dolayısıyla deneysel olarak verilen alan büyüklükleri, ortalama bir ΔB periyodu kullanılarak elde edildiğinden deneysel değerlerin magnetik alan penceresinin orta noktasına karşılık geldiği kabul edilebilir. Bu değerleri gösteren Şekil 6.17'deki ters üçgen formundaki veriler kapı geriliminin yaklaşık 350mV değerine kadar deneysel verilerde olduğu gibi lineer bir artış göstermektedir. Ancak bu noktadan sonra kapalı alanın büyüklüğü önce bir maksimuma ulaşmakta, ondan sonra tekrar azalarak sabit bir değere yakınsamaktadır. Bu yüksek kapı gerilimleri bölgesinde deneysel veriler olmadığı için karşılaştırma yapılamamıştır. Ancak bu davranış beklentilerimize uygundur. Şöyle ki kapı geriliminin düşük değerlerinde potansiyel daha yumuşak bir değişim gösterdiği için sıkıştırılamaz bantlar oldukça geniştir. Gerilimin artmasıyla birlikte bantların daralması, çevrelenen alanın artmasına yol açar. Öte yandan gerilimin artışı, bantları içeri doğru ötelediği için alanda bir azalmaya sebep olur. Birbirine ters yönde gelişen bu iki etkiden birincisi düşük gerilimlerde baskındır ve kapı geriliminin artışıyla bantlar önce hızla daralır, daha sonra bant genişlikleri yaklaşık aynı kalır. Dolayısıyla yüksek kapı gerilimlerinde ikinci etki daha baskın hale gelir ve kapalı alan azalmaya başlar. Kapı gerilimi çok arttığında kapalı alan, artık kapıların fiziksel geometrisi ile belirlenen sabit bir değere yakınsar. Zaten çok yüksek kapı gerilimlerine doğru ilerlendiğinde AB osilasyonlarının belirli bir kesilim değerinden sonra tamamen kaybolması beklenir.



Şekil 6.17. Sıkıştırılamaz şeritlerin oluşturduğu kapalı alanın uygulanan kapı gerilimlerine karşı grafiği.

6.3. Mach-Zehnder İnterferometresi İçin Sonuçlar

MZ interferometresi için yapılan çalışmalarımızda Siddiki ve ark.(2008) ve Kavruk (2010)'un çalışmalarındaki geometrinin bir benzerini kullandık. Bu geometri Şekil 6.18'de gösterilmiştir. Burada kapılar heteroyapının üzerine yerleştirilmiştir. Sağ ve sol taraftaki uzun dikdörtgen kapılar elektronları o bölgeye hapsetmemizi sağlar. Yaptığımız hesaplamalarda bu dikdörtgen kapılara uygulanan gerilim -1.5 V alınmıştır. Ortadaki büyük kare kapıya uygulanan gerilim -1.5 V, diğer dörtgen kapılar -1.0 V alınmıştır. Üçgen şekilli kapılar kuantum nokta kontak olarak adlandırılır. MZ interferometresi için hesaplamalar, yapıya uygulanan manyetik alanın değişimi ve kuantum nokta kontaklara uygulanan gerilimin değişimi için yapılmıştır. Yapının boyutları daha önce kuantum Hall çubuğuyla aynı olup x yönünde 2600 nm, y yönünde 2000 nm ve z yönünde 1000 nm dir ve 2BEG yüzeyden 90 nm, donor tabakası da 50 nm aşağıdadır. Burada ortalama elektron yoğunluğu $\bar{n}_e$ ve donor yoğunluğu n_d, $\bar{n}_e = n_d = 3.0 \times 10^{11} cm^{-2}$ olacak şekilde eşit alınmıştır.

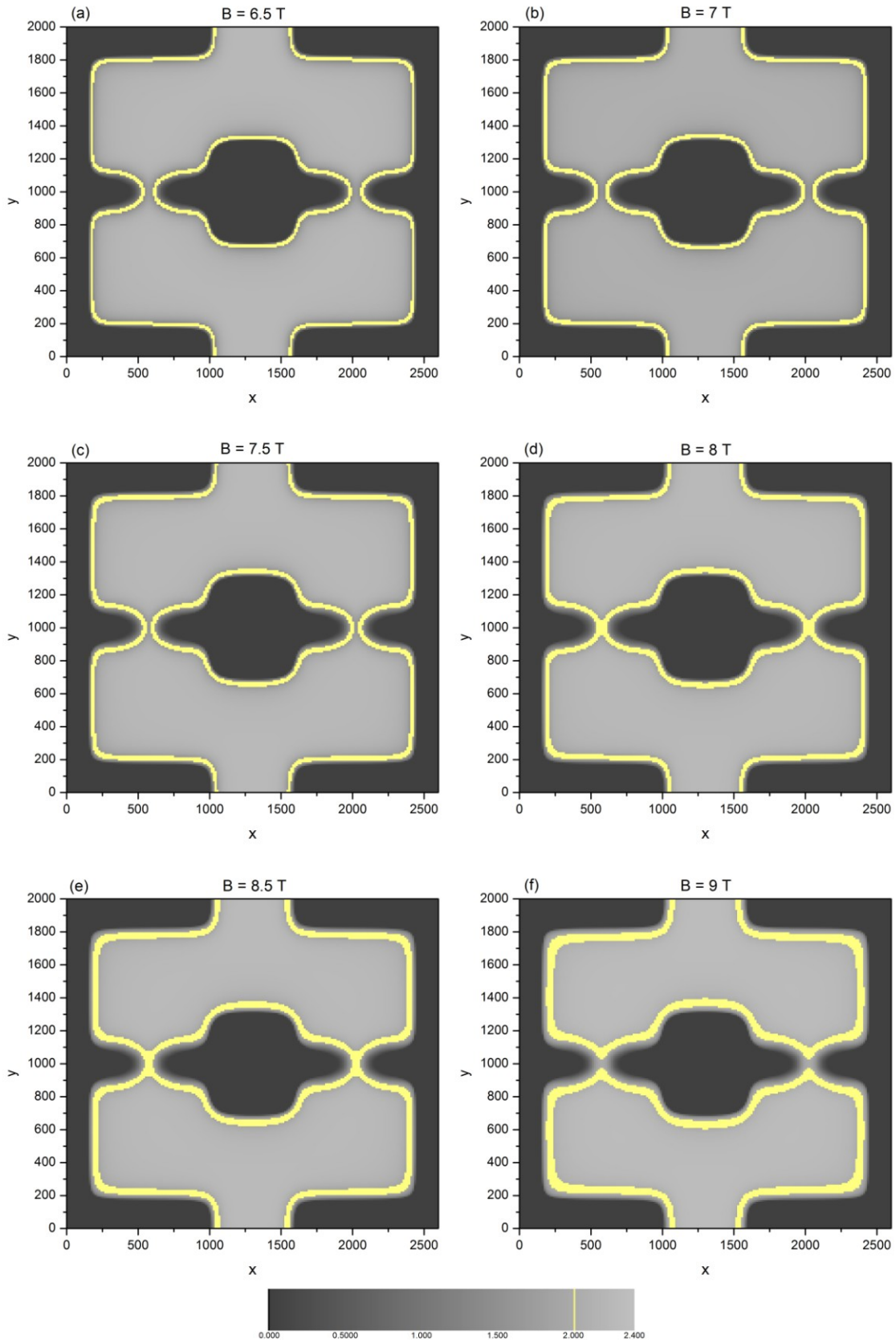


Şekil 6.18. Bir Mach-Zehnder interferometresinin şematik görünümü.

6.3.1. MZ İnterferometresi İçin Manyetik Alan Taraması

Şekil 6.18'deki yapıda kuantum nokta kontaklar -0.7 V da tutulup, 1.4 K sıcaklıkta yapıya uygulanan manyetik alan 6.5 T' dan 9 T' ye kadar değiştirilirse

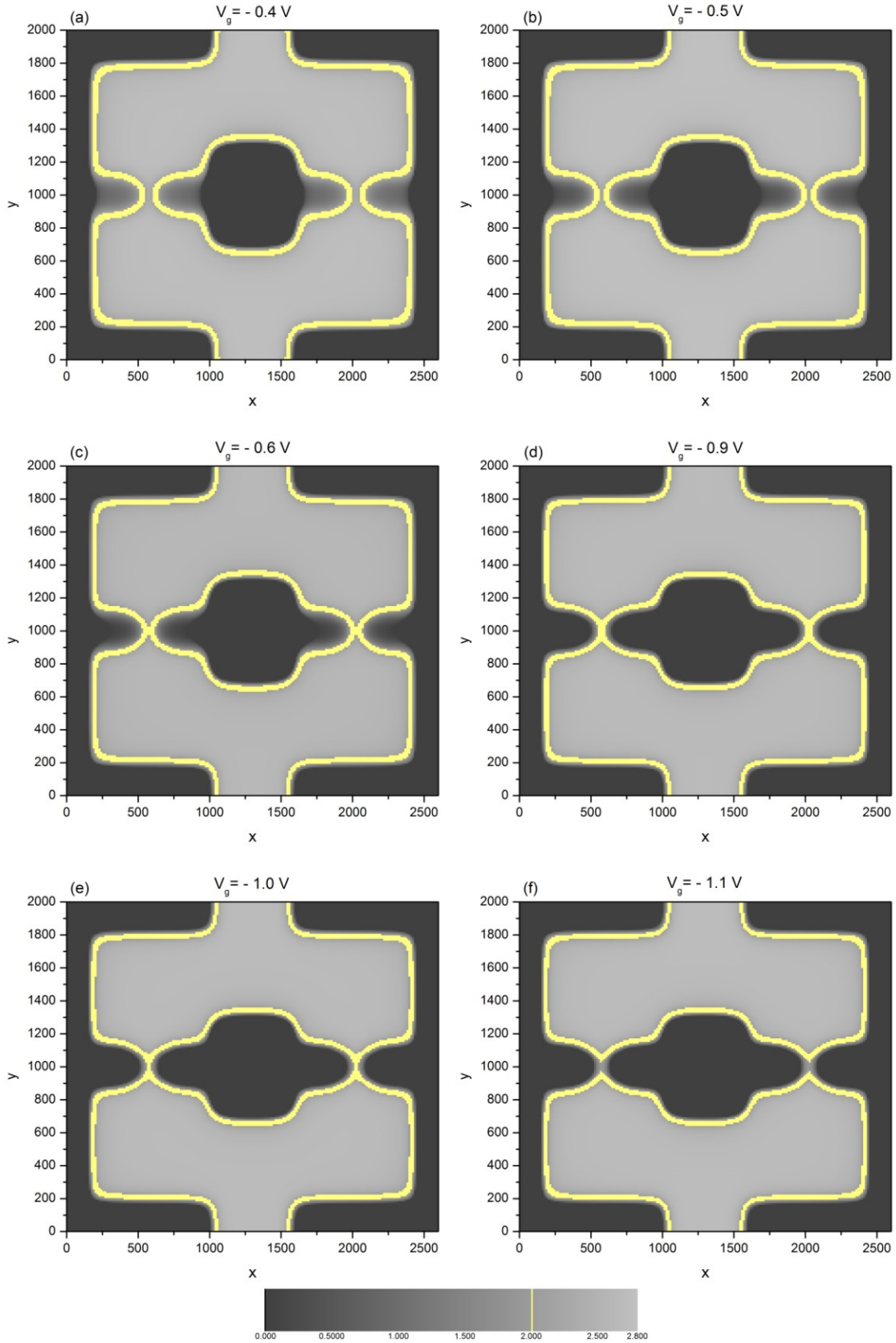
Şekil 6.19 elde edilir. Şekil 6.19a'da uygulanan manyetik alan 6.5 T olup, sıkıştırılamaz şeritlerde herhangi bir temas görülmemektedir. Şekil 6.19b ve 6.19c'de manyetik alan 7 T ve 7.5 T olup sıkıştırılamaz şeritler birbirlerine yaklaşmaya başlar. Şekil 6.19d ve 6.19e'de manyetik alanlar sırasıyla 8 T ve 8.5 T olup sıkıştırılamaz şeritlerin birbirine temas ettiği görülmektedir ve bu değerlerde sıkıştırılamaz şeritlerin bir girişim olayı oluşturduğu söylenebilir. Şekil 6.19f'de ise manyetik alan 9 T şeritlerin birbirinden ayrılması net bir şekilde görülmektedir. Böylelikle yapıya uygulanan manyetik alandaki bir tarama ile sıkıştırılamaz şeritlerin birbiriyle teması sağlanıp MZ interferometresindeki girişim olayı gözlenebilir.



Şekil 6.19. Bir MZ interferometresinde sıkıştırılamaz şeritlerin farklı manyetik alanlardaki davranışı. Renk skalası grafiklerin altında verilmiştir. Sarı renk doluluk çarpanı 2 için sıkıştırılamaz şeritleri belirtir.

6.3.2. MZ İnterferometresi İçin Gerilim Taraması

Şekil 6.18'deki yapıya uygulanan manyetik alanı 8 T'de ve sıcaklığı 1.4 K'de tutup, kuantum nokta kontaklara uygulanan gerilimi -0.4 V'dan -1.1 V'a kadar değiştirilerek Şekil 6.20 elde edilmiştir. Sarı renk doluluk çarpanı 2 için sıkıştırılamaz şeritleri belirtir. Şekil 6.20a'da kuantum nokta kontaklara uygulanan gerilim -0.4 V olup, sıkıştırılamaz şeritlerde herhangi bir temas görülmemektedir. Şekil 6.20b'de gerilim -0.5 V'a çıkarıldığında sıkıştırılamaz şeritler hafifçe birbirlerine yaklaşır. Şekil 6.20c'de sıkıştırılamaz şeritlerin birbirine temas ettiği görülür. Bu temas, Şekil 6.20e'deki -1.0 V'a kadar devam eder. -0.6 V ve -1.0 V gerilim değerleri arasında sıkıştırılamaz şeritlerin bir girişim olayı oluşturduğu söylenebilir. Şekil 6.20f'de uygulanan gerilim -1.1 V olup şeritler birbirinden ayrılmaya başlamıştır. Böylelikle kuantum nokta kontaklara uygulanan gerilimdeki bir tarama ile sıkıştırılamaz şeritlerin birbiriyle teması sağlanıp MZ interferometresindeki girişim olayı gözlenebilir.



Şekil 6.20. Bir MZ interferometresinde sıkıştırılamaz şeritlerin kuantum nokta kontaklara uygulanan gerilimin farklı değerlerdeki davranışı. Renk skalası grafiklerin altında verilmiştir. Sarı renk doluluk çarpanı 2 için sıkıştırılamaz şeritleri belirtir.

7. DEĞERLENDİRME VE ÖNERİLER

Son olarak bu çalışmayı özetlememiz gerekirse, yarıiletken eklem arayüzeylerde oluşturulan 2BEG kullanımıyla elde edilen bazı Kuantum Hall olayı tabanlı araçların davranışı, TF yaklaşımı kullanılarak özuyumlu olarak incelenmiştir. Hesaplamalarda, sistemin elektrostatik davranışını tanımlayan Poisson denklemi tam olarak ele alınmaya çalışılmıştır. Poisson denkleminin çözümü sonlu farklar yöntemiyle yapılmış ve hesaplamalarda ardışık durulma yöntemi ve multigrid yöntemleri kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar literatürde bulunan sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Kuantum hall çubuğunda sıkıştırılamaz şeritlerin oluşumunu ve oluşan şeritlerin konumunu ve kalınlığını incelemek için manyetik alana, ortalama elektron yoğunluğuna ve kapılar üzerindeki gerilime olan bağımlılığa bakılmıştır. Ayrıca elektronik girişim olaylarının incelendiği kuantum Hall olayı temelli AB interferometresi ve MZ interferometresi gibi yapıları üç boyutlu Poisson denklemini doğrudan sayısal olarak çözerek inceledik. AB interferometresi için yaptığımız hesaplamalarda sıkıştırılamaz şeritlerin birbirileriyle olan teması sonucunda bir girişim oluşacağı ve bu girişimin AB osilasyonlarına sebep olacağı düşünülmüştür. Bu girişimin yapıya uygulanacak olan manyetik alan ve yapının üzerindeki kapılara uygulanan gerilimlerle olan ilişkisini inceledik. Bu hesaplamaların bir kısmında ardışık durulma yöntemi (kapı gerilimi taraması) bir kısmında da multigrid yöntemini (manyetik alan taramaları) kullandık. Elde edilen sonuçların düşük kapı gerilimi bölgesinde deneysel çalışmalarla uyum içinde olduğu gözlemlenmiştir. Ancak yüksek kapı gerilimleri için literatürde deneysel sonuçlar bulunmadığından karşılaştırma yapılamamıştır. Yüksek kapı gerilimleri kullanılarak yeni deneysel çalışmalar yapılması faydalı olacaktır.

MZ interferometresi için yaptığımız hesaplamalarda böyle bir geometride sıkıştırılamaz şeritlerin birbirileriyle olan temasını kapı gerilimlerini ve manyetik alanı değiştirerek sağladık. Elde ettiğimiz tüm bu sonuçlar genel itibari ile şimdiye kadar yapılan teorik ve deneysel çalışmalar ile uyum içerisindedir (Chklovskii ve ark., 1992; Lier ve Gerhardts, 1994; Oh ve Gerhardts, 1997; Ahlswede ve ark., 2001; Güven ve Gerhardts, 2003; Siddiki ve Gerhardts, 2003; Siddiki ve Gerhardts, 2004, Camino ve ark., 2005; Siddiki ve ark., 2008).

Sonuç olarak bu çalışmada yarı iletken arayüzeylerde oluşturulan 2BEG kullanılması, yapının yüzeyine yerleştirilecek bazı kapıların düzenlenmesi ile üretilebilecek aygıtların davranışını incelemeye yardımcı olacak bir yaklaşım

geliştirilmiştir. Bu yaklaşım çerçevesinde hesaplamaların yapılması için Fortran ve C dillerinde bilgisayar kodları yazılmıştır. Geliştirilen bu kodlar yüzeyde bulunan kapılar aracılığıyla 2BEG kullanılarak oluşturulabilecek bütün aygıtların incelenmesi için kullanılabilecektir. Bu açıdan, çalışmanın son yıllarda büyük bir hızla gelişen nano teknolojideki deneysel ve teorik çalışmalara farklı katkılarda bulunacağı kanaatindeyiz.

Ayrıca, bu çalışmada yapılan hesaplamalar yüksek başarımlı bilgisayar sistemleri gerektirdiğinden bu çalışma çerçevesinde Selçuk Üniversitesi BAP koordinatörlüğü tarafından desteklenen bir proje kapsamında (Proje no:07101037) paralel hesaplama yapabilen bir bilgisayar kümesi oluşturulmuştur.

KAYNAKLAR

Aharonov, Y. and Bohm, D., 1959, Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory, *Physical Review*, 115, 485.

Ahlswede, E., Weis, J., von Klitzing, K. and Eberl, K., 2002, Hall potential distribution in the quantum Hall regime in the vicinity of a potential probe contact, *Physica E*, 12, 165.

Ahlswede, E., Weitz, P., Weis, J., von Klitzing, K. and Eberl, K., 2001, Hall potential profiles in the quantum Hall regime measured by a scanning force microscope, *Physica B*, 298, 562.

Arslan, S., Cicek, E., Eksi, D., Aktas, S., Weichselbaum, A. and Siddiki, A., 2008, Modeling of quantum point contacts in high magnetic fields and with current bias outside the linear response regime, *Physical Review B*, 78, 125423.

Beenakker C. W. J., 1990, Edge Channels for the Fractional Quantum Hall Effect, *Physical Review Letters*, 64, 216.

Bloch, F. 1928, Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern, *Zeıtschift Für Physik A Hadrons And Nuclei*, 52, 555.

Briggs, L. W., Henson, V. E. and McCormick, S. F., 2000, A Multigrid Tutorial Second Edition, *Society for Industrial and Applied Mathematics*, USA.

Brophy, J. J., 2000, Fenciler İçin Temel Elektronik (Çeviri), *Bilim Yayınları*, Ankara.

Büttiker, M., 1988, Absence of backscattering in the quantum Hall effect in multiprobe conductors, *Physical Review B*, 38, 9375.

Camino, F. E., Zhou, W. and Goldman, V. J., 2005, Aharonov-Bohm electron interferometer in the integer quantum Hall regime, *Physical Review B*, 72, 155313.

Chambers, R. G., 1960, Shift of an Electron Interference Pattern by Enclosed Magnetic Flux, *Physical Review Letters*, 5, 3.

Chang, A. M., 1990, A unified transport theory for the integral and fractional quantum Hall effects: Phase boundaries, edge currents, and transmission/Reflection probabilities, *Solid State Communications*, 74, 871.

Chklovskii, D. B., Shklovskii, B. I. and Glazman, L. I., 1992, Electrostatics of edge channels, *Physical Review B*, 46, 4026.

Chklovskii, D. B.,Matveev, K. A. and Shklovskii, B. I., 1993, Ballistic conductance of interacting electrons in the quantum Hall regime, *Physical Review B*, 47, 12605.

Cho, A. Y. and Arthur, J. R., 1975, Molecular beam epitaxy, *Progress in Solid State Chemistry*, 10, 157.

Cicek, E., Mese, A. I., Ulas, M. and Siddiki, A., 2010, Spatial distribution of the incompressible strips at AB interferometer, *Physica E*, 42, 1095.

Datta, S., 1995, Electronic Transport in Mesoscopic Systems, *Cambridge University Pres*, Cambridge

Davies, J. H. and Larkin, I. A., 1994, Theory of potential modulation in lateral surface superlattices, *Physical Review B*, 49, 4800.

Davies, J. H., 1988, Electronic states in narrow semiconducting wires near threshold, *Semiconductor Science and Technology*, 3, 995.

Davies, J. H., 1997, The physics of low-dimensional semiconductors: an introduction, *Cambridge University Press*.

Davies, J. H., Larkin, I. A. and Sukhorukov, E. V., 1995, Modeling the patterned two-dimensional electron gas: Electrostatics, *Journal of Applied Physics*, 77, 4504.

Dayi, Ö. F. and Jellal, A., 2002, Hall effect in noncommutative coordinates, *Journal of Mathematical Physics*, 43, 4592.

Drude, P. 1900, Zur Elektronentheorie der Metalle; II. Teil. Galvanomagnetische und thermomagnetische Effecte. *Annalen der Physik*, 308, 369.

Englert, T. and von Klitzing K., 1978, Analysis of ρ_{xx} minima in surface quantum oscillations on (100) n-type silicon inversion layers, *Surface Science*, 73, 70.

Fowler, A. B., Fang, F. F., Howard W. E. and Stiles, P. J., 1966, Magneto-oscillatory conductance in silicon surfaces, *Physical Review Letters*, 16, 901.

Gerhardts, R. R., 2008, The effect of screening on current distribution and conductance quantisation in narrow quantum Hall systems, *Physica Status Solidi B*, 245, 378.

Glazman, L. I. and Larkin, I. A., 1991, Lateral position control of an electron channel in a split-gate device, *Semiconductor Science and Technology*, 6, 32.

Griffiths, D. J., 1996, Elektromanyetik Teori (2. baskıdan çeviri) *Arte Güven Yayınları*, İstanbul

Güven, K. and Gerhardts, R. R., 2003, Self-consistent local equilibrium model for density profile and distribution of dissipative currents in a Hall bar under strong magnetic fields, *Physical Review B*, 67, 115327.

Hall, E. H., 1879, On a new action of the magnet on electric currents, *American Journal of Mathematics*, 2, 287.

Halperin, B. I., 1982, Quantized Hall conductance, current-carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential, *Physical Review B*, 25, 2185.

Hook, J. R. ve Hall, H. E., 1999, Katıhal Fiziği (çeviri), Literatür Yayınları, İstanbul.

Ihnatsenka, S. and Zozoulenko, I. V., 2006, Spin polarization of edge states and the magnetosubband structure in quantum wires, *Physical Review B*, 73, 075331.

Ihnatsenka, S. and Zozoulenko, I. V., 2007[a], Hysteresis and spin phase transitions in quantum wires in the integer quantum Hall regime, *Physical Review B*, 75, 035318.

Ihnatsenka, S. and Zozoulenko, I. V., 2007[b], Conductance of a quantum point contact based on spin-density-functional theory, *Physical Review B*, 76, 045338.

Ihnatsenka, S. and Zozoulenko, I. V., 2008[a], Magnetoconductance of interacting electrons in quantum wires: Spin density functional theory study, *Physical Review B*, 78, 035340.

Ihnatsenka, S. and Zozoulenko, I. V., 2008[b], Interacting electrons in the Aharonov-Bohm interferometer, *Physical Review B*, 77, 235304.

Jain, J. K., 1988, Prediction of Aharonov-Bohm Oscillations on the Quantum Hall Plateaus of Small and Narrow Rings, *Physical Review Letters*, 60, 2074.

Jeckelmann, B. and Jeanneret, B., 2001, The quantum Hall effect as an electrical resistance Standard, *Reports on Progress in Physics*, 64, 1603.

Ji, Y., Chung, Y., Sprinzak, D., Heiblum, M., Mahalu D. and Shtrikman, H., 2003, An electronic Mach-Zehnder interferometer, *Nature*, 422, 415.

Kavruk, A. E., 2010, Kuantum Hall Olayının Nano Ölçekli Yapılarda İncelenmesi, Doktora tezi, *Selçuk Universitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya.

Kawaji, S., Igarashi, T. and Wakabayashi, J., 1975, Quantum galvanometric effect in n-channel silicon inversion layers under strong magnetic fields, *Supplement of the Progress of Theoretical Physics*, 57, 176.

Kittel, C., 1996, Katıhal Fiziğine Giriş (Çeviri), *Güven Kitap Yayın Dağıtım Ltd. Şti,* İstanbul.

Kittel, C., 2005, Introduction to Solid State Physics, Eight Edition, *John Wiley&Sons Inc.* USA.

Lauhglin, R. B., 1981, Quantized Hall conductivity in two dimensions, *Physical Review B*, 23, 5632.

Lauhglin, R. B., 1983, Anomaolus quantum Hall effect: An Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations, *Physical Review Letters*, 50, 1395.

Lier, K. and Gerhardts, R. R., 1994, Self-consistent calculations of edge channels in laterally confined two-dimensional electron systems, *Physical Review B*, 50, 7757.

Mach, L., 1892, Über einen Interferenzrefraktor, *Zeitschrift für Instrumentenkunde*, 12, 89.

Nomokonov, D. V. and Bykov, A. A., 2005, Amplitude of Aharonov–Bohm Oscillations in a Small Semiconductor Ring Interferometer in the Tunneling Regime, *JETP Letters*, 82, 89.

Oh, J. H. and Gerhardts, R. R., 1997, Self-consistent Thomas-Fermi calculation of potential and current distributions in a two-dimensional Hall bar geometry, *Physical Review B*, 56, 13519.

Olshanetsky, E. B., Kvon, Z. D., Sheglov, D. V., Latyshev, A. V., Toropov, A. I. and Portal J. C., 2005, Temperature Dependence of Aharonov–Bohm Oscillations in Small Quasi-Ballistic Interferometers, *JETP Letters*, 81, 625.

Öztürk, T., Kavruk, A. E. and Atav, Ü., 2012, An investigation of the gate dependence in an electronic Aharonov-Bohm Interferometer, *Superlattices and Microstructures* (Kabul Edildi) doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.spmi.2012.05.019

Öztürk, T., Kavruk, A. E., Öztürk, A., Atav, Ü. and Yüksel, H., 2010, Edge channels in an Aharonov-Bohm electron interferometer in the integer quantum Hall regime, *Horiba International Conference The 19th International Conference on the Application of High Magnetic Fields in Semiconductor Physics and Nanotechnology (HMF-19)*, Fukuoka, Japan, 2010 Tam metin: Ozturk, T., Kavruk, A. E., Öztürk, A., Atav, Ü. and Yüksel, H., 2011, Edge state distribution in an Aharonov-Bohm electron interferometer in the integer quantum Hall regime, *Journal of Physics:Conference Series*, 334, 012034

Seeger, K., 2004, Semiconductor Physics An Introduction, Springer-Verlag, Berlin.

Siddiki, A. and Gerhardts, R. R., 2003, Thomas-Fermi-Poisson theory of screening for laterally confined and unconfined two-dimensional electron systems in strong magnetic fields, *Physical Review B*, 68, 125315.

Siddiki, A. and Gerhardts, R. R., 2004, Incompressible strips in dissipative Hall bars as origin of quantized Hall plateaus, *Physical Review B*, 70, 195335.

Siddiki, A. and Gerhardts, R. R., 2004, The Interrelation Between Incompressıble Strips And Quantized Hall Plateaus, *International Journal of Modern Physics B*, 18, 3541.

Siddiki, A. and Marquardt, F., 2007, Self-consistent calculation of the electron distribution near a quantum point contact in the integer quantum Hall effect, *Physical Review B*, 75, 045325.

Siddiki, A., Kavruk, A. E., Öztürk, T., Atav, Ü., Şahin, M. ve Hakioğlu, T., 2008, The self-consistent calculation of the edge states at quantum Hall effect (QHE) based Mach-Zehnder interferometers (MZI). *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, 40, 1398.

Thomson J. J., 1897, Cathode rays, *Philosophical Magazine*, 44, 269.

Tonomura, A., Matsuda, T., Suzuki, R., Fukuhara, A., Osakabe, N., Umezaki, H., Endo, J., Shinagawa, K., Sugita, Y. and Fujiwara, H., 1982, Observation of Aharonov-Bohm Effect by Electron Holography, *Physical Review Letters*, 48, 1443.

Tonomura, A., Osakabe, N., Matsuda, T., Kawasaki, T., Endo, J., Yano S. and Yamada, H.,1986, Evidence for Aharonov-Bohm effect with magnetic field completely shielded from electron wave, *Physical Review Letters*, 56, 792.

Tsui, D. C. and Gossard, A. C., 1981, Resistance standard using quantization of the Hall resistance of GaAs-$Al_xGa_{1-x}As$ heterostructures, *Applied Physics Letters*, 38, 550.

Tsui, D. C., Stormer, H. L. and Gossard, A. C., 1982, Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit, *Physical Review Letters*, 48, 1559.

von Klitzing, K., Dorda, G. and Pepper, M., 1980, New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance, *Physical Review Letters*, 45, 494.

Weichselbaum, A. and Ulloa, S. E., 2003, Potential landscapes and induced charges near metallic islands in three dimensions, *Physical Review E*, 68, 056707.

Weitz, P., Ahlswede, E., Weis, J., von Klitzing K. and Eberl, K., 2000[a], A low-temperature scanning force microscope for investigating buried two-dimensional electron systems under quantum Hall conditions, *Applied Surface Science*, 157, 349.

Weitz, P., Ahlswede, E., Weis, J., Von Klitzing, K. and Eberl, K., 2000[b], Hall-potential investigations under quantum Hall conditions using scanning force microscopy, *Physica E*, 6, 247.

Zehnder, L.,1891, Ein neuer Interferenzrefraktor, *Zeitschrift für Instrumentenkunde*, 11, 275.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Teoman ÖZTÜRK
Uyruğu	**:**	TC
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Elmadağ 14.11.1977
Telefon	**:**	05336910886
Faks	**:**	
e-mail	**:**	teozturk@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Ankara Keçiören Kanuni Lisesi	1996
Üniversite	:	Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü	2001
Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü	2005
Doktora	:	Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü	2012

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
31.12.2001-…	Selçuk Üniversitesi	Araş. Gör.

YABANCI DİL: İngilizce

YAYINLAR

1. Öztürk, T., Kavruk, A. E., Öztürk, A., Atav, Ü. and Yüksel, H., 2010, Edge channels in an Aharonov-Bohm electron interferometer in the integer quantum Hall regime, Horiba International Conference The 19th International Conference on the Application of High Magnetic Fields in Semiconductor Physics and Nanotechnology (HMF-19), Fukuoka, Japan, 2010
Tam metin: Ozturk, T., Kavruk, A. E., Öztürk, A., Atav, Ü. and Yüksel, H., 2011, Edge state distribution in an Aharonov-Bohm electron interferometer in the integer quantum Hall regime, *Journal of Physics:Conference Series*, 334, 012034 (Doktora tezinden yapılmıştır).

2. Öztürk, T., Kavruk, A. E. and Atav, Ü., 2012, An investigation of the gate dependence in an electronic Aharonov-Bohm Interferometer, *Superlattices and Microstructures* (Kabul Edildi) doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.spmi.2012.05.019 (Doktora tezinden yapılmıştır).