ÖHÜ Müh. Bilim. Derg. / OHU J. Eng. Sci.

ISSN: 2564-6605
doi: 10.28948/ngumuh.627482
*Ömer Halisdemir Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi, Cilt 8, Sayı 3, (2019), 046-056*
*Omer Halisdemir University Journal of Engineering Sciences, Volume 8, Issue 3, (2019), 046-056*

*21. Ulusal Mekanik Kongresi Özel Sayısı*
*21st National Mechanics Congress Special Issue*

***Araştırma / Research***

# DEĞİŞKEN KESİTLİ VE TABAKALANMIŞ KOMPOZİT MALZEMELİ, DOĞRU VE DAİRE EKSENLİ KARMA SİSTEMLERİN TAMAMLAYICI FONKSİYONLAR YÖNTEMİ İLE STATİK ANALİZİ

**Beytullah TEMEL (ORCID: 0000-0002-1673-280X)[1]**
**Hasibullah RASOOLI (ORCID: 0000-0003-2619-8193)[1,*]**

[1] *Çukurova Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Adana, Türkiye*

***Geliş / Received:*** *01.10.2019*
***Kabul / Accepted:*** *25.11.2019*

## ÖZ

Bu çalışmada, tabakalanmış kompozit malzemeli, değişken kesitli doğru ve/veya daire eksenli çubuklardan oluşan çerçevelerin düzlem içi statik yükler etkisindeki davranışı Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi (TFY) ile incelenmiştir. Formülasyonda, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınmıştır. TFY'ye dayalı başlangıç değer probleminin çözümleri için 5. mertebe Runge-Kutta (RK5) algoritması kullanılmıştır. Bu yapı elemanlarının rijitlik matrisleri ve yük vektörleri TFY ile elde edilmiş ve bu amaçla da Fortran dilinde bilgisayar programı hazırlanmıştır. Hazırlanan bilgisayar programının kontrolü literatürde mevcut sonlu eleman sonuçları ile karşılaştırılarak literatür ile uyumlu ve etkin olduğu gösterilmiştir.

**Anahtar kelimeler:** iki nokta sınır değer problemleri; tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi; tabakalı kompozit çubuklar; kompozit çerçeveler.

# STATIC ANALYSIS OF FRAMES CONSISTING STRAIGHT AND CIRCULAR AXIS BEAMS WITH A VARIABLE CROSS-SECTION MADE OF LAMINATED COMPOSITE MATERIALS BY THE COMPLEMENTARY FUNCTIONS METHOD

## ABSTRACT

In this study, the behavior of frames made of laminated composite materials with a variable cross-section of straight and/or circular axis beams under in-plane static loading is investigated by the Complementary Functions Method (CFM). The axial and shear deformations are considered in the formulations. The fifth-order Runge-Kutta (RK5) algorithm has been employed in the solution process of initial value problems by the CFM. The rigidity matrices and load vectors of these structural elements have been obtained by the CFM and for this purpose a computer program is coded in FORTRAN. Verification of the computer program is performed with the comparison of the presented results and those of the finite element and it is shown that they are effective and in a good agreement with the literature.

**Keywords:** two-point boundary value problems; complementary functions method; laminated composite beams; composite frames.

[*]Corresponding author / Sorumlu yazar. Tel.:+90 552 3533036 ; e-mail / e-posta: hasibullah.rasooli@gmail.com

# 1. GİRİŞ

Son yıllarda, mühendislik teknolojilerinin gelişimiyle birlikte özellikle kompozit malzemeli eğri eksenli ve düz eksenli çubuklardan oluşan sistemler modern mühendislik yapılarında çok yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu tür sistemlerin statik ve dinamik davranışı birçok araştırmacının dikkatini çekmektedir.

Tabakalı kompozit kirişlerin statik analizi için Özütok ve Madenci [1], yüksek mertebeden kayma deformasyon teorisine dayalı karışık sonlu elemanlar modeli geliştirmişlerdir. Chandrashekhara ve Bangera [2] tarafından tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşim davranışını incelemek için yüksek mertebe kayma deformasyonu teorisine dayalı bir sonlu eleman modeli geliştirilmiştir. Karaca [3], düzlemsel çubukların taşıma ve rijitlik matrisi metodu ile statik ve dinamik analizini incelemiştir. Haktanır ve Kıral [4], TFY'yi düzlemsel çubukların statiğine doğrudan uygulamışlardır. Aslan [5], geometrik özellikleri eksen boyunca değişen, düzlemi içinde ve düzlemine dik yüklü eğri eksenli yapı elemanlarının statik yükler altındaki davranışlarını incelemiştir. Bayhan [6], çalışmalarında daire eksenli düzlemsel çubukların taşıma ve rijitlik matrisi ile analizini yapmıştır. Bingöl [7], değişken kesitli doğru eksenli kompozit çubukların dinamik davranışını Laplace uzayında teorik olarak incelemiştir. Chen ve Yang [8], anizotropik tabakalı kirişler için sonlu elemanlar kullanarak etkin bir çözüm yöntemi geliştirmiş, ayrıca formülasyonda kayma deformasyonu etkisini de dahil etmişlerdir. Saatcı [9], tabakalı kirişleri analitik olarak ve sonlu elemanlar yöntemi ile incelemiştir. Hodges ve ark.[10], karışık sonlu elemanlar formülasyonu kullanarak kompozit kirişleri idare eden denklemleri çözmüşlerdir. Chandrashekhara ve ark. [11], birinci mertebe kayma deformasyonu teorisini kullanarak simetrik tabakalı kompozit kirişlerin kesin çözümlerini sunmuşlardır. Singh ve ark. [12], üniform olmayan kompozit kirişlerin analizi için yeni bir analitik model geliştirmişlerdir. Bernoulli kiriş teorisini kullanarak üniform olmayan kompozit kirişlerin analizini yapmıştır. Khdeir ve Reddy [13], yapmış oldukları çalışmada kalın ve ince çapraz tabakalı kompozit kirişlerin eğilme davranışları için analitik çözümler geliştirmişler, çözümlerde simetrik ve antisimetrik çapraz tabakalı kompozit kirişlere sınır koşullarını keyfi alarak ve keyfi yüklemeler uygulayarak Euler-Bernoulli kirişi, Timoshenko kirişi ve yüksek mertebe kiriş teorileri kullanmışlardır. Kahya ve Turan [14], yüksek mertebe teorisini kullanarak tabakalı kompozit kirişlerin sehim analizini yapmışlardır. Madenci [15] yaptığı yüksek lisans çalışmasında; kompozit kirişlerin statik ve dinamik analizlerini Gâteaux diferansiyel metodu ve karışık sonlu elemanlar formülasyonu yardımı ile incelemiştir. Analizlerde, sabit geometriye sahip üniform yayılı yük etkisi altında, üç farklı mesnet koşuluna göre simetrik, tek tabakalı ve çapraz tabakalı ortotropik kompozit Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişlerini ele alarak enerji prensipleri yardımı ile her iki kiriş teorisine ait kompozit kirişlerin diferansiyel alan denklemleri elde edilmiştir. Özbek [16], eğri eksenli çubukların statik davranışlarını incelemiştir. Deplasman ve kesit tesirlerini, ardışık türevler ile ilk defa ifade ederek elde etmiştir. Yıldırım ve ark. [17], doğru ve daire eksenli elemanlardan oluşan bileşik düzlem çerçevelerin statik analizini rijitlik matrisi metodu ile incelemişler; dairesel elemanları düzlemi içinde ve düzlemine dik yükleme halleri için ayrı ayrı olmak üzere eleman rijitlik ve ankastrelik uç kuvvetlerini taşıma matrisi metodu ile kesin olarak elde etmişlerdir. Haktanır [18], elastik izotrop malzemeye sahip düzlemsel çubukların statik davranışını TFY'ye dayalı rijitlik matrisi yöntemi ile incelemiş, elde ettiği denklemlerin çözümünde Runge-Kutta 4 (RK4) algoritmasını kullanmış, Fortran dilinde programlar geliştirmiş ve literatürde bulunan çalışmalara uygulayarak sonuçları kıyaslamıştır. Çalım[19], doktora çalışmasında viskoelastik, anizotropik, eğri eksenli uzaysal çubuk sistemlerin dinamik analizini yapmıştır.

TFY daha önce çeşitli mekanik problemlerinde etkin olarak kullanılmıştır. Bu çalışmaların bazıları burada verilmiştir. Temel ve Noori [21], Noori ve Temel [22], Noori, Aslan ve Temel [23], Temel, Çalım ve Tütüncü [24], Çalım [25], Çalım[26].

Literatürde doğru veya daire eksenli elemanlardan oluşan çerçevelerin statik analizi mevcuttur, ancak, yazarların bilgisine göre kompozit malzemeli, değişken kesitli doğru ve daire eksenli çubuklardan oluşan karma çerçevelerin TFY ile statik analizi üzerinde herhangi bir çalışma bulunmamaktadır. Tabakalanmış kompozit malzemeli, değişken kesitli bu tür çerçevelerin TFY ile statik analizi ilk defa bu çalışmada yapılmıştır. Bu yöntem, iki noktalı sınır değer problemini başlangıç değer problemine indirgemektedir.

# 2. MATERYAL VE METOT

Bu çalışmada, statik yükler altında doğru ve daire eksenli tabakalanmış kompozit kesitli çubuklardan oluşan sistemlerin davranışını idare eden denklemler, kanonik formda birinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımı halinde elde edilmektedir. Formülasyonda eksenel deformasyon ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınmaktadır.

Doğru eksenli tabakalı kompozit çubukların davranışını idare eden skaler denklemler aşağıda verilmiştir:

$$\frac{dU_t}{dx} = A_{11}{}' \, T_t \tag{1}$$

$$\frac{dU_n}{dx} = \Omega_b + \alpha_n \, A_{22}{}' \, T_n \tag{2}$$

$$\frac{d\Omega_b}{dx} = D_{33}{}' \, M_b \tag{3}$$

$$\frac{dT_t}{dx} = -p_t \tag{4}$$

$$\frac{dT_n}{dx} = -p_n \tag{5}$$

$$\frac{dM_b}{dx} = -T_n \tag{6}$$

Daire eksenli tabakalı kompozit çubukların statik davranışı için adi diferansiyel denklemler aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$\frac{dU_t}{d\phi} = U_n + R \, A_{11}{}' \, T_t \tag{7}$$

$$\frac{dU_n}{d\phi} = -\, U_t + R \, \Omega_b + R \, A_{22}{}' \, T_n \tag{8}$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\phi} = R \, D_{33}{}' \, M_b \tag{9}$$

$$\frac{dT_t}{d\phi} = T_n - R \, p_t \tag{10}$$

$$\frac{dT_n}{d\phi} = -T_t - R \, p_n \tag{11}$$

$$\frac{dM_b}{d\phi} = -RT_n - R \, M_b \tag{12}$$

Burada $T_t$, eksenel normal kuvvetini, $T_n$, kesme kuvvetini ve $M_b$ ise eğilme momentini göstermektedir. $U_t$ve $U_n$, **t** ve **n** eksenleri doğrultularındaki yer değiştirmeleri ve $\Omega_b$ ise, dönmeyi simgelemektedir. *R*, daire eksenli çubuğun yarıçapıdır. $\alpha_n$ , kayma düzeltme faktörünü göstermekte olup bu çalışmada 1.1875 olarak alınmaktadır.

**A** ve **D** matrisleri çubuk kesitinin indirgenmiş malzeme sabitlerini göstermekte olup her bir tabaka malzemesinin rijitlik terimlerinin toplamından elde edilmektedir Bingöl [7]. Kompozit çubuklar ile ilgili bünye denklemleri ve çubukların toplam rijitliklerini içeren **A** ve **D** malzeme matrislerinin tersinden elde edilen esneklik matrisleri, **A′** ve **D′** Çalım [19]'da verilmektedir.

## 3. BULGULAR VE TARTIŞMA

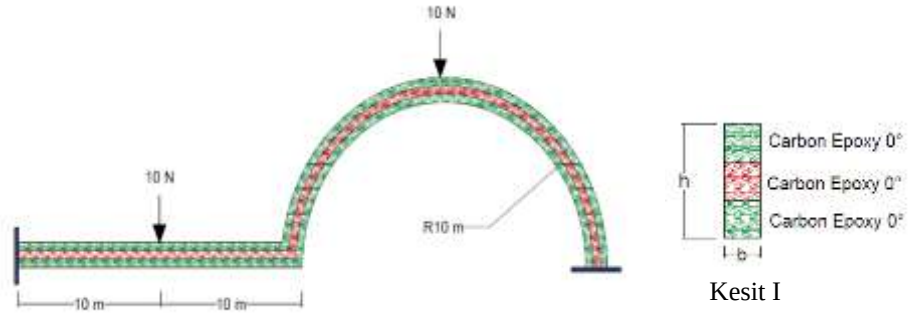
Bu bölümde, tabakalanmış kompozit malzemeli karma sistemlerin statik yükler altındaki analizi yapılacaktır. Eğri eksenli çubuklar için iki metot uygulanmaktadır. Bunlar; direk Tamamlayıcı Fonksiyonlar Metodu ve Tamamlayıcı Fonksiyonlar Metoduna dayalı rijitlik matrisi metodudur. Direk Tamamlayıcı Fonksiyonlar Metodu ara mesnetler ve tekil yükleme olmayan sistemler için uygundur. Daha genel olan ikinci yöntemde ise Tamamlayıcı Fonksiyonlar metodu ile eleman rijitlik matrisi ve eleman yük vektörü oluşturularak çözüme gidilmektedir. Doğru ve daire eksenli çubuklardan oluşan bu tip çerçevelerin statik analizini yapmak amacıyla Fortran dilinde bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Programda, yapı elemanlarının rijitlik matrisleri ve yük vektörleri TFY ile elde edilmektedir. Başlangıç değer probleminin çözümü için RK5 algoritması uygulanmaktadır. Elde edilen kanonik formdaki birinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımının çözümü özellikle de analitik çözümü yapılamayan değişken katsayılı denklemlerin sayısal çözümleri bu yöntem ile yapılabilmektedir. Bu çalışmadaki sayısal uygulamaları ANSYS programı ile karşılaştırmak için ANSYS programında üç düğümlü kuadratik BEAM-189 elemanı seçilmiştir [20]. Uygulamalarda kullanılan malzeme özellikleri Tablo 1'de verilmektedir.

**Tablo 1.** Malzeme özellikleri

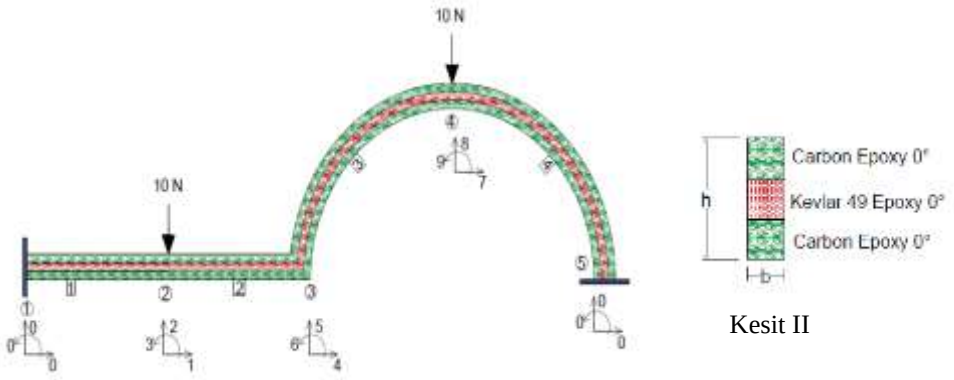
| | $E_1$ (GPa) | $E_2 = E_3$ (GPa) | $G_{12} = G_{13}$ (GPa) | $G_{23}$ (GPa) | $\nu_{12} = \nu_{13}$ | $\nu_{23}$ | $\rho$ (kg/m$^3$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Kevlar 49 Epoxy | 76 | 5.56 | 2.3 | 1.618 | 0.34 | 0.718 | 1460.00 |
| Carbon Epoxy | 144.8 | 9.54 | 4.14 | 3.45 | 0.30 | 0.399 | 1389.23 |

**Örnek 1. Doğru ve Daire Eksenli, Kompozit Malzemeli Çerçeve Sistemi**

Her iki ucu ankastre mesnetli, üzerinde tekil yükler bulunan tabakalanmış kompozit malzemeli, doğru ve daire eksenli çubuklardan oluşan aşağıdaki çerçevenin iki farklı tabakalı kesit için statik analizleri yapılacaktır. Şekil 1'de görülen çerçeve çubuklarının hem kesit yüksekliği ($h$=0.90$m$) hem de kesit genişliği ($b$=0.45$m$) sabit olarak seçilmiştir. Çubuk kesitleri, kesit yüksekliği boyunca farklı açılara sahip iki ayrı malzeme grubu olmak üzere simetrik üç eşit tabakalı olarak dikkate alınmıştır.




**Şekil 1.** Doğru ve daire eksenli çerçeve ve tabakalı çubuk kesiti I




**Şekil 2.** Sistemin düğüm serbestlikleri, kodlamaları ve tabakalı çubuk kesiti II

ANSYS programı ile çözüm yapılırken Şekil 2'deki çerçevenin her bir çubuğu 5, 10 ve 20 eşit elemana bölünmüştür. Kesit I'deki malzeme grubu için bu çalışmada hesaplanan düğüm deplasmanları ile ANSYS sonuçları Tablo 2 üzerinde karşılaştırılmıştır. Her bir çubuk 20 eşit elemana bölünerek ANSYS modelinden elde edilen deplasmanların noktadan sonraki üç hanesi, bu çalışmada hesaplanan düğüm deplasmanları ile

çakışmaktadır. Bu bölme sayıları için ANSYS ve bu çalışma arasındaki bağıl farklar da tabloda ayrıca verilmiştir.

**Tablo 2.** Kesit I için hesaplanan düğüm deplasmanlarının karşılaştırılması

| **Düğüm No** | | **U dep. (m)** | **V dep. (m)** | **Teta (Rad.)** |
|---|---|---|---|---|
| 2 | Bu Çalışma | -8.09944E-10 | -2.85552E-06 | -3.53885E-07 |
| | ANSYS (5 El.) | -8.09950E-10 | -2.85550E-06 | -3.53880E-07 |
| | ANSYS (10 El.) | -8.09950E-10 | -2.85550E-06 | -3.53880E-07 |
| | ANSYS (20 El.) | -8.09940E-10 | -2.85550E-06 | -3.53880E-07 |
| | Bağıl Hata | 4.93861E-06 | 7.00398E-06 | 1.41289E-05 |
| **Düğüm No** | | **U dep. (m)** | **V dep. (m)** | **Teta (Rad.)** |
| 3 | Bu Çalışma | -1.61989E-09 | -4.85219E-06 | -1.08097E-08 |
| | ANSYS (5 El.) | -1.61990E-09 | -4.85220E-06 | -1.08090E-08 |
| | ANSYS (10 El.) | -1.61990E-09 | -4.85220E-06 | -1.08090E-08 |
| | ANSYS (20 El.) | -1.61990E-09 | -4.85220E-06 | -1.08100E-08 |
| | Bağıl Hata | 6.17326E-06 | 2.06093E-06 | 2.77529E-05 |
| **Düğüm No** | | **U dep. (m)** | **V dep. (m)** | **Teta (Rad.)** |
| 4 | Bu Çalışma | -1.52514E-06 | -2.55377E-06 | 3.08127E-07 |
| | ANSYS (5 El.) | -1.52100E-06 | -2.55380E-06 | 3.08130E-07 |
| | ANSYS (10 El.) | -1.52100E-06 | -2.55380E-06 | 3.08130E-07 |
| | ANSYS (20 El.) | -1.52510E-06 | -2.55380E-06 | 3.08130E-07 |
| | Bağıl Hata | 2.62271E-05 | 1.17473E-05 | 9.73625E-06 |

Kesit I'deki malzeme grubu ve dört farklı tabaka açıları için Şekil 2'deki çerçevenin TFY ile elde edilen eleman uç kuvvetleri Tablo 3 üzerinde toplu olarak sunulmuştur.

**Tablo 3.** Farklı tabaka açıları ve Kesit I malzeme grubu için eleman uç kuvvetleri

| **Tabaka Açıları** | | **El. No** | **$N_i$ (N)** | **$T_i$ (N)** | **$M_i$ (N.m)** | **$N_j$ (N)** | **$T_j$ (N)** | **$M_j$ (N.m)** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Durum I | $0^0$ $0^0$ $0^0$ | 1 | 4.7498 | 11.8972 | 94.5072 | -4.7498 | -11.8972 | 24.4651 |
| | | 2 | 4.7498 | 1.8972 | -24.4651 | -4.7498 | -1.8972 | 43.4375 |
| | | 3 | 4.7498 | 1.8972 | -43.4375 | -4.7498 | -1.8972 | 14.9115 |
| | | 4 | 4.7498 | -8.1028 | -14.9115 | -4.7498 | 8.1028 | -18.6177 |
| **Tabaka Açıları** | | **El. No** | **$N_i$ (N)** | **$T_i$ (N)** | **$M_i$ (N.m)** | **$N_j$ (N)** | **$T_j$ (N)** | **$M_j$ (N.m)** |
| Durum II | $0^0$ $45^0$ $0^0$ | 1 | 4.7871 | 11.9102 | 94.6507 | -4.7871 | -11.9102 | 24.4514 |
| | | 2 | 4.7871 | 1.9102 | -24.4514 | -4.7871 | -1.9102 | 43.5535 |
| | | 3 | 4.7871 | 1.9102 | -43.5535 | -4.7871 | -1.9102 | 14.7850 |
| | | 4 | 4.7871 | -8.0898 | -14.7850 | -4.7871 | 8.0898 | -18.2423 |
| **Tabaka Açıları** | | **El. No** | **$N_i$ (N)** | **$T_i$ (N)** | **$M_i$ (N.m)** | **$N_j$ (N)** | **$T_j$ (N)** | **$M_j$ (N.m)** |
| Durum III | $45^0$ $0^0$ $45^0$ | 1 | 4.8043 | 11.9162 | 94.7169 | -4.8043 | -11.9162 | 24.4451 |
| | | 2 | 4.8043 | 1.9162 | -24.4451 | -4.8043 | -1.9162 | 43.6072 |
| | | 3 | 4.8043 | 1.9162 | -43.6072 | -4.8043 | -1.9162 | 14.7264 |
| | | 4 | 4.8043 | -8.0838 | -14.7264 | -4.8043 | 8.0838 | -18.0688 |
| **Tabaka Açıları** | | **El. No** | **$N_i$ (N)** | **$T_i$ (N)** | **$M_i$ (N.m)** | **$N_j$ (N)** | **$T_j$ (N)** | **$M_j$ (N.m)** |
| Durum IV | $0^0$ $90^0$ $0^0$ | 1 | 4.8043 | 11.9162 | 94.7169 | -4.8043 | -11.9162 | 24.4451 |
| | | 2 | 4.8043 | 1.9162 | -24.4451 | -4.8043 | -1.9162 | 43.6072 |
| | | 3 | 4.8043 | 1.9162 | -43.6072 | -4.8043 | -1.9162 | 14.7264 |
| | | 4 | 4.8043 | -8.0838 | -14.7264 | -4.8043 | 8.0838 | -18.0688 |

Kesit I'deki malzeme grubu için bu çalışmadan elde edilen eleman uç kuvvetleri ile her bir çubuğun 20 eşit elemana bölünmesi sonucunda ANSYS programından elde edilen değerler Tablo 4 üzerinde karşılaştırılmaktadır.

**Tablo 4.** Kesit I için hesaplanan eleman uç kuvvetlerinin karşılaştırılması

| | $N_i$ (N) | $T_i$ (N) | $M_i$ (N.m) | $N_j$ (N) | $T_j$ (N) | $M_j$ (N.m) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (XYZ) KOORDİNAT TAKIMINDA ELEMAN NO => 1 | | | | | | |
| Bu Çalışma | 4.7498 | 11.8972 | 94.5072 | -4.7498 | -11.8972 | 24.4651 |
| ANSYS | 4.7498 | 11.8970 | 94.5070 | -4.7498 | -11.8972 | 24.4650 |
| (XYZ) KOORDİNAT TAKIMINDA ELEMAN NO => 2 | | | | | | |
| Bu Çalışma | 4.7498 | 1.8972 | -24.4651 | -4.7498 | -1.8972 | 43.4375 |
| ANSYS | 4.7498 | 1.8972 | -24.4650 | -4.7498 | -1.8972 | 43.4380 |
| (XYZ) KOORDİNAT TAKIMINDA ELEMAN NO => 3 | | | | | | |
| Bu Çalışma | -4.7498 | -1.8972 | -43.4375 | -4.7498 | -1.8972 | 14.9115 |
| ANSYS | -4.7498 | -1.8972 | -43.4380 | -4.7498 | -1.8972 | 14.9120 |
| (XYZ) KOORDİNAT TAKIMINDA ELEMAN NO => 4 | | | | | | |
| Bu Çalışma | -4.7498 | -8.1028 | -14.9115 | -4.7498 | 8.1028 | -18.6177 |
| ANSYS | -4.7498 | -8.1028 | -14.9120 | -4.7498 | 8.1028 | -18.6180 |

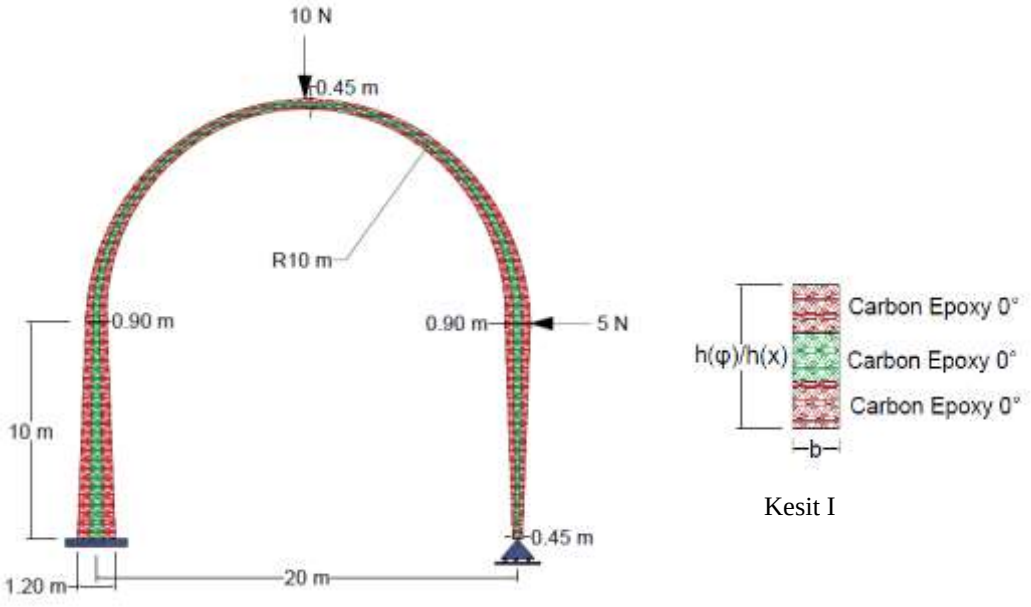
Ayrıca, kesit II'deki malzeme grubu ve dört farklı tabaka açıları için Şekil 2'deki çerçevenin TFY ile elde edilen elaman uç kuvvetleri Tablo 5 üzerinde toplu olarak sunulmuştur.

**Tablo 5.** Farklı tabaka açıları ve Kesit II malzeme grubu için eleman uç kuvvetleri

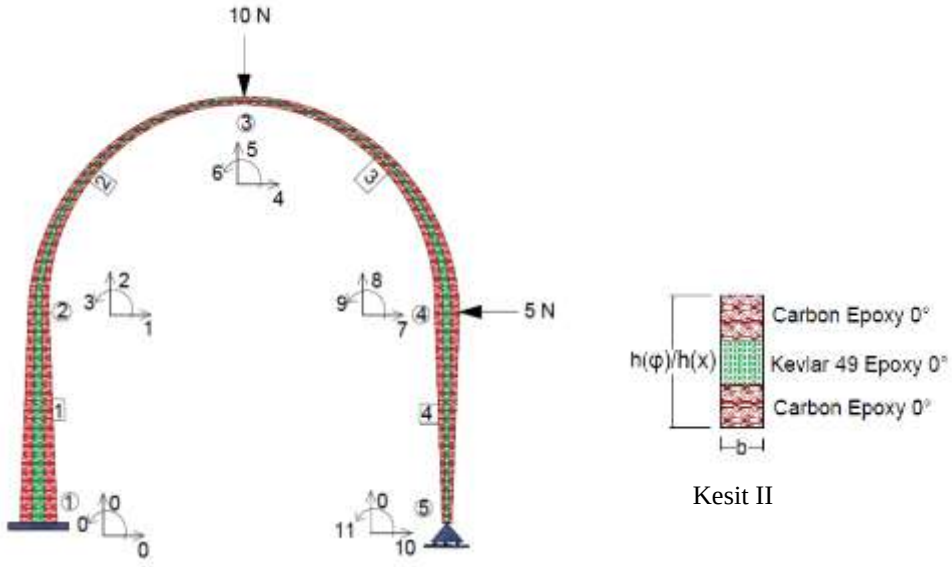
| **Tabaka Açıları** | | **El. No** | **$N_i$ (N)** | **$T_i$ (N)** | **$M_i$ (N.m)** | **$N_j$ (N)** | **$T_j$ (N)** | **$M_j$ (N.m)** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Durum I | $0^0$ $0^0$ $0^0$ | 1 | 4.7498 | 11.8972 | 94.5072 | -4.7498 | -11.8972 | 24.4651 |
| | | 2 | 4.7498 | 1.8972 | -24.4651 | -4.7498 | -1.8972 | 43.4375 |
| | | 3 | 4.7498 | 1.8972 | -43.4375 | -4.7498 | -1.8972 | 14.9115 |
| | | 4 | 4.7498 | -8.1028 | -14.9115 | -4.7498 | 8.1028 | -18.6177 |
| **Tabaka Açıları** | | **El. No** | **$N_i$ (N)** | **$T_i$ (N)** | **$M_i$ (N.m)** | **$N_j$ (N)** | **$T_j$ (N)** | **$M_j$ (N.m)** |
| Durum II | $0^0$ $45^0$ $0^0$ | 1 | 4.7498 | 11.8972 | 94.5072 | -4.7498 | -11.8972 | 24.4651 |
| | | 2 | 4.7498 | 1.8972 | -24.4651 | -4.7498 | -1.8972 | 43.4375 |
| | | 3 | 4.7498 | 1.8972 | -43.4375 | -4.7498 | -1.8972 | 14.9115 |
| | | 4 | 4.7498 | -8.1028 | -14.9115 | -4.7498 | 8.1028 | -18.6177 |
| **Tabaka Açıları** | | **El. No** | **$N_i$ (N)** | **$T_i$ (N)** | **$M_i$ (N.m)** | **$N_j$ (N)** | **$T_j$ (N)** | **$M_j$ (N.m)** |
| Durum III | $45^0$ $0^0$ $45^0$ | 1 | 4.8121 | 11.9192 | 94.7532 | -4.8121 | -11.9192 | 24.4389 |
| | | 2 | 4.8121 | 1.9192 | -24.4389 | -4.8121 | -1.9192 | 43.6309 |
| | | 3 | 4.8121 | 1.9192 | -43.6309 | -4.8121 | -1.9192 | 14.7020 |
| | | 4 | 4.8121 | -8.0808 | -14.7020 | -4.8121 | 8.0808 | -17.9850 |
| **Tabaka Açıları** | | **El. No** | **$N_i$ (N)** | **$T_i$ (N)** | **$M_i$ (N.m)** | **$N_j$ (N)** | **$T_j$ (N)** | **$M_j$ (N.m)** |
| Durum IV | $0^0$ $90^0$ $0^0$ | 1 | 4.7498 | 11.8972 | 94.5072 | -4.7498 | -11.8972 | 24.4651 |
| | | 2 | 4.7498 | 1.8972 | -24.4651 | -4.7498 | -1.8972 | 43.4375 |
| | | 3 | 4.7498 | 1.8972 | -43.4375 | -4.7498 | -1.8972 | 14.9115 |
| | | 4 | 4.7498 | -8.1028 | -14.9115 | -4.7498 | 8.1028 | -18.6177 |

**Örnek 2. Tabakalanmış Malzemeye Sahip Değişken Kesitli Kolon-Kemer Sistemi**

Biri ankastre diğeri kayıcı mesnetli kolonlara oturan kemerin statik analizi ele alınmıştır. Kesit genişliği, $b$=0.45$m$ olan ve değişken yüksekliğe ($h\ (\phi)/h(x)$) sahip doğru ve daire eksenli çubuklardan oluşan çerçevenin tekil yükler etkisindeki iki farklı tabakalanma grupları için statik analizleri yapılacaktır.




**Şekil 3.** Doğru eksenli kolonlara oturan kemer ve tabakalı değişken kesiti I




**Şekil 4.** Sistemin düğüm serbestlikleri, kodlamaları ve çubuk kesiti II

Kesit I'deki malzeme grubu ve yukarıdaki kolon-kemer sistemi için bu çalışmadan elde edilen eleman uç kuvvetleri ile her bir çubuğun 20 eşit elemana bölünmesi sonucunda ANSYS programından elde edilen değerler Tablo 6 üzerinde karşılaştırılmaktadır.

**Tablo 6.** Kesit I için hesaplanan eleman uç kuvvetlerinin karşılaştırılması

| | $N_i$ (N) | $T_i$ (N) | $M_i$ (N.m) | $N_j$ (N) | $T_j$ (N) | $M_j$ (N.m) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (XYZ) KOORDİNAT TAKIMINDA ELEMAN NO => 1 | | | | | | |
| Bu Çalışma | 5.0000 | 4.8201 | -53.5990 | -5.0000 | -4.8201 | 3.5990 |
| ANSYS | 5.0000 | 4.8200 | -53.6000 | -5.0000 | -4.8200 | 3.6002 |
| (XYZ) KOORDİNAT TAKIMINDA ELEMAN NO => 2 | | | | | | |
| Bu Çalışma | 5.0000 | 4.8201 | -3.5990 | -5.0000 | 4.8201 | 1.7995 |
| ANSYS | 5.0000 | 4.8200 | -3.6002 | -5.0000 | 4.8200 | 1.8001 |
| (XYZ) KOORDİNAT TAKIMINDA ELEMAN NO => 3 | | | | | | |
| Bu Çalışma | 5.0000 | -5.1800 | -1.7995 | -5.0000 | 5.1800 | 0.0000 |
| ANSYS | 5.0000 | -5.1800 | -1.8001 | -5.0000 | 5.1800 | 0.0000 |
| (XYZ) KOORDİNAT TAKIMINDA ELEMAN NO => 4 | | | | | | |
| Bu Çalışma | 0.0000 | -5.1800 | 0.0000 | 0.0000 | 5.1800 | 0.0000 |
| ANSYS | 0.0000 | -5.1800 | 0.0000 | 0.0000 | 5.1800 | 0.0000 |

ANSYS programı ile çözüm yaparken Şekil 4'teki çerçevenin her bir çubuğu 5, 10 ve 20 eşit elemana bölünmüştür. Kesit I'deki malzeme grubu için bu çalışmada hesaplanan düğüm deplasmanları ile ANSYS sonuçları Tablo 7 üzerinde karşılaştırılmıştır. Her bir çubuğu 20 eşit elemana bölerek ANSYS ile hesaplanan deplasmanların noktadan sonraki üç hanesi, bu çalışmada hesaplanan düğüm deplasmanları ile çakışmaktadır. Bu bölme sayıları için ANSYS ve bu çalışma arasındaki bağıl farklar da tabloda ayrıca verilmiştir.

**Tablo 7.** Kesit I için hesaplanan düğüm deplasmanlarının karşılaştırılması

| Düğüm No | | U dep. (m) | V dep. (m) | Teta (Rad.) |
|---|---|---|---|---|
| 2 | Bu Çalışma | -1.53109E-06 | -7.09353E-10 | 2.38973E-07 |
| | ANSYS (5 El.) | -1.52420E-06 | -7.10570E-10 | 2.37530E-07 |
| | ANSYS (10 El.) | -1.53180E-06 | -7.09220E-10 | 2.39130E-07 |
| | ANSYS (20 El.) | -1.53110E-06 | -7.09340E-10 | 2.38980E-07 |
| | Bağıl Hata | 6.53129E-06 | 1.83266E-05 | 2.92920E-05 |
| 3 | Bu Çalışma | -3.26896E-06 | 9.10094E-07 | 5.51869E-09 |
| | ANSYS (5 El.) | -3.24770E-06 | 9.01670E-07 | 5.17070E-09 |
| | ANSYS (10 El.) | -3.27260E-06 | 9.12690E-07 | 5.55660E-09 |
| | ANSYS (20 El.) | -3.26910E-06 | 9.10290E-07 | 5.52130E-09 |
| | Bağıl Hata | 4.28271E-05 | 2.15362E-04 | 4.72938E-04 |
| 4 | Bu Çalışma | -5.14256E-06 | -1.22450E-09 | -2.73445E-07 |
| | ANSYS (5 El.) | -5.09870E-06 | -1.22250E-09 | -2.69970E-07 |
| | ANSYS (10 El.) | -5.15000E-06 | -1.22470E-09 | -2.73910E-07 |
| | ANSYS (20 El.) | -5.14310E-06 | -1.22450E-09 | -2.73480E-07 |
| | Bağıl Hata | 1.05006E-04 | 0.00000E+00 | 1.27996E-04 |
| 5 | Bu Çalışma | -7.87702E-06 | 0.00000E+00 | -2.73445E-07 |
| | ANSYS (5 El.) | -7.79840E-06 | 0.00000E+00 | -2.69970E-07 |
| | ANSYS (10 El.) | -7.88910E-06 | 0.00000E+00 | -2.73910E-07 |
| | ANSYS (20 El.) | -7.87780E-06 | 0.00000E+00 | -2.73480E-07 |
| | Bağıl Hata | 9.90222E-05 | 0.00000E+00 | 1.27996E-04 |

**Tablo 8.** Farklı tabaka açıları ve Kesit I malzeme grubu için eleman uç kuvvetleri

| **Tabaka Açıları** | | **El. No** | **$N_i$ (N)** | **$T_i$ (N)** | **$M_i$ (N.m)** | **$N_j$ (N)** | **$T_j$ (N)** | **$M_j$ (N.m)** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Durum I | $0^0$ $0^0$ $0^0$ | 1 | 4.7498 | 11.8972 | 94.5072 | -4.7498 | -11.8972 | 24.4651 |
| | | 2 | 4.7498 | 1.8972 | -24.4651 | -4.7498 | -1.8972 | 43.4375 |
| | | 3 | 4.7498 | 1.8972 | -43.4375 | -4.7498 | -1.8972 | 14.9115 |
| | | 4 | 4.7498 | -8.1028 | -14.9115 | -4.7498 | 8.1028 | -18.6177 |
| **Tabaka Açıları** | | **El. No** | **$N_i$ (N)** | **$T_i$ (N)** | **$M_i$ (N.m)** | **$N_j$ (N)** | **$T_j$ (N)** | **$M_j$ (N.m)** |
| Durum II | $0^0$ $45^0$ $0^0$ | 1 | 4.7871 | 11.9102 | 94.6507 | -4.7871 | -11.9102 | 24.4514 |
| | | 2 | 4.7871 | 1.9102 | -24.4514 | -4.7871 | -1.9102 | 43.5535 |
| | | 3 | 4.7871 | 1.9102 | -43.5535 | -4.7871 | -1.9102 | 14.7850 |
| | | 4 | 4.7871 | -8.0898 | -14.7850 | -4.7871 | 8.0898 | -18.2423 |
| **Tabaka Açıları** | | **El. No** | **$N_i$ (N)** | **$T_i$ (N)** | **$M_i$ (N.m)** | **$N_j$ (N)** | **$T_j$ (N)** | **$M_j$ (N.m)** |
| Durum III | $45^0$ $0^0$ $45^0$ | 1 | 4.8043 | 11.9162 | 94.7169 | -4.8043 | -11.9162 | 24.4451 |
| | | 2 | 4.8043 | 1.9162 | -24.4451 | -4.8043 | -1.9162 | 43.6072 |
| | | 3 | 4.8043 | 1.9162 | -43.6072 | -4.8043 | -1.9162 | 14.7264 |
| | | 4 | 4.8043 | -8.0838 | -14.7264 | -4.8043 | 8.0838 | -18.0688 |
| **Tabaka Açıları** | | **El. No** | **$N_i$ (N)** | **$T_i$ (N)** | **$M_i$ (N.m)** | **$N_j$ (N)** | **$T_j$ (N)** | **$M_j$ (N.m)** |
| Durum IV | $0^0$ $90^0$ $0^0$ | 1 | 4.7706 | 11.9045 | 94.5875 | -4.7706 | -11.9045 | 24.4574 |
| | | 2 | 4.7706 | 1.9045 | -24.4574 | -4.7706 | -1.9045 | 43.5022 |
| | | 3 | 4.7706 | 1.9045 | -43.5022 | -4.7706 | -1.9045 | 14.8410 |
| | | 4 | 4.7706 | -8.0955 | -14.8410 | -4.7706 | 8.0955 | -18.4080 |

Kesit I'deki malzeme grubu ve dört farklı tabakalanma durumu için Şekil 4'teki çerçevenin TFY ile elde edilen eleman uç kuvvetleri Tablo 8 üzerinde toplu olarak sunulmuştur.

Ayrıca, Kesit II'deki malzeme grubu ve dört farklı tabakalanma durumu için Şekil 4'teki çerçevenin TFY ile elde edilen eleman uç kuvvetleri Tablo 9 üzerinde toplu olarak sunulmuştur.

**Tablo 9.** Farklı tabaka açıları ve Kesit II malzeme grubu için eleman uç kuvvetleri

| **Tabaka Açıları** | | **El. No** | **$N_i$ (N)** | **$T_i$ (N)** | **$M_i$ (N.m)** | **$N_j$ (N)** | **$T_j$ (N)** | **$M_j$ (N.m)** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Durum I | $0^0$ $0^0$ $0^0$ | 1 | 5.0000 | 4.8201 | -53.5991 | -5.0000 | -4.8201 | 3.5991 |
| | | 2 | 5.0000 | 4.8201 | -3.5991 | -5.0000 | -4.8201 | 1.7995 |
| | | 3 | 5.0000 | -5.1800 | -1.7995 | -5.0000 | 5.1800 | 0.0000 |
| | | 4 | 0.0000 | -5.1800 | 0.0000 | 0.0000 | 5.1800 | 0.0000 |
| **Tabaka Açıları** | | **El. No** | **$N_i$ (N)** | **$T_i$ (N)** | **$M_i$ (N.m)** | **$N_j$ (N)** | **$T_j$ (N)** | **$M_j$ (N.m)** |
| Durum II | $0^0$ $45^0$ $0^0$ | 1 | 5.0000 | 4.8199 | -53.6017 | -5.0000 | -4.8199 | 3.6017 |
| | | 2 | 5.0000 | 4.8199 | -3.6017 | -5.0000 | -4.8199 | 1.8008 |
| | | 3 | 5.0000 | -5.1801 | -1.8008 | -5.0000 | 5.1801 | 0.0000 |
| | | 4 | 0.0000 | -5.1801 | 0.0000 | 0.0000 | 5.1801 | 0.0000 |
| **Tabaka Açıları** | | **El. No** | **$N_i$ (N)** | **$T_i$ (N)** | **$M_i$ (N.m)** | **$N_j$ (N)** | **$T_j$ (N)** | **$M_j$ (N.m)** |
| Durum III | $45^0$ $0^0$ $45^0$ | 1 | 5.0000 | 4.8198 | -53.6045 | -5.0000 | -4.8198 | 3.6045 |
| | | 2 | 5.0000 | 4.8198 | -3.6045 | -5.0000 | -4.8198 | 1.8023 |
| | | 3 | 5.0000 | -5.1802 | -1.8023 | -5.0000 | 5.1802 | 0.0000 |
| | | 4 | 0.0000 | -5.1802 | 0.0000 | 0.0000 | 5.1802 | 0.0000 |
| **Tabaka Açıları** | | **El. No** | **$N_i$ (N)** | **$T_i$ (N)** | **$M_i$ (N.m)** | **$N_j$ (N)** | **$T_j$ (N)** | **$M_j$ (N.m)** |
| Durum IV | $0^0$ $90^0$ $0^0$ | 1 | 5.0000 | 4.8200 | -53.6003 | -5.0000 | -4.8200 | 3.6003 |
| | | 2 | 5.0000 | 4.8200 | -3.6003 | -5.0000 | -4.8200 | 1.8001 |
| | | 3 | 5.0000 | -5.1800 | -1.8001 | -5.0000 | 5.1800 | 0.0000 |
| | | 4 | 0.0000 | -5.1800 | 0.0000 | 0.0000 | 5.1800 | 0.0000 |

## 4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, tabakalı kompozit malzemeden yapılmış, doğru ve daire eksenli çubuklardan oluşan değişken kesitli çerçevelerin dış yükler altındaki statik analizleri TFY ile yapılmıştır. FORTRAN dilinde bir kod yazılarak problemin sayısal çözümleri için RK5 algoritması kullanılmıştır. TFY ile tek bir eleman alınarak yapılan analiz sonuçlarının ANSYS'te 20 elemanla yapılan analiz sonuçlarıyla örtüştüğü gösterilerek sunulan metodun etkinliği gösterilmiştir.

Yapılan çözümlerde eksenel ve kayma deformasyon etkileri dikkate alınmıştır. Her iki malzeme grubunda da tabakalanma açılarının çubuk uç kuvvetleri üzerindeki etkisi çok az olurken düğüm deplasmanlarını önemli ölçüde etkilediği görülmüştür.

## KAYNAKLAR

[1] ÖZÜTOK, A., MADENCİ, E., "Static analysis of laminated composite beams based on higher-order shear deformation theory by using mixed-type finite element method", International Journal of Mechanical Sciences, 130, 234–243, 2017.

[2] CHANDRASHEKHARA, K. BANGERA, K. M., "Free vibration of composite beams using a refined shear flexible beam element" Computer and Structures**,** 43(4), 719-727, 1992.

[3] KARACA, N., "Düzlemsel çubukların taşıma ve rijitlik matrisi metodu ile statik ve dinamik analizi", Yüksek lisans tezi, Mustafa Kemal Üniversitesi, Hatay, 2014.

[4] HAKTANIR, V., KIRAL, E., "Tamamlayıcı fonksiyonlar yönteminin düzlemsel çubukların statiğine doğrudan uygulanması", Ç.Ü. Müh. Mim. Fak. Dergisi., Adana, *2,155-167,1991.*

[5] ASLAN, T. A., "Eğrisel yapı elemanlarının etkin sayısal analizi üzerine bir araştırma", Yüksek lisans tezi, Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana, 2016.

[6] BAYHAN, S., "Daire eksenli düzlemsel çubukların taşıma ve rijitlik matrisi ile analizi", Yüksek lisans tezi, Çukurova Üniversitesi, Adana, 1993.

[7] BİNGÖL, M., "Değişken kesitli kompozit kirişlerin dinamik analizi", Yüksek lisans tezi, Mustafa Kemal Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Hatay, 2009.

[8] CHEN, A.T., YANG, T.Y., "Static and dynamic formulation of symmetrically laminated beam finite element for microcomputer", J. Compos. Mater. 19 459-475, 1985.

[9] SAATCI, S., "Analytical and finite element investigation of layered beams" Yüksek lisans tezi, Orta Doğu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2001.

[10] HODGES, D. H. ATILGAN, A. R. FULTON, M. V., REHFIELD, L. W., "Free Vibration Analysis of Composite Beams", Journal of the American Helicopter Society, 36(3): 36-47, 1991

[11] CHANDRASHEKHARA, K., KRISNAMURTY, K., ROY, S., "Free Vibration of Composite Beams Including Rotary Inertia and Shear Deformation", Composite Structures, 14: 269-279, 1990.

[12] SINGH, M. P., ABDELNASER, A. S., "Random Response of Symmetric Cross-Ply Composite Beams with Arbitrary Boundary Conditions", AIAA Journal, 30(4): 1081-1088, 1992.

[13] KHDEIR, A. A., REDDY, J., "An exact solution for the bending of thin and thick cross-ply laminated beams", Composite Structures, 37:195–203, 1997.

[14] KAHYA, V., TURAN, M., "Bending of Laminated Composite Beams by a Multi-Layer Finite Element Based on a Higher-Order Theory", International Conference on Computational and Experimental Science and Engineering, Vol.132 No: 3, 2016.

[15] MADENCİ, E., "Kompozit kirişlerin karışık sonlu elemanlar yöntemi ile statik ve dinamik analizi", Yüksek lisans Tezi, Selçuk üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, 2011.

[16] ÖZBEK, T., Bulletin of Technical University of İstanbul, vol. 15, 1963.

[17] YILDIRIM, V., İNCE, N., KIRAL, E., "Doğru ve Daire Eksenli Elemanlardan Oluşan Bileşik Düzlem Çerçevelerin Statik Analizi", J. of Engineering and Environmental Sciences, 137-148, 1997.

[18] HAKTANIR, V., "A New Method for the Element Stiffness Matrix of Arbitrary Planar Bars", Computers & Structures Vol. 52, No. 4. pp. 679-691, 1994

[19] ÇALIM, F. F., "Viskoelastik, anizotropik, eğri eksenli uzaysal çubuk sistemlerin dinamik analizi", Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana, 2003.

[20] ANSYS, Inc Release 15.0 , Canonsburg, PA, 2013.

[21] TEMEL, B., and NOORI, A.R. "Transient analysis of laminated composite parabolic arches of üniform thickness", International Journal of Mechanics Based Design of Structures and Machines, 1539-7734, 2019.

[22] NOORI, A.R., TEMEL, B., "On the vibration analysis of laminated composite parabolic arches with variable cross-section of various ply stacking sequences", Mechanics of Advanced Materials and Structures, 1537-6494, 2018.

[23] NOORI, A.R., ASLAN, T.A., TEMEL, B., "An Efficient Approach for In-Plane Free and Forced Vibrations of Axially Functionally Graded Parabolic Arches with Nonuniform Cross Section", Composite Structures, 200,701-710, 2018.

[24] TEMEL, B., ÇALIM, F.F., TÜTÜNCÜ, N., "Forced vibration of composite cylindrical helical rods", International journal of mechanical sciences, 47, 998-1022, 2005.

[25] ÇALIM, F.F., "Free and forced vibrations of non-uniform composite beams", Composite Structures, 88,413-423, 2008.

[26] ÇALIM, F.F., "Transient analysis of axially functionally graded Timoshenko beams with variable cross-section", Composites PartB, 98, 472-483, 2016.