JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 46, 230–238 (1982)

L'intégrale stochastique comme opérateur de divergence dans l'espace fonctionnel

BERNARD GAVEAU

Université Pierre et Marie Curie, Mathématiques, 4 place Jussieu, 75230 Paris, France

ET

PHILIP TRAUBER

Department of Mathematics, Yale University, New Haven, Connecticut 06520

Communicated by Paul Malliavin

Received September, 1981

Cet article montre que la définition de l'intégrale stochastique par rapport à un processus gaussien généralisé donnée par Skorohod [*Theory Probab. Appl.* (1975), 219–233] revient à prendre l'adjoint de la différentielle dans l'espace de probabilités en suivant le calcul de variations stochastiques de Malliavin.

This article proves that the definition of the stochastic integral with respect to a generalized gaussian process given by Skorohod [*Theory Probab. Appl.* (1975), 219–233] is equivalent to the adjoint of the differential in the probability space following the stochastic variation calculus of Malliavin.

INTRODUCTION

Plusieurs définitions de l'intégrale stochastique par rapport á un bruit blanc multidimensionnel ont été données: parmi celles-ci signalons celle de [1] qui n'a pas certaines propriétés naturelles auxquelles on s'attendrait (par exemple $E(\int \eta\, d\xi) \neq 0$ en général) et surtout celle de Skorohod [2].

Nous allons montrer que l'intégrale de Skorohod correspond exactement à calculer une divergence δ par rapport à la mesure gaussienne cylindrique, c'est-à-dire à calculer l'adjoint formel δ de l'opérateur de dérivée totale d. D'autre part, cet opérateur de dérivée totale est exactement le gradient stochastique introduit par P. Malliavin dans son calcul des variations stochastiques [3, 6] et l'opérateur L de Malliavin n'est autre que—δd. En d'autres termes, nous avons ici le début d'un complexe de de Rham sur

0022-1236/82/050230–09$02.00/0

Copyright © 1982 by Academic Press, Inc.
All rights of reproduction in any form reserved.

l'espace de Hilbert H; l'opérateur δ est son adjoint, l'opérateur de P. Malliavin L est le laplacien standard, en interprétant les éléments de $L^2(\Omega, H)$ comme des 1-formes sur Ω.

1. La déformation du bruit blanc par le processus d'Ornstein Uhlenbeck

1. Nous considérons un espace de Hilbert H et son bruit blanc ξ: par définition, pour tout $f \in H$, on définit $\langle \xi, f \rangle$ comme variable gaussienne centrée de variance $\|f\|^2$. Pour fixer les idées et bien que ce ne soit pas nécessaire, nous pensons à H comme un espace $L^2(K, m)$ et nous notons *l'intégrale stochastique élémentaire* $\xi(f) = \int_K f(k)\, \xi(dk)$ avec

$$E(d\xi(k)) = 0,$$

$$E(d\xi(k)\, d\xi(k')) = \delta(k - k')\, m(dk).$$

Notons (Ω, P) l'espace de probabilité de ce bruit blanc.

2. On peut réaliser Ω comme un espace conucléaire dans lequel H se trouve plongé. Alors on sait bien que l'espace $L^2(\Omega, P)$ est identique à l'espace $L^2(H)$ (complété pour la norme L^2 des fonctions cylindriques sur H de carré intégrable par rapport à la gaussienne cylindrique standard de H) et cela est encore le chaos polynomial de Wiener défini ainsi:

On note $L^2(H)_{\leqslant n}$ l'espace de Hilbert engendré par les produits $\xi(h_1) \cdots \xi(h_k)$ pour $k \leqslant n$ et $L^2(H)_n$ le complément orthogonal de $L^2(H)_{\leqslant n-1}$ dans $L^2(H)_{\leqslant n}$; on note $:\xi(h_1) \cdots \xi(h_n):$ l'image de $\xi(h_1) \cdots \xi(h_n)$ par le projecteur orthogonal de $L^2(H)_{\leqslant n}$ dans $L^2(H)_n$.

Si on note $S^n H$ la puissance symétrique d'ordre n de H avec le produit scalaire naturel

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{sym}(h_1 \otimes \cdots \otimes h_n) \,|\, \mathrm{sym}(g_1 \otimes \cdots \otimes g_n)) \\
&\quad = \sum_{i_1 \cdots i_n} (\mathrm{sym}(h_1 \otimes \cdots \otimes h_n) \,|\, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}) \\
&\qquad \times (e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} \,|\, \mathrm{sym}(g_1 \otimes \cdots \otimes g_n)) \\
&\quad = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} (h_l \,|\, g_{\pi(l)}) \qquad (e_l \text{ est base orthonormée de } H).
\end{aligned}$$

On a alors que l'application $\mathrm{sym}(h_1 \otimes \cdots \otimes h_n) \to :\xi(h_1) \cdots \xi(h_n):$ satisfait $E(:\xi(h_1) \cdots \xi(h_n)::\xi(g_1) \cdots \xi(g_n):) = n!(\mathrm{sym}(h_1 \otimes \cdots \otimes h_n) \,|\, \mathrm{sym}(g_1 \otimes \cdots \otimes g_n)$ et $S^k \simeq L^2(\Omega)_k$ pour tout k.

3. Tout $\alpha \in L^2(\Omega)$ s'écrit alors comme une série L^2 convergente

$$\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} :S_k^{(\alpha)}(\xi \cdots \xi):$$

où $S_k^{(\alpha)} \in S^k H$ et $:S_k^{(\alpha)}(\xi \cdots \xi):$ est l'image de $S_k^{(\alpha)} \in S^k H$ dans $L^2(\Omega)_k$ définie ci-dessus.

4. Par ailleurs supposons que l'on ait $A_k(f \cdots f)$ défini par $A_k \in S^k H$ et supposons que l'on ait

$$A_k(f \cdots f) = \sum_{\substack{i_1 \cdots i_k \\ l_1 + \cdots + l_k = k}} c_{i_1,\ldots,i_k}^{l_1 \cdots l_k} (f \mid e_{i_1})^{l_1} \cdots (f \mid e_{i_k})^{l_k}.$$

Alors on sait bien que

$$:A_k(\xi \cdots \xi): = \sum_{\substack{i_1 \cdots i_k \\ l_1 + \cdots + l_k = k}} c_{i_1 \cdots i_k}^{l_1 \cdots l_k} h_{l_1}(\xi(e_{i_1})) \cdots h_{l_k}(\xi(e_{i_k}))$$

où h_{l_j} est le polynôme d'Hermite de degré l_j à 1 variable normalisé par son coefficient de degré maximal égal à 1 (voir [2] pour toutes les notions).

5. Maintenant si $(e_i)_i$ est base orthonormée de H, le bruit blanc ξ s'écrit formellement comme série de Fourier $\xi = \sum \xi_n e_n$ où ξ_n sont des variables gaussiennes centrées normales $\xi_n = \xi(e_n)$.

Pour chaque n, définissons un processus d'Ornstein Uhlenbeck $X_n(\tau)$ de loi initiale ξ_n, indépendant des ξ_n.

Alors $X(\tau) = \sum X_n(\tau)\, e_n$ est le processus d'Ornstein Uhlenbeck de Ω; il induit une variation stochastique ω_τ de $\omega \in \Omega$ qui préserve la mesure P sur Ω. Le processus est un processus de Markov dont le générateur infinitésimal, noté L est une somme d'opérateurs indépendants L_n

$$L = \sum_n L_n$$

L_n étant $d^2/d\xi_n^2 - \xi_n(d/d\xi_n)$, générateur de l'oscillateur harmonique (voir [3], et également [5] pour l'analogue en théorie du champ).

6. Par ailleurs on a évidemment

$$L_n(h_k(\xi_n)) = -k h_k(\xi_n)$$

et par conséquent nous déduisons immédiatement

LEMME 1. *Si* $\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} :S_k^{(\alpha)}(\xi \cdots \xi):$, *alors* $L\alpha = -\sum_{k=0}^{+\infty} k:S_k^{(\alpha)}(\xi \cdots \xi):$ *si la série converge dans* $L^2(\Omega)$.

7. Nous noterons $\mathscr{E}_{\omega_0}$ l'opérance par rapport à l'espace de probabilité Θ

(indépendant de Ω) du processus d'Ornstein Uhlenbeck partant à $\tau = 0$ de ω_0. On a par définition pour $\alpha \in L^2(\Omega)$ avec $L\alpha \in L^2(\Omega)$

$$\lim_{\tau \to 0^+} \frac{\mathscr{E}_{\omega_0}(\alpha(\omega_\tau)) - \alpha(\omega_0)}{\tau} = (L\alpha)(\omega_0),$$

2. Étude du gradient

1. Si $\alpha(\omega) \in L^2(\Omega)$, on peut définir comme dans [2] un gradient stochastique $\alpha' \in L^2(\Omega, H)$ ainsi: pour $\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} :A_k^{(\alpha)}(\xi \cdots \xi):$, on définit

$$(\alpha' \mid f)_H = \sum_{k=1}^{+\infty} k:A_k^{(\alpha)}(f, \xi \cdots \xi): \qquad \text{pour tout } f \in H.$$

2. D'autre part, dans [3], on définit le produit scalaire de $(\nabla\alpha \mid \nabla\beta)$ pour $\alpha, \beta \in L^2(\Omega)$ de classe C^1 au sens de Malliavin. Nous allons comparer ces deux notions. Pour cela commençons par montrer:

Lemme 2. *Soit $f_i \in H$ et soit $\alpha_i(\omega) = \xi(f_i)$. Alors*

(1) *au sens de* [2], *α_i' existe et vaut f_i,*

(2) *au sens de* [3], $(\nabla\alpha_i \mid \nabla\alpha_j) = (f_i \mid f_j)$.

Preuve. (1) est évident par définition,

(2) pour vérifier (2), on va prendre $j = i$.

D'abord $L\alpha_i = -\alpha_i$. D'après Malliavin nous devons étudier le carré de la martingale:

$$M_{\alpha_i}(\tau) = \alpha_i(\omega(\tau)) - \alpha_i(\omega(0)) - \int_0^t (L\alpha_i)(\omega(\sigma))\, d\sigma.$$

Soit $f_i^{(n)} = (f_i \mid e_n)$. Le carré de cette quantité est lorsque $d\tau \to 0$

$$(M_{\alpha_i}(d\tau))^2 = \left(\sum_n f_i^{(n)}(dX_m(\tau) + X_n(0)\, d\tau)\right)^2.$$

Or $dX_n(\tau) = db_n(\tau) - X_n(0)\, d\tau$ où b_n est suite de browniens standards indépendants, par suite

$$\mathscr{E}((M_{\alpha_i}(d\tau))^2) = \sum_n (f_i^{(n)})^2 E((db_n(\tau))^2)$$

$$= \sum_n (f_i^{(n)})^2\, d\tau = \|f_i\|^2\, d\tau.$$

Par un raisonnement facile de polarisation on conclut le lemme.

3. Ce lemme nous permet de définir le gradient de α au sens de Malliavin par

$$(\nabla\alpha \mid f)_H = (\nabla\alpha \mid \nabla\beta)_H \qquad \text{où} \qquad \beta = \xi(f).$$

On a alors:

THÉORÈME 1. *Le gradient ainsi défini $\nabla\alpha$ coïncide avec la dérivée stochastique α' au sens de Skorohod.*

Démonstration. Il suffit de le voir pour $\alpha = :A_k(\xi \cdots \xi):$ où $A_k(f \cdots f) = (f \mid e_{i_1})^{l_1} \cdots (f \mid e_{i_k})^{l_k}$ la sommation portant sur $l_1 + \cdots + l_k = k$ et les $e_{i_1} \cdots e_{i_k}$ étant distincts; soit $\xi_i = \xi(e_i)$; on a d'après le (1)

$$\alpha(\omega) = h_{l_1}(\xi_{i_1}) \cdots h_{l_k}(\xi_{i_k}).$$

D'abord calculons α' au sens de Skorohod; on a

$$(\alpha'(\omega) \mid e_i) = 0 \qquad \text{si} \quad i \neq i_1, \ldots, i_k.$$

De plus si $i = i_j$, on a

$$(\alpha'(\omega) \mid e_{i_j}) = k:A_k(e_{i_j}\xi \cdots \xi):$$

Or on a

$$A_k(X_1 \cdots X_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_k} (X_{\pi(1)} \mid e_{i_1})^{l_1} \cdots (X_{\pi(k)} \mid e_{i_k})^{l_k}.$$

On a alors en prenant $X_1 = e_{i_j}$ et $X_2 = \cdots = X_k = \xi$

$$A_k(e_{i_j} \cdots \xi \cdots \xi) = \frac{1}{k} l_j(\xi_{i_1})^{l_1} \cdots (\xi_{i_j})^{l_j - 1} \cdots (\xi_{i_k})^{l_k}$$

et donc

$$\alpha' = :A_k(\xi \cdots \xi):' = \sum_{j=1}^{h} e_{i_j} l_j h_{l_1}(\xi_{i_1}) \cdots h_{l_j - 1}(\xi_{i_j}) \cdots h_{l_k}(\xi_{i_k}).$$

Faisons ensuite le calcul stochastique de Itô; il nous faut étudier $(\nabla\alpha \mid \nabla\beta)$ où $\beta = \xi(e_i)$; pour cela on définit $M_\alpha(d\tau) = d\alpha(\omega(t)) - (L\alpha)(\omega(0))\, d\tau$ et on doit étudier $M_\alpha(d\tau)\, M_\beta(d\tau)$.

On a puisque les $\xi_{i_j}(\tau)$ sont indépendants:

$$d\alpha(\omega(\tau)) = \sum_j h_{l_1}(\xi_{i_1}(0)) \cdots \widehat{h_{l_j}(\xi_{i_j}(0))} \cdots h_{l_k}(\xi_{i_k}(0))\, dh_{l_j}(\xi_{i_j}(\tau))$$

$$= \sum_j h_{l_1}(\xi_{i_1}(0)) \cdots \widehat{h_{l_j}(\xi_{i_j}(0))} \cdots h_{l_k}(\xi_{i_k}(0))(h'_{l_j}(\xi_{i_j}(0))\, d\xi_{i_j}(\tau)$$

$$+ \tfrac{1}{2} h''_{l_j}(\xi_{i_j}(0))(d\xi_{i_j}(\tau))^2).$$

Mais

$$h'_{l_j}(\xi_{i_j}(0))\, d\xi_{i_j}(\tau) + \tfrac{1}{2} h''_{l_j}(\xi_{i_j}(0))(d\xi_{i_j}(\tau))^2$$

$$= h'_{l_j}(\xi_{i_j}(0))\, db_{i_j}(\tau) + (Lh_{l_j})(\xi_{i_j}(0))\, d\tau$$

$$= h'_{l_j}(\xi_{i_j}(0))\, db_{i_j}(\tau) - l_j h_{l_j}(\xi_{i_j}(0))\, d\tau$$

d'où

$$d\alpha(\omega(\tau)) - (L\alpha)(\omega(0))\, d\tau = \sum_j h_{l_1}(\xi_{i_1}(0)) \cdots h_{l_j}(\xi_{i_j}(0)) \cdots h_{l_k}(\xi_{i_k}(0))$$

$$\times h'_{l_j}(\xi_{i_j}(0))\, db_{i_j}(\tau).$$

Par ailleurs

$$d\beta(\omega(\tau)) - (L\beta)(\omega(\tau))\, d\tau = db_i(\tau).$$

Par conséquent

$$\mathscr{E}(M_\alpha(d\tau)\, M_\beta(d\tau)) = 0 \qquad \text{si} \quad i \neq i_1, \ldots, i_k$$

$$= h_{l_1}(\xi_{i_1}(0)) \cdots h'_{l_j}(\xi_{i_j}(0)) \cdots h_{l_k}(\xi_{i_k}(0))\, d\tau \qquad \text{si} \quad i = i_j.$$

Mais les relations de récurrence pour les polynômes d'Hermite donnent $h'_{l_j} = l_j h_{l_j - 1}$, d'où

$$(\nabla\alpha)(\omega) = \sum_{j=1}^{k} e_{i_j} l_j h_{l_1}(\xi_{i_1}) \cdots h_{l_j - 1}(\xi_{i_j}) \cdots h_{l_k}(\xi_{i_k}).$$

3. Définition de l'intégrale stochastique comme une divergence gaussienne

1. Soit $\eta \in L^2(\Omega, H)$; nous voulons définir un accouplement $\xi(\eta)$ du bruit blanc avec η. Lorsque $H = L^2(K, m)$, cela revient à dire que on veut définir

$$\int_K \eta(\omega, k)\, d\xi(k).$$

Lorsque K est de dimension 1, on profite de l'ordre chronologique pour définir cette intégrale stochastique au sens de Itô. La définition donnée par Skorohod dans le cas général procède ainsi: supposons que η soit telle que pour tout $f \in H$

$$(\eta \mid f)_H = :T^{\eta}_{k+1,k}(f \mid \xi \cdots \xi):$$

où $T^{\eta}_{k+1,k}$ est forme $(k+1)$-linéaire, symétrique par rapport aux k derniers arguments. Skorohod pose

$$\int \eta \, d\xi = :T^{\eta}_{k+1,k}(\xi \mid \xi, \ldots, \xi):$$

Il montre alors que l'on a

$$\int \eta \, d\xi = (\eta \mid \xi) - \sum_j ((\eta \mid e_j)' \mid e_j)$$

où $(\eta \mid \xi) = \sum_j (\eta \mid e_j)(e_j)$ et où $(\eta \mid e_j)'$ est la dérivée stochastique de la variable aléatoire scalaire $(\eta \mid e_j) \in L^2(\Omega)$. Nous allons réinterpréter intrinsèquement cette intégrale stochastique.

2. Introduisons maintenant la divergence $\delta\eta$ d'un élément $\eta \in L^2(\Omega, H)$; cette divergence (si elle existe) sera un élément $\delta\eta \in L^2(\Omega)$ et elle sera telle que

$$E(\delta\eta\Theta) = E((\eta \mid \nabla\Theta)_H)$$

pour toute $\Theta \in L^2(\Omega)$ avec $\nabla\Theta$ existe dans $L^2(\Omega, H)$; autrement dit δ est l'adjoint de ∇ pour la mesure P sur l'espace Ω.

3. Démontrons alors le théorème:

THÉORÈME 2. *Soit $\eta \in L^2(\Omega, H)$ telle que l'intégrale stochastique $\int \eta \, d\xi$ au sens de Skorohod existe. Alors on a $\int \eta \, d\xi = \delta\eta$ et réciproquement.*

Démonstration. Il nous suffit de vérifier que $\int \eta \, d\xi$ satisfait la propriété adjointe de ∇. Pour cela prenons Θ du type $\Theta = :A_k(\xi \cdots \xi): = h_{l_1}(\xi_{i_1}) \cdots h_{l_k}(\xi_{i_k})$ $(l_1 + \cdots + l_k = k,\ i_1 \cdots i_k$ distincts); posons $\eta_i = (\eta \mid e_i)$ et supposons que $\eta = \eta_i e_i$ avec comme on peut toujours le supposer,

$$\eta_i = h_{\lambda_1}(\xi_{i_1}) \cdots h_{\lambda_k}(\xi_{i_n})$$

(a) calcul de $E((\eta \mid \nabla\Theta))$. On a certainement

$$E((\eta \mid \nabla\Theta)) = 0 \qquad \text{si} \quad i \neq i_1 \cdots i_k.$$

Si $i = i_j$, on a

$$E((\eta \mid \nabla\Theta)) = E(\eta_{i_j}(\nabla\Theta \mid e_{i_j}))$$
$$= E(\eta_{i_j l_j} h_{l_1}(\xi_{i_1}) \cdots h_{l_{j-1}}(\xi_{i_j}) \cdots h_{l_k}(\xi_{i_k})).$$

Maintenant cette intégrale est une intégrale gaussienne standard sur un espace de dimension finie; par suite on peut intégrer par parties par rapport à la variable gaussienne unidimensionnelle ξ_{i_j}. Mais l'adjoint de la dérivée première par rapport à la gaussienne unidimensionnelle est $\delta f = xf - f'$, d'où

$$E((\eta \mid \nabla\Theta)) = E((\eta_{i_j}\xi_{i_j} - (\nabla\eta_{i_j} \mid e_{i_j}))\, h_{l_1}(\xi_{i_1}) \cdots h_{l_k}(\xi_{i_k}))$$
$$= E((\eta_{i_j}\xi_{i_j} - (\nabla\eta_{i_j} \mid e_{i_j}))\Theta)$$

(b) calcul de $E((\int \eta\, d\xi) \cdot \Theta)$.

Comme nous avons supposé $\eta = \eta_i e_i$, on a par définition

$$E\left(\left(\int \eta\, d\xi\right)\Theta\right) = E(\Theta(\eta_l \xi_l (\nabla\eta_l \mid e_l))).$$

L'intégrale à droite se réduit à un nombre fini d'intégrales gaussiennes indépendantes.

Si i n'est aucun des $i_1 \cdots i_k$, on peut commencer à effectuer l'espérance sur ξ_i; alors $\eta_i\xi_i - (\nabla\eta_i \mid e_i)$ est $\delta\xi_i \cdot \eta_i$ et donc en intégrant par parties par rapport à la gaussienne ξ_i on trouve 0.

Si i est i_j, on retrouve l'expression précédente.

COROLLAIRE 1. *On a* $L = -\frac{1}{2}\delta\nabla$.

COROLLAIRE 2. *On a*

$$E\left(\left(\int \eta\, d\xi\right)^2\right) = E(\|\eta\|_H^2) + \operatorname{Tr} E(\eta' \circ \eta').$$

Note. Ces résultats ont été annoncés dans une Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (*C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **291** (1980), 283–286). Des applications de cette théorie aux équations aux dérivées partielles stochastiques paraîtrant prochainement.

REFERENCES

1. DALECKII-PARAMONOVA, *Dokl. Math. Nauk* **208** (1973), 512–515.
2. A. V. SKOROHOD, *Theory Probab. Appl.* (1975), 219–233.
3. P. MALLIAVIN, Stochastic calculus of variations, *in* "Proceedings, International Conference on SDE, Kyoto, 1976," pp. 243–310.
4. B. GAVEAU, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **273** (1973), 61–64.
5. M. KAC ET B. GAVEAU, non publié.
6. D. STROOCK, The Malliavin calculus, a functional analytic approach, *J. Funct. Anal.* **44** (1981), 212–257.