T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CONFORMABLE ANLAMINDA RASYONEL FONKSİYON YAKLAŞIMLARI

Fatma YEŞİLDAĞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ocak -2023
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Fatma YEŞİLDAĞ tarafından hazırlanan "CONFORMABLE ANLAMINDA RASYONEL FONKSİYON YAKLAŞIMLARI" adlı tez çalışması 19/01/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri **İmza**

Başkan
Prof. Dr. Abdullah S. KURBANLI

Danışman
Doç. Dr. Ozan ÖZKAN

Üye
Prof. Dr. Aynur YALÇINER

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Ömer Faruk YÜKSEL
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Fatma YEŞİLDAĞ

Tarih:19.01.2023

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CONFORMABLE ANLAMINDA RASYONEL FONKSİYON YAKLAŞIMLARI

Fatma YEŞİLDAĞ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ozan ÖZKAN

2023, 43 Sayfa

Jüri
Doç. Dr. Ozan ÖZKAN
Prof. Dr. Abdullah S. KURBANLI
Prof. Dr. Aynur YALÇINER

Bu tez çalışmanın konusu, literatürdeki Conformable anlamındaki kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çeşitli yöntemlerle elde edilmiş yarı analitik çözümlerinin Padé yaklaştırımı ile iyileştirilmesidir. Padé yaklaşımının diğer kesirli mertebeden türev tanımlarında olduğu gibi Conformable anlamındaki kesirli mertebeden türev tanımı ve bu tanım yardımıyla ele alınan problemlerde de iyi çalıştığı şekillerle de desteklenen örneklerde gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Conformable türev operatörü, Padé yaklaşımı, kesirli mertebeden türev, yarı analitik çözüm

ABSTRACT

M.Sc. THESIS

RATIONAL FUNCTION APPROXİMATİONS IN THE SENSE OF CONFORMABLE

Fatma YEŞİLDAĞ

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE OF PHILOSOPHY IN MATHEMATICS

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Ozan ÖZKAN

2023, 43 Pages

Jury
Assoc. Prof. Dr. Ozan ÖZKAN
Prof. Dr. Abdullah S. KURBANLI
Prof. Dr. Aynur YALÇINER

The subject of this thesis is the improvement of the semi-analytical solutions of fractional differential equations, which means Conformable in the literature, obtained by various methods, by Padé approximation. As with other definitions of fractional derivatives of Padé approach, the definition of fractional derivative in the meaning of Conformable and the ways in which it works well in the problems handled with the help of this definition are shown in examples supported by examples..

Keywords: Conformable derivative operator, Padé approximation, fractional derivative, semianalytical solution

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Doç. Dr. Ozan ÖZKAN yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans TEZİ olarak sunulmuştur.

Bu çalışmada bana yol gösteren ve destek olan değerli hocam Doç. Dr. Ozan ÖZKAN ve desteklerinden dolayı aileme teşekkürlerimi sunarım.

Fatma YEŞİLDAĞ
KONYA-2023

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... İV

ABSTRACT V

ÖNSÖZ ..... Vİ

İÇİNDEKİLER ..... Vİİ

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... Vİİİ

1. GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI 1

2.MATERYAL VE YÖNTEM 6

2.1. GAMMA FONKSİYONU 6

2.2.BETA FONKSİYONU 7

2.3.BAZI KESİRLİ TÜREV VE KESİRLİ İNTEGRAL TANIMLARI 7

2.3.1. Riemann-Liouville Kesirli Türevi 8

2.3.2.Grünward-Letnikov Kesirli Türevi 10

2.3.3. Caputo Kesirli Türevi 10

3. CONFORMABLE TÜREV VE İNTEGRAL KAVRAMI 12

4. PADÉ YAKLAŞIMI 17

5.CONFORMABLE DİFERANSİYEL DENKLEMLERE PADÉ YAKLAŞIMININ UYGULANMASI 24

6. SONUÇ VE ÖNERİLER 40

KAYNAKLAR 41

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\Gamma(t)$: Gamma Fonksiyonu

$\beta(m,n)$: Beta Fonksiyonu

${}^{G.L}D_{c,t}^{\eta}$: η-mertebeden Grünwald-Letnikov Kesirli Türev Operatörü

${}_cD_t^{\eta}$: η-mertebeden Riemann-Liouville Kesirli Türev Operatörü

${}_cD_t^{-(k-\eta)}$: (k-η)-mertebeden Riemann-Liouville Kesirli İntegral Operatörü

T^{η} : η-mertebeden Conformable Türev Operatörü

I_{η}^{α} : η-mertebeden Conformable İntegral Operatörü

$\left[\frac{L}{M}\right]$: $\sum_{k=0}^{L+M} u_k(x,t)$ serisinden hareketle elde edilen Padé yaklaşımı (Payı L. derece, paydası M. derece)

$O(x^n)$: n. terim ve sonrasının ihmal edilmesi, kalan terimler

1. GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI

Kesirli analiz, matematiksel analizin bir koludur dolayısıyla tarihi de klasik analiz kadar eskidir. Kesirli analiz kavramının yeni bir kavram olduğuna dair yaygın ve yanlış bir algı vardır. Bu yanlış algı; bilim insanlarının son yıllarda kesirli analiz konusuna daha çok ilgi duyması, kesirli analizi dolayısıyla kesirli türevi daha çok konuşuyor olmaları ve matematiksel modellerini kurabilmeleri için kesirli analizin konusu olan çeşitli kesirli türev kavramlarını daha çok kullanmaları sayesinde ortadan kalkmaya başlamıştır.

Geçmişe bakıldığında kesirli analiz dolayısıyla kesirli türev kavramlarının ilk dillendirilmesi, L' Hospital' in 1695 yılında Leibnitz ile yapmış oldukları yazışmalara dayanmaktadır. Bu yazışmalarda Leibnitz, L' Hospital' a türevin tanımı için kullandığı $\frac{d^n}{dx^n}$ operatör gösterimindeki n' nin $n=\frac{1}{2}$ olması durumunda, türevinin anlamını sormaktadır. Leibnitz, ise bunun o günün şartlarında bir paradoks olduğunu ancak bir gün bu notasyondan yararlı sonuçlar elde edilebiceğini cevap olarak vermiştir. Ardından, Johann Bernoulli de n' nin tam sayı olmaması veya irrasyonel olması durumunda türev tanımının nasıl yorumlanması gerektiğini Leibnitz' e sormuştur. Leibnitz de Bernoulli' ye L' Hospital' a verdiği benzer bir cevap vermiştir (Weilbeer, 2005). Kesirli analiz kavramı Leonhard Euler' in de ilgisini çekmiştir. Hatta kesirli türev tanımlarında çok sık kullanılan faktöriyel kavramını genelleştirerek 1783 yılında Gamma fonksiyonunu tanımlamıştır ki bu da kesirli analizin yaygınlaşmasına zemin hazırlamıştır (Weilbeer, 2005).

J. Liouville kesirli analiz alanındaki ilk temel çalışmayı 1832 yılında $\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}e^{2x}$ işlemi için yapar. Elde ettiği sonuçlar sayesinde mekanik ve geometri için önemli bazı problemler çözüme kavuşur. Liouville başka bir çalışmasında $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $\frac{d^n}{dx^n}e^{ax}=D^n e^{ax}=a^n e^{ax}$ eşitliği yardımıyla $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n e^{a_n x}$ toplamı şeklinde seriye açılabilen bir f fonksiyonun kesirli mertebeden türevini $D^{\alpha}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n a_n^{\alpha}e^{a_n x}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ şeklinde ifade eder (Liouville, 1832). $D^{-p}f(x)=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_c^x (x-t)^{p-1}f(t)\,dt+\psi(x)$ eşitliğini G. F. Bernhard Riemann, Taylor serisinin genellemesi için verir. Riemann bu formülde c sayısındaki belirsizliği ortadan kaldırmak için tanımın sonuna homojen

kısmın çözümü olan $\psi(x)$ fonksiyonunu ekler (Ross, 1974). Grünwald ve Letnikov'ın farklı tarihlerde yaptıkları benzer çalışmalarındaki ${}^{GL}D_x^{\alpha} f = \lim_{h\to 0} \frac{(\Delta_h)^{\alpha} f(x)}{h^{\alpha}}$ tanımı, bazı şartlar altında Riemann-Liouville tanımına eşdeğer olduğu ispatlanır (Grunwald, 1867; Letnikov, 1868; Weilbeer, 2005).

Gerçek hayattaki birçok olayın kesirli analiz yardımıyla daha iyi modellenebildiği bilimsel bir sır değildir (Caputo ve Mainardi, 1971; Westerlund, 1994; Rosales-García ve ark., 2020). Hatta son yapılan çalışmalarda kesirli türevin, doğadaki malzemelerin mekanik ve elektriksel özelliklerin karakterize edilmesi ve kayaların jeolojik yapılarının ifade edilmesinde de kullanıldığı bilinmektedir (Podlubny I., 1998). Dahası; sinyal işleme süreçlerinde, kontrol sistemlerinde, akışkan sistemlerde, kesirli stokastik sistemlerde, biyoloji ve ekolojide modellenen problemlerde kesirli türev aracılığıyla modellenen problemlerin daha gerçekçi sonuçlar verdiği bilinmektedir (Li C. ve ark., 2011).

Bilimsel açıdan kesirli türev tarihine bakıldığında; problemlerin doğasından kaynaklanan nedenlerle birçok farklı kesirli türev tanımının yapılmış olduğunu görürüz. Bu tanımların çoğuna ilham veren asıl çalışmalar G. F. Bernhard Riemann tarafından yapılmıştır (Ross, 1974). Kesirli türev tanımlarından Grünwald- Letnikov' un yapmış oldukları kesirli türev tanımı Riemann-Liouville kesirli türev ifadesinin genel halidir (Letnikov, 1868). Literatürde en çok kullanılan bir başka kesirli türev tanımı da Caputo kesirli türev tanımıdır ki, bu tanım da Riemann-Liouville türevin tanımından elde edilmiştir (Hilfer, 2000).

Her ne kadar bilimsel bir gerçek olmasa da yukarıda bahsedilen tanımlar en çok bilinen ve kullanılan tanımlardır. Buna rağmen hala bilimsel ihtiyaçlardan dolayı yeni kesirli türev tanımları literatüre girmektedir. Bu yeni tanımlardan biri de Conformable anlamda türev tanımıdır. Conformable anlamda kesirli türev tanımı ilk olarak 2014 yılında Khalil ve ark. (2014) tarafından literatüre kazandırılmıştır. Bu yeni tanımı kullanılarak birçok bilimsel çalışmanın yapıldığı ise Khalil ve ark. (2014)' larının yapmış olduğu çalışmanın referanslarından kolaylıkla görülebilir. Bu yeni tanımın bu şekilde kabul görmesinin nedeni ise; daha önce literatürde yer alan kesirli türev tanımlarının sağlayamadığı, iki fonksiyonun çarpımlarının türevi, bölümlerinin türevi, bileşke fonksiyonun türevi ve zincir kuralı gibi bazı önemli cebirsel türev işlemi özelliklerinin bu conformable anlamdaki kesirli türev tanımı ile sağlanıyor olmasıdır (Khalil ve ark.,

2014). Ayrıca bu yeni tanım; klasik analiz için ayrı bir önem arzeden Rolle teoremi, ortalama değer teoremi ve kesirli türevle süreklilik arasındaki teoremler gibi temel teoremlerin conformable kesirli türev için de ifade edilebilmesine olanak vermiştir (Khalil ve ark., 2014), (Abdeljawad, 2015).

Padé yaklaşımı konusunun tarihçesi 18. yy' a dayanmaktadır. Akademik anlamda yöntem ilk defa Henri Eugune Pade tarafından kullanılmıştır. Yöntem, günümüze ulaşana kadar birçok ünlü matematikçi tarafından da farklı problemlerin çözümünü bulabilmek amacıyla kullanılmıştır. Örneğin; Euler C.G.J. Jacobi, Michell Rolle, George Ferdinand Frobenius, Jean Darboux ve Daniel Bernoulli gibi ünlü bilim insanları tarafından matematiğin farklı alanlarında problemlere çözüm bulabilmek ve çözümlerinin analizi için metodu kullanmışlardır.

Padé yaklaşımı, bir fonksiyonun Taylor seri açılımının, iki polinomun oranı şeklinde rasyonel halde yazılması, sonrasında da pay ve paydada bulunan bu polinomların katsayılarının belirlenmesi esasına dayalıdır (Wazwaz, 2002). Padé yaklaşım teknikleri ilk olarak 1846 yılında Jacobi tarafında ortaya atılmıştır. Ardından 1881 yılında Frobenius, Padé yaklaşımının cebirsel özellikleri üzerine kapsamlı bir araştırma yapmıştır. 1892 yılında ise Henri Eugène Padé, kendi doktora tezinde Frobenius' un çalışmalarını biraz daha öteye taşımış ve exponansiyel fonksiyonun Padé yaklaşımını tablo halinde göstermiştir. Tezinin hiçbir yerinde Jacobi ve Frobenius' dan bahsetmemesi onların çalışmalarından haberdar olmadığı varsayımına dayanmaktadır (Baker, 1975). Henri Eugène Padé 1863-1953 yılları arasında yaşamış olan bir Fransız matematikçidir (Cabannes, 1976). Metot her ne kadar 1800 lü yıllarda ortaya atılsa da, değeri 20.yüz yılın sonlarında anlaşılmaya ve bu konu üzerinde daha çok çalışmalar yapılmaya başlanmıştır. Örneğin; Djellouli ve ark. (2001) Padé yaklaşım metodunu pür akustik problemlere uygulayarak akustik alanların saçılımını hesaplamıştır. Sonra elde ettikleri sonuçları Taylor ve Wynn yaklaşımlarında elde edilen sonuçlarla karşılaştırmış ve Padé nin geniş frekans aralıklarında her ikisinden de daha iyi sonuçlar verdiğini göstermişlerdir. Webb (2002), mikrodalga cihazların 3-D Sonlu Elemanlar analizinde frekans tepkisinin hassasiyetini hesaplarken Padé' den faydalanmıştır. Jensen ve Sigmund (2005), yüksek frekanslı çözünürlükle frekans tepkilerini hesaplamak için Padé yaklaşımından kullanmışlardır. Noor ve Mohyud-Din (2009), Thomas-Fermi denklemini çözmek için önce Homotopi pertürbasyon yöntemini kullanmışlar ardından elde ettikleri çözümlere Padé yaklaşım metodunu uygulayarak çözümlerini daha da iyileştirmişlerdir. Masjuan ve Sanz-Cillero (2013), bir rezonansın kutup kütlesi ve genişliğinin çıkarılması probleminde

Padé yaklaşım metodunu kullanmıştır. Borhanifar ve Valizadeh (2015), Padé yaklaşım metodunu Caputo anlamında kesirli mertebeden difüzyon denkleminin çözümünde kullanmıştır. Cansu-Kurt ve Özkan (2018), diferansiyel dönüşüm metodunu bazı lineer ve lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulamış ve ele aldıkları problemlerin kuvvet serileri şeklinde yaklaşık çözümler bulmuşlardır. Ardından elde ettikleri yarı analitik çözümlere önce Laplace dönüşümünü ve Padé Yaklaşım metodunu ardışık uygulamışlar böylelikle elde ettikleri yarı analitik çözümlerin iyileştirilmiş çözümlere ulaşmışlardır. Yukarıda sadece birkaç tanesini saydığımız çalışmalardan anlaşılabileceği gibi; Padé yaklaşımı diğer yaklaşım metotları ile karşılaştırıldığında daha iyi sonuçlar vermesi, bu yaklaşımın bilinirliğini arttırmış ve bu metodun sadece matematikte değil, fizikte, kimyada, astronomide ve tüm mühendislik alanlarında kullanılmasına yol açmıştır.

Bilindiği gibi diferansiyel denklemler gerçek hayatta; içinde değişim olan olayların matematiksel modellemesidir. Bu modellemeler genellikle lineer ve lineer olmayan problemler olarak sınıflandırılırlar. Pratikte bilim insanları en çok lineer olmayan problemleri modellemede ve çözmede zorlanırlar. Ele alınan problem ister lineer isterse lineer olmayan problem olsun, analitik çözümleri bulunamayan problemlerde genellikle nümerik çözüm bulma yöntemleri yada yarı analitik çözüm yöntemleri bilimsel çalışmalarda tercih edilen durumlardır. Yarı analitik çözüm metotları denildiğinde akla gelen bazı bilindik metotlar ise; Adomian ayrışım metodu, Varyasyonel iterasyon metodu, diferansiyel dönüşüm metodu ve Homotopi pertürbasyon metodu gibi metotlardır. Sadece birkaçını saydığımız bu yarı analitik çözüm metotlarının bilim dünyası için katkıları gerçekten yadsınamaz. Buna rağmen; dünyadaki teknolojik gelişmelere bakıldığında bilim dünyası her zaman daha fazlasını istemektedir ve bunda haklıdır da. Bu nedenle yarı analitik çözümler her ne kadar çok fazla iş görse de bu çözümlerin iyileştirilmesi her zaman matematiğin ve bilim dünyasının konusu olmuştur. Bu konuda çok farklı çalışmalar ve yöntemler olsa da, Padé yaklaşımı yöntemi yeri ve önemi ayrıdır. Padé ile yapılan çalışmalarda yöntemin gerçekten mevcut yarı analitik çözümleri iyileştirilebildiği ve problemlerin yakınsaklık aralığını genişletilebildiği uzun süredir bilinmektedir.

Padé metodunun diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan yarı analitik yöntemlerden elde edilen çözümlerin iyileştirilmesinde kullanım şekli birçok bilim insanı tarafından tercih edilmiştir. Her ne kadar bu tür çalışmaların tamamını saymak mümkün

olmasa da mesela; Abassy ve ark. (2007) yapmış oldukları çalışmada Padé sayesinde Burgers' ve Boussinesq denklemini Adomian ayrışım metoduna göre daha hızlı yakınsamaya sahip olduğunu ve daha yüksek doğrulukla yaklaşık çözüm elde edildiğini göstermişlerdir. Torabi Giklou ve ark. (2021)' da lineer olmayan başlangıç değer problemlerini ve gecikmeli diferansiyel denklemleri çözebilmek için varyasyonel iterasyon metodu-Padé tekniğini beraber kullanmış ve elde edilen sonuçları sadece varyasyonel iterasyon metodu kullanarak elde edilen sonuçlarla karşılaştırarak, varyasyonel iterasyon metodu -Padé birlikteliğinin ne anlama geldiğini örneklerle ispatlamışlardır. Literatüre ve yukarıda saydığımız birkaç çalışmaya bakıldığında, Padé yaklaşımının diferansiyel denklemlerin yarı analitik çözümlerine uygulanması sonucu elde edilen iyileştirilmiş çözümlerin, Padé uygulanmadan önceki yarı analitik çözümlerin yakınsaklık aralığını genişletebildiği gerçeği birçok bilimsel çalışmanın konusu olmuştur. Hatta elde edilen sonuçlar bir çok mühendislik bilimlerinde hayati katkılar sağlamaktadır.

Yukarıda özetlemeye çalışılan gerçekler ile literatüre bakıldığında, conformable anlamında kesirli türev tanımını kullanarak elde edilen çözümlere Padé yaklaşımının uygulandığı birkaç çalışmanın olduğunu görürüz (Aliyu ve ark., 2019; Akgül ve ark., 2020; Yousif ve ark., 2021). Ancak bu durumun conformable anlamında kesirli türev tanımını kullanan diğer yarı analitik yöntemler için de geçerli olup olmadığı ve bu çözümlere Padé yaklaşımının ne ölçüde katkı sağladığı bilinmemektedir. Bu nedenle, Padé yaklaşımı ile literatürdeki conformable anlamında kesirli diferansiyel denklemlerin yarı analitik çözümlerinin yakınsaklık aralığının genişletilebileceği bu çalışmasının ana konusudur. Önerilen yaklaşım yönteminin, mevcut çözümlere ne tür bir katkı sağladığı sayısal sonuçlar ve grafiklerle desteklenip anlatılmıştır.

2.MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde; tez çalışmasının daha sonraki kısımlarında kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler sunulacaktır. Matematik ve uygulamalı bilimlerde sıklıkla kullanılan bazı temel fonksiyonlar, kesirli analizin teorisinin temelini oluşturmaktadır. Bu nedenle bu bölümde ilk önce kısaca bu fonksiyonlardan bahsedilecektir. Ardından da literatürde bilinen bazı kesirli türev tanımları verilecektir. Böylelikle tezin diğer bölümlerini okuyucu daha iyi anlayabilecektir.

2.1. Gamma Fonksiyonu

Çarpma işlemini kullanmadan bir faktöriyel kavramını hesaplanmasına imkan veren olarak bilinen formül Euler' in keşfidir. Gamma fonksiyonunun evrensel tanımı aslında Euler'in integralidir ve (2.1)' deki gibidir.

Gamma fonksiyonu $0 < t < \infty$, $t \in \mathbb{R}$ için

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx, \ t > 0 \ , t \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır (Miller ve Ross, 1993). Bilindiği gibi belirsiz integral reel sayılarda ancak ve ancak $0 < t < \infty$ olması durumunda yakınsak olur. Tanım kümesinin negatif sayılara genişletilebilme işlemi ise

$$\Gamma(t) = \frac{\Gamma(t+n)}{t(t+1)(t+2)...(t+n-1)} \tag{2.2}$$

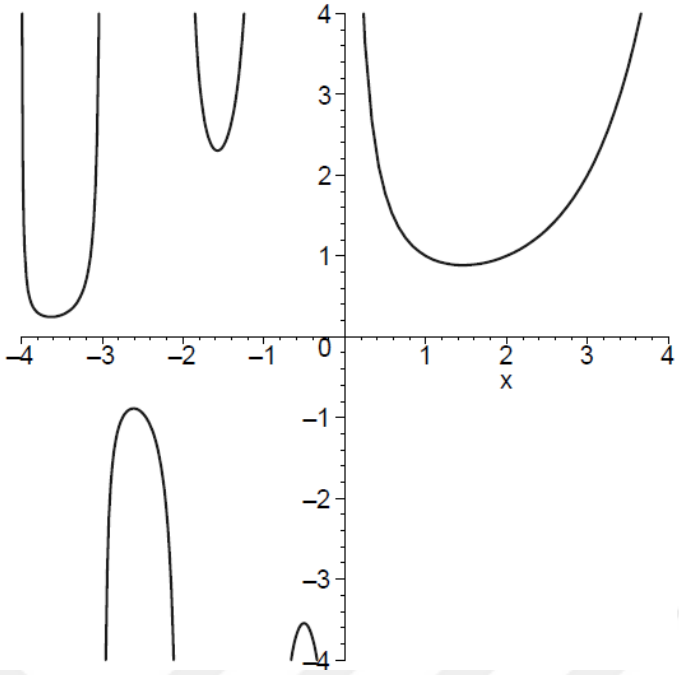
formülü yardımıyla sağlanabilir. Burada $t+n$ pozitif olacak şekilde n yeterince büyük seçilir ve $t = 0, -1, -2, ...$ tam sayılarından herhangi birine eşit olursa paydadaki çarpım sıfır olur. Dolayısıyla, Gamma fonksiyonu sıfır dahil negatif tam sayılarda tanımsız olur (Bonnar, 2014).

$t > 0$ için Gamma fonksiyonunun bilinen bazı özelliklerini aşağıdaki gibi sıralabilir.

i) $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t), \ t > 0$

ii) $\Gamma(t) = (t-1)! \ , t \in \mathbb{R}^+$

iii) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$



Şekil 2.1 Gamma fonksiyonunun grafiği

2.2.Beta Fonksiyonu

$m > 0$ *ve* $n > 0$ olmak üzere Beta fonksiyonu

$$B(m,n) = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt \tag{2.3}$$

integrali ile tanımlıdır. $B(m,n)$ Euler Beta fonksiyonu, Gamma fonksiyonu ile bağlantılı bir fonksiyondur. Beta fonksiyonu ile Gamma fonksiyonu arasındaki bu bağ

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \tag{2.4}$$

şeklindedir. (Podlubny I., 1998).

2.3.Bazı Kesirli Türev ve Kesirli integral Tanımları

Klasik analizin tersine kesirli analiz tarihine bakıldığında çeşitli bilimsel nedenlerden dolayı birçok kesirli türev tanımının mevcut olduğunu görürüz. Örnek olarak; Riemann-Liouville anlamında kesirli türev tanımını (Riemann, 1876; Liouville,1832), Grünwald-Letkinov anlamında türev tanımını (Grünwald, 1867; Letnikov, 1868), Caputo anlamında türev tanımını (Caputo ve Mainardi, 1971), Erdelyi-Kober (Samko ve ark., 1993; Podlubny, 2001), Riesz (Samko ve ark., 1993; Podlubny, 2001) anlamında türev tanımlarını sayabiliriz. Bu tanımlara son eklenen tanım olarak

Conformable anlamda türev (Khalil ve ark., 2014) tanımlarını verebiliriz. Bu tanımların çoğuna ilham veren çalışmaların büyük bir kısmı G. F. Bernhard Riemann tarafından yapılmıştır (Ross, 1974). Her ne kadar bilimsel bir gerçek olmasa da yukarıda bahsedilen tanımlar en çok bilinen ve kullanılan tanımlardır. Buna rağmen hala bilimsel ihtiyaçlardan dolayı yeni kesirli türev tanımları literatüre girmektedir. Bu yeni tanımlardan biri de conformable anlamda türev tanımıdır. Conformable anlamda kesirli türev tanımı ilk olarak 2014 yılında Khalil ve arkadaşları tarafından verilmiştir. Çalışmanın bundan sonraki bölümünün amacı okuyucuya öncelikle bu çalışmasının da parçası olan conformable anlamda türev kavramı tanıtmaktır. Lakin bunu yaparken neden böyle bir tercih yapıldığı gösterebilmek için önce bu bölümde literatürde sıklıkla kullanılan bazı kesirli türev tanımlarına yer verilecektir.

2.3.1. Riemann-Liouville Kesirli Türevi

Tanım 2.1 f her sonlu (c,t) aralığında sürekli bir fonksiyon ve $k \in \mathbb{Z}^+$ için $k-1 \le \alpha < k$ olsun. Bu durumda f fonksiyonunun $(k-\alpha)$-mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali

$$ {}_cD_t^{-(k-\alpha)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \int_c^t (t-v)^{k-\alpha-1} f(v) dv \tag{2.5} $$

biçiminde, α -mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi ise

$$ \begin{aligned} {}_cD_t^{\alpha} f(t) &= \frac{d^k}{dt^k} {}_cD_t^{-(k-\alpha)} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \int_c^t (t-v)^{k-\alpha-1} f(v) dv \end{aligned} \tag{2.6} $$

dir. (Podlubny I., 1998).

Tanımı yukarıdaki gibi verilen Riemann-Liouville anlamında kesirli türev ve integral operatörlerinin bilindik bazı özellikleri aşağıdaki gibi özetlenebilir (Podlubny I., 1998):

i- Riemann-Liouville anlamında kesirli türev operatörü lineerdir.

ii- $r, s > 0$ için

$$ {}_cD_t^{-r}\left({}_cD_t^{-s} f(t)\right) = {}_cD_t^{-s}\left({}_cD_t^{-r} f(t)\right) = {}_cD_t^{-r-s} f(t) $$

iii- $r > 0$ için

$$ {}_cD_t^{r}\left({}_cD_t^{-r} f(t)\right) = f(t) $$

$k-1<r<k$ için

$$ {}_cD_t^{-r}\left({}_cD_t^{r} f(t)\right)= f(t)-\sum_{j=1}^{k}\left[{}_cD_t^{r-j} f(t)\right]_{t=c}\frac{(t-c)^{r-j}}{\Gamma(r-j+1)} $$

$0\le r<1$ için ise

$$ {}_cD_t^{-r}\left({}_cD_t^{r} f(t)\right)= f(t)-\left[{}_cD_t^{r-1} f(t)\right]_{t=c}\frac{(t-c)^{r-1}}{\Gamma(r)} $$

eşitlikleri doğrudur.

iv- $r,s>0$ için

$$ {}_cD_t^{r}\left({}_cD_t^{-s} f(t)\right)= {}_cD_t^{r-s} f(t) $$

$0\le k-1\le s<k$ için

$$ {}_cD_t^{-r}\left({}_cD_t^{s} f(t)\right)=\left({}_cD_t^{s-r} f(t)\right)-\sum_{j=1}^{k}\left[{}_cD_t^{s-j} f(t)\right]_{t=c}\frac{(t-c)^{r-j}}{\Gamma(r-j+1)} $$

eşitlikleri doğrudur.

v- $m\in\square$ *ve* $k\in\{0,1,2...m-1\}$ *için* $f^{(k)}(\alpha)=0$ olduğunda

$$ \frac{d^m}{dt^m}\left({}_cD_t^{r} f(t)\right)= {}_cD_t^{r}\left(\frac{d^m f(t)}{dt^m}\right)= {}_cD_t^{r+m} f(t) $$

eşitliği doğrudur.

vi- $k-1<r<k$ *ve* $m-1\le s<m$ için

$$ {}_cD_t^{r}\left(\left({}_cD_t^{s} f(t)\right)= {}_cD_t^{r+s} f(t)-\sum_{j=1}^{m}\left[{}_cD_t^{s-j} f(t)\right]_{t=c}\frac{(t-c)^{-r-j}}{\Gamma(-r-j+1)}\right. $$

$$ {}_cD_t^{s}\left({}_cD_t^{r} f(t)\right)= {}_cD_t^{r+s} f(t)-\sum_{j=1}^{k}\left[{}_cD_t^{r-j} f(t)\right]_{t=c}\frac{(t-c)^{-s-j}}{\Gamma(-s-j+1)} $$

eşitlikleri doğrudur. Aynı zamanda,

$$ \left[{}_cD_t^{r-j} f(t)\right]_{t=c}=0, \qquad j\in\{1,2,3....k\}, $$

$$ \left[{}_cD_t^{s-j} f(t)\right]_{t=c}=0, \qquad j\in\{1,2,3...m\}, $$

biçiminde olması durumunda

$$ {}_cD_t^{r}\left({}_cD_t^{s} f(t)\right)= {}_cD_t^{s}\left({}_cD_t^{r} f(t)\right) $$

eşitliği doğrudur.

2.3.2.Grünward-Letnikov Kesirli Türevi

Tanım 2.2 g fonksiyonu $[c,t]$ kapalı aralığında sürekli olsun. Ayrıca g, $k+1$ defa sürekli türevlenebilir olsun. Bu durumda, $k \le \eta < k+1$ olmak üzere g fonksiyonunun η -mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevi,

$$
\begin{aligned}
{}^{G.L}D_{c,t}^{\eta} g(t) &= \lim_{\substack{r\to 0 \\ nr=t-c}} r^{-\eta} \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{\eta}{s} g(t-sr) \\
&= \sum_{m=0}^{k} \frac{g^m(c)(t-c)^{-\eta+m}}{\Gamma(-\eta+m+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\eta+k+1)} \int_c^t (t-v)^{-\eta+k} g^{(k+1)}(v)\, dv
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

dir. (2.7)' de kullanılan $\binom{\eta}{s}$ notasyonu

$$
\binom{\eta}{s} = \frac{\eta(\eta-1)(\eta-2)\ldots(\eta-s+1)}{s!} \tag{2.8}
$$

biçiminde tanımlanan bir notasyondur (Podlubny I., 1998).

Diğer taraftan yine g fonksiyonu $[c,t]$ aralığında sürekli olsun. Bu durumda g fonksiyonunun η-mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli integrali;

$$
{}^{G.L}D_{c,t}^{-\eta} g(t) = \lim_{\substack{r\to 0 \\ kr=t-c}} r^{\eta} \sum_{s=0}^{k} \left[\begin{matrix} \eta \\ s \end{matrix} \right] g(t-sr) = \frac{1}{\Gamma(\eta)} \int_c^t (t-\tau)^{\eta-1} g(\tau) d\tau \tag{2.9}
$$

dir. Burada da $\left[\begin{matrix} \eta \\ s \end{matrix} \right]$ notasyonu

$$
\left[\begin{matrix} \eta \\ s \end{matrix} \right] = \frac{\eta(\eta+1)(\eta+2)\ldots(\eta+s+1)}{s!} \tag{2.10}
$$

biçiminde tanımlanmıştır (Podlubny I., 1998).

2.3.3. Caputo Kesirli Türevi

Tanım 2.3 m tam sayı olmak üzere h, $(m-1)$ defa sürekli türevlenebilir bir fonksiyon ve $m-1<\eta<m$ olsun. Bu durumda h fonksiyonun η-mertebeden Caputo kesirli türevi

$$
\begin{aligned}
{}^{C}D_{c,t}^{\eta} h(t) &= {}_{c}D_{t}^{-(m-\eta)} \frac{d^m}{dt^m} h(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\eta - m)} \int_{c}^{t} (t-v)^{m-\eta-1} \frac{d^m h(v)}{dv^m} dv
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

dir (Caputo, 1967; Podlubny I., 1998).

$\eta \to m$ için (2.11) eşitliği ile verilen Caputo anlamında kesirli türevi, h fonksiyonunun m tam sayı mertebeden kesirli türevine eşittir. Bunun varlığını görmek için $0 \le m-1 < \eta < m$ ve h fonksiyonu $t > c$ olmak üzere (c,t) aralığında $m+1$ defa sürekli türevlenebilir olsun. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
\lim_{\eta \to m} D_{c,t}^{\eta} h(t) &= \lim_{\eta \to m} \left(\frac{h^m(c)(t-c)^{m-\eta}}{\Gamma(m-\eta+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\eta+1)} \int_{c}^{t} \frac{f^{(m+1)}(v)\,dv}{(t-v)^{\eta-m}} \right. \\
&= h^{(m)}(c) + \int_{c}^{t} h^{(m+1)}(v)\,dv \\
&= h^m(t), \quad m \in \mathbb{Z}^+
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

eşitliği sağlanmış olur. Literatüre bakıldığında Caputo kesirli türev tanımının kullanımının özelikle mühendislik problemleri ile uğraşan bilim insanları tarafından daha çok tercih edildiği görülmektedir. Bunun en önemli sebebi ise Caputo anlamında kesirli türev tanımı kullanıldığında; kesirli mertebeden başlangıç değer problemleri ile tam sayı mertebeden başlangıç değer problemlerindeki başlangıç koşullarının uyumluluk göstermesidir (Podlubny I., 1998).

3. CONFORMABLE TÜREV VE İNTEGRAL KAVRAMI

Yukarıda özetlemiş olduğumuz kesirli türev tanımları için; bilimsel bir gerçek olmasa da bir saptama olarak bu tanımların bilim insanları tarafından en bilindik tanımlar olduğunu söyleyebiliriz. Diğer taraftan 2014 yılı gibi yakın bir zamanda literatüre tanıtılan bir başka türev operatörü tanımı da conformable anlamında türev operatörüdür (Khalil ve ark., 2014). Aşağıda, bu çalışmasının asıl konusunun bir kısmını oluşturan conformable anlamında türev operatörü tanıtılacak ve tez çalışmasının neden bu tanım kullanılarak yapıldığı anlatılmaya çalışılacaktır.

Tanım 3.1 $g:[0.\infty)\to\square, t>0$ *ve* $\eta\in(0,1]$ olmak üzere, g fonksiyonunun η-mertebeden conformable anlamda türevi

$$T^{\eta}g(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g\left(t+\varepsilon t^{1-\eta}\right)-g(t)}{\varepsilon} \tag{3.1}$$

dir. Aynı zamanda eğer herhangi $c>0$ reel sayısı için $(0,c)$ açık aralığında g fonksiyonunun conformable anlamda η-diferansiyellenebilir olması ve $\lim_{t\to 0^{+}}T^{\eta}g(t)$ limitinin mevcut olması durumunda

$$T^{\eta}g(0)=\lim_{t\to 0^{+}}T^{\eta}g(t) \tag{3.2}$$

eşitliği mevcuttur (Khalil ve ark., 2014). (3.1)' den görülebileceği gibi $T^{\eta}g$ notasyonu, g fonksiyonunun η-mertebeden conformable anlamda türevi anlamında kullanılmştır.

Bilinen klasik anlamdaki türevin tanımının bazı cebirsel özelliklerinin (3.1) eşitliği ile verilen conformable anlamda türev tanımında da var olduğu aşağıdaki Teorem 3.1' de görülmektedir (Khalil ve ark., 2014).

Teorem 3.1 $\eta\in(0,1]$ için g *ve* h fonksiyonlarının bir pozitif t noktasında η-diferansiyellenebilir olduklarını kabul edelim. Böyle olması durumda

i- Her $k,p\in\square$ *için* $T^{\eta}(kg+ph)=kT^{\eta}(g)+pT^{\eta}(h)$

ii- c her hangi bir sabit olmak üzere $g(t)=c$ sabit fonksiyonu için $T^{\eta}(c)=0.$

iii- $T^{\eta}(gh)=T^{\eta}(g)h+T^{\eta}(h)g$.

iv- $T^{\eta}\left(\frac{g}{h}\right)=\frac{T^{\eta}(g)h-T^{\eta}(h)g}{h^{2}}$.

v- Keyfi bir m sabiti için $T^{\eta}\left(t^{m}\right)=mt^{m-\eta}$.

vi- g fonksiyonu, η-diferansiyanllenebilir olmanın yanı sıra diferansiyellenebilir ise $\left(T^{\eta}g\right)(t)=t^{1-\eta}\dfrac{dg}{dt}(t)$.

ifadeleri doğrudur (Khalil ve ark., 2014).

Bilinen Bazı Özel Fonksiyonların Conformable Anlamda Türevleri

Khalil ve ark. (2014) tarafından literatüre kazandırılan conformable anlamda türev tanımından sonra bilim insanları birçok çalışmalarında conformable anlamda türev tanımı kullanılmıştır (Kurt ve ark., 2017), (Islam ve ark., 2018), (Ladrani ve Cherif, 2020). Literatürdeki mevcut çalışmalardan çıkan sonuçlara bakıldığında uygulamalarda sık kullanılan bilinen bazı özel fonksiyonların conformable anlamda türevleri için aşağıdaki conformable anlamda türev tablosu kolaylıkla çıkarılabilir (Khalil ve ark., 2014):

i- Her m reel sayısı için $T^{\eta}\left(t^{m}\right)=mt^{m-\eta}$.

ii- $T^{\eta}(1)=0$.

iii- $\forall r\in\mathbb{R}$ için $T^{\eta}\left(e^{rt}\right)=rt^{1-\eta}e^{rt}$.

iv- $\forall r\in\mathbb{R}$ için $T^{\eta}\left(\sin(rt)\right)=rt^{1-\eta}\cos(rt)$.

v- $\forall r\in\mathbb{R}$ için $T^{\eta}\left(\cos(rt)\right)=-rt^{1-\eta}\sin(rt)$.

vi- $T^{\eta}\left(\dfrac{t^{\eta}}{\eta}\right)=1$.

vii- $T^{\eta}\left(\sin\left(\dfrac{t^{\eta}}{\eta}\right)\right)=\cos\left(\dfrac{t^{\eta}}{\eta}\right)$.

viii- $T^{\eta}\left(\cos\left(\dfrac{t^{\eta}}{\eta}\right)\right)=-\sin\left(\dfrac{t^{\eta}}{\eta}\right)$.

ix- $T^{\eta}\left(e^{\frac{t^{\eta}}{\eta}}\right)=e^{\frac{t^{\eta}}{\eta}}$.

Örnek 3.1 $g(t)=\sqrt{t}$ fonksiyonunun $0<\eta\leq 1$ için η-mertebeden conformable anlamda türevini bulunuz.

Tanım 3.1' de ifade edilen conformable anlamda türev tanımı verilen $g(t)$ fonksiyonu için kullanıldığında

$$T^{\eta}\left(\sqrt{t}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sqrt{t+\varepsilon t^{1-\eta}}-\sqrt{t}}{\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon t^{1-\eta}}{\varepsilon\left(\sqrt{t+\varepsilon t^{1-\eta}}+\sqrt{t}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-\eta}$$

olarak bulunur.

Keyfi bir m tam sayısı için η'nın $m<\eta\le m+1$ olması durumunda (3.1) de verilen conformable anlamda türev tanımı aşağıdaki gibi genelleştirilmektedir (Khalil ve ark., 2014).

Tanım 3.2 $t>0$ *ve* $\eta\in(m,m+1]$ olmak üzere, g fonksiyonu, t noktasında m-mertebeden diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda g fonksiyonunun η-mertebeden conformable anlamda türevi

$$\left(T^{\eta}g\right)(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g^{(\lceil\eta\rceil-1)}\left(t+\varepsilon t^{\lceil\eta\rceil-\eta}\right)-g^{(\lceil\eta\rceil-1)}(t)}{\varepsilon} \tag{3.3}$$

dir. Burada $\lceil\eta\rceil$, $\eta\le\lceil\eta\rceil$ koşulunu sağlayan en küçük tam sayı olarak ifade edilmektedir (Khalil ve ark., 2014).

(3.3) tanımından hareketle $\eta\in(m,m+1]$ olması ve g fonksiyonunun, t noktasında $(m+1)$-mertebeden diferansiyellenebilir olması durumunda aşağıdaki

$$\left(T^{\eta}g\right)(t)=t^{(\lceil\eta\rceil-\eta)}g^{(\lceil\eta\rceil)}(t) \tag{3.4}$$

eşitliği Khalil ve ark. (2014) tarafından verilmiştir.

Tanım 3.3 g fonksiyonu, değişkenleri $t_1,t_2...t_k$ olan k değişkenli bir fonksiyon ve $\eta\in(0,1]$ olsun. Bu durumda g fonksiyonunun t_i değişkenine göre η-mertebeden conformable anlamında kısmi türevi

$$\frac{\partial^{\eta}}{\partial t_i^{\eta}}g\left(t_1,t_2...t_k\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g\left(t_1,...t_{i-1},t_i+\varepsilon t_i^{1-\eta},...t_k\right)-g\left(t_1,t_2,...t_k\right)}{\varepsilon} \tag{3.5}$$

dir (Atangana ve ark., 2015).

Teorem 3.2 $\eta\in(0,1]$ olmak üzere $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, $t_0>0$ noktasında η-difarensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda g fonksiyonu t_0 noktasında süreklidir (Khalil ve ark., 2014).

Tanım 3.4 $\eta \in (m, m+1]$, $\theta = \eta - m$ olmak üzere $g : [c, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\frac{d^m g}{dt^m}$ türevi mevcut olsun. Bu durumda g fonksiyonunun η-mertebeden conformable anlamda türevi

$$\left(T^{\eta} g\right)(t) = (T_c^{\theta} \frac{d^m g}{dt^m})(t) \tag{3.6}$$

dir (Abdeljawad, 2015).

Teorem 3.3 $\eta \in (0,1]$ ve $g, h : (c, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonları η-difarensiyallenebilir olsun. Bu durumda $t \neq c ve h(t) \neq 0$ *için* $g\left(h(t)\right)$, η-diferansiyellenebilirdir ve

$$T^{\eta}\left(g\left(h(t)\right)\right) = \left(T^{\eta} g\right)\left(h(t)\right).\left(T^{\eta} h\right)(t).h(t)^{\eta - 1} \tag{3.7}$$

dir. Yani conformable anlamında türev zincir kuralını sağlar (Abdeljawad, 2015).

Tanım 3.5 Kullanılan integral genelleştirilmiş Riemann integrali ve $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere g fonksiyonunun conformable anlamda integrali

$$I_{\eta}^{\alpha}\left(g(t)\right) = I_1^{\alpha}\left(t^{\eta - 1} g(t)\right) = \int_{\alpha}^{\eta} \frac{g(x)}{x^{1-\eta}} dx \tag{3.8}$$

şeklinde tanımlanır (Khalil ve ark., 2014).

Literatürdeki mevcut kesirli türev tanımlarına bakıldığında; bu tanımların büyük bir çoğunluğunun klasik anlamdaki türev tanımıyla ve birbirleri ile karşılaştırıldığında bazı önemli sorunların (gerçek hayattaki problemlere uygulanabilirliği, cebirsel işlemlerdeki uygulanabilirliği bakımından) mevcut olduğu Khalil ve ark. (2014) tarafından tespit edilmiştir. Bu tespitleri aşağıdaki gibi sıralayabiliriz:

i- Türev mertebesinin doğal sayı olmaması durumunda Riemann-Liouville kesirli türevinde bir sabitin türevi sıfıra eşit değil iken Caputo kesirli türevinde sabitin türevi sıfıra eşit olmaktadır.

ii- Birçok kesirli türev tanımında

$$T_{\alpha}^{\eta}(gh) = T_{\alpha}^{\eta}(g)h + T_{\alpha}^{\eta}(h)g \ .$$

biçiminde verilen fonksiyonların çarpımı türevi kuralını sağlanamamaktadır.

iii- Birçok kesirli türev tanımında

$$T_{\alpha}^{\eta}\left(\frac{g}{h}\right) = \left(\frac{hT_{\alpha}^{\eta}(g) - gT_{\alpha}^{\eta}(h)}{h^2}\right).$$

biçiminde verilen fonksiyonların bölümünün türevini sağlanamamaktadır.

iv- Birçok kesirli türev tanımı

$$T_\alpha^\eta\left(g\circ h\right)(t)=g^{(\eta)}\left(h(t)\right)h^{(\eta)}(t).$$

biçimde zincir kuralını sağlamamaktadır.

v- Birçok kesirli türev tanımı için

$$T^\eta T^\theta\left(g\right)=T^{\eta+\theta}\left(g\right).$$

eşitliğini mevcut değildir.

vi- Bir fonksiyonun Caputo anlamında kesirli türevinin mevcut olabilmesi için o fonksiyonda diferansiyellenebilir olma şartı aranmaktadır.

Bilindiği gibi; uygulamalarda klasik türev tanımının gerçeklemiş olduğu cebirsel özellikler ve kurallar birçok kolaylık sağlamaktadır. Benzer durumun kesirli analizde verilen türev tanımları için de geçerli olacağı aşikardır. Ama Khalil ve ark. (2014) tarafından ifade edildiği gibi klasik analizden bildiğimiz türev tanımında var olan ve uygulamalarda çok yaygın bir biçimde kullanılan özelliklerin hepsi birden malesef diğer kesirli türev tanımlarında mevcut değildir. Ama conformable anlamda türev tanımında bu özelliklerin büyük çoğunluğu mevcuttur. İşte bu nedenle son yıllarda yapılan birçok bilimsel çalışmada, conformable anlamda türev tanımının kullanılması tercih edilmiştir. Örneğin; Khalil ve arkadaşları (2014) conformable anlamda diferansiyel denklemler için Abel's formülünün varlığını ispatlamışlardır. Abdeljawad (2015) conformable Laplace dönüşümünü, zincir kuralını, kısmi integrasyon ve kuvvet serilerini ifade etmiştir. Eslami ve Rezazadeh (2016) ilk integral yöntemi yardımıyla conformable anlamda Wu-Zhang sisteminin analitik çözümlerini bulmuşlardır. Zhao ve Luo (2017) genelleştirilmiş conformable anlamda türev kavramını ve bu türev kavramının fiziksel ve geometrik yorumlarını vermişlerdir. Qi ve Wang (2020) conformable anlamda denklem sistemlerinin asimptotik kararlılığını analiz etmişlerdir. Ladrani ve Cherif (2020) conformable anlamda diferansiyel denklemlerin salınımlı çözümlerini araştırmışlardır. Ayata ve Özkan (2020) conformable Laplace decomposition ayrışım metodunu ilk defa kesirli mertebeden Newell-Whitehead-Segel diferansiyel denklemine uygulamışlardır. Ayata ve Özkan (2021) conformable Laplace decomposition ayrışım metodunu kesirli mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklem sistemlerine taşıyarak Drinfeld-Sokolov-Wilson ile birleşik viskoz Burgers' denklem sistemlerinin yarı analitik çözümlerini elde etmişlerdir.

4. PADÉ YAKLAŞIMI

Henri Eugéne Padé (1863 – 1953) , Paris'teki École Normale Supérieure'de okumuş, daha sonra Leipzig Üniversitesi ve Göttingen Üniversitesi'nde Felix Klein ve Hermann Schwarz gibi ünlü isimlerden eğitim almıştır. 1890'da Padé, Charles Hermite danışmanlığında doktorasını yaparken öğretmenlik yaptığı Fransa'ya dönmüştür. Doktora tezinde ise, bilim dünyasının "Padé yaklaşımı" olarak bildiği konuyu ele almıştır. Padé yaklaşımı, belirli bir noktaya yakın bir fonksiyonun belirli bir sıradaki rasyonel bir fonksiyon tarafından "en iyi" yaklaşımı olarak adlandırılır. Bu teknik altında, yaklaşımın kuvvet serisi, yaklaştığı fonksiyonun kuvvet serisi ile uyuşur. Teknik, 1890 civarında Henri Padé tarafından geliştirildi. Diğer taraftan tekniğin geçmişinin; fikri ortaya atan ve kuvvet serilerinin rasyonel yaklaşımlarının özelliklerini araştıran George Frobenius'a kadar uzandığı bilinmektedir.

Padé yaklaşımının, her zaman Taylor serisini kesmekten daha iyi bir fonksiyon yaklaşımı verdiği bilinir ve Taylor serisinin yakınsamadığı yerlerde daha iyi işe yarayabilir. Bu nedenlerden dolayı Padé yaklaşımları, bilgisayar hesaplamalarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Padé yaklaşımları, Diophantine yaklaşımında ve aşkın sayı teorisinde yardımcı işlevler olarak da kullanılmışlardır. Padé yaklaşımı rasyonel bir fonksiyon olduğundan, bir yaklaşım olarak yapay bir tekil nokta oluşabilir, ancak bu Borel-Padé analizi ile önlenebilmektedir.

Mühendislik gibi birçok uygulamalı bilim alanlarında Padé yaklaşımı yöntemi yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Örneğin; kuantum rezonanslarında (Thompson, 1988; Rakityansky ve ark., 2007), kinetik elektron modellerinde (Lanti ve ark., 2016) ve daha pek çok mühendislik problemlerinde (Baker ve ark., 1996) Padé yaklaşım yönteminin kullanıldığı bilinmektedir. Masjuan ve Sanz-Cillero (2013), bir rezonansın kutup kütlesi ve genişliğinin hesaplanmasında Padé yaklaşım metodunu kullanmışlardır. Borhanifar ve Valizadeh (2015) ise; Padé yaklaşım metodunu Caputo kesirli türevi anlamında zaman ve konum değişkenlerine göre kesirli mertebeden difüzyon denkleminin çözümünde kullanmışlardır. Cansu, Özkan (2018), Padé yaklaşımını lineer ve lineer olmayan bazı kısmi diferansiyel denklemlere uygulayarak kullanmışlardır. Biliyoruz ki son yıllarda hemen hemen her alanda bilgisayarlar kullanılmaktadır. Bu yüzden bilgisayar ile entegre sistemlerde hızlı karar mekanizmalarının kullanılıyor olması nedeniyle, Padé yaklaşımı gibi metotların önemini daha da artırmıştır. Aynı zamanda bu

tür metotlar arasında algoritma bakımından pratik ve uygulanabilir olması bakımından da Padé yaklaşımı ayrı bir öneme sahiptir.

Kısaca Padé yaklaşımı, bir fonksiyonun sonsuz seri toplamının ilk birkaç teriminin, iki polinomun oranı şeklinde rasyonel formda yazılması, sonrasında da pay ve paydada bulunan bu polinomların katsayılarının belirlenmesi esasına dayanan bir yöntemdir. Mesela $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ biçimindeki bir kuvvet serisiyle temsil edilen bir f fonksiyonunun ilk $L+M+1$ terimi kullanılarak elde edilen Padé yaklaşımı, $f_{L+M}=\sum_{k=0}^{L+M} c_k x^k$ olmak üzere $f_{L+M\left[\frac{L}{M}\right]}$ biçiminde sembolize edilmekte olup,

$$f_{L+M\left[\frac{L}{M}\right]}=\frac{q_0+q_1x+q_2x^2+\cdots+q_Lx^L}{r_0+r_1x+r_2x^2+\cdots+r_Mx^M} \tag{4.1}$$

formunda ifade edilir. Buradaki $f_{L+M\left[\frac{L}{M}\right]}$ Padé yaklaşımındaki oran değiştirilmeden pay ve payda herhangi bir sabit ile genişletilebileceği için buna izin vermemek için r_0 değeri $r_0=1$ olarak alınır. Diğer taraftan pay ve paydadaki polinomlar da aralarında asaldırlar (Abassy ve ark., 2007). Paydaki ve paydadaki polinomların katsayılarının hepsi, fonksiyonun kuvvet serisi açılımındaki katsayılar kullanılarak belirlenir. $f_{L+M\left[\frac{L}{M}\right]}$ biçiminde ifade edilen Padé yaklaşımında; payın derecesi L, paydanın derecesi M olup, payda $L+1$, payda ise M tane bilinmeyen katsayı mevcuttur. Yani Padé yaklaşımında $M+L+1$ tane bilinmeyen katsayı vardır. $f_{L+M\left[\frac{L}{M}\right]}$ Padé yaklaşımı, $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ kuvvet serisinin ilk $M+L+1$ teriminin kullanılarak f fonksiyonunu elde etmeye yarayan çözüm yöntemidir (George Jr, 1975). Aşağıda Padé yaklaşım metodunu basit ve anlaşılır bir şekilde açıklamaya çalışılacaktır: Öncelikle f fonksiyonunun $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$ biçiminde bir Taylor seri açılımına sahip olduğunu kabul edelim. Buna göre $f(x)$'in Taylor seri açılımının ilk $M+L+1$ terimi yardımıyla elde edilen Padé yaklaşımı:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k=\frac{q_0+q_1x+q_2x^2+\cdots+q_Lx^L}{1+r_1x+r_2x^2+\cdots+r_Mx^M}+O\left(x^{L+M+1}\right) \tag{4.2}$$

eşitliğindeki $\frac{q_0+q_1x+q_2x^2+\cdots+q_Lx^L}{1+r_1x+r_2x^2+\cdots+r_Mx^M}$ terimine karşılık gelir. Bu şekilde tanımlanan (4.2) eşitliğinde içler dışlar çarpımı yapıldığında

$$\begin{aligned}&p_0+\left(p_1+r_1p_0\right)x+\left(p_2+r_1p_1+r_2p_0\right)x^2+\left(p_3+r_1p_2+r_2p_1+r_3p_0\right)x^3+\cdots\\&=q_0+q_1x+q_2x^2+\cdots+q_Lx^L+O\left(x^{L+M+1}\right)\end{aligned}\tag{4.3}$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen (4.3) eşitliğinin sağ tarafında $x^{L+1},x^{L+2},...,x^{L+M}$ terimler yoktur. Bu nedenle (4.3) eşitliğinin sol tarafındaki $x^{L+1},x^{L+2},...,x^{L+M}$ terimlerine ait katsayılar sıfıra eşitlenirse;

$$\left.\begin{aligned}&r_Mp_{L-M+1}+r_{M-1}p_{L-M+2}+\cdots+r_1p_L+p_{L+1}=0\\&r_Mp_{L-M+2}+r_{M-1}p_{L-M+3}+\cdots+r_1p_{L+1}+p_{L+2}=0\\&\vdots\\&r_Mp_L+r_{M-1}p_{L+1}+\cdots+r_1p_{L+M}+p_{L+M}=0\end{aligned}\right\}\tag{4.4}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.4) sistemi matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix}p_{L-M+1}&p_{L-M+2}&\cdots&p_L\\p_{L-M+2}&p_{L-M+3}&\cdots&p_{L+1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\p_L&p_{L+1}&\cdots&p_{L+M-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_M\\r_{M-1}\\\vdots\\r_1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}p_{L+1}\\p_{L+2}\\\\p_{L+M}\end{bmatrix}\tag{4.5}$$

olur. (4.5) lineer denklem sistemi bilinen yöntemler ile çözülürse bilinmeyen $r_1,r_2...,r_M$ katsayıları kolaylıkla bulunur. İkinci olarak (4.3) eşitliğinde, polinomların özdeşliği kuralı gereğince (4.3) eşitliğinin sağ ve sol tarafında bulunan $x^1,x^2...,x^L$ terimlerinin sayıları birbirleri ile eşitlenirse ilk önce

$$\begin{aligned}q_0&=p_0\\q_1&=p_1+r_1p_0\\q_2&=p_2+r_1p_1+r_2p_0\\&\vdots\\q_L&=p_L+\sum_{k=1}^{L}r_kp_{L-k}\end{aligned}$$

olur. Buradan da $q_1,q_2,...,q_L$ değerleri elde edilir. Sonuç olarak $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}p_kx^k$ biçiminde verilen bir fonksiyonun $f_{L+M\left[\frac{L}{M}\right]}$ Padé yaklaşımını bulmuş oluruz. George Jr. (1975)' de yukarıda anlatılan Padé yaklaşımının katsayılarını doğrudan hesaplanabildiği bir formülü aşağıdaki (4.7) eşitliği ile verilmiştir.

$$f_{L+M\left[\frac{L}{M}\right]}=\frac{\begin{vmatrix} p_{L-M+1} & p_{L-M+2} & \cdots & p_{L+1} \\ p_{L-M+2} & p_{L-M+3} & \cdots & p_{L+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_L & p_{L+1} & \cdots & p_{L+M} \\ \sum_{j=M}^{L} p_{j-M}x^j & \sum_{j=M-1}^{L} p_{j-M+1}x^j & \cdots & \sum_{j=0}^{L} p_j x^j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_{L-M+1} & p_{L-M+2} & \cdots & p_{L+1} \\ p_{L-M+2} & p_{L-M+3} & \cdots & p_{L+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_L & p_{L+1} & \cdots & p_{L+M} \\ x^M & x^{M-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}} \tag{4.7}$$

Örnek 4.1. $f(x)=e^x$ fonksiyonunun $\left[\frac{2}{2}\right]$ biçiminde ifade edilen $\varphi_4(x)_{\left[\frac{2}{2}\right]}$ Padé yaklaşımını bulunuz.

Çözüm: İlk olarak $\varphi_4(x)=\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ şeklinde ifade edeceğimiz denklemi kuralım. $f(x)=e^x$ fonksiyonunun Taylor seri açılımını,

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+Q\left(x^5\right)=\varphi_4(x)+Q\left(x^5\right)$$

biçiminde tanımlayalım. Yani $\varphi_4\left(x\right)$ ifadesi, $f\left(x\right)$ fonsiyonunun Taylor seri açılımının ilk beş terimini göstersin. Diğer taraftan;

$$P_2(x)=p_0+p_1x+p_2x^2$$
$$Q_2(x)=1+q_1x+q_2x^2$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitliklerden $\varphi_4(x)$ için $\left[\frac{2}{2}\right]$ Padé yaklaşımı,

$$\varphi_4(x)_{\left[\frac{2}{2}\right]}=\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}=\frac{p_0+p_1x+p_2x^2}{1+q_1x+q_2x^2}$$

olup, $\varphi_4(x)$ ile eşitlendiğinde

$$\frac{p_0+p_1x+p_2x^2}{1+q_1x+q_2x^2}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}$$

eşitliği elde edilir.

Bilinmeyenler p_0, p_1, p_2, q_1, q_2 şeklinde beş katsayı olacağı için verilen $f(x)$ fonksiyonunun seri açılımındaki ilk 5. terime ihtiyaç olduğu unutulmamalıdır. Yukarıdaki eşitlikte çapraz çarpım yapılırsa,

$$p_0 + p_1x + p_2x^2 = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right)\left(1 + q_1x + q_2x^2\right)$$

$$p_0 + p_1x + p_2x^2 = 1 + q_1x + q_2x^2 + x + q_1x^2 + q_2x^3 + \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{2!}q_1x^3 + \frac{1}{2!}q_2x^4$$
$$+ \frac{x^3}{3!} + \frac{1}{3!}q_1x^4 + \frac{1}{3!}q_2x^5 + \frac{x^4}{4!} + \frac{1}{4!}q_1x^5 + \frac{1}{4!}q_2x^6$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki yanı x in artan kuvvetleri cinsinden düzenlenirse

$$p_0 + p_1x + p_2x^2 = 1 + x(1 + q_1) + x^2\left(q_1 + q_2 + \frac{1}{2!}\right) + x^3\left(q_2 + \frac{1}{2!}q_1 + \frac{1}{3!}\right)$$
$$+ x^4\left(\frac{1}{2!}q_2 + \frac{1}{3!}q_1 + \frac{1}{4!}\right) + x^5\left(\frac{1}{3!}q_2 + \frac{1}{4!}q_1\right) + \frac{1}{4!}q_2x^6$$

eşitliği bulunur. İkinci adım olarak polinomların özdeşliği kuralı gereği katsayıları aynı olan terimler karşılıklı olarak birbirleriyle eşitlenirse sırasıyla,

$$p_0 = 1$$

$$p_1 = 1 + q_1$$

$$p_2 = q_1 + q_2 + \frac{1}{2!}$$

$$0 = q_2 + \frac{1}{2!}q_1 + \frac{1}{3!}$$

$$0 = \frac{1}{2!}q_2 + \frac{1}{3!}q_1 + \frac{1}{4!}$$

eşitlikleri bulunur. Gerekli matematiksel işlemler yapıldığı taktirde ise aranan katsayılar sırasıyla,

$$p_0 = 1$$

$$p_1 = \frac{1}{2}$$

$$p_2 = \frac{1}{12}$$

$$q_1 = -\frac{1}{2}$$

$$q_2 = \frac{1}{12}$$

biçiminde elde edilir. Bulunan bu katsayılar $\varphi_4(x)_{\left[\frac{2}{2}\right]} = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ eşitliğindeki yerlerine yazılırsa, $\varphi_4(x)$ fonksiyonunun $\left[\frac{2}{2}\right]$ Padé yaklaşımı

$$\varphi_4(x)_{\left[\frac{2}{2}\right]} = \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}$$

biçiminde elde edilir.

Örnek 4.2. $f(x)=\cos x$ fonksiyonunun $\varphi_8(x)_{\left[\frac{4}{4}\right]}$ Padé yaklaşımını bulalım.

Çözüm: İlk olarak $\varphi_8(x) = \frac{P_4(x)}{Q_4(x)}$ şeklinde ifade edilen denklemi kuralım. Birinci örnekte olduğu gibi $f(x)=\cos x$ fonksiyonunun 8. dereceden Taylor seri açılımı kullanılarak,

$$\varphi_8(x) = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6+\frac{1}{40320}x^8$$

eşitliğini yazabiliriz. Diğer taraftan $P_4(x)$ ve $Q_4(x)$ polinomları sırasıyla,

$$P_4(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4$$
$$Q_4(x) = 1 + q_1x + q_2x^2 + q_3x^3 + q_4x^4$$

biçimindedir. Bu eşitlikler $\varphi_8(x) = \frac{P_4(x)}{Q_4(x)}$ eşitliğindeki yerlerine yazılırsa,

$$\frac{P_4(x)}{Q_4(x)} = \frac{p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4}{1 + q_1x + q_2x^2 + q_3x^3 + q_4x^4} = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6+\frac{1}{40320}x^8$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki eşitlik çapraz çarpılarak Örnek 4.1' deki işlemler benzer şekilde tekrarlanır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa, $\varphi_8(x)$ fonksiyonunun $\left[\frac{4}{4}\right]$ biçiminde ifade edilen Padé yaklaşımı

$$\varphi_8(x)_{\left[\frac{4}{4}\right]} = \frac{15120-6900x^2+313x^4}{15120+660x^2+13x^4}$$

olur.

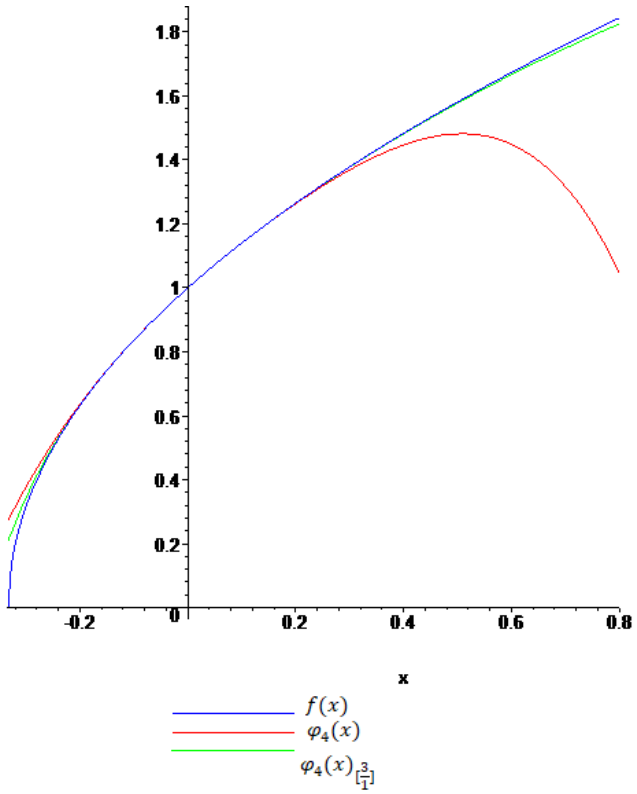
Örnek 4.3. $f(x)=\sqrt{3x+1}$ fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyonun dördüncü mertebeden Taylor seri açılımı kullanılarak,

$$\varphi_4(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{8}x^4$$

elde edilir. $\varphi_4(x)$ kuvvet serisinin $\varphi_4(x)_{\left[\frac{3}{1}\right]} = \frac{P_3(x)}{Q_1(x)}$ dereceli Padé yaklaşımı

yukarıdaki örneklerde yapılan işlemlere benzer işlemler ile aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\varphi_4(x)_{\left[\frac{3}{1}\right]} = \frac{1 + \frac{9}{4}x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3}{1 + \frac{5}{4}x}$$



Şekil 4.1. $f(x)$, $\varphi_4(x)$, $\varphi_4(x)_{\left[\frac{3}{1}\right]}$ nin grafikleri

Yukarıdaki Şekil 4.1' de $f(x) = \sqrt{3x+1}$ fonksiyonu, $\varphi_4(x)$ kuvvet serisi ve $\varphi_4(x)$ kuvvet serisine ait $\varphi_4(x)_{\left[\frac{3}{1}\right]}$ Padé yaklaşımlarının grafikleri $f(x)$' in tanımlı olduğu aralık için verilmektedir.

5.CONFORMABLE DİFERANSİYEL DENKLEMLERE PADÉ YAKLAŞIMININ UYGULANMASI

Önceki bölümlerde kesirli analiz kavramı, kesirli türev tanımları ve ardından bu tanımlardan biri olan ve sıralanan özelliklerinden dolayı birçok bilimsel çalışmada tercih edilmekte olan conformable anlamında türev tanımına yer verilmiştir. Ardından da çeşitli nedenlerle başka türlü bir çekim gücüne sahip Padé yaklaşımına ve çeşitli uygulamalarına yer verilmiştir. Bu son bölümde ise bu iki kavramın; yani conformable anlamında türev ve Padé yaklaşımının diferansiyel denklemlerde peşi sıra uygulanmasının neleri başarabileceği konusu ele alınacaktır.

Bilindiği gibi diferansiyel denklemler; gerçek hayattaki değişim içeren olayların matematiksel modellemesidir. Bu modellemeler ise lineer ve lineer olmayan problemler olarak gruplandırılırlar. Bilim insanları en çok lineer olmayan problemleri modellemede ve çözmede zorlanırlar. Hangi tür problem olursa olsun, analitik çözümleri bulunamayan problemler için nümerik çözüm yöntemleri yada problemin doğasına uygun olarak yarı analitik çözüm yöntemleri bilim insanlarının tercih ettikleri diğer yöntemlerdir. Bunlardan yarı analitik çözüm denildiğinde akla gelen bazı metotlar; Adomian ayrışım metodu, Varyasyonel iterasyon metodu, diferansiyel dönüşüm metodu ve Homotopi perturbasyon metodu ilk akla gelen metotlardan bazılarıdır. Her ne kadar yukarıda bahsedilen bu yarı analitik çözüm metotları çok önemli işler başarıyor olsalar da teknolojik gelişmelere bakıldığında; bilim dünyası her zaman daha fazlasını istemektedir. Bu nedenle yarı analitik çözümler her ne kadar çok fazla iş görse de bu çözümlerin iyileştirilmesi konusu her zaman önemli bir konu olmuştur. Problemin çözümü için çok farklı yöntemler olsa da, Padé yaklaşımı yöntemi en çok kullanılan iyileştirme metodundan biridir. Padé ile yapılan çalışmalarda yöntemin gerçekten mevcut yarı analitik çözümleri iyileştirdiği ve problemlerin yakınsaklık aralığını genişlettiği iyi bilinmektedir.

İlk olarak 1800'lü yıllarda Henri Euéne Padé, kendi adını taşıyan yöntemi kuvvet serileri için tanıtmıştır (George Jr, 1975). Padé metodununun diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan yarı analitik yöntemlerden elde edilen çözümlerin iyileştirilmesinde kullanımı birçok bilim insanı tarafından tercih edilmiştir. Örneğin;

Abassy ve ark. (2007)' de yapmış oldukları çalışmada Padé yaklaşımını kullandıktan sonra elde ettikleri Burgers' ve Boussinesq denkleminin çözümünün Adomian ayrışım metodundan elde edilen çözüme göre daha hızlı yakınsamaya sahip olduğunu ve daha yüksek doğrulukla yaklaşık çözüm elde edildiğini göstermişlerdir. Torabi Giklou ve ark.(2021)' da; lineer olmayan başlangıç değer problemlerini ve gecikmeli diferansiyel denklemleri çözebilmek için Varyasyonel iterasyon metodu-Padé tekniğini beraber kullanmış ve elde edilen sonuçları sadece Varyasyonel iterasyon metodunu kullanarak elde edilen sonuçlarla karşılaştırmışlar, Varyasyonel iterasyon metodu -Padé tercihinin ne anlama geldiğini elde ettikleri sonuçlar ile göstermişlerdir. Sonuç olarak Padé yaklaşımının diferansiyel denklemlerin yarı analitik çözümlerine uygulanması sonucu elde edilen iyileştirilmiş çözümlerin, Padé uygulanmadan önceki yarı analitik çözümlerin yakınsaklık aralığının genişlettiği birçok bilimsel çalışmanın konusu olmuştur. *" Padé yaklaşımı ile diferansiyel denklemlerin yarı analitik çözümlerinin yakınsaklık aralığının genişletilebilmesi tekniği, conformable anlamdaki diferansiyel denklemlerden elde edilen yarı analitik yöntemlerden elde edilen çözümlere de uygulanabilir mi?"* sorusu bu çalışmasında cevaplanmaya çalışılmıştır.

Bu bölümde literatürdeki conformable anlamdaki diferansiyel denklemlerde uygulanan çeşitli yarı analitik çözümlerden elde edilen çözümlere Padé yaklaşımı metodunun uygulamalarına yer verilmiştir. Tercih edilen yöntemin, çözümlere ne tür bir katkı sunduğu sayısal sonuçlar ve grafikler ile de anlatılmıştır.

Örnek 5.1

İlk olarak aşağıdaki comformable kesirli mertebeli lojistik diferansiyel denklemin verilen koşulları gerçekleyen çözümünü bulma problemini ele alalım (Günerhan ve ark., 2021):

$$T^{\alpha} y(t) = \frac{1}{2} y(t)\left(1 - y(t)\right) \; t > 0 \; , \; 0 < \alpha \leq 1, \tag{5.1}$$

$$y_{\alpha}(0) = \frac{1}{2} . \tag{5.2}$$

Günerhan ve ark. (2021) conformable kesirli diferansiyel dönüşüm metodu olarak adlandırılan yarı analitik yöntem yardımıyla (5.1)-(5.2) probleminin çözümünü aşağıdaki gibi elde etmişlerdir.

$$y(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)-\frac{1}{384}\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{3}+\frac{1}{15360}\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{5}+\frac{17}{10321920}\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{7}+\ldots. \qquad (5.3)$$

Aynı zamanda (5.1)-(5.2) probleminde $\alpha=1$ alınırsa kullanılan yöntem ile elde edilen çözümün

$$y(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}t-\frac{1}{384}t^{3}+\frac{1}{15360}t^{5}+\frac{17}{10321920}t^{7}+\ldots$$

olduğu, hatta verilen problemin analitik çözümünün

$$y(t)=\frac{Exp(\frac{t}{2})}{1+Exp(\frac{t}{2})}$$

biçiminde olduğu bilinmektedir (Günerhan ve ark., 2021).

Öncelikle Günerhan ve ark. (2021) tarafından önerilen yöntem ile elde edilen (5.3) sonsuz seri çözümündeki ilk 5 terimi;

$$\varphi_{4}(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)+\frac{1}{384}\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{3} \qquad (5.4)$$

biçiminde tanımlayalım. Şimdi bu tez çalışmasının konusu olan Padé yaklaşımının comformable kesirli diferansiyel denklemin çözümünü nasıl iyileştirildiğini yukarıdaki sonuçlara uygulayarak gösterelim.

İlk önce $\varphi_{4}(t)$ fonksiyonuna $\left[\frac{2}{2}\right]$' lik Padé yaklaşımı uygulayabilmek için;

$$\varphi_{4}(t)_{\left[\frac{2}{2}\right]}=\frac{q_{0}+q_{1}\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{1}+q_{2}\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{2}}{1+r_{1}\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{1}+r_{2}\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{2}}=\frac{\begin{vmatrix} p_{1} & p_{2} & p_{3} \\ p_{2} & p_{3} & p_{4} \\ p_{0}\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{2} & p_{0}\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)+p_{1}\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{2} & p_{0}+p_{1}\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)+p_{2}\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_{1} & p_{2} & p_{3} \\ p_{2} & p_{3} & p_{4} \\ \left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{2} & \left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right) & 1 \end{vmatrix}} \qquad (5.5)$$

eşitliğini yazalım. (5.5)' in hesaplanabilmesi için, $\varphi_{4}(t)$ deki $P_{k}, k=\overline{0,4}$ katsayılarının (5.4) deki gerçek değerleri (5.5)' deki yerlerine yazılıp ve gerekli matematiksel işlemler yapılmalıdır.

Bunlar yapıldığında $\varphi_4(t)_{\left[\frac{2}{2}\right]}$ biçiminde ifade edecek olduğumuz ve $\varphi_4(t)$ fonksiyonunun $\left[\frac{2}{2}\right]$ lik Padé yaklaşımı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\varphi_4(t)_{\left[\frac{2}{2}\right]} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)+\frac{1}{96}\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^2}{1+\frac{1}{48}\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^2} \tag{5.6}$$

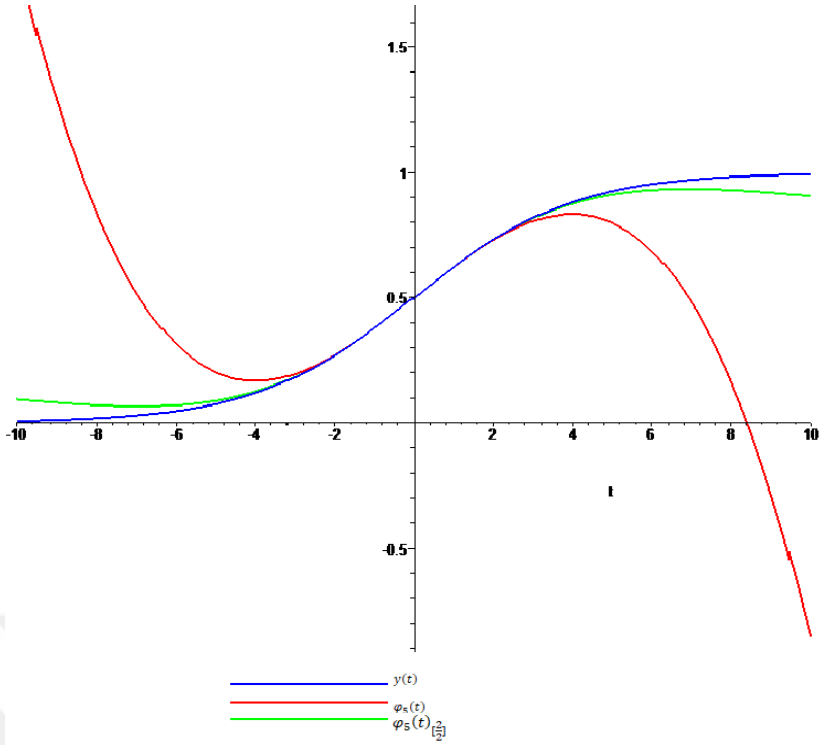
Eğer (5.4) ve (5.6) çözümlerinde $\alpha = 1$ alındığında ise;

$$\varphi_4(t) = \frac{1}{2}+\frac{1}{8}t-\frac{1}{384}t^3 \tag{5.7}$$

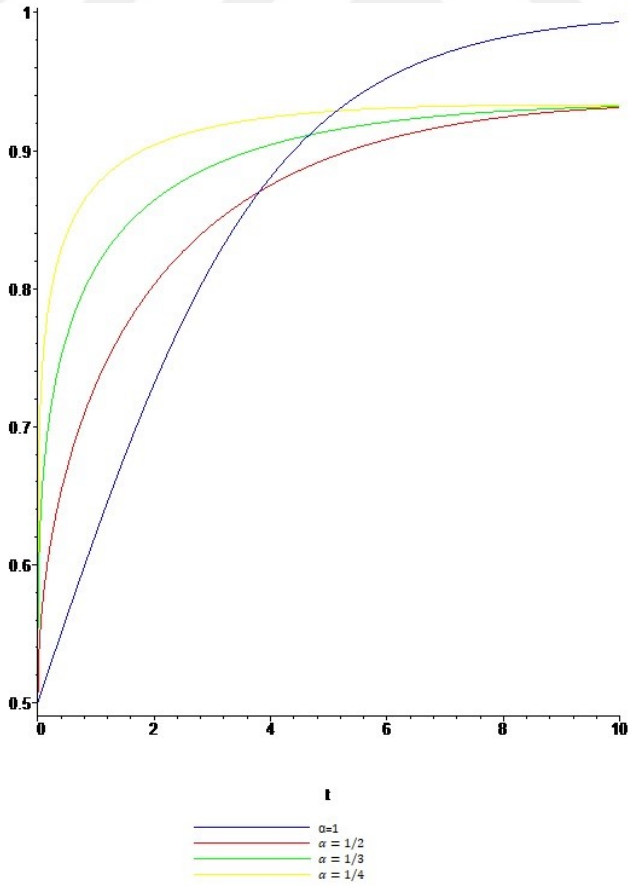
$$\varphi_4(t)_{\left[\frac{2}{2}\right]} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}t+\frac{1}{96}t^2}{1+\frac{1}{48}t^2} \tag{5.8}$$

fonksiyonlarını elde ederiz. Aşağıdaki Şekil 5.1' de problemin analitik çözümünün, Günerhan ve ark. (2021) tarafından conformable kesirli diferansiyel dönüşüm metodunu kullanarak bulmuş oldukları (5.7) deki $\varphi_4(t)$ çözümünün ve bizim önermiş olduğumuz Padé yaklaşımı ile elde edilen (5.8) deki $\varphi_4(t)_{\left[\frac{2}{2}\right]}$ çözümlerinin $\alpha = 1$ için grafikleri verilmiştir.

Şekil 5.1' den de görüleceği gibi; Padé yaklaşımı yardımıyla elde edilen (5.8)' deki $\varphi_4(t)_{\left[\frac{2}{2}\right]}$ çözümün fonksiyonunun grafiği problemin $y(t) = \frac{Exp(\frac{t}{2})}{1+Exp(\frac{t}{2})}$ analitik çözümüne; Günerhan ve ark. (2021)' nın comformable kesirli diferansiyel dönüşüm metodunu kullanarak bulmuş oldukları (5.7) deki $\varphi_4(t)$ çözümünün grafiğinden daha yakın değerler almaktadır. Bu durum önermiş olduğumuz Padé yaklaşımının bu tür problemlerde de iyi çalıştığını göstermektedir. Şekil 5.2' de ise α' nın farklı değerleri için $\varphi_4(t)_{\left[\frac{2}{2}\right]}$ çözümünün grafiği mevcuttur.



Şekil 5.1 $\alpha = 1$ için, $y(t)$, $\varphi_4(t)$, $\varphi_4(t)_{\left[\frac{2}{2}\right]}$ nin grafikleri



Şekil 5.2 $\varphi_4(t)_{\left[\frac{2}{2}\right]}$ nin $\alpha = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha = \frac{1}{4}$ değerleri için grafikleri

Örnek 5.2

$$\begin{aligned} &T^{\alpha}y(t)=\frac{1}{4}y(t)\left(1-y(t)\right),t>0\ ,0<\alpha\le 1\\ &y_{\alpha}(0)=\frac{1}{3}. \end{aligned}\quad , \tag{5.9}$$

biçiminde verilen conformable kesirli mertebeli lojistik diferansiyel denklemin verilen başlangıç koşulunu gerçekleyen çözümünü bulma problemini ele alalım (Günerhan ve ark., 2021).

Günerhan ve ark. (2021), conformable kesirli diferansiyel dönüşüm metodu olarak adlandırılan yarı analitik yöntem yardımıyla (5.9) başlangıç değer probleminin çözümünü aşağıdaki gibi elde etmişlerdir.

$$y_{\alpha}(t)=\frac{1}{3}+\frac{1}{18}\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)+\frac{1}{432}\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{2}-\frac{1}{5184}\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{3}-\frac{5}{248832}\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)+\cdots \tag{5.10}$$

Bu problemde de $\alpha=1$ alınırsa (5.10) çözümünün

$$y(t)=\frac{1}{3}+\frac{t}{18}+\frac{t^{2}}{432}-\frac{t^{3}}{5184}-\frac{5t^{4}}{248832}+\cdots \tag{5.11}$$

olduğu, hatta verilen problemin analitik çözümünün ise

$$y(t)=\frac{Exp\left(\frac{t}{4}\right)}{2+Exp\left(\frac{t}{4}\right)} \tag{5.12}$$

biçiminde olduğu bilinmektedir (Günerhan ve ark., 2021).

Günerhan ve ark. (2021) tarafından önerilen conformable kesirli diferansiyel dönüşüm

metodu kullanılarak ile elde edilen (5.10) sonsuz seri çözümündeki ilk 5 terimini;

$$\varphi_4(t)=\frac{1}{3}+\frac{1}{18}\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)+\frac{1}{432}\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^2-\frac{1}{5184}\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^3-\frac{5}{248832}\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^4 \tag{5.13}$$

fonksiyonu ile tanımlayalım. Şimdi bu tez çalışmasının konusu olan Padé yaklaşımının conformable kesirli diferansiyel denklemin çözümünü nasıl iyileştirdiğini Örnek 5.1 de olduğu gibi (5.13) fonksiyonuna Padé yaklaşımnı ıuygulayarak gösterelim. İlk önce $\varphi_4(t)$ fonksiyonuna $\left[\frac{2}{2}\right]$'lik Padé yaklaşımı uygulayabilmek için;

$$\varphi_4(t)_{\left[\frac{2}{2}\right]}=\frac{q_0+q_1\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^1+q_2\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^2}{1+r_1\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^1+r_2\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^2}=\frac{\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_2 & p_3 & p_4 \\ p_0\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^2 & p_0\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)+p_1\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^2 & p_0+p_1\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)+p_2\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_2 & p_3 & p_4 \\ \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^2 & \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) & 1 \end{vmatrix}} \tag{5.14}$$

eşitliğini yazalım. Bu (5.14) eşitliğinin sağ tarafındaki $P_k, k=\overline{0,4}$ katsayılarının (5.13) deki gerçek değerleri yerine yazıldığı ve gerekli matematiksel işlemler yapıldığı takdirde $\varphi_4(t)_{\left[\frac{2}{2}\right]}$ biçiminde ifade edecek olduğumuz ve $\varphi_4(t)$ yaklaşık çözümünün $\left[\frac{2}{2}\right]$' lik Padé yaklaşımı olarak adlandırdığımız $\varphi_4(t)_{\left[\frac{2}{2}\right]}$ fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

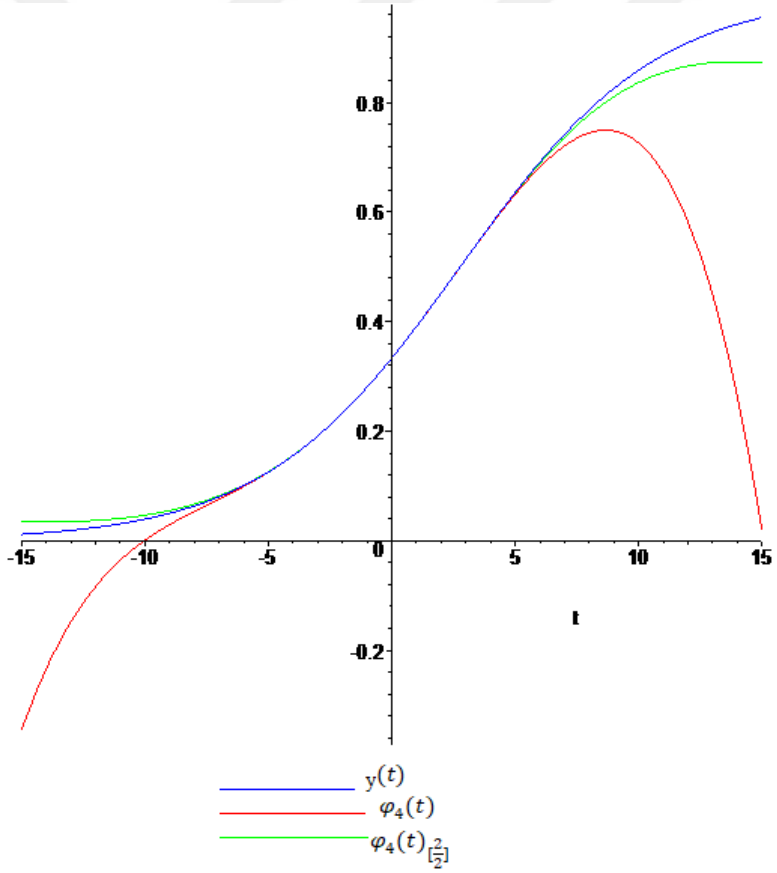
$$\varphi_4(t)_{\left[\frac{2}{2}\right]}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{24}\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)+\frac{1}{576}\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^2}{1-\frac{1}{24}\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)+\frac{1}{192}\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^2} \tag{5.15}$$

Eğer elde edilen (5.13) ve (5.15) çözümlerinde $\alpha=1$ alınırsa sırasıyla;

$$\varphi_4(t)=\frac{1}{3}+\frac{t}{18}+\frac{t^2}{432}-\frac{t^3}{5184}-\frac{5t^4}{248832} \tag{5.16}$$

$$\varphi_4(t)_{\left[\frac{2}{2}\right]} = \frac{\frac{1}{3}+\frac{t}{24}+\frac{t^2}{576}}{1-\frac{t}{24}+\frac{t^2}{192}} \tag{5.17}$$

fonksiyonlarını elde ederiz. Aşağıdaki Şekil 5.3' de $\alpha = 1$ için problemin analitik çözümünün, Günerhan ve ark. (2021)' nın conformable kesirli diferansiyel dönüşüm metodunu kullanarak bulmuş oldukları (5.16) daki $\varphi_4(t)$ çözümünün ve bizim önermiş olduğumuz Padé yaklaşımı ile elde edilen (5.17) deki $\varphi_4(t)_{\left[\frac{2}{2}\right]}$ Padé yaklaşımının grafikleri verilmiştir. Şekil 5.3' den de görüldüğü gibi; önermiş olduğumuz Padé yaklaşımı gerçek anlamda bir iyileştirmedir. $\varphi_4(t)_{\left[\frac{2}{2}\right]}$ fonksiyonunun problemin analitik çözümüne $\varphi_4(t)$ fonksiyonundan daha yakın değerler almakta olduğu görülmektedir.



Şekil 5.3 $\alpha = 1$ için, $y(t)$, $\varphi_4(t)$, $\varphi_4(t)_{\left[\frac{2}{2}\right]}$ nin grafikleri

Örnek 5.3

Eltayeb ve ark. (2020)' nın yayınlamış oldukları conformable kesirli izotermal gaz küreleri adlı çalışmada; astrofizik, fizik, kimya ve mühendislikteki birçok problemi modellemek için güçlü bir araç olarak bilenen izotermal gaz küreleri problemini ele almışlardır. Bilindiği gibi bu tür tekil diferansiyel denklemlerin analitik bir çözümü yoktur, bu yüzden yalnızca sayısal ve yaklaşık yöntemlerle çözüm aranır. Bu nedenlerden dolayı problemin çözümü için kuvvet serisi yöntemini kullanmışlardır (Eltayeb ve ark., 2020). Yöntemi kullanarak,

$$t^{2\alpha}T^{2\alpha}u(t)+2\alpha t^{\alpha}T^{\alpha}u(t)=t^{2\alpha}e^{-u}\ ,t>0\ ,0<\alpha\le 1 \tag{5.18}$$

$$u(0)=0,\ T^{\alpha}u(0)=0\,. \tag{5.19}$$

biçiminde ifade edilen izotermal Lane- Emden başlangıç değer probleminin kuvet serisi çözümünü

$$u(t)=\frac{1}{6}\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{2}-\frac{1}{120}\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{4}+\frac{1}{1890}\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{6}-\frac{1}{1632960}\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{8}+... \tag{5.20}$$

biçiminde bulmuşlardır. Elde edilen çözümde $\alpha=1$ alındığında ise,

$$u(t)=\frac{1}{6}t^{2}-\frac{1}{120}t^{4}+\frac{1}{1890}t^{6}-\frac{1}{1632960}t^{8}+... \tag{5.21}$$

olmaktadır.

Önceki örneklerde olduğu gibi Eltayeb ve ark. (2020) tarafından önerilen yöntem ile elde edilen (5.20) sonsuz seri çözümündeki ilk 5 terimini;

$$\varphi_{4}(t)=\frac{1}{6}\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{2}-\frac{1}{120}\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{4} \tag{5.22}$$

fonksiyonu ile tanımlayalım. Şimdi bu tez çalışmasının konusu olan Padé yaklaşımının conformable kesirli diferansiyel denklemin çözümünü nasıl iyileştirdiğini yukarıdaki (5.22) fonksiyonuna uygulayarak tekrar gösterelim. İlk önce $\varphi_{4}(t)$ fonksiyonuna $\left[\frac{2}{2}\right]$ 'lik Padé yaklaşımını uygulayabilmek için;

$$\varphi_4(t)_{\left[\frac{2}{2}\right]}=\frac{q_0+q_1\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^1+q_2\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^2}{1+r_1\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^1+r_2\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^2}=\frac{\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_2 & p_3 & p_4 \\ p_0\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^2 & p_0\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)+p_1\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^2 & p_0+p_1\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)+p_2\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_2 & p_3 & p_4 \\ \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^2 & \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) & 1 \end{vmatrix}} \quad (5.23)$$

eşitliğini yazalım. Bu adımda (5.22) deki $P_k, k=\overline{0,4}$ katsayılarının gerçek değerleri (5.23)' deki yerlerine yazıldığı ve gerekli matematiksel işlemler yapıldığı takdirde $\varphi_4(t)_{\left[\frac{2}{2}\right]}$ biçiminde ifade etmiş olduğumuz ve $\varphi_4(t)$ yaklaşık çözümünün $\left[\frac{2}{2}\right]$'lik Padé yaklaşımı ile elde edilen Padé yaklaşımı aşağıdaki gibi elde edilir.

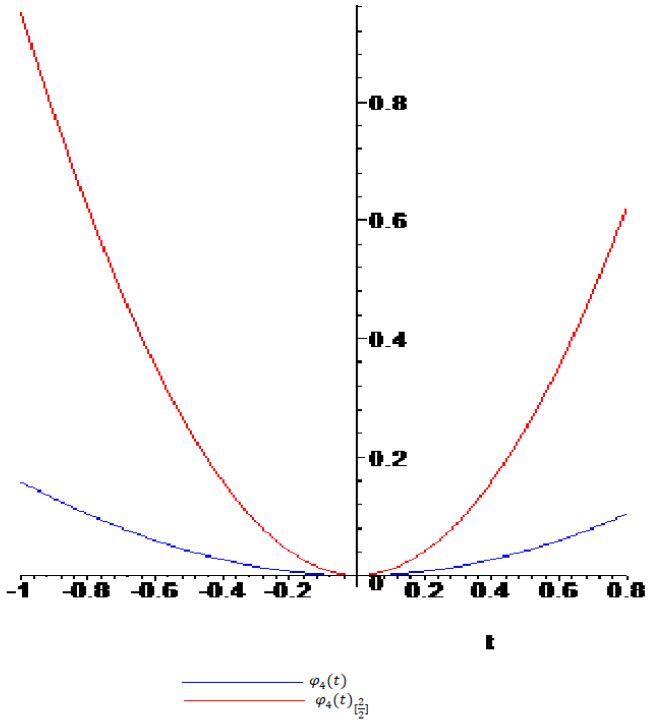
$$\varphi_4(t)_{\left[\frac{2}{2}\right]}=\frac{\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^2}{6\left(1+\frac{1}{20}\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^2\right)} \quad (5.24)$$

Eğer (5.22) ve (5.24) eşitliklerinde $\alpha=1$ alınırsa;

$$\varphi_4(t)=\frac{1}{6}t^2-\frac{1}{120}t^4 \quad (5.25)$$

$$\varphi_4(t)_{\left[\frac{2}{2}\right]}=\frac{t^2}{6\left(1+\frac{t^2}{20}\right)} \quad (5.26)$$

fonksiyonlarını elde ederiz. Aşağıdaki Şekil (5.4)' de $\alpha=1$ alındığında problemin (Eltayeb ve ark., 2020) tarafından önerilen yöntem ile bulmuş oldukları (5.25) deki $\varphi_4(t)$ çözümünün ve bizim önermiş olduğumuz metod ile elde edilen (5.26) deki $\varphi_4(t)_{\left[\frac{2}{2}\right]}$ fonksiyonunun değişimi verilmiştir.



Şekil 5.4 $\alpha = 1$ için $\varphi_4(t), \varphi_4(t)_{\left[\frac{2}{2}\right]}$ nin grafikleri

Örnek 5.4

Eslami ve Taleghani (2019) yılında conformable kesirli kısmi diferansiyel denklemler için diferansiyel dönüşüm metodunu adını verdikleri çalışmada ele aldıkları problemlerden biri de aşağıdaki lineer olmayan zaman kesirli Folker-Planck denklemi olmuştur. Eslami ve Taleghani (2019) kullandıkları metotda; diferansiyel denklemler cebirsel denkleme çevrilip, elde edilen cebirsel denklemlerin çözümlerinden denklemlerin yarı analitik çözümlerine ulaşmayı hedeflemişlerdir. Bunu örnek üzerinde göstermek için de aşağıdaki (5.27) başlangıç değer problemi ele almışlardır.

$$T_t^a u = \left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(3u - \frac{x}{2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(xu) \right] u \quad x,t > 0 \ \ ve \ \ 0 < a \le 1, \qquad (5.27)$$
$$u(x,0) = x$$

Eslami ve Taleghani (2019), conformable diferansiyel dönüşüm metodunu kullanak (5.27) probleminin kuvvet serisi çözümünü

$$u(x,t) = x\left(1 + \frac{t^\alpha}{\alpha} + \frac{t^{2\alpha}}{\alpha^2 2!} + \frac{t^{3\alpha}}{\alpha^3 3!} + \frac{t^{4\alpha}}{\alpha^4 4!} + \frac{t^{5\alpha}}{\alpha^5 5!} + \frac{t^{6\alpha}}{\alpha^6 6!} + \cdots\right) \qquad (5.28)$$

biçiminde elde etmişlerdir. Eslami ve Taleghani (2019) tarafından önerilen yöntem ile elde edilen (5.28) sonsuz seri çözümündeki ilk 5 terimini;

$$\varphi_4\left(x,t\right)=x\left(1+\frac{t^{\alpha}}{\alpha}+\frac{t^{2\alpha}}{\alpha^2 2!}+\frac{t^{3\alpha}}{\alpha^3 3!}+\frac{t^{4\alpha}}{\alpha^4 4!}\right) \tag{5.29}$$

fonksiyonu ile tanımlayalım. Önceki örneklerde conformable anlamında kesirli adi diferansiyel denklemler için yapılan Padé yaklaşımının bu kez bir conformable kesirli kısmi diferansiyel denklemin çözümünü nasıl etkileceğini yukarıdaki (5.29) sonuçuna uygulayarak gösterelim: İlk olarak (5.29) eşitliği ile verilen $\varphi_4(x,t)$ çözümünün sağ tarafındaki kesirli kuvvet serisini,

$$\tilde{\varphi}\left(t\right)_4=1+\frac{t^{\alpha}}{\alpha}+\frac{t^{2\alpha}}{\alpha^2 2!}+\frac{t^{3\alpha}}{\alpha^3 3!}+\frac{t^{4\alpha}}{\alpha^4 4!} \tag{5.30}$$

şeklinde tanımlayalım. Başka bir ifadeyle,

$$\varphi_4\left(x,t\right)=x\tilde{\varphi}_4\left(t\right) \tag{5.31}$$

olsun. İkinci olarak (5.30) eşitliğindeki $\tilde{\varphi}_4\left(t\right)$ fonksiyonuna $\left[\frac{2}{2}\right]$ Padé yaklaşımı uygulayalım. Bunun için;

$$\tilde{\varphi}_4\left(t\right)_{\left[\frac{2}{2}\right]}=\frac{q_0+q_1\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^1+q_2\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^2}{1+r_1\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^1+r_2\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^2}=\frac{\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_2 & p_3 & p_4 \\ p_0\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^2 & p_0\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)+p_1\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^2 & p_0+p_1\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)+p_2\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_2 & p_3 & p_4 \\ \left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^2 & \left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right) & 1 \end{vmatrix}} \tag{5.32}$$

eşitliğinde (5.30)' daki $p_k=\overline{0,4}$ katsayılarının değerleri yerlerine yazılır ve gerekli matematiksel işlemler yapılırsa;

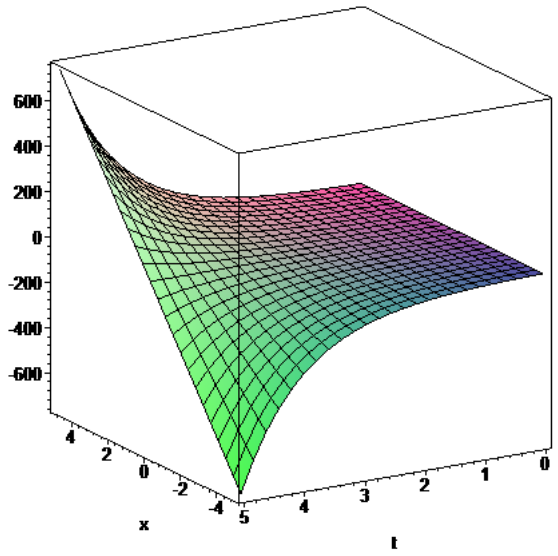
$$\tilde{\varphi}_4(t)_{\left[\frac{2}{2}\right]}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} \\ \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^2 & \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)+\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^3 & 1+\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} \\ \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^2 & \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) & 1 \end{vmatrix}} \tag{5.33}$$

$$\tilde{\varphi}_4(t)_{\left[\frac{2}{2}\right]}=\frac{1+\left(\frac{t^\alpha}{2\alpha}\right)+\left(\frac{t^{2\alpha}}{12\alpha^2}\right)}{1-\left(\frac{t^\alpha}{2\alpha}\right)+\left(\frac{t^{2\alpha}}{12\alpha^2}\right)} \tag{5.34}$$

olarak bulunur. (5.34)' de elde edilen $\tilde{\varphi}_4(t)_{\left[\frac{2}{2}\right]}$ yaklaşımı, (5.31) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\varphi_4(x,t)_{\left[\frac{2}{2}\right]}=x\tilde{\varphi}_4(t)=x\frac{1+\left(\frac{t^\alpha}{2\alpha}\right)+\left(\frac{t^{2\alpha}}{12\alpha^2}\right)}{1-\left(\frac{t^\alpha}{2\alpha}\right)+\left(\frac{t^{2\alpha}}{12\alpha^2}\right)} \tag{5.35}$$

yaklaşımı elde edilir. Ele alınan problemde $\alpha=1$ seçilmesi durumunda (5.27) başlangıç değer probleminin analitik çözümün $u(x,t)=xe^t$ şeklinde olduğu bilinmektedir (Eslami ve Taleghani, 2019).



Şekil 5.5. $u\left(x,t\right)=xe^{t}$ fonksiyonunun davranışı

Örnek 5.5.

Eslami ve Taleghani (2019) yılında conformable kesirli kısmi diferansiyel denklemler için diferansiyel dönüşüm metodunu adını verdikleri çalışmada ele aldıkları problemlerden biri de aşağıdaki zaman kesirli Klein-Gordon denklemi olmuştur. Eslami ve Taleghani (2019)' nin ele aldıkları başlangıç değer problemi

$$T_t^a u-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u^2=-x\sin\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)+x^2\cos^2\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)\quad x,t>0\ \ ve\ \ 0<a\le 1,$$
$$u\left(x,0\right)=x \tag{5.36}$$

dir. Eslami ve Taleghani (2019), conformable diferansiyel dönüşüm metodunu kullanak (5.36) probleminin kuvvet serisi çözümünü

$$u_8\left(x,t\right)=x\left(1-\frac{t^{2\alpha}}{\alpha^2 2!}+\frac{t^{4\alpha}}{\alpha^4 4!}-\frac{t^{6\alpha}}{\alpha^6 6!}+\frac{t^{8\alpha}}{\alpha^8 8!}\cdots\right) \tag{5.37}$$

biçiminde elde etmişlerdir. (Eslami ve Taleghani, 2019) tarafından önerilen yöntem ile elde edilen (5.37) sonsuz seri çözümündeki ilk 9 terimi;

$$\varphi_8\left(x,t\right)=x\left(1-\frac{t^{2\alpha}}{\alpha^2 2!}+\frac{t^{4\alpha}}{\alpha^4 4!}-\frac{t^{6\alpha}}{\alpha^6 6!}+\frac{t^{8\alpha}}{\alpha^8 8!}\right) \tag{5.38}$$

fonksiyonu ile tanımlayalım. Önceki Örnek 5.4' de olduğu gibi ilk olarak (4.38) eşitliği ile verilen $\varphi_8\left(x,t\right)$ çözümünün sağ tarafındaki kesirli kuvvet serisini,

$$\tilde{\varphi}_8(t)=1-\frac{t^{2\alpha}}{\alpha^2 2!}+\frac{t^{4\alpha}}{\alpha^4 4!}-\frac{t^{6\alpha}}{\alpha^6 6!}+\frac{t^{8\alpha}}{\alpha^8 8!} \tag{5.39}$$

şeklinde tanımlayalım. Başka bir ifadeyle,

$$\varphi_8(x,t)=x\tilde{\varphi}_8(t) \tag{5.40}$$

olsun. İkinci olarak (5.39) eşitliğindeki $\tilde{\varphi}_8(t)$ fonksiyonuna $\left[\frac{4}{4}\right]$ Padé yaklaşımı uygulayalım. Örnek 5.4' de olduğu gibi benzer işlemler tekrarlanırsa;

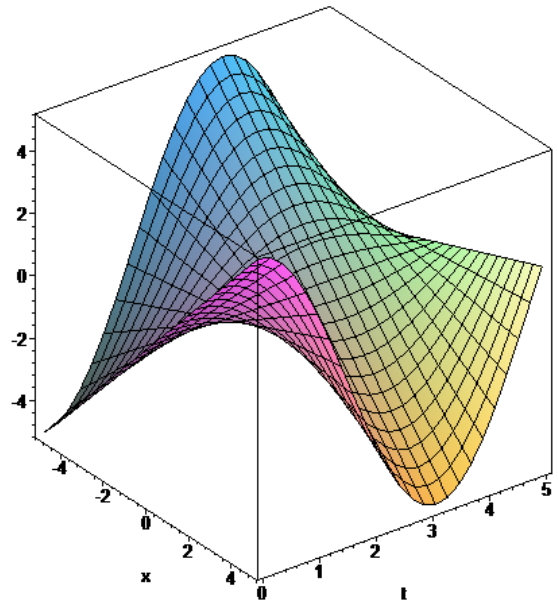
$$\tilde{\varphi}_8(t)_{\left[\frac{4}{4}\right]}=\frac{1-\frac{115}{252}\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^2+\frac{313}{15120}\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^4}{1+\frac{11}{252}\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^2+\frac{13}{15120}\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^4} \tag{5.41}$$

olarak bulunur. Yukarıda elde edilen $\tilde{\varphi}_8(t)_{\left[\frac{4}{4}\right]}$ yaklaşımı, (5.40) eşitliğinde yerine yazılırsa;

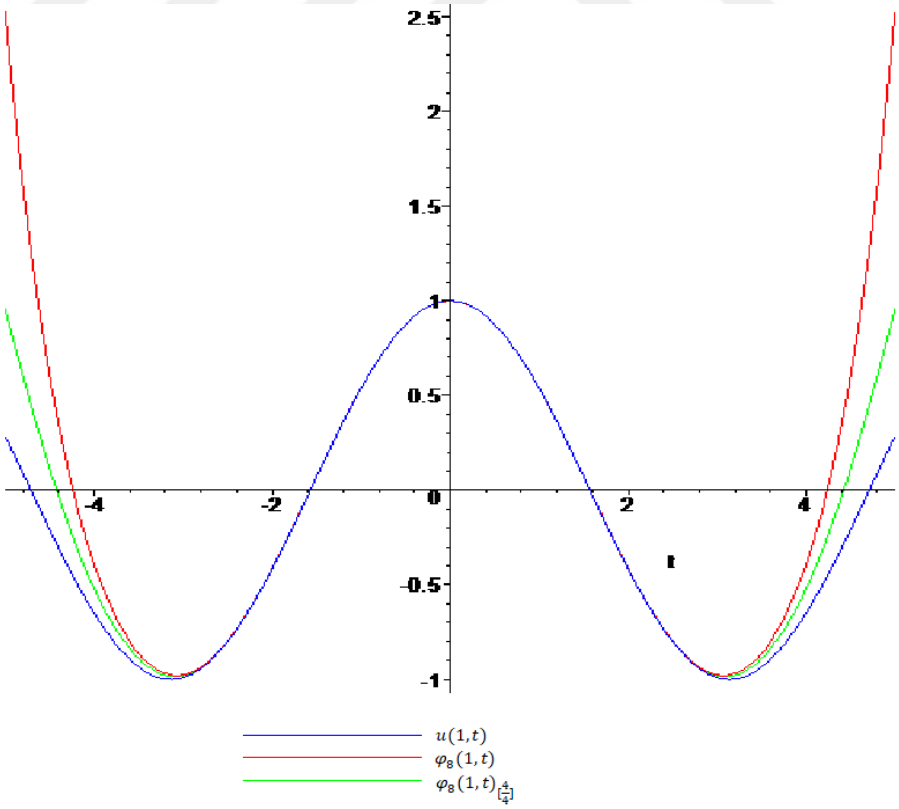
$$\varphi_8(x,t)_{\left[\frac{4}{4}\right]}=x\frac{1-\frac{115}{252}\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^2+\frac{313}{15120}\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^4}{1+\frac{11}{252}\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^2+\frac{13}{15120}\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^4} \tag{5.42}$$

fonksiyonu elde edilmiş olunur. Ele alınan problemde $\alpha=1$ seçilmesi durumunda (5.36) başlangıç değer probleminin gerçek çözümün $u(x,t)=x\cos t$ şeklindedir (Eslami ve Taleghani, 2019).

Şekil 5.6' da problemin $u(x,t)=x\cos t$ analitik çözümünün grafiği, Şekil 5.7' de ise $\alpha=1$ ve $x=1$için, $u(x,t)=x\cos t$, $\varphi_8(x,t)$, $\varphi_8(x,t)_{\left[\frac{4}{4}\right]}$ fonksiyonlarının davranışı verilmiştir.



Şekil 5.6. $u(x,t)=x\cos(t)$ fonksiyonunun davranışı



Şekil 5.7. $\alpha=1$ ve $x=1$ için, $u(x,t)=x\cos(t)$, $\varphi_8(x,t)$, $\varphi_8(x,t)$ fonksiyonlarının davranışı

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında Padé yaklaşımı olarak adlandırılan ve bir fonksiyonun Taylor seri açılımının iki polinomun oranı şeklinde rasyonel halde yazılması esasına dayanan yöntemle; literatürdeki conformable anlamındaki kesirli türeve sahip diferansiyel denklemlerin mevcut yarı analitik çözümlerinin iyileştirilebileceği konusu ele alınmıştır. Conformable anlamındaki kesirli mertebeden türeve sahip gerek adi gerekse kısmi diferansiyel denklemlerin literatürdeki çeşitli yarı analitik çözüm yöntemleri ile elde edilen yaklaşık çözümlerine Padé yaklaşımı uygulanmış, elde edilen sonuçlar ile eldeki mevcut Padé yaklaşımı uygulanmadan önceki sonuçlar ele alınan problemlerin analitik çözümleri ile karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar aynı zamanda grafikler yardımıyla da resmedilmiştir. Sonuç olarak; Padé yaklaşımı ile Conformable anlamındaki kesirli mertebeden türeve diferansiyel denklemlerin yarı analitik çözümlerinin iyileştirilmesi yani yakınsaklık aralığının genişletilebilmesi mümkündür.

Conformable anlamındaki kesirli mertebeden türeve diferansiyel denklemlerin yarı analitik çözümlerini baz alarak bilimsel çalışmalarını yapmakta olan bilim insanlarının ellerindeki sonuçları Padé yaklaşımı ile iyileştirmeleri gerekmektedir. Bu sayede çalışmaları daha hızlı, daha doğru, daha güvenli sonuçlar verecektir.

KAYNAKLAR

Abassy, T. A., El-Tawil, M. A. ve Saleh, H. K., 2007, The solution of Burgers' and good Boussinesq equations using ADM–Padé technique, *Chaos, Solitons & Fractals*, 32 (3), 1008-1026.

Abdeljawad, T., 2015, On Conformable Fractional Calculus. Computational and Applied Mathematics, 279, 57-66.

Akgül, A., Aliyu, A. I., Inc, M., Yusuf, A. ve Baleanu, D., 2020, Approximate solutions to the conformable Rosenau-Hyman equation using the two-step Adomian decomposition method with Pad é approximation, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 43 (13), 7632-7639.

Aliyu, I. A., Inc, M., Yusuf, A. ve Baleanu, D., 2019, Adomian-Padé approximate solutions to the conformable nonlinear heat transfer equation, *Thermal Science*, 23 (Suppl. 1), 235-242.

Atangana, A., Baleanu, D. ve Alsaedi, A., 2015, New properties of conformable derivative, *Open Mathematics*, 13 (1).

Ayata, M. ve Ozkan, O., 2020, A new application of conformable Laplace decomposition method for fractional Newell-Whitehead-Segel equation, *AIMS Mathematics*, 5 (6), 7402-7412.

Ayata, M. ve Özkan, O., 2021, A new approach to mathematical models of Drinfeld-Sokolov-Wilson and coupled viscous Burgers' equations in water flow, *Physica Scripta*, 96 (9), 095207.

Baker, G. A., Baker Jr, G. A., Graves-Morris, P. ve Baker, S. S., 1996, Pade Approximants: Encyclopedia of Mathematics and It's Applications, Vol. 59 George A. Baker, Jr., Peter Graves-Morris, Cambridge University Press, p.

Bonnar, J., 2014, The gamma function, Applied Research Press.

Borhanifar, A. ve Valizadeh, S., 2015, Mittag-Leffler-Padé approximations for the numerical solution of space and time fractional diffusion equations, *International Journal of Applied Mathematical Research*, 4 (4), 466-480.

Cabannes, H., 1976, Couette flow for a gas with a discrete velocity distribution, *Journal of Fluid Mechanics*, 76 (2), 273-287.

Cansu-Kurt, Ü. ve Özkan, O., 2018, Exact solutions of some partial differential equations using the Modified Differential Transform Method, *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 42 (1), 89-96.

Caputo, M., 1967, Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent—II, *Geophysical Journal International*, 13 (5), 529-539.

Caputo, M. ve Mainardi, F., 1971, A new dissipation model based on memory mechanism, *Pure and applied Geophysics*, 91 (1), 134-147.

Djellouli, R., Farhat, C. ve Tezaur, R., 2001, A fast method for solving acoustic scattering problems in frequency bands, *Journal of Computational Physics*, 168 (2), 412-432.

Eltayeb, E., Ma, X., Zhuge, Y., Youssf, O., Mills, J. E. ve Xiao, J., 2020, Structural behaviour of composite panels made of profiled steel sheets and foam rubberised concrete under monotonic and cyclic shearing loads, *Thin-Walled Structures*, 151, 106726.

Eslami, M. ve Rezazadeh, H., 2016, The first integral method for Wu–Zhang system with conformable time-fractional derivative, *Calcolo*, 53 (3), 475-485.

Eslami, M. ve Taleghani, S., 2019, Differential transform method for conformable fractional partial differential equations, *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, 9 (2), 17-29.
George Jr, A., 1975, Essentials of Padé approximants, Elsevier, p.
Grunwald, A. K., 1867, Uber" begrente" Derivationen und deren Anwedung, *Zangew Math und Phys*, 12, 441-480.
Günerhan, H., Yiğider, M., Manafian, J. ve Ilhan, O. A., 2021, Numerical solution of fractional order logistic equations via conformable fractional differential transform method, *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, 24 (5), 1207-1220.
Hilfer, R., 2000, Applications of fractional calculus in physics. World Scientific, Singapore.
Islam, M. T., Akbar, M. A. ve Azad, M. A. K., 2018, Traveling wave solutions in closed form for some nonlinear fractional evolution equations related to conformable fractional derivative, *AIMS Mathematics*, 3 (4), 625-646.
Jensen, J. S. ve Sigmund, O., 2005, Topology optimization of photonic crystal structures: a high-bandwidth low-loss T-junction waveguide, *JOSA B*, 22 (6), 1191-1198.
Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. ve Sababheh, M., 2014, A new definition of fractional derivative, *Journal of computational and applied mathematics*, 264, 65-70.
Kurt, A., Tasbozan, O. ve Baleanu, D., 2017, New solutions for conformable fractional Nizhnik–Novikov–Veselov system via $$ G'/G $$ G′/G expansion method and homotopy analysis methods, *Optical and Quantum Electronics*, 49 (10), 1-16.
Ladrani, F. Z. ve Cherif, A. B., 2020, Oscillation tests for conformable fractional differential equations with damping, *Punjab University Journal of Mathematics*, 52 (2).
Lanti, E., Dominski, J., Brunner, S., McMillan, B. ve Villard, L., 2016, Padé approximation of the adiabatic electron contribution to the gyrokinetic quasi-neutrality equation in the ORB5 code, *Journal of physics: Conference series*, 012006.
Letnikov, A. V., 1868, Theory of differentiation with an arbtraly indicator, *Matem Sbornik*, 3, 1-68.
Li C., Qian D. ve Y., C., 2011, On Riemann-Liouville and Caputo Derivatives, 2011.
Liouville, J., 1832, Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions, p.
Masjuan, P. ve Sanz-Cillero, J. J., 2013, Pade approximants and resonance poles, *The European Physical Journal C*, 73 (10), 1-14.
Miller, K. S. ve Ross, B., 1993, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, Wiley, p.
Noor, M. A. ve Mohyud-Din, S. T., 2009, Homotopy perturbation method for solving Thomas-Fermi equation using Pade approximants, *International Journal of Nonlinear Science*, 8 (1), 27-31.
Podlubny, I., 2001, Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation, *arXiv preprint math/0110241*.
Podlubny I., 1998, , Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution andsome of their applications, Elsevier.
Qi, Y. ve Wang, X., 2020, Asymptotical stability analysis of conformable fractional systems, *Journal of Taibah University for Science*, 14 (1), 44-49.

Rakityansky, S., Sofianos, S. ve Elander, N., 2007, Pade approximation of the S-matrix as a way of locating quantum resonances and bound states, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 40 (49), 14857.

Riemann, B., 1876, Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation, *Gesammelte Werke*, 62 (1876).

Rosales-García, J., Andrade-Lucio, J. ve Shulika, O., 2020, Conformable derivative applied to experimental Newton's law of cooling, *Revista mexicana de física*, 66 (2), 224-227.

Ross, B., 1974, The development , theory and applıcatıons of the gamma function and a profile of fractional calculus New York University, p.

Samko, S. G., Kilbas, A. A. ve Marichev, O. I., 1993, Fractional integrals and derivatives, Gordon and breach science publishers, Yverdon Yverdon-les-Bains, Switzerland, p.

Thompson, I. J., 1988, Coupled reaction channels calculations in nuclear physics, *Computer Physics Reports*, 7 (4), 167-212.

Torabi Giklou, A., Ranjbar, M., Shafiee, M. ve Roomi, V., 2021, VIM-Pad´ e technique for solving nonlinear and delay initial value problems, *Computational Methods for Differential Equations*, 9 (3), 749-761.

Wazwaz, A.-M., 2002, Partial differential equations, CRC Press, p.

Webb, J. P., 2002, Design sensitivity of frequency response in 3-D finite-element analysis of microwave devices, *IEEE transactions on magnetics*, 38 (2), 1109-1112.

Weilbeer, M., 2005, Efficient numerical methods for fractional differential equations and their analytical, *Technischen Universität Braunschweig, Doktors Dissertation*, 1-224.

Westerlund, S., 1994, Causality, report no. 940426, *University of Kalmar*.

Yousif, E. A., Adam, A. M., Hassaballa, A. A. ve Nouh, M. I., 2021, Conformable fractional isothermal gas spheres, *New Astronomy*, 84, 101511.

Zhao, D. ve Luo, M., 2017, General conformable fractional derivative and its physical interpretation, *Calcolo*, 54 (3), 903-917.