TÜRKİYE CUMHURİYETİ
ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI

GENİŞLEYEN ŞEKİL ÖRÜNTÜLERİ TEMALI HAZIRLANAN BİR VARSAYIMSAL ÖĞRENME ROTASI İLE 7. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN FONKSİYONEL DÜŞÜNMELERİNİN GELİŞİMİNİN İNCELENMESİ

Burcu KULAÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ADANA / 2023

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI

GENİŞLEYEN ŞEKİL ÖRÜNTÜLERİ TEMALI HAZIRLANAN BİR VARSAYIMSAL ÖĞRENME ROTASI İLE 7. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN FONKSİYONEL DÜŞÜNMELERİNİN GELİŞİMİNİN İNCELENMESİ

Burcu KULAÇ

Danışman: Prof. Dr. Kamuran TARIM
Jüri Üyesi: Doç. Dr. Gülfem SARPKAYA
Jüri Üyesi: Doç. Dr. Semirhan GÖKÇE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ADANA / 2023

Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Müdürlüğüne;

Bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Kamuran TARIM
(Danışman)

Üye: Doç. Dr. Gülfem SARPKAYA

Üye: Doç. Dr. Semirhan GÖKÇE

ONAY
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim elemanlarına ait olduklarını onaylarım.
…/…/2023

Prof. Dr. Serap ÇABUK
Enstitü Müdürü

NOT: Bu tezde kullanılan ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu'ndaki hükümlere tabidir.

ETİK BEYANI

Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde ve ortaya çıkan sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim. …../……./2023

Burcu KULAÇ

“Cici Kızından”

Rahmetli Babam Yücel KULAÇ’A ithafen…

ÖZET

GENİŞLEYEN ŞEKİL ÖRÜNTÜLERİ TEMALI HAZIRLANAN BİR VARSAYIMSAL ÖĞRENME ROTASI İLE 7. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN FONKSİYONEL DÜŞÜNMELERİNİN GELİŞİMİNİN İNCELENMESİ

Burcu KULAÇ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Kamuran TARIM
Mayıs 2023, 129 Sayfa

Bu araştırmanın amacı, 7. Sınıf öğrencilerinin fonksiyonel düşünme gelişimini, genişleyen şekil örüntüleri temelinde hazırlanan varsayımsal öğrenme rotası ile incelemektir. Bu amaç doğrultusunda araştırmanın modeli Tasarı Araştırması olarak belirlenmiştir. Araştırma 2021-2022 eğitim öğretim yılı bahar döneminde Adana ilinin Seyhan İlçesinde merkezde bulunan bir ortaokulda 21 tane 7. sınıf öğrencisi ile beraber yürütülmüştür.

Fonksiyonel düşünme üzerine yapılan literatür taraması varsayımların oluşumuna, varsayımlara yönelik görevlerin ve etkinliklerin seçimine ışık tutmuştur. Yapılan literatür taramasında genişleyen şekil örüntülerinin fiziksel büyümesini analiz etmenin, öğrencilerin fonksiyonel düşünme gelişiminde etkili ve anlamlı bir ilerleme yolu olduğu görülmüştür. Bu bağlamda genişleyen şekil örüntüleri temelinde bir varsayımsal öğrenme rotası oluşturulmuş ve yedinci sınıf öğrencilerinin fonksiyonel ilişkileri anlamalarının nasıl geliştirilebileceğini belirlemek için bir dizi etkinlik planlanmıştır. Oluşturulan etkinlikler ile sınıf temelli ortamda 21 tane yedinci sınıf öğrencisiyle 4 hafta 8 ders saatinden oluşan öğretim deneyi yürütülmüştür.

Öğretim deneyi öncesi ve sonrasında araştırmacı tarafından geliştirilen 19 açık uçlu sorudan oluşan fonksiyonel düşünme testi öğretim deneyine katılan öğrencilere uygulanmıştır. Fonksiyonel düşünme testi nicel ve nitel olarak analiz edilerek öğretim deneyi öncesi ve sonrasında araştırmaya katılan 7. sınıf öğrencilerinin fonksiyonel düşünmelerinin gelişimi arasındaki fark incelenmiştir. Öğretim deneyi esnasındaki analizlerden ve geriye dönük analizlerden sonra, oluşturulan varsayımsal öğrenme rotası öğrencilerin gerçek öğrenmeleri ile karşılaştırılarak varsayımsal öğrenme rotası revize

edilmiştir. Verilerin analizi, öğrencilerin fonksiyonel düşünmesinin gelişimini yansıtmış, fonksiyonel düşünmelerinin genişleyen şekil örüntü görevleri ile nasıl ilerlediğini formüle ederek, fonksiyonel düşünme gelişimi için genişleyen şekil örüntüleri bağlamında yararlı bir öğretim etkinlikleri yapısı oluşturulmuştur.

Araştırma sonucunda, öğretim deneyi sonrasında öğrencilerin fonksiyonel düşünmelerinin geliştiği belirlenmiş ve genişleyen şekil örüntülerinin öğrencilerin fonksiyonel düşünme gelişiminde etkili bir bağlam olduğu görülmüştür. Varsayımsal öğrenme rotası ile öğrenci gerçek öğrenmeleri arasındaki uyumun analizi neticesinde 7. sınıf öğrencilerinin fonksiyonel düşünme gelişimi için faydalı bir yapı sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Fonksiyonel düşünme, varsayımsal öğrenme rotası, genişleyen şekil örüntüleri

ABSTRACT

A SURVEY OF 7TH GRADE STUDENTS' DEVELOPMENT OF FUNCTIONAL THINKING WITH A HYPOTHETICAL LEARNING TRAJECTORY ON THE THEME OF GROWING FIGURE PATTERNS

Burcu KULAÇ

Master Thesis, Department of Mathematics Education
Supervisor: Prof. Dr. Kamuran TARIM
May 2023, 129 pages

The aim of the research is to examine the functional thinking development of seventh grade students through a hypothetical learning trajectory based on growing figure patterns. In accordance with this aim, the model of the research was determined to be design-based research. The research was conducted with 21 seventh-grade students from a secondary school located in the center of Adana's Seyhan district in the spring semester of the 2021–2022 academic year.

The literature search on functional thinking shed light on the formation of assumptions and the selection of tasks and activities for the assumptions. In the literature review made, it was seen that analyzing the physical growth of growing figure patterns is an effective and significant way of improvement in students' functional thinking development. In this context, a hypothetical learning trajectory was designed on the basis of growing figure patterns, and a series of activities were planned to determine how seventh grade students' comprehension of functional relationships could be improved. A teaching experiment consisting of 8 lesson hours over 4 weeks was carried out with 21 seventh grade students in a classroom-based environment using the designed activities.

Before and after the teaching experiment, the functional thinking test developed by the researcher, consisting of 19 open-ended questions, was administered among the students participating in the teaching experiment. The difference between the development of functional thinking of the seventh grade students participating in the research before and after the teaching experiment was examined by analyzing the functional thinking test quantitatively and qualitatively. After the analysis during the teaching experiment and the retrospective analysis, the hypothetical learning trajectory

was compared to the actual learning of the students and it was revised.The analysis of the data revealed the development of students' functional thinking, and a useful structure of teaching activities was designed for the development of functional thinking in the context of growing figure patterns by formulating how the students' functional thinking improved with the growing figure pattern tasks.

As a result of the research, following the teaching experiment, it was determined that the functional thinking of the students improved, and it was seen that growing figure patterns are an effective context in the functional thinking development of students. A beneficial structure for the development of functional thinking in seventh grade students was presented as a result of an analysis of the congruence between the hypothetical learning trajectory and the student's actual learning.

Keywords: Functional thinking, hypothetical learning trajectory, growing figure patterns

ÖN SÖZ

Öncelikle, bu yolculukta bana rehberlik yapmasından onur duyduğum danışmanım Prof. Dr. Kamuran TARIM'a, bana böyle bir çalışma yapma fırsatı verdiği için, yüksek lisans eğitimime başladığım günden bu yana her fırsatta bilgi ve birikimlerini benimle paylaştığı için, yol göstericiliği, paha biçilmez desteği, sabrı ve geri bildirimleri için çok teşekkür ediyorum.

Yüksek lisans eğitimim boyunca, matematik eğitimi için bir vizyon doğrultusunda çalışmam, pratiğimi ve anlayışımı genişletmek için fırsatlar sunan ve daha fazla çalışmam için beni sürekli olarak teşvik eden değerli hocalarım Prof. Dr. Perihan ARTUT, Doç. Dr. Ayten Pınar BAL ve Dr. Öğr. Üyesi Mükerrem Akbulut TAŞ'a içtenlikle teşekkür etmek istiyorum.

Görüş ve önerileriyle tezime destek olan ve tezimde jüri üyeleri olan sayın Doç. Dr. Semirhan GÖKÇE ve Doç. Dr. Gülfem SARPKAYA'ya çok teşekkür ederim.

Araştırmamda geliştirdiğim ölçeğin pilot uygulamasını yapmamda bana destek veren sevgili arkadaşım Meryem Abdurrahim Gizer Ortaokulu Müdür Yardımcısı Ümit ÇELİK'e teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca araştırmamın uygulama sürecini sorunsuz şekilde tamamlamam için desteklerini esirgemeyen Şehit Metin Malkav Ortaokulu idarecisi Ali BÜYÜKCİĞER'e ve uygulama süreci boyunca matematik öğrenmeye yönelik deneyimlerini, bakış açılarını ve şevklerini paylaşma konusunda bu kadar açık oldukları için katılımcı öğrencilerime teşekkür ederim.

Varlığıyla bana hep umut olan dostum Elif ATEŞ'e her zaman yanımda olduğunu hissettirdiği için çok teşekkür ederim.

Tezi tamamlamada, ferdi olmaktan her zaman onur duyduğum değerli ailemin hakkı ödenemez. Bu süreçte benden desteğini ve sabrını hiç esirgemeyen, üstümde emeği paha biçilemez olan canım annem Fatma Nurcan Kulaç'a, her zaman yanımda olan sevgili kardeşim Alper KULAÇ'a sonsuz teşekkür ederim. Rahmetli babamın yokluğunu hissettirmeyen, her zaman babam gibi arkamda olan abim Ali Gökhan Kulaç'a ayrıca teşekkür eder ve şükranlarımı sunarım. Son olarak, varlıkları bana güç olan canım kızlarım İpek ve Ekin'e, küçük olmalarına rağmen bu süreçte beni bir yetişkin gibi anlayışla karşılamalarından dolayı tüm kalbimle teşekkür ederim.

Burcu KULAÇ

Adana / 2023

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET ..... **iv**
ABSTRACT ..... **vi**
ÖN SÖZ ..... **viii**
KISALTMALAR ..... **xii**
TABLOLAR LİSTESİ ..... **xiii**
ŞEKİLLER LİSTESİ ..... **xiv**
EKLER LİSTESİ ..... **xvii**

BÖLÜM I
GİRİŞ

1.1. Problem Durumu 1
1.2. Araştırmanın Amacı 3
1.3. Araştırmanın Önemi 4
1.4. Varsayımlar 5
1.5. Sınırlılıklar 6
1.6. Tanımlar 6

BÖLÜM II
KURAMSAL AÇIKLAMALAR VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

2.1. Kuramsal bilgiler 7
2.1.1. Cebirsel Düşünme 7
2.1.2. Fonksiyonel Düşünme 8
2.1.2.1. Fonksiyonel Düşünmede Özyinelemeli, Kovaryans ve Birebir Eşleme Yaklaşımları 9
2.1.2.2. Fonksiyonel Düşünme Düzeyleri 11
2.1.3. Genişleyen Şekil Örüntüleri 14
2.1.4. Genelleme 14
2.1.5. Varsayımsal Öğrenme Rotası 15
2.2. İlgili Araştırmalar 18

2.2.1. Fonksiyonel Düşünmede Yurt İçinde Yapılan Araştırmalar 18
2.2.2. Fonksiyonel Düşünmede Yurt Dışında Yapılan Araştırmalar 20

BÖLÜM III
YÖNTEM

3.1. Araştırmanın Modeli 23
3.1.1. Tasarı Araştırması 23
3.1.1.1. Hazırlık ve Tasarım 24
3.1.1.2. Öğretim Deneyi 24
3.1.1.3. Geriye Dönük Analizler 25
3.2. Araştırma Ortamı ve Katılımcılar 26
3.3. Veri Toplama 28
3.4. Veri Toplama Araçları 28
3.4.1. Öğrenci Bireysel ve Grup Çalışma Kağıtları 28
3.4.2. Öğretmen Günlüğü 28
3.4.3. Araştırmacı Öğretmen ile Gözlemci Öğretmenin Her Ders Sonrası Notları . 29
3.4.4. Fonksiyonel Düşünme Testi (FDT) 29
3.5. Veri Analizi 31
3.5.1. Nicel Veri Analizi 32
3.5.2. Nitel Veri Analizi 33
3.6. Geçerlilik ve Güvenilirlik 38
3.6.1. Öğrenme Hedefi ve Varsayımsal Öğrenme İlerlemesi 41
3.6.2. Varsayımsal Öğrenme Rotası İle İlgili Açıklamalar 46

BÖLÜM IV
BULGULAR

4.1. Öğretim Deneyi Öncesi ve Sonrasında Uygulanan Fonksiyonel Düşünme Testine Ait Bulgular 55
4.1.1. Öğretim Deneyi Öncesi ve Sonrasında Uygulanan Fonksiyonel Düşünme Testine Ait Nicel Bulgular 55
4.1.2. Öğretim Deneyi Öncesi ve Sonrasında Uygulanan Fonksiyonel Düşünme Testine Ait Nitel Bulgular 58

4.2. Öğretim Deneyine Ait Bulgular 61
4.2.1. Genişleyen Şekil Örüntüsünün Genişlemesinin Farklı Yollarını Keşfederek Genişlemeyi Tanımlama, İfade Etme ve Sayısal İfadeye Çevirme 62
4.2.2. Genişleyen Şekil örüntüsünün Fiziksel Yapısını Temsil Eden Sayısal ifade Oluşturma ve Bu İfadeleri Üç Sütunlu Tabloda Gösterme 70
4.2.3. Üç Sütunlu Tablodaki Örüntüleri Keşfederek Adım Numarası İle Genişleyen Şekil Örüntüsünün Ölçülebilir Bir Yönü Arasındaki İlişkiyi Fonksiyonel İlişkiye Genelleme 77
4.2.4. Doğrusal Fonksiyonun Kuralını Değişkenlerle İfade Etme 83
4.3. Varsayımsal Öğrenme Rotası İle Öğrencilerin Gerçek Öğrenmelerinin Karşılaştırılması 93
4.4. Revize Edilmiş Varsayımsal Öğrenme Rotası 95

BÖLÜM V
SONUÇLAR, SINIRLILIKLAR VE ÖNERİLER

5.1. Tartışma ve Sonuçlar 100
5.2. Sınırlılıklar 104
5.3. Öneriler 105

KAYNAKÇA 107
EKLER 113

KISALTMALAR

FDT: Fonksiyonel Düşünme Testi

MEB: Milli Eğitim Bakanlığı

NCTM: National Council of Teachers of Mathematics

SPSS: Statistical Package for the Social Sciences

TABLOLAR LİSTESİ

Sayfa

Tablo 1. Fonksiyonel Düşünmede Özyinelemeli, Kovarysayon ve Birebir eşleme Yaklaşımları 11
Tablo 2. Varsayımsal Öğrenme Rotasının Tasarı Araştırmasının Aşamalarındaki Konumu 26
Tablo 3. Ön Test Sonucunda Oluşan Performans Grupları ve Öğrenci İsim Kodları 27
Tablo 4. Ön Test ve Son Test Puanları Shapiro Wilk Test Sonuçları 32
Tablo 5. 17. Soru için Kodlama Örneği 34
Tablo 6. Pilot uygulama, Ön ve Son Test Fonksiyonel Düşünme Testi Cronbach's Alfa Katsayısı Değerleri 39
Tablo 7. Pilot Uygulama Soru Bazında Kodlayıcılar Arası Uyum Yüzdeleri 40
Tablo 8. Varsayımsal Öğrenme Rotası 44
Tablo 9. Ön Test ve Son Test Betimsel İstatistik Değerleri 56
Tablo 10. Ön test ve Son Test Ortalama Puanlarının Karşılaştırılmasına İlişkin Wilcoxon İşaretli Sıralar Testi Sonuçları 57
Tablo 11. Sınır Problemi Üç Sütunlu Tablo 84
Tablo 12. Sınır Problemi Değişken İçeren Üç Sütunlu Tablo 85
Tablo 13. Revize Edilmiş Varsayımsal Öğrenme Rotası 97

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1. Stephens vd. (2017) tarafından oluşturulan fonksiyonel düşünme düzeyleri ... 13
Şekil 2. Matematik öğretim döngüsü ve varsayımsal öğrenme rotası ... 17
Şekil 3. Testteki 2 ve 3. soruların revize öncesi ifadeleri ... 31
Şekil 4. Fonksiyonel Düşünme Testi 8. sorunun revize öncesi ifadesi ... 31
Şekil 5. Noktalı W örüntüsü genişlemesini görme yolu 1 ... 47
Şekil 6. Noktalı W örüntüsü genişlemesinin görme yolu 2 ... 47
Şekil 7. Büyüyen sandalye örüntüsü genişlemesinin görme yolu 1 ... 48
Şekil 8. Büyüyen sandalye genişlemesi görme yolu 2 ... 48
Şekil 9. Çiçek kolye örüntüsü sayma yolu 1 ... 49
Şekil 10. Çiçek kolye örüntüsü sayma yolu 2 ... 50
Şekil 11. Sınır problemi sayma yolu 1 ... 51
Şekil 12. Sınır problemi görme yolu 2 ... 52
Şekil 13. Sınır problemi sayma yolu 3 ... 52
Şekil 14. Masa örüntüsü sayma yolu 1 ... 53
Şekil 15. Masa örüntüsü sayma yolu 2 ... 54
Şekil 16. Masa örüntüsü görme yolu 2 devamı ... 54
Şekil 17. Öğrencilerin ön test ve son test dağılım grafiği ... 56
Şekil 18. Fonksiyonel düşünme testi 8. soru öğrenci cevapları fonksiyonel düşünme düzeylerine göre sınıflandırılma grafiği ... 58
Şekil 19. Fonksiyonel düşünme testi 17. soru öğrencilerin cevapları fonksiyonel düşünme düzeylerine göre sınıflandırılması grafiği ... 59
Şekil 20. Fonksiyonel düşünme testi 17. soru öğrencilerin cevapları fonksiyonel düşünme düzeylerine göre sınıflandırılması grafiği ... 60
Şekil 21. Ö11(EO)'in ön testte 'Diğer' ve son testte D8 düzeyindeki cevabı ... 61
Şekil 22. Ö6 (KO) büyüyen sandalye örüntüsü görme yolu ... 63
Şekil 23. Ö5(KY) büyüyen sandalye örüntüsüne ait görme yolu ... 64
Şekil 24. Ö10(KY) büyüyen sandalye örüntüsüne ait görme yolu ... 65
Şekil 25. Ö17(EO) büyüyen sandalye örüntüsü görme yolu ... 66
Şekil 26. Ö4(ED) büyüyen sandalye örüntüsü görme yolu ... 67
Şekil 27. Ö15(EY) noktalı W örüntüsü görme yolu ... 67
Şekil 28. Ö11(EO)'in noktalı W örüntüsü görme yolu ... 68

Şekil 29. Ö16(ED) noktalı W örüntüsü görme yolu 68
Şekil 30. Ö3(ED) noktalı W örüntüsü görme yolu 69
Şekil 31. Ö14(EO)'ün 8 çiçekli kolye yapımında gerekli beyaz boncuk sayısı sayma biçimi 71
Şekil 32. Ö14(EO) oluşturduğu sayısal ifadeler üç sütunlu tabloda gösterimi 71
Şekil 33. Ö9(KY), 8 çiçekli kolye beyaz boncuk sayısı sayma biçimi ve üç sütunlu tablo 72
Şekil 34. Ö5(KY), 8 çiçekli kolye yapımında gerekli beyaz boncuk sayısı sayma biçimi 73
Şekil 35. Ö5(KY) çiçek kolye yapımı üç sütunlu tablo 73
Şekil 36. Ö16(ED) çiçek kolye yapımı üç sütunlu tablo 75
Şekil 37. *Ö13(KY) çiçek kolye örüntüsü sayma biçimi ve üç sütunlu tablo* 75
Şekil 38. Ö13(KY) sınır problemine ait üç sütunlu tablo ve fonksiyonel ilişki tanımlaması 79
Şekil 39. Ö14(EO)'ün sınır problemine ait üç sütunlu tablo ve fonksiyonel ilişki tanımlaması 79
Şekil 40. Ö17(EO) sınır problemine ait üç sütunlu tablo 80
Şekil 41. Ö7 (ED) sınır problemine ait üç sütunlu tablo ve fonksiyonel ilişki tanımlaması 80
Şekil 42. Ö9(KY) sınır problemine ait üç sütunlu tablo ve fonksiyonel ilişki tanımlaması 81
Şekil 43. Ö8(KD) sınır problemine ait üç sütunlu tablo 81
Şekil 44. Ö1(KD) sınır problemine ait üç sütunlu tablo 82
Şekil 45. Sınır problemi sayma yolu 84
Şekil 46. Ö14(EO) üç sütunlu tablo ve örüntüye ilişkin fonksiyon kuralı 86
Şekil 47. Ö18(EO) üç sütunlu tablo ve örüntüye ilişkin fonksiyon kuralı 87
Şekil 48. Ö11(EO) üç sütunlu tablo ve örüntüye ilişkin fonksiyon kuralı 87
Şekil 49. Ö5(KY) üç sütunlu tablo ve örüntüye ilişkin fonksiyon kuralı 88
Şekil 50. Ö1(KD)9 üç sütunlu tablo ve örüntüye ilişkin fonksiyon kuralı 88
Şekil 51. Ö13(KY) üç sütunlu tablo ve örüntüye ilişkin fonksiyon kuralı 89
Şekil 52. Ö6(KO) üç sütunlu tablo ve örüntüye ilişkin fonksiyon kuralı 89
Şekil 53. Ö19(KD) üç sütunlu tablo ve örüntüye ilişkin fonksiyon kuralı 90
Şekil 54. Ö16(ED) üç sütunlu tablo ve örüntüye ilişkin fonksiyon kuralı 90
Şekil 55. Ö3(ED) masa örüntüsü sayısal ifade 91

Şekil 56. Bağımlı değişkenin temsili ile ilgili zıt iki çalışma örneği..... 92

EKLER LİSTESİ

Ek 1. Fonksiyonel Düşünme Testi 113
Ek 2. Fonksiyonel Düşünme Testi Puanlama Rubriği 117
Ek 3. Fonksiyonel Düşünme Düzeyleri 120
Ek 4. Öğretim Etkinlikleri ve Görevleri 122
Ek 5. MEB İzin Belgesi 129

BÖLÜM I

GİRİŞ

1.1. Problem Durumu

Ross (1998), "Öğrencide muhakeme yeteneği gelişmemişse, o zaman matematik dersi bir dizi prosedürü takip etme ve ilişkilerin neden anlamlı olduklarını düşünmeden taklit etme durumu haline gelir" şeklinde ifade ederek matematiksel muhakeme geliştirilmesinin önemine dikkat çekmiştir. The National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000), analitik olarak akıl yürüten ve düşünen insanların, hem gerçek dünyadaki hem de matematiksel durumlarda örüntüleri, yapıları veya düzenlilikleri keşfetme eğiliminde olarak fikirlerini genelleştirebileceklerini ve gerekçelendirebileceklerini ve gerekçelerinin gerçekliğine dair iyi kanıtlar üretebileceklerini ifade etmektedir. Öğrenciler bu tür becerileri geliştirdiğinde, matematiğin anlamlı olduğunu görürler ve bu becerileri diğer alanlara transfer edebilirler. Öğrencilerin bu tür becerilerle donanımlı olarak yetişmesini sağlamak amacıyla matematiğin farklı alanlarında reform yapılması gerekliliği ortaya çıkmıştır. Matematik reformuna duyulan ihtiyacı kabul eden NCTM (2000), akıl yürütme, problem çözme, fikirlerini iletme ve kanıt kullanma yeteneğine sahip öğrenciler geliştirmek amacıyla anaokulundan başlayarak tüm sınıf seviyelerinde merkezde cebirsel düşünme gelişimi olan bir cebir öğretimini savunmaktadır.

21. yy'da cebir, öğrencilerin matematiksel ilerlemesi için kritik olarak kabul edilerek, akademik ve profesyonel başarıya açılan bir fırsat olarak nitelendirilmektedir. (Blanton vd. , 2018; Knuth vd. , 2016). Ancak, birçok öğrenci için cebirdeki başarısızlıktan dolayı cebir fırsatlara açılan bir fırsat değil, öğrencilerin önünde bir engel olarak karşımıza çıkmaktadır. Geleneksel matematik eğitiminde cebir, ilkokul düzeyinde belirli aritmetik işlemlerin sonucuna, ortaokul düzeyinde ise sembolik gösterimlerin ezber uygulamasına odaklanmaktadır. Geleneksel cebir öğretimindeki cebir başarısızlığı, öğrencilerin ilkokuldaki ağırlıklı olan sonuç odaklı aritmetik işlemlerden, ortaokuldaki soyut sembolik dile geçişte oluşmaktadır (Sfard, 1991). Akkan vd. (2011), aritmetik ile cebirin soyut sembolik yapısı arasındaki boşluğa köprü olması için işlemlerin sonuçlarından ve sembollerin gösterimlerinden ziyade matematiksel kavramlar ve yapılar arasındaki ilişkilere odaklanılan cebirsel düşünme gelişiminin desteklenmesi gerektiğini vurgulamaktadır. Modern matematik eğitiminde cebir alanı için kullanılan cebirsel

düşünme, öğrencilerin matematiksel düşünmelerini, belirli sayısal işlemlerin sonucundan ve sembolizmin ezber uygulamalarından daha ileriye götüren bir düşünme biçimi olarak düşünülmektedir (Kieran, 1992; Stacey ve MacGregor, 2000; Kabael ve Tanışlı, 2010).

Matematik eğitimindeki müfredat tasarımında öğrencilerin cebirsel düşünmelerinin gelişimini destekleyecek görev ve uygulamaların kullanılması önemlidir. Son yirmi yılda cebir alanında cebirsel düşünmenin geliştirilmesi matematik eğitiminde ön plana çıkan bir ihtiyaç olmuştur (Blanton ve diğerleri, 2015; Kaput, 2017). Bu düşünce NCTM (2000, 2006, 2010) tarafından "cebirsel düşünme K-12 müfredatının ayrılmaz bir parçasıdır ve anaokulundan başlayarak cebirsel düşünme geliştirmek matematik müfredatının önemli temalarındandır" şeklinde ifade edilerek desteklenmiş ve erken cebirin önemi vurgulanmıştır. Cebirsel düşünme, nicel ilişkileri temsil etmek ve analiz etmek, durumları modellemek, genellemeleri belirtmek için gerekli dili ve araçları sağlayarak çoğu matematiksel çabanın temeli olarak görülmektedir (RAND, 2003, s. 44). Cebirsel düşünmede sağlam bir temel olmadan, öğrenciler matematiğin diğer alanlarında veya gerçek dünyanın birçok alanında başarılı olmak için gerekli donanıma sahip değildir.

Cebirsel düşünmenin gelişimini merkeze alan erken cebir ile ilgili araştırmalar, aritmetiğin genelleştirilmesi ve fonksiyonel düşünmenin geliştirilmesi olmak üzere iki ana alana ayrılır. Aritmetiğin genelleştirilmesi, ilkokul düzeyinde öğrencilerin gerçek sayıların özelliklerini keşfetmelerini, bilinmeyen niceliklerle çalışmalarını ve fikirlerini ifade etmek için sembolik dil kullanmalarını sağlayacak yapılandırma etkinliklerini içerir (Blanton, 2008; Kaput, 2008). Cebirsel düşünmenin bir diğer önemli odak noktası ise, öğrencilerin fonksiyonel düşünme yeteneklerini geliştirmektir. Blanton vd. (2018), cebirsel düşünmenin gelişiminde kritik bir parça olarak, iki değişken arasındaki ilişkiyi genelleme ve bu genellemelerle ilişkiyi temsil etme, gerekçelendirme ve akıl yürütme dahil olmak üzere fonksiyonel düşünmeyi keşfetmek olduğunu vurgulamıştır. Fonksiyonel düşünme, cebirsel düşünmenin öğrencilerin üst düzey matematikteki başarısı için kritik olan bir yönüdür (Brizuela ve Lara-Roth, 2002; Warren, 2005). Bu tür düşünme, iki veya daha fazla değişken arasındaki ilişkiyi ele alır ve özellikle, belirli niceliklerden ilişkilerin genelleştirilmesine kadar uzanan düşünme biçimlerini içerir (Smith, 2008). Cebirsel düşünmenin gelişiminde temel kabul edilen fonksiyonel düşünmeyi geliştirmek için eğitimcilerin, öğrencileri nicelikler arasındaki ilişkiler hakkında akıl yürütmelerine ve genellemeler yapmalarına izin veren görevlerle meşgul ederek sürece erken başlaması gereklidir (Blanton ve Kaput, 2005; Confrey ve Smith, 1994; Warren, 2005). Kaput (1995), matematik başarısının göstergesi olarak cebirin

merkezinde fonksiyonel düşünme olduğunu ifade etmiştir. Bozkurt ve diğerleri (2020), matematik başarısı bakımından uluslararası sınavlarda üst sıralarda bulunan Singapur ile alt sıralarda bulunan Türkiye'nin cebir başarısını karşılaştırdıkları araştırmalarında, Singapur'un, cebirsel düşünmeyi temsil eden üst düzey bilişsel becerileri müfredata daha fazla yerleştirdiğini bulmuşlardır. Bozkurt ve diğerleri (2020), Singapur'un cebir başarısında en büyük etken olarak, özellikle fonksiyonel düşünme becerisi ve fonksiyon kavramı ile öğrencilerin erken yaşlarda deneyime girmesi olduğunu ifade etmektedir.

Fonksiyonel düşünmeyi geliştirmek için yaygın olarak genişleyen şekil örüntüleri kullanılır. Çünkü bu örüntüler, öğrencilerin bir örüntünün altında yatan matematiksel yapıya odaklanması ve genellemeyi keşfetmesi için bir araç sağlar (Beatty, 2014; Markworth, 2012; Wilkie, 2016). Bununla birlikte, genişleyen şekil örüntüleri, tüm öğrencilere fonksiyonel düşünmelerini geliştirme yönünde fırsatlar sağlamaktadır (Beatty, 2014; Markworth, 2010).

Cebirsel düşünme için fonksiyonel düşünmenin önemi, cebir öğretimini bir fonksiyon yaklaşımı etrafında düzenlemenin gerekliliği ve daha fazla matematiksel ve bilimsel araştırma için fonksiyonel düşünmenin derinlemesine anlaşılmasına duyulan ihtiyaç hakkındaki fikir birliği göz önüne alındığında, öğrencilere, fonksiyonel ilişkileri derinlemesine anlamaları için yardım etmenin yollarını geliştirmemiz önemlidir (Ellis, 2011). Bu bağlamda uluslararası sınavlarda cebir başarısında alt sıralarda bulunan Türkiye'nin, cebir müfredatında öğrencilerin cebirsel düşünmeleri becerilerini geliştirmek için fonksiyonel düşünme becerisiyle karşılaşacakları öğrenme ortamları ve görevlerinin gerekli görülmüştür. Genişleyen şekil örüntüleri, öğrencilerin fonksiyonel düşünme gelişimini desteklemek için ideal kılan özelliklere sahiptir. Çünkü genişleyen şekil örüntü modellerinin, öğrencileri düşünmelerini örüntü modelindeki yapıya odaklamaya, bu yapının parçalarını adım numarasıyla ilişkilendirmeye ve bunları kavramsal olarak fonksiyonel ilişkileri genellemeye ilerleteceği düşünülmektedir.

1.2. Araştırmanın Amacı

Mevcut araştırmanın amacı genişleyen şekil örüntüleri temelinde hazırlanacak varsayımsal öğrenme rotasının 7. sınıf öğrencilerinin fonksiyonel düşünme becerisine etkisini incelemektedir. Amaç doğrultusunda araştırmanın problemleri şu şekildedir:

1. Genişleyen şekil örüntüleri temalı hazırlanan varsayımsal öğrenme rotası 7. sınıf öğrencilerin fonksiyonel düşünme becerilerini nasıl etkilemektedir?
2. Varsayımsal öğrenme rotası, öğrencilerin gerçek öğrenme rotasını yansıtmakta mıdır?

1.3. Araştırmanın Önemi

Matematik öğretimi anlayışı geliştikçe cebirin kapsamı genişlemiş ve cebir öğretimi anlayışı değişmiştir. Cebirsel düşünmenin ana bağlamları, NCTM, (2000) tarafından Cebir Standartları başlığı altında; örüntüleri, ilişkileri ve işlevleri anlamak, cebirsel sembolleri kullanarak matematiksel durumları ve yapıları temsil etme ve analiz etmek, nicel ilişkileri temsil etmek ve anlamak için matematiksel modeller kullanmak ve çeşitli bağlamlardaki değişimi analiz etmek olarak ele alınmıştır. Bu bağlamlar, cebirsel düşünmenin, fonksiyonel düşünme teması olarak ele alınması gerekliliğini göstermektedir. Ayrıca cebir öğretimi ile ilgili güncel araştırmalara bakıldığında, öğrencilerde erken cebir anlayışı geliştirilmesinde fonksiyonel düşünmenin rolü tanımlanmaktadır.

Smith (2008), fonksiyonel düşünmeyi "iki veya daha fazla değişen nicelik arasındaki ilişkiye odaklanan temsili düşünme" olarak ifade etmiştir. Birçok araştırmacı tarafından, öğrencilerin erken sınıflarda fonksiyonel düşünme becerisi ile karşılaşmasının önemli olduğu vurgulanmaktadır. Ayrıca, liseden önce öğrencilerin fonksiyonel düşünmeyi deneyimlemesi, lisedeki fonksiyon kavramını geçmeden önce öğrencilerin fonksiyon kavramına yönelik sezgisel bir anlayış kazanmasını sağlayacaktır.

Kaput (2018), öğrencilerde cebirsel düşünmenin, belirli görevler etrafındaki tahmin ve tartışma sürecinde, matematiksel yapıların ilişkisel analiziyle genellemeler yaparak ortaya çıktığını savunmaktadır. Bu nedenle, öğrencilerin fonksiyonel düşünme becerilerini geliştirmeleri, öğretmenlerin bu düşünmeyi teşvik etmedeki başarısına bağlıdır. Bunun için fonksiyonel düşünme becerisini geliştirecek belirli görevlerden oluşan bir öğretim dizisi hazırlama süreci önemli görülmektedir. Genişleyen şekil örüntülerinin, örüntünün yapısal analizi ile fonksiyonel düşüncenin gelişimi arasında köprü olan etkili bir araç olarak tanımlanması, fonksiyonel düşünmenin gelişimini hedef edinen bu araştırma için etkinliklerin tasarımı ve özellikleri hakkında bilgi sağlamıştır.

Fonksiyonel düşünme, cebir alanının önemli bir yönünü oluşturmaktadır ve bu bağlamda NCTM (2000), öğrencilerin cebirsel düşünmelerini desteklemek için

fonksiyonel düşünmeye erken girişin önemini vurgulamaktadır. Fonksiyonel düşünme, iki veya daha fazla değişen nicelik arasındaki ilişkileri genellemeyi, bu ilişkileri kelimeler, semboller, tablolar veya grafikler gibi çeşitli şekilde temsil etmeyi, gerekçelendirmeyi ve bu genelleştirilmiş temsillerle akıl yürütmeyi gerektirir (Blanton vd., 2015; Stephens ve diğerleri, 2017). Ayrıca, erken dönemde nicelikler arasındaki fonksiyonel ilişkilerle ilgili deneyim yaşayıp fonksiyon kavramına ön sezgisel bir bakış açısı kazanmak, ileri düzey matematik derslerinde başarılı bir fonksiyon anlayışına sahip olmak için anahtar koşuldur. Genişleyen şekil örüntüleri, öğrencilerin bir örüntünün içerisinde yer alan matematiksel yapıya odaklanmasında , ilişkileri analiz etmesi ve yapıda yer alan ilişkileri genellemeyi keşfetmesi için önemli bir araç kabul edildiğinden, bu çalışmada fonksiyonel düşünmeyi geliştirmek için öğretim aracı olarak kabul edilmiştir. İlk olarak, bu çalışma fonksiyonel düşünmenin gelişimine dayalı varsayımsal bir öğrenme rotası oluşturup, bu rotanın öğrenci öğrenmeleriyle uyumunu test edip, uzun vadede öğrencilerin öğrenmelerinin zaman içinde ilerlemesinin ortaya çıkararak literatüre rehberlik etme özelliğine sahiptir. Bunun yanında, geliştirilen rota derslerin hedefine göre tam olarak yapılsa da, süreç içinde bazı sorunlarla karşılaşmak mümkündür. Bu doğrultuda bu çalışma, sistematik bir öğrenme ortamında fonksiyonel düşünmenin gelişimine yönelik tasarlanan görev ve sınıf içi uygulamaları belirleyip analiz ederek ilgili literatüre katkı sağlama özelliğine sahiptir. Ayrıca, bu çalışma öğrencilerin fonksiyonel düşünmesini geliştirmelerine yardımcı olan görevlerin özelliklerini araştırarak cebirsel düşünmedeki bilimsel araştırmalara katkıda bulunur. Son olarak, ortaokulda fonksiyonel düşüncenin gelişimine yönelik etkili öğretmen uygulamalarını destekler ve bilgilendirir.

1.4. Varsayımlar

1. Araştırmada tüm katılımcıların aynı düzeyde motive olduğu ve tüm katılımcıların çalışmalarında birbirlerini etkilemediği varsayılmıştır.
2. Araştırmada öğrencilerin fonksiyonel düşünme testini ölçen ön ve son testi içtenlikle cevaplayacakları varsayılmıştır.
3. Araştırmada araştırmacının, veri toplama araçları ile veri toplama sürecinde yanlı davranmadığı varsayılmıştır.

1.5. Sınırlılıklar

1. Araştırma 2021-2022 öğretim yılında Adana ili merkz Seyhan ilçesinde bulunan bir ortaokulda 7. Sınıf düzeyinde öğrenim gören 21 öğrenci ile sınırlıdır.
2. Araştırma, araştırmacı tarafından geliştirilen ölçme aracı ile sınırlıdır.
3. Uygulama sürecinde çıkan matematiksel fikirler ve öğrenme ilerlemeleri katılımcıların isteklilik düzeyleriyle sınırlıdır.

1.6. Tanımlar

Fonksiyonel Düşünme: İki değişen nicelik arasındaki ilişkiye, özellikle de belirli ilişkilerden bu ilişkinin örnekler arasında genelleştirilmesine yol açan düşünme türleri arasındaki ilişkiye odaklanan temsili düşünme (Smith, 2008).

Genelleme: Örüntülerdeki belirli örnekler arasındaki ortak noktaların açıkça tanımlanması ve açığa çıkarılması yoluyla düşünmenin artık belirli örneklerden, yapılara ve bunların arasındaki ve içindeki ilişkilere odaklanacağı bir düzeye çıkarılması (Ellis, 2007).

Varsayımsal Öğrenme Rotası: "Öğrenme hedefi", "öğrenme etkinlikleri" ve "varsayımsal öğrenme süreci" olarak üç bileşenden oluşan öğrencilerin düşünme ve anlamalarının öğrenme etkinlikleri bağlamında nasıl gelişeceğine dair tahmini yol haritasıdır (Simon, 1995).

BÖLÜM II

KURAMSAL AÇIKLAMALAR VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Bu bölümde, araştırmanın konusu ile ilgili kuramsal bilgiye ve bu alanda yapılmış olan ilgili araştırmalara yer verilmiştir.

2.1. Kuramsal bilgiler

2.1.1. Cebirsel Düşünme

Cebir reformuna yönelik, ilkokul ve ortaokul matematik öğretimi, tüm öğrencileri, cebir içeren ortaokul ve lise matematik programlarına hazırlamaya daha fazla odaklanmalıdır (Blanton vd. , 2018). Bu araştırmaların ortak kabulü olan "erken cebir" olarak adlandırılan cebirsel düşünme, öğrencileri cebirde başarılı kılmak için gerekli olan düşünme becerileriyle hazırlayacak matematik öğretiminde genel bir ifade haline gelmiştir. Cebirsel düşünme, Blanton vd. (2018) tarafından matematiksel ilişkilerin inşa edilmesi, ifade edilmesi ve gerekçelendirilmesi, öğrencilerin matematiksel yapıların ve ilişkilerin anlamlarını oluşturmalarına izin vermek olarak tanımlanmaktadır.

Cebirsel düşünme, genelleştirilmiş aritmetik, bir dil olarak cebir, fonksiyonlar ve matematiksel modelleme için bir araç olarak cebir olmak üzere üç odağa ayrılmıştır (Kriegler vd. ,2007). Cebirsel düşünmenin merkezinde yer alan bu üç nokta, öğrencilerin ileri dönemlerde karşılaşacağı soyut ve sembolik cebire yönelik ön hazırlık sağlamaya yönelik somut bağlamlarla çalışmayı temsil etmektedir.

Kaput (2008) ise, cebirsel düşünmenin, genelleştirilmiş aritmetik ve nicel akıl yürütme olarak cebir, fonksiyonların, ilişkilerin incelenmesi olarak cebir ve matematiksel modelleme olarak cebir olarak üç farklı mercek altında incelendiğini öne sürmektedir. Blanton vd. (2015), Kaput'un cebirsel düşünme çerçevesini analiz ederek cebirsel düşünmeyi, "Beş Büyük Fikir" adı altında değişken, denklemler ve eşitsizlikler, genelleştirilmiş aritmetik, fonksiyonel düşünme, orantısal akıl yürütme olarak kategorize etmiştir.

Görüldüğü üzere cebirsel düşünme, cebirin birçok kavramını kapsarken, bunların içinde yer alan ve bu çalışmanın ana temasını oluşturan fonksiyonel düşünme cebirsel düşünmenin kritik bir bileşenidir. Çünkü fonksiyonel düşünme, cebirsel düşünmenin, öğrenciler için üst düzey ve soyut matematiğe geçişte köprü olan yönüdür. Ayrıca

fonksiyonel düşünme merkezli cebirsel düşünme, cebirin gerçek hayat kullanımını temsil etmektedir. Fonksiyonel düşünme, cebirsel içeriklerden olan gerçek hayat bağlamlarında örüntülerin kurallarını bulmaya çalışma, ifade etme ve genelleme, tablo ve grafikler kullanarak matematiksel fikirleri temsil etme, girdi- çıktı tablosu, koordinat sistemi ve grafikler ile çalışma için uygun bağlamları temsil etmektedir.

2.1.2. Fonksiyonel Düşünme

Fonksiyonel düşünme, cebir öğretiminin merkezinde yer alması gereken öğrencilerin sahip olması gereken önemli bir yeterliliktir. Birçok araştırmacı (Blanton vd. ,2015; Stephens vd. ,2017; Wilkie, 2014) cebirde ezber sembolizm olarak odaklanan geleneksel cebir öğretimi yaklaşımının aksine ilişkiler arası fonksiyonel bakış açısının önemini vurgulamaktadır. Fonksiyonel düşünme, cebirsel düşünme anlayışı geliştirmek için önemli ve etkili bir giriş noktasıdır. Çünkü fonksiyonel ilişkiler tüm matematiğin içinde vardır ve matematiksel gelişimin çok önemli bir parçasıdır (Blanton vd. , 2018; Kaput, 2017; Kieran vd. , 2016). Fonksiyonel düşünme, niceliklerin birbirleriyle nasıl ilişkili olduğuna dair bir genelleme yapmayı temel aldığından, cebirsel düşünmenin temelidir (Tanışlı, 2011). Bir fonksiyon, verilen herhangi bir giriş değerine karşılık gelen bir çıktı değeri olacak şekilde iki nicelik arasındaki ilişki olarak tanımlanmaktadır. Yani fonksiyonel düşünme, birbirine bağlı nicelikler arasındaki ilişkiyi ifade ederken kullanılan genellenmiş düşünme sürecidir. Smith (2008), fonksiyonel düşünmeyi, öğrencilerin temsili düşünmeye özellikle birbirine göre değişen iki nicelik arasındaki ilişkiye odaklanması olarak tanımlamıştır. Öğrencilerin fonksiyonel düşünme geliştirmeleri için öncelikle niceliklerin birbirine göre nasıl değiştiğini anlamaları önemlidir (NCTM, 2000). Başka bir deyişle, miktarların hangi şekillerde değiştiğini fark edebilmeleri gerekir. Fonksiyonel düşünme, iki veya daha fazla değişken nicelik arasındaki ilişkileri genellemeyi, bu ilişkileri kelimeler, semboller, tablolar veya grafikler gibi çeşitli yollarla temsil etmeyi, doğrulamayı ve bu genelleştirilmiş temsillerle akıl yürütmeyi gerektirir (Blanton ve ark. , 2015; Stephens ve diğerleri, 2017; Wilkie ve Clarke, 2015). Buna örnek olarak, doğrusal bir örüntü dizisi üretmek ve bunları bir tabloda düzenlemek, örüntüleri ve örüntülerin kurallarını belirlemek, bunları kelimelerle açıklamak veya değişkenleri kullanmak, örüntünün uzak fonksiyonel değerlerini ifade etmek için bir fonksiyonel kuralı kullanmak verilebilir.

Smith (2008)'e göre, öğrencilerin fonksiyonu sezgisel olarak anlamaları, ileri düzey fonksiyonlara geçiş yapmadan önce gelişmeye başlar. Blanton ve Kaput (2004)'e göre öğretmenler, örüntüleri bulma ve genelleme gibi belirli görevleri kullanarak öğrencilerin fonksiyonel düşünmelerini geliştirmelerine destek olabilirler. Bu anlamda lisede soyut yapıdaki fonksiyon kavramına giriş yapmadan önce, öğrencilerin erken cebirde fonksiyonel ilişkileri anlamlandıracağı somut bağlamlarla çalışması önemlidir.

Confrey ve Smith (1994), nicelikler arasındaki ilişkiyi temel alan fonksiyonel düşünme için, nicelikler arasındaki değişimle ilgili kovaryans yaklaşımı ile değişkenler arasındaki ilişkiyi açık bir kuralla ifade eden birebir eşleme yaklaşımını tanımlamış ve önemini vurgulamıştır.

2.1.2.1. Fonksiyonel Düşünmede Özyinelemeli, Kovaryans ve Birebir Eşleme Yaklaşımları

Literatürde fonksiyonel ilişkileri keşfetmeye ve kavramsallaştırılmasına yönelik olarak özyinelemeli düşünme, kovaryans (ortak değişkenlik) ve birebir eşleme olmak üzere üç yaklaşım vardır.

Bu yaklaşımlarından ilki olan özyinelemeli düşünme, tek bir nicelik içindeki değerlerin değişimini tanımlar. Özyinelemeli düşünmede örüntüdeki tek bir nicelikteki artış miktarına odaklanılarak, örüntünün bir sonraki veya yakın sıradaki terimi bulmaya odaklanılır. Bu özyinelemeli düşünmeye dayanarak, önceki terime artış miktarını eklemek, örüntünün herhangi bir terimi için genel bir kural tasarlamayı zorlaştırır (Beatty, 2013). Özyinelemeli düşünmenin fark edilmesi kolaydır, ancak kullanım açısından sınırlıdır. Birçok öğrenci örüntüdeki tek bir nicelikteki özyinelemeli düşünmeye odaklanmaktan dolayı nicelikler arası ilişkileri gözden kaçırmaktadır. Bir öğrencinin uzak bir genelleme yapması gerektiğinde (örneğin, 50. aşamadaki karelerin sayısı), özyinelemeli bir kural kullanmak yetersiz ve faydasızdır. Bu açıdan, fonksiyon kavramına yönelik anlamlı bir yaklaşım arayan Confrey ve Smith (1995), bir fonksiyonel ilişkinin, nicelikler arasındaki "ortak değişkenliğin" vurgulanması gerektiğini öne sürerek kovaryans yaklaşımını tanımlamıştır. İki model arasındaki ilişkinin bir kovaryans açıklaması, bir modeldeki bir niceliğin diğer modeldeki nicelikle aynı anda nasıl değiştiğini gösterir. Yani kovaryans yaklaşımı iki niceliğin nasıl birlikte değiştiğini ve aynı örüntüde iki değer arasında, birindeki değişimin diğerinde nasıl bir değişiklik meydana getirdiğini analiz eden bir yaklaşımdır. Kovaryans yaklaşımı, bir modelden iki

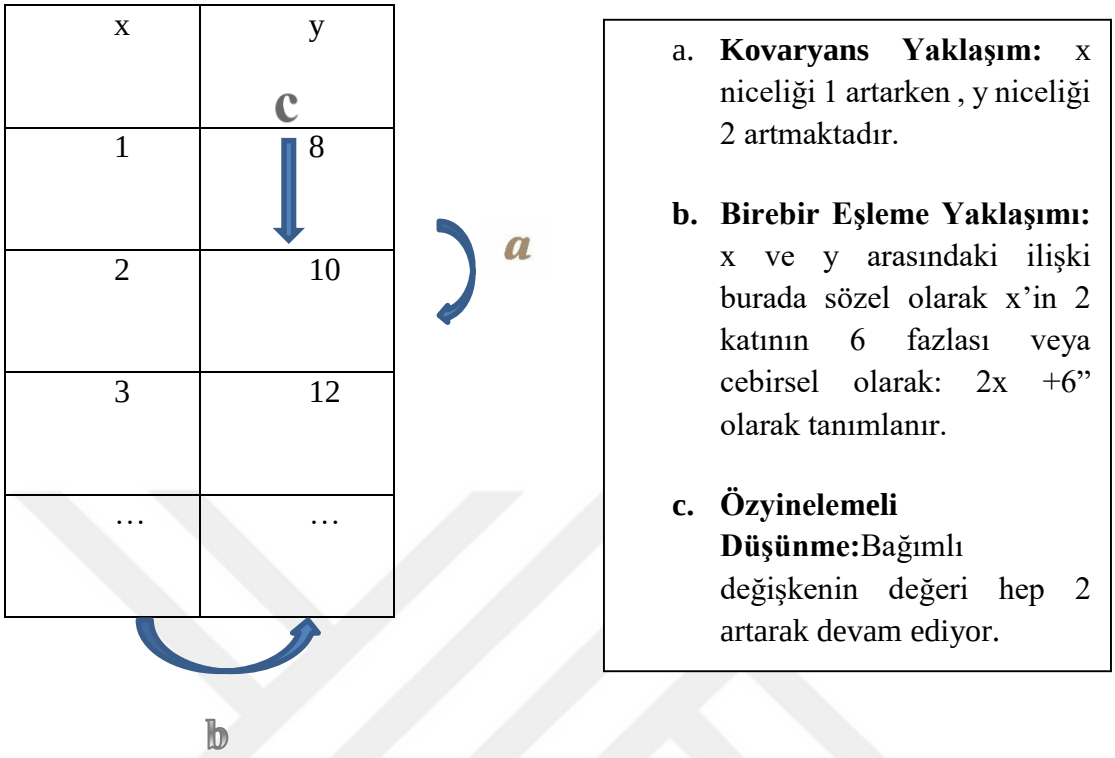
dizi üretmeyi gerektirir ve bir değerler tablosunda olduğu gibi ikisinin yan yana gelmesini gerektirir (Confrey & Smith, 1995). Öğrenciler iki nicelik arasındaki kovaryansu fark ettiklerinde, oluşturulan tablodaki analizde iki değişkenin birbirine göre değişimini koordine edebilirler (Confrey ve Smith, 1994). Kovaryans yaklaşımı, nicelikler arası ilişkiler arasındaki bağlantıyı ifade eden birebir eşleme yaklaşımı için temeldir. Başka bir deyişle, kovaryans yaklaşımda fonksiyondaki bir niceliğin diğer niceliğe göre nasıl değiştiğini fark edip tanımlayabilmek birebir eşleme yaklaşımı öncesi esastır.

Birebir eşleme yaklaşımında, fonksiyondaki değişken çiftleri arasında birbirini tanımlayan bir kural oluşturma vardır. Yani fonksiyonda verilen herhangi bir x değerinden y değerini tanımlayan bir kural belirlenir, böylece x ve y arasında birebir eşleme bağlantısı oluşur. Birebir eşleme yaklaşımı, bağımsız ve bağımlı değişken çiftlerini ilişkilendiren bir kural bulmaya dayanır (Confrey ve Smith, 1994). Örneğin öğrenciler birebir eşleme yaklaşımında, iki değişken arasındaki ilişkiyi madde/terim konum numarası, toplam şekil veya parça sayısı/ terim numarası şeklinde algılar ve bunlar arasında açık bir kural bulur. Farenga ve Ness (2005), bir fonksiyondaki birebir eşleme yaklaşımı için x' in her değeri için kendisiyle ilişkili bir y değeri olması olarak tanımlamaktadır. Bu fonksiyon görüşü, x ve y arasında birebir eşleme kuralları geliştirmeye odaklanmak, öğrencilerin problemleri çözmede, grafikleri ve tabloları oluşturmada ve yorumlamasında, uzak ve verilmeyen değerleri belirlemesini sağlayan okul matematiğinin çoğunun temelini oluşturur. Özyinelemeli, Kovaryans ve birebir eşleme yaklaşımı aşağıdaki Tablo 1'de örneklendirilmiştir.

Tablo 1.

Fonksiyonel Düşünmede Özyinelemeli, Kovaryans ve Birebir eşleme Yaklaşımları

x	y
1	8
2	10
3	12
…	…



a. **Kovaryans Yaklaşım:** x niceliği 1 artarken , y niceliği 2 artmaktadır.

b. **Birebir Eşleme Yaklaşımı:** x ve y arasındaki ilişki burada sözel olarak x'in 2 katının 6 fazlası veya cebirsel olarak: 2x +6" olarak tanımlanır.

c. **Özyinelemeli Düşünme:**Bağımlı değişkenin değeri hep 2 artarak devam ediyor.

Confrey ve Smith (1994), öğrencilerin sıklıkla örüntülerde özyinelemeli yaklaşımları tercih ettiklerini vurgulamışlardır. Fakat bu konuda yapılan araştırmalar, özyinelemeli yaklaşımın yakın terimler için faydalı olmasına rağmen uzak terimler için faydalı olmadığı yönündedir. Confrey ve Smith (1994), öğrencilerin fonksiyonel ilişkiler geliştirebilmesi için ilk önce ortak değişkenli bir bakış açısıyla yaklaşmayı önererek, değişkenler arasındaki ortak değişime vurgu yapmanın öğrencilerin birebir eşleme düşünmeye geçmesini sağlayarak, değişkenleri birbirine bağlayan bir kural oluşturmaya yardımcı olduğunu vurgulamaktadır. Bu nedenle, öğrencilerin fonksiyonel düşünme becerisine geçişte ortak değişkenli (kovaryans) yaklaşım köprü niteliğindedir. Kovaryans yaklaşım, birebir eşleme yaklaşımına geçişte ön koşul olarak kabul edilebilir. İki örüntünün değerlerinin aynı anda nasıl değiştiğini açıklayan Kovaryans yaklaşım, birebir eşleme kuralının geliştirilmesi için temeldir (Blanton ve Kaput, 2011; Confrey ve Smith, 1994).

2.1.2.2. Fonksiyonel Düşünme Düzeyleri

Fonksiyonel düşünme merkezli erken cebir öğretiminin önem kazanmasıyla, son yıllarda fonksiyonel düşünme gelişimini inceleyen araştırmalar ön plana çıkmıştır. Bu

araştırmalar, öğrencilerin fonksiyonel ilişkileri genelleme düzeylerini ve bu ilişkileri genellerken kullandıkları temsilleri belirlemeye odaklanmıştır (Blanton vd., 2015, Stephens vd., 2016, Stephens vd., 2017). Blanton vd. (2015), fonksiyonel düşünme gelişimi için varsayımsal öğrenme rotası geliştirerek, 8 haftalık bir öğretim deneyi gerçekleştirmiştir. Bu araştırma sonunda öğrencilerin fonksiyonel ilişkileri genelleme düzeyleri belirlenmiştir. Stephens vd. (2016), bu araştırmanın benzerini yaparak Blanton vd. (2015) 'in belirlediği fonksiyonel düşünme düzeylerini biraz daha geliştirmiştir. Bu iki araştırmada da kuralı y= mx ve y=mx+n şeklinde olan doğrusal fonksiyon görevleri kullanılmıştır. Stephens vd. (2017) ise bu iki çalışmanın kapsamını daha da genişleterek, doğrusal fonksiyonlara ilave olarak ikinci dereceden fonksiyon görevlerini içeren 3 yıllık boylamsal bir çalışma yürütmüştür. Bu kapsamlı çalışmada, Stephens vd. (2016) tarafından belirlenen fonksiyonel düşünme düzeyleri genişletilerek revize edilmiştir.

Stephens vd. (2017)'nin araştırmasında yer alan görevlerde öğrencilerin cevaplarına göre, fonksiyonel ilişkileri genellemelerini tanımlayan karmaşıklık düzeyleri ve bu ilişkileri temsil etme biçimleri analiz edilmiştir (bkz. Şekil 1). Bu düzeyler, Confrey ve Smith (1991) tarafından özyinelemeli, kovaryansal ve birebir eşleme olarak tanımlanan üç fonksiyonel düşünme türü ana başlığı altında kategorize edilmiştir. Bu ana kategoriler altında D0 düzeyi (yanıt yok) hariç, bu düşünme yaklaşımlarına yönelik düzeyler yerleştirilmiştir. Düzeylemede D7/8 ve D9/10 düzeylerinde genellemeler değişken ve kelimeler olarak ayrılmıştır. Stephens vd. (2017)'nin çalışmalarında, öğrencilerin fonksiyon ilişkileri genellemelerinde, kuralı değişkenlerde ifade etmede kelimelerden daha başarılı oldukları sonucu beklenmeyen bir durum olarak ortaya çıkmıştır. Bu yüzden fonksiyonel genelleme düzeylerinde D7 düzeyi değişkenle, D8 düzeyi kelimelerle ilişkiyi genelleme, aynı şekilde D9 düzeyi değişkenlerle, D10 düzeyi kelimelerle ilişkiyi genelleme olarak karşımıza çıkmaktadır.

Bu araştırmada öğretim deneyi öncesi ve sonrasında öğrencilerin fonksiyonel düşünme becerilerinin gelişimini incelemek amaçlanmıştır. Öğrenci cevaplarının öğretim deneyi öncesi, özyinelemeli yaklaşım altında tanımlanan D1,D2 düzeylerinde olması ve kovaryansal yaklaşımındaki D3 düzeylerinde olması öngörülmüştür ve bu cevapların öğretim deneyi sonrasında ise D7/8 ve D9/10 düzeylerine kaydırılması amaçlanmıştır. Bu yüzden öğrencilerin hem ön test hem de son teste 8,17 ve 19. sorulara verdikleri yazılı cevaplar, Stephens vd. (2017)'in fonksiyonel düşünme düzeylerine göre değerlendirilmiştir. Aşağıda Şekil 1'de Stephens vd. (2017) tarafından oluşturulan fonksiyonel düşünme düzeyleri gösterilmiştir.

FONKSİYONEL DÜŞÜNCEYE İLİŞKİN KANIT YOK

D0: Yanıt Yok: Verilen yanıt veya ifade yok. Öğrenci örüntüde özyinelemeli ve niceliklerin değişimi hakkındaki herhangi bir ilişkiyi betimleyemez.

ÖZYİNELEMELİ YAKLAŞIM

D1: Özyinelemeli Özel: Öğrenci örüntüdeki değerler dizisinde özyinelemeli bir ilişki fark eder. Fakat bu ilişkiyi belirli bir örnek açısından tanımlar.2,4,6,8…

D2: Özyinelemeli Genel: Öğrenci özyinelemeli ilişkiyi belirli değerlerden bağımsız olarak genelleyerek bir kural olarak ifade eder.2,4,6,8 yerine her seferinde 2 artıyor şeklinde kavramsallaştırır.

KOVARYASYONALYAKLAŞIM

D3: Kovaryasyon İlişkisi:

Öğrenci örüntüdeki nicelikleri fark eder. Her niceliğin kendi arasındaki değişimi fark etmesine rağmen bu niceliklerin birlikte ilişkisini açıklayamaz.

.

UYGUNLUK YAKLAŞIMI

D4: Tek Örnekleme: Öğrenci iki nicelik arasındaki ilişkiyi tanımlayabilir, fakat ilişkiyi tanımlayabilmesine rağmen, nicelikler arasındaki ilişkiyi genelleyemez ve ilişkiyi matematiksel dönüşümler yapacak şekilde ifade edemez.

D5: Fonksiyonel Özel: Bu düzeyde ilişki temsilleri eksik olsa da, genelleştirilmiş bir fonksiyonel ilişkinin temel özelliklerinin ortaya çıkışının işaretleri vardır. Öğrenci, belirli sayıları kullanarak işlevsel bir ilişki tanımlar, ancak değişkenlerle ilgili genel bir açıklama yapmaz. 1 2 = 2, 2 2 = 4, 3 2 = 6, 4 2 = 8, …

D6: Fonksiyonel Temel: Öğrenci, değişkenler arasındaki genel ilişkiyi tanımlar, ancak aralarındaki dönüşümü tanımlayamaz.

D7/8:Fonksiyonel Değişkenle/Kelimelerle: Öğrenci, değişkenlerde (D7) veya kelimelerde (D8) eksik fonksiyon kuralını tanımlar, genellikle dönüşümü bir değişken üzerinden açıklar.

D9/10: Yoğun Fonksiyonel Değişkenlerle/Kelimelerle: Öğrenci, iki değişken arasındaki genelleştirilmiş bir ilişkiyi tanımlayan değişkenler (D9) veya kelimelerdeki (D10) fonksiyon kuralını tanımlar.

Şekil 1. Stephens vd. (2017) tarafından oluşturulan fonksiyonel düşünme düzeyleri

2.1.3. Genişleyen Şekil Örüntüleri

Pek çok çalışma, örüntü genellemesinin cebirsel düşüncenin merkezinde yer aldığını ve etkinliklerin cebirsel genellemeye uygun olduğunu göstermiştir. Papic ve Mulligan (2007) örüntü görevlerini üç kategoride sınıflandırmıştır; tekrar eden örüntüler, uzamsal yapı örüntüleri ve genişleyen şekil örüntüleri. Bunlardan biri olan genişleyen şekil örüntüleri, her aşamada sabit sayıda parça (doğrusal ilişki) veya her aşamada artan sayıda parça (doğrusal olmayan ilişki) ile büyüyebilir. Bu örüntüler genellikle öğrencinin nicelikler arasındaki birbirine göre değişimi yorumlamasına fırsat veren birebir eşleme ilişkilere sahiptir (Warren, 2005). MacGregor ve Stacey (1995), genişleyen şekil örüntülerinde, öğretmenlerin öğrencilerden, önce geometrik bir örüntünün özelliklerini sözlü olarak tanımlamalarını ve ardından bunları cebirsel olarak ifade etmelerini istemesi, öğrencilerin fonksiyonel ilişkileri geliştirmesini teşvik ettiğini bulmuştur. Miller (2016), genişleyen şekil örüntülerinin, öğrencilerin örüntüdeki her iki değişkene de odaklanarak ortak değişkenliği görmesine yardımcı olduğunu ve potansiyel olarak onları özyinelemeli düşünme yerine fonksiyonel düşünmeye ulaştırmada yardımcı olduğunu bulmuştur. Yani genişleyen şekil örüntüleri, fonksiyonel düşünmede özyinelemeli düşünmeden birebir eşleme stratejilerine geçmede etkili araçlardır. Genişleyen şekil örüntülerinin fonksiyonel düşünme gelişiminde etkili bir araç olmasının sebebi, cebirsel düşünmeyi destekleyen, hem sayısal ilişkilerin hem de görsel yapının farkındalığının geliştirilmesi ve bunları fonksiyonel bir ilişkinin temsilleri olarak tanımlamaya fırsat vermesidir.

2.1.4. Genelleme

Literatürde genelleme, aşağıdaki faaliyetlerden en az birini içeren bir süreç olarak kabul edilmiştir:

- Bir ortak noktayı belirlemek için birkaç özel durumu incelemek (Mason, 1996; Radford, 2010),
- Kişinin akıl yürütmesini bu belirli durumların ilerisine genişletmek (Ellis, 2007; Radford, 2010)

ve

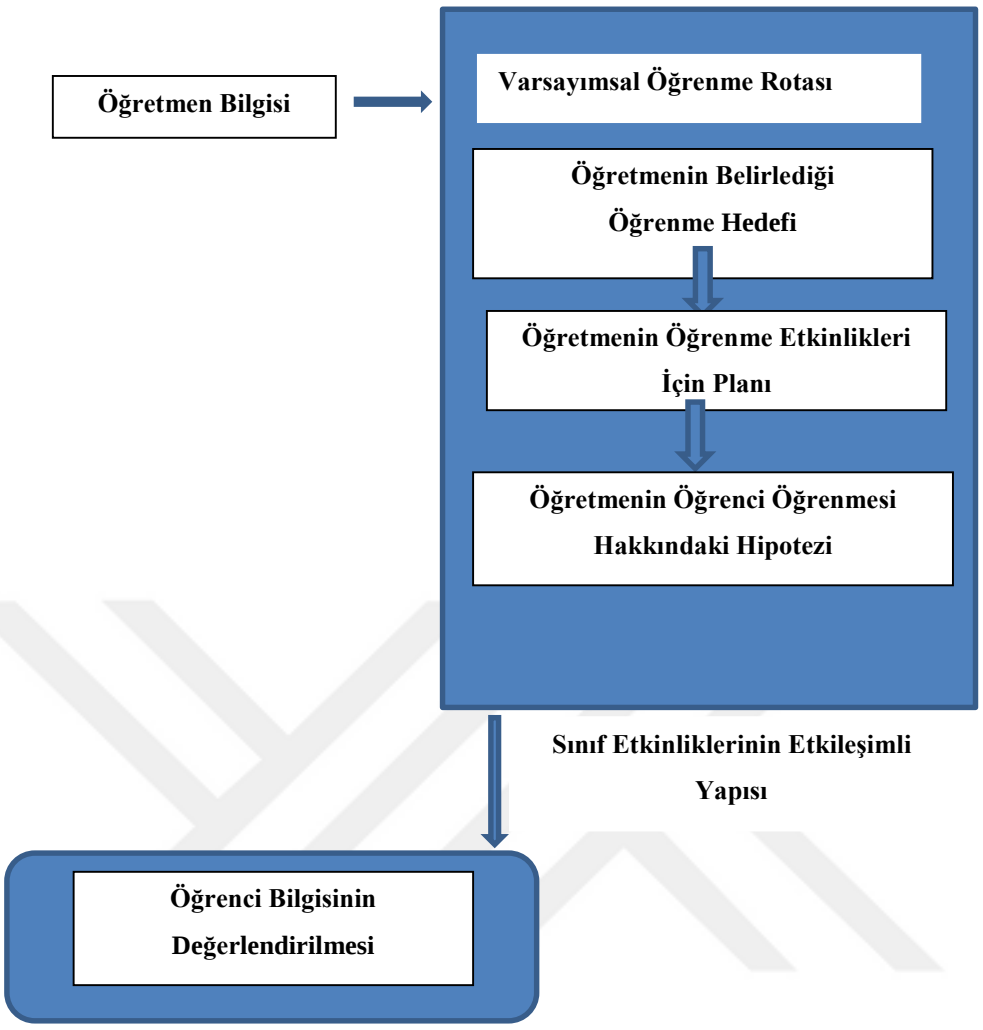
- Belirli durumlar arasındaki ortak noktaların belirlenerek bu özel durumlar için daha geniş bir sonuç oluşturmak (Ellis, 2007).

Bu araştırmada genelleme, Ellis, (2007)'nin belirttiği üzere "örüntülerdeki belirli örnekler arasındaki benzer noktaların tanımlanması ve ortaya çıkarılması yoluyla ilişkilerin artık belirli örneklerden, yapılara ve bunların arasındaki ve içindeki ilişkilere odaklanacağı bir düzeye çıkarılması" olarak ele alınmıştır. Genelleme, birçok konu ve alanda uygulamaları olan matematik öğretiminde temel ve değerli bir beceridir. Genelleme öğrencilere, örüntüdeki yapılar arasındaki ilişkiyi analiz etmeyi, uzak genellemeler yapmak için yapısal ilişkileri kullanmayı, bu ilişkileri sayıların ötesinde değişkenlere genişletme için çalışma fırsatı sunar. Bu çalışmada da genişleyen şekil örüntüleri etrafında, örüntü modelinin yapısal analizi, örüntüdeki benzerlik ve ortak özellikleri keşfetme, bu özelliklerle örüntüyü sayısal olarak temsil etme ve nicelikler arasında ilişkilere odaklanarak, niceliklerin sayısal değerlerini temsil eden genel bir kural bulma süreçlerini içeren örüntü genelleme görevlerini içeren öğretim planlanmıştır.

2.1.5. Varsayımsal Öğrenme Rotası

Varsayımsal öğrenme rotaları, Simon (1995) tarafından öğrencilerin belirli bir konu hakkındaki düşünme ve öğrenmelerinin gelişim yolunun varsayılması olarak tanımlanmıştır. Simon'ın (1995) çalışması, öğrencilerin matematiği yeniden icat etmesine olanak sağlayacak bir öğretim tasarımı geliştirmenin gerekliliği üzerine doğmuştur. Matematiğin öğrenilmesi ve anlaşılması kademeli ilerlemeli bir gelişim sürecidir. Bu ilerleyici sürecin öğretmen tarafından anlaşılması gerekir. Öğretmenler her ders için hedefler belirleyebilmeli ve öğrencinin bir sonraki adımda ne öğrenmesi gerektiğini tahmin edebilmelidir. Bu hedefler varsayımsal öğrenme rotasının yönünü belirleyecektir. Varsayımsal öğrenme rotaları, öğrenme hedefleri, öğrenme ilerlemeleri ve öğrenme ilerlemelerini destekleyen öğretim etkinlikleri olmak üzere üç bileşeni içermektedir (Simon, 1995; Clements & Sarama, 2004). Öğrenme ilerlemeleri, öğrencilerin öğrenme sırasında giderek daha karmaşık bir anlayışa doğru ilerledikçe olası gelişim yollarını ifade eder (Clements ve Sarama, 2004). Öğrenme ilerlemeleri doğası gereği varsayımsaldır. Çünkü öğretmenlerin, öğrenci öğrenmeleri hakkındaki tahminlerini temsil etmektedir. Bu ilerlemeler ya alanyazın taramasıyla ya da belirli, genellikle küçük bir öğrenci grubuyla çalışılarak oluşturulur ve daha sonra farklı bir gruba uygulanır (Clements ve Sarama, 2004). Öğrencilerin ön bilgileri ve öğrenmeye katılımları her zaman önceden bilinemeyeceğinden, bir öğrenme ilerlemesi, farklı bir grupta öğrenmenin nasıl ilerleyebileceği konusunda yalnızca tahmini bir rota sağlayabilir (Clements & Sarama,

2004). Öğrenme hedeflerine ve öğrenme ilerlemelerine ek olarak, varsayımsal bir öğrenme rotasının üçüncü bileşeni, çocukların ilerleme sırasında daha yüksek düşünme düzeyleri geliştirmelerine yardımcı olan öğretim etkinlikleridir (Simon, 1995; Clements & Sarama, 2009). Yani öğretmenin, öğrencilerin bu belirli rotanın hedefine doğru kademeli olarak çalışabilmeleri için öğrencilere düşünme seviyelerine uyacak şekilde tasarlanmış öğretim görevleri oluşturması gerekir. Aşağıda Şekil 2, bir öğretmenin bir öğrenme etkinliğini planlamak için varsayımsal öğrenme rotasını nasıl kullandığını açıklayan bir matematiksel öğretim döngüsünü göstermektedir. Başlangıçtaki temel değerlendirme, öğrencilerin mevcut bilgilerini değerlendirdiği için varsayımsal öğrenme rotasını belirleyecektir. Öğretim deneyi sırasında, planlanan ve belirlenen öğretim etkinliklerinin esnek bir şekilde uygulanması varsayımların test edilerek öğrencilerin gerçek öğrenme rotasına dönüşümüne sebep olacaktır. Bir öğretim deneyi araştırmasını değerli kılan nokta, varsayımsal rota ile gerçekte meydana gelen öğrenme arasındaki farkın analiz edilmesiyle varsayımları test etmek ve revize etmektir. Bu süreç içinde geriye dönük analizler ile yapılmaktadır. Geriye dönük analizi ile öğretimin düzenlenmesi, öğretim deneylerinin olmazsa olmaz özelliğidir. Matematik etkinlikleri süreci boyunca, varsayımsal öğrenme rotasının detayları, sınıfta gerçekleşen olayların analizine bağlı olarak sürekli olarak değiştirilir. Bu analizlerle beraber süreç sonunda ortaya çıkan en son öğrenme rotası, öğrencilerin öğretmen tarafından belirlenen öğrenme hedeflerine ulaşmak için tamamladıkları etkinlikleri ve etkinliklerin sırasını içerecektir.



Şekil 2. Matematik öğretim döngüsü ve varsayımsal öğrenme rotası

Şekil 2'de görüldüğü üzere varsayımsal öğrenme rotasının başlama noktası öğretmen bilgisidir. Öğretmen belirli bir alana yönelik olarak öğrencilerin nasıl öğrenebileceğini ve bu süreçte hangi materyal ve görevlerin etkili olabileceğine yönelik kendisine kavramsal bir temel oluşturması gerekir. Bunun için daha önce bu alana yönelik yapılan araştırmaların bulguları ve sonuçlarından kendi öğretmen bilgisini oluşturur. Öğretmen bu bilgisinden hareketle öğrencilerin belli bir alanda nasıl öğreneceğine dair gelişimsel bir öğrenme yolu varsayar. Daha sonra bu varsaydığı öğrenme ilerlemeleri gerçek sınıf ortamında öğrenci öğrenmeleri ile karşı karşıya gelerek uyumları analiz edilir. Simon (1995) tarafından oluşturulan varsayımsal öğrenme rotası bir nevi öğrencilerin öğrenme süreçlerine yapılan bir yolculuğa benzetilebilir.

2.2. İlgili Araştırmalar

Bu bölümde yurt içi ve yurt dışında fonksiyonel düşünme ile yapılan araştırma literatürüne yer verilmiştir. Yapılan incelemede fonksiyonel düşünme ile yapılan araştırmaların, fonksiyonel düşünme gelişiminde etkili destek araçlarını ve bağlamlarını belirleme, fonksiyonel düşünmede matematiksel temsilleri kullanma ve fonksiyonel düşünmenin özyinelemeli, kovaryans ve birebir eşleme yaklaşımları açısından öğrencilerin ilişkileri genelleme üzerine yoğunlaştığı görülmüştür.

2.2.1. Fonksiyonel Düşünmede Yurt İçinde Yapılan Araştırmalar

Kabael ve Tanışlı (2010), cebirsel düşünme gelişimi bağlamında, ortaöğretim düzeyinde soyut yapıya ulaşan fonksiyon kavramının kazanılmasında örüntülerin kullanımının önemine değindikleri bir araştırma gerçekleştirmişlerdir. Bu çalışmada, ortaöğretim düzeyinde soyut olan fonksiyon kavramı için, erken dönemde somut materyallerle, daha sonra ilkokul ve ortaokul düzeyinde örüntüler ile sayılar arasındaki ilişki aramayı içeren fonksiyonel düşünmenin önemi vurgulanmıştır. Bu bağlamda cebirsel düşünmenin odak noktası olarak ifade ettikleri fonksiyonel düşünme gelişiminde erken dönemlerde örüntüler aracılığıyla ilişki aramayı içeren etkinliklerin matematik öğretiminde geniş yer alması gerekliliği ifade edilmiştir.

Güvendiren (2019), öğrencilerin ilkokuldaki aritmetik odaklı eğitimden cebirin soyut yapısına geçildiğinde yaşanılan zorluğu temel alarak, 9 tane 6. Sınıf öğrencisi ile nitel bir araştırma gerçekleştirmiştir. Bu çalışmada öğrencilerin cebirsel düşünmeleri, sayısal akıl yürütme, kovaryans düşünme ve fonksiyonel düşünme bazında incelenmiştir. Bu inceleme sonucunda öğrencilerin bu düşünme türlerinden kovaryans düşünmeyi en az gösterdikleri, sayısal akıl yürütme ve nicelikler arasındaki ilişkiye odaklanan fonksiyonel düşünmelerinin ise en yüksek düzeyde olduğu belirlenmiştir. Bu araştırmada en dikkat sonucun belirli sayısal değerler verildiğinde öğrencilerin sayısal akıl yürütmeyi başarılı bir şekilde kurduğu, problem bağlamında ise verildiğinde sayısal akıl yürütmede başarısız olduklarını bulmuştur. Bunu sonucu olarak öğrencilerin problem bağlamında sayısal akıl yürütmeyi kullanamaması fonksiyonel düşünmeye geçişini engellemekte olduğu kanaatine varılmıştır.

Türkmen ve Tanışlı (2019), ilkokul 3. ,4. ve 5. Sınıf öğrencilerinin fonksiyonel ilişkileri genelleyebildiği erken cebir öğretimi için kanıtlar sunan araştırmalara dikkat çekerek ayını sınıf düzeyleri ile nitel bir araştırma yapmıştır. Araştırmanın amacı bu sınıf

düzeylerinde yer alan öğrencilerin fonksiyonel ilişkileri genelleme düzeylerinin belirlenmesidir. Bu amaçla 116 öğrencinin (45 adet 3. Sınıf, 36 adet 4. Sınıf, 35 adet 5. Sınıf öğrencileri) fonksiyonel ilişkileri genelleme düzeylerini belirlemek için bu öğrencilere açık uçlu sorulardan oluşan bir test uygulamışlardır. Öğrencilerin açık uçlu sorulara verdikleri cevaplar Stephens vd. (2017) fonksiyonel düşünme düzeylerine göre sınıflandırılmıştır. Bu sınıflandırmanın sonuçlarına göre öğrencilerin yarısından fazlasının fonksiyonel düşünmeye sahiptir denilebilecek düzeylerde olduğu görülmüştür. 4. Sınıflardan bir öğrencinin ve bazı 5. Sınıf öğrencilerinin fonksiyonel kuralı değişkenlerle ifade edebildikleri görülmüştür. Bu çalışmaya göre erken dönemde cebir öğretimi yapılmasının öğrencilerin cebir başarını arttıracağı yönündedir.

Akın (2020), fonksiyonel düşünme görevleri ile öğrencilerin fonksiyonel düşünme gelişimini test etmiştir. Bunun için 5. Sınıf düzeyinde 44 öğrenci ile çalışma yürütmüştür. Öğrencilerin 24 ‘ü kontrol grubu, 20’si deney grubu olarak ayrılmıştır. Deney grubuna fonksiyonel düşünme görevleri içeren 12 saatlik müdahalede bulunmuş, kontrol grubuna ise müdahalede bulunulmamıştır. Deney grubuna ve kontrol grubuna müdahale öncesi ve sonrası açık uçlu sorulardan oluşan fonksiyonel düşünme testi uygulanmıştır. Bu testin sonuçlarına göre deney ve kontrol grubunun ön test ve son test sonuçları arasında anlamlı bir bulunmamıştır. Fakat deney grubu öğrencilerinin ön test ve son test puanları arasında, fonksiyonel ilişkiyi sembolik olarak genelleme konusunda anlamlı olarak fark bulunmuştur.

Eroğlu (2021), cebir öğretiminin, öğrencilerin matematik başarısını arttırmada geometrik örüntüler bağlamı etrafında şekillenmesi gerektiğini vurgulamıştır. Eroğlu (2021), cebir öğretimi ile ilgili literatür ışığında, öğrencilerin cebirsel düşünme yollarını zihinsel alışkanlık haline getirmesi gerektiğini yani cebirsel düşünmede “Zihinsel Matematik alışkanlıkları” ile matematik başarısı sağlanabildiğini ifade etmiştir. Eroğlu (2021), ilgili literatürde Zihinsel Matematik Alışkanlıkları (ZMA) kuramsal bileşenlerinden biri olarak “fonksiyonel kural oluşturma” sırasıyla geometrik örüntüler ile ilişkileri muhakeme etme, sayısal ilişkiler oluşturma, bu sayısal ilişkilerde değişmezleri ayrıştırma ve ilişkileri genelleyerek kural oluşturma adımlarını içerdiğini vurgulamıştır. Bu bağlamda iki farklı 7. Sınıf devlet kitabını inceleyerek örüntüler konusunun öğretimine ilişkin analiz yapmıştır. Bu analize göre 7. Sınıf matematik ders kitaplarındaki örüntüler konusunun öğretimi inceleyerek 7. Sınıf devlet kitabında örüntüler konusunun sırasıyla, şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne çevirme, sayı örüntüsünde ki ortak farkın yani sabit artma miktarının genel kuralda adım numarasının

değişkeni olduğunu ifade ederek eklenecek veya çıkarılacak sayının kontrolü ile genel kuralın bulunması adımları kullanıldığı görülmüştür. Fakat 7. Sınıf ders kitaplarında örüntülerin şekilsel yapısını analiziyle nicelikler arası ilişki arama ve bu ilişkileri genelleme etkinliklerine hiç rastlanmadığını tespit etmiştir. Eroğlu (2021) bu yüzden öğrencilerin aritmetik işlem becerilerinden daha ileri bir beceriye geçemediğini ifade etmiştir. Cebirsel düşünmenin olmazsa olmazı kabul edilen fonksiyonel düşünme ile cebir öğretiminde, şekilsel muhakeme ile şeklin yapısına odaklanmanın genel kuralı oluşturmada başarıyı arttıracağına vurgu yapan (Markworth, 2010; Rivera ve Becker 2011) araştırmaları baz alarak, cebir öğretiminde şekilsel akıl yürütme ile genel kurala ulaşma konusunda örnek bir ders süreci verilmiştir.

2.2.2. Fonksiyonel Düşünmede Yurt Dışında Yapılan Araştırmalar

Stephens vd. (2017), erken cebir öğretiminde fonksiyonel düşünmenin kritik yönünü temel alarak 100 tane 3. Sınıf öğrencisiyle 3 yıllık bir tasarı araştırması çalışma gerçekleştirmiştir. Aynı öğrenciler 4. Ve 5. Sınıf düzeylerinde de takip edilerek çalışmanın sürekliliği sağlanmıştır. Bu öğrencilere 3 ve 4. Sınıf düzeyinde 7'şer saatlik, 5. Sınıf düzeyinde 6 saatlik öğretim dizisini içeren varsayımsal öğrenme rotası tasarlanmıştır ve öğretim dizisi uygulanmıştır. Çalışma sonunda öğrencilerin 3 yıl boyunca deneyimledikleri öğretim ve öğrenmelerini değerlendirmek için zaman içinde fonksiyonel düşünmelerinin ilerlemeleri ve etkili destek araçlarının özellikleri karakterize edilmiştir. Bu öğretim dizileri sonunda öğrencilerin yazılı cevaplarının analizinden, öğrencilerin genellemelerini ve fonksiyonel ilişkilerin temsilini gösteren fonksiyonel düşünme gelişme düzeyleri oluşturulmuştur. Ayrıca araştırmada tablo temsillerinin bağımsız ve bağımlı değişkenler arasındaki fonksiyonel ilişkileri keşfetmede etkili bir araç olduğu gösterilmiştir.

Warren ve Cooper (2008), 8 ve 9 yaş aralığında ki 45 öğrenci ile genişleyen şekil örüntüleri destekli fonksiyonel düşünmelerini gelişimini bir öğretim deneyi yapmıştır. Öğretim, ikinci bir araştırmacı ve sınıf öğretmeninin katılımcı gözlemci olarak hareket ettiği, bir araştırmacı tarafından verilen dört dersten oluşuyordu. Bu derslerde, öğrencilerin genişleyen şekil örüntülerinin nasıl genişlediğini tanımlama odaklı ve örüntülerin sayısal temsillerini giriş ve çıkış olarak kaydeden iki sütunlu tablolardaki ilişkiye odaklanarak bu ilişkileri keşfetmelerine yönelik etkinlikler yaptırıldı. Sonuçlardan, genişleyen şekil örüntüleri bağlamında örüntü büyümesi analizi ile ilkokul

öğrencilerinin fonksiyonel düşünme becerilerinin geliştiğine yönelik kanıtlar sunulmuştur. Bu bağlamda fonksiyonel düşünme odaklı erken cebir öğretimine vurgu yapılmıştır.

Markworth (2010), genişleyen şekil örüntüleri bağlamında öğrencilerin fonksiyonel düşünme gelişimi hakkında doğrulanmış bir yerel öğretim teorisi geliştirmek için genişleyen şekil örüntüleri konusunda deneyim yaşamamış 6. Sınıf öğrencileri ile bir tasarı araştırması yürütmüştür. Bu araştırmada önce öğrencilerin fonksiyonel düşünme gelişimi için genişleyen şekil örüntüleri kullanılarak varsayımsal öğrenme rotası oluşturulmuştur. Araştırmanın ilk döngüsünde varsayımsal öğrenme rotası test edilmiş ve varsayımsal öğrenme rotasında değişiklikler yapılmıştır. İkinci döngüsünde ise revize edilen varsayımsal öğrenme rotası test edilerek, revize edilen varsayımsal öğrenme rotası genişleyen şekil örüntüleri bağlamında öğretmenler için profesyonel öğrenme kaynakları olarak kullanılmak üzere yerel öğretim teorisi haline genişletilmiştir. Araştırma sonucunda fonksiyonel düşünmenin gelişiminde genişleyen şekil örüntülerinin etkili bir bağlam, üç sütunlu tabloların ise fonksiyonel ilişkileri keşfetmede etkili bir temsil olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Rivera ve Becker (2010), şekilsel analiz içeren aşamaları içeren örüntü genellemesinde, aynı örüntü için bir genellemeyi ifade etmenin birçok farklı yolu olmasından yola çıkarak, yapı genellemesi üzerine ortaokul öğrencileri ile 3 yıllık boylamsal bir çalışma yapmıştır. Bu çalışmada öğrencilerle sadece şekilsel örüntülerle çalışarak öğrencilerden yapıların nasıl büyüdüğünü analiz etmesini ve bunu genellemesini istemiştir. Öğrencilerden yapıları analiz ederek yapılarla alakalı eşdeğer formlara ulaşmaları ve bu yapı analizlerini gerekçelendirmeleri istenmiştir. Yapı analizi ile ilgili yapılan etkinlikler sonucunda öğrencilerin kuralı ifade etmede gideren artan bir karmaşıklık seviyesine ulaştığı tespit edilmiştir. Ayrıca yapı analizi ile gerekçelendirme yapan öğrencilerin gerekçelendirme yapmayan öğrencilere göre kurallara ulaşmada daha başarılı oldukları tespit edilmiştir.

Wilkie ve Clarke (2015), 1 yıl boyunca, 10 öğretmen ve toplamda 222 öğrenciden oluşan sınıflarıyla geometrik genişleyen örüntüler üzerine kurulmuş bir görev dizisi üzerinde araştırma yürütmüşlerdir. Bu çalışma geometrik bir yapının farklı şekillerde görselleştirilmesi ve bu yapılardaki iki nicelik arasındaki fonksiyonel ilişkinin genelleme üzerine odaklanmıştır. Bu çalışma sonucunda, belirli genişleme modellerinin tasarımının öğrencileri modeldeki bir öğenin yapısına odaklanmaya, bunun parçalarını adım numarasıyla ilişkilendirmeye ve bu bilgiyi kavramsal olarak fonksiyonel ilişkileri açıkça

genelleştirmek için kullanmaya teşvik edebileceği tespit edilmiştir. Geometrik örüntülerin uzamsal görselleştirilmesi ve bunların genelleştirilmesi, öğrencilerin cebirdeki değişkenlere ilişkin fonksiyonel düşünme ve anlamalarını geliştirmede tanınan bir yol haline olduğu belirtilmiştir.

Miller (2016), fonksiyonel düşünmeni açıkça temsil edilmesini sağlamaya yönelik genişleyen şekil örüntülerini kullandı. 2. ve 3. Sınıf öğrencileriyle yaptığı çalışmada, genişleyen şekil örüntülerin kültürel bağlamlarla beraber incelemesinin fonksiyonel genellemesindeki rolünü araştırdı. Sonuçlar, örüntünün türü ve bağlamının, öğrencilerin yapıya ve değişkenler arasındaki ilişkiyi keşfetme becerilerini pozitif olarak etkilediğini göstermiştir. Öğrenciler, doğal çevreden gelen kültürel genişleyen şekil örüntülerini genişletme ve genelleştirmede, kültürel bağlamından koparılmış genişleyen şekil örüntülerini genişletmeye ve genelleştirmeye göre daha başarılı olduğu bulunmuştur. Genişleyen şekil örüntüleri bu şekilde kültürel bağlarıyla temsil etmenin, öğrencilerin örüntüdeki ortak değişkenliği görmeye ve bu büyümeyi anlamlandırarak her iki değişkene de dikkat etmelerine yardımcı olduğunu ve potansiyel olarak onları özyinelemeli düşünme yerine fonksiyonel düşünmeye ittiği sonucuna ulaşmıştır.

Gibbs (2020), kültürel bağlamlarla zenginleştirilmiş genişleyen şekil örüntülerinin fonksiyonel düşünmedeki etkisini genişletmeye yönelik bir çalışma yapmıştır. Araştırmada kültürel bağlarla incelenen genişleyen şekil örüntüleri görevleriyle öğrencilerin genelleme yaparken kullandıkları matematiksel temsillerini araştırmıştır. Bunun için, Pasifika kültüründen mozaikler ile 10-12 yaşındaki öğrenciler ile fonksiyonel düşünmenin gelişimine odaklı sekiz derslik bir öğretim müdahalede bulunulmuştur. Mevcut çalışmada ilk aşamada, öğrencilerin çoğunun bağlamından koparılmış genişleyen şekil örüntülerini temsil etmekte zorluk yaşadığı, buna karşılık, kültürel olarak konumlandırılan genişleyen şekil örüntülerinin görsel bir temsilini oluşturabildiklerini ve örüntünün nasıl büyüdüğünü çizmede ve saymada başarı sağlandığını belirlemiştir. Ayrıca öğrencilerin kültürel bağlarla beraber incelenen genişleyen şekil örüntüleri görevleriyle, temsil etmenin daha karmaşık yollarını oluşturduğu sonucuna ulaşılmıştır.

BÖLÜM III

YÖNTEM

3.1. Araştırmanın Modeli

Araştırma, nitel bir araştırma sürecini içeren Tasarı araştırması çerçevesi bağlamında yürütülmüştür. Teorik olarak bu çalışmanın amacı, genişleyen şekil örüntülerini inceleyerek öğrencilerin fonksiyonel düşünme gelişimini desteklemektir. Ayrıca, bu çalışma, genişleyen şekil örüntü araştırmasını ve bunun matematik öğretiminde öğrencilerin fonksiyonel düşünmesini geliştirmek için bir destek olarak nasıl kullanılabileceğini içeren bir öğrenme rotası tasarlamak için yapılmıştır. Tasarı araştırması, sorunlu olduğu düşünülen ve faydalı bir değişime ihtiyaç olduğu öngörülen konulara odaklanır (Cobb vd. ,2003). Bu çalışmanın merkezinde yer alan fonksiyonel düşünme gelişimi de araştırmacılar ve müfredat tasarımcıları tarafından öğrencilerin matematikte ileri düzeyde öğrenmeleri için kazanmaları gereken kritik bir akıl yürütme becerisi olarak vurgulanmaktadır.

Bu çalışmada da genişleyen şekil örüntüleri temelinde hazırlanmış varsayımsal öğrenme rotası ile öğrencilerin fonksiyonel düşünme gelişimini test etmek amaçlanmıştır. Ayrıca mevcut çalışma varsayılan öğrenme rotasının öğrencilerin gerçek öğrenme yolları ile uyumunu karşılaştırarak fonksiyonel düşünmeye yönelik öğrencilerin fonksiyonel düşünme gelişim sürecinin derinlemesine tanımlanmasını içerir. Tasarım temelli araştırma süreci yeni eğitimsel müdahalelerin öğretme ve öğrenmeyi nasıl etkilediğine ve bunların nasıl uygulanabileceğine dair teorik bilgiler sağlar (Swan, 2014). Mevcut literatür, eğitim teorilerini ve öğrenci ön bilgilerinin analiz edilmesiyle varsayılan öğrenme ve öğretme sürecinin fonksiyonel düşünme gelişimini nasıl etkilediğini görmek ve fonksiyonel düşünmede öğrencilerin gerçek öğrenme süreç ve yollarının tanılanmasını sağlamak Tasarı Araştırmasının özelliklerine uymaktadır.

3.1.1. Tasarı Araştırması

Tasarı Araştırmaları, araştırmacılar tarafından eğitim uygulamalarını doğrudan iyileştirmek için kullanılan esnek bir araştırma metodu olarak karakterize edilmektedir (Bakker, 2004). Cobb ve diğerleri (2003)'e göre tasarı araştırması, bir öğretim deneyi için hazırlık aşamasından, öğrenmeyi sağlamak için öğretim deneyinden ve toplanan veriler

için geriye dönük bir analizden oluşur. Belli bir probleme veya bir konunun öğretiminde fayda sağlamaya yönelik araştırmaya dayalı bir öğretim etkinlikleri dizisini içeren uygulama öngörülür. Bu öğretimsel etkinliklerin sıralı ilerlemeleri ve varsayımları öğrenci ihtiyaçlarını gidermek için tasarlanır. Varsayılan ilerlemelere yönelik etkinlikler gerçek sınıf ortamında uygulanır. Bu aşamada, gözlemlerden ve öğrencilerden gelen geri bildirimlerden sistematik olarak toplanan veriler süreç içerisinde analiz edilir. Son aşamada, uygulamanın öğrencilerin öğrenmelerine etkisi ve teorik olarak faydasını belirlemek üzere geriye dönük analizle yansıtıcı bir değerlendirme yapılır. Tasarı araştırmasının aşamaları aşağıda anlatılmıştır.

3.1.1.1. Hazırlık ve Tasarım

Hazırlık Aşamasında öğretim deneyi ve veri analizi için kılavuz olarak varsayımsal bir öğrenme rotası tasarlanır ve bu rotaya uygun şekilde öğretim dizisi planlanır. Bunu yapabilmek için araştırmacı, seçilen matematiksel konu ile ilgili ihtiyacı belirlemeye yönelik çalışma konusunun özellikleri ve ön bilgileri hakkında ön verileri toplamalıdır. İhtiyaç belirlemeye yönelik bu süreç, literatür çalışması, sınıf gözlemi ve yazılı test veya görüşme ile yapılabilir. Bu araştırmada ise literatür taraması araştırmaya konu olan öğretimsel müdahalenin tasarımına ve geliştirilmesine rehberlik etmiştir. Ayrıca araştırmacı öğretmenin 15 yıllık mesleki deneyimi ve araştırmanın yürütüleceği öğrencilerin kendi öğrencilerinin olması konu hakkında öğrencilerinin ihtiyaçlarını ve eksikliklerini belirlemede önemli bir etken olmuş ve uygulama geliştirilmesine katkıda bulunmuştur.

3.1.1.2. Öğretim Deneyi

Tasarı araştırmasının ikinci aşaması, varsayımsal öğrenme rotasında belirlenen varsayımların ve öğretim etkinliklerinin sınıfta öğrencilerin gerçek öğrenmeleriyle karşı karşıya geldiği öğretim deneyi aşamasıdır. Cobb vd. (2003) öğretim deneylerini "öğrencilerin öğrenme süreçlerini anlamak ve geliştirmek için eş zamanlı olarak tekrarlanan teoriye dayalı girişimler" olarak tanımlamıştır. Burada bahsedilen deney, klasik deneysel tasarımdaki deney ve kontrol grubu ile eşdeğer değildir. Geliştirilen varsayımsal öğrenme rotası öğrenme etkinlikleri tüm gruba uygulanarak tasarı araştırmasının analizi için ayrıntılı ve çeşitli veri toplanır. Ayrıca klasik deneysel tasarımdan, öğrencilerin matematiği anlamlandırma ve öğrenme süreçlerini betimlemesi

bakımından farklılaşmaktadır. Bu yönüyle tasarı araştırmaları, öğrencilerin konu içeriklerini nasıl anlamlandırdıklarını ve belirli kavramları nasıl öğrendiklerini göstermesi ve öğrenci öğrenmelerinin bilişsel haritasını ortaya koyması açısından matematik eğitimine yenilikçi bir katkı sağlamaktadır.

Öğretim deneyleri esnasında, geliştirilen varsayımsal öğrenme rotası, araştırmacılara rota boyunca nelere odaklanılması gerektiği yönünde, rota boyunca olası öğrenme ilerlemelerine ve etkinliklerdeki beklenen öğrenci çözüm stratejilerine rehber olarak fayda sağlamaktadır. Fakat varsayılan öğrenmeler ile sınıftaki gözlenen öğrenmeler farklı olabilir. Öğretmen veya araştırmacı, bir sonraki ders için varsayımsal öğrenme rotasını veya öğretim etkinliklerini öğrencilerin gerçek öğrenmelerine göre tekrar düzenleme ihtiyacı hissedebilir. Varsayımsal öğrenme rotasındaki bu değişiklikler, genellikle önceden tahmin edilmeyen öğrenci stratejileri, çok zor olan veya uygun olmayan etkinlikler vb. gibi sınıftaki olaylar nedeniyle yapılır. Öğrenci öğrenmesi üzerine yapılan varsayımlar bazen tamamen veya kısmen değiştirilebilir, eklemleme yapılabilir ya da alternatif varsayımlar üretilip test edilebilir. Varsayılan öğrenme rotası böylece öğretim deneyi aşamasında da değişebilir.

3.1.1.3. Geriye Dönük Analizler

Tasarı araştırmasının üçüncü aşaması geriye dönük analizlerdir. Öğretim deneyleri yapıldıktan sonra, öğrencilerin yazılı çalışmaları, araştırmacı ve öğretmenin sınıf hakkında tuttukları notlar, öğrencilerin video ve ses kayıtları gibi çeşitli veri türlerinden oluşan veriler; geriye dönük analiz aşaması ile analiz edilir. Geriye dönük analiz sırasında, varsayımsal öğrenme rotası, araştırmacının analizde neye odaklanması gerektiğini belirleyen bir rehber işlevi görür. Öğrencilerin öğrenmeleri hakkında tahminler yapıldığından, araştırmacı bu varsayımları öğretme deneyi sırasında yapılan gözlemlerle karşılaştırır. Öğretim deneyi esnasında gelişen varsayımsal öğrenme rotası geriye dönük analizlerden sonra yeniden formüle edilerek öğrenciler için sıralı bir öğretim yapısının temelini oluşturur. Bu çalışmada da geriye dönük analiz ile varsayımsal öğrenme rotası revize edilip son hali verilmiştir.

Aşağıdaki Tablo 2'de özetlendiği gibi, varsayımsal öğrenme rotasının her aşamada farklı önemli rolü vardır.

Tablo 2.

Varsayımsal Öğrenme Rotasının Tasarı Araştırmasının Aşamalarındaki Konumu

Aşama	Konumu
Hazırlık ve Tasarım	Varsayımsal Öğrenme Rotası formüle edilmeye başlanmış ve çalışma için tasarlanacak öğretim materyali ve ekinliklerine yön vermiştir.
Öğretim Deneyi	Varsayımsal Öğrenme Rotası, öğretmenin dersleri yürütmesi için rehber görevi görür.
Geriye Dönük Analiz	Varsayımsal Öğrenme Rotası, sınıftaki öğrencilerin gerçek öğrenmeleriyle karşılaştırılarak, analiz yapmak için rehber olarak uygulanır. Bu analizlerden sonra, Varsayımsal Öğrenme Rotası revize edilir ve yeniden formüle edilir.

3.2. Araştırma Ortamı ve Katılımcılar

Bu araştırma, araştırmacının 4 yıldır matematik öğretmeni olarak görev yaptığı Adana İli Seyhan İlçesine bağlı bir ortaokulda 7. Sınıf öğrencileri ile gerçekleştirilmiştir. Gözlemci öğretmen ise aynı okulun matematik öğretmeni olan idarecisidir. Araştırmacının kendi görev yaptığı okulda 7. Sınıf düzeyinde derslere girdiği için araştırmanın yürütüleceği öğrencileri tanıyor olması, okulun bulunduğu ilçede başarı olarak üst sıralarda olan bir okul olması ve sosyo-ekonomik düzeyi orta ve yüksek bir çevrede bulunması dolayısıyla araştırma sürecinde olumlu ebeveyn desteği alabilecek öğrenci profilinin olması araştırmacının kendi okulunda araştırmayı yürütmesini belirlemede etkili olmuştur.

Genişleyen şekil örüntü görevleriyle çalışmak için gerekli ön koşul matematik bilgisine sahip olmaları düşüncesi ile araştırmanın 7. Sınıf öğrencileri ile yürütülmesi uygun görülmüştür. Ayrıca 7. Sınıflar düzeyinde genişleyen şekil örüntüleri ile yapılan araştırmanın, bu öğrencilerin 8. Sınıf ve lise matematik müfredatı hedeflerine dayalı olarak karşılaşacakları matematik içeriği için bir temel sağlamasına katkı olacağı düşünülmüştür. Araştırmacı 7. Sınıf öğrencilerine öğretim deneyi başlamadan önce ön test olarak fonksiyonel düşünme testi uygulanmıştır. Bu öğrenciler fonksiyonel düşünme testinden elde ettikleri performans puanlarına göre iyi(20-27 puan arası), orta (11-19 puan arası) ve düşük (0-10 puan arası) şeklinde gruplara ayrılmıştır. Bu gruplar içinden 7'şer öğrenci amaçlı örnekleme metodu ile belirlenerek 21 öğrenci öğretim deneyi için

seçilmiştir. Öğretim deneyi sürecinin ortasında 2 öğrenci sağlık sorunları nedeni ile çalışmadan ayrılmak zorunda kalmış ve araştırma 19 öğrenci ile tamamlanmıştır. Araştırmanın amacına bağlı olarak bilgi açısından zengin durumların seçilerek derinlemesine araştırma yapılmasına olanak tanıyan amaçlı örnekleme, belli ölçütleri karşılayan veya belirli özelliklere sahip olan bir veya daha fazla özel durumlarda çalışılmak istendiğinde tercih edilmektedir (Büyüköztürk vd. , 2012).

Öğretim deneyine katılan 21 öğrenci gizlilik ilkesi gereğince araştırmada numaralandırılmıştır. Numaralandırılmış öğrencilerin ön test sonuçlarına göre yer aldıkları başarı grupları ve cinsiyetleri aşağıda Tablo 3'te gösterilmiştir.

Tablo 3**.**

Ön Test Sonucunda Oluşan Performans Grupları ve Öğrenci İsim Kodları

	Düşük	**Orta**	**Yüksek**
Kız Öğrenci	Ö1, Ö19,Ö8	Ö6	Ö5,Ö9,Ö10,Ö12,Ö13,Ö21
Erkek Öğrenci	Ö4,Ö3,Ö7,Ö16	Ö2,Ö17,Ö11,Ö14,Ö20,Ö18	Ö15

Öğrenciler, numaralandırılmış kısaltmalarının yanına parantez içinde ilk olarak cinsiyetinin ilk harfi, sağına ise performans düzeyinin ilk harfi yazılarak bulgular bölümünde kodlanmıştır. Örneğin Ö1'in cinsiyeti kız ve performans düzeyi "düşük" olduğu için Ö1 bulgularda, "Ö1(KD) şeklinde, Ö17 cinsiyeti erkek ve performans düzeyi orta olduğu için Ö17, "Ö17(EO) şeklinde kodlanmıştır.

Öğretim deneyi sürecinin ilk haftasında Ö21(KY), ortasında ise Ö20(EO) kodlu öğrenciler sağlık sorunları nedeni ile çalışmadan ayrılmak zorunda kalmış ve araştırma 19 öğrenci ile tamamlanmıştır.

Araştırmanın öğretim deneyi aşamasında araştırmacı aynı zamanda öğretim etkinlikleri uygulayıcı öğretmenidir. Simon (1995), tasarı araştırmalarında araştırmacının ayrıca öğretmen rolünde olmasının teori ile uygulamanın etkileşimini doğrudan incelemede etkili bir yöntem olduğunu vurgulamaktadır. Fakat araştırmada öğretmen olarak, öğretimi doğrudan etkilemek ve bunu yaparken aynı zamanda araştırmacı rolüyle öğrencileri süreç içinde derinlemesine gözlemlemek ve analiz etmenin zor olacağı düşüncesi ile öğretim deneyinde aynı okuldan bir matematik öğretmeni gözlemci öğretmen rolüyle öğretim deneyine katılmıştır. Ayrıca sınıfta iki matematik öğretmenin

bulunması, öğrencilere normal sınıf durumlarına göre daha etkili öğrenme fırsatları sağlayacağı düşünülmüştür.

3.3. Veri Toplama

Bu araştırmada veri toplamanın amacı, öğrenenlerin fonksiyonel düşünme yeterliliklerinin gelişimi hakkında gerçeği yansıtan çıkarımlarda bulunulabilmesi için zengin çerçevede bilgi toplamaktır. Veri toplama için birden çok yöntemin kullanılması, zengin ve ayrıntılı bilgiler üretir ve bulguların geçerliliğini artırır (Merriam ve Tisdell, 2015). Araştırmada çeşitli şekilde veri toplanmıştır. Bu açıdan ilk olarak araştırmada öğrencilerin fonksiyonel düşünmelerinin gelişimini sayısal olarak karşılaştırarak analiz etmek için ön test ve son test kullanılmıştır. Ön test ve son testin amacı, öğrencilerin genişleyen şekil örüntüleri hakkındaki bilgilerinin ve fonksiyonel düşünme gelişimini ortaya koyan öğrenci performans verileri elde etmektir. Ön test ve son testten elde edilen bu veriler karşılaştırılarak öğrencilerin fonksiyonel düşünme gelişimi ortaya koyulması amaçlanmıştır. Ayrıca ön test ve son test olarak uygulanan fonksiyonel düşünme testinde yer alan 8,17 ve 19. sorularda öğrencilerin fonksiyonel düşünme düzeyleri tespit edilerek, ön test ve son test arasında her öğrencinin fonksiyonel düşünme düzeylerinin gelişimi hakkında kıyaslama yapılması amaçlanmıştır. Buna ek olarak fonksiyonel düşünmenin gelişimi, öğretim deneyi esnasında öğrenci bireysel ve grup çalışma kağıtları, araştırmacı öğretmenin gözlemci öğretmenle beraber tuttukları notlar, öğretmen günlüğünden elde edilen veriler ile ispatlanmaya çalışılmıştır.

3.4. Veri Toplama Araçları

3.4.1. Öğrenci Bireysel ve Grup Çalışma Kağıtları

Araştırmada öğrenme etkinlikleri, öğrencilerin fikirlerini tartışmalarını ve paylaşmalarını sağlamak için bireysel veya küçük grup etkinliği ile başlayıp ardından tüm grup tartışması ile devam etmiştir. Her bir öğretim etkinliği sonunda bireysel ve grup çalışma kağıtları toplanarak günlük ve geriye dönük analiz aşamalarında analiz edilmiştir.

3.4.2. Öğretmen Günlüğü

Öğretim etkinlikleri sırasında ve öğrenci bireysel ve grup çalışma kağıtlarının incelenmesi sonunda, araştırmacı öğretmenin o günkü derse ait gözlemleri bir öğretim

günlüğüne kaydedilmiştir. Derslere ait tüm notlara tarih verilerek kaydedilmiştir. Günlüğün amacı, olayları ve gözlemleri mümkün olduğu kadar zamanında ve doğru olarak yakalamaktır. Günlükte, etkinlikler sırasında öğrencilerin problemleri çözmek için kullandıkları stratejiler, grup içindeki öğrenci grup dinamikleri, öğretim yönergelerine karşılık varsayılanın dışında beklenmeyen öğrenci stratejileri, öğrencilerle ders esnasında etkinliklere yönelik yapılan resmi olmayan görüşme diyaloglarından çıkarılan yorumlar yer almaktadır. Öğrenciler öğrenme etkinlikleri boyunca çalışırken, öğrencilerin ne yaptığını, söylediğini ve yazdığını daha iyi anlamak için resmi olmayan küçük ses kayıtları yapılmıştır. Araştırmacı tarafından sorulan sorular, grupların düşünme ve akıl yürütmelerine etki etmemiş, onların öğrenmelerini yansıtmasına rehberlik etmiştir. Bu ses kayıtları araştırmacı tarafından yazıya dökülmüş ve bu yazılı dökümler geriye dönük analizlerde kullanılmıştır.

3.4.3. Araştırmacı Öğretmen ile Gözlemci Öğretmenin Her Ders Sonrası Notları

Araştırmacı öğretmen ile aynı okulda idarecilik yapan matematik öğretmeni gözlemci öğretmen her ders sonrasında toplantı yaparak o dersle alakalı gözlemlerini birbirleriyle paylaşmıştır. Paylaşımlar yazıya dökülerek geriye dönük veri analizinde kullanılmıştır.

3.4.4. Fonksiyonel Düşünme Testi (FDT)

Araştırmada ön test ve son test olarak kullanılan FDT (bakınız Ek 1) bulunmaktadır. Araştırmanın başında uygulanan ön test ile öğretim deneyinin sonunda uygulanan son test öğrencilerin genişleyen şekil örüntüleri içeren örüntü problemlerinde fonksiyonel düşünmelerinde gelişim olup olmadığını karşılaştırmak üzere araştırmacı tarafından pilot uygulamadan önce geliştirilmiştir. Hazırlanan fonksiyonel düşünme testi 7. Sınıf matematik öğretim programında yer alan "M.7.2.1.3. Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimini bulur." kazanımına yöneliktir.

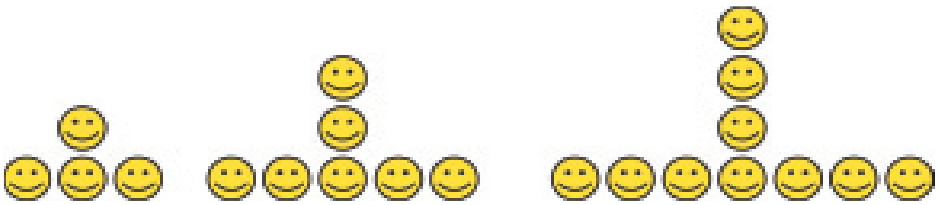
Öğretim deneyi öncesinde ön test ve öğretim deneyi sonrasında son test olarak uygulanan FDT' de açık uçlu 19 soru bulunmaktadır ve öğrencilere bitirmesi için 2 ders saati süre verilmiştir. Ön testler ve son testler tamamlandıktan sonraki bir gün içinde puanlanmıştır.

Ön test ve son test olarak uygulanan FDT' de öğretim etkinlikleri sırasında kullanılmayan 2 genişleyen şekil örüntüsü modeli bulunmaktadır. Her bir genişleyen şekil örüntüsü modelinin altında modele ait 9'ar tane açık uçlu alt soru bulunmaktadır. Bu örüntülerin altında yer alan ilk 3 soru, öğrencilerden örüntüdeki bir sonraki aşamayı çizmelerini veya bir sonraki aşamanın nasıl olduğunu tanımlamalarını isteyerek örüntünün yapısal analizine katılmalarını sağlamak içindir. Smith (2003), örüntüleri erken cebir ve fonksiyon kavramı ile bütünleştirmenin matematik başarısı için anahtar olarak ifade ettiği çalışmasında, örüntülerin modelinde değişmeyen ve değişen parçalar bağlamında incelenmesi gerektiğini vurgulamıştır. Bu açıdan Smith (2003), örüntü çalışmalarında "Bu örüntünün genişlemesini nasıl tanımlarsınız?" ve "Örüntü nasıl tekrar eder veya genişletilir?" sorularının öğrencilere yöneltilmesi gerektiğini ifade etmiştir. Bu bağlamda FDT'de yer alan örüntü problemlerinde buna yönelik ifadeler kullanılmıştır.

Daha sonraki 4'er soruda, örüntülerin yakın ve uzak adım numarasındaki şekil sayısını hesaplamaları istenmiş ve bu sorularda sonuçlarını nasıl bulduğuna dair sayısal ya sözel açıklama istenmiştir. Daha sonraki soruda ise öğrencilerden herhangi bir adım numarasındaki şekil sayısı için bir genel kural yazmaları ya da ifade etmeleri istenmiştir. Her bir örüntü modelinin son sorusunda ise örüntüye ait şekil sayısı verilerek bu şekil sayısının örüntünün hangi adım numarasına ait olduğu sorulmuştur. Son soruda ise fonksiyon makinesi ve giren-çıkan tablosu verilerek bu fonksiyon makinesinin kuralını bulmaları istenmiştir.

FDT'nin kapsam geçerliliği, kamuda çalışan tecrübeli iki matematik öğretmeni ve üniversitede matematik eğitiminde yer alan 3 akademisyen tarafından değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmeler sonucunda testteki sorularda ekleme veya çıkarma yapılmamış fakat testteki bazı soruların ifadeleri değiştirilmiştir.

Uzman görüşü sonrası FDT'nin pilot uygulaması Adana ili merkez Seyhan ilçesinde bulunan bir devlet okulunun 8. Sınıf düzeyindeki 89 öğrencisi ile yapılmıştır. Pilot uygulama sonrasında öğrencilerin anlamakta zorluk çektikleri testteki bazı maddelerin ifadeleri düzeltilerek revize edilmiştir. Revize öncesi soruların ifadeleri aşağıda Şekil 3 ve Şekil 4 'te verilmiştir.



2. 10. Terimin nasıl çizileceğini nasıl açıklarsınız?
3. 40. Terimin nasıl çizileceğini nasıl söylersiniz?

Şekil 3. Testteki 2 ve 3. soruların revize öncesi ifadeleri



8. Herhangi bir aşama için toplam gülen yüz sayısını veren bir kural yazın. Kuralınızın neden mantıklı olduğunu düşündüğünüzü açıklayın.

Şekil 4. Fonksiyonel Düşünme Testi 8. sorunun revize öncesi ifadesi

FDT'deki ilk örüntünün 2. ve 3. soruların ifadelerinde yapılan değişiklikler sorusunda soruların ifadeleri sırasıyla; 'Örüntünün nasıl büyüdüğünü dikkate alarak 10. Terimin nasıl çizileceğini nasıl açıklarsınız? 'Örüntünün nasıl büyüdüğünü dikkate alarak 40. Terimin nasıl çizileceğini nasıl açıklarsınız?' şeklinde değiştirilmiştir.

Yapılan diğer bir ifade değişikliği testin 8. Sorusunda yer almaktadır. Bu sorunun ifadesi "Herhangi bir aşama için toplam gülen yüz sayısını veren bir kuralı kelimelerle ya da sembolik olarak yazın. Kuralınızın neden mantıklı olduğunu düşündüğünüzü açıklayın." şeklinde değiştirilmiştir.

Yukarı da gösterilen Şekil 3 ve Şekil 4 sorularda yapılan değişikliklerin aynısı ikinci örüntü görevinde, birinci örüntüdeki bu sorulara karşılık gelen sorularda da yapılmıştır.

3.5. Veri Analizi

Mevcut araştırmada verilerin analizinde hem nicel hem de nitel veri analizi kullanılmıştır.

3.5.1. Nicel Veri Analizi

Öğretim deneyi öncesi ön test olarak kullanılan fonksiyonel düşünme testinin analizi, düşük, orta ve yüksek düzey olarak belirlenen öğrenci seviye gruplarında yer alan öğrencilerin seçilmesini ve öğretim deneyi öncesi fonksiyonel düşünmeye yönelik öğrencilerin nicel verilerini belirlemeyi sağlamıştır. Ayrıca öğretim deneyi sonrasında katılımcı öğrencilere son test olarak uygulanan fonksiyonel düşünme testi puanları ile ön test puanlarının karşılaştırılması öğrencilerin fonksiyonel düşünme gelişimini belgeleyen nicel veriler ortaya koymuştur.

Nicel veri analizinde, ön test ve son test olarak kullanılan FDT'de öğrencilerin nicel performans puanları analiz edilmiştir. Öncelikle verilerin normallik analizi kontrol edilmiştir. Örneklem grubunun büyüklüğü N>30 ise normallik analizi için Kolmogorov-Smirnov testi sonuçlarına, eğer örneklem grubunun büyüklüğü N<30 ise normallik analizi için Shapiro-Wilk test sonuçlarına bakılır (Büyüköztürk, 2019). Ön test ve son testin normallik varsayımı kontrol etmede N<30 olduğu için Shapiro-Wilk normal dağılım testi sonuçları incelenmiştir. Aşağıdaki Tablo 4'te Shapiro-Wilk normal dağılım testi sonuçları verilmiştir.

Tablo 4**.**

Ön Test ve Son Test Puanları Shapiro Wilk Test Sonuçları

	İstatistik	df	p
Ön Test	,943	19	,298
Son Test	,789	19	,001

Tablo 4 incelendiğinde Shapiro Wilk testi .05 anlamlılık düzeyine göre ön test puanlarının normal dağılım gösterdiği (p= .298> .05), fakat son test puanlarının normal dağılım göstermediği (p = .001< .05) bulunmuştur.

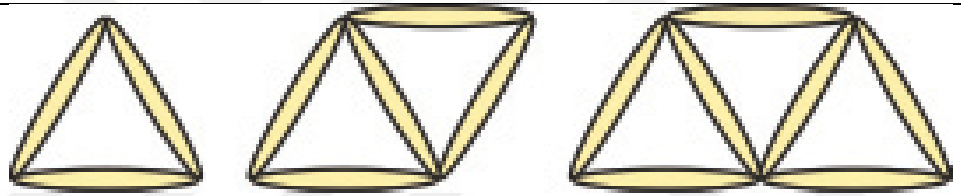
Son testin normal dağılım göstermemesi ve öğrenci sayısının 30'dan az olması sebebiyle non-parametrik test uygulanması uygun bulunmuştur. Bu bağlamda ön test puanları ve son test puanları arasında anlamlı bir fark olup olmadığını analiz etmeye yönelik Wilcoxon İşaretli Sıralar testi yapılmıştır.

3.5.2. Nitel Veri Analizi

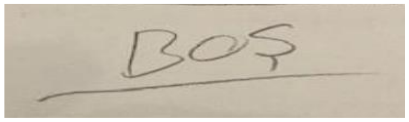
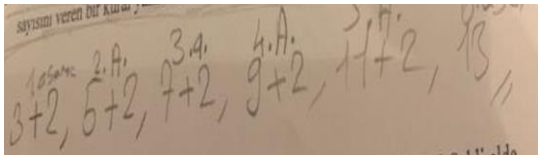
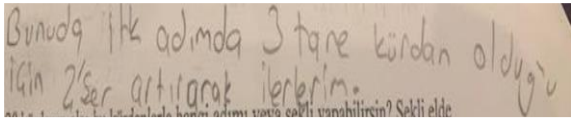
Analizin nitel kısmında ise, fonksiyonel düşünme testindeki örüntünün genel kuralını ifade etmeleri istenen 8,17 ve 19. Sorulara ait öğrenci cevapları incelenerek öğrencilerin çözüm stratejileri sınıflandırılmıştır. Bu sınıflandırma Stephens vd. (2017) tarafından geliştirilen fonksiyonel düşünmenin gelişim seviyeleri çerçevesine göre yapılmıştır. Bazı öğrencilerin cevapları düzeyler açısından anlaşılamadığından bu öğrencilerin cevapları hiçbir düzeye yerleştirilememiştir. Bu öğrenciler için fonksiyonel düşünme düzeyleri çerçevesine "Diğer" kodu eklenmiştir. Örnek öğrenci cevap kodlaması aşağıdaki Tablo 5'te gösterilmiştir.

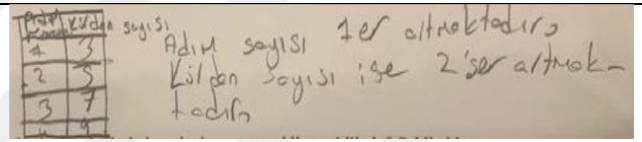
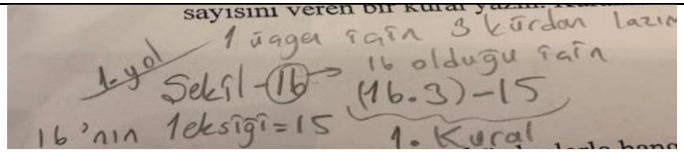
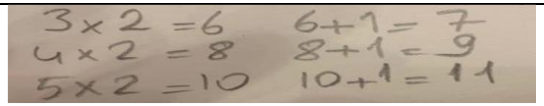
Tablo 5.

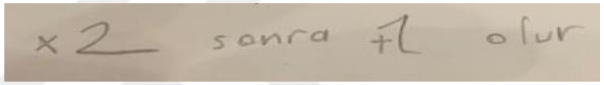
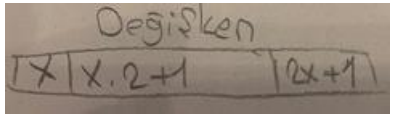
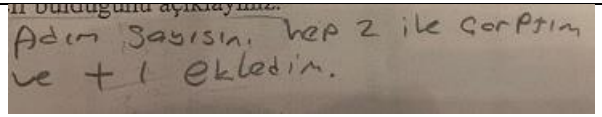
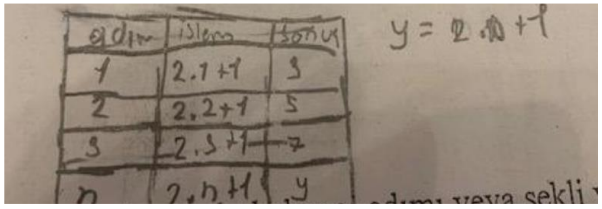
17. Soru için Kodlama Örneği

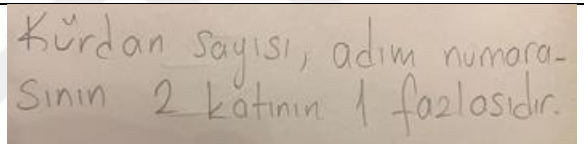
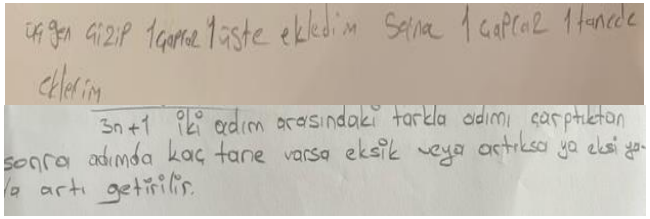


Herhangi bir aşama numarasını yapmak için ihtiyaç duyacağınız toplam kürdan sayısını veren bir kuralı kelimelerle ya da sembolik olarak yazın. Kuralınızın neden mantıklı olduğunu düşündüğünüzü açıklayın.

Strateji Kodu	Örnek Cevap	Kodlama Açıklama
D0: Yanıt Yok: Öğrenci örüntüde herhangi bir ilişkiyi betimleyemez.		Öğrenci soruya cevap verememiştir. Hiç fonksiyonel ilişki göstergesi yoktur.
D1: Özyinelemeli Özel: Öğrenci örüntüdeki sayılar arasında özyinelemeli bir ilişki fark eder. Fakat bu ilişkiyi belirli bir örnek açısından tanımlar.2,4,6,8…		Öğrenci belli adımlarda özyinelemeli ilişkiyi kullanmıştır. Örüntünün ilk birkaç adımınındaki şekil sayısını 2'şer arttırarak yazmıştır
D2: Özyinelemeli Genel: Öğrenci özyinelemeli ilişkiyi belirli değerlerden bağımsız olarak genelleyerek		Öğrenci özyinelemeli ilişkiyi belli adımlarda değil örüntünün tamamına 2'er artıyor şeklinde genellemiştir.

bir kural olarak ifade eder.2,4,6,8 yerine her seferinde 2 artıyor şeklinde geneller.		
D3:Kovaryansel İlişki: Öğrenci örüntüdeki nicelikleri fark eder. Her niceliğin kendi arasındaki değişimi fark etmesine rağmen bu niceliklerin birlikte ilişkisini açıklayamaz.		Öğrencinin adım sayısı ile kürdan sayısı niceliklerini fark etmiştir. Adım sayısının 1 artarken kürdan sayısının 2 arttığını ifade etmiştir.Fakat iki niceliğin birlikte nasıl değiştiğini ifade edememiştir.
D4: Tek Örnekleme Öğrenci iki nicelik arasındaki ilişkiyi tanımlayabilir, fakat ilişkiyi tanımlayabilmesine rağmen, nicelikler arasındaki ilişkiyi genelleyemez ve ilişkiyi matematiksel dönüşümler yapacak şekilde ifade edemez.		Öğrenci bu cevapta adım sayısı ile kürdan sayısı arasındaki ilişkiyi tek bir örnek üzerinde hesaplamıştır. Bu iki nicelik arasındaki dönüşümü diğer adımlar için genelleyememiştir.
D5: Fonksiyonel Özel: Öğrenci, belirli sayıları kullanarak fonksiyonel bir ilişki tanımlar, ancak değişkenlerle ilgili genel bir açıklama yapamaz. 1 2 = 2, 2 2 = 4, 3 2 = 6, 4 2 = 8, …		Öğrenci belli nicelikler arasındaki matematiksel dönüşümü ifade etmesine rağmen bunu genelleyememiştir.

D6: Fonksiyonel Temel: Öğrenci, değişkenler arasındaki genel ilişkiyi tanımlar, ancak aralarındaki dönüşümü tanımlayamaz.		Öğrenci nicelikler arasındaki matematiksel ilişkiyi belirli adımlardan örüntünün tamamına genellemiştir. Fakat aralarındaki dönüşümü ifade edememiştir.
D7:Fonksiyonel Değişkenle Öğrenci, değişkenlerde eksik fonksiyon kuralını tanımlar, genellikle dönüşümü bir değişken üzerinden açıklar.		Öğrenci, sadece adım numarasına karşılık gelen x değişkeni ile fonksiyon kuralını ifade etmiştir.
D8:Fonksiyonel Kelimelerle Öğrenci, değişkenlerde eksik fonksiyon kuralını tanımlar, genellikle dönüşümü bir değişken üzerinden kelimelerle açıklar.		Öğrenci sadece adım numarasını değişkenini kullanarak fonksiyonel ilişkiyi kelimelerle ifade etmiştir.
D9: Yoğun Fonksiyonel Değişkenlerle Öğrenci, iki değişken arasındaki		Öğrenci iki değişkeni de kullanarak fonksiyonel ilişkiyi değişkenlerle genellemiştir.

genelleştirilmiş bir ilişkiyi tanımlayan değişkenlerle fonksiyon kuralını tanımlar.		
D10:Yoğun Fonksiyonel Kelimelerle Öğrenci, iki değişken arasındaki genelleştirilmiş bir ilişkiyi tanımlayan kelimelerde fonksiyon kuralını tanımlar.		Öğrenci,değişkenler arasındaki tam fonksiyonel ilişkiyi kelimelerle ifade etmiştir.
Diğer Öğrenci cevabı fonksiyonel düşünme düzeylerinin hiçbirine yerleştirilememektedir.		Verilen cevap fonksiyonel düşünme düzeylerinin hiçbirine uymamaktadır.

3.6. Geçerlilik ve Güvenilirlik

Geçerlilik ve güvenilirlik, tasarım araştırmaları da dahil olmak üzere her türlü araştırmada dikkate alınması gereken önemli hususlardır. Bu çalışmanın kalitesini artırmak için veri toplama ve veri analizi sürecinde geçerlilik ve güvenirlik konularına dikkat edilmiştir.

Nitel araştırmalarda inandırıcılık olarak da adlandırılan iç geçerlilik, sonucun diğerleri için güvenilirliğini ifade eder (Bakker ve Van Eerde, 2015). Bu çalışmanın iç geçerliliğini artırmak için, verileri çeşitlendirmek (üçgenleştirme), katılımcılarla uzun süre etkileşim halinde olma ve geriye dönük analiz sırasında verileri varsayımlar ile test ederek varsayımları iyileştirmek kullanılmıştır. Hazırlık ve Uygulama aşamasında veri toplamada ve analizinde, öğrencilerin fonksiyonel düşünmelerini bir araya getirmek için birden çok veri toplama aracı kullanılmıştır. Bu yöntem çalışmanın iç geçerliğini artırmaktadır. Araştırmacı aynı zamanda öğretim sürecini gerçekleştiren kişi olduğu için tüm süreçte öğrencilerle etkileşim halinde olarak olay ve yorumları katılımcıların bakış açısıyla ortaya koymuştur. Bu da çalışmanın iç geçerliliğini arttırmıştır. Bu çalışmada, öğrenme süreci ile ilgili ayrıca öğretmen rolündeki araştırmacının sınıf gözlemlerinden, öğrencilerin yazılı çalışmalarından elde edilen bireysel ve grup çalışma kâğıtlarından, grup tartışmaları sonunda grup başkanı olan öğrencinin ses kaydının her ders sonunda yazıya dökülmesiyle toplanan veriler ve gözlemci öğretmen ile araştırmacı öğretmenin toplantı notları kullanılmıştır.

Dış geçerlilik (genellenebilirlik ve aktarılabilirlik olarak da bilinir), bulgunun başka bir bağlamda ne ölçüde yararlı olabileceği olarak tanımlanır (Bakker ve Van Eerde, 2015). Yıldırım ve Şimşek (2005), bir araştırmanın dış geçerliliğini arttırmada araştırma sürecine yönelik ayrıntılı açıklama ve amaçlı örnekleme kullanılmasının faydalı olduğunu ifade etmektedir. Bu çalışmada, dış geçerliğin arttırılmasına katkı sağlamak için öğretme ve öğrenme süreci ve öğrencilerin katılımına ilişkin ayrıntılı açıklamalar ve analizler kullanılmıştır. Ayrıca katılımcı seçiminde amaçlı örnekleme kullanılmıştır.

Araştırmacının verileri analiz etmedeki bağımsızlığının derecesi iç güvenilirlik olarak adlandırılır (Bakker ve Van Eerde, 2015). Bu çalışmada iç güvenilirliği sağlamak için, geriye dönük analiz sırasında her etkinlikte üretilen varsayımlar veri çeşitlendirmesi (üçgenleştirme) ve literatür taraması ile desteklenerek test edilmiştir. Araştırmacı öğretmen ile gözlemci öğretmenin ders sonlarında derslerle ilgili önemli ve beklenmeyen durumları tartışarak not etmesi geriye dönük analiz esnasında revize edilmiş öğrenme

rotasının gelişiminde etkili olmuştur. Ayrıca öğrencilerle yapılan diyalogların ders sonlarında yazıya dökülmesi verilerin yorumlanmasında iç güvenilirliği arttırmıştır.

Dış güvenilirlik, çalışmanın sonucunun doğrulanabilir olması için kullanılan terimdir (Bakker ve Van Eerde, 2015). Dış güvenilirlik, verilerin yorumlanmasının araştırmacının öznel yargısına değil, katılımcıların gerçek durumuna dayanması gerektiği anlamına gelir. Bu çalışmanın dış güvenilirliğini artırmak için araştırmanın aşamaları belgelendirilerek, çalışmanın nasıl yapıldığı açıklanarak ve veriler olabildiğince şeffaf sunularak sağlanmıştır. Bu açıdan bu araştırmanın, okuyucunun öğrenme sürecini izleyebileceği ve çalışmayı yeniden yapılandırabileceği şekilde olduğu düşünülmüştür.

Fonksiyonel düşünme testinde puanlanan sorulara ait pilot uygulama, ön test ve son test için Cronbach's Alfa güvenilirlik analizi Tablo 6'da gösterilmiştir.

Tablo 6.

Pilot uygulama, Ön ve Son Test Fonksiyonel Düşünme Testi Cronbach's Alfa Katsayısı Değerleri

Test	Cronbach's Alpha
Pilot Uygulama	.897
Ön Test	.800
Son Test	.869

Yukarıdaki Tablo 6'da pilot uygulama, ön test ve son teste ait Cronbach's Alfa Değerleri verilmiştir. Pilot uygulama için Cronbach's Alfa katsayısı 0.897, Ön test için Cronbach's Alfa katsayısı 0.800, Son test için Cronbach's Alfa katsayısı 0.897 olduğu görülmektedir. "$0.80 \leq \alpha < 1.00$ olduğunda testler yüksek ölçüde güvenilir kabul edilmektedir (Büyüköztürk vd., 2012). Bu açıdan fonksiyonel düşünme testi pilot uygulama, ön test ve son test için yüksek düzeyde güvenilir olduğu söylenebilir.

Araştırmada fonksiyonel düşünme testinde nitel olarak değerlendirilen 8,17 ve 19. Sorulara ilişkin cevapların Stephens vd. (2017) tarafından geliştirilen fonksiyonel düşünme düzeyleri çerçevesine göre sınıflandırılmasında kodlayıcılar arası uyum hesaplanmıştır. Bunun için araştırmacı ve aynı okulda birlikte görev yapan bir matematik öğretmeni birlikte çalışmıştır. Bu güvenirliğin hesaplanmasında pilot uygulamada yer alan 89 öğrencinin %25'ine denk gelen 22 öğrencinin cevap kağıtları rastgele seçilmiş ve her iki kodlayıcı tarafından öğrencilerin cevap stratejileri kodlanmıştır. Daha sonra araştırmacı ile diğer kodlamacının yapmış olduğu kodlamalar soru bazında

karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma [Uyum= Uyuşan/ Uyuşan + Uyuşmayan]x100 formüle ile hesaplanarak yapılmıştır. Kodlayıcılar arası güvenirliğin sağlanması için soru bazında %80 ve üzerinde uyum beklenmiştir. Pilot uygulamada soru bazında hesaplanan kodlayıcılar arası uyum yüzdeleri Tablo 7'de verilmiştir.

Tablo 7.

Pilot Uygulama Soru Bazında Kodlayıcılar Arası Uyum Yüzdeleri

8. Soru	%82
17. Soru	%86
19. Soru	%72

Kodlama sonunda iki kodlayıcı arasında %80'nin altında bir uyuşma varsa araştırmacı ile diğer kodlayıcı arasındaki kodlamalar soru bazında öğrenci cevapları kontrol edilerek uyuşmayan kodlar tartışılarak görüş birliği oluşunca revize edilmiştir. Bu bağlamda Tablo 7 'de görüldüğü üzere beklenen uyum yüzdesini karşılamayan 19. Soruda kodlayıcılar öğrenci cevapları kodlamalarını tekrar tartışarak görüş birliği sağlanıncaya kadar revize etmişlerdir. Aynı hesaplama ana uygulama için tekrar edilmiştir. Pilot uygulamada uyuşmayan kodlamaların kodlayıcılar arasında tekrarlı tartışılması ön test ve son testte kodlamalarda kodlayıcılar arasında görüş birliği oluşmasına etki etmiştir. Bu görüş birliği ile ön test ve son testte ki kodlamalarda kodlayıcılar arası uyum güvenilirliği beklenenin üzerinde oluşmuştur.

Varsayımsal Öğrenme Rotası Oluşumu

Varsayımsal Öğrenme Rotası, bir tasarı araştırması için öğrenci öğrenmelerine yönelik oluşturulan hipotezlerdir. Simon (1995), Varsayımsal Öğrenme Rotasını, öğrenme etkinliğine katılan öğrencilerin konu hakkındaki öğrenmelerini ve ilerlemelerini açıklarken, öğretmen tarafından yapılan tahminler olarak tanımlamıştır. Varsayımsal Öğrenme Rotası, tasarı araştırmasının üç aşamasında da farklı rollere sahiptir. Hazırlık aşamasında çalışmalar bir varsayımla başlar. Varsayım, matematiğin belirli bir alanına veya pedagojik bir yaklaşıma özgüdür (Gravemeijer, 2004). Araştırmada oluşturulan varsayımlar araştırmacının, öğrenciler için daha iyi sonuçlara götürecek yaklaşımları içeren beklentilerle birlikte ilgili araştırma literatürünün güçlü araştırmalarını yansıtır. Bu araştırmada da literatür taraması, öğrencilerin fonksiyonel düşünmeyi nasıl geliştirdikleri

ve bu becerileri geliştirmeye olanak sağlayan uygun materyal ve görevlerin özellikleri hakkında bilgi sağlamıştır.

Tasarı araştırmasının temel amacı, öğrencilerin öğrenmeleri ile ilgili öğretim teorileri geliştirmek ve bu öğrenmeyi desteklemek için tasarlanmış eğitim materyalleri geliştirmektir. (Gravemeijer ve Cobb, 2006). Tasarı araştırmaları, belirli bir konuya özgü hem etkili öğretim materyalleri hem de bu materyallerin eğitimde nasıl kullanılabileceği hakkında bilimsel bir sonuç vermektedir. Bu anlamda bu çalışmadaki ana varsayım genişleyen şekil örüntülerinin fonksiyonel düşünme için faydalı bir materyal olacağı ve bunlarla oluşturulacak bir öğrenme yolunun öğrencilerin fonksiyonel düşünmesinin gelişimine faydalı bir yapı sunacağıdır. Bu varsayımla hazırlık aşamasında genişleyen şekil örüntüleri temel alan varsayımsal öğrenme rotası oluşturulmuş ve bu materyal öğretim sürecine yön vermiştir.

Hazırlık aşamasında inşa edilen varsayımsal öğrenme rotası bir sonraki bölümde detaylı şekilde anlatılacaktır. Hazırlanan varsayımsal öğrenme rotası, daha sonra öğretim deneyi aşamasında, derslerin yürütülmesi için bir rehber olarak kullanılmıştır. Geriye dönük analiz aşamasında, sınıfta gerçekleşen gerçek öğrenme sürecini kontrol etmek için varsayımsal öğrenme rotası kullanılmış ve bulgulara göre revize edilmiş veya yeniden formüle edilmiştir. Deneysel çalışmalardaki yapılan çalışmadan önce yapılması gereken ve uygulama sırasında revize edilemeyen hipotezden farklı olarak, varsayımsal öğrenme rotasındaki varsayımlar, çalışma sırasındaki bulgulara göre esnek bir şekilde düzenlenir. Öğrenciler problemlerle çalışana kadar, öğretmen dersler sırasında varsayımlarının geçerliliğini bilemez. Bu nedenle varsayımsal öğrenme rotası, öğrencilerin olası öğrenme sürecine hazırlık olarak kurgulansa da tam olarak tahmin edildiği gibi gerçekleşeceğinin garantisi yoktur. Bu nedenle, varsayımların gerçek öğrenme sürecine uyum analizi sonrasında revize edilmesi ve ayarlanması gerekir.

3.6.1. Öğrenme Hedefi ve Varsayımsal Öğrenme İlerlemesi

Bu öğretimsel müdahalenin öğrenme hedefi, öğrencilerin fonksiyonel düşünmelerinin geliştirilmesidir. Öğrencilerin fonksiyonel düşünmelerinin gelişimi için genişleyen şekil örüntüleri ile çalışacakları bir öğretim dizisi hazırlanmıştır. Bu dersler, özellikle orta sınıflar için geçerli olan aşağıdaki National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) içerik standartlarına yöneliktir:

- Değişkenlerin farklı kullanımlarına ilişkin ilk kavramsal anlayışı geliştirmek
- Fonksiyon kavramına ilişkin ilk kavramsal anlayışı geliştirmek
- Cebirsel ifadeler için eşdeğer formları tanıma ve oluşturma
- Çeşitli doğrusal ve doğrusal olmayan fonksiyonları tablolar, grafikler, sözlü kurallar ve sembolik kurallarla temsil etme, analiz etme ve genelleme

Genişleyen şekil örüntüleri, bu alanları desteklemek için fırsatlar sunar. Öğrencilerin soyut olan değişkenleri anlamlandırmaları ve bunların nasıl kullanılabileceği konusunda somut bir bağlam olarak kullanılır. Fakat genişleyen şekil örüntüleri temalı hazırlanan bu öğretim sürecinde öğrencilerin örüntünün genel kuralını bulması araştırmanın öncelikli hedefi değildir. Kuralı bulmak ve kuralı sembolik dille ifade etmek araştırmanın öncelikli amacı haline geldiğinde cebir öğretimi öğrenci için anlamsız, ezber ve korkulu bir süreç olarak kalmaktadır. Öğrencilerin fonksiyonel düşünme geliştirmeleri için öncelikle niceliklerin birbirine göre nasıl değiştiğini anlamaları önemlidir (NCTM, 2000). Başka bir deyişle, miktarların hangi durumlarda nasıl değiştiğini fark edebilmeleri gerekir. Bu açıdan genişleyen şekil örüntüleri görevlerinde öğrencilerin örüntünün fiziksel büyümesini analiz etmesi etkinliklerin başlama noktası olarak kabul edilmiştir. Etkinliklerin devamında örüntünün büyümesinin eşdeğer yollarını keşfeden öğrencilerin büyümeyi sayısal olarak ifade etmesiyle, nicelikler arasındaki ilişkiyi fark etmeleri düşünülmüştür. Üç sütunlu tablo, nicelikler arasındaki bu ilişkiyi öğrencilerin fark etmelerinde kolaylaştırıcı bir temsil olma görevi üstlenmiştir.

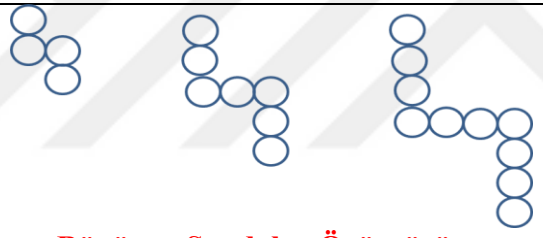
Bu bağlamda varsayılan öğrenme ilerlemeleri aşağıdaki gibidir:

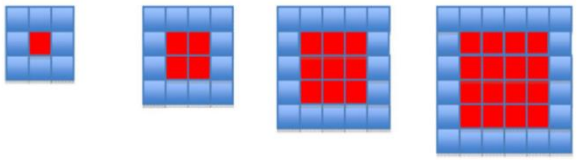
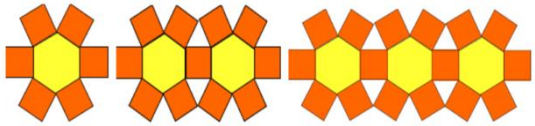
1. Genişleyen şekil örüntüsünün genişlemesinin farklı yollarını keşfederek genişlemeyi tanımlama, ifade etme ve sayısal ifadeye çevirme
2. Genişleyen şekil örüntüsünün fiziksel yapısını temsil eden sayısal ifade oluşturma ve bu ifadeleri üç sütunlu tabloda gösterme
3. Üç sütunlu tablodaki örüntüleri keşfederek adım numarası ile genişleyen şekil örüntüsünün ölçülebilir bir yönü arasındaki ilişkiyi fonksiyonel ilişkiye genelleme
4. Doğrusal fonksiyonun kuralını değişkenlerle ifade etme

Bu varsayımsal öğrenme ilerlemesi ve öğrencinin öğrenmesi için hedef göz önüne alındığında, bir sonraki adım öğretim materyallerini tasarlamaktır. Bir sonraki bölümde, genişleyen şekil örüntü görevlerinin öğretim dizisi eklenmiştir. Bu görev dizisi, öğrencilerin varsayılan öğrenme ilerlemelerini destekleyerek fonksiyonel düşünmelerini geliştirmek için tasarlanmıştır.

Tablo 8.

Varsayımsal Öğrenme Rotası

Ders	Genişleyen Şekil Örüntüsü	Süre	Öğretim Etkinliği	Varsayılan Öğrenme İlerlemeleri
1	 **Büyüyen Sandalye Örüntüsü** **Noktalı W Örüntüsü** 	2 Ders Saati	Öğrenciler geometrik örüntünün nasıl genişlediğini görmenin farklı yollarını keşfederler.	1.Genişleyen şekil örüntüsünde genişlemenin farklı yollarını keşfederek genişlemeyi tanımlama, ifade etme ve sayısal ifadeye çevirme
2	**Çiçek Kolye Örüntüsü** 	2 Ders Saati	Öğrenci doğru sayma tekniklerini belirleyecek ve bunları şekille ilişkilendirecektir. Öğrenciler üç sütunlu tabloda bağımsız değişkenin belirli bir değeri için bağımlı değişkenin değerini belirlemek çeşitli sayısal temsiller kullanacaktır.	1. ve 2. Genişleyen şekil örüntüsünün fiziksel yapısını temsil eden sayısal ifade oluşturma ve bu ifadeleri üç sütunlu tabloda gösterme

3	**Sınır Problemi** 	2 Ders Saati	Öğrenciler üç sütunlu tabloda sayısal temsilleri kullanarak adım numarası ile genişleyen şekil örüntüsünün ölçülebilir bir yönü arasındaki ilişkiyi keşfetmeye çalışacaktır.	1. ,2. ve 3. Üç sütunlu tablodaki örüntüleri keşfederek adım numarası ile genişleyen şekil örüntüsünün ölçülebilir bir yönü arasındaki ilişkiyi fonksiyonel ilişkiye genelleme
4	**Masa Örüntüsü** 	2 Ders Saati	Öğrenciler, kelimeler veya değişkenler kullanarak örüntünün adım numarası (bağımsız değişken) ile şekil sayısı (bağımlı değişken) arasındaki ilişkiyi ifade edecektir. Öğrenci, fonksiyonel ilişkiyi ifade etmek için değişkenleri değişen miktarları temsil etmek için kullanmaya başlayacaktır.	1. , 2, 3. ve 4.Doğrusal fonksiyonun kuralını değişkenlerle ifade etme

3.6.2. Varsayımsal Öğrenme Rotası İle İlgili Açıklamalar

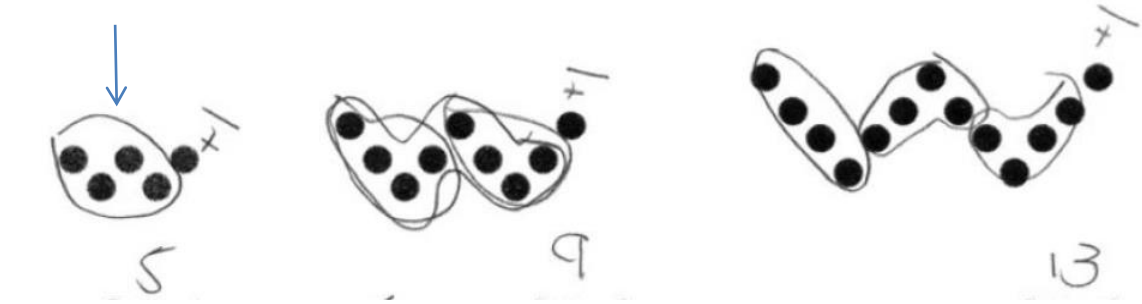
Ders 1: Öğrencilerin çoğu, ilköğretimin ilk yıllarından itibaren örüntülerle belli bir deneyime sahiptir. Fakat ne yazık ki bu müfredat yalnızca bu örüntülerde ardışık terimler arasındaki özyinelemeli işlemsel ilişkiye odaklıdır. Öğrenciler örüntüyü devam ettirmek için örüntüdeki sabit farkı terimden terime eklerler. Öğrenciler genellikle bir örüntüdeki ardışık terimler arasındaki ilişkiyi özyinelemeli olarak görmekten, değişkenler arasındaki ilişkiye odaklanmaya ve örüntüleri fonksiyonel olarak görmeye geçişte zorluk yaşarlar (Blanton ve diğerleri, 2015).

Şekil örüntüleri, şeklin fiziksel yapısındaki parçaların "birbirleri arasında niteliklere sahip olması veya ilişkiler sergilemesi" anlamına gelir (Rivera ve Becker 2011,). Genişleyen şekil örüntüleri görevleri ile öğrencilerden görsel ipuçlarına odaklanarak örüntülerdeki ilgili düzenlilikleri keşfetmeleri ve bu düzenlilikleri sayısal örüntü olarak organize etmeleri neticesinde fonksiyon kuralları için örüntü genellemesine geçişte destek araç olması beklenmektedir. Bu öğretim dizisindeki ilk dersin amacı örüntü hakkında genellemeler yapmak, kurallar oluşturmak veya bu kuralları değişkenlerle ifade etmek değildir. Bunun yerine, öğrenciler, örüntülerin genişlemesini görmenin çoklu yollarını keşfedebilmek için genişleyen şekil örüntülerinin fiziksel yapısının analiziyle uğraşacaklardır. Böylece öğrencilerin genişleyen şekil örüntüsünün nasıl genişlediğine odaklanması, öğrencilerin fonksiyonel düşünmeye doğru ilerlemelerine yardımcı olacak bir görme biçimini teşvik etmesi ve ortaya çıkarması amaçlanmaktadır.

Bu ilk derste grup çalışması önerilmektedir. Bu örüntülerin özelliği genişlemeyi görmenin, öğrenciler için birden fazla biçimini ortaya çıkarma potansiyeline sahip olmasıdır. Öğrenciler, bu ilk derste örüntünün genişlemesini kendi başlarına görmenin yalnızca bir yolunu keşfedebilirler. Grup çalışmasıyla öğrenciler bu örüntülerin nasıl genişlediğini birden fazla yolunu görerek ve takdir ederek, örüntülerin fiziksel yapısını analiz etmek için güdüleneceklerdir.

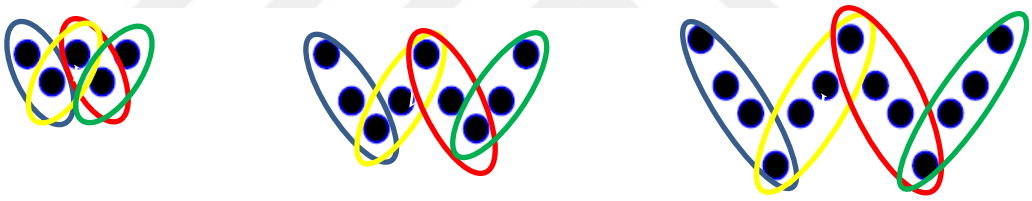
İlk dersteki büyüyen sandalye ve noktalı W örüntülerinin seçilmesinin nedeni bu örüntülerde genişlemeyi görmenin birden fazla yolunun olması ve seçilen öğrenciler için örüntü modelinin yapısını analiz etmeye teşvik edecek zorluk düzeyinde olma potansiyeline sahip olmasıdır.

Aşağıda Şekil 5, Şekil 6, Şekil 7 ve Şekil 8'de ilk deste kullanılan örüntülerin farklı görme yollarından bazıları gösterilmiştir.



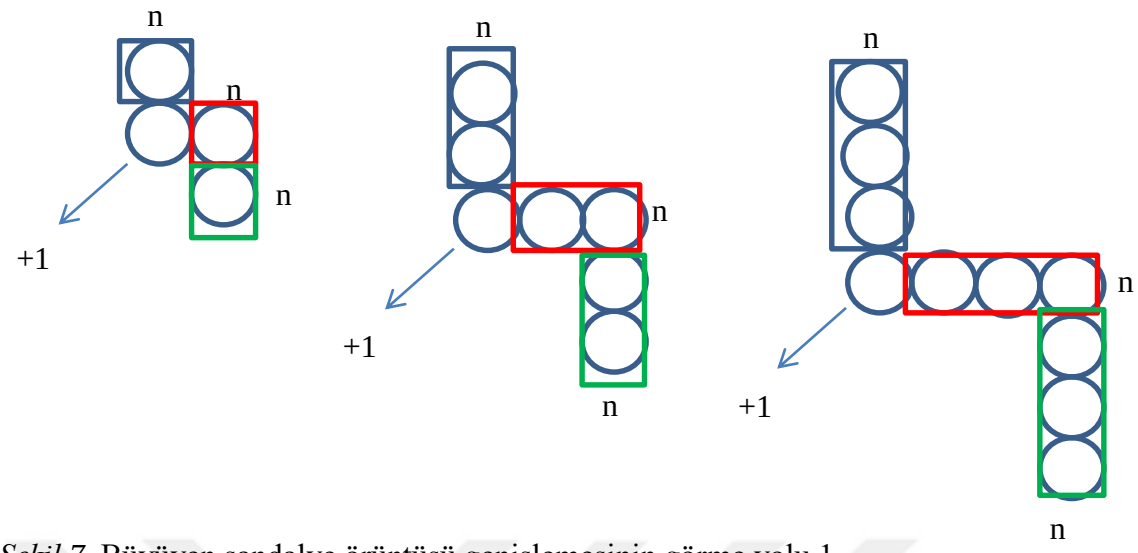
Şekil 5. Noktalı W örüntüsü genişlemesini görme yolu 1

Şekil 5 incelendiğinde, bu görme biçimi ile öğrenciler her bir aşamadaki yuvarlak içine alınan dörder daireden oluşan grupların sayısının aşama numarasına eşit olduğunu ve bu gruplama ile her aşamada 1 dairenin arttığını göreceklerdir. Böylece örüntümün genel kuralı D= 4n+1 olarak ifade edilir. D örüntüdeki daire sayısı, n ise aşama numarasıdır.



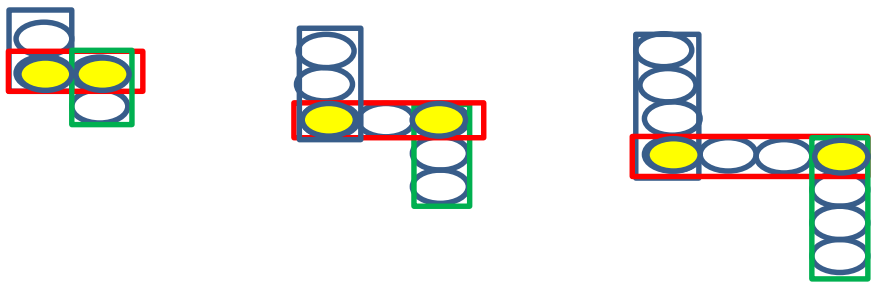
Şekil 6. Noktalı W örüntüsü genişlemesinin görme yolu 2

Şekil 6'da gösterilen bu görme biçiminde ise daireler şekilde gösterildiği gibi gruplandığında her aşamada 4 grup olduğu görülmektedir. Her gruptaki daire sayısı aşama numarasının 1 fazlasıdır. Fazladan sayılan daire sayısı her aşamada 3 olmaktadır. Bu şekilde örüntünün genel kuralı D=4.(n+1)-3 olmaktadır.



Şekil 7. Büyüyen sandalye örüntüsü genişlemesinin görme yolu 1

Büyüyen sandalye örüntüsündeki görme biçimlerinden biri Şekil 7'de gösterilmiştir. Her gruptaki daire sayısı aşama numarası ile aynı olduğu görülmektedir. Şekildeki gibi her bir adımda daireler gruplara alındığında her şekilde bir tane daire artmaktadır. Böylece örüntünün kuralı D=3n+1 dir. D örüntüdeki daire sayısı, n ise aşama numarasıdır.

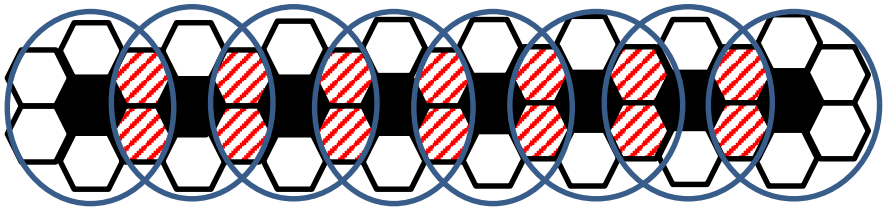


Şekil 8. Büyüyen sandalye genişlemesi görme yolu 2

Büyüyen sandalye örüntüsünün başka bir görme biçimi Şekil 8'de gösterilmiştir. Bu görme biçiminde her bir aşamada dikey ve yatayda bulunan daireler dikdörtgen içine alınarak gruplandırılmıştır. Dikey ve yataylarda gruplandırma yapılırken tekrar fazladan sayılan daireler sarı renk ile gösterilmiştir. Her aşamada sarı renk ile gösterilen daire sayısının 2 olduğu görülmektedir. Her aşamada ise 3 grup olduğu ve bu gruplardaki daire sayısının aşama numarasının bir fazlası olduğu görülmektedir. Böylece bu örüntünün genel kuralı D= 3. (n+1)-2 olmaktadır. Bu kural D=3n+1 kuralı ile eşdeğer bir kuraldır.

Ders 2: Öğrenciler ilk derste genişleyen şekil örüntülerine yönelik bir deneyime sahip olmuşlardır. Öğrenciler, bu örüntüleri keşfederken kendi şekilsel analizlerinden yararlanarak şeklin genişlemesinin farklı yollarını keşfetmişler ve şekilsel analiz ile bu analizin sayısal bir temsili arasında köprü kurmuşlardır. Bu derste ise öğrencilerden örüntünün fiziksel yapısında ki genişlemeyi sayısal olarak ifade etmeleri ve bu ifadeleri üç sütunlu tabloda göstermeleri istenmiştir. Bu derste öğrencilerden grup çalışması ile değil bireysel çalışmaları istenmiştir. Bunun yanında öğrencilere, herhangi bir sorunu danışmak için bir yanındaki bir öğrenci ile sorun hakkında tartışma yapabileceği söylenmiştir.

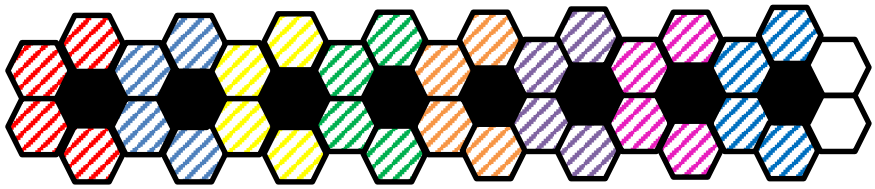
Bu derste, öğrencilere şekil sunulur, bu çiçek örüntüsünde çiçeklerin merkezindeki siyah altıgen şekli etrafındaki altıgen şekiller beyaz renklidir. Öğrencilerden çiçeklerdeki siyah renkli altıgenlerin etrafındaki beyaz renkli altıgenlerin sayısını tek tek saymadan hesaplamaları istenir. Beyaz renkli altıgenlerin sayısının tek tek sayma dışında nasıl bulunacağını çoklu yolu mevcuttur. Bu yüzden çiçek örüntüsü eşdeğer sayısal ifadeleri incelemek için büyük bir potansiyele sahiptir. Bu derste odak örüntünün nasıl genişlediğini görmenin ötesinde örüntüdeki şekilleri sayma biçimlerinin farklı sayısal temsillerini keşfetmektir. Öğrencilerden bu sayısal temsillere yönelik yakın ve uzak genellemeler yapması ve daha sonra üç sütunlu tabloda buldukları bu eşdeğer sayısal temsilleri ifade etmeleri istenmiştir. Çiçek örüntüsünde beyaz renkli altıgenleri saymanın birden fazla yolu vardır. Burada amaç, öğrencilerin birden çok yol oluşturmasını, bu yolların birbirleriyle nasıl ilişkili olduğunu görmesi ve bunları birden çok eşdeğer temsiller oluşturmak için kullanmasını sağlamaktır. Aşağıda Şekil 9 ve Şekil 10'da çiçek kolye örüntüsüne yönelik öğrencilerden beklenen sayma biçimleri gösterilmiştir.



Şekil 9. Çiçek kolye örüntüsü sayma yolu 1

Şekil 9 'da ki çizimde her bir çiçek modelinde siyah renkli altıgenlerin etrafında 6 tane beyaz renkli altıgen bulunmaktadır. 8. Aşama 8 çiçekten oluşmaktadır. Bu mantıkla 8.6 tane beyaz renkli altıgen bulunmaktadır. Fakat her iki çiçeğin birleşimindeki

(kırmızı desenli) 2 tane beyaz altıgen fazladan sayılmaktadır. Fazladan sayılan şekillerin sayısı 7.2 olduğundan örüntüdeki şekil sayısı (8.6)-(7.2) olarak hesaplanmaktadır. Farklı bir sayma yolu aşağıda Şekil 10'da örnek olarak gösterilmiştir.



Şekil 10. Çiçek kolye örüntüsü sayma yolu 2

Şekil 10'da, her çiçekteki siyah renkli altıgenler etrafındaki şekiller 4'erli grup yapılmıştır (Her gruptaki şekiller farklı renk ile gösterilmiştir.). Şekil 10'a bakıldığında 4'erli grupların sayısı çiçek sayısı kadar olduğu görülmektedir. 8. aşamada 8 çiçek olduğundan şekil sayısı (8.4) kadardır. Dörderli gruplar dışında 2 tane beyaz altıgen kaldığından toplam beyaz altıgen sayısı (8.4)+2 kadar olmaktadır.

Ders 3: Sınır Problemi Görevi, öğrencilerden bir kare havuzu çevrelemek için gereken taş sayısını hesaplamak için sayısal bir ifade yazmalarının istendiği geleneksel bir problemdir. Havuzu oluşturan sınırlardaki taş sayısını (kare sayısı) temsil eden sayısal ifade sınırların boyutu değiştiğinde doğrusal fonksiyonel olarak uygulanabilir yapıdadır. Burada öğrencilerden oluşturdukları sayısal ifadeleri farklı sınır boyutlarına genellemeleri istenmiştir. Bu genelleştirilmiş sayısal ifadelerin sözlü olarak açıklanabilir, geometrik olarak çizilebilir, sembolik olarak ifade edilebilir yapıda olması öğrencilerin probleme motive olmasına yönelik avantaj sağlamaktadır.

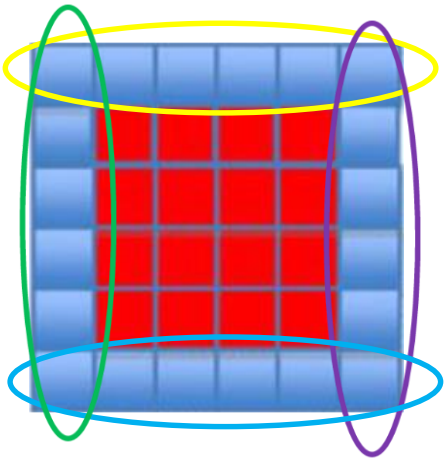
Öğrencilerden, problemle ilgili varsayımlarını tartışmaları, analiz etmeleri ve not almaları için gruplar halinde çalışmaları istenmiştir. Öğrencilerin bir sayısal ifade ile görsel bir temsil arasında bağlantı kurmasını sağlamak amacıyla dersin sonunda bütün bir sınıf tartışması yapılır. Öğrencilerden ilk olarak sınırdaki kare sayısını tek tek saymadan gösteren sayısal yollar bulması beklenir. Bu görevin ilk dersinin sonunda bütün sınıf tartışmasında öğrencilerden buldukları çeşitli yolları göstermeleri ve sözlü olarak açıklamaları istenir.

Bu görevin ikinci dersinde, öğrenciler yakın ve uzak genellemeler yaparak, ilk dersteki açıkladıkları sayısal ifadenin, bir kare havuzun olası herhangi bir boyutu için uygulanabilir olduğunu keşfedeceklerdir. Ayrıca bu problemde öğrencilerden, bir ifadede

kullanıldığında bir değişkenin neyi temsil ettiğini keşfetmeleri beklenmektedir. (ör. havuzun kenar uzunluğu). Sınır probleminde değişken, kare havuzun kenar uzunluğudur ve sayısal ifadenin sonucu, havuzu çevrelemek için gerekli kare karo sayısını göstermektedir.

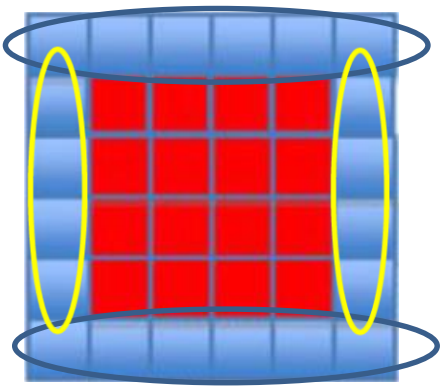
Cebirsel akıl yürütmenin gelişimini desteklemek için farklı temsil biçimleri yardımcı olabilir. Bu temsiller somut, sözel, sayısal, grafiksel, bağlamsal, resimsel veya sembolik bileşenleri içerir (Tripathi, 2008). Ayrıca, fonksiyon tabloları tarafından temsil edilen örüntüler, fonksiyonel düşünmenin erken gelişimini destekleyen araçlardır (Tanışlı, 2011). Bu bağlamda bu öğretim dizisinde öğrencilerin sayısal ifadeleri temsil etmeleri için tablo kullanılmıştır. Fakat iki sütunlu tabloya orta sütun eklenerek üç sütunlu tablo tercih edilmiştir. Çünkü iki sütunlu tabloda öğrenciler tabloda dikey ilişkiye odaklanarak terim-terim ilişkisi kurma eğilimindedir. Bunun yerine tabloda üçüncü bir sütunun eklenmesi, öğrencilerin genişleyen şekil örüntülerine karşılık türettikleri sayısal ifadede değişkenler arasındaki ilişkiyi görmeleri açışından yarar sağlamaktadır. Yani üç sütunlu tablolar, öğrencileri iki sütunlu tablodaki terim- terim arasındaki dikey ilişkinin ötesinde, adım sayısı- terim arasındaki yatay ilişkiye odaklayarak fonksiyonel düşünmeyi destekler.

Aşağıda Şekil 11, Şekil 12 ve Şekil 13'te sınır problemine yönelik öğrencilerden keşfetmesi beklenen farklı sayma yolları gösterilmiştir.



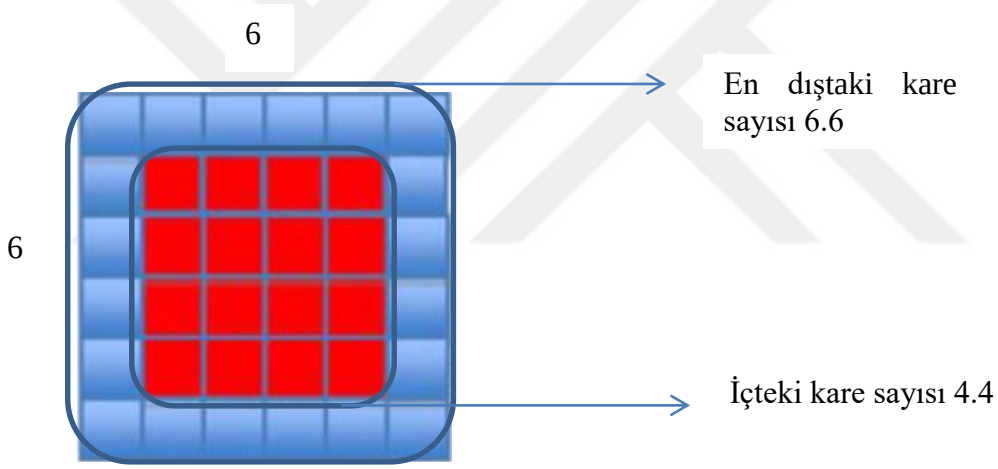
Şekil 11. Sınır problemi sayma yolu 1

Şekil 11'deki sayma biçiminde sınırlardaki kareler 4 grup olacak şekilde alınır. Her bir grupta 6 kare vardır. 4 grup olduğu için kare sayısı 4.6 olarak yazılır. Bu 4 gruptaki yatay ve dikeylerdeki kesişen karelerin sayısı 4 olduğu için sayısal ifade (4.6) -4 yazılır.



Şekil 12. Sınır problemi görme yolu 2

Şekil 12'deki sayma biçiminde ise yatay sınırdaki kareler 2 grup yapılmıştır. Her grupta 6 kare olduğundan 2.6 tane kare vardır. Dikey sınırlardaki kareler 2 grup yapıldığında kare sayısı 2. 4 olarak yazılır. Sınırlardaki toplam kare sayısı (2.6)+ (2.4) olarak yazılır.



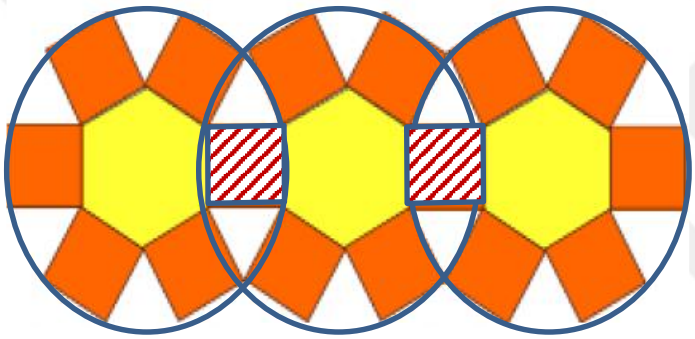
Şekil 13. Sınır problemi sayma yolu 3

Şekil 13'te ise alan hesaplama mantığından yola çıkılarak sınırdaki kare sayı hesaplama yolu gösterilmiştir. Bu mantıkla en dıştaki karenin alanından içteki karenin alanı çıkarılır. Bu yöntemle sınırdaki kare sayısı 6.6- 4.4 olarak ifade edilebilir.

Ders 4: Önceki öğretim dizisindeki derslerde, çeşitli genişleyen şekil örüntüleri kullanılmıştır. Bu örüntülerde öğrencilerden örüntülerin nasıl büyüdüklerini belirleyip ifade etmeleri ve bu büyümeyi devam ettirerek yakın ve uzak genellemeler yapmaları istenmiştir. Ayrıca, farklı sayma biçimleri keşfederek örüntüyü sayısal bir temsille birleştirmek için üç sütunlu tabloyu kullanmaya yönlendirilmiştir. Bu tablolarda örüntülerdeki, bağımsız değişken ile bağımlı değişken arasındaki ilişki sezdirilme

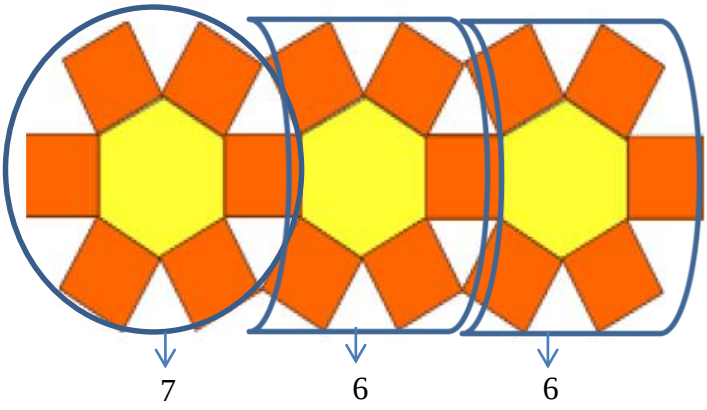
amaçlanmıştır. Öğrencilerinden, genişleyen şekil örüntülerle temsil edilen fonksiyonel ilişkiler için kelimelerle ifade etmeleri beklenmiştir.

Bu derste öğrencilerden önceki derslerdeki aynı uygulamalara devam etmeleri istenmiştir. Bununla birlikte, fonksiyonel ilişkilerin temsillerini değişkenlere doğru genişletmeleri istenmiştir. Bu ders, öğrencilerin önceki derslerde yaptıkları çalışmaları temel alacak ve öğrencilerden değişen nicelikleri temsil etmek için değişkenleri (öğretmen ve akran desteğiyle) kullanmalarını istenmesi şeklinde tasarlanmıştır. Aşağıda Şekil 14, Şekil 15 ve Şekil 16'da bu derste yer alan Masa Örüntüsü modeline yönelik öğrencilerden beklenen görme yolları ve sayısal ifadeler gösterilmiştir.



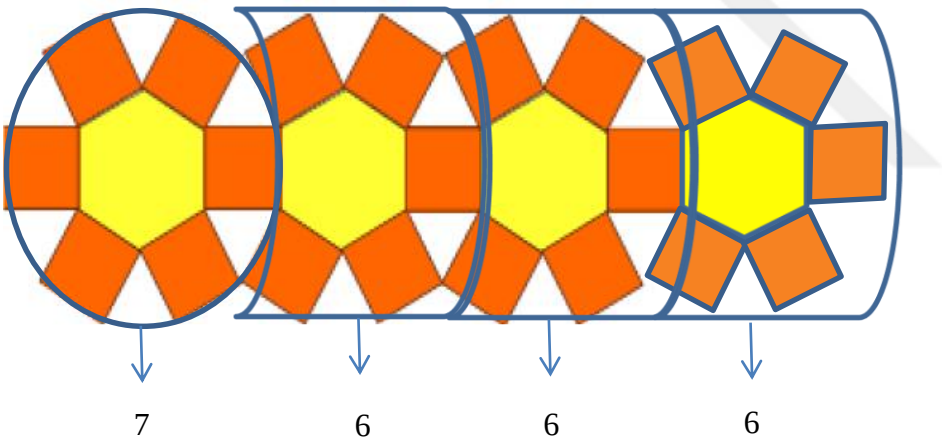
Şekil 14. Masa örüntüsü sayma yolu 1

Şekil 14 incelendiğinde, Masa örüntüsünün 3. aşamasını düşündüğümüzde, bu aşamada yan yana getirilmiş 3 masa olduğunu görürüz. Her masada 7 şekil bulunmaktadır. 3 masa birleştirildiğinde 3 x 7 şekil olduğunu hesaplarız. Fakat 3. Aşamada fazladan sayılan 2 kare olduğundan bu fazladan sayılan 2 karenin çıkarılması gerekir. Öğrenciler bu sayısal temsilleri üç sütunlu tabloya yerleştirdiklerinde çarpmada 7 nin sabit olduğunu, 7 ile çarpılan sayısının örüntüdeki adım numarası olduğunu ve bu ifadeden çıkarılan sayının aşama numarasının 1 eksiği olduğunu genelleyeceklerdir." P = n x 7 – (n – 1) ile temsil edilen ve n'in aşama numarası, P'nin toplam şekil sayısını temsil ettiği fonksiyonel bir ilişki anlamına gelir.



Şekil 15. Masa örüntüsü sayma yolu 2

Şekil 15'te üç masadan oluşan masa örüntüsü görülmektedir. Daire içine alınan ilk masada 7 sandalye ve sonradan eklenen ikinci ve üçüncü masada ise 6'şar sandalye bulunmaktadır. Aşağıda Şekil 16'da ise Şekil 15'te bulunan üç masaya dördüncü masa eklenmesiyle tekrar 6 sandalye eklenmesi gerektiği görülmektedir.



Şekil 16. Masa örüntüsü görme yolu 2 devamı

Şekil 16'ya bakıldığında örüntünün sürekli olarak sandalye sayısı 7'ye 6 sandalye eklenmesi şeklinde ilerlediği görülmektedir. Örneğin 1. aşama toplam 7 şekil bloğundan oluşur. 2. aşamaya geldiğimizde 6 şekil bloğu eklenir, 7 + 6 elde edilir. 3. aşamaya geldiğimizde 6 şekil bloğu daha eklenir, 7 + 6 + 6 elde edilir. Üç sütunlu tabloda bu şekilde görmeye devam etmek öğrencilerin şunu fark etmelerini sağlar; sayısal temsillerde 7 değişmez ve eklenen 6'ların sayısı aşama numarasından bir eksiktir. Hatta öğrenciler bunu bir kuralda kısaltarak $P = 7 + (n - 1) \times 6$ olarak gösterebilirler.

BÖLÜM IV

BULGULAR

Bu araştırmada araştırma sorularına cevap aramaya yönelik öğretim deneyi öncesi, öğretim deneyi esnasında ve geriye dönük analizlerle birden çok kaynaktan veri toplanmıştır. Bu bölümde ilk olarak, birinci araştırma sorusuna yönelik öğrencilerin fonksiyonel düşünme becerilerinin gelişimini incelemek üzere öğretim deneyi öncesinde ve sonrasında uygulanan fonksiyonel düşünme testinden elde edilen nicel ve nitel bulgular sunulmuştur. Ardından ikinci araştırma sorusuna yönelik olarak bulgulara yer verilmiştir. Bu bulgular verilirken, öncelikle öğretim deneyi esnasındaki her bir dersten elde edilen bulgular sunulmuştur. Sonra da öğrencilerin varsayılan öğrenmeleri ile gerçek öğrenmeleri karşılaştırılarak bu bulgulara göre revize edilmiş varsayımsal öğrenme rotası verilmiştir.

4.1. Öğretim Deneyi Öncesi ve Sonrasında Uygulanan Fonksiyonel Düşünme Testine Ait Bulgular

Öğretim deneyi öncesi ve sonrasında uygulanan fonksiyonel düşünme testinde öğrenci test puanları nicel analiz edilmiştir. Ayrıca öğrencilerden örüntülerin genel kuralını ifade etmeleri istenen 8,17 ve 19. sorulardaki öğrencilerin cevapları Stephens vd. (2017) tarafından oluşturulan fonksiyonel düşünme düzeyleri çerçevesine göre nitel olarak analiz edilmiştir. Bu analizlere ait nicel ve nitel bulgular aşağıda sunulmuştur.

4.1.1. Öğretim Deneyi Öncesi ve Sonrasında Uygulanan Fonksiyonel Düşünme Testine Ait Nicel Bulgular

Bu araştırmada ön test ve son test değerlendirmesinin amacı, öğrencilerin fonksiyonel düşünmeleri hakkında çıkarım yapılabilecek performans verileri sağlamaktır. Ön test ve son test verilerinin tüm istatistiksel analizleri (ortalama, standart sapma, minimum ve maksimum, bağımlı gruplar T Testi) ve grafikler SPSS programı kullanılarak yapılmıştır. Ön test ve son testte alınan puanların ortalamaları, standart sapmalar, minimum puanlar ve maksimum puanlar Tablo 9'da sunulmuştur.

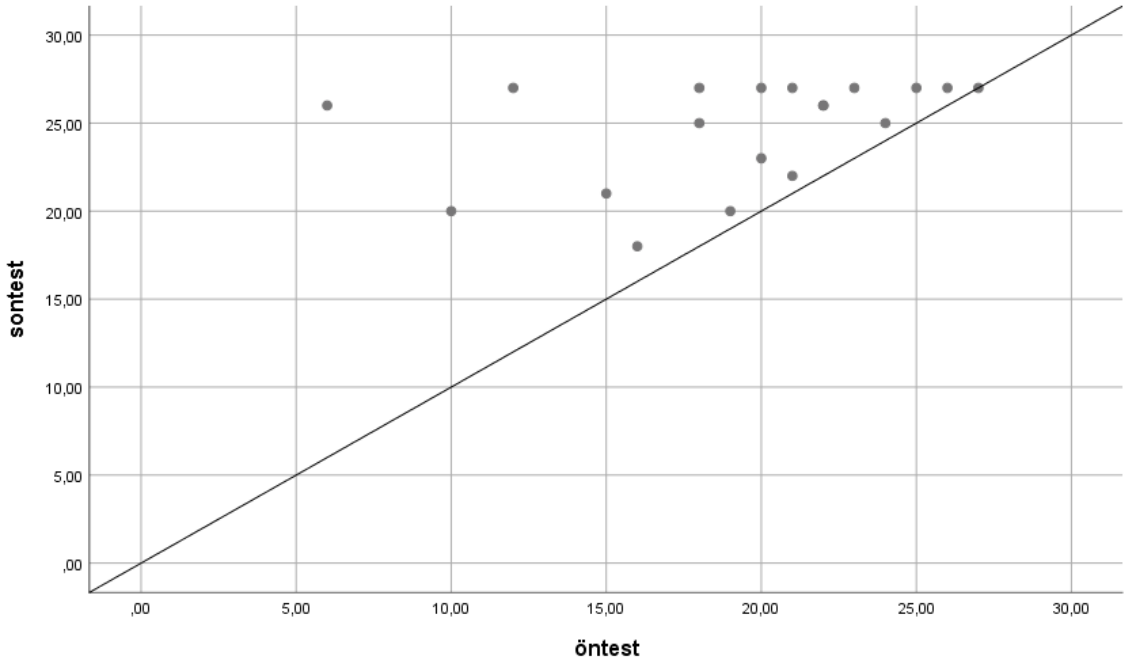
Tablo 9.

Ön Test ve Son Test Betimsel İstatistik Değerleri

	Ön Test	**Son Test**
N	19	19
$\overline{X}$	19.21	24.63
ss	5.49	2.98
Min.	6	18
Max.	27	27

Tablo 9 incelendiğinde, katılımcıların ortalama, minimum ve maksimum puanlarının son testte ön teste kıyasla yükseldiği görülmektedir. Bu açıdan öğrencilerin genişleyen şekil örüntüleri temelinde hazırlanan öğretim etkinlikleri sonucunda fonksiyonel düşünme becerilerinde gelişme göstermiş olduğu söylenebilir.

Ön testten son teste bireysel öğrenci ilerlemesi, Şekil 17'de dağılım grafiğinde gösterilmiştir.



Şekil 17. Öğrencilerin ön test ve son test dağılım grafiği

Şekil 17 , her bir öğrenci için ön test ve son test puanları (sırasıyla x ve y eksenleri) kullanılarak çizilmiştir. Bu dağılım grafiğine y=x doğrusu eklenmiştir. Bu doğrunun üzerinde kalan tüm veri noktaları, ön testten son teste gelişme gösteren öğrencileri temsil

etmektedir. Tersine, bu doğrunun altında kalan tüm veri noktaları, ön testten son teste puanları düşen öğrencileri temsil etmektedir. Şekil 17'ye göre , ön test ve son test puanları eşit olan bir öğrenci hariç tüm öğrencilerin son testte ön testte göre daha yüksek puanlar aldığı görülmektedir.

Araştırmada genişleyen şekil örüntüleri temalı hazırlanan varsayımsal öğrenme rotasının öğrencilerin fonksiyonel düşünme becerilerine etkisini analiz etmek için öğrencilerin ön test ve son test puan ortalamalarına bakılmıştır. Ön test ve son test ortalama puanları arasındaki farklılığın anlamlı olup olmadığını kontrol etmek için ön test ve son test puanları Wilcoxon İşaretli Sıralar Testi ile analiz edilmiştir. Bu analize yönelik bulgular Tablo 10'de verilmiştir.

Tablo 10.

Ön test ve Son Test Ortalama Puanlarının Karşılaştırılmasına İlişkin Wilcoxon İşaretli Sıralar Testi Sonuçları

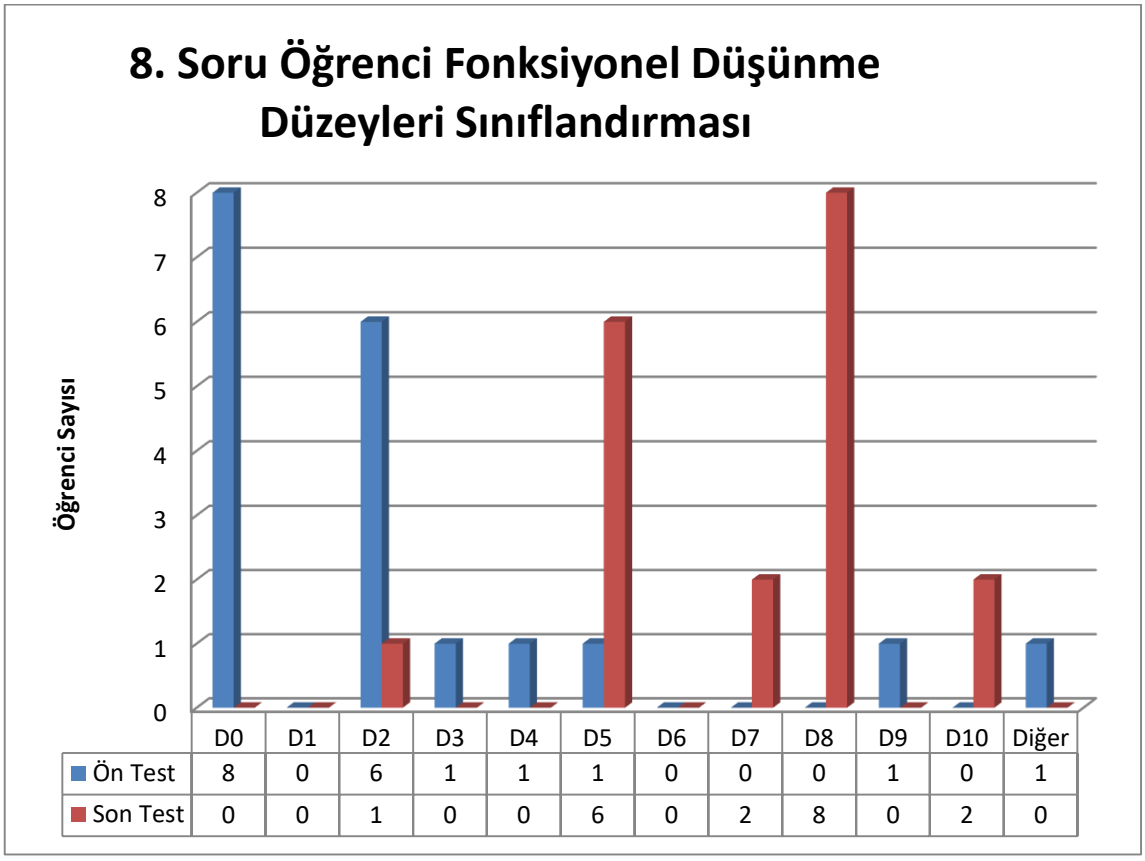
Son Test-Ön Test	N	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	z	P
Negatif Sıra	0	.00	.00		
Pozitif Sıra	18	9.5	171	-3.731	.000
Eşit	1				

*Negatif Sıralara Dayalı

Tablo 10'da verilen bulgular incelendiğinde, öğrencilerin öğretim deneyi öncesi ve sonrası fonksiyonel düşünme gelişimleri arasındaki farkı belirlemek için yapılan Wilcoxon İşaretli Sıralar testinin sonucu öğrencilerin ön test ve son test puanları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark olduğunu göstermektedir [$z = -3.731$, $p < 0,01$]. Tablo 10 incelendiğinde bu farkın pozitif sıralar lehine, yani son test puanları lehine olduğu görülmektedir. Bu bulgulara göre, genişleyen şekil örüntüleri temalı hazırlanan varsayımsal öğrenme rotasının öğrencilerin fonksiyonel düşünme becerileri gelişimine olumlu etkisi olduğu anlaşılmaktadır.

4.1.2. Öğretim Deneyi Öncesi ve Sonrasında Uygulanan Fonksiyonel Düşünme Testine Ait Nitel Bulgular

Öğrencilerin ön test ve son testteki 8,17 ve 19. Sorulara yönelik çözüm stratejileri Stephens vd. (2017) tarafından geliştirilen fonksiyonel düşünmenin gelişim seviyeleri çerçevesine göre sınıflandırılmıştır. 8. Soruya ait sınıflandırmanın sonuçları (frekans) şekil 17'de, 17. Soruya ait sınıflandırma sonuçları (frekans) şekil 18'de, 19. Soruya ait sınıflandırma sonuçları ise (frekans) şekil 19'da gösterilmiştir.

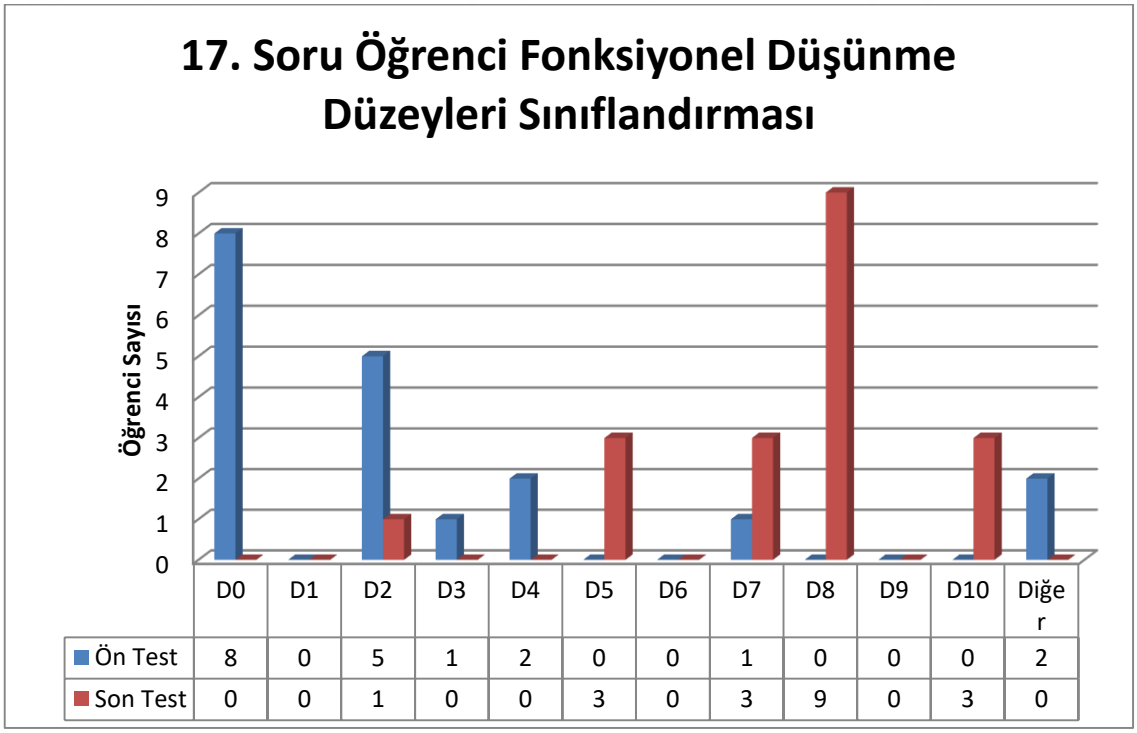


	D0	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	Diğer
Ön Test	8	0	6	1	1	1	0	0	0	1	0	1
Son Test	0	0	1	0	0	6	0	2	8	0	2	0

Şekil 18. Fonksiyonel düşünme testi 8. soru öğrenci cevapları fonksiyonel düşünme düzeylerine göre sınıflandırılma grafiği

Şekil 18 incelendiğinde, 8. soruya yönelik öğrenci çözüm stratejilerinde D1 ve D6 düzeyinde çözüm stratejisine ön test ve son testte hiç karşılaşılmamıştır. Stephens vd. (2017) tarafından geliştirilen fonksiyonel düşünmenin gelişim seviyeleri çerçevesine göre hiçbir kategoriye yerleştirilemeyen ve sonradan "Diğer" olarak eklenen kategorideki öğrenci sayısı ön testte 1 iken son testte hiç olmamıştır. Ön testte öğrencilerin D0, D2, D3 ve D4 düzeylerindeki çözüm stratejileri yapan öğrenci sayıları sırasıyla, 8'den 0'a, 6

‘dan 1’e, 1’den 0’a, 1 ‘’den 0’a düştüğü gözlenmektedir. D5 düzeyindeki çözüm stratejisi yapan öğrenci sayısı, 1’den 6’ya, D7 düzeyindeki çözüm stratejisi yapan öğrenci sayısı 0 öğrenciden 2 öğrenciye, D8 düzeyindeki çözüm stratejisini yapan öğrenci sayısı 0’dan 8 öğrenciye yükselerek ilerleme kaydettiği gözlenmektedir. Buradan öğrencilerin fonksiyonel düşünme seviyelerinin gelişme gösterdiği söylenebilir. Şekil 17’ye bakıldığında, ön testte üst düzeylerde olup sayısının son testte azalan tek istisnasının D9 düzeyinde olduğu ve cevap sayısının azaldığı görülmektedir. Fakat D9 düzeyindeki azalmanın, ön testte cevabı D9 düzeyinde olan öğrencinin cevabının D10 düzeyine ilerleyerek D10 düzeyindeki artışa sebep olduğu ve bu bağlamda bu öğrencinin de fonksiyonel düşünme düzeyinde gelişme olduğunu söylenebilir.

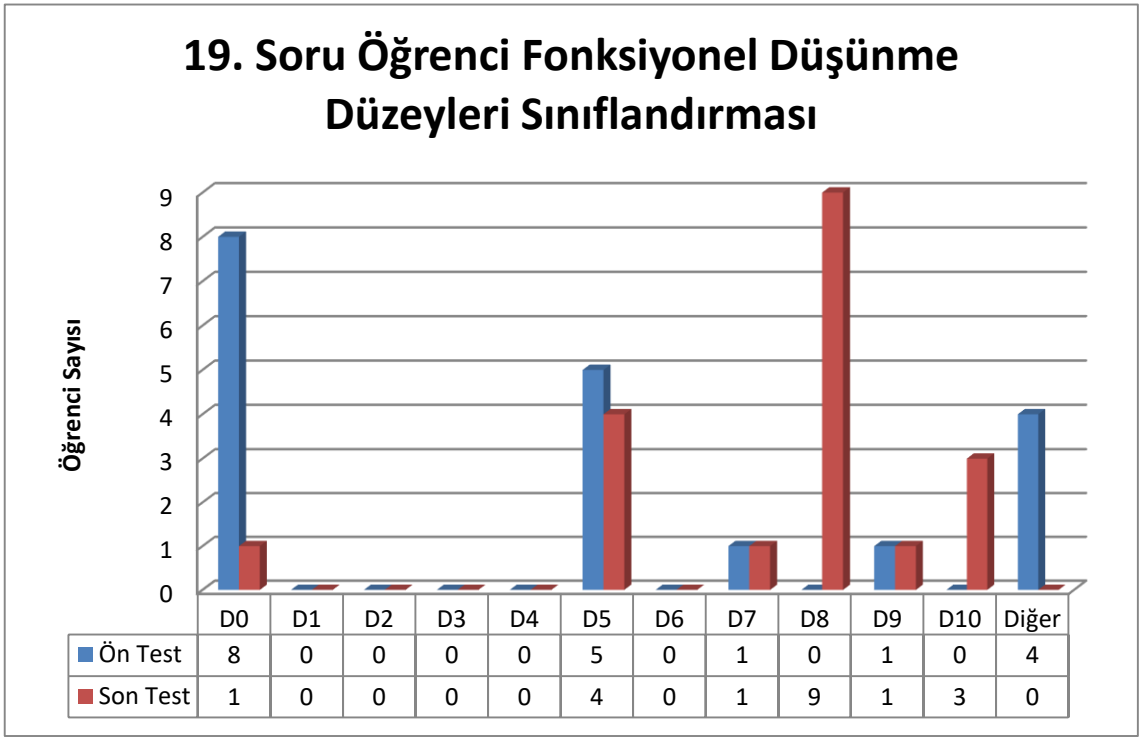


	D0	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	Diğer
Ön Test	8	0	5	1	2	0	0	1	0	0	0	2
Son Test	0	0	1	0	0	3	0	3	9	0	3	0

Şekil 19. Fonksiyonel düşünme testi 17. soru öğrencilerin cevapları fonksiyonel düşünme düzeylerine göre sınıflandırılması grafiği

17. soruya yönelik çözüm stratejilerine yönelik Şekil 19 incelendiğinde, 8. Soruya çok yakın sonuçların gerçekleştiği görülmektedir. D1,D6 ve D9 düzeylerine yerleşen hiçbir çözüm stratejisi görülmemiştir. “Diğer” kategorisinde yer alan öğrenci sayısı ön testte 2 iken son testte 0 olmuştur. 8. Sorudaki gibi ön testte fazla olan D0, D2, D3, D4 düzeylerindeki çözüm strateji sayılarının azalıp, son testte D5, D7 ve D8 düzeylerindeki çözüm strateji sayılarının arttığı görülmektedir. Bu da öğrencilerinin fonksiyonel

düşünme düzeylerinin gelişme gösterdiği şeklinde yorumlanmaktadır. Bu soruda da ön testte genel olarak öğrencilerin çözüm stratejilerinin D0 düzeyinde (8 öğrenci) yer aldığı, fakat son testte bu düzeyde yer alan hiçbir öğrenci kalmadığı görülmektedir. Aksine ön testte D8 düzeyinde hiçbir öğrenci yokken son testte D8 düzeyinde öğrenci sayısının 9'a yükseldiği görülmektedir.



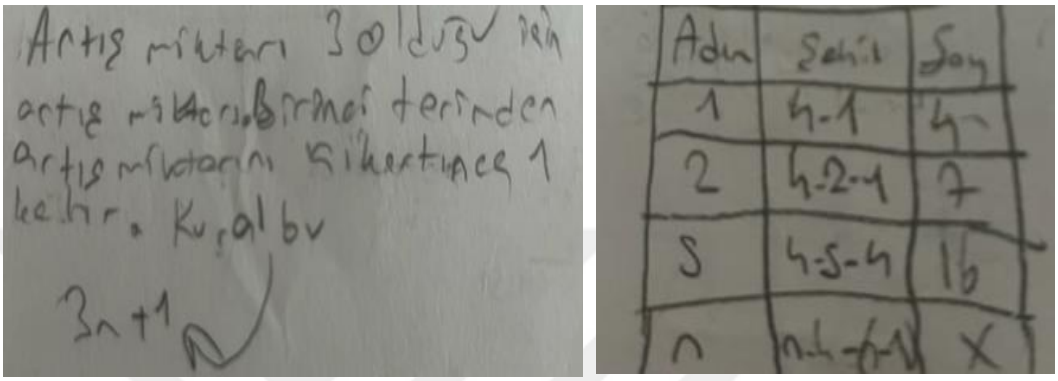
	D0	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	Diğer
Ön Test	8	0	0	0	0	5	0	1	0	1	0	4
Son Test	1	0	0	0	0	4	0	1	9	1	3	0

Şekil 20. Fonksiyonel düşünme testi 17. soru öğrencilerin cevapları fonksiyonel düşünme düzeylerine göre sınıflandırılması grafiği

19. soruya yönelik çözüm stratejileri sınıflandırmasına ait Şekil 20 incelendiğinde ön testte 8 öğrencinin olduğu D0 düzeyinde son testte 1 öğrenciye düştüğü, aksine ön testte 0 öğrencinin yer aldığı D8 düzeyinin son testte 9 öğrenciye yükseldiği görülmektedir. Buradan 19. Soruda da öğrencilerin fonksiyonel düşünme seviyelerinin ön testten son teste doğru gelişme gösterdiği söylenir. Ayrıca 8 ve 17. Sorularda ön testte, özyinelemeli düşünmeyi temsil eden D2 düzeyinin sayılarının 6 ve 5 olmasına karşın 19. Soruda farklı olarak ön testte D2 düzeyinin 0 olduğu görülmektedir. Bunun sebebi olarak; 19. Soruda fonksiyon makinesi sorusundaki tabloda yer alan girdi ve çıktı verilerinin sıralı olmadan karışık şekilde verilmesi gösterilebilir.

8,17 ve 19. Sorularda öğrenci cevaplarını incelerken tespit edilen ilginç bir bulgu, fonksiyonel düşünme düzeylerine 'Diğer' kodu olarak sonradan eklenen düzeyde yer alan

öğrenci cevaplarının çoğu, hiçbir fonksiyonel düşünme belirtisi içermeyen ezber bilgi ile genel kuralı ifade etmeyi içermektedir. 'Diğer' düzeyine yerleştirilen bu öğrenciler ön testte bu sorulara yönelik 'ezber bilgi' ile genel kural bulmuşlardır. Fakat son testte bu öğrenci cevaplarının tümünün fonksiyonel ilişkiler içeren düzeylere kaydığı tespit edilmiştir. Buna yönelik ön test ve son testte yer alan Ö11(EO) zıt cevap örneği Şekil 21'de gösterilmiştir.



Şekil 21. Ö11(EO)'in ön testte 'Diğer' ve son testte D8 düzeyindeki cevabı

Şekil 21'i incelediğimizde ön testte öğrencinin örüntüdeki artış miktarı 3 olduğu için genel kuralın 3n ile başladığını söylemiştir. 1. Terimin değerine göre 3n ifadesine eklenecek ya da çıkarılacak sayıyı +1 olarak ifade ederek genel kuralı 3n+1 diye ifade etmiştir. Bu çözümünün örüntünün yapısını analiz etmeden ve nicelikler arasında ilişki aramadan yapılan ezber bir çözüm olduğu görülmektedir. Fakat son testte örüntünün genişlemesine yönelik analizi neticesinde oluşturduğu sayısal ifadeleri üç sütunlu tabloda temsil etmiş ve bu sayısal ifadede ilgili düzenlilikleri keşfederek nicelikler arası ilişki kurmuştur. Böylece düzeyini 'Diğer' düzeyinden D8 düzeyine ilerletmiştir.

Özetle fonksiyonel düşünme düzeylerinin sınıflandırıldığı 8,17 ve 19. Sorulara ait grafiklere baktığımızda öğrenci fonksiyonel düşünme düzeylerinin genel olarak ön testten son teste doğru daha üst düzeylere ilerlediği görülmektedir. Ayrıca "Diğer" diye eklenen düzeyde yer alan öğrenci cevaplarının son teste 0'a düştüğü bu öğrenci cevaplarının fonksiyonel düşünme kabul edilen düzeylere taşındığı görülmektedir.

4.2. Öğretim Deneyine Ait Bulgular

Öğrencilerin genişleyen şekil örüntüleri temelinde fonksiyonel düşünmelerinin gelişimi hakkında varsayımsal öğrenme rotası bu çalışma için önerilen bir teorik çerçeve

olarak bölüm 3.7'de sunulmuştur. O bölümde varsayımsal öğrenme rotasının bir parçası olarak tasarlanan görevlerin özellikleri ve öğretimsel sırası aşağıdaki gibi özetlenmiştir.

Öğrencilerin fonksiyonel düşünmelerini geliştirmek ve desteklemek için bir öğrenme süreci boyunca dört matematiksel ilerleme öngörülmüştür:

1. Genişleyen şekil örüntüsünün genişlemesinin farklı yollarını keşfederek genişlemeyi tanımlama, ifade etme ve sayısal ifadeye çevirme
2. Genişleyen şekil örüntüsünün fiziksel yapısını temsil eden sayısal ifade oluşturma ve bu ifadeleri üç sütunlu tabloda gösterme
3. Üç sütunlu tablodaki örüntüleri keşfederek adım numarası ile genişleyen şekil örüntüsünün ölçülebilir bir yönü arasındaki ilişkiyi fonksiyonel ilişkiye genelleme
4. Doğrusal fonksiyonun kuralını değişkenlerle ifade etme

Bu bölümde, bu dört matematiksel ilerlemenin her biri hakkındaki bulgular, fonksiyonel düşünmeyi destekleyecek şekilde yeni olası düzenlemeleri de tartışarak sunulmuştur.

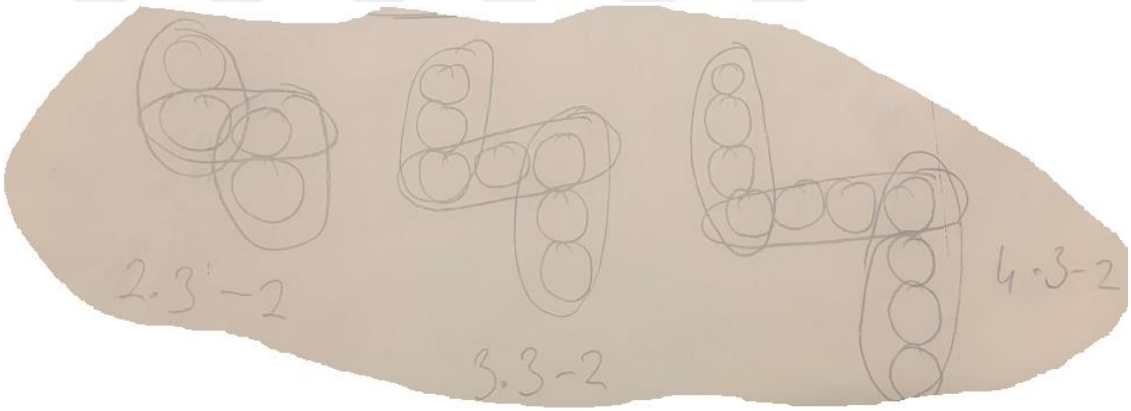
4.2.1. Genişleyen Şekil Örüntüsünün Genişlemesinin Farklı Yollarını Keşfederek Genişlemeyi Tanımlama, İfade Etme ve Sayısal İfadeye Çevirme

Bu çalışmadaki Varsayımsal öğrenme rotasının odağı genişleyen şekil örüntülerinin farklı yollarla büyümesini analiz etmektir. Büyümenin farklı yollarını analiz etmek, öğrencilerin bu matematiksel bağlamda fonksiyonel düşünme gelişimleri için kritik kabul edildiğinden, öğrencilerin bunu her ders boyunca kullanmalarını destekleyecek şekilde öğretim görevleri hazırlanmıştır. Her etkinlik, öğrencilerin dikkatini örüntünün fiziksel yapısına odaklamak ve fonksiyonel bir ilişkiyi genellemek için tanımlanmış yapıyı (yani görme biçimini) kullanmalarını desteklemek için tasarlanmıştır.

Öğretim deneyinin ilk uygulaması, iki ders saati olarak tasarlanmıştır. Bu ders saatlerinde, öğrencilerin büyüyen sandalye ve noktalı W örüntülerinin genişlemesini analiz ederek, şeklin yapısındaki ilgili düzenlilikleri keşfetmeleri, tanımlamaları ve sayısal olarak ifade etmeleri beklenmiştir. Bu dersin amacı genellemeler yapmak, kurallar oluşturmak veya değişkenlerle çalışmak değildir. Öğrenciler dersin başında ikili grup

çalışması yaparak genişleyen şekil örüntülerinin fiziksel yapısıyla çalışmış; böylece bu örüntülerin büyümesini görmenin birden fazla ve doğru yolunu görmüşlerdir. Bu örüntülerin özelliği, tüm öğrenciler için çoklu görme yollarının olmasıdır. Öğrenciler bireysel olarak, örüntülerin büyümesini görmenin yalnızca bir yolunu keşfetmiş olsalar bile grup çalışması sonunda tüm sınıf tartışmasıyla beraber, bu modelin nasıl büyüdüğünü görmenin çeşitli yollarını keşfetmişlerdir.

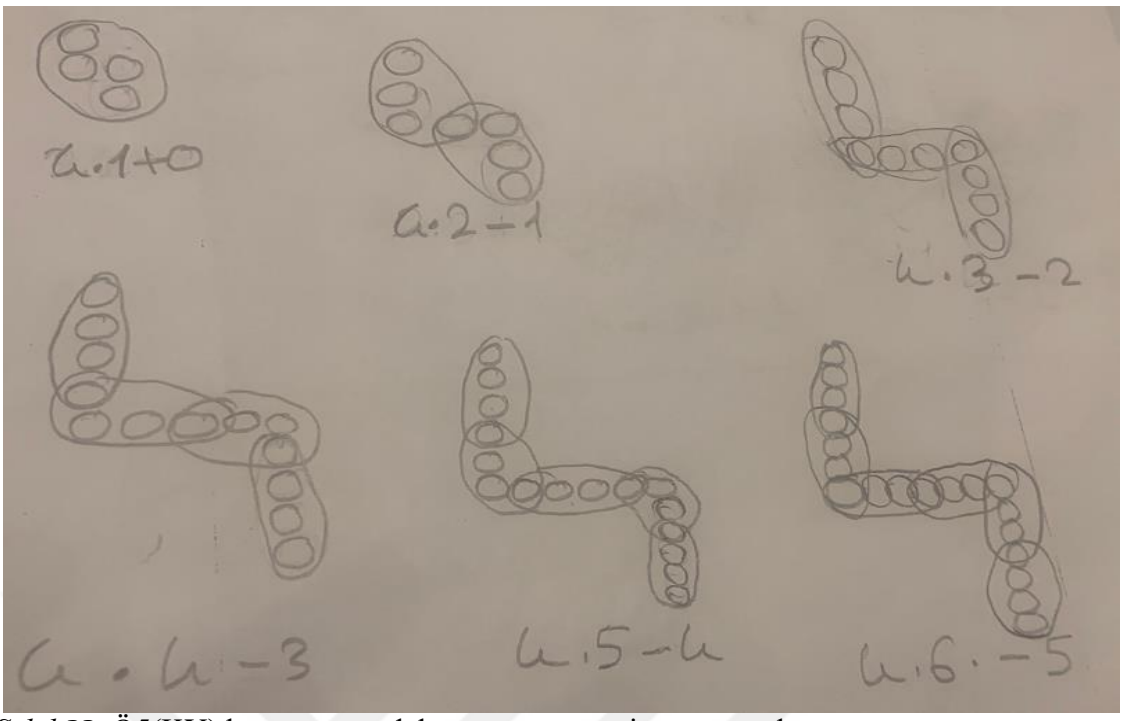
Bu dersin sonunda çoğu öğrenci iki örüntünün de genişlemesine yönelik en az bir görme yolu tanımlamış ve bunu sayısal olarak ifade etmişlerdir. Fakat görme yolları ve tanımlanan sayısal ifadelerin çoğunun beklenenin aksine özyinelemeli düşünme eğilimine sahip olduğu saptanmıştır. Aşağıda Şekil 22, Şekil 23, Şekil 24, Şekil 25, Şekil 26,Şekil 27, Şekil 28, Şekil 29 ve Şekil 30'da ilk derste gerçekleşen öğrencilerin farklı görme yollarına yönelik beklenen ve beklenmeyen cevap örnekleri verilmiştir.



Şekil 22. Ö6 (KO) büyüyen sandalye örüntüsü görme yolu

Yukardaki Şekil 22'de Ö6 (KO)'nın büyüyen sandalye örüntüsüne yönelik görme yolu gösterilmiştir. Bu görme yolu beklenen olası görme yollarından biridir. Bu görme yolunda Ö6(KO) daireleri şekildeki gibi grup yaparak gruptaki daire sayısı ile kaç grup olduğunu çarpmış ve daha sonra fazladan sayılan daire sayısını çıkarmıştır. Bu görme biçimi fonksiyonel kuralı oluşturmada kilit görme yollarından biridir. Çünkü bu görme yolunu oluşturan Ö6(KO)'nın oluşturduğu sayısal ifadelerdeki düzenlilik, fonksiyonel düşünme ile eşdeğer kabul edilen adım numarası ile genişleyen şekil örüntüsünün ölçülebilir bir yönü arasındaki ilişkiyi ifade etmede kolaylık sağlayacak potansiyeldedir.

Şekil 22'deki örneğe benzer olarak bazı öğrenciler daireleri gruplayıp fazladan sayılan daireleri sonradan çıkarma temelinde yapılan görme yollarının farklı varyasyonlarını göstermişlerdir. Bu yollardan bir tanesi aşağıda Şekil 23'te Ö5(KY) tarafından yapılmıştır.



Şekil 23. Ö5(KY) büyüyen sandalye örüntüsüne ait görme yolu

Şekil 22'de Ö6(KO)'nın gösterdiği görme yolu Şekil 23'teki Ö5(KY)'in gösterdiği görme yolu ile temelinde aynı mantık ile yapılmıştır. Fakat şekli bu şekilde parçalayıp analiz etmek beklenen ve istenenin dışında bir görme yoludur. Bu görme yolunda adım numarası ile örüntünün ölçülebilir bir yönü arasındaki ilişkiyi genellemek zorlaşmaktadır. Çünkü öğrenci yazdığı sayısal ifadelerdeki düzenliliklerde öz yinelemeli düşünmeye odaklanmaktadır. Aşağıda Ö5(KY)'in öz yinelemeli düşünme eğilimine kanıt olan, beklenmeyen görme yolu diyaloğu gösterilmiştir.

Öğretmen: Şekli nasıl parçaladın?

Ö5(KY): Her şekilde daireleri 4 erli grup yaptım öğretmenim. Daha sonra fazladan saydığım daireleri çıkardım.

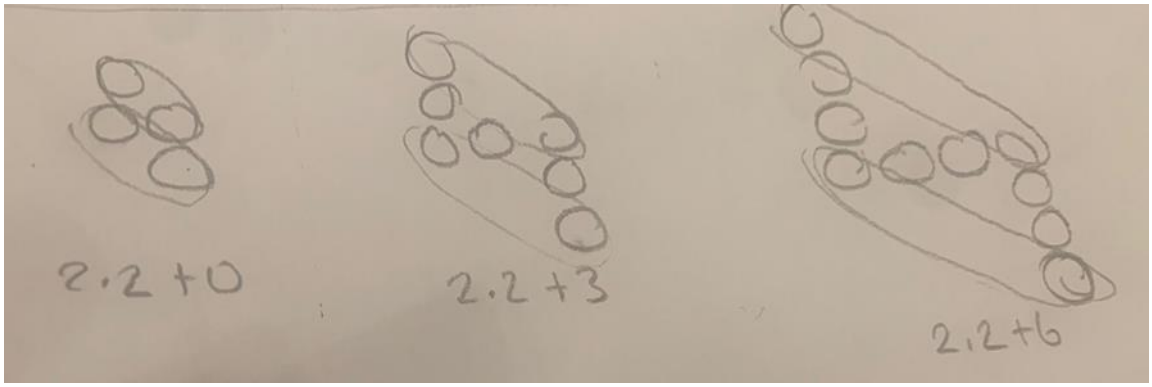
Öğretmen: 1. Şekilde çıkarmamışsın ama.

Ö5(KY): İlk şekilde fazladan sayılan daire yok. Ama diğer şekillerde fazladan sayılan daireleri çıkardım öğretmenim.

Öğretmen: Peki örüntüye yönelik yazdığın bu sayısal ifadelerde ne görüyorsun?

Ö5(KY): Çıkaracağım sayı 0'dan başlayarak birer birer azalırken, 4 ile çarptığım sayı hep bir birer artıyor.

Bir başka beklenmeyen görme yollarından biri ise Ö10 tarafından Şekil 24'te ki gibi yapılmıştır.



Şekil 24. Ö10(KY) büyüyen sandalye örüntüsüne ait görme yolu

Şekil 24'te Ö10(KY)'un büyüyen sandalye örüntüsü görme yolu incelendiğinde yine daireleri gruplama yaptığı, artan daireleri de sonradan eklediği görülmektedir. Bu görme yolu da ilerleyen derslerde Ö10(KY)'un öz yinelemeli düşünmeye odaklanıp fonksiyonel ilişki genellemesini zorlaştıracaktır. Bu duruma yönelik Ö10(KY) ile öğretmen arasında geçen diyalog aşağıda verilmiştir:

Öğretmen: Büyüyen sandalye örüntüsünde ne yaptın?

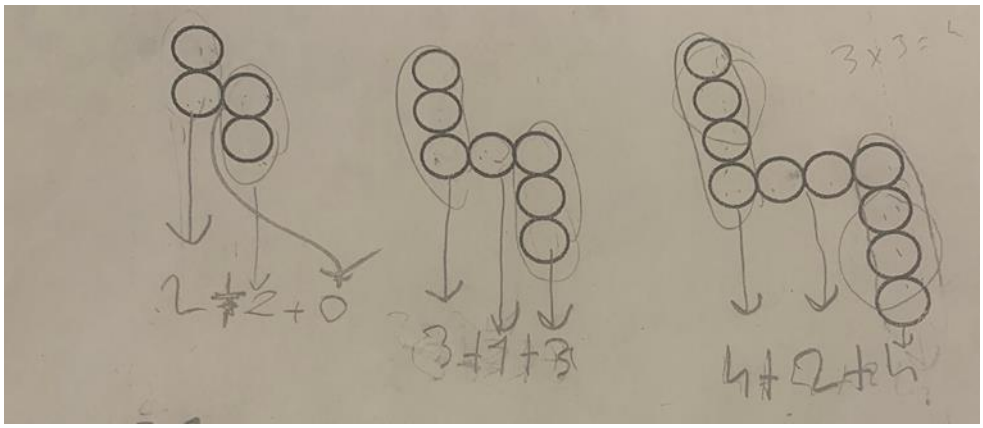
Ö10(KY): Hocam birbirine paralel duran 2 li daireleri grup yaptım. Böylece her şekilde bu gruplardan 2 tane olduğunu gördüm. Bu yüzden hep 2 ile 2 yi çarptım.

Öğretmen: Eklediğin sayılar nedir peki?

Öğretmen: Daha uzak şekillerde ne yapacaksın peki?

Ö10(KY):: Hep 3'er arttırarak devam edeceğim.

Ö17(EO)'nin büyüyen sandalye örüntüsüne yönelik beklenmeyen ve yine özyinelemeli düşünmeye kanıt olan görme yolu Şekil 25'te gösterilmiştir.



Şekil 25. Ö17(EO) büyüyen sandalye örüntüsü görme yolu

Şekil 25 incelendiğinde Ö17(EO), dikeydeki daireleri grup yaparak yataydaki daireleri üzerine ekleyerek görme yolu oluşturmuştur. Ö17(EO)'nin oluşturduğu sayısal ifadelerde olan sayılar arasındaki düzeni özyinelemeli düşünme ile devam ettirme eğiliminde olduğu görülmektedir. Bu görme yoluna yönelik Ö17(EO)'nin öğretmen ile yaptığı diyalog aşağıda verilmiştir:

Öğretmen: Ö17(EO) ne yaptığı anlatır mısın?

Ö17(EO): Dikeyde bulunan daireleri şekildeki gibi ayrı ayrı topladım hocam. Daha sonra ortada bulunan daire saysınıı ekledim.

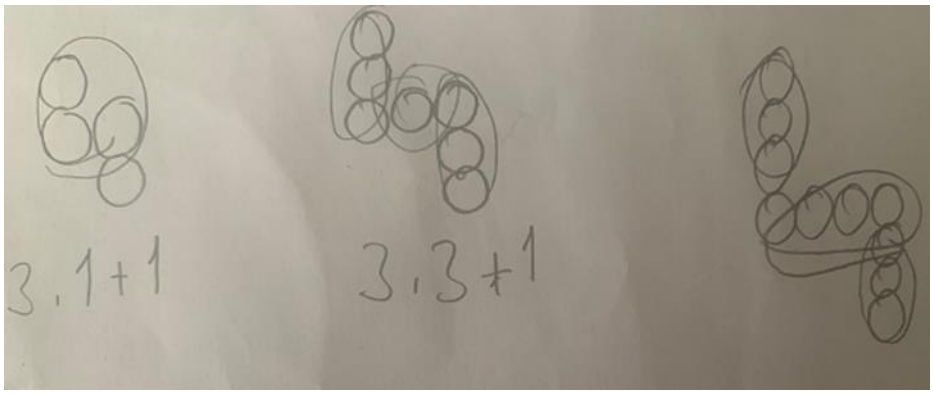
Öğretmen: İlk sayısal ifadede 0 nerden geliyor?

Ö17(EO): İlk şekilde ortada daire kalmıyor o yüzden 0 ile topladım.

Öğretmen: Peki bu genişlemeyi nasıl anlatırsın?

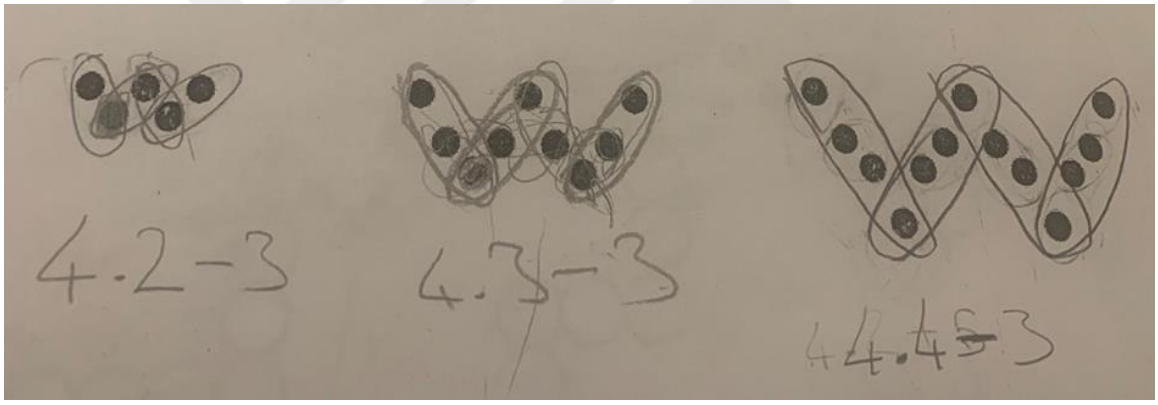
Ö17(EO): Dikeylerde bulunan daire sayısı 2 'den başlayarak 1'er 1'er artıyor. Ortada bulunan daire sayısı 0'dan başlayarak yine birer birer artıyor hocam.

Şekil 26'da büyüyen sandalye örüntüsüne ilişkin hiçbir fonksiyonel düşünme düzeyini içermeyen bir görme yolu örneklendirilmiştir. Ö4(ED)'ün görme yolunu incelediğimizde genişleyen şekil örüntüsünün fiziksel yapısını analiz ederek fonksiyonel genellemeye götürecek mantıklı bir görme yolu oluşturamadığı görülmektedir.



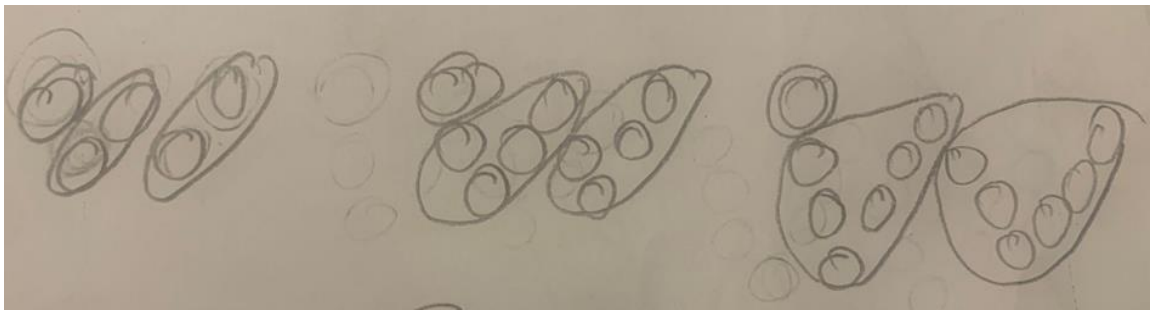
Şekil 26. Ö4(ED) büyüyen sandalye örüntüsü görme yolu

İlk uygulamada kullanılan bir başka genişleyen şekil örüntüsü ise noktalı W modelidir. Bu modele ilişkin beklenen ve beklenmeyen öğrenci görme yolları aşağıda örneklendirilmiştir. Şekil 27'de Ö15(EY)'in noktalı W örüntüsüne yönelik görme yolu, öğrenci grubundan göstermesi beklenen görme yollarından biridir.



Şekil 27. Ö15(EY) noktalı W örüntüsü görme yolu

Şekil 27 incelendiğinde Ö15(EY) şekildeki gibi daireleri gruplamış ve grup sayısının hep 4 olduğunu görmüştür. Bu yüzden daire sayısı, grup sayısı olan 4 ile çarpıldıktan sonra fazladan sayılan daire sayısı hep 3 olduğundan 3 çıkartılmıştır. Bu görme yolunda çarpılan sayının hep 4 olması ve çıkartılan sayının hep 3 olması oluşturulan sayısal ifadeleri özyinelemeli düşünmeden uzaklaştırıp, fonksiyonel genellemeye ulaşmada kolaylık sağlamaktadır. Bu düşünceye benzer olarak öğrencilerden beklenen görme yollarından biri de Şekil 28'de gösterilmiştir.



Şekil 28. Ö11(EO)'in noktalı W örüntüsü görme yolu

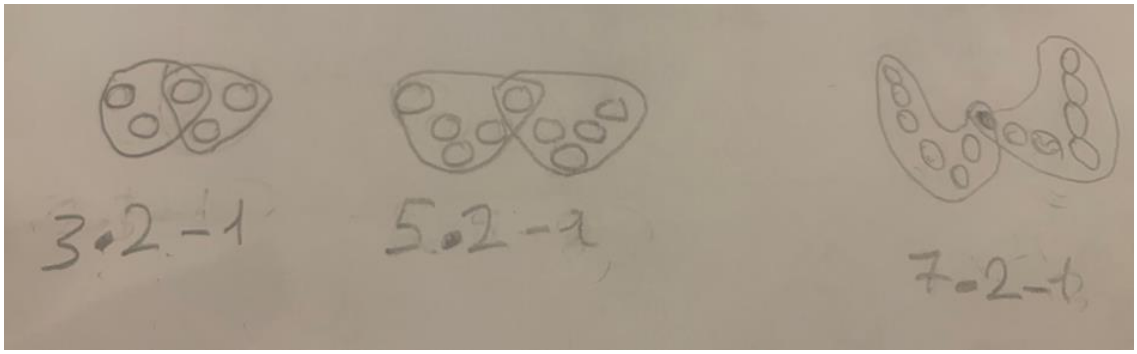
Şekil 28'yi incelediğimizde Ö11(EO)'in yaptığı gruplamada çarpılan sayının hep 2 olması ve eklenen sayının hep 1 olması fonksiyonel genellemede kolaylık sağlayacak potansiyele sahiptir. Bu görme yoluna yönelik Ö11(EO) ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyalog şu şekildedir:

Ö11(EO): Her şekilde içinde eşit sayıda daire bulunan 2 şer daire grubu yaptım.

Öğretmen: 2 daire grubu ama her şekildeki bu daire grubundaki daire sayıları farklı mı?

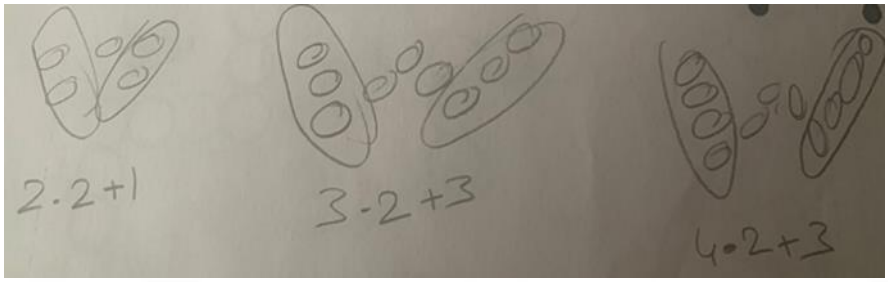
Ö11(EO): Evet her şekilde 2 daire grubu var ve şekillerde bu daire sayıları farklı ama kendi içlerinde bu gruplardaki daire sayıları aynı. Bu yüzden her şekildeki 2 grup sayısını, gruptaki daire sayısı ile çarparım sonra hep 1 daire artıyor bunu da +1 olarak yazarım.

Aşağıda Şekil 29'de Ö16(ED)'nın oluşturduğu büyüme yolu ve bu yola ilişkin özyinelemeli düşünme eğiliminde olduğu sayısal ifadesi gösterilmiştir.



Şekil 29. Ö16(ED) noktalı W örüntüsü görme yolu

Şekil 29'da Ö16(ED) örüntüdeki daire sayılarını şekildeki gibi gruplandığında her bir şekilde 2 grup ortaya çıkmaktadır. Ö16(ED) sayma yolunda 2 ile çarpılan sayının yani gruplardaki daire sayısının 3'ten başlayarak her adımda 2'şer arttığını ifade ederek özyinelemeli ilişki eğiliminde olduğunu göstermiştir. Fazladan sayılan daire sayısı hep 1 olduğundan bu sonradan çıkarılır.



Şekil 30. Ö3(ED) noktalı W örüntüsü görme yolu

Şekil 30'da Ö3(ED)'ün noktalı W örüntüsünde doğru bir görme yolu oluşturamadığı görülmektedir. Yazdığı sayısal ifadede sayılar arasında bir örüntü bulunmamaktadır.

İlk Ders Sonunda Araştırmacı Öğretmen ile Gözlemci Öğretmenin Tuttukları Notlara ve Öğretmen Günlüğüne İlişkin Bulgular

Araştırmacı öğretmen ilk ders sonunda bütün öğrencilerin grup çalışması ile örüntülere yönelik görme yollarından en az bir tane bulduğunu, tüm sınıf tartışması ile farklı görme yollarını görerek, farklı görme yollarını takdir ettiğini tespit etmiştir. Bu şekilde diğer dersi öğrencilerin motive olarak beklediği sonucuna varmıştır. Ayrıca örüntülerde olası görme yolları dışında farklı görme yollarının öğrenciler tarafından türetildiği görülmüştür. Özellikle büyüyen sandalye örüntüsünde bu durumun daha fazla gerçekleştiği sonucuna varılmıştır. Bunun aslında istenmeyen bir durum olduğu not edilmiştir. Bu beklenmeyen duruma yönelik diğer dersin organize edilmesi kararlaştırılmıştır. İlk derse yönelik araştırmacı öğretmenin tuttuğu günlük aşağıda gösterilmiştir.

GÜNLÜK

Öğretmen

İlk ders öncesinde hazırladığım genişleyen şekil örüntüleri görevlerinde öğrencilerin bu kadar beklenmeyen şekilde görme yolları türeteceğini düşünmemiştim. Keşke büyüyen sandalye örüntüsü yerine öğrencileri öz yineleme düşünme eğilimine odaklamayacak başla bir örüntü modeli seçseydim. İkinci derste buna yönelik önlem almalıyım. Yoksa diğer derslerde üç sütunlu tablolarda fonksiyonel ilişkiyi genellemede zorluk çekerler. İkinci derste oluşturulacak üç sütunlu tabloda uzak adımları da yaptırarak öz yinelemeli düşünme ile odaklanmaları halinde sayısal ifade yazmalarının zorlaşacağını sezdirmem lazım.

4.2.2. Genişleyen Şekil örüntüsünün Fiziksel Yapısını Temsil Eden Sayısal ifade Oluşturma ve Bu İfadeleri Üç Sütunlu Tabloda Gösterme

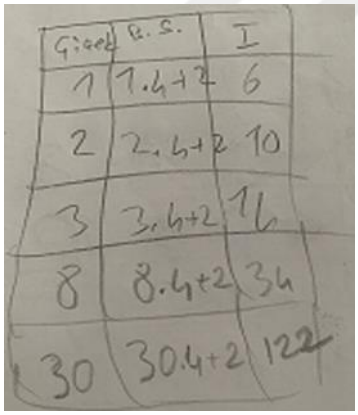
Literatürde üç sütunlu tablo, iki sütunlu tabloya kıyasla öğrencinin fonksiyonel düşünme gelişiminde önemli bir yapı olarak tanımlanmaktadır (Stephens ve diğerleri, 2017). İki sütunlu tabloda öğrenciler, aynı veri grubundaki dikeyde sabit artma ve azalmalara odaklanırken, üç sütunlu tabloda ise orta sütunun varlığı ile yataydaki farklı veriler arasındaki ilişkiye odaklanarak fonksiyonel düşünme gelişiminde önemli bir avantaj sağlamaktadır. Bu çalışmada da üç sütunlu tablo etkinlikler dizisi boyunca fonksiyonel ilişkileri keşfetme ve anlamlandırmada en sık kullanılan temsildir. Üç sütunlu tablo dersin başında araştırmacı öğretmen tarafından öğrencilere tanıtılmıştır. Öğrenciler başlangıçta verileri düzenlemek ve örüntülerin genişlemesine yönelik oluşturdukları sayısal ifadelerdeki örüntüleri daha kolay fark etmek için üç sütunlu tablo oluşturmuşlardır. Daha sonraki derste üç sütunlu tablo ile verileri karşılaştırmak, ilişkileri bulmak ve bir fonksiyon kuralı türetmek için bir araç olarak kullanmışlardır.

Öğrencilerden beklenen sayma biçimlerini oluşturup, bunları üç sütunlu tabloda temsil ederek fonksiyonel genellemede başarılı olan öğrencilerin cevapları aşağıda Şekil 30,Şekil 31, Şekil 32'de gösterilmiştir.



Şekil 31. Ö14(EO)'ün 8 çiçekli kolye yapımında gerekli beyaz boncuk sayısı sayma biçimi

Şekil 31'de Ö14(EO)'ün, 8 çiçekli kolye yapımında kullanması gereken beyaz boncuk sayısı ile tek tek saymadan oluşturduğu sayma biçimi gösterilmiştir. Yiğit her bir çiçekte beyaz boncukları şekildeki gibi yay biçiminde göstererek beyaz boncukları 4'er saymıştır. 8 çiçek her çiçekte 4 beyaz boncuk olduğundan 8x4 ile göstermiştir. 4'erli saydıktan sonra şeklin en sağında 2 beyaz boncuk kaldığını keşfedip bu 2 beyaz boncuğu sonucunun üzerine eklemiştir. Bu sayma biçimine yönelik Ö14(EO)'ün oluşturduğu üç sütunlu tablo Şekil 32'de verilmiştir.



Şekil 32. Ö14(EO) oluşturduğu sayısal ifadeler üç sütunlu tabloda gösterimi

Şekil 32'ye göre, Ö14(EO) üç sütunlu tabloda 1, 2,3 ve 8 çiçekli kolye yapımında kullanması gereken beyaz boncuk sayısını temsil eden sayısal ifadeleri orta sütunda göstermiştir. Oluşturduğu sayısal ifadenin uzak adımlara genellenebilir olduğunu test etmesi için üç sütunlu tabloda 30 çiçekli kolye yapımında kullanması gereken beyaz boncuk sayısına ait sayısal ifadeyi de yazması istenmiştir. Oluşturduğu sayısal ifadede kaç çiçekli kolye oluşturmak istiyorsa o çiçek sayısını sabit 4 ile çarparak üzerine 2 eklemesi gerektiğini keşfederek üç sütunlu tablonun orta sütununda30. Adıma ait genellenmiş bu sayısal ifadeyi göstermiştir.

Araştırmacı öğretmen ile Ö14(EO) adlı öğrenci arasında geçen diyalog aşağıda gösterilmiştir.

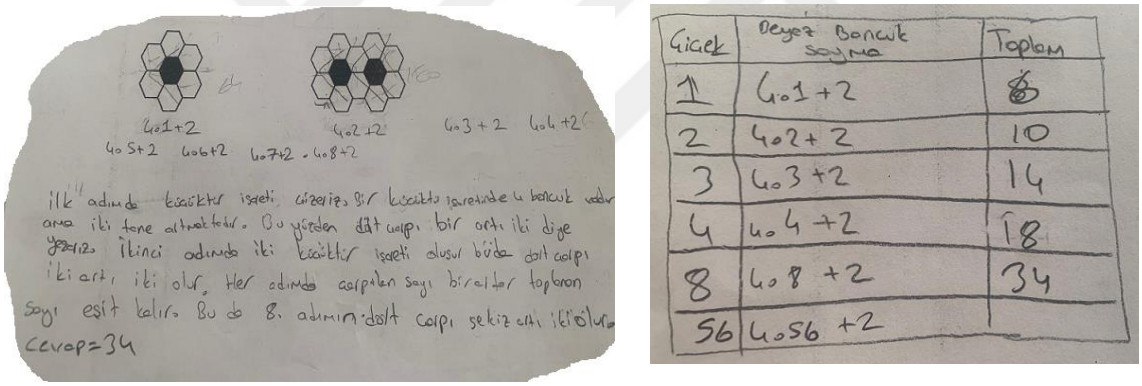
Öğretmen: Oluşturduğun sayısal ifadeleri üç sütunlu tablonun orta sütununda göstermek işini kolaylaştırdı mı?

Ö14(EO): Evet kolaylaştırdı.

Öğretmen: Neyi kolaylaştırdı?

Ö14(EO): Bu sayısal ifadelerdeki sabit olan değişmeyen sayıları görmemi ve bu sayıları nereye koyacağımı, neyi gösterdiklerini anlamayı kolaylaştırdı.

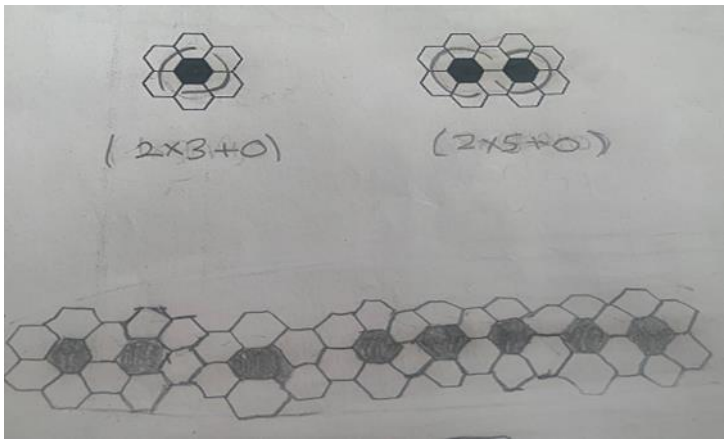
Ö14(EO) ile benzer şekilde sayma biçimi ile bu sayma biçimlerini üç sütunlu temsil ederek uzak adımlara genellemede başarılı olan Ö9(KY)' un sayma biçimi ve üç sütunlu tablosu aşağıda Şekil 33'te gösterilmiştir.



Şekil 33. Ö9(KY), 8 çiçekli kolye beyaz boncuk sayısı sayma biçimi ve üç sütunlu tablo

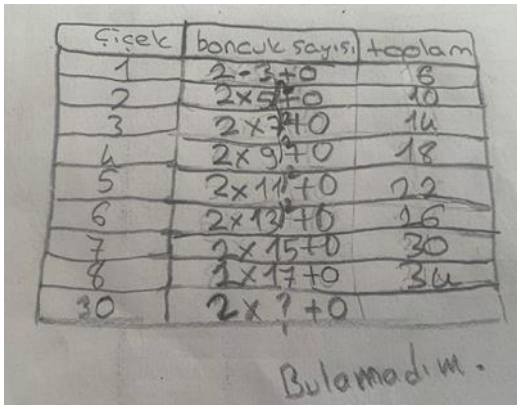
Şekil 33 incelendiğinde Ö9(KY), oluşturduğu sayma biçimindeki aynı değişmeyen sayıları keşfederek ve üç sütunlu tabloda doğru şekilde temsil ederek çiçek sayısı ile sayısal ifade arasında doğru bir ilişki kurmuş ve bu ilişki sayesinde uzak adıma başarılı şekilde genellemiştir.

Çiçek kolye örüntüsünde gereken beyaz boncuk sayısını tek tek saymadan ifade edemeyen ve buna bağlı olarak başarılı bir şekilde üç sütunlu tabloda temsil edemeyen öğrencinin çalışma kâğıtlarına ait örnekler aşağıda Şekil 34 ve Şekil 35'te gösterilmiştir.



Şekil 34. Ö5(KY), 8 çiçekli kolye yapımında gerekli beyaz boncuk sayısı sayma biçimi

Şekil 34'te Ö5(KY)'in, 8 çiçekli kolye yapımında gereken beyaz boncuk sayısını hesaplama yolu gösterilmiştir. Bunu yapmak için şekilde gösterildiği gibi 1 ve 2 çiçekli kolye yapımından yararlanmak istemiştir. 1 çiçekli kolye yapımında 2 tane 3'lü beyaz boncuk grubu gerekmektedir. 2 çiçekli kolye yapımında 2 tane 5 li beyaz boncuk gerektiğini ifade etmiştir. Alt tarafta çizdiği 8 çiçekli kolye yapımı için yine 2 tane gruplu beyaz boncuk sayısını hesaplarken her grubunda kaç beyaz boncuk gerektiğini tek tek saymadan ifade edememiştir. Bu yüzden tek tek saymadan 2 ile kaçı çarpacağını söyleyememiştir. Bunu ifade etmeye yönelik yararlanmak için çizdiği üç sütunlu tablo Şekil 35'te verilmiştir.



Şekil 35. Ö5(KY) çiçek kolye yapımı üç sütunlu tablo

Şekil 35 incelendiğinde Ö5(KY), her grupta kaç beyaz boncuk olduğunu bulmak için üç sütunlu tabloyu kullanmıştır. 1. çiçekten başlayarak 8. Çiçeğe kadar ardışık çiçek yapımı için gerekli oluşturduğu sayısal ifadeyi tabloya şekildeki gibi doldurmuştur. Fakat Ö5(KY)'in üç sütunlu tablosunda orta sütuna dikkat edersek, Ö5(KY)'in her 2'li grupta

gerekli beyaz boncuk sayısını ileri adımlara genellerken yine öz yinelemeli düşünme kullandığı görülmektedir. Daha sonra 30 çiçekli kolye yapımı için bu gruplarda kaç beyaz boncuk olduğunu bulması istenerek özyinelemeli düşünme ile bunu gerçekleştirmenin zor olduğunun fark etmesi sağlanmıştır. Bu diyaloglar aşağıda gösterilmiştir:

Öğretmen: Yaptığın sayma biçimini anlatır mısın?

Ö5(KY): 1 çiçekli kolye yapımında beyaz boncukları 2 grup yaptım. Her grupta 3 beyaz boncuk yer aldığı için 2x3 olarak yazdım. Artan boncuk olmadığı için yanına +0 yazdım. 2 çiçekli kolye yaparken yine 2 grup yaptım. Her grupta 5 beyaz boncuk yer aldığı için 2x5 olarak yazdım. Artan boncuk olmadığı için yanına +0 yazdım.

Öğretmen: Peki 8 çiçekli kolye yapımında yine beyaz boncukları 2 gruba mı ayıracaksın?

Ö5(KY): Evet.

Öğretmen: Peki her grupta kaç beyaz boncuk olduğunu tek tek saymadan nasıl ifade edersin?

Ö5(KY): Bilmiyorum.

Öğretmen: Bu sayısal ifadeleri üç sütunlu tabloda da gösterebilir misin?

Ö5(KY): Evet üç sütunlu tabloda gösterebilirim.

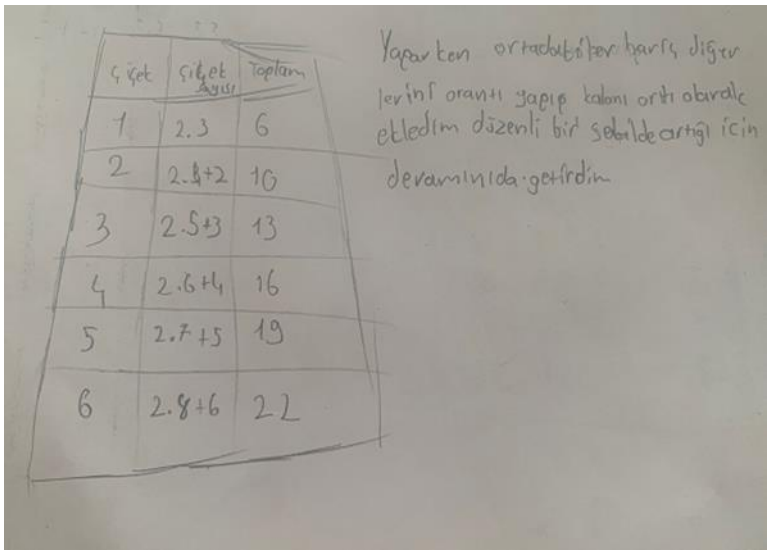
Öğretmen: Çizdiğin üç sütunlu tabloda 8 çiçekli kolyedeki 2x17 ifadesinde 17 yi nasıl buldun?

Ö5(KY): Üç sütunlu tabloda 2x3, 2x5,2x7, 2x9 …. İfadelerinde 2 ile çarpılan sayıları 2'şer artırarak devam ettim.

Öğretmen: Peki 100 çiçekli kolye yapımı için 2 ile çarpılan sayıyı bulmak için 2'şer arttırarak 100 çiçeğe kadar devam mı edersin?

Ö5(KY): Aslında biraz uğraştırıcı ama öyle yaparım herhalde.

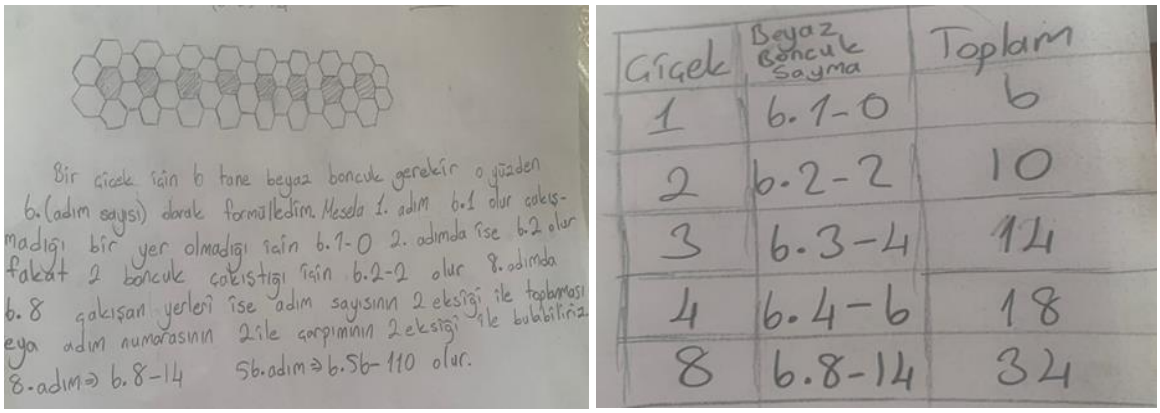
Yine Şekil 36'da Ö5(KY) gibi özyinelemeli düşünmeye odaklanan Ö16(ED)'nın üç sütunlu tablo temsili verilmiştir.



Şekil 36. Ö16(ED) çiçek kolye yapımı üç sütunlu tablo

Şekil 36'ya göre Ö16(ED) noktalı W örüntüsünde olduğu gibi bu örüntüde de sayma biçimini öz yinelemeli oluşturmuştur. Bu yüzden diğer örüntüde olduğu gibi bu örüntüde de uzak adımlara yönelik fonksiyonel genelleme yapamamıştır.

Fonksiyonel ilişkileri genellemek için tablo temsilinde dikey yerine yatay ilişkileri keşfetmek önemlidir (Warren, 2005). Şekil 37'de üç sütunlu tabloda nicelikler arasındaki yatay ilişkileri keşfederek başarılı şekilde fonksiyonel genelleme yapan Ö13(KY)'ün çalışma kağıdı gösterilmiştir.



Şekil 37. *Ö13(KY) çiçek kolye örüntüsü sayma biçimi ve üç sütunlu tablo*

Şekil 37'de Ö13(KY), çiçek kolye örüntüsünde çiçek örüntüsündeki adım numarası ile sayısal ifadesinde ki sayılar arasında ilişki bularak bu ilişkiyi fonksiyonel düşünmeye genellediği görülmektedir. Şekil 36'ya bakıldığında Ö13(KY)'ün sayma biçimi ve üç sütunlu tablosunda adım numarası ile şeklin sayılabilir yönleri arasında

ilişkiyi tablodan yatay olarak kurabildiği tespit edilmiştir.Ö13(KY)'ün üç sütunlu tabloda yatay ilişki kurabilmesi 56. Adım gibi uzak adımlara fonksiyonel düşünmede genelleme yapmada başarılı olmasına sebep olmuştur.

İkinci Ders Sonunda Araştırmacı Öğretmen ile Gözlemci Öğretmenin Tuttukları Notlara ve Öğretmen Günlüğüne İlişkin Bulgular

İkinci derste ki öğrenci bireysel çalışmaları ve diyaloglar incelendiğinde iki öğrenci hariç bütün öğrencilerin örüntüye yönelik sayma biçimi oluşturduğu ve bu sayısal ifadeleri üç sütunlu tabloda temsil ettiği tespit edilmiştir. Örüntüye yönelik sayısal ifade oluşturan ve bunu üç sütunlu tabloda temsil eden öğrenciler içinde hala bazı öğrenciler öz yinelemeli düşünme kullanarak uzak adımlara ait şekil sayısını hesaplamada zorluk yaşamışlardır. Bu tespit, önceki araştırma çalışmaları (Örn. Blanton ve Kaput, 2011; Markworth, 2010), üç sütunlu tabloların öğrencilerin matematiksel düşünmeleri için önemli bir temsil olmasına rağmen, öğrencileri bağımlı değişkendeki öz yinelemeli örüntülere odaklanacak şekilde yönlendirebileceğini bulgusuyla uyumludur. Özyinelemeli yaklaşım, bu derste olduğu gibi öğrencilerin örüntüde bir sonraki adımdaki şekil sayısını tahmin etmesine izin verirken, uzak adımlardaki şekil sayısını hesaplamada ve değişkenler arasındaki ilişkiler hakkında fonksiyonel genellemeler yapmada yetersiz bırakmıştır. Bu açıdan üç sütunlu tabloda öz yineleme yaklaşıma dikkat çeken dikey ilişkilere yönelen öğrencilerin odaklarını, adım numarası ile sayma biçimindeki sayılar arasındaki yatay ilişkiye yöneltecek çalışmalara ihtiyaç duyulmuştur. Bu amaçla öğrencilerin üç sütunlu tabloda sayısal ifadeleri adımları sıralı şekilde değil de karışık şekilde yerleştirmesinin öğrencileri özyinelemeli yaklaşımdan uzaklaştıracağı düşünülmüştür.

Aşağıda dersin sonunda araştırmacı öğretmenin ders hakkında tuttuğu günlük verilmiştir.

GÜNLÜK

Öğretmen

İkinci derste öz yinelemeli düşünme ile oluşturulan sayısal ifadeler olmasına rağmen bu sayı ilk derse kıyasla belirgin ölçüde azalmıştır. Buna uzak adımlardaki şekil sayısını hesaplamakta zorluk çeken öğrencilerin oluşturdukları sayısal ifadelerdeki sayılar arasındaki özyinelemeli düşünme yaklaşımının yetersizliğini fark etmiş olmaları ve sayısal ifadeler arasındaki ilişkilerin uzak adımlara genellemenin teşvik edilmesi etken

gösterilebilir. Bu öğrenciler ders esnasında öz yinelemeli yaklaşıma odaklı bir sayma biçimi yaptıklarında bunu iptal edip başka sayma biçimleri oluşturmaya çalıştıkları tespit edilmiştir. Bu duruma örnek bir diyalog aşağıda verilmiştir.

Ö2(EO): İlk oluşturduğum sayısal ifadede değişen sayılar arasında alta doğru artmaya ve azalmaya baktığımda ileri adımları hesaplamakta zorlanıyorum.

Öğretmen: Peki bunun üstesinden gelmek için ne yapabilirsin?

Ö2(EO): Oluşturacağım sayısal ifade içinde yer alan sayılarda değişmeyen sayıları fazla olan sayma biçimleri tercih ederim.

Öğretmen: Nasıl yani?

Ö2(EO): Mesela şekli parçalara ayırdığımda hep şekilde eşit sayıda grup olması ve bunu yaptıktan sonra hep aynı sayıda şekil artması ya da fazla sayılması durumlarını tercih ederim.

Fakat hala özyinelemeli yaklaşıma yapan öğrenciler mevcut. Bu öğrencilerin dikeyde yer alan özyinelemeli ilişkilere odaklanmasını adımları karışık yerleştirilmesi sağlanarak önleyebilirim.

4.2.3. Üç Sütunlu Tablodaki Örüntüleri Keşfederek Adım Numarası İle Genişleyen Şekil Örüntüsünün Ölçülebilir Bir Yönü Arasındaki İlişkiyi Fonksiyonel İlişkiye Genelleme

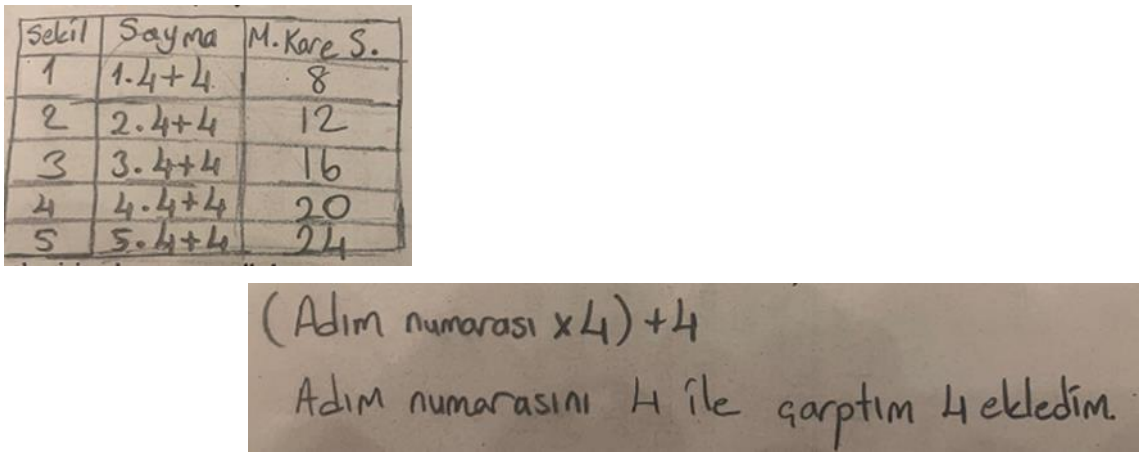
Bu dersteki örüntü görevi daha önce birçok cebirsel düşünme araştırmasında kullanılan klasik bir örüntü problemidir. Bu problemde öğrencilerden önce havuzun etrafında bulunan sınırdaki kare sayılarını tek tek saymadan bulmaları istenmiştir. Sınırdaki karelerin sayısının tek tek saymadan hesaplanmasına yönelik altı farklı yol olduğundan, Sınır Problemi eşdeğer ifadeleri incelemek için büyük bir potansiyele sahiptir. Fakat en önemlisi, kare havuzun kenar uzunluğu ile havuzun etrafında buluna karo (kare) sayısı arasında açık bir fonksiyonel ilişki olduğundan, bu problem varsayılan 3. öğrenme ilerlemesi için umut vaat etmektedir. Çünkü sınır probleminde karenin kenar uzunluğu değiştikçe sınırdaki karo (kare) sayısı doğrusal olarak değişmektedir. Bu problemde öğrencilerden farklı kenar uzunluğuna sahip havuzun etrafındaki kare sayılarına yönelik eşdeğer sayısal ifadeler oluşturmaları istenmiştir. Buldukları sayısal ifadeleri üç sütunlu tabloda temsil ederek üç sütunlu tablodaki örüntüleri keşfetmeleri istenmiştir. Üç sütunlu tablodaki örüntülerin keşfi ile kare havuzun kenar uzunluğu ile havuzun etrafındaki sınırda bulunan karo (kare) sayıları arasındaki fonksiyonel ilişkileri

tanımlamaları istenmiştir. Burada kare havuzun kenar uzunluğu üç sütunlu tabloda adım numarası, havuzun etrafındaki karo sayısı ise saymanın sonucu olarak karakterize edilmiştir.

Bu ders ilk olarak öğrencilerin grup çalışması yapması daha sonra tüm sınıf tartışması olarak planlanmış ve uygulanmıştır. Öğrenciler ilk başta gruplara ayrılmıştır. Gruplardan farklı kenar uzunluğuna sahip havuzlarda sınırda bulunan kare sayısını hesaplamalarına yönelik sayısal ifadeler oluşturmalarını istenmiştir. Bu sırada araştırmacı öğretmen ve gözlemci öğretmen sıralar arasında gezerek öğrencilerin çalışmalarını takip etmişlerdir. Grup çalışması tamamlandıktan sonra grupların tek tek oluşturdukları sayısal ifadeleri ve üç sütunlu tabloları sunmaları istenmiştir. Bu sunumlarda gruplardan üç sütunlu tabloda orta sütunda yer alan sayısal ifadeleri açıklamaları ve ilişkilendirmeleri istenmiştir. Adım numarası ile şeklin ölçülebilir yönü arasındaki ilişkiyi fonksiyonel düşünmeye genelleme potansiyeli olan grupların sunumlarını önce sunmaları sağlanmıştır. Daha sonra sayısal ifadelerin daha nadir ve daha zorlayıcı yollarını seçen grupların sunumlarını yapması istenmiştir. Her grup sunumunda tüm sınıfa orta sütunda gördükleri örüntüleri tanımlamaları konusunda yönlendirmede bulunulmuştur. Bu yönlendirmelerde orta sütunda yer alan örüntülerde sayılar arasında nelerin aynı kaldığını, nelerin değiştiğini, adım numarası ile bu sayılar arasında nasıl bir ilişki olduğu konusunda öğrencilerin keşif yapması sağlanmaya çalışılmıştır. Öğrencilerden daha sonra orta sütundaki gördükleri örüntüleri 70. , 89. Adım veya 200. adım gibi geniş bir genelleme yapmak için kullanmaları istenmiştir.

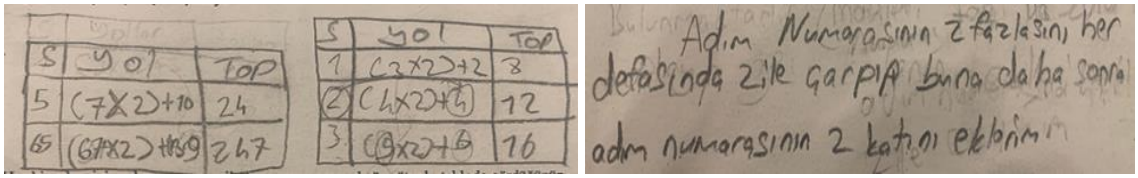
En sonunda öğrencilere orta sütunda keşfetmeye çalıştıkları örüntülerin bir fonksiyonel ilişki olduğu ifade edilmiştir. Fonksiyonel ilişki, "örüntülerdeki adım numarası ile örüntüdeki sayılabilen bir yön arasındaki iki nicelik arasında kurulan özel bir ilişki" olarak öğrencilere ifade edilmiştir. Daha sonra öğrencilere, her adımdaki toplam kare sayısını hesaplamak için adım numarasına hangi işlemler yapıldığı sorulmuştur. Öğrencilerden bunu sözlü olarak tanımlamaları istenmiştir.

Bu probleme yönelik oluşturulan sayısal ifadeler, üç sütunlu tablo ve orta sütunda adım numarası ile kare sayısı arasındaki fonksiyonel ilişki tanımlamaları ile ilgili başarılı cevap örnekleri aşağıda Şekil 38, Şekil 39, Şekil 40, Şekil 41 ve Şekil 42 'de gösterilmiştir.



Şekil 38. Ö13(KY) sınır problemine ait üç sütunlu tablo ve fonksiyonel ilişki tanımlaması

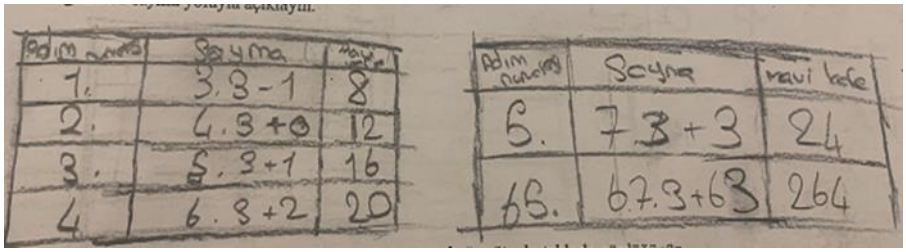
Yukarıda Şekil 38'de Ö13(KY)'ün sınır problemine yönelik oluşturduğu üç sütunlu tablo ve orta sütunda yer alan sayısal ifadelerdeki örüntüleri analiz sonunda adım numarası ile kare sayısı arasındaki fonksiyonel ilişki tanımlaması verilmiştir. Şekil 38 incelendiğinde, Ö13(KY)'ün orta sütundaki sayısal ifadelerde, sayılar arasında 4 çarpanının hep aynı kaldığı, 4 ile çarpılan sayının adım numarası olduğu ve daha sonra eklenen sayının hep 4 olduğu görülmektedir. Bu sayısal ifadelerde değişmeden kalan sayıların olması ve çarpılan sayının adım numarası ile kolay görünen bir ilişkisinin olması fonksiyonel kuralı oluşturmada kolaylık sağlamaktadır.



Şekil 39. Ö14(EO)'ün sınır problemine ait üç sütunlu tablo ve fonksiyonel ilişki tanımlaması

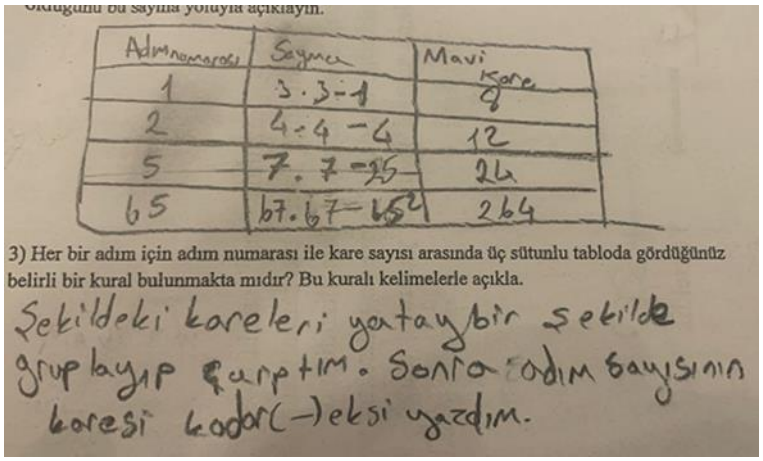
Şekil 39'da Ö14(EO)'ün sınır problemine ait oluşturduğu üç sütunlu tablo ve fonksiyonel ilişki tanımlaması gösterilmiştir. Ö14(EO)'ün oluşturduğu üç sütunlu tabloyu incelediğimizde sayısal ifadeler ve sayısal ifadelerin başka adım numaralarına genellemesinin, tanımlanan fonksiyonel ilişkinin doğru olduğu görülmektedir. Orta sütun incelendiğinde, Ö14(EO) sayısal ifadelerde dikeydeki ilişkileri inceleseydi sabit olarak artmalara odaklanacak ve özyinelemeli düşünme eğiliminde olacaktı. Fakat Ö14(EO)'ün uzak genellemelerine ve fonksiyonel ilişki tanımlamasına baktığımızda Ö14(EO)'ün

tabloda yatayda adım numarası ile sayısal ifadelerdeki sayılar arasındaki ilişkilere odaklandığı görülmektedir.



Şekil 40. Ö17(EO) sınır problemine ait üç sütunlu tablo

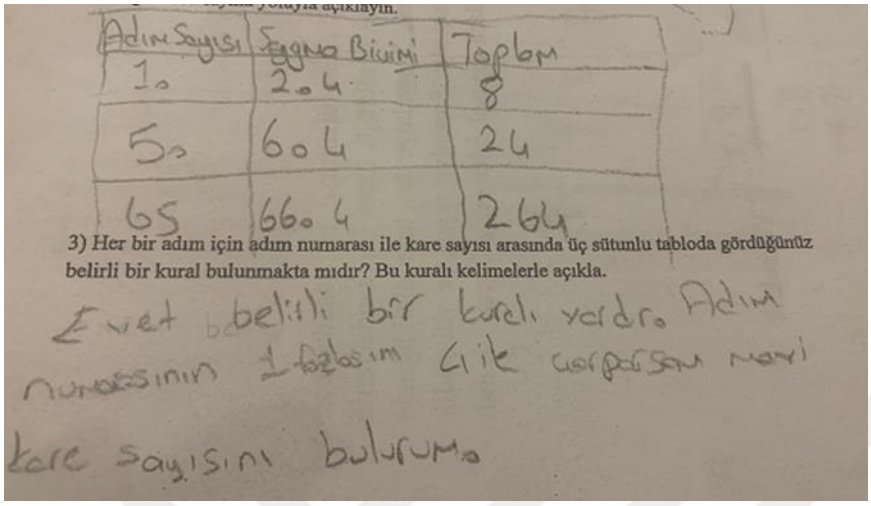
Yukarıda Şekil 40'ta Ö17(EO) öğrencinin sınır problemine ait oluşturduğu üç sütunlu tablo gösterilmiştir. Şekil 40'ı incelediğimizde Ö17(EO), de orta sütunda dikeydeki sabit artmalara yönelik özyineleme yaklaşıma odaklanmayıp yatayda adım numarası ile sayısal ifadelerdeki sayılar arasındaki ilişkiye odaklandığı görülmektedir. Bunun kanıtı olarak sayısal ifadesini uzak genelleme yaparak 65. Adıma ait sayısal ifadeyi yazmış olması gösterilebilir. Daha önceki derslerde hep özyinelemeli düşünme eğiliminde cevaplar oluşturan Ö17(EO) için bu durum olumlu bir gelişme olarak söylenebilir.



Şekil 41. Ö7 (ED) sınır problemine ait üç sütunlu tablo ve fonksiyonel ilişki tanımlaması

Yukarda Şekil 41'de Ö7 (ED)'nin alan hesabını temel alarak oluşturduğu sayısal ifadeler, üç sütunlu tablo ve fonksiyonel ilişki tanımlaması görülmektedir. Ö7 (ED), alan hesabı ile sınırdaki karelerin sayısını hesaplayarak bütün öğrencilerden farklı olan sayısal ifade oluşturmuştur. Yatay ilişkiye odaklanarak orta sütunda yer alan sayısal ifadelerde

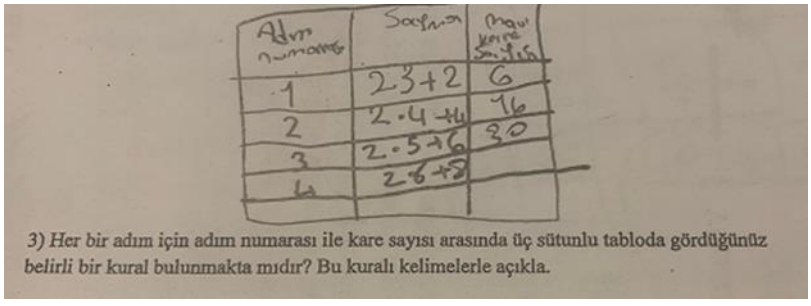
hep adım numarasının iki fazlasının karesinden adım numarasının karesinin çıkartıldığını keşfetmiştir. Bu tanımlamasını 65. Adıma genellemeyi de başarmıştır. Adım numarası ile sayısal ifadesindeki sayılar arasındaki ilişkiyi kelimelerle ifade edebilmiştir.



Şekil 42. Ö9(KY) sınır problemine ait üç sütunlu tablo ve fonksiyonel ilişki tanımlaması

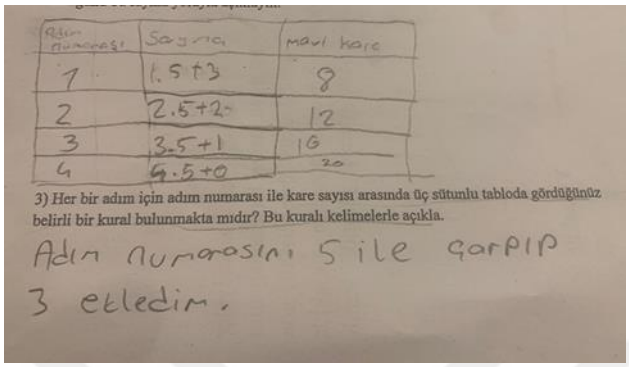
Şekil 42'de, Şekil 38'deki Ö13(KY)'ün ki gibi daha açık ve daha anlaşılır sayısal ifade ve fonksiyonel ilişki tanımlamasını Ö9(KY) sağlamıştır. Şekil 42'i incelediğimizde Ö9(KY) sınır probleminde örüntünün fiziksel yapısında kareleri grupladığında kolay, anlaşılır ve sade bir sayısal ifade oluşturduğu görülmektedir. Bu ifadelerde Ö9(KY), 4 çarpanının hep aynı olduğunu ve 4 ile çarpılan sayının adım numarasının bir fazlası olduğunu keşfederek sayısal ifadesini 65. Adıma genellemekte ve fonksiyonel ilişkinin kuralını tanımlamakta başarılı olmuştur.

Aşağıda Şekil 43 ve Şekil 44'te yine sayılar arasında özyinelemeli ilişkiye odaklanıp sayısal ifadeleri uzak adımlara genelleyemeyen ve adım numarası ile kare sayısındaki ilişkiyi kelimelerle tanımlayamayan öğrenciler ve cevaplarının örnekleri gösterilmiştir.



Şekil 43. Ö8(KD) sınır problemine ait üç sütunlu tablo

Şekil 43'te Ö8(KD)'in sınır problemine ait üç sütunlu tablosunda örüntünün ilk adımlarına ait sayısal ifade oluşturduğu görülmektedir. Şekil 43'e göre Ö8(KD) dikeydeki sabit artmalara odaklanarak sayısal ifadesini 65. Adım gibi uzak adımlara genelleyememiş ve adım numarası ile kare sayısı arasında bir ilişki tanımlayamamıştır.



Şekil 44. Ö1(KD) sınır problemine ait üç sütunlu tablo

Şekil 44'ü incelediğimizde Ö1(KD)'de, Şekil 43'te gösterilen Ö8(KD) gibi yatay ilişkilere değil de dikeydeki sabit artma ve azalmalara odaklanarak 65. Adım gibi uzak adımlara yönelik sayısal ifade ve adım numarası ile kare sayısı arasında fonksiyonel ilişki kuralı tanımlayamadığı görülmektedir.

Üçüncü Ders Sonunda Araştırmacı Öğretmen ile Gözlemci Öğretmenin Tuttukları Notlara ve Öğretmen Günlüğüne İlişkin Bulgular

Daha önceki derste bazı öğrenciler özyinelemeli düşünme eğiliminde olup üç sütunlu tabloda uzak adımlara ait sayısal ifade oluşturamamışlardır. Bu derste öğrencilerin sayısal ifadelerde değişmeyen çarpımlar ve eklemeler-çıkarmalar olduğunda ilişkileri daha kolay ifade edebileceklerini keşfetmeleriyle bazı öğrencilerde özyinelemeli yaklaşımdan uzaklaşma eğilimi olduğu tespit edilmiştir. Yani çoğu öğrenci oluşturmaya çalıştığı sayısal ifadelerde sayılar arasında düzenlilik olan ifadeleri seçmeye çalışmışlardır. Bu derste fonksiyonel düşünmesinin gelişimini tespit ettiğimiz birçok öğrenci olmuştur. Bu dersin varsayılan öğrenme ilerlemesine yönelik seçilen sınır problemi etkinliğinin, gerçekten de bu dersin hedeflerine uygun seçildiği tespit edilmiş ve dersin hedefine ulaşmasında çok katkısı olduğu tespit edilmiştir.

Derslerde temel araç olarak kullanılan üç sütunlu tablonun, dersin hedefinin gerçekleşmesine katkısına yönelik bulgular, bağımsız ve bağımlı değişkenler arasındaki yatay ilişkiye açıkça dikkat çekmek ve fonksiyonel bir kural belirlemek için bir bakış

açısı sağlayarak öğrencilerin fonksiyonel düşünmesini geliştirdiğini bulan Markworth (2010) ile uyumludur.

Aşağıda araştırmacı öğretmenin ders sonunda tuttuğu günlük gösterilmiştir.

GÜNLÜK

Öğretmen

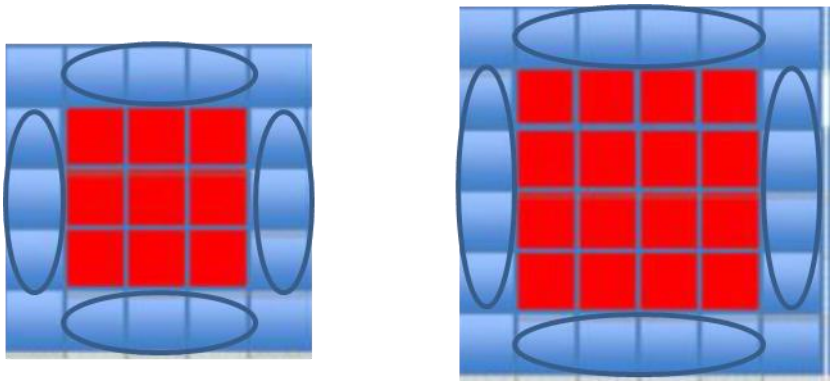
Sınır probleminin varsayılan dersin hedefine uygun bir etkinlik olduğu görüldü. Öğrencilerin daha doğru açık ve uygulanabilir sayısal ifadeler oluşturmasına katkı sağladı. Sınır problemi üç sütunlu tabloda dikeydeki ilişkilerin tersine yatay ilişkileri keşfetmeyi teşvik etmede uygun bir görev oldu. Birçok öğrenci bu derste üç sütunlu tabloyu başarılı bir şekilde kullandılar. Bazı öğrencilerden nadir düşünülebilecek doğru cevap stratejilerinin gelmesi benim için çok beklenmeyen bir durumdu.

4.2.4. Doğrusal Fonksiyonun Kuralını Değişkenlerle İfade Etme

Önceki derslerde öğrenciler, genişleyen şekil örüntülerinin nasıl büyüdüklerini belirleyip ifade ederek, bu örüntülere yönelik tek tek saymadan sayısal ifadeler oluşturmuşlardır. Ayrıca, sayısal ifadelerini bir temsille ilişkilendirmek için üç sütunlu tabloyu kullanmışlardır. Üç sütunlu tablolarda oluşturulan örüntülerle ilgili tartışmalarda, adım numarası ile bağımlı değişken arasındaki ilişkiye odaklanılarak uzak genellemeler yapmışlar ve genişleyen şekil örüntüleriyle temsil edilen fonksiyonel ilişkiler için kelimelerle kurallar üretmişlerdir. 4. derste öğrenciler bu uygulamalara devam etmişlerdir. Bununla birlikte, bu derste ayrıca fonksiyonel ilişkilerin temsillerini değişkenlere genişletmeye yönelik etkinlik yapılmıştır. 3. Derste çoğu öğrenci, başarılı fonksiyonel genellemeler yapmayı başarmıştır. Bu derste, önceki derslerdeki çalışmalar desteklenip geliştirmeye çalışılmış ve öğrencilerin, öğretmen ve akran desteğiyle değişen miktarları temsil etmek için değişkenleri kullanmaları istenmiştir.

Değişkenleri değişen nicelikler olarak anlamak ve bunları fonksiyonel bir ilişki içinde uygun şekilde kullanmak, ders dizisi için son hedeftir.

Bu derse, 3. Dersin sonunda oluşturulan sınır problemine karşılık gelen uygun bir sayısal ifade ve üç sütunlu tablo tekrar gösterilerek başlanmıştır. Bunun örneği aşağıda Şekil 45'te gösterilmiştir.



Şekil 45. Sınır problemi sayma yolu

Sınır problemine karşılık gelen üç sütunlu örneği aşağıda tablo 11'de gösterilmiştir.

Tablo 11.

Sınır Problemi Üç Sütunlu Tablo

Adım Numarası	Sayısal İfade	Kare sayısı
1	(4.1)+4	8
2	(4.2)+4	12
3	(4.3)+4	16
4	(4.4)+4	20

Toplam kare (karo) sayısı = (4x adım numarası) + 4

Sınır problemine ait sayısal ifadeler, üç sütunlu tablo ve adım numarası ile kare sayısı arasındaki ilişki gösterildikten sonra öğrencilere daha önce değişkenleri duyup duymadıkları veya kullanıp kullanmadıkları sorulmuştur. Öğrencilere, çok çeşitli değerleri temsil etmek için değişkenleri veya değişen nicelikler olarak değişkenleri kullandığımız ifade edilmiştir. Sınır probleminde sınırdaki kare (karo) sayısı adım numarasına göre değiştiğinden, adım numarası ve kare sayısının birbirine bağlı değişen sonsuz sayıda ilişkili sayıları temsil ettiği anlatılmıştır. Sınır probleminde toplam kare (karo) sayısını temsil etmek için değişken olarak T sembolü seçilmiş ve T = toplam kare karo sayısı olarak ifade edilmiştir. Daha sonra öğrencilerle toplam kare sayısını hesaplamak için adım numarasının gerekli olduğu tartışılmıştır. Adım numarası da sonsuz sayıda sayıyı temsil ettiği için bu sonsuz sayıda sayıyı temsil etmek için adım numarası "n" değişkeni ile gösterilmiştir.

Değişkenler tanımlandıktan sonra, fonksiyonel ilişkiyi göstermek için değişkenlerin nasıl kullanılabileceği öğrencilere gösterilmiştir. Bunun için gösterilen üç sütunlu tabloya fazladan bir satır eklenerek, n değişkenini ek satırın ilk sütununa koyulmuştur. Bu şekilde ek satır eklenerek n değişkeninin gösterilmesi, öğrencilere değişkenlerin tabloda değişen nicelikleri nasıl temsil edebildiğini göstermek için etkili olmuştur. Ardından, T değişkenini ek satırın son sütununa koyulmuştur. Son olarak, öğrencilerin "Sayısal ifade" sütunundaki sayısal temsili yeniden yazmaları için adım numarası sayısını temsil eden "n" değişkenini kullanmaları teşvik edilmiştir. Bunu yapabilmeleri için tüm sınıfta tablonun orta sütununda hangi örüntüleri gördükleri, bu sayısal ifadelerde nelerin değiştiği, nelerin aynı kaldığı tartılması yapılmıştır. Öğrenciler baştaki 4 ile sondaki 4'ün aynı kaldığını keşfetmişlerdir. Ancak sayısal ifadedeki ortadaki 4 ile çarpılan sayının değiştiğini ve bu değerin adım numarasına karşılık geldiği için değişen değer yerine "n" yazılmıştır. Üç sütunlu tablodaki son satır, orta sütundaki fonksiyonel ilişki için sembolik bir ifadeye sahip olmuştur. Tablonun son hali aşağıda Tablo 12'de gösterilmiştir:

Tablo 12.

Sınır Problemi Değişken İçeren Üç Sütunlu Tablo

Adım numarası	Sayısal İfade	Kare Sayısı
1	(4.1)+4	8
2	(4.2)+4	12
3	(4.3)+4	16
4	(4.4)+4	20
n	(4.n)+4	T

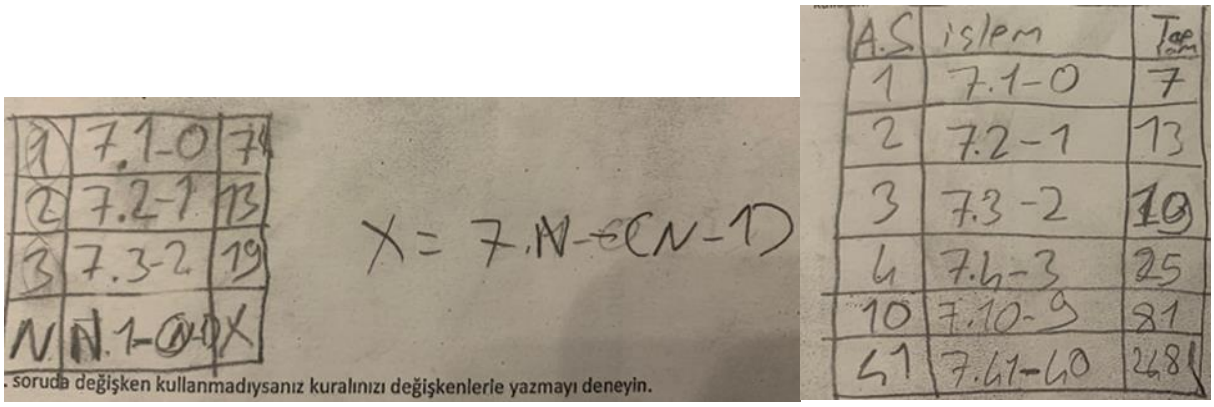
Kural için T=4.n+4 olarak öğrencilere ifade edildi.

Öğrencilere değişken kullanımı ve sembolik olarak fonksiyon kuralı yazma anlatıldıktan sonra son dersteki masa örüntüsü için öğrenciler gruplarıyla çalışma yapmaya başlamışlardır. Öğrencilere masa örüntüsü görevini tamamlamaları için 20 dakika süre verilmiştir. Öğrenciler gruplarıyla çalışırken araştırmacı öğretmen ile gözlemci öğretmen, her grubun çalışma sürecini takip ederek gruplara yönlendirmelerde bulunmaya devam etmiştir. Gruplar daha önceki derslerde deneyimledikleri çalışmaların aynısını yaparak, değişken temsilli kuralları ifade etmeyi denemişlerdir. Öğrenciler için

verilen süre bittikten sonra gruplar örüntü hakkında büyümenin görme yolunu, oluşturdukları üç sütunlu tabloyu ve fonksiyonel kuralını tüm sınıfa sunmaları istenmiştir. Sunum sonrasında tüm sınıf tartışmasında öğrencinin stratejileri tartışılmıştır. Tüm sınıf tartışması esnasında öğrencilere aşağıdaki yönlendirici sorular sorulmuştur:

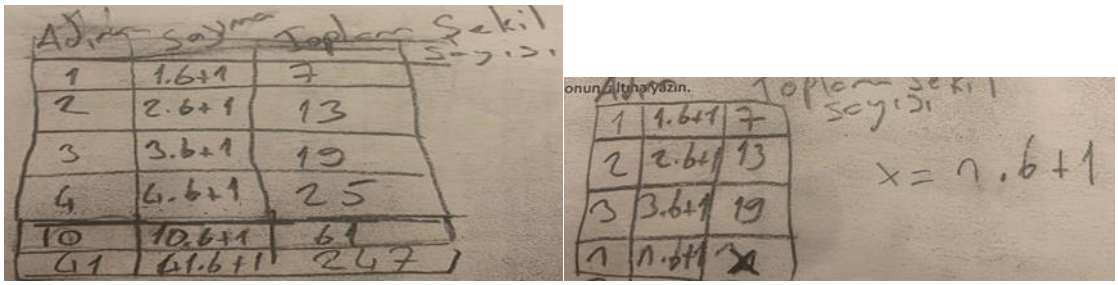
- *Kurallardan herhangi biri arasında bir bağlantı görebiliyor musunuz?*
- *Aslında bir başkasıyla aynı şeyi söyleyen herhangi bir kural var mı?*
- *Bu kurallarda benzer ve farklı olan nedir?*
- *Anlamadığınız herhangi bir kural var mı?*
- *Yanlış olduğunu düşündüğünüz herhangi bir kural var mı?*
- *Bu kuralların hepsi doğru mu?*
- *Örneğin 65. Adımda kaç kaç şekle ihtiyaç olduğunu hesaplamanız gerekse hangi kuralı seçerdiniz? Neden onu seçtin?*

Aşağıda Şekil 46, Şekil 47, Şekil 48'de öğrencilerin son dersteki masa örüntü görevindeki çalışmaları ve kullandıkları stratejileri başarılı olan öğrencilerden örnekler verilmiştir.



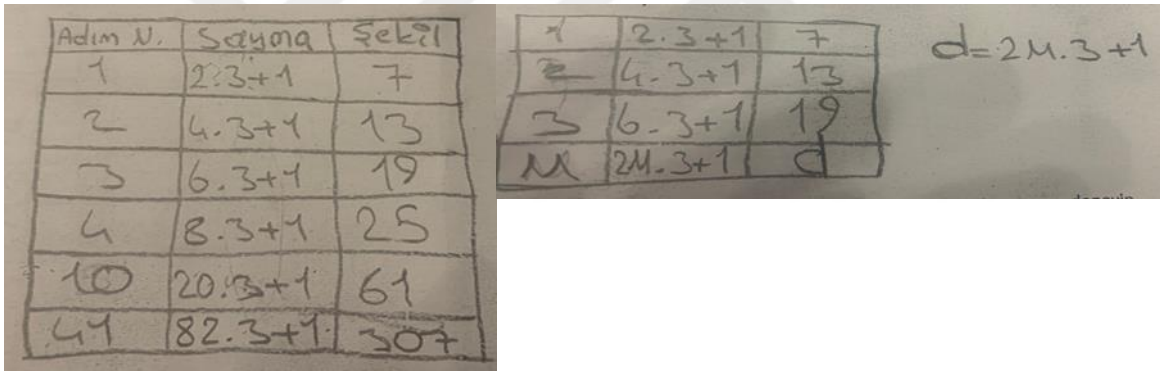
Şekil 46. Ö14(EO) üç sütunlu tablo ve örüntüye ilişkin fonksiyon kuralı

Şekil 46'da Ö14(EO) örüntüye ait doğru sayısal ifadeler yazmıştır. Adım numarası ile şekil sayısı arasındaki ilişkiyi doğru kurarak bu ilişkiyi 41.adıma genellemede başarılı olmuştur. Üç sütunlu tablonun son satırında adım numarasına "N" ile şekil sayısını "X" ile temsil ederek doğru sembolik fonksiyonel kuralı ifade etmiştir.



Şekil 47. Ö18(EO) üç sütunlu tablo ve örüntüye ilişkin fonksiyon kuralı

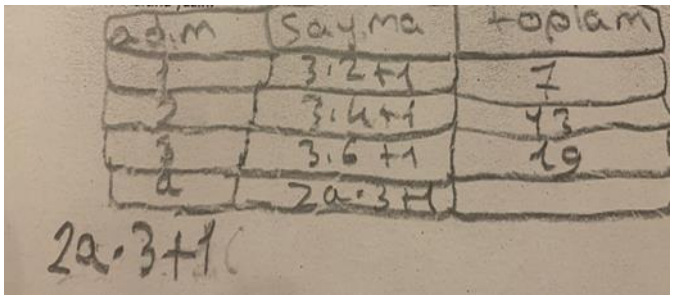
Şekil 47'ye göre Ö18 (EO), masa örüntüsüne yönelik Ö14(EO)'ten farklı bir görme yolu keşfedip bu görme yoluna göre Ö14 (EO) 'ten farklı bir sayısal ifade yazmıştır. Bu sayısal ifade üç sütunlu tabloda temsil edildikten sonra orta sütundaki değişen nicelikler arasındaki ilişkiyi doğru analiz ederek 41.adımı yazmıştır. Değişen nicelikleri sembollerle temsil ederek tam sembolik fonksiyon kuralını doğru şekilde oluşturmuştur.



Şekil 48. Ö11(EO) üç sütunlu tablo ve örüntüye ilişkin fonksiyon kuralı

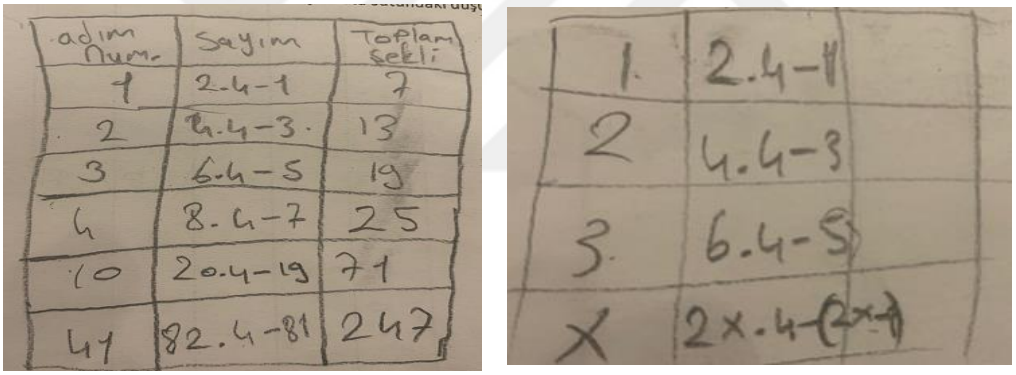
Şekil 48'i incelediğimizde Ö11(EO)'in de masa örüntüsüne karşılık doğru sayısal ifade oluşturup bu ifadeyi üç sütunlu tabloda doğru bir şekilde temsil etmiştir. Birlikte değişen nicelikler arasındaki ilişkiyi doğru tanımlayarak 41. Adımda bu ilişkiyi genelleyebilmiştir. Son satırda bu nicelikleri değişkenlerle temsil ederek doğru bir sembolik fonksiyon kuralı ifade etmiştir.

Aşağıda Şekil 49 ve Şekil 50'de fonksiyonel ilişkiyi başarılı şekilde genellemiş olsa da üç sütunlu tabloda bağımlı değişkeni yazmayıp tam sembolik formda kural oluşturamayan öğrenci örnekleri gösterilmiştir.



Şekil 49. Ö5(KY) üç sütunlu tablo ve örüntüye ilişkin fonksiyon kuralı

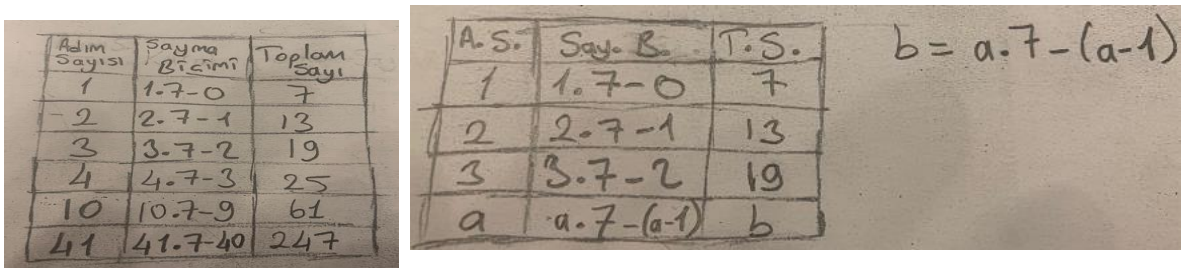
Şekil 49 incelendiğinde Ö5(KY)'in de, Ö11(EO) ile aynı görme yolunu kullanıp aynı sayısal ifade oluşturduğu görülmektedir. Orta sütunda olan örüntüde değişen veya aynı kalan sayıları tespit edip bu analiz ile 41. Adıma bu ilişkiyi genelleyebilmiştir. Fakat üç sütunlu tablonun son satırına bakıldığında sadece adım numarasını (bağımsız değişken) değişken ile ettiği görülmektedir. Bu yüzden tam sembolik fonksiyon kuralını yazamadığı tespit edilmiştir.



Şekil 50. Ö19(KD) üç sütunlu tablo ve örüntüye ilişkin fonksiyon kuralı

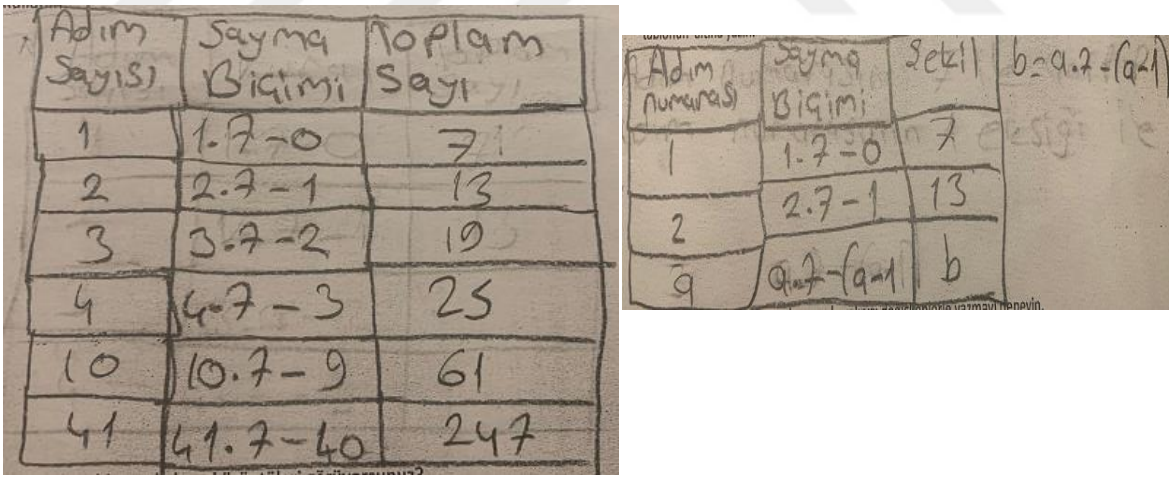
Şekil 50'ye göre Ö19(KD), diğer öğrencilerin tamamından farklı bir görme yolu ile masa örüntüsünü analiz edip farklı bir sayısal ifade yazmıştır. Üç sütunlu tabloda orta sütundaki sayılar arasındaki örüntü incelendiğinde sayısal ifade ile adım numarası arasında kurulan ilişki diğer öğrencilerinkine göre çok daha zor olduğu fark edilmektedir. Buna rağmen bu ilişkiyi doğru bir şekilde kurup 41. Adımı doğru şekilde ifade edebilmiştir. Fakat sadece adım numarasını sembolize ederek fonksiyonel kuralı tam sembolik yazamamıştır.

Aşağıda Şekil 51 ve Şekil 52'de, Şekil 49 ve Şekil 50'den farklı olarak üç sütunlu tablonun son satırında bağımlı değişkeni gösteren Ö13(KY) ve Ö6(KO)'nın başarılı şekilde tam sembolik formda yazdığı kurallar gösterilmiştir.



Şekil 51. Ö13(KY) üç sütunlu tablo ve örüntüye ilişkin fonksiyon kuralı

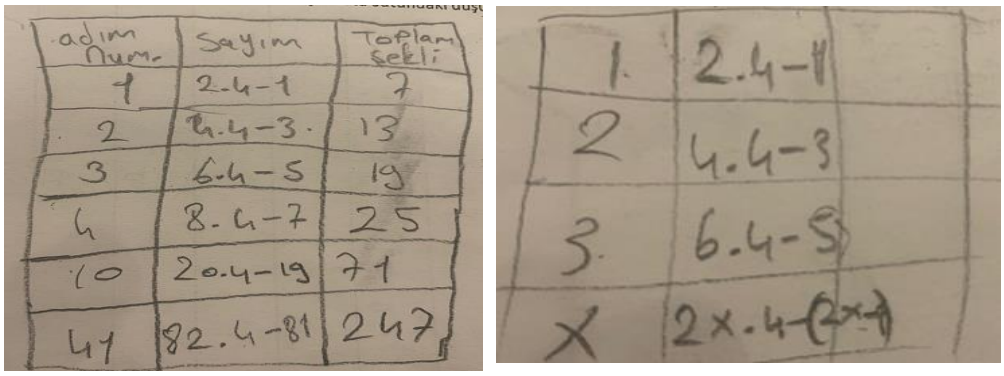
Şekil 51'e göre Ö13(KY)'ün örüntüyü görme yolunun, oluşturduğu sayısal ifadenin Ö14(EO) ile aynı olduğu görülmektedir. Değişen nicelikleri arasındaki fonksiyonel ilişkiyi doğru kurup 41. Adıma uygun sayısal ifadeyi genellemiştir. Bağımlı ve bağımsız değişkene sembollerle temsil edip, bu değişkenler arasında kurduğu ilişkiyi başarılı şekilde tam sembolik fonksiyon kuralına genellemiştir.



Şekil 52. Ö6(KO) üç sütunlu tablo ve örüntüye ilişkin fonksiyon kuralı

Şekil 52'ye göre Ö6(KO)'nın da oluşturduğu sayısal ifade Ö14(EO) ve Ö13(KY)'ki ile aynıdır. 41. Adıma sayısal ifadeyi genelleyebilmiştir. Üç sütunlu tablonun son satırında fonksiyonel ilişkiyi tam sembolik formda oluşturduğu görülmektedir.

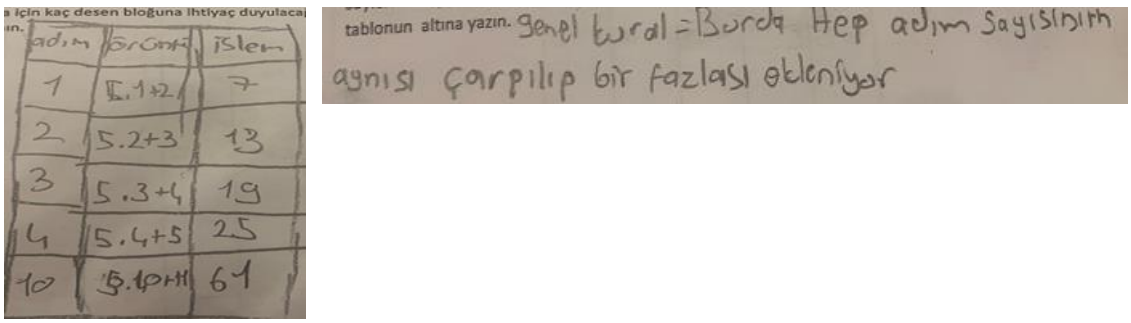
Yine aşağıda Şekil 53'te üç sütunlu tablonun son satırında bağımlı değişkeni göstermeyip yatay ilişkileri keşfetmesine rağmen tam sembolik formda kuralı oluşturamayan Ö19 (KD)'un cevabı verilmiştir.



Şekil 53. Ö19(KD) üç sütunlu tablo ve örüntüye ilişkin fonksiyon kuralı

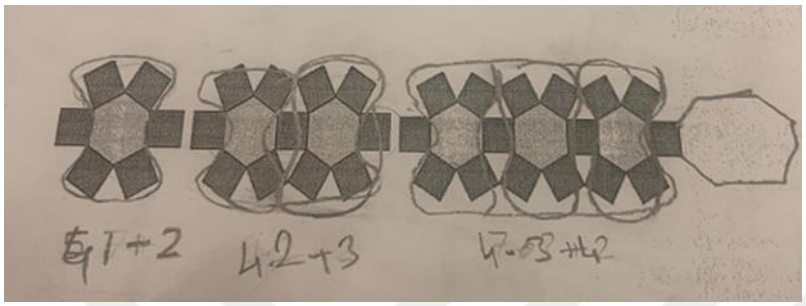
Şekil 53'e göre Ö19(KD), diğer öğrencilerin tamamından farklı bir görme yolu ile masa örüntüsünü analiz edip farklı bir sayısal ifade yazmıştır. Üç sütunlu tabloda orta sütundaki sayılar arasındaki örüntü incelendiğinde sayısal ifade ile adım numarası arasında kurulan ilişki diğer öğrencilerinkine göre çok daha zor olduğu fark edilmektedir. Buna rağmen bu ilişkiyi doğru bir şekilde kurup 41. Adımı doğru şekilde ifade edebilmiştir. Fakat sadece adım numarasını sembolize ederek fonksiyonel kuralı tam sembolik yazamamıştır.

Aşağıda Şekil 54 ve Şekil 55'te masa örüntüsüne yönelik görme yolunda, sayısal ifadede ve fonksiyon kuralında eksiklik ya da hata olan öğrencilerin çalışmaları aşağıda örneklendirilmiştir.



Şekil 54. Ö16(ED) üç sütunlu tablo ve örüntüye ilişkin fonksiyon kuralı

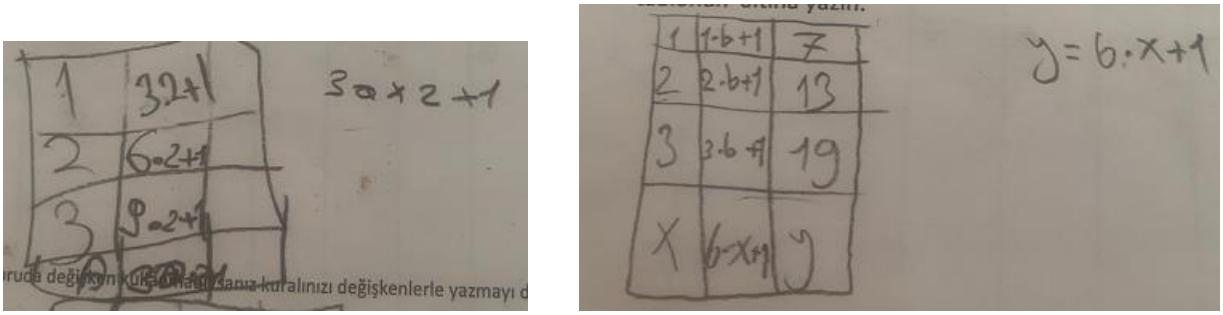
Şekil 54'ü incelediğimizde Ö16(ED)'nın görme yolunun ve üç sütunlu tabloda oluşturduğu sayısal ifadenin doğru olduğu görülmektedir. Fakat Ö16(ED) orta sütunda sayılarla adım numarası arasındaki yatay ilişkiyi doğru kuramamış ve bunun devamında 41. Adımı ifade edememiştir. Değişen nicelikleri sembollerle değil, kelimelerle ifade etmeye çalışmış ama ilişkiyi yanlış kurduğundan örüntüdeki fonksiyon kuralını kurmada başarılı olamamış.



Şekil 55. Ö3(ED) masa örüntüsü sayısal ifade

Şekil 55'e göre, Ö3(ED) masa örüntüsünde doğru bir görme yolu kullanarak ilk 3 adımında sayısal ifadeyi doğru yazmıştır. Fakat üç sütunlu tabloyu kuramamış ve örüntüye yönelik hiçbir fonksiyon kuralı ifade edememiştir.

Öğrenci çalışmalarına bakıldığında en dikkat çekici nokta, bu derste fonksiyonel ilişkileri tam sembolik biçimde temsil etmeye ilişkin zorluk çektikleridir. Öğrenci çalışmaları incelendiğinde çoğu öğrencinin aynı anda hem bağımsız hem de bağımlı değişkene dikkat edemediği gözlemlenmiştir. Bu öğrenciler üç sütunlu tablolarda sayısal ifadeler ile adım numarası arasında ilişkiyi ifade edebilseler de bağımsız değişkeni bağımlı değişkene bağlayan tam sembolik kuralı ifade edememişlerdir. Tam tersi üç sütunlu tablonun son satırının son sütununda bağımlı değişkeni temsil eden öğrencilerin fonksiyonel kuralı tam sembolik formda ifade edebildiği görülmektedir. Bu durumun zıt örnekleri yine aşağıda Şekil 55'te gösterilmiştir.



Şekil 56. Bağımlı değişkenin temsili ile ilgili zıt iki çalışma örneği

Şekil 56'te iki farklı öğrenci çalışma kâğıdı gösterilmektedir. Şekil 55 incelendiğinde üç sütunlu tablonun son satırında bağımlı değişkeni gösteren ve göstermeyen iki öğrencinin fonksiyon kuralı görülmektedir. Şekil 56'ya göre son satırda bağımlı değişkeni yazan öğrenci tam sembolik kuralı ifade etmesine rağmen, son satırda bağımlı değişkeni göstermeyen öğrencinin tam sembolik kuralı ifade edemediği görülmektedir.

Özetle, son ders sonucunda 19 öğrenciden 4'ünün hiçbir şekilde fonksiyon kuralını yazamadığı, 8 öğrencinin sözel ya da bağımsız değişkenin temsili ile yarı sembolik fonksiyon kuralı oluşturduğu, geriye kalan öğrencilerin tamamının tam sembolik fonksiyon kural oluşturduğu görülmüştür.

Dördüncü Ders Sonunda Araştırmacı Öğretmen ile Gözlemci Öğretmenin Tuttukları Notlara ve Öğretmen Günlüğüne İlişkin Bulgular

Öğretim dizisinin son dersinde öğrencilerden daha önceki derslerde yaptıklarının aynılarını yaparak masa örüntüsüne yönelik fonksiyonel kuralı ifade etmeleri istenmiştir. Son dersin sonunda ilk derse göre öğrenciler tam sembolik, yarı sembolik kurallar yazma ve değişkenleri kullanma konusunda bazı ilerlemeler göstermiş olsalar da, bu daha fazla geliştirilmesi gereken alan olduğu düşünülmüştür. Dersin bitiminde sembolik temsil sürecinde öğrencilere rehberlik etmek için gereken sürenin daha uzun olması gerektiği sonucuna varılmıştır. Çünkü öğrencilerin sayısal temsillerden sembolik temsillere geçişinin kademeli olması gerektiği düşünülmüştür. Öğrencilerin temsillerinin sayılardan önce kelimelere ve yarı sembolik temsillere doğru ilerlemesi, daha sonra tam sembolik forma doğru ilerlemesinin fonksiyonel ilişkiler için daha derin bir anlayış kazandıracağı düşünülmüştür. Özellikle bu derste öğrencilerin çalışmalarına bakıldığında öğrencilerin çoğunlukla üç sütunlu tabloda bağımsız değişkene odaklanıp bağımlı değişkeni

görmezden geldiği görülmektedir. Bağımlı değişkeni ihmal edip üç sütunlu tabloda sayısal ifadenin sonucu olarak bağımlı değişkeni ilişkilendirmeyen öğrencilerin tamamının, bağımlı ve bağımsız değişkeni birbirine bağlayan tam sembolik fonksiyon kuralını oluşturamadığı görülmüştür. Bu açıdan varsayımsal öğrenme rotası revize edilirken bu noktanın iyileştirmesi düşünülmektedir.

Son derse yönelik öğretmen günlüğü aşağıda gösterilmiştir:

GÜNLÜK

Öğretmen

Son derste yapılan etkinliğe verilen sürenin koyulan hedefe göre kısa olduğunu hissettim. Değişken kullanımının aceleye geldiğini düşünüyorum ve bu beni tatmin etmedi. Keşke öğretim dizi için bir etkinlik daha olsaydı. Fakat daha önceki derslerdeki hedeflerin büyük oranda sağlandığını ve bu hedeflerde ilerleme kaydeden öğrenci sayısının yüksek olduğunu görüyorum. Ayrıca öğretim deneyine katılan 19 öğrenciden yaptıklarımız konusunda bilgi alan öğrencilerin keşke bende bu derslere gelebilseydim şeklinde ki ifadeleri beni mutlu etti.

4.3. Varsayımsal Öğrenme Rotası İle Öğrencilerin Gerçek Öğrenmelerinin Karşılaştırılması

Varsayımsal öğrenme rotasının oluşturulmanın amacı, öğretim için bir çerçeve ve öğrenci öğrenmesinin değerlendirilmesi için bir yapı oluşturmaktır. İlk açıdan varsayımsal öğrenme rotasının yararlı olduğu görülmüştür. Fonksiyonel düşünme gelişiminde genişleyen şekil örüntülerinin etkili bir araç olduğu ve üç sütunlu tablo kullanımının fonksiyonel ilişkileri keşfetmede güçlü bir temsil olduğuna dair araştırmalardan elde edilen birçok önemli fikri öğretime kazandırmıştır. İkinci açıdan öğrencilerin öğrenme tahminleri ve ilişkili öğrenme etkinlikleri, öğrencilerin gerçek gözlemlenen öğrenmeleri ile karşılaştırıldığında, öğrencilerin öğrenmelerinin ne kadar iyi desteklendiğine dair kanıtlara ulaşılmış olunur. Bu açıdan bu bölümde öğrenci çalışma kâğıtlarının incelenmesi, araştırmacı öğretmen ile gözlemci öğretmenin tuttukları notlar ve öğretmen günlüklerinin analiz edilmesiyle varsayılan öğrenme rotası ile öğretim esnasında öğrencilerin gözlemlenen öğrenmeleri arasında uyumsuzluklar belirlenerek değiştirilmesi veya düzeltilmesi gereken hususlar belirlenmiş ve bu hususlar revize edilmiş öğrenme rotasına yansıtılmıştır.

Büyüyen sandalye örüntüsü birbirinden farklı görme yolunu içinde barındıran bir potansiyele sahip olduğu için ilk derste kullanılmak için seçilmiştir. Fakat kullanılan büyüyen sandalye örüntüsünde örüntüye yönelik beklenmeyen, varsayılmayan fazla sayıda görme yollarını içinde barındırması öğrenciler için sorun oluşturmuştur. Özellikle öğrencilerin öğretimin ilk yıllarından beri alışkanlık haline getirdiği, örüntüler konusunda eğilimlerinin odak noktası haline gelen öz yinelemeli düşünmeyi çağrıştıran bir örüntü modeli olmasından dolayı çoğu öğrenciyi istenmeyen görme yollarına götürmüştür. Bu görme yollarının ilerdeki derslerde birbirlerine göre değişen nicelikler arasındaki ilişkiyi keşfetmede öğrencileri engellediği açıktır. Bu açıdan ilk derste fonksiyonel ilişkileri keşfetmenin temeli olacak görme yollarına sahip olan bir örüntü modelinin büyüyen sandalye örüntüsü yerine kullanılması kararlaştırılmıştır.

İkinci derste öğrencilerden verilen çiçek kolye örüntüsündeki beyaz boncuk sayısını tek tek saymadan hesaplayan sayısal ifadeler oluşturmaları istenmiştir. Daha sonra öğretmenin tanıttığı üç sütunlu tabloda bu sayısal ifadeleri temsil etmeleri istenmiştir. Yapılan derste çiçek kolye örüntüsünün, varsayılmayan ve istenmeyen görme yollarını içinde barındırmayan etkili bir örüntü modeli olduğu tespit edilmiştir. Fakat bu derste, öğrencilerin eğilimli oldukları özyinelemeli düşünmenin, sadece uygun olmayan örüntü modelinden değil ayrıca üç sütunlu tabloyu doğru kullanmama sonucu da ortaya çıktığı tespit edilmiştir. Üç sütunlu tabloda adım numarasına karşılık gelen sayısal ifadelerin sıralı şekilde yerleştirilmesi sayısal ifadelerde yer alan düzenlilikleri keşfederken öğrencileri öz yinelemeli ilişkiye yöneltmiştir. Çünkü sayısal ifadeler arasında artış ve azalmaların olduğu sayıların dikey olarak sıralı şekilde yerleştirilmesi öğrencilerde öz yinelemeli düşünme kullanımının artmasına sebep olmuştur. Bu yüzden varsayımsal öğrenme rotasının ikinci öğrenme ilerlemesindeki "Genişleyen şekil örüntüsünün fiziksel yapısını temsil eden sayısal ifadeler oluşturma ve bu ifadeleri üç sütunlu tabloda gösterme" yerine "Genişleyen şekil örüntüsünün fiziksel yapısını temsil eden sayısal ifadeler oluşturma ve bu ifadeleri üç sütunlu tabloda **adımları sıralı olmayacak** şekilde gösterme" olarak revize edilmesi kararlaştırılmıştır.

Üç sütunlu tabloyla ilgili ikinci zorluk, fonksiyonel ilişkilerin giderek daha karmaşık hale gelen matematiksel temsillerinin geliştirilmesiyle ilgilidir. Üç sütunlu tabloda bağımsız değişkenin (adım numarası) üç sütunlu tabloya başarılı bir şekilde entegre edilmesine rağmen, bağımlı değişken entegre edilememiştir. Öğrencilerin çalışmalarında, üç sütunlu tabloya sonradan eklenen satırda sadece adım numarasını temsil eden değişkenin koyulması bağımsız değişken olan adım numarasının fonksiyonel

ilişkide ön plana çıkıp, bağımlı değişken olan şekil sayısının kuralda arka planda kalmasına sebep olmuştur. Bunun kanıtı olarak tablosunda bağımlı değişkeni de son satırda temsil eden öğrenciler fonksiyonel kuralı tam sembolik formda kurarken, bunu yapmayan öğrenciler kurallarını yarı sembolik formda kurmuşlardır. Bu nedenle, öğrencilerin üç sütunlu tablo tarafından etkili bir şekilde desteklenebilecek matematiksel temsilleri için daha fazla geliştirmeye ihtiyaç vardır. Bu açıdan değişken kavramıyla ilk defa karşılaşan öğrenciler için fonksiyonel ilişkilerin kelimelerden direkt tam sembolik forma doğru ilerlemesinin zor olduğu düşünülerek 3. Ve 4. Öğrenme ilerlemeleri arasına bu geçişi yumuşatacak yeni bir öğrenme ilerlemesi eklenmesine karar verilmiştir. Ayrıca son öğrenme ilerlemesinde bağımlı değişkeni de ön plana çıkaracak bir değişiklik yapılmasına karar verilmiştir.

Varsayılan öğrenme rotasının öğrencilerin gerçek öğrenmelerini yansıtmadığı bölümler tespit edilmiştir. Bu tespitlere göre varsayımsal öğrenme rotasının belli yerlerinde değişiklikler yapılmasına karar verilerek varsayımsal öğrenme rotası revize edilmiştir. Revize edilen varsayımsal öğrenme rotası aşağıda gösterilmiştir.

4.4. Revize Edilmiş Varsayımsal Öğrenme Rotası

Yukarda ki bölümde varsayımsal öğrenme rotası ile öğrenci öğrenmelerinin uyumsuz olduğu noktalar detaylı bir şekilde anlatılmıştır. Bu tespitler ışığında varsayımsal öğrenme rotasının revize edilmesine karar verilmiştir. Revize edilen varsayımsal öğrenme rotasındaki beklenen öğrenci öğrenmelerinin, beklenen öğrenci öğrenmelerine daha fazla yaklaşacağına inanılmaktadır. Aşağıdaki revize edilmiş öğrenme ilerlemeleri ve öğretim dizisi verilmiştir.

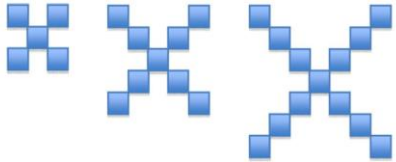
Revize edilmiş öğrenme ilerlemeleri;

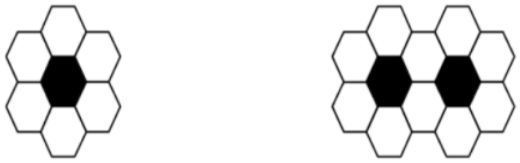
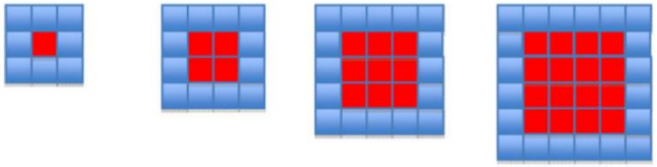
1. Genişleyen şekil örüntüsünde genişlemenin farklı yollarını keşfederek genişlemeyi tanımlama, ifade etme ve sayısal ifadeye çevirme
2. Genişleyen şekil örüntüsünün fiziksel yapısını temsil eden sayısal ifadeler oluşturma ve bu ifadeleri üç sütunlu tabloda adımları sıralı olmayacak şekilde gösterme
3. Üç sütunlu tablodaki örüntüleri keşfederek adım numarası ile genişleyen şekil örüntüsünün ölçülebilir bir yönü arasındaki ilişkiyi fonksiyonel ilişkiye genelleme

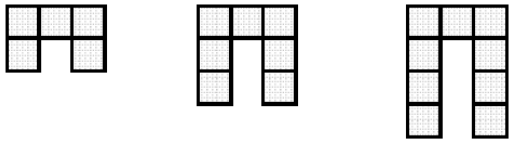
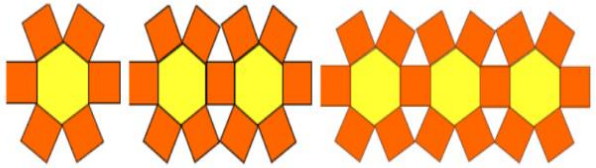
4. Adım numarası ile genişleyen şekil örüntüsünün ölçülebilir bir yönü arasındaki ilişkiyi bağımsız değişkeni kullanarak temsil etme
5. Doğrusal fonksiyonun kuralını bağımsız ve bağımlı değişkenlerle ifade etme

Tablo 13.

Revize Edilmiş Varsayımsal Öğrenme Rotası

Ders	Genişleyen Şekil Örüntüsü	Süre	Öğretim Etkinliği	Varsayılan Öğrenme İlerlemeleri
1	**Çarpı Örüntüsü**  **Noktalı W Örüntüsü** 	2 Ders Saati	Öğrenciler geometrik örüntünün nasıl genişlediğini görmenin farklı yollarını keşfederler.	1.Genişleyen şekil örüntüsünde genişlemesinin farklı yollarını keşfederek genişlemeyi tanımlama, ifade etme ve sayısal ifadeye çevirme

2	**Çiçek Kolye Örüntüsü** 	2 Ders Saati	Öğrenci doğru sayma tekniklerini belirleyecek ve bunları şekille ilişkilendirecektir. Öğrenciler üç sütunlu tabloda bağımsız değişkenin belirli bir değeri için bağımlı değişkenin değerini belirlemek çeşitli sayısal temsiller kullanacaktır.	1 . ve 2. Genişleyen şekil örüntüsünün fiziksel yapısını temsil eden sayısal ifade oluşturma ve bu ifadeleri üç sütunlu tabloda adımları sıralı olmayacak şekilde gösterme
3	**Sınır Problemi** 	2 Ders Saati	Öğrenciler üç sütunlu tabloda Sayısal temsilleri kullanarak aşama numarası ile geometrik şekil örüntüsündeki ölçülebilir bir yönü arasındaki ilişkiyi keşfetmeye çalışacaktır.	1. ,2. ve 3. Üç sütunlu tablodaki örüntüleri keşfederek, adım numarası ile genişleyen şekil örüntüsünün ölçülebilir bir yönü arasındaki ilişkiyi fonksiyonel ilişkiye genelleme

4	“n” Harfi Örüntüsü 		Öğrenciler üç sütunlu tabloda Sayısal temsilleri kullanarak aşama numarası ile geometrik şekil örüntüsündeki ölçülebilir bir yönü arasındaki ilişkiyi kelimelerle ve yarı sembolik olarak ifade etmeye çalışacaklardır.	1. , 2. ,ve 3. Ve 4. Adım numarası ile genişleyen şekil örüntüsünün ölçülebilir bir yönü arasındaki ilişkiyi kelimelerle ve bağımsız değişkeni kullanarak temsil etme
5	**Masa Örüntüsü** 	2 Ders Saati	Öğrenciler, kelimeler veya değişkenler kullanarak örüntünün aşama numarası (bağımsız değişken) ile şekil sayısı (bağımlı değişken) arasındaki ilişkiyi ifade edecektir. Öğrenci, fonksiyonel ilişkiyi temsil etmek için değişkenleri değişen miktarları temsil etmek için kullanmaya başlayacaktır.	1. , 2. , 3. ve 4. Ve 5. Doğrusal fonksiyonun kuralını bağımsız ve bağımlı değişkenlerle ifade etme

BÖLÜM V

SONUÇLAR, SINIRLILIKLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde, araştırmaya yönelik genel sonuçlar, çalışmanın sınırlılıkları ve gelecekteki araştırma tasarımları için öneriler yer almaktadır. İlk olarak, bu bulguların genişleyen şekil örüntüleri temelinde hazırlanan varsayımsal öğrenme rotası ışığında ele alınması tartışılmaktadır. Daha sonra, özellikle tasarım araştırma süreci ile ilgili olarak çalışmanın sınırlılıkları sunulmuştur. En sonunda diğer araştırmalar için öneriler sıralanmıştır.

5.1. Tartışma ve Sonuçlar

Bu çalışma için kavramsal yön sağlayan çalışmalar, öğrencilerin fonksiyonel düşünme becerilerinin, görevler belirli özellikler içerdiğinde geliştiğini tespit etmişlerdir. Bu çalışmalara yönelik literatür taraması, fonksiyonel düşünmenin gelişimini incelemek için kullanılan etkili görevlerin özelliklerini belirlemiştir. Bu, varsayımsal öğrenme rotasında kullanılan etkinliklerin planlanmasına ve geliştirilmesine fırsat vermiştir. Görevler literatür incelenerek seçilmiş ve ihtiyaçları karşılamak için düzenlenmiştir.

Araştırmada ilk alt amaç, öğrencilerin genişleyen şekil örüntüleri temelinde hazırlanan varsayımsal öğrenme rotası ile fonksiyonel düşünmelerinin gelişimini test etmektir. Öğretim deneyi öncesi ön test ve öğretim deneyi sonrası son test olarak uygulanan fonksiyonel düşünme testi puanlarına göre öğrencilerin puan ortalaması ön testten son teste yükselmiştir. Yapılan istatistiksel analiz sonucunda öğrencilerin ön test puanları ile son test puanları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark bulunmuştur. Bu farkın son test lehine olduğu görülmüştür. Bununla birlikte çalışmanın nitel bulguları, yukarda belirtilen nicel bulguları destekler niteliktedir. Çalışmanın nitel bulguları ön test ve son testte 8,17 ve 19. Sorulara yönelik öğrenci cevaplarının sınıflandırılmasıyla elde edilmiştir. 8,17 ve 19. Sorularda genel olarak öğrencilerin fonksiyonel düşünme düzeylerinin çalışmanın başından sonuna alt düzeylerden daha üst düzeylere doğru ilerlediğini göstermiştir. Ön testte öz yinelemeli düşünmeyi temsil eden düzeylerde yer alan öğrencilerin son testte fonksiyonel ilişkileri genellemeyi temsil eden düzeylere doğru kaydığı tespit edilmiştir. Sonuç olarak ön test ve son test olarak uygulanan fonksiyonel düşünme testine yönelik nicel ve nitel analizler sonucunda ortaya konulan varsayımsal öğrenme rotasının öğrencilerin fonksiyonel düşünme düzeylerinin geliştirdiği

söylenebilir. Bu varsayımsal öğrenme rotasında kullanılan genişleyen şekil örüntülerinin, Rivera ve Becker (2005)'in ifade ettiği gibi örüntülerin fiziksel yapısını analiz etme aracılığıyla öğrencilerin fonksiyonel ilişkilere ulaşmasında kolaylık sağladığı ve köprü olduğu söylenebilir. Ayrıca genişleyen şekil örüntüleri öğrencilere örüntüleri görme yollarına dayalı olarak fonksiyonel ilişkileri keşfetme olanakları sunduğu için, öğrencilerin fonksiyonel ilişkileri barındıran yapıları anlamlandırmalarına ve keşfetmelerine fırsat verir (Warren ve Cooper, 2008). Bu çalışmanın da, öğrencilere genişleyen şekil örüntüsünün genişlemesini analiz etmede geniş fırsatlar tanıyarak fonksiyonel ilişkilere ulaşmada öğrencilere rehberlik ettiği söylenebilir. Sonuç olarak, bu varsayımsal öğrenme rotasının bağlamı olan genişleyen şekil örüntülerinin öğrencilerin fonksiyonel düşünme gelişiminde faydalı bir araç olduğu ve fonksiyonel kuralları başarılı bir şekilde genellemelerine izin verdiği ifade edilebilir. Bu sonuç, genişleyen şekil örüntülerinin fonksiyonel düşünme gelişimine etkisini inceleyen literatürle uyumludur (Warren ve Cooper, 2008; Markworth, 2010; Blanton ve diğerleri, 2015; Wilkie ve Clarke, 2015; Stephens ve diğerleri, 2017) .

Rivera ve Becker (2011), bir örüntü modelinin sadece sayısal yönlerine dikkat çekilmesinin, öğrencilerin şekil örüntüsünün yapısı içindeki ilişkileri yalnızca yüzeysel olarak kavramasına neden olduğunu vurgulamıştır. Bu sebeple, ders kitabında şekil örüntülerinde ya da sayısal ilişkilerde yalnızca artış miktarına odaklanılması, öğrencilerin fark edebileceği ilişkileri de yüzeysel algılamalarına neden olacağı söylenebilir. Radford (2011), Rivera ve Becker (2011) ve Warren ve Cooper (2008), öğrencilerin cebirsel düşünmelerini incelerken şekil örüntüsüne odaklanmanın önemine vurgu yapmaktadır. Radford (2011) örüntü etkinlikleri yoluyla genelleme becerisini geliştirmenin, öğrencilerin aritmetik bilgi ile değişken kullanma arasında bir köprü oluşturabileceğini öne sürmektedir. Bu yüzden, kitapların içeriğindeki örüntü konusuna az yer verilmesi, öğrencilerin sembolik temsili kullanma ve bunu zihinsel bir alışkanlığa dönüştürme konusunda engel olarak görülebilir. Bu araştırmada da öğrencilerin ön testte ders kitaplarında yer alan, sabit farkı genel kuralın değişkeni olarak ifade etme ve bu ifade ile sabit sayının ilgili terimleri kontrol edilerek bulunması bağlamında ezber bilgi ile genel kural bulma çözümlerine daha çok rastlanmıştır. Bununla birlikte son testte ise öğrenci cevaplarında bu yaklaşımın hiç gözlenmediği görülmüştür. Bu çalışmada genişleyen şekil örüntüleri temelinde ilişkileri arama ve bu ilişkileri fonksiyonel ilişkilere genellemeye yönelik bu varsayımsal öğrenme rotasının istenen değişikliğe sebep olduğu söylenebilir.

Bu sonuç alan yazında yapılmış çalışmaları (Markworth, 2010; Rivera ve Becker, 2011; Wilkie ve Clarke, 2015) destekler niteliktedir.

Öğrencilerin fonksiyonel düşünme düzeylerinde gözlenen gelişmelere katkı sağlayan bir diğer faktör de öğretim deneyi sürecinde gerçekleştirilen etkinlikler boyunca fonksiyonel bir ilişkiyi genelleştirmek için üç sütunlu tablo kullanılmış olmasıdır. Gerek Markworth (2010) gerekse Rivera ve Becker (2011)'un çalışmalarında vurguladıkları üzere örüntü genelleme üzerine yapılan etkinliklerde fonksiyonel düşünmenin gelişimini desteklemek için öğrencilerin belli bir örüntüyle yakından uzağa genelleme çalışmaları yapılması önerilmektedir. Bu çalışmada da bu etkinliklerde tipik olarak, genişleyen şekil örüntülerinin adımları ve şekil sayıları üç sütunlu tabloda ifade edilmiştir. Adımlara karşılık gelen sayısal ifadeleri ise orta sütuna yazılmıştır. Bu sayısal ifadeler önce yakın sonra uzak genelleme olmak üzere diğer adım numaralarına genellenmiştir. Daha sonra değişkenler arasındaki fonksiyonel ilişki keşfedilmiştir. Öğrenciler sayısal ifadeler arasındaki örüntüye dayanarak adım numarası ile şekil sayısı içeren hesaplamayı ve bunlar arasındaki ilişkiyi tanımlamayı çoğunlukla başarı ile tamamlamıştır. Böylelikle üç sütunlu bir tablonun, bağımsız ve bağımlı değişkenler arasındaki yatay ilişkiye dikkat çekerek fonksiyonel kuralı belirlemek için belirli bir yön sağladığını söyleyebiliriz. Bu bulgu Friel ve Markworth (2009), Markworth (2010) ve Gibbs (2020) 'nin araştırma sonuçları ile benzerlik göstermektedir.

Araştırmada, fonksiyonel düşünme ile ilgili literatürden yararlanılarak genişleyen şekil örüntüleri temelinde varsayımsal öğrenme rotası hazırlanmış ve 8 ders saatinden oluşan öğretim dizisi etkinliği tasarlanmış ve daha sonra da bu etkinlikler uygulanmıştır. Araştırmanın ikinci alt amacı öğretim deneyi sürecinde öğrencilerin varsayılan öğrenmeleri ile gerçek öğrenmelerini karşılaştırmaktır. Varsayımsal öğrenme rotası oluşturulurken büyüyen sandalye örüntüsünün öğrencileri fonksiyonel ilişkileri keşfetmeye götürecek bir örüntü modeli olduğu düşünülmüştür. Ancak öğretim deneyi sürecinde, bu örüntü modelinin öğrencileri özyinelemeli düşünmeye odakladığı görülmüştür. Markworth (2010), araştırmasında öğrenciler için gerekli temsillere ulaştırmayı kolaylaştıracak bir örüntü görevi belirlemenin önemli olduğunu ifade etmiştir. Bu bağlamda ilk derste öğrencileri özyinelemeli düşünmede bırakacak büyüyen sandalye örüntüsü yerine Rivera ve Becker (2011)'in araştırmasında ifade ettiği gibi fonksiyonel ilişkileri keşfetmeyi teşvik etme potansiyeli olan "çarpı örüntüsünün" kullanılmasının öğrenciler için daha faydalı olabileceği düşünülmüştür. Böylelikle "Genişleyen şekil örüntüsünde genişlemenin farklı yollarını keşfederek genişlemeyi tanımlama, ifade etme

ve sayısal ifadeye çevirme" olan 1.öğrenme varsayımında değişiklik yapılmamış, ancak öğrenme ilerlemesinde kullanılan büyüyen sandalye etkinliği değiştirilmiştir. Simon (1995), varsayımsal öğrenme rotasında araştırmacının, öğretim deneyi ve geriye dönük analizler sürecinde topladığı veriler ile süreç boyunca yaptığı işi değerlendirdiğini ve varsaydığı öğrenme rotasını yeniden formüle etme olanağına sahip olduğunu ifade etmiştir.

Araştırmada varsayımlardan biri, öğrencilerin bağımlı ve bağımsız değişken arasındaki ilişkiyi fonksiyonel ilişkiye genellemelerine fırsat vermek için, matematiksel temsil olarak üç sütunlu tablo kullanılmasıdır. Fakat öğretim deneyi sürecinde, öğrencilerin tabloda örüntüye karşılık gelen sayısal temsilleri sıralı şekilde yerleştirdikleri, bunun da onları daha çok öz yinelemeli düşünmeye odakladığı gözlenmiştir. Watson (2010)'un çalışmasında belirttiği gibi, tabloları sıralı değerlerle sunmak fonksiyonel düşünmeye geçişi zorlaştırmaktadır. Bu sebeple, değerleri tabloda sırasız şekilde sunmak, öğrencilerin iki sayı grubu arasındaki ilişkiyi kurmak için yatay ilişkilere odaklanmasını ve dolayısıyla fonksiyonel düşünmelerini geliştirmelerini sağlayabilir. Bu açıdan öğretim deneyi sürecinde araştırmacı öğretmen, öğrencileri tabloyu sıralı şekilde doldurmamaları konusunda yönlendirmiştir. Böylelikle ikinci öğrenme varsayımı "Genişleyen şekil örüntüsünün fiziksel yapısını temsil eden sayısal ifadeler oluşturma ve bu ifadeleri üç sütunlu tabloda adımları sıralı olmayacak şekilde gösterme" olarak revize edilmiştir.

Son olarak, öğretim deneyinin dördüncü dersinde öğrencilerden verilen örüntü modelinin genişlemesine yönelik oluşturduğu sayısal ifadeleri üç sütunlu tabloda temsil etmeleri istenmiştir. Ardından en alt satırda adım numarasına denk gelen sütuna bağımsız değişkeni, şekil sayısına denk gelen sütuna bağımlı değişkeni, orta sütuna ise nicelikler arasındaki ilişkileri temsil eden ifade yazmaları istenmiştir. Fakat bu derste çoğu öğrencinin bağımsız değişkeni istenilen yere yazmasına rağmen bağımlı değişkeni istenilen yere yazamamışlar ya da yazsalar da bu iki değişken arasındaki ilişkiyi kuramamışlardır. Yani öğrencilerin çoğu fonksiyonel ilişkileri tam sembolik forma genellemede başarısız olmuşlardır. Wilkie ve Clarke (2015) ile Brizuela vd. (2015), çalışmalarında öğrencilerin bağımsız ve bağımlı değişkeni tam olarak keşfetmeleri ve zaman içinde değişken kavramı hakkındaki anlayışlarını geliştirmeleri için yarı sembolik formdan tam sembolik forma kademeli geçişe yönelik ders süreci tasarlanması ve bu değişkenlerle öğrencilerin birden fazla seferde karşılaşması gerektiğini ifade etmişlerdir.

Bu çalışmada da bağımsız ve bağımlı değişken anlayışının tek derste oluşacağı yönüne yönelik olan araştırmanın 4. Varsayımı olan "Doğrusal fonksiyonun kuralını değişkenlerle ifade etme" öğrencilerin yaşadığı bu zorluğa sebep gösterilebilir. Bu bağlamda çalışmada öğrencilerin tam sembolik olarak genel kuralı ifade etmelerinde yaşadıkları zorluk onların bağımlı değişkeni anlamlandıracak sürelerinin gerekenden az olmasından kaynaklanmış olabilir. Buna göre öğrencilerin fonksiyonel genellemelerinin yarı sembolik temsillerden tam sembolik temsillere doğru ilerlemesi gerektiği sonucuna varılmıştır. Bu yüzden varsayımsal öğrenme rotasının iki değişkeni içeren son varsayımı, iki değişken kullanımına kademeli olarak geçişi sağlayacak şekilde ek bir varsayım ve etkinlik tasarlanması ile revize edilmesi yönünde revize edilmiştir. Bu bağlamda varsayımsal öğrenme rotasının değişken kullanımına yönelik son varsayımları "Adım numarası ile genişleyen şekil örüntüsünün ölçülebilir bir yönü arasındaki ilişkiyi bağımsız değişkeni kullanarak temsil etme" ve ardından "Doğrusal fonksiyonun kuralını bağımsız ve bağımlı değişkenlerle ifade etme" şeklinde revize edilmiştir. Bu bağlamda varsayımsal öğrenme rotasında varsayım sayısı 4'ten 5'e çıkmıştır.

Sonuç olarak varsayımsal öğrenme rotasında varsayılan öğrenmelerin öğrencilerin gerçek öğrenmeleri ile karşılaştırılması ile rotada bazı düzenlemeler yapılmıştır. İlk olarak birinci dersteki öğretim etkinliğinde yer alan örüntü modelinden biri değiştirilmiştir. Bu bağlamda birinci ders öğretim etkinliğinde yer alan "büyüyen sandalye örüntüsü" fonksiyonel ilişkileri keşfetmede köprü olacak "çarpı örüntüsü" olarak revize edilmiştir. Ardından üç sütunlu tabloda verilerin sıralı şekilde yerleştirilmesiyle ilgili öğrencilerin yaşadığı zorluğa yönelik varsayımsal öğrenme rotasının ikinci varsayımı "verileri sıralı olmayacak şekilde" ifadesinin eklenmesiyle değiştirilmiştir. Son olarak bağımsız değişkenden bağımlı değişkene doğru kademeli değişken anlayışı geliştirmeye yönelik dördüncü varsayım değiştirilmiş ve beşinci ek bir varsayım eklenmiştir.

5.2. Sınırlılıklar

- Farklı matematiksel temsillerin , matematiksel ilişkilerin farklı yönlerini ortaya çıkarma potansiyeli taşımasından dolayı , çalışmada farklı temsillerin kullanılması, öğrencilerin temel matematiksel yapılar hakkında daha derin bir

anlayış geliştirmelerini sağlar (Stephens ve diğerleri, 2017). Bu çalışmada matematik temsil olarak üç sütunlu tablo temsili ile sınırlıdır.

- Bu araştırmada fonksiyonel düşünme geliştirmek için oluşturulan varsayımsal öğrenme rotasının bağlamı tek genişleyen şekil örüntüleri ile sınırlıdır.
- Çalışma Adana İli merkezde bulunan bir ortaokul ve 19 tane 7. Sınıf öğrencisi ile 4 haftalık 8 ders saat olarak yürütülen öğretim deneyi ile sınırlıdır.
- Ayrıca araştırmada öğrencilerin ön test ile son test puanları arasında karşılaştırma, araştırmacının geliştirdiği ölçek ile sınırlıdır.

5.3. Öneriler

- Bu çalışmaya ek olarak, daha fazla sayıda katılımcıyla daha büyük ölçekli bir çalışma yapılması, bulguların başka bağlamlarda ve ortamlarda uygulanabilir olup olmadığını kontrol etmede etkili olacaktır.
- Fonksiyonların grafik temsilleri matematikte ve fizik, kimya, biyoloji gibi müfredat alanlarında uygulanmasında önemli olduğundan, başka araştırmalarda ayrıca matematiksel temsil olarak grafik temsilinin kullanılması faydalı olacaktır.
- Genel olarak, genişleyen şekil örüntüleri, öğrencilere fonksiyonel ilişkileri tanıtmak için değerli bir matematiksel bağlamdır. Bu örüntü oluşturma görevleri, öğrencilerin örüntülerin somut doğası aracılığıyla fonksiyonel ilişkilere ulaşmasını sağlar. Öğrencilerin örüntüleri görme yollarına dayalı ilişkiler türetmeye teşvik ettiği için bu örüntüler fonksiyonel düşünme gelişimi için önemlidir. Bu görme biçimleri, öğrencilerin fonksiyonel ilişkilerin öğelerini anlamlandırmalarına olanak tanır ve cebirde gelecekteki çalışmalar için sağlam bir temel sağlar. Ancak, bu çalışma genişleyen şekil örüntüleri sınırlıdır ve öğrencilerin fonksiyonel ilişkilerle karşılaşması için birçok farklı matematiksel bağlam kullanılması faydalı olacaktır. Fonksiyonel düşünmenin gelişiminin farklı matematiksel bağlamlar temelinde incelenmesi fonksiyonel düşünmede farklı faydalı öğretim görevlerinin cebir öğretimine kazandırmasında faydalı olabilir.
- Bu araştırmada tasarlanan öğretim dizisinin amacı, öğrencilere fonksiyonlara ve fonksiyonel ilişkileri temsil etmede değişkenlerin kullanımına giriş

yapmaktır. Tek başına bağlam olarak genişleyen şekil örüntüleri ve öğretim deneyiminin süresi fonksiyonel ilişkileri öğrencilerin tam olarak anlamalarını veya bu ilişkileri tam sembolik biçimde nasıl ifade edebileceklerini anlamaları için yeterli değildir. Öğrencilerin, bu öğretim dizisinin ötesinde tekrar tekrar bu örüntülerle çalışmalar yapma fırsatı bulması fonksiyonel ilişkilere ulaşmada faydalı olacaktır.

KAYNAKÇA

Akın, G. (2020). *The effects of a functional thinking intervention on fifth grade students' functional thinking skills,* Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Ankara.

Akkan, Y., Baki, A. ve Çakıroğlu, Ü. (2011). Aritmetik ile cebir arasındaki farklılıklar: Cebir öncesinin önemi. *İlköğretim Online*, *10*(3), 812-823.

Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools*. Utrecht: CD-Beta Press.

Bakker, A. ve Van Eerde, H.A.A. (in press). An introduction to design-based research with an example from statistics education. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds.), *Doing Qualitative Research: Methodology and Methods in Mathematics Education.* New York: Springer.

Beatty, R. (2014). Exploring the power of growing patterns [Monograph]. *What works? Research into practice 55*,1-4.

Bednarz, N., Kieran, C. ve Lee, L. (1996). *Approaches to algebra*. London: Kluwer Academic Publisher.

Blanton, M. ve Kaput, J. 2011. Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. *International Reviews on Mathematics Education, 37(1): 34-42*.

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Heinemann.

Blanton, M. L. ve Kaput, J. J. (2004). Elementary grade students' capacity for functional thinking. In M. J. Høines, & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 135–142). Bergen, Norway: PME.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A., Sawrey, K. ve Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in six-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(5), 511-558.

Blanton, M., Brizuela, B., Gardiner, A., Sawrey, K. ve Newman-Owens, A. (2017). A progression in first-grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics, Online First*. https://doi.org/doi:10.1007/s10649-016- 9745-0

Blanton, M., Brizuela, B., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A., Stroud, R., Fonger, N. ve Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp.213-235). Springer.

Blanton, M., Brizuela, B.M., Gardiner, A.M., Sawrey, K. and Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511-558.

Bozkurt, A., Çirak Kurt, S. ve Tezcan, S. (2020). Türkiye (5-8. Sınıflar) ve Singapur (P5-6., S1-2. Sınıflar) Matematik Öğretim Programlarının Cebir Öğrenme Alanı Bağlamında Karşılaştırılması. *Pamukkale University Journal of Education 48*, 152-173.

Brizuela, B. M. ve Lara-Roth, S. (2002). Additive relations and function tables. *Journal of Mathematical Behavior*, 20(3), 309–319. doi:10.1016/S0732-3123(02)00076-7

Büyüköztürk, Ş., Çakmak-Kılıç, E., Akgün, Ö.E., Karadeniz, Ş. ve Demirel, F. (2012). *Bilimsel Araştırma Yöntemleri* (13. baskı). Ankara: Pegem Akademi.

Clements, D. H., ve Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 81–89. doi:10.1207/s15327833mtl0602_1

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. ve Schauble L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9–13.

Cobb, P., Jackson, K. ve Dunlap, C. (2015). Design research: An analysis and critique. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed., pp.481-503). Taylor and Francis Inc.

Confrey, J., ve Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplictive unit. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2/3), 135-164.

Confrey, J., and Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential function. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(1),66–86.

Ellis, A. B. (2007). Connections between generalising and justifying: Students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 194 - 229.

Ellis, A. B. (2011). Algebra in the middle school: Developing functional relationships through quantitative reasoning. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 215–238).Heidelberg, Germany: Springer.

Eroğlu, D. (2021). Yedinci sınıf ders kitaplarındaki örüntüler konusunun "Zihinsel alışkanlıklar"perspektifinden incelenmesi. *Ulusal Eğitim Akademisi Dergisi (UEAD), 5*(1), 62-78.

Farenga, S.J., ve Ness, D. (2005). Algebraic thinking part II: The use of functions in scientific inquiry. *Science Scope, 29*(1), 62 – 64.

Friel, S. N. ve Markworth, A. (2009). A framework for analyzing geometric pattern tasks. *Mathematics Teaching in Middle School,* 15(1), 24-33.

Gibbs, E. B. (2020). **"***It Makes Me Feel Proud Of Who I Am": Developing Functional Thinking Through Culturally Located Tasks* (Unpublished doctoral dissertation or master's thesis). Massey University, New Zealand.

Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*, 105-128. doi:10.1207/s15327833mtl0602_3

Gravemeijer, K.P.E., ve Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. P. E. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 17–51). London: Routledge.

Gravemeijer, K. P. E., ve Van Eerde, D. (2009). Design research as a means for building a knowledge base for teachers and teaching in mathematics education. *The Elementary School Journal, 109(5),* 510-524.

Gravetter, F.J. ve Forzano, L. B. (2012). *Research Methods fort he Behavioral Sciences* (4th ed.). Belmont, CA: Wadsworth

Greenes, C., Cavanagh, M., Dacey, L., Findell, C. ve Small, M. (2001). *Navigating through algebra in Prekindergarten – Grade 2*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Güvendiren, G.N. (2019). *Altıncı sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünmelerinin üç parametreyle birlikte incelenmesi: Niceliksel muhakeme, kovaryansel ve fonksiyonel düşünme,* Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, Eskişehir.

Herbert, K. ve R. Brown. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics, 3,* 340-344.

Kabael, T. ve Tanışlı, D. (2010). Cebirsel düşünme sürecinde örüntüden fonksiyona öğretim. *Elementary Education Online*, 9(1), 213-228.

Kaput, J. (2017). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher ve M. Blanton (Eds.). *Algebra in the early grades* (Original work published 2008). https://doi.org/10.4324/9781315097435

Kieran, Carolyn (1992). The learning and teaching of schools algebra. (Edited by: Douglas A. Grouws). Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: Macmillan, 390-419.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. ve Ng, S. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching.* Springer Open eBooks. http://www.springer.com/us/book/9783319322575

Knuth, E., Stephens, A., Blanton, M. ve Gardiner, A. (2016). Build an early foundation for algebra success. *Phi Delta Kappan*, *97*(6), 65-68.

Kriegler, S. et al. (2007) *Introduction to algebra*. Los Angeles, CA: Center for Mathematics and Teaching Press.

MacGregor, M., ve Stacey, K. (1995). The effect of different approaches to algebra on students' perceptions of functional relationships. *Mathematics Education Research Journal*, *7*(1), 69-85.

Markworth, K. (2010). *Growing and growing: Promoting functional thinking with geometric growing patterns*. Unpublished PhD, University of North Carolina at Chapel Hill.

Markworth, K. (2012). Growing patterns: Seeing beyond counting. *Teaching Children Mathematics, (19)*4, 254–262. http://10.5951/teacchilmath.19.4.0254

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65 - 86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J. H., Grahamn, A., Pimm, D., Gowar, N. (1985). *Routes to/Roots of algebra*. East Kilbride, United Kingdom: The Open University Press.

Merriam, S. ve Tisdell, E. (2015). *Qualitative research: A guide to design and implementation* (4th ed.). John Wiley & Sons Incorporated.

Miller, J. (2016). Young indigenous students en route to generalising growing patterns. In B. White, M. Chinnappan, & S. Trenholm (Eds.), *Opening up mathematics education research: Proceedings of the 39th Annual Conference of the*

Mathematics Education Research Group of Australasia (pp. 471–478). MERGA. https://eric.ed.gov/?id=ED572321

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston: NCTM Publications.

National Council of Teachers of Mathematics. [NCTM]. (2006). *Principal and standarts for school mathematics.* Reston: NCTM Publications.

National Council of Teachers of Mathematics. [NCTM]. (2010). *Principal and standarts for school mathematics.* Reston: NCTM Publications.

Özdemir, E. , Dikici, R. ve Kültür, M. (2015). Öğrencilerin örüntüleri genelleme süreçleri: 7. sınıf örneği . *Kastamonu Eğitim Dergisi , 23* (2), 523-548.

Papic, M. ve Mulligan, J. (2007). The growth of early mathematical patterning: An intervention study. In J. Watson ve K. Beswich (Ed.), *Mathematics Education Research Group of Australasia. 2*, pp. 591-600. Adelaide: MERGA.

Prediger, S., Gravemeijer, K. ve Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes: an overview on achievements and challenges. *ZDM Mathematics Education, (47),* 877-891.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, (4)*2, 37-62. https://core.ac.uk/download/pdf/12341228.pdf

RAND Mathematics Study Panel. (2003). *Mathematical proficiency for all students: Toward a strategic research and development program in mathematics education.* Santa Monica, CA: RAND Education.

Rivera, F. D. ve Becker, J. R. (2011). Formation of pattern generalisation involving linear figural patterns among middle school students: Results of a three-year study. In J. Cai ve E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 323 - 366). Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

Ross, K. A. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proof in school *school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. J. Kaput, D. W. Carraher ve M. L. Blanton (Eds.),

Algebra in the early grades (pp. 133-163). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Stacey, Kaye ve Macgregor, Mollie (2000). Learning the algebraic method of solving problems. *Journal of Mathematical Behaviour, 18* (2), 149-167.

Stephens, A., Fonger, N., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M., Knuth, E. ve Gardiner, A. (2017). A learning progression for elementary students' functional thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *19*(3), 143-166.

Swan, M. (2014). Design research in mathematics education. In S. Lerman (Ed.),*Encyclopedia of mathematics education* (pp. 148-152). Netherlands: Springer.

Tanışlı, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *The Journal of Mathematical Behavior, 30*(3), 206-223.

Türkmen, H. ve Tanışlı, D. (2019). Cebir öncesi: 3. 4. ve 5. sınıf öğrencilerinin fonksiyonel ilişkileri genelleme düzeyleri. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi – Journal of Qualitative Research Education*,7(1), 344-372. doi:10.14689/issn.2148-2624.1.7c1s.16m

Warren, E. A. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. *Paper presented at the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Melbourne, Australia.

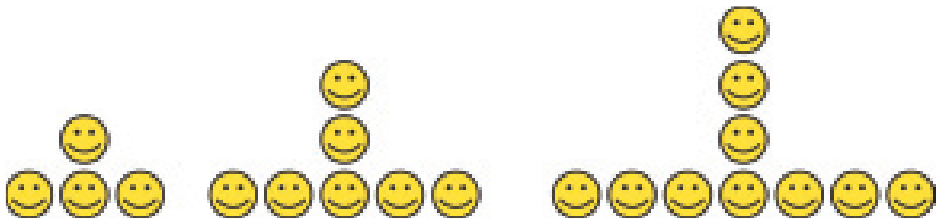
Wilkie, K. (2014). Learning to like algebra through looking: Developing upper primary students' functional thinking with visualisations of growing patterns. *Australian Primary Mathematics Classroom, (19)*4, 24-33.

Wilkie, K., ve Clarke, D. (2015). Developing students' functional thinking in algebra through different visualisations of a growing pattern's structure. In J. Anderson, M. Cavanagh, ve A. Prescott (Eds.). *Curriculum in focus: Research guided practice: Proceedings of the 37th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 637–644). MERGA. https://core.ac.uk/download/pdf/74307273.pdf

EKLER

Ek 1. Fonksiyonel Düşünme Testi

1'den 9'a kadar olan soruları yanıtlamak için aşağıdaki örüntüyü kullanın.



1. Örüntünün 4. Terimini tanımlayın ve çizin.

2. Örüntünün nasıl büyüdüğünü dikkate alarak 10. Terimin nasıl çizileceğini nasıl açıklarsınız?

3. Örüntünün nasıl büyüdüğünü dikkate alarak 40. Terimin nasıl çizileceğini nasıl açıklarsınız?

4. Her terimde kaç gülen yüz kullanılmıştır?
   Birinci Terim:
   İkinci Terim:
   Üçüncü Terim:

5. 5. Terimi çizebilmek için kaç tane gülen yüz kullanılması gerekir? Nasıl bildiğini açıkla.

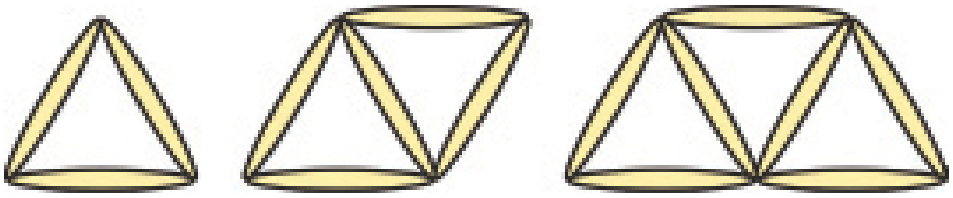
6. 10. Terimi çizebilmek için kaç tane gülen yüz kullanılması gerekir? Nasıl bildiğini açıkla.

7. 40. Terimi çizebilmek için kaç tane gülen yüz kullanılması gerekir? Nasıl bildiğini açıkla.

8. Herhangi bir aşama için toplam gülen yüz sayısını veren bir kuralı kelimelerle ya da sembolik olarak yazın. Kuralınızın neden mantıklı olduğunu düşündüğünüzü açıklayın.

9. 50 tane gülen yüz ile örüntünün kaçıncı aşamasına kadar çizilebilir? Gülen yüz artar mı?

10'dan 18'e kadar olan sorular için aşağıdaki örüntüyü kullanın.



Şekil 1 Şekil 2 Şekil 3

10. Şekil 4'ün nasıl görüneceğini tanımlayın veya çizin.

11. Örüntünün nasıl büyüdüğünü dikkate alarak 10. Terimin nasıl çizileceğini nasıl açıklarsınız?

12. Örüntünün nasıl büyüdüğünü dikkate alarak 41. Terimin nasıl çizileceğini nasıl açıklarsınız?

13. Her bir şekli yapmak için kaç kürdana ihtiyaç vardır?

Şekil 1 _____ Şekil 2 _____ Şekil 3 _____

14. Şekil 5'i yapmak için ihtiyacınız olacak toplam kürdan sayısı nedir? Nasıl bildiğini açıkla.

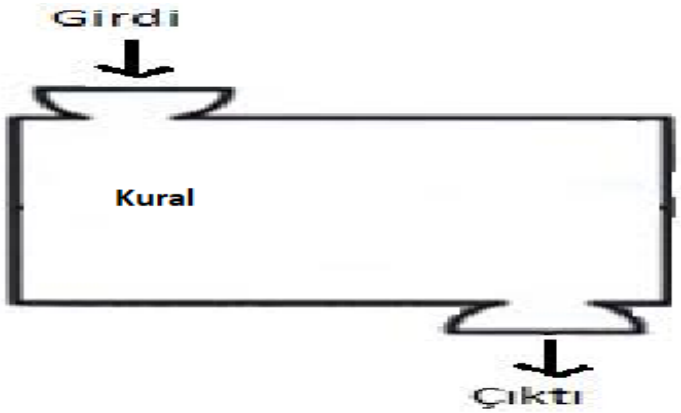
15. Şekil 10'u yapmak için ihtiyacınız olacak toplam kürdan sayısı nedir? Nasıl bildiğini açıkla.

16. Şekil 40'i yapmak için ihtiyacınız olacak toplam kürdan sayısı nedir? Nasıl bildiğini açıkla.

17. Herhangi bir aşama numarasını yapmak için ihtiyaç duyacağınız toplam kürdan sayısını veren bir kuralı kelimelerle ya da sembolik olarak yazın. Kuralınızın neden mantıklı olduğunu düşündüğünüzü açıklayın.

18. 28 kürdanın olsa bu kürdanlarla hangi aşamayı kadar yapabilirsin? Geriye kürdan artmakta mıdır?

Aşağıda bir fonksiyon makinesi var. Bu makineye bir sayı girdiğinde, değiştirilir ve başka bir sayı olarak çıkar. Örneğin, bir fonksiyon makinesi bir sayıyı 3 ile çarparak değiştirebilir. Bu makineye 4 koyarsanız, 12 çıkar (4 kere 3). Bu makineye 10 koyarsanız, 30 çıkar (10 kez 3).



19. Aşağıdaki giriş ve çıkış tablosuna bakın. Bu girişler ve çıkışlar için fonksiyon makinesinin kuralını bulabilir misiniz?

Giriş	**Çıkış**
4	14
2	8
6	20

Ek 2. Fonksiyonel Düşünme Testi Puanlama Rubriği

Gülen Yüz Örüntüsü

Soru	Puanlama Rehberi	Puan
1	1 = Doğru açıklama veya çizim 0 = Yanlış cevap	
2	2 = Doğru açıklama 1 = Eksik açıklama 0 = Yanlış açıklama	
3	2 = Doğru açıklama 1 = Eksik açıklama 0 = Yanlış açıklama	
4	Her doğru hesaplama için 1 puan	
Soru	Puanlama Rehberi	Puan
5	1=16 gülen yüz	
6	1= 31 gülen yüz	
7	1=121 gülen yüz	Puan
8		Akıl yürütme
9	2= 16.aşama ve 1 gülen yüz artar 1=16. Aşama veya 1 gülen yüz artar 0= Yanlış Cevap	Puan

Kürdan Örüntüsü

Soru	Puanlama Rehberi	Puan
10	1 = Doğru açıklama veya çizim 0 = Yanlış cevap	
11	2 = Doğru açıklama 1 = Eksik açıklama 0 = Yanlış açıklama	
12	2 = Doğru açıklama 1 = Eksik açıklama 0 = Yanlış açıklama	
13	Her doğru hesaplama için 1 puan	
Soru	Puanlama Rehberi	Puan
14	1=11 kürdan	
15	1= 21 kürdan	
16	1=81 kürdan	Puan
17		Akıl yürütme
18	2= 13. Şekil ve 1 kürdan artar 1=13. Şekil veya 1 kürdan artar 0= Yanlış Cevap	

Fonksiyon Makinesi

Soru	Puanlama Rehberi	Puan
19	1=Doğru Cevap 0=Yanlış Cevap	
19		Akıl Yürütme

Sonuç Rubriği

Puan Gülen Yüz: Kürdan:	Toplam Puan:	
Fonksiyonel Düşünme	D0	D1
	D2	D3
	D4	D5
	D6	D7/8
	D9/10	

Ek 3. Fonksiyonel Düşünme Düzeyleri

Düzeyler	Özellikleri
Yanıt yok (D0)	Verilen yanıt veya ifade yok. Öğrenci örüntüde tek veri değerinde özyinelemeli ve veri setinin değişimi hakkındaki herhangi bir ilişkiyi betimleyemez.
Özyinelemeli Özel (D1)	Öğrenci, yalnızca belirli sayılara atıfta bulunarak değişkenlerden birinde veya her ikisinde de yinelemeli bir desen tanımlar. 2, 4, 6, 8, …
Özyinelemeli Genel (D2)	Öğrenci, değişkenlerden birinde veya her ikisinde de doğru bir yinelemeli model tanımlar. Kişi sayısı her seferinde 2 artar.
Kovaryans İlişkisi (D3)	Öğrenci, kovaryans ilişkisini tanımlar. İki değişken ayrı ayrı belirtilmek yerine koordine edilmiştir. Masa sayısı 1 artarken, kişi sayısı 2 artar.
Tek Örnekleme (D4)	Öğrenci, fonksiyon kuralının bir somut örneğini sağlayan, ancak genellikle iki değişkeni ilişkilendirmeyen, sayılar ve/veya bilinmeyenlerle ifade veya denklem yazar. 2 2 = 4
Fonksiyonel Özel (D5)	Öğrenci, belirli sayıları kullanarak işlevsel bir ilişki tanımlar, ancak değişkenlerle ilgili genel bir açıklama yapmaz. 1 2 = 2, 2 2 = 4, 3 2 = 6, 4 2 = 8, …
Fonksiyonel Temel (D6)	Öğrenci, değişkenler arasındaki genel ilişkiyi tanımlar ancak aralarındaki dönüşümü tanımlamaz. 2 ile çarpılır 3 eklenir.

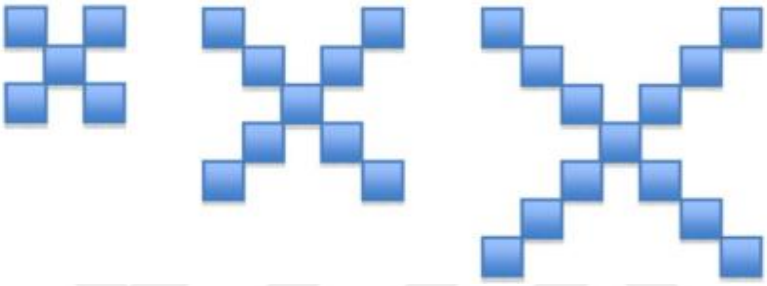
Fonksiyonel Değişkenle (D7)	Genellikle bir değişkendeki dönüşümü kelimelerle tanımlar, ancak açıkça diğeriyle ilişkili değildir.
Fonksiyonel Kelimelerle (D8)	Genellikle bir değişkendeki dönüşümü değişkenle tanımlar, ancak açıkça diğeriyle ilişkili değildir.
Yoğun Fonksiyonel Değişkenlerle (D9)	Öğrenci, iki değişken arasındaki genelleştirilmiş bir ilişkiyi tanımlayan kelimelerle fonksiyonel kuralı oluşturur.
Yoğun Fonksiyonel Kelimelerle (D10)	Öğrenci, iki değişken arasındaki genelleştirilmiş bir ilişkiyi tanımlayan değişkenlerle fonksiyonel kuralı oluşturur.

Ek 4. Öğretim Etkinlikleri ve Görevleri

1. DERS

Ders 1 Öğrenme Varsayımı: Genişleyen şekil örüntüsünde genişlemesinin farklı yollarını keşfederek genişlemeyi tanımlama, ifade etme ve sayısal ifadeye çevirme

Çarpı Örüntüsü



- 4. aşamayı oluşturun. 4. aşamanın nasıl göründüğünü açıklayın veya çizin.

- 10. adımı nasıl yapacağınızı veya çizeceğinizi kelimelerle açıklayın.

- 42. Adımı nasıl yapacağınızı veya çizeceğinizi kelimelerle açıklayın.

- Bu örüntünün nasıl büyüdüğünü açıklamanın başka yollarını bulabilir misiniz?

- Örüntüdeki şekil sayısını tek tek saymadan nası hesaplarsınız?

Noktalı W örüntüsü



- 4. aşamayı oluşturun. 4. aşamanın nasıl göründüğünü açıklayın veya çizin.

- 10. adımı nasıl yapacağınızı veya çizeceğinizi kelimelerle açıklayın.

- 42. Adımı nasıl yapacağınızı veya çizeceğinizi kelimelerle açıklayın.

- Bu örüntünün nasıl büyüdüğünü açıklamanın başka yollarını bulabilir misiniz?

- Örüntüdeki şekil sayısını tek tek saymadan nası hesaplarsınız?

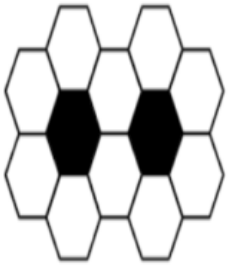
2. DERS

Ders 2 Öğrenme Varsayımı:

1. Genişleyen şekil örüntüsünde genişlemesinin farklı yollarını keşfederek genişlemeyi tanımlama, ifade etme ve sayısal ifadeye çevirme

2. Genişleyen şekil örüntüsünün fiziksel yapısını temsil eden sayısal ifade oluşturma ve bu ifadeleri üç sütunlu tabloda adımları sıralı olmayacak şekilde gösterme





Beyza çiçeklerden kolye yapmayı sever. Yaprakları için beyaz boncuklar ve her çiçeğin merkezi için siyah boncuklar kullanır. Aşağıdaki şekil, her ikisi de onun tarafından yapılmış bir çiçekli bir kolyeyi ve iki çiçekli bir kolyeyi göstermektedir. Beyza'nın 8 çiçek deseni oluşturmak için kaç tane beyaz boncuk kullandığına dair sayısal ifadeyi yazalım.

- 4. aşamayı oluşturun. 4. aşamanın nasıl göründüğünü açıklayın veya çizin.

- 10. adımı nasıl yapacağınızı veya çizeceğinizi kelimelerle açıklayın.

- 42. Adımı nasıl yapacağınızı veya çizeceğinizi kelimelerle açıklayın.

- Bu örüntünün nasıl büyüdüğünü açıklamanın başka yollarını bulabilir misiniz?

- Örüntüdeki şekil sayısını tek tek saymadan nası hesaplarsınız?

- Çalışma kağıdınıza bu ötüntüye ait üç sütunlu bir tabloyu yapın.
  Sırasıyla 1., 5, 3., 10., 42. ve 100. Adımlar için toplam kaç beyaz boncuk sayısının kullanıldığını göstermek için üç sütunlu tablonuyu kullanın. Tablodaki orta sütuna sayma biçiminizi yazınız.

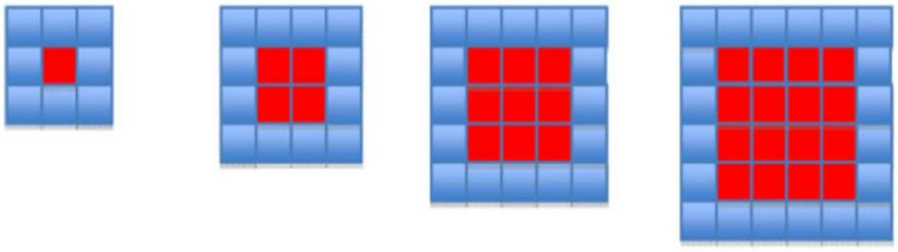
3. DERS

Ders 3 Öğrenme Varsayımı:

1. Genişleyen şekil örüntüsünde genişlemesinin farklı yollarını keşfederek genişlemeyi tanımlama, ifade etme ve sayısal ifadeye çevirme

2. Genişleyen şekil örüntüsünün fiziksel yapısını temsil eden sayısal ifade oluşturma ve bu ifadeleri üç sütunlu tabloda adımları sıralı olmayacak şekilde gösterme

3. Üç sütunlu tablodaki örüntüleri keşfederek, adım numarası ile genişleyen şekil örüntüsünün ölçülebilir bir yönü arasındaki ilişkiyi fonksiyonel ilişkiye genelleme



1) Mavi renkli kısımda kaç tane kare olduğunu tek tek saymadan bulun.

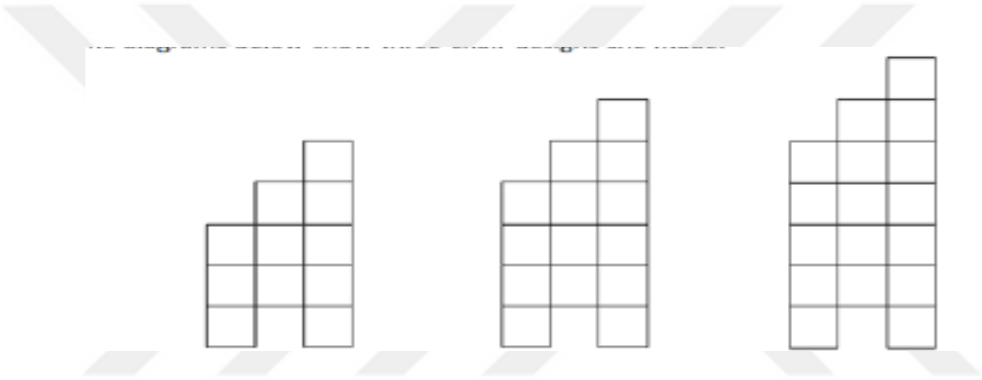
2) Bulduğunuz sayma yollarını üç sütunlu tabloda gösterin ve 5 ve 65. Adımda kaç mavi kare olduğunu bu sayma yoluyla açıklayın.

3) Her bir adım için adım numarası ile kare sayısı arasında üç sütunlu tabloda gördüğünüz belirli bir örüntü bulunmakta mıdır? Bu örüntüyü göster.

4. DERS

Ders 4 Öğrenme Varsayımı:

1. Genişleyen şekil örüntüsünde genişlemesinin farklı yollarını keşfederek genişlemeyi tanımlama, ifade etme ve sayısal ifadeye çevirme
2. Genişleyen şekil örüntüsünün fiziksel yapısını temsil eden sayısal ifade oluşturma ve bu ifadeleri üç sütunlu tabloda adımları sıralı olmayacak şekilde gösterme
3. Üç sütunlu tablodaki örüntüleri keşfederek, adım numarası ile genişleyen şekil örüntüsünün ölçülebilir bir yönü arasındaki ilişkiyi fonksiyonel ilişkiye genelleme
4. Adım numarası ile genişleyen şekil örüntüsünün ölçülebilir bir yönü arasındaki ilişkiyi kelimelerle ve bağımsız değişkeni kullanarak temsil etme



1. Bulduğunuz sayma yollarını üç sütunlu tabloda gösterin ve 5 ve 65. Adımda kaç kare olduğunu bu sayma yoluyla açıklayın.

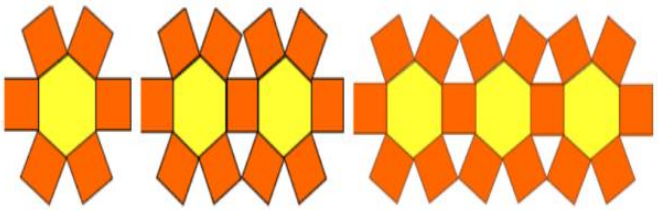
2. Adım numarası ile orta sütundaki sayısal ifade arasındaki ilişkiyi ifade ediniz.

3. Her bir adım için adım numarası ile kare sayısı arasında üç sütunlu tabloda gördüğünüz belirli bir örüntü bulunmakta mıdır? Bu örüntüyü göster.

5. DERS

Ders 5 Öğrenme Varsayımı:

1. Genişleyen şekil örüntüsünde genişlemesinin farklı yollarını keşfederek genişlemeyi tanımlama, ifade etme ve sayısal ifadeye çevirme
2. Genişleyen şekil örüntüsünün fiziksel yapısını temsil eden sayısal ifade oluşturma ve bu ifadeleri üç sütunlu tabloda adımları sıralı olmayacak şekilde gösterme
3. Üç sütunlu tablodaki örüntüleri keşfederek, adım numarası ile genişleyen şekil örüntüsünün ölçülebilir bir yönü arasındaki ilişkiyi fonksiyonel ilişkiye genelleme
4. Adım numarası ile genişleyen şekil örüntüsünün ölçülebilir bir yönü arasındaki ilişkiyi kelimelerle ve bağımsız değişkeni kullanarak temsil etme
5. Doğrusal fonksiyonun kuralını bağımsız ve bağımlı değişkenlerle ifade etme



1. Bulduğunuz sayma yollarını üç sütunlu tabloda gösterin ve 5 ve 65. Adımda kaç kare olduğunu bu sayma yoluyla açıklayın.

2. Adım numarası ile orta sütundaki sayısal ifade arasındaki ilişkiyi yazın.

3. Orta sütunda ile kare sayısının eşitliğini gösteren ifadeleri yazın.

Ek 5. MEB İzin Belgesi

Bu araştırmada Ek 1'de yer alan fonksiyonel düşünme testinin öğrencilere uygulanabilmesi ve Ek 3'te yer alan öğretim etkinliklerin 7. Sınıf öğrencileri ile beraber yürütülmesi için E-98258552-605.01-43067395 sayılı yazısı ile Adana İl Milli Eğitim Müdürlüğünden izin onayı alınmıştır.