BİR SERBESTLİK DERECESİNE SAHİP MUKAVEMETLİ ORTAMDA ÇALIŞAN MEKANİZMALARDA MEKANİK HAREKETİN İNCELENMESİ

2023
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ

Furkan AKCA

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Kerim Gökhan AKTAŞ

BİR SERBESTLİK DERECESİNE SAHİP MUKAVEMETLİ ORTAMDA ÇALIŞAN MEKANİZMALARDA MEKANİK HAREKETİN İNCELENMESİ

Furkan AKCA

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Kerim Gökhan AKTAŞ

T.C.
Karabük Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Makine Mühendisliği Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır

KARABÜK
Nisan 2023

Furkan AKCA tarafından hazırlanan "BİR SERBESTLİK DERECESİNE SAHİP MUKAVEMETLİ ORTAMDA ÇALIŞAN MEKANİZMALARDA MEKANİK HAREKETİN İNCELENMESİ" başlıklı bu tezin Yüksek Lisans Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Dr. Öğr. Üyesi Kerim Gökhan AKTAŞ .....
Tez Danışmanı, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından Oy Birliği ile Makine Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir. 25/04/2023

Ünvanı, Adı SOYADI (Kurumu) İmzası

Başkan : Dr. Öğr. Üyesi. Fatih PEHLİVAN (KBÜ) .....

Üye : Dr. Öğr. Üyesi. Kerim Gökhan AKTAŞ (KBÜ) .....

Üye : Dr. Öğr. Üyesi. Mehmet Ali GÜVENÇ (İSTE) .....

KBÜ Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulu, bu tez ile, Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Müslüm KUZU .....
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”

Furkan AKCA

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİR SERBESTLİK DERECESİNE SAHİP MUKAVEMETLİ ORTAMDA ÇALIŞAN MEKANİZMALARDA MEKANİK HAREKETİN İNCELENMESİ

Furkan AKCA

Karabük Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Tez Danışmanı:
Dr. Öğr Üyesi Kerim Gökhan AKTAŞ
Nisan 2023, 92 sayfa

Günümüzde mühendislik problemlerinin çözümünde makine ve mekanizmaların çalıştığı ortamların mekanik sistemlere etkisi oldukça büyüktür ve önemli bir yere sahiptir. Modern makine ve mekanizmaların tasarlanmasında ve mekanik hareketinin incelenmesinde hız, ivme, konum analizleri ve mukavemet hesaplamalarının yapılmasında mekanizmanın çalıştığı ortamın etkisinin dikkate alınması doğru ve gerçekçi sonuçlar elde edilmesi açısından önemlidir.

Bu sebeple, bu tez çalışmasında tek serbestlik derecesine sahip mukavemetli ortamda çalışan karmaşık bir mekanizmanın mekanik hareketinin incelenmesi ele alınmıştır. Lagrange metodu, virtüel iş prensibi ve sistemin kinetik enerjisinin değişmesi teoremi kullanılarak, mukavemetli ortamda çalışan mekanizmanın hareket denklemi üç farklı yöntem ile elde edilerek doğrulanmıştır. Sistemdeki iç ve dış reaksiyon kuvvetleri sistemin momentumunun değişmesi teoremi ile bulunmuştur. Elde edilen hareket

denklemleri, ortamın direnç mukavemeti ihmal olunan durumu ve ortamın direnç mukavemeti ihmal olmayan viskoz durum için çözülerek sistemin serbest ve zorlanmış titreşim cevapları elde edilmiştir. Titreşim analizi Matlab yazılımında 0.01 zaman aralığı kullanılarak yapılmıştır. Sonuç olarak mukavemetli ortamın sistemin titreşim cevabına etkisinin incelenebileceği bir model oluşturulmuş ve analizleri yapılmıştır. Mukavemetli ortamın viskozitesine göre sönümleme kabiliyetinin değiştiği ve mukavemetli ortamın bir damper görevi gördüğü tespit edilmiştir.

Anahtar Sözcükler : Lagrange metodu, Kinematik, Hareket denklemi, Viskozite, Doğal frekans, Virtüel iş.

Bilim Kodu : 91420

ABSTRACT

Master Thesis

INVESTIGATION OF MECHANICAL MOTION IN MECHANISMS OPERATING IN A ONE-DEGREE-OF-FREEDOM AT STRENGTH ENVIRONMENT

Furkan AKCA

Karabük University
Institute of Graduate Programs
Department of Mechanical Engineering

Thesis Advisor:
Assoc. Prof. Dr. Kerim Gökhan AKTAŞ
April 2023, 92 pages

Nowadays, the effect of the environments in which machines and mechanisms operate on mechanical systems is quite large and has an important place in solving engineering problems. In the design of modern machines and mechanisms and in the study of mechanical movement, it is important to take into account the effect of the environment in which the mechanism operates in speed, acceleration, position analysis and strength calculations in order to obtain accurate and realistic results.

For this reason, in this thesis, the examination of the mechanical motion of a single degree of freedom complex mechanism operating in a robust environment is discussed. By using the Lagrange method, the virtual work principle and the theorem of variation of the kinetic energy of the system, the equation of motion of the mechanism operating in a robust environment is obtained by three different methods. The internal and

external reaction forces in the system are found by the change of momentum theorem of the system. Free and forced vibration responses of the system are obtained by solving the obtained equations of motion for the case of neglected resistive strength and not neglected resistive strength. Vibration analysis is performed in MATLAB software using 0.01 time interval. As a result, a model in which the effect of the robust environment on the vibration response of the system can be examined is created and analyzed. It has been determined that the damping ability of the resistant environment changes according to the viscosity and the resistant environment acts as a damper.

Key Word : Langrange method, Kinematics, Equation of motion, Viscosity, Natural frequency, Virtual work

Science Code : 91420

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması lisans ve yüksek lisans yıllarımdaki bilgi ve emeklerimin bir ürünü olup, süreklilik ve disiplin ile çalışarak tamamladım. Öncelikle, tez danışmanlığımı üstlenerek araştırma konusunun seçimi ve yürütülmesi sırasında değerli bilimsel uyarı ve önerilerinden yararlandığım saygı değer hocalarım Dr. Öğr. Üyesi Kerim Gökhan AKTAŞ'a ve Prof. Dr. Etimad EYVAZOV'a içtenlikle ve minnetle teşekkür ederim.

Sevgili aileme manevi hiçbir yardımı esirgemeden yanımda oldukları için tüm kalbimle teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KABUL ii
ÖZET iv
ABSTRACT vi
TEŞEKKÜR viii
İÇİNDEKİLER ix
ŞEKİLLER DİZİNİ xii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ xiv

BÖLÜM 1 1
GİRİŞ 1

BÖLÜM 2 3
LİTERATÜR ARAŞTIRMASI 3

BÖLÜM 3 8
KUVVETLER SİSTEMİNİN SINIFLANDIRILMASI 8
3.1. KUVVETLER SİSTEMİNİN SINIFLANDIRILMASI 8
3.1.1. Eşdeğer Kuvvetler Sistemi 8
3.1.2. Bileşke Kuvveti 9

BÖLÜM 4 11
MEKANİK SİSTEMİN HAREKETİNİN İNCELENMESİ 11
4.1. MADDESEL NOKTANIN HAREKET DENKLEMLERİ 11
4.2. MADDESEL NOKTA İÇİN D'ALEMBERT PRENSİBİ 13

BÖLÜM 5 15
MADDESEL NOKTANIN TİTREŞİM HAREKETLERİ 15
5.1. MADDESEL NOKTANIN HARMONİK TİTREŞİM HAREKETİ 15
5.2. MADDESEL NOKTANIN SÖNÜMLÜ TİTREŞİM HAREKETİ 19
5.3. ZORLANMIŞ TİTREŞİM HAREKETİ 21

Sayfa

BÖLÜM 6 26

SİSTEMİN HAREKET DENKLEMİNİN ELDE EDİLMESİNDE TEZ KAPSAMINDA KULANILAN YÖNTEMLER VE DENKLEMLER 26

6.1. SİSTEMİN MOMENTUMUNUN DEĞİŞMESİ TEOREMİ 26

6.2. HAREKETSİZ EKSEN ETRAFINDA DÖNME HAREKETİNİN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ (SİSTEMİN AÇISAL MOMENTUMUMUN DEĞİŞMESİ TEOREMİ) 29

6.3. SİSTEMİN KİNETİK ENERJİSİNİN DEĞİŞMESİ TEOREMİ 30

6.4. MEKANİK SİSTEME ETKİYEN KUVVETLERİN YAPTIĞI İŞLER 32

6.4.1. Ağırlık Kuvvetinin Yaptığı İş 32

6.4.2. Dönen Cisme Etkiyen Kuvvetlerin Yaptıkları İş 32

6.4.3. Yuvarlanma Sürtünmesi Durumunda Yapılan İş 33

6.5. RİJİT CİSMİN ÇEŞİTLİ HAREKET HALLERİ İÇİN KİNETİK ENERJİSİ 33

6.5.1. Rijit Cismin Ötelenme Hareketi 33

6.5.2. Rijit Cisimin Hareketsiz Eksen Etrafında Dönme Hareketi 33

6.5.3. Cismin Hem Dönme Hem Ötelenme Hareket Durumu 34

6.6. HAREKETSİZ EKSEN ETRAFINDA DÖNEN CİSMİN KİNETİK ENERJİSİNİN DEĞİŞMESİ TEOREMİ 34

6.7. VİRTÜEL İŞ PRENSİBİ 36

6.8. LAGRANGE METODU 38

BÖLÜM 7 44

BİR SERBESTLİK DERECESİNE SAHİP MUKAVEMETLİ ORTAMDA ÇALIŞAN MEKANİZMANIN MEKANİK HAREKETİNİN İNCELENMESİ 44

7.1. ELE ALINAN MUKAVEMETLİ ORTAMDA ÇALIŞAN BİR SERBESTLİK DERECELİ PROBLEMİN TANIMLANMASI 44

7.2. PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ 45

7.2.1. Problemin Çözüm Aşamaları 45

7.2.2. Bir Serbestlik Dereceli Mekanizmanın Hareket Denkleminin Sistemin Kinetik Enerjisinin Değişmesi Teoremi ile Elde Edilmesi 46

7.2.3. Sistemin Hareket Denkleminin Çözümü 52

7.2.4. İç ve Dış Reaksiyon Kuvvetlerinin Bulunması 56

7.2.5. Bir Serbestlik Dereceli Mekanizmanın Hareket Denkleminin Virtüel İş Prensibi ile Elde Edilmesi 59

Sayfa

7.2.6. Bir Serbestlik Dereceli Mekanizmanın Hareket Denkleminin Lagrange Metodu ile Elde Edilmesi 62
7.2.7. Bir Serbestlik Derecesine Sahip Mekanik Sistemin Titreşim Analizi 64
7.2.7.1. Mekanik Sistemin Ortamın Direnç Mukavemeti İhmal Olunan Durumu İçin Sönümsüz Titreşimi 64
7.2.7.1.a. Sönümsüz Serbest Titreşim Durumu 65
7.2.7.1.b. Sönümsüz Zorlanmış Titreşim Durumu 66
7.2.7.1.c. Rezonans Durumu 68
7.2.7.2. Mekanik Sistemin Direnç Mukavemeti İhmal Olmayan Viskoz Ortamdaki Titreşimi 71
7.2.7.2.a. Sönümlü Serbest Titreşim Durumu 71
7.2.7.2.b. Sönümlü Zorlanmış Titreşim Durumu 72
7.3. Sayısal Analiz Çalışmaları 76
7.3.1. Viskoz Olmayan Ortamda Serbest Titreşim Analizi 76
7.3.2. Viskoz Olmayan Ortamda Zorlanmış Titreşim Analizi 78
7.3.3. Viskoz Olmayan Ortamda Rezonans Durumu ($w = p$) 80
7.3.4. Viskoz Ortamda Serbest Titreşim Analizi 81
7.3.5. Viskoz Ortamda Zorlanmış Titreşim Analizi 83
7.4. Bir Serbestlik Dereceli Mekanizmanın Hareket Denklemlerinin MATLAB/Simulink Yazılımında Çözümü 84

BÖLÜM 8 87
SONUÇLAR 87
KAYNAKLAR 89

ÖZGEÇMİŞ 92

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 3.1. Kuvvetler sisteminin sembolik gösterimi. 8

Şekil 3.2. Eşdeğer kuvvetler sisteminin sembolik gösterimi. 9

Şekil 3.3. Bileşke kuvvetin gösterimi. 9

Şekil 4.1. M kütlesine sahip maddesel noktanın F kuvveti etkisi altındaki hareketi. 11

Şekil 4.2. Hareket yörüngesi verilmiş maddesel noktanın koordinant sistemleri üzerine iz düşümleri 13

Şekil 5.1. M kütleli bir cismin F kuvveti altında sabit O noktasına hareketi. 15

Şekil 5.2. Harmonik titreşim hareketinin grafiği. 17

Şekil 5.3. Yayların bağlantı şekilleri. 18

Şekil 5.4. Maddesel noktanın Sönümlü titreşim hareketi. 19

Şekil 5.5. Kuvvetin Ox ekseni üzerine iz düşümü. 21

Şekil 6.1. Hareketsiz eksen etrafında dönme hareketinin temsili gösterimi. 29

Şekil 7.1. Bir serbestlik derecesine sahip mekanizma 45

Şekil 7.2. Dinamiğin esas teoremlerinin mekanik sistem için uygulanması. 46

Şekil 7.3. Mekanizmanın serbest cisim diyagramı 57

Şekil 7.4. Sisteme etkimekte olan bütün aktif kuvvetler ve atalet kuvvetleri. 60

Şekil 7.5. $s0 = 0.2\ m,\ \ s0 = 0$ başlangıç koşulları için sistemin serbest titreşim cevabı 77

Şekil 7.6. $s0 = 0.2\ m, s0 = 0.3\ m/s$ başlangıç koşulları için sistemin serbest titreşim cevabı 77

Şekil 7.7. $s0 = 0, s0 = 0.3$ başlangıç koşulları için sistemin serbest titreşim cevabı 78

Şekil 7.8. Sisteme uygulanan $F = 100\sin 5t$ harmonik dış kuvveti. 79

Şekil 7.9. Sisteme $F0 = 100\sin 5t$ harmonik dış kuvvet uygulanması durumunda zorlanmış titreşim cevabı 79

Şekil 7.10. Sisteme $F0 = 100\sin 2t$ harmonik dış kuvvet uygulanması durumunda zorlanmış titreşim cevabı 80

Şekil 7.11. Viskoz olmayan ortamda rezonans durumu 81

Şekil 7.12. Sistemin viskoz ortamdaki serbest titreşim cevabı. 82

Şekil 7.13. Viskoziteye göre serbest titreşim cevabının değişimi. 82

Şekil 7.14. Sisteme $F0 = 100\sin 5t$ harmonik dış kuvvet uygulanması durumunda zorlanmış titreşim cevabı. 84

Şekil 7.15. Simulink modeli 85

Sayfa

Şekil 7.16. Simulink modelinden elde edilen sistemin titreşim cevabı..... 85
Şekil 7.17. Sistemin rastgele (random) titreşim cevabı..... 86

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

a : İvme

m : Kütle

δ_{st} : Yayın sertlik katsayısı

F : Kuvvet

g : Yer Çekimi İvmesi

grad f : Gradyant Fonksiyonu

M : Kütle

N : Normal kuvvet

T : Titreşim periyodu

q : Genel koordinat

Q : Genelleşmiş kuvvet

R : Tepki kuvveti

E_k : Kinetik enerji

E_p : Kinetik enerji

t : Zaman

v : Hız

x,y,z : Kartezyen koordinatlar

$\delta\bar{r}$: Hayali(virtüel) yer değiştirme vektörü

W : Virtüel iş

λ : Yayın deformasyonu

$-\overline{\mu v}$: Ortamın mukavemet kuvveti

F_{at} : Atalet kuvveti

$\bar{F}_i^{ey}$: Eylemsizlik kuvveti vektörü

$\bar{r}$: Konum vektörü

$\bar{\rho}$: Göreceli konum vektörü

$\overline{\omega}$: Açısal hız vektörü

α : Başlangıç faz açısı

ω_n : Titreşimin doğal frekansı

$\overline{F}$: Geri çağırıcı kuvvet

Q_0 : Statik kuvvet

δ_0 : Yer değişimi

$\overline{R}^e$: Sisteme etkiyen dış kuvvetlerin eşdeğer vektörü

$\overline{F}_n^e$: Dış kuvvet

I_z : Z eksenindeki atalet momenti

M_z^e : Dışarıdan etkiyen kuvvetlerin z eksenine göre eşdeğer momenti

$\mathrm{d}A_k^i$: İç kuvvetlerin yaptığı elementer iş

$\mathrm{d}A_k^e$: Dış kuvvetlerin yaptığı elementer iş

T : Sistemin kinetik enerjisi

T_0 : Sistemin incelenen anda ki kinetik enerjisi

z_{k0} : Noktanın, başlangıçtaki koordinatı

z_{k1} : Noktanın, en son durumdaki koordinatı

$\sum G_k$: Tüm mekanik sistemin genel kütlesi

h_c : Mekanik sistemin kütle merkezinin dikeydeki yer değiştirmesi

M_z : Dönme eksenine göre olan burulma momenti

φ : Elementer dönme açısı

d : Yuvarlanma esnasındaki sürtünme katsayısı

v_c : Kütle merkezinin hızı

I_c : Kütle merkezinden geçen atalet momenti

ω_0 : Cismin başlangıç durumunda açısal hızı

$\mathrm{d}\varphi$: Dönen cismin elementer dönme açısıdır.

$\overline{F}_k$: k adet noktaya uygulan kuvvetlerin eşdeğeri

$\overline{N}_k$: Reaksiyon kuvvetlerinin eşdeğeri

$\delta\overline{r}_k$: Virtüel iş vektörü

δq_k : Genelleştirilmiş koordinatların, virtüel işi

R : Viskozite mukavemet kuvveti

F_0 : Harekete geçirici harmonik kuvvet

F_g : Getirilmiş kuvvetler

s : Genelleştirilmiş koordinat

$\dot{s}$: Genelleştirilmiş hız

$\ddot{s}$: Genelleştirilmiş ivme

s_{zor} : Zorlanmış titreşim

$s_{e.eden}$: Eşlik eden titreşim

τ_{zor} : Zorlanmış titreşim periyodu

η : Dinamik viskozite

Δt : Zaman adımı

$\overline{r}_k$: Yer değiştirme vektörü

h_c : C noktasının dikeydeki yer değiştirme miktarı

$d\varphi$: Açısal yer değiştirme

P_e : Dış kuvveetlerin oluşturduğu güçler

P_i : İç kuvvtlerin oluşturduğu işler

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Günlük hayatta kullanılan makine ve mekanizmalar hayatımızda büyük bir yer kaplamaktadır. Makine ve mekanizmaların kullanımı hayatımızı kolaylaştırdığı gibi daha verimli çalışmamızı sağlamaktadır. Bu nedenle verimli bir şekilde çalışmak artık bir tercih değil bir zorunluluktur [1-3].

Modern makine ve mekanizmaların tasarlanmasında mekanik hareketin incelenmesi önemlidir. Mühendislik problemlerinde mekanik hareketin incelenebilmesi için sistemin davranışını belirleyen hareket denklemlerinin oluşturulması gereklidir. Hareket denklemleri oluşturulurken de sisteme etki eden kuvvet, sönüm ve direngenlik parametrelerinin dikkate alınması gerekmektedir [4].

Titreşim yapan sistemlerde sönüm bir damper elemanı ile sağlanabileceği gibi, sistemin içinde bulunduğu ortamın direnç mukavemeti ile de sağlanabilir. Bu sebeple sistemin içinde bulunduğu ortam parametrelerinin de hesaba katılması doğru ve gerçekçi sonuçlar elde edilmesi açısından önemlidir.

8 bölümden oluşan bu tez çalışmasında bir serbestlik derecesine sahip, mukavemetli ortamda çalışan mekanizma, sisteme etkiyen kuvvetler ve çalıştığı ortam göz önüne alınarak incelenmiştir. Yapılan bu çalışmanın giriş bölümünde yapılan çalışmanın içeriği hakkında verilmiştir. İkinci bölümde literatür taraması yapılmış ve yapılan çalışmalar yorumlanmıştır. Üçüncü bölümde ise kuvvetler sistemi ve bunların sınıflandırılması hakkında bilgiler verilmiştir. Dördüncü bölümde mekanik sistemin hareketinin incelenmesi, hareket denklemlerinin oluşturulması ve D'Alembert prensibinden bahsedilmiştir.

Beşinci bölümde maddesel noktanın serbest ve zorlanmış titreşimi hakkında teorik bilgi verilmiştir. Altıncı bölümde sistemin hareket denkleminin elde edilmesinde kullanılan yöntemler ele alınmıştır. Sistemin momentumunun değişmesi teoremi, sistemin kinetik enerjisinin değişmesi teoremi, virtüel iş prensibi, Lagrange metodu hakkında bilgi verilmiştir. Altıncı bölümde ise mukavemetli ortamda çalışan tek serbestlik dereceli bir mekanizma ele alınarak, ilk olarak sistemin kinetik enerjisinin değişimi teoremi kullanılarak hareket denklemi edilmiştir. Elde edilen hareket denklemleri sönümlü zorlanmış titreşim durumu için çözülmüştür. Daha sonra mekanizmanın hareket denkleminin doğrulanması amacıyla Lagrange metodu ve virtüel iş prensibi kullanılarak hareket denklemleri tekrar elde edilmiştir. Elde dilen hareket denklemi kullanılarak ortamın direnç mukavemeti ihmal olunan durum için sönümsüz serbest ve zorlanmış titreşim analizi yapılmıştır. Daha ortamın direnç mukavemeti ihmal olmayan durum için sönümlü serbest ve zorlanmış titreşim analizi yapılmıştır. Son olarak da sönüm zorlanmış titreşim durumunun hareket denklemi MATLAB/Simulink yazılımında çözdürülerek sonuçlar kıyaslanmıştır. Yedinci bölümde ise elde edilen analiz sonuçları yorumlanmış ve çalışmanın önemi vurgulanmıştır.

BÖLÜM 2

LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Mekanik sistemlerin ya da mekanizmaların dinamik hareketinin incelenmesinde ve hareket denklerinin oluşturulmasında Lagrange Metodu, Virtüel İş Prensibi, Newton'un İkinci Kanunu ve D'Alembert Prensibi gibi metotlar kullanılmaktadır. Lagrange metodu enerjinin korunumu kanununu temel alan ve literatürde kabul gören yöntemlerden birisidir. Lagrange metodunda, kinetik ve potansiyel enerji ifadeleri göz önünde bulundurularak sönüm ve dış kuvvetlerin sistemin genel koordinatları üzerinde gerçekleştirmiş oldukları sanal işlerin genel kuvvetleri meydana getirmesi ve buradan yola çıkarak hareket denklemlerinin elde edilmesi sağlanmaktadır. Aktaş, yaptığı çalışmada çamaşır makinesinin 8 serbestlik dereceli modelin hareket denklemlerini oluştururken Lagrange metodundan yararlanmıştır. Bu yöntemde, potansiyel ve kinetik ifadeler dikkate alınarak, dış kuvvetler ve sönümleme kuvvetlerinin sistemin genel koordinatları üstünde meydana getirdiği virtüel işlerin genel kuvvetleri oluşturması ve bu yöntemle hareket denklemlerinin bulunmasını sağlamıştır [5]. Aktaş, yaptığı diğer çalışmada ise ankastre kirişin direngenlik ve kütle denklemlerini elde etmek için Lagrange denklemlerinden yararlanmıştır. Çalışmada iki piezoelektrik sensör arasına sandviç edilmiş ankastre bir kirişin hareket denklemleri çıkarılmış ve piezoelektrik elemanların sistemin dinamik davranışına etkisi incelenmiştir [6]. Adar vd., yaptıkları çalışmada 5 serbestlik dereceli bir robot kolunun dinamik olarak modellemesini ele almışlardır. Modellemesi yapılan robot kolu 3 uzuvlu her biri dönel 5 eklemli toplamda 5 serbestlik derecesine sahip bir koldur. Çalışmada, robot kolunun hareket denklemlerinin elde edilmesinde Lagrange-Euler denklemlerinden faydalanılmış ve PID kontrolcü kullanılarak robot kolunun verilen yörüngeyi başarılı bir şekilde takip etmesi sağlanmıştır [7]. Eroğlu vd., Euler-Bernoulli kirişi olarak modellenen bir köprü üzerinden geçirilen üç serbestlik derecesine sahip çeyrek araç modelinin aktif titreşim kontrolünü çalışmışlardır. Çalışmada, köprü ve aracın hareket denklemlerinin oluşturulmasında Lagrange metodu kullanılmıştır. Araca iki farklı yol

girişi verilmiş ve PID ve Kayan kipli kontrol yöntemi kullanılarak titreşimin minimum seviye indirilmesi amaçlanmıştır [8]. Araç sürüş konforunun ve güvenliğinin sağlanması araç dinamiği alanında yapılan araştırmaların başında gelmektedir, Çakan vd. yaptıkları çalışmada yoldan kaynaklanan titreşimlerin aktif kontrolünün lineer aktüatör kullanımını incelemişlerdir. 2 serbestlik dereceli çeyrek araç süspanisyon sistemine ait Lagrange hareket denklemlerini Adams ve MATLAB/Simulink yazılımında simüle etmişlerdir[9]. Lundberg, yapmış olduğu çalışmada ağır ticari kamyonlarda sürüş konforunu, farklı araç bileşenlerinin yol girdisine tepkisini nasıl etkilediğini araştırmak için ayrıntılı bir model oluşturulması gerektiğinin üzerinde durmuştur. Bu sebeple, çeyrek kamyon modeli, 2D yarım araç modeli ve 3D tam araç modeli olmak üzere 3 farklı model oluşturmuştur. Modelin hareket denklemleri Lagrange denklemleri kullanılarak oluşturulmuş ve modellerin dinamik cevabı Matlab yazılımı kullanılarak elde edilmiştir [10]. Durmuş vd. tek giriş-çıkış ve çok giriş-çıkışlı, Genelleştirilmiş Öngörülü Kontrol algoritması ve Newton-Raphson uyarlamalı Genelleştirilmiş Öngörülü Kontrol algoritmalı yapay sinir ağını inceleyerek, altı ekleme sahip robot koluna, eklem esaslı olmak üzere yörünge kontrolü için uygulamıştır. Dinamik modellemeye sürtünmenin etkilerini, taşınan yük ve bu yükün taşıma esnasında düştüğü anda oluşturacağı etkileride ekleyerek Lagrange-Euler yöntemini kullanmışlardır. Elde edilen dinamik model, 4. mertebeden Runge-Kutta bütünleştirme yöntemi kullanılarak robot kolunun simülatörü oluşturulmuştur. Robot kolu eklemlerinin yörünge takibi kübik ve sinüzoidal yörünge esaslarını baz alarak belirlenmiştir. [11]. Yamakita ve Satoh yapay sinir ağları kullanan robot uzuv yönlendiricilerinin kontrol algoritmaları üzerinde yaptıkları çalışmada, yapay sinir ağlarının sistemin serbestlik derecelerine bağlı olmayabileceğini belirtmişlerdir. Lagrange denklemleri vasıtasıyla serbestlik derecesinden bağımsız bir algoritma önererek simülasyon ve deney sonuçlarını bazı algoritmalarla karşılaştırmışlardır [12]. Stroe vd. 2011 yılında yapmış oldukları çalışmalarında, sanal iş prensibinin dış kuvvetlerin etkisi altındaki bir sistemin hareketini, iç kuvvetlerini ve tepki kuvvetlerini incelemek için kullanılabileceğini ortaya koymuşlardır. Lagrange denklemlerini de kullanarak robot kolunun iç mafsal kuvvetlerini hesaplamışlardır. Böylelikle iç kuvvetleri hesaplamak için Lagrange yöntemine dayanan yeni bir çözüm yolunu ortaya koymuşturlar. Sistemin hareketini sıfır olduğu kabul edilmiştir [13]. Cheng ise yaptığı çalışmada güç ağını izleyen akıllı titreşim sensörleri için Lagrange

denklemlerini kullanmıştır. Çalışmadaki asıl amaç kiriş yapısının titreşimini akıllı sensörler vasıtasıyla Lagrange denklemlerini kullanarak daha etkin bir şekilde kontrol edebilmek ve kirişin güvenilirliğini incelemektir. Kiriş yapısında oluşan titreşimlerinin sismik ivmelenmeler ile kinematik formül elde edilmiştir. Lagrange parametre optimizasyonu ile kiriş yapısının titreşim tepkisini en aza indiren parametreler elde edilmiştir [14]. Nagarkar vd. yapmış oldukları çalışmada, nonlineer çeyrek araç süspansiyon sisteminin modellemesini ve optimizasyonunu ele almıştır. Oluşturdukları matematiksel modele araç koltuğunu ve araç sürücüsünü de dahil etmişlerdir. Simülasyon çalışmaları MATLAB/Simulink ortamında yapılmıştır. Yol girişi olarak C sınıf yol girdisi verilmiş ve aracın 80 km/h ile hareket ettiği kabul edilmiştir. Çeyrek araç modelinin hareket denklemleri D'Alembert prensibi kullanılarak elde edilmiştir. Titreşim sönümlemesi için süspansiyon sisteminin aktif titreşim kontrolü yapılmıştır. Aktif titreşim kontrolünde LQR ve PID kontrol algoritmaları kullanılmış ve sonuç olarak PID kontrol algoritmasının sürüş konforu açısından daha iyi sonuçlar verdiği tespit edilmiştir [15]. Al Qahtani vd. robotikte manipülatörlerin kontrol edilebilmesinin önemli bir sorun olduğunu ve bu sorunu çözmek için doğru bir dinamik robot manipülatör modeli ele alınması gerektiğini belirtmişlerdir. Çalışmada, Euler-Lagrange ilkesine dayanarak her bir uzvun Jacobian gövdesini ve genelleştirilmiş atalet matrisini kullanan mevcut bir 4 serbestlik dereceli robot kolunun dinamik modeli sunulmuştur. Robot kolunun pozisyon kontrolünde PID algoritması kullanılmış ve PID parametrelerinin belirlenmesinde de diferansiyel evrim algoritması kullanılmıştır. Sonuç olarak diferansiyel evrim algoritması ve PID kontrolcünün robotun kontrol kabiliyetini artırdığı belirlenmiştir. Ayrıca uzuv kütlerinin artırılmasının PID kontrolcünün performansını etkilemediği sadece gerekli mafsal torklarının arttığı tespit edilmiştir [16]. Yüksel vd. helikopterlerin rotor kanatçıklarının yapısında da bulunan ve dönme hareketi yapan farklı kuvvetlere maruz kalan kirişin titreşimini incelemişlerdir. Buna ek olarak Euler-Bernoulli kirişi varsayımı göz önüne alarak eksenel kısaltma ile bağlantılı olarak döner atalet, uç kütle ve eksenel kuvvetin oluşturduğu etkilerin denklemlerini Lagrange yaklaşımını kullanılarak türetmişlerdir. Analitik çözüm bulmadaki zorluklardan dolayı, yaklaşık çözümler elde etmek için varsayılan modlar yöntemi kullanmışlardır. Diferansiyel denklemin sayısal çözümlerini farklı uyarım durumları için hazırlamışlardır. Sonuç olarak doğrusal ve esnek bir kirişte oluşan titreşimlerin farklı uyarımlardaki

durumlarını araştırılmıştır. Varsayılan modlar yöntemi kullanılarak elde ettikleri yaklaşık çözüm ve sonuçlara karşılık gelen değerleri grafiklerle göstermişlerdir [17]. LIN vd. D'Alambert ve sanal işler yöntemini kullanarak dönen bir Timoşenko kirişinin doğrusal denklemlerini elde etmişlerdir. Uzama ve eğilme deformasyonu arasında oluşan tüm atalet kuvvetlerini tespit edebilmek için doğrusal olmayan kiriş teorisini kullanmışlardır. Dönen kirişin doğal frekansı üzerinde Coriolis etkisi dikkate alınmıştır. Timoşenko'nun kirişinin doğal frekansını ölçmek için diferansiyel güç serisi denklemleri kullanmışlardır. İncelenen yöntemin doğruluğunu kanıtlamak için, farklı açısal hız, yarıçap ve kalınlık miktaları ele alınmıştır. Sonuç olarak, dönme hareketi ve titreşim hareketi yapan bir Timoşenko kirişi, doğrusal olmayan kirişlerin doğrusallaştırılması yoluyla bu kirişlere ait denklemler türetilmiştir. Ayrıca görülmüştür ki Coriolis kuvvetinin, dönme hareketi yapan Timoşenko kirişi üzerindeki etkileri, kiriş lineer elastik ve sabit durumdayken yok sayılabilecek derecede küçüktür [18]. Sheng vd. Hareketli yükler altındaki yapıların doğrusal olmayan dinamik tepkilerini belirlemek için, yükü doğrusal süspansiyonlar üzerinde, her iki ucundan sabitlenmiş Euler-Bernolli modeli kullanılan bir kirişi incelemişlerdir. Kiriş için Kelvin-Voigt malzeme modeli kullanılmıştır. Dinamik hareketlerin denklemleri Von Kármán doğrusal olmayan teorisi ve D'Alambert prensibi kullanılarak türetilmiştir. Galerkin yöntemine dayanaraktan sistemin kısmi diferansiyel denklemleri Newmark ve Newton-Raphson iterasyon yöntemlerini kullanan doğrusal olmayan denklemlere dönüştürülerek çözülür. Araştırmanın sonucunun doğrulanması ve güvenilir olması için karşılaştırmalar hareketli kütle ve osilatör kullanılarak gerçekletirilmiştir. Elde ettikleri sayısal sonuçlara göre doğrusal olmayan analizlerin doğrusal analizlere göre daha yüksek olduğunu, doğrusal olmayan dinamik tepkilerin araç kütlesi, kiriş ve yüzey pürüzlülüğünün arttıkça buna paralel olarak arttığını ayrıca genlik ve sönümleme arttıkça darbe faktörlerinin hızla azaldığını doğrulamaktadır. Fakat açıklık daha da büyüdükçe darbe faktörü daha yavaş artmaktadır ve çok büyük sönümleme değerleri içinse hemen hemen aynı olmaktadır [19]. Hadwan vd. yayınladıkları makalede, yolcu ve sürücülere daha iyi bir sürüş deneyimi kazandırmak için, modelleme ve simülasyon arasında bir bağlantı kurarak aktif ve pasif sönümleme sistemlerinin etkisini ve araç stabilitesini arttırmayı hedeflemişlerdir. Yapılan çalışmada aracın kütlesinin süspansiyon kütlesine oranının, araç kasislerden geçerken yolcular üzerinde oluşturacağı dikey yönlü ivmelenmenin oranına incelemesini ele

almaktadır. Elde edilen bulgulara göre yaygın olarak kullanılan araç süspansiyon ve yaylarının normal kullanım şartları altında yeterli sönümlemeyi sağladığı görülmüştür. Fakat yüksek performans istenen durumlarda aktif süspansiyon sistemlerinin kullanılmasının da büyük fayda sağladığı anlaşılmıştır [20]. Śniady vd. Euler-Bernoulli'nin 2 farklı titreşim modelini kullanarak hareket etmekte olan ve kuvvetler altındaki bir kirişin iki farklı yerel olmayan gradyan elastiklik teorisi versiyonlarının yani gerinimin bir fonksiyon olarak kabul edildiği Eringen modeli gerilme gradyanının ve yerel olmayan modelin stres, gerinim gradyanının bir fonksiyonu üzerinde çalışmışlardır. Sonlu kirişin dinamik tepkisinin hareketi değerlendirilmiştir. Bu kuvvet, kiriş boyunca sabit bir hızla hareket etmektedir. Çözümleri sonsuz bir şekilde kapalı formda sunmuşlardır. Dinamik yükler altında çalışan Euler-Bernoulli kirişi sonlu elamanın, dinamik tepkisi altında iki farklı eğime dayalı olarak sabit bir hızla yerel olmayan esneklik modelleri basitçe düşünülmüştür. Her iki Eringen modelinde de gerilmelerin, gradyan gerilimleri kiriş için teorik çözümleri ve yer değiştirmeleri, eğilme momentleri sinüs eğrisi şeklinde elde edilmiştir. Eringen modeli için elde edilen özel integral kapalı bir biçimdedir. Gradyan gerilme modelinde serilerin yakınsaklığı Eringen modeline göre daha zayıftır. Bunun sebebi Eringen'in doğal frekanslarının gradyanınkinden daha düşük olmasıdır. Bu kirişin gerilimindeki sertlik değerinin gerinimdeki değerinden düşük olması anlamına gelmektedir. Ayrıca gerilimdeki kritik hız gradyan gerinim modelinden daha düşüktür. Stresin, gradyan modeli söz konusu olduğunda eğilme momentini hesaplamak biraz daha zordur. Eringen modelinde kiriş yer değiştirmeleri, titreşimler ve eğilme momentleri dördüncü derece serilerden oluşan toplamının diferansiyel denkleminin belirsizlikten kaçınma sınır koşulları altında ve kapalı çözümlerle dikkate alınması gerektiği anlaşılmıştır. Maksimum kuvvetin oluştuğu nokta, kesme kuvvetinin oluştuğu yerdir. Sinüs fourier serisi formu gerilmede kısmi diferansiyel denklemler türetilerek gradyan modelinde çözümler elde edilmiştir [21].

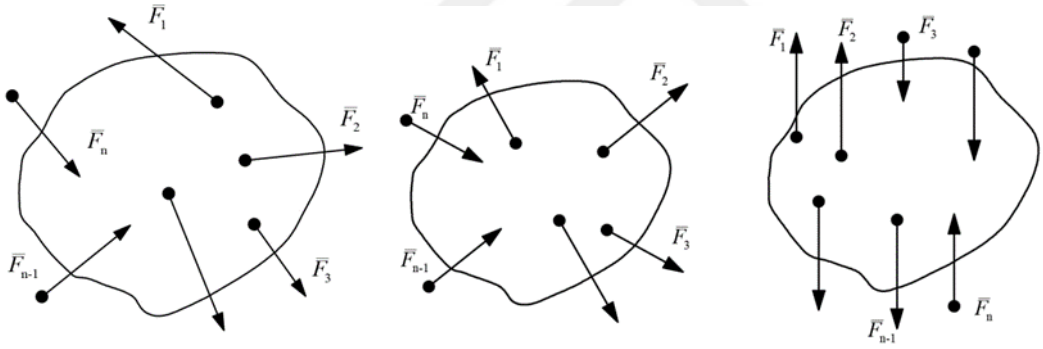
BÖLÜM 3

KUVVETLER SİSTEMİNİN SINIFLANDIRILMASI

3.1. KUVVETLER SİSTEMİNİN SINIFLANDIRILMASI

Kuvvetler sistemi iki başlık altında sınıflandırılabilir, cisme etkiyen kuvvetler sisteminin aşağıdaki türleri vardır ve şu şekilde sınıflandırılır;

Aynı cisme etki eden çok sayıda kuvvetin toplamına kuvvetler sistemi denir



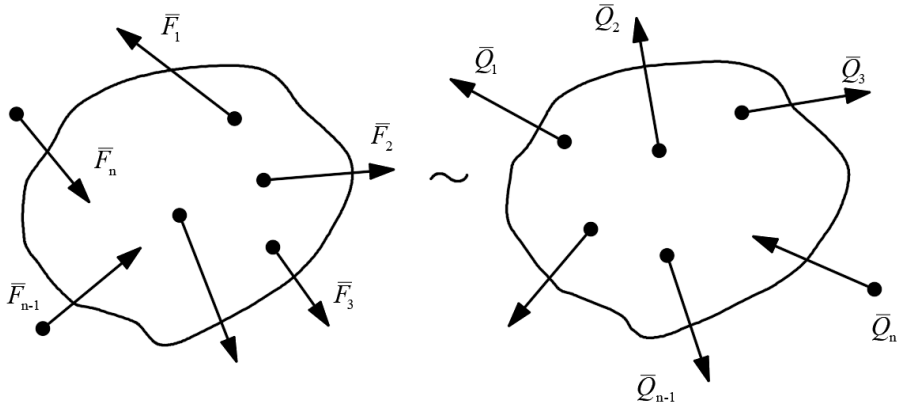
Şekil 3.1. Kuvvetler sisteminin sembolik gösterimi [22].

Serbest genel kuvvetler sistemi bir noktaya etki eden veya bir noktada kesişen kuvvetler sistemi ve paralel kuvvetler sistemi. Bu kuvvetler sistemi düzlemde ve ya uzayda da bulunabilmektedir.

3.1.1. Eşdeğer Kuvvetler Sistemi

Cisimlere uygulanan farklı kuvvetler sistemi denge durumunu koruyorsa böyle kuvvetler sistemine eşdeğer kuvvetler sistemi denir veya serbest cisme etki eden herhangi bir kuvvet

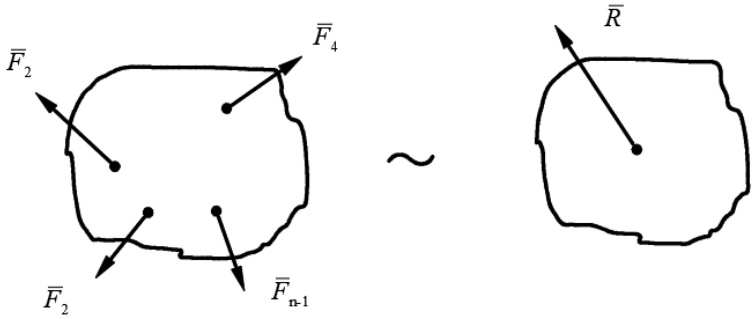
sistemini başka bir kuvvet sistemiyle değiştirdiğimizde cismin durumunda değişiklik olmazsa böyle kuvvet sistemlerine eşdeğer kuvvetler sistemi denir.



Şekil 3.2. Eşdeğer kuvvetler sisteminin sembolik gösterimi [22].

3.1.2. Bileşke Kuvveti

Bir cisme etki eden birden fazla kuvvete eşdeğer olan tek bir kuvvet varsa o kuvvete bileşke kuvvet denir.



Şekil 3.3. Bileşke kuvvetin gösterimi [22].

Kuvvetler herhangi bir değişkene bağlı olarak aşağıdaki kriterlerle ifade edilebilir.

$\overline{F}=\overline{sabit}$; modülce ve yönce sabit kuvvetler örneğin cisimlerin ağırlık kuvvetleri $\overline{G}=\overline{mg}$

F= sabit; sadece modülce sabit ve yönünü değiştirmeyen kuvvetler; örneğin yer çekimi kuvveti

$\overline{F} = \overline{F}$(t);Zamana bağlı olan kuvvetler örneğin harekete geçirici(tahrik) kuvvet

$F = F0sin\omega t$

$\overline{F} = \overline{F}$(s);yer değişimine bağlı olan kuvvetler örneğin; yayın elastiklik kuvveti

$F = \mp c\ \lambda,$

(λ=yayın deformasyonu, c=yayın sertlik katsayısı)

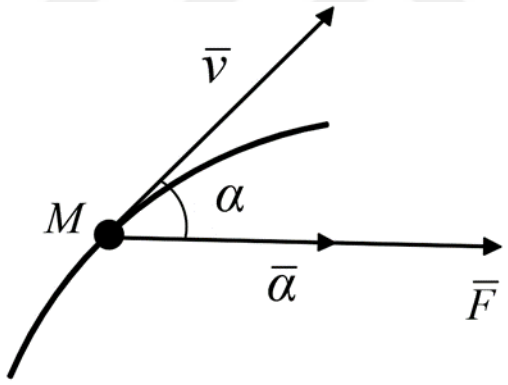
F=F(v);hıza bağlı kuvvet, örneğin ortamın mukavemet kuvveti , ($\overline{R} = -\overline{\mu v}$).

BÖLÜM 4

MEKANİK SİSTEMİN HAREKETİNİN İNCELENMESİ

4.1. MADDESEL NOKTANIN HAREKET DENKLEMLERİ

Maddesel noktanın hareketini anlamak için ilk olarak hareket denklemlerini saptamak gereklidir. Farz edelim ki, M kütleli maddesel nokta, bir kuvvet tesiri altında belirli bir eğri doğrultusunda hareket etmektedir. Newton'un 2. Yasasına göre bu durum şu şekilde ifade edilecektir:



Şekil 4.1. M kütlesine sahip maddesel noktanın $\overline{F}$ kuvveti etkisi altındaki hareketi.

$$\overline{m\,a} = \overline{F} \tag{4.1}$$

İvme vektörel olarak aşağıdaki gibi yazılır:

$$a = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{4.2}$$

Bu sayede, hareketin vektörel diferansiyel denklemi yazılır;

$$ma = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \overline{F} \tag{4.3}$$

Bu vektörel diferansiyel denklemin, daha önceden saptanmış $x, y\ ve\ z$ koordinat eksenlerine izdüşümü aşağıdaki ifadedeki gibi olacaktır:

$$ma_x = F_x, \quad ma_y = F_y, \quad ma_z = F_z \tag{4.4}$$

İvmenin $x, y\ ve\ z$ koordinatlarına bağıl olarak izdüşümlerini dikkate alınırsa;

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2},\ a_y = \frac{d^2y}{dt^2},\ a_z = \frac{d^2z}{dt^2} \tag{4.5}$$

Ve sonuç olarak, bu hareketin iz düşümü ifadesi şöyle bulunmuştur:

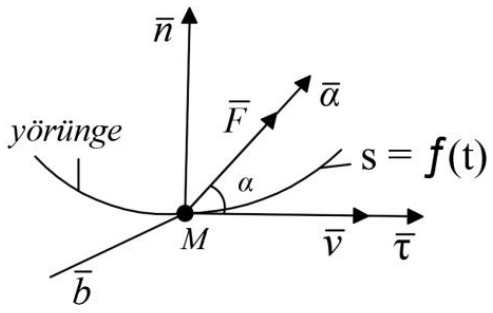
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x; \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y\ ; \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z \tag{4.6}$$

Hareketin yörüngesi saptandığı için, doğal koordinat sistemi ekseni üzerindeki iz düşümlerinden yararlanılır.

$$ma_t = F_t; \quad ma_n = F_n\ ; ma_b = F_b \tag{4.7}$$

Kinematikte noktanın hareketi doğal biçimde verildiğinde, bu noktanın ivme bileşenleri (normal, teğetsel veya binormal) şöyle olacaktır;

$$a_t = \frac{dv}{dt}; a_n = \frac{v^2}{\rho}\ ; a_b = 0 \tag{4.8}$$



Şekil 4.2. Hareket yörüngesi verilmiş maddesel noktanın koordinant sistemleri üzerine iz düşümleri.

Bu ifadeler denklemde yerine koyularak aşağıdaki ifade elde edilmiştir.

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = F_t; \frac{v^2}{\rho} = F_n; 0 = F_b \tag{4.9}$$

Fakat bazı durumlarda noktanın dairesel koordinat sistemindeki hareketinin bulunması gerekmektedir. Böyle durumlarda, aşağıdaki diferansiyel denklemler kullanılabilir.

$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r$ (radyal); (4.10)

$m(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi}) = F_\varphi$ (transversal (çapraz)); (4.11)

$m\ddot{z} = F_z$ (eksenel) (4.12)

4.2. MADDESEL NOKTA İÇİN D'ALEMBERT PRENSİBİ

M kütleli serbest olmayan maddesel nokta, $\overline{F}$ kuvvetinin tesiri altında belirli bir eğrisel düzlemde hareket ediyor olsun, statiğin serbestleştirme prensibine dayanılarak, bu serbest olmayan maddesel nokta, sanki serbest maddesel noktaymış gibi kabul edilebilir. Böylelikle bağlı olduğu mesnetinden ayırılır ve bu mesnetin noktaya uyguladığı kuvvet ise, $\overline{N}$reaksiyon kuvvetiyle değiştirilir.

$\overline{F}+\overline{N}+\overline{F}_{at}$ (4.13)

$$\sum \vec{F} + (-m\vec{a}_G) = 0 \tag{4.14}$$

olur.

Sonuç olarak:

D’Alambert teoremi vasıtasıyla dinamik problemlerinin çözümü, statik problemi çözümü haline getirilir. Yani D’Alembert prensibi cisme uygulanan dış kuvvetlerin, atalet kuvvetleri ile dengede olduğunu belirtir [23-25].

Eğer maddesel nokta, düz değil de eğri bir düzlem boyunca hareket ediyorsa bu durumda ivmesi normal ve teğetinin ivmelerinden oluşur, eğri düzlemdeki hareketinden dolayı bu maddesel noktaya etkiyen atalet kuvveti de normal ve teğet ivmelerden meydana geldiği için;

$$\overline{F}_t^{at} = -m\overline{a}_t; \quad \overline{F}_n^{at} = -m\overline{a}_n; \tag{4.15}$$

$$\overline{F}_t^{at} = ma_t = m\frac{dv}{dt} \; ; F_n^{at} = ma_n = m\frac{v^2}{\rho} \tag{4.16}$$

Maddesel noktanın hareket ettiği düzlemi yarıçapı $\rho = R$ olan çember olarak ele alındığında, bu kuvvetler aşağıdaki gibi bulunacaktır:

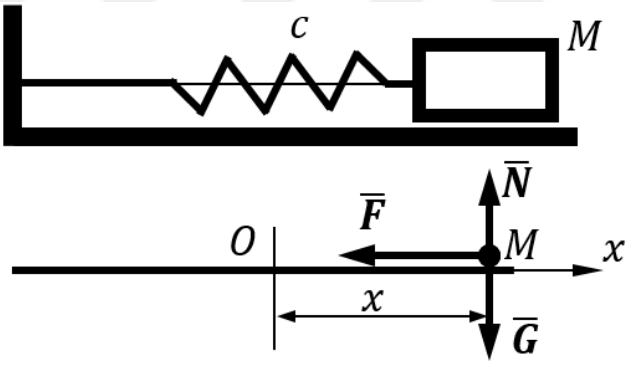
$$F_{at}^t = m\varepsilon R \quad F_{at}^n = m\omega^2 R \tag{4.17}$$

BÖLÜM 5

MADDESEL NOKTANIN TİTREŞİM HAREKETLERİ

5.1. MADDESEL NOKTANIN HARMONİK TİTREŞİM HAREKETİ

M kütleli maddesel noktanın, $\overline{F}$ kuvveti tesiri altında sabit O noktasına doğru, doğrusal hareket ettiğini düşünelim. Maddesel noktaya uygulanan $\overline{F}$ kuvvetinin büyüklüğü sabit O merkezine olan mesafesi ile doğru orantılı olduğu durum için bu maddesel noktanın hareket denklemi şu şekilde yazılacaktır:



Şekil 5.1. M kütleli bir cismin $\overline{F}$ kuvveti altında sabit O noktasına hareketi.

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{5.1}$$

Burada k (N/cm) elastiklik katsayısını ifade etmektedir.

k elastiklik katsayısı m'ye bölünüp $k/m = {w_n}^2$ yazılırsa denklem (5.1) aşağıdaki gibi yeniden düzenlenir.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + {w_n}^2 x = 0 \tag{5.2}$$

Burada w_n doğal frekansı ifade etmektedir. Bu denklem maddesel noktaya geri döndürücü yani geri çağırıcı kuvvetin tesiri altındaki hareketinin diferansiyel denklemidir.

Bu diferansiyel denklemin genel çözümü şöyle olacaktır;

$$x = A_1 \cos w_n t + A_2 \sin w_n t \tag{5.3}$$

A_1 ve A_2 sistemin başlangıç şartlarından yola çıkılarak bulunabilir. $t = 0$ anında $x(t)$ uzaklığının ve $\dot{x}(t) = \left(\frac{dx}{dt}\right)(t)$ hızının değeri x_0 ve $\dot{x}_0$ olarak tanımlanırsa;

$$\begin{aligned} x(t=0) &= A_1 = x_0 \\ \dot{x}(t=0) &= w_n A_2 = \dot{x}_0 \end{aligned} \tag{5.4}$$

olarak bulunur. Dolayısı ile $A_1 = x_0$ ve $A_2 = \dot{x}_0 / w_n$ olur. Denklem (5.3) başlangıç şartlarına göre yeniden düzenlenirse, denklem (5.2)'nin çözümü aşağıdaki gibi olur.

$$x = x_0 \cos w_n t + \frac{\dot{x}_0}{w_n} \sin w_n t \tag{5.5}$$

Denklem (5.3) aşağıdaki gösterimle yeniden düzenlenebilir.

$$A_1 = A \sin \phi \tag{5.6}$$

$$A_2 = A \cos \phi \tag{5.7}$$

Burada a ve ϕ yeni sabitlerdir.

$$A = (A_1^2 + A_2^2)^{\frac{1}{2}} = \left[{x_0}^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{w_n}\right)^2\right]^{1/2} = \left[{x_0}^2 + \left(\frac{v_0}{w_n}\right)^2\right]^{1/2} \tag{5.8}$$

$$\phi = tan^{-1}\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = tan^{-1}\left(\frac{x_0 w_n}{\dot{x}_0}\right) = tan^{-1}\left(\frac{x_0 w_n}{\dot{v}_0}\right) \tag{5.9}$$

Olarak elde edilir. Bu durumda bağıntı şu şekilde yazılabilir;

$$x = Asin(w_n t + \phi) \tag{5.10}$$

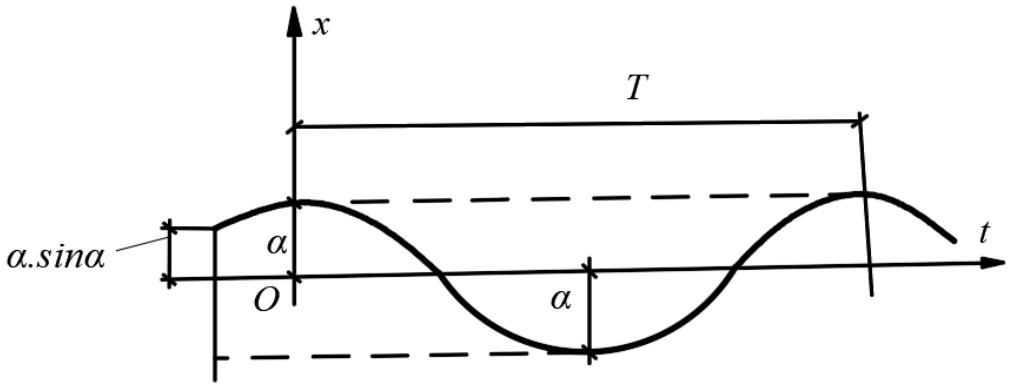
Yukarıda yazılan denklem, harmonik titreşim hareketinin denklemidir.

Buradan da anlaşıldığı üzere maddesel noktaya, sadece geri çağırıcı kuvvet etki ediyorsa bu durumda maddesel nokta harmonik olarak titreşim hareketi yapmaktadır. Denklemdeki, A ifadesi hareketin genliği, ϕ başlangıç faz açısını, w_n ise titreşimin doğal frekansıdır. Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının periyotları 2π olduğu için, titreşimin bir tam periyotuna, yani tam bir titreşim hareketinin gerçekleşmesi için gereken zaman T sembolü ile belirtilmiştir.

$$[w_n(t+T)+\phi] - (w_n t + \phi) = 2\pi \tag{5.11}$$

Buradaki denklemde, $w_n T = 2\pi$ olarak veya $T = \frac{2\pi}{w_n}$ olarak kabul edilmiştir. Bir saniyede oluşan titreşimlerin toplam sayısı titreşimin frekansı olarak tanımlanır ve f ile gösterilmektedir.

$f = \frac{1}{T}$ olduğundan ve yukarıdaki denklemde de anlaşıldığı üzere, w_n değeri f den sabit olarak 2π kadar farklıdır, bunun sonucu olarak , titreşim frekansını artık w_n ile belirtilmiştir.



Şekil 5.2. Harmonik titreşim hareketinin grafiği.

Eğer maddesel nokta iki ya da daha fazla yaya bağlı elastiki kuvvetin etkisi altında titreşim hareketi yapıyorsa, bu durumda yayların eşdeğer sertlik (direngenlik) katsayısından ($k_{eş}$) faydalanılır.

Yayların birbirlerine seri ya da paralel bağlanma şekillerine göre, eş değer direngenlik katsayısının hesaplanmasında üç durum söz konusudur.

a) Yaylar ardışık birleştirildiğinde yani birbirine seri olarak bağlandığında; yayın eşdeğer direngenlik katsayısı şöyle hesaplanacaktır:

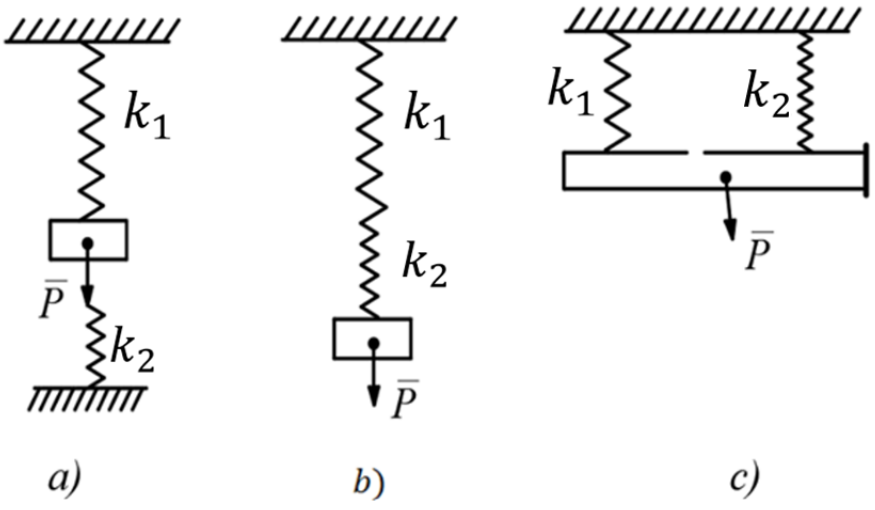
$$k_{eş} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \tag{5.12}$$

b) Kütlenin iki yayın tam ortasından bağlanması durumunda yaylar birbirine paralel bağlı olarak düşünülür ve eşdeğer direngenlik katsayısı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$k_{eş} = k_1 + k_2 \tag{5.13}$$

c) Yayların birbirine paralel olarak bağlanması durumunda eşdeğer direngenlik katsayısı denklem aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$k_{eş} = k_1 + k_2 \tag{5.14}$$



Şekil 5.3. Yayların bağlantı şekilleri.

5.2. MADDESEL NOKTANIN SÖNÜMLÜ TİTREŞİM HAREKETİ

Sönümlü titreşim de M kütleli maddesel noktaya geri çağırıcı $\overline{F}$ kuvvetine ilave olarak, ortamın $\overline{R}$ mukavemet kuvveti de etki etmektedir. Etkiyen mukavemet kuvveti denklem aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$R_x = -\mu v_x = \mu \frac{dx}{dt} \tag{5.15}$$

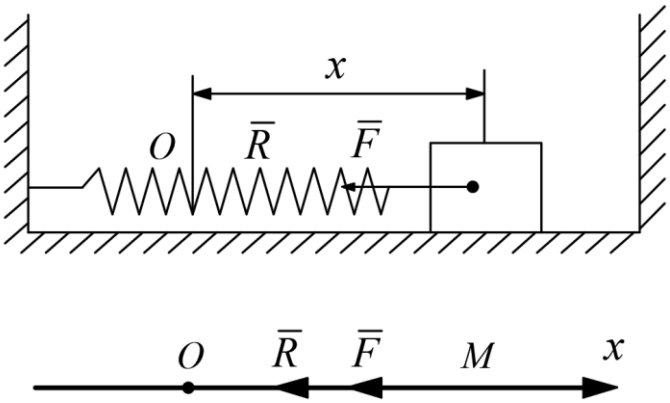
Burada μ, zemin sürtünmesinden kaynaklı sönüm katsayısıdır ve birimi Ns/m dir.

Dinamiğin II. kanununa göre hareket halindeki maddesel noktanın diferansiyel denklemi şöyle yazılır:

$$m\overline{a} = \overline{R} + \overline{F} + \overline{N} + \overline{P} \tag{5.16}$$

Bu vektörel eşitliğin O_x ekseni üzerine izdüşümünü yazıldığında:

$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x + R_x = -kx - \mu\frac{dx}{dt}$ olarak bulunur. (5.17)



Şekil 5.4. Maddesel noktanın Sönümlü titreşim hareketi.

Normal kuvvet $\overline{N} \perp O_x$, ağırlık kuvveti $\overline{P} \perp O_x$ olduğu için, bu eksene göre izdüşümleri sıfıra eşit olacaktır. İfadeyi m'ye bölüp, $\frac{k}{m} = {w_n}^2$, $\frac{\mu}{m} = 2n$ olarak denklemde yerine yazılırsa, aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + {w_n}^2 x = 0 \tag{5.18}$$

Bu diferansiyel denklemin çözümü $x = e^{zt}$ olarak kabul edilip konumun zamana göre birinci ($\dot{x} = ze^{zt}$) ve ikinci türevi ($\ddot{x} = z^2 e^{zt}$) denklem (5.15)'de yerine yazılırsa, karakteristik denklem aşağıdaki gibi bulunur.

$$z^2 + 2nz + {w_n}^2 = 0 \tag{5.19}$$

Buradan denklem (5.16)'nın kökleri, $z_{1,2} = -n \mp \sqrt{n^2 - {w_n}^2}$ olarak elde edilir. Diferansiyel denkleminin genel çözümü, denklemin karakteristik köklerine bağlıdır. Burada dikkat edilmesi gereken 3 durum vardır:

1. $n < w_n$ (küçük değerdeki mukavemetler için)
2. $n > w_n$ (büyük değerdeki mukavemetler için)
3. $n = w_n$ (ideal durum için)

$n < w_n$ olması durumunda denkleminin genel çözümü aşağıdaki gibi olacaktır.

$$x = Ae^{-nt} sin(w_d t + \phi) \tag{5.20}$$

Burada:

$$A = \frac{\sqrt{(v_0 + nx_0)^2 + (x_0 w_d)^2}}{w_d}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{x_0 w_d}{v_0 + nx_0}\right) \tag{5.21}$$

$$w_d = \sqrt{{w_n}^2 - n^2}$$

eşitlikleri ile hesaplanır ve eşitlikte verilen w_d sönümlü doğal frekansı ifade etmektedir. Sönümlü titreşimin periyodu denklem (5.22) ile aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$T_d = \frac{2\pi}{w_d} \tag{5.22}$$

Denklem (5.22)'den anlaşıldığı üzere sönümlü titreşim hareketinin tam periyodu, harmonik titreşim hareketinin tam periyodundan daha büyüktür, çünkü her zaman $w_d < w_n$ dir.

$n > w_n$ olması durumunda denkleminin genel çözümü aşağıdaki gibi olacaktır.

$$x = A_1 e^{(-n+\sqrt{n^2-{w_n}^2})t} + A_2 e^{(-n-\sqrt{n^2-{w_n}^2})t}$$

$$A_1 = \frac{x_0\left(n+\sqrt{n^2-{w_n}^2}\right)+v_0}{2\sqrt{n^2-{w_n}^2}}$$

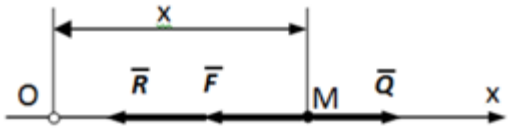
$$A_2 = \frac{-x_0\left(n-\sqrt{n^2-{w_n}^2}\right)-v_0}{2\sqrt{n^2-{w_n}^2}} \tag{5.23}$$

$n = w_n$ olması durumunda ise denkleminin genel çözümü aşağıdaki gibi olacaktır.

$$x = (x_0 + (v_0 + w_n x_0)t)e^{-w_n t} \tag{5.24}$$

5.3. ZORLANMIŞ TİTREŞİM HAREKETİ

Kütlesi m olan maddesel cisme, $\overline{F}$ geri çağırıcı kuvveti, ortamın $\overline{R}$ mukavemet kuvveti ve ayrıca bu cisme periyodik kanunla değişen $\overline{Q}$ kuvveti de uygulandığımı farz edelim. Bu kuvvetin Ox ekseni üzerine iz düşümü şu şekilde bulunur:



Şekil 5.5. Kuvvetin Ox ekseni üzerine iz düşümü.

$$Q_x = Q_0 \sin(pt) \tag{5.25}$$

Burada, Q_x zorlama kuvveti olarak isimlendirilebilir. Anlaşıldığı üzere bu kuvvet harmonik kanunla değişmektedir. Q_0 ise zorlama kuvvetinin en yüksek olduğu maksimum değeridir yani genliğidir. p ise zorlama kuvvetinin değişme frekansıdır. Zorlanmış kuvvet tesiri altında oluşan titreşimler de zorlanmış titreşimler olarak adlandırılır.

Maddesel noktanın hareket kanununu $x = f(t)$ ile bulalım. Bunu sağlamak için maddesel noktanın hareketinin diferansiyel denklemi şöyle yazılır:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_X + R_X + Q_x \tag{5.26}$$

Ya da

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu\frac{dx}{dt} + Q_0 \sin(pt) \tag{5.27}$$

Denklem (5.27)'de $\frac{k}{m} = {\omega_n}^2$, $\frac{\mu}{m} = 2n$, $\frac{Q_o}{m} = h$ olarak düzenlenirse;

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + {\omega_n}^2 x - h\sin(pt) = 0 \tag{5.28}$$

denklem (5.27), denklem (5.28)'deki gibi elde edilir.

Bu ifade maddesel noktaya geri çağırıcı kuvvetin, tepki kuvvetinin ve sinüs dalgası şeklinde olan zorlanma kuvvetinin etki etmesi durumunun diferansiyel denklemidir. Bu diferansiyel denklemin çözümü, genel ve özel çözüm olmak üzere iki çözümün toplamından oluşmaktadır. Dolayısıyla,

$x = x_1 + x_2$ olur. (5.29)

x_1 ile gösterilen çözüm, denklemin sağ tarafının sıfıra eşit olduğu homojen denklemin genel çözümü, x_2 ise denkleminin özel çözümüdür. Sönümlü titreşimlerde diferansiyel denklemin genel çözümü denklem (5.30)'daki gibi yazılabilir.

$$x_1 = Ae^{-nt}\sin(\omega_d t + \phi) \tag{5.30}$$

Denklemin özel çözümü ise denklem (5.31)'deki gibi yazılabilir.

$$x_2 = B\sin(pt - \beta) \tag{5.31}$$

Denklem (5.30) ve (5.31), denklem (5.29)'da yerine yazılırsa sönümlü zorlanmış titreşim yapan sistemin hareket denkleminin çözümü aşağıdaki gibi yazılır.

$$x = Ae^{-nt}\sin(\omega_d t + \phi) + Bsin(pt - \beta) \tag{5.32}$$

Denklemden de görüldüğü üzere bu titreşim, sönümlü titreşim ve harmonik titreşimlerin toplamından meydana gelmektedir. Ancak yukarıdaki denklemde eşitliğin sağ tarafındaki birinci terim zamanla sıfıra yaklaştığından pratikte göz ardı edilebilmektedir, yani belirli bir t zamanından sonra $e^{-nt} \rightarrow 0$ olmaktadır

Bu durumda denklem (5.29) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$x = B\sin(pt - \beta) \tag{5.33}$$

Bu denklem zorlanmış titreşim hareketinin denklemidir ve görüldüğü üzere zorlanmış titreşimin kendisi de harmonik olarak değişmektedir. Bu ifadede B ile gösterilen, zorlanmış titreşimin genliğidir. β ise harekete geçirici yani tahrik edici kuvvetle zorlanmış titreşimin faz farkıdır.

Bu durumda, zorlanmış titreşimin frekansı (p) zorlama kuvvetinin frekansına eşit olacaktır. B ve β sabitlerini bulmak için bu ifadenin iki kere türevini alınırsa;

$$\dot{x} = Bpcos(pt - \beta), \quad \ddot{x} = -Bp^2\sin(pt - \beta) \tag{5.34}$$

Bu bağıntıyı genel ifadede yerine yazdığımızda, denklem (5.28) aşağıdaki gibi yazılır.

$$-Bp^2 \sin(pt-\beta) + 2nBp\cos(pt-\beta) + {\omega_n}^2 Bsin(pt-\beta) = hsin(pt) \qquad (5.35)$$

Burada $(pt-\beta)=\varphi$ eşitliğini kullanılırsa;

$$B({\omega_n}^2 - p^2)sin\varphi + 2nBpcos(\varphi) = h(\sin(\varphi)\cos(\beta) + \cos(\varphi)\, sin\beta) \qquad (5.36)$$

olmaktadır.

Bu bağıntıda ise $cos\varphi$ ve $sin\varphi$'nin katsayılarının birbirine eşit olmasından dolayı, denklem tekrar yazıldığında:

$B({\omega_n}^2 - p^2) = hcos(\beta)$; $\quad 2Bnp = hsin(\beta)$ olur. (5.37)

Bu denklem sistemi birlikte çözüldüğünde B ve β denklem (5.38)'deki gibi elde edilir.

$$B = \frac{h}{\sqrt{({\omega_n}^2+p^2)+4n^2p^2}}, \quad tg\beta = \frac{2np}{{\omega_n}^2-p^2} \qquad (5.38)$$

İfadelerden de anlaşıldığı gibi, zorlanmış titreşimlerin genliği, başlangıç şartlarına bağlı olmayacaktır. Bu ifadenin her iki tarafı ${\omega_n}^2$' ye bölündüğünde genlik değeri denklem (5.39)'daki gibi elde edilir.

$$B = \frac{h/{\omega_n}^2}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+4\,\lambda^2 b^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+4\,\lambda^2 b^2}} \qquad (5.39)$$

Yukarıdaki denklemde gösterilen sembollerin eşit kabul edildiği değerler aşağıdaki gibidir;

$$\lambda_0 = \frac{h}{{\omega_n}^2} = \frac{Q_{0/m}}{k/m} = \frac{Q_o}{k}, \quad \lambda = \frac{p}{\omega_n}, \quad b = \frac{n}{\omega_n} \qquad (5.40)$$

Rezonans olayının meydana gelmesi için gerekli koşullar incelendiğinde, bunun için aşağıdaki grafikten anlaşıldığı üzere zorlanmış titreşimin genliği, λ=1 yani $p = \omega_n$ olduğu anda sonsuza gider. Burada λ frekans oranını ifade etmektedir. Zorlanmış titreşimde uygulanan dış kuvvetin frekansının sistemin doğal frekansı ile çakışması durumuna rezonans denmektedir. Rezonans durumunda dalgaların tepe ve çukur noktaları artık üst üste aynı anda oluşmaya başlar, yani titreşimin genliği en büyük değere ulaşır.

BÖLÜM 6

SİSTEMİN HAREKET DENKLEMİNİN ELDE EDİLMESİNDE TEZ KAPSAMINDA KULANILAN YÖNTEMLER VE DENKLEMLER

6.1. SİSTEMİN MOMENTUMUNUN DEĞİŞMESİ TEOREMİ

Sistemin momentumu teoremi, mekanik sistemi meydana getiren tüm noktalar için geçerlidir. İncelenen mekanik sistemin herhangi bir k noktası için momentum teoremi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{d}{dt}(m_k\bar{v}_k) = \bar{F}_k^i + \bar{F}_k^e \tag{6.1}$$

$m_k\bar{v}_k$, incelenen k noktasının momentumudur, yani hareket miktarıdır. $\bar{F}_k^i + \bar{F}_k^e$ ise sırasıyla maddesel noktaya uygulanan iç ve dış kuvvetlerin eşdeğer vektörleridir.

Yazılan ifade, sistemi meydana getiren bütün fiziki noktalar için taraf tarafa toplandığında aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} m_k\bar{v}_k = \sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k^i + \sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k^e \tag{6.2}$$

Burada iç kuvvetler birbirine karşılıklı olarak eşit olduğu için, bu kuvvetlerin toplamı sıfıra eşit olmaktadır.

$$\sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k^{\,i} = 0 \tag{6.3}$$

Bunun sonucunda denklem (6.2) aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{v}_k = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^e \tag{6.4}$$

Burada:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{v}_k \tag{6.5}$$

sistemin toplam momentumudur.

Sistem momentumu $Q = \sum_{k=1}^{n} m_k \bar{v}_k$ olarak yazıldığında sistemin toplam momentumu, bu sistemi oluşturan maddesel noktaların ayrı ayrı momentumlarının toplamına eşit olmaktadır. Sisteme etkiyen dış kuvvetlerin eşdeğer kuvvet vektörü $\overline{R}^e$ sembolü ile gösterilirse, sistemin momentum teoreminin matematiksel olarak ifadesi denklem (6.6)'daki olmaktadır.

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \overline{R}^e \tag{6.6}$$

Bu ifadenin koordinat sistemi eksenleri üzerindeki izdüşüm ifadeleri yazıldığında, aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\frac{dQ_x}{dt} = R_x^e \tag{6.7}$$

$$\frac{dQ_y}{dt} = R_y^e \tag{6.8}$$

$$\frac{dQ_z}{dt} = R_z^e \tag{6.9}$$

Bu ifadeler, sistemin momentumuyla alakalı teoremin iz düşümlerle ifadesidir. Hareket miktarı ifadesinde her iki tarafı dt ile çarpılıp daha sonra integrali alınırsa,

$$\mathrm{dQ} = \overline{R}^{\,e}\, dt \tag{6.10}$$

$$\int_{\overline{Q}_0}^{\overline{Q}} d\overline{Q} = \int_0^t \overline{R}^{\,e}\, dt = \int_0^t \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e\, dt = \sum_{k=1}^{n} \overline{S}_k \tag{6.11}$$

Denklem (6.6), denklem (6.12)'deki gibi elde edilir.

$$\int_0^t \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^{\,e}\, dt = \sum_{k=1}^{n} \overline{S}_k \tag{6.12}$$

Bu eşitlik kuvvet impulsu olarak isimlendirilmektedir. İmpuls ya da diğer adıyla itme, cismin çizgisel momentumunda oluşan değişim anlamına gelir. İmpuls, cisme etkiyen ortalama kuvvet ile, bu kuvvetin etki ettiği süre çarpılarak bulunur. İmpuls, kuvvet vektörünün integralinin alınmasıyla bulunur bu yüzden bir vektördür. İfadenin, xyz koordinat sistemi eksenleri üzerindeki iz düşümleri yazılırsa;

$$Q_{x-}Q_{0x} = \int_0^t F_{kx}^e\, dt \tag{6.13}$$

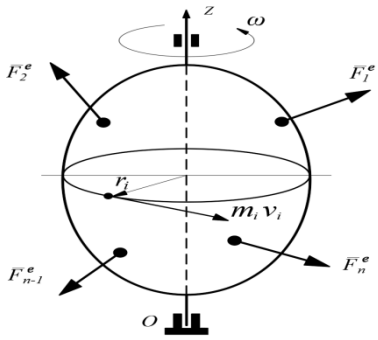
$$Q_{y-}Q_{0y} = \int_0^t F_{ky}^e\, dt \tag{6.14}$$

$$Q_z - Q_{0z} = \int_0^t F_{kz}^e\, dt \tag{6.15}$$

Bu eşitlikler, mekanik sistemin, koordinat eksenlerine göre momentum değişimiyle alakalı teoreminin analitik ve sonlu olarak ifadeleridir.

6.2. HAREKETSİZ EKSEN ETRAFINDA DÖNME HAREKETİNİN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ (SİSTEMİN AÇISAL MOMENTUMUMUN DEĞİŞMESİ TEOREMİ)

Farz edelim ki, incelenen rijit cisim $\overline{F}_1^e, \overline{F}_2^e, \ldots, \overline{F}_n^e$ dış kuvvetlerinin tesiri altında sabit (hareketsiz) z ekseni etrafında saat yönünün tersi yönde dönme hareketi yapmaktadır (Şekil 6.1). Bu rijit cismin, z eksenine göre momentumunun momenti (açısal momentumu), yani kinetik momenti denklem (6.16)'daki gibi hesaplanmaktadır.



Şekil 6.1. Hareketsiz eksen etrafında dönme hareketinin temsili gösterimi.

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} r_i\,(m_i\overline{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} m\,v_i r_i = \sum_{i=1}^{n} m\,\omega r_i^2 = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \omega I_Z \tag{6.16}$$

Yani açısal momentum $L_Z = \omega I_z$ olarak elde edilir. Burada I_z sembolü cismin z eksenindeki kütle atalet momentini, ω ise açısal hızını temsil etmektedir. Bu ifade sayesinde dönme hareketi yapan rijit cismin kinetik momenti hesaplanabilir.

$L_Z = \omega I_z$ ifadesinin zamana göre türevini alınırsa,

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} \tag{6.17}$$

Ya da:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^e \tag{6.18}$$

Burada M_z^e , sisteme dışarıdan etki etmekte olan kuvvetlerin z eksenine göre eşdeğer momentidir.

$$M_z^e = \sum_{k=1}^{n} m_z \left(\overline{F}_k^{\,e}\right) \tag{6.19}$$

Denklem (6.17)'de ki açısal hızın zamana göre türevi ifadesi açısal ivmeyi vermektedir ($\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$) ve buna göre eşdeğer moment denklemi (6.20)'deki gibi elde edilir.

$$I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z^e \tag{6.20}$$

Bu ifade hareketsiz eksen çevresinde dönmekte olan cisme ait diferansiyel denklemdir. Bu eşitliğin sağ kısmındaki ifadede, eksenin bağlı olduğu mesnetlerde oluşan reaksiyon kuvvetleri göz ardı edilmiştir. Bunun sebebi, bu kuvvetler, eksenleri kestiği için momentleri z eksenine göre sıfır olacaktır. Bu ifadenin iki defa integrali alınırsa $\varphi = f(t)$ denklemi elde edilmiş olur.

6.3. SİSTEMİN KİNETİK ENERJİSİNİN DEĞİŞMESİ TEOREMİ

n adet maddesel noktadan meydana gelen sistemin, herhangi bir k kadar maddesel nokta adedi için kinetik enerji teoremi şöyle yazılır,

$$d\left(\frac{m_k\ v_k^2}{2}\right) = dA_k^i + dA_k^e \tag{6.21}$$

Burada, dA_k^i ve dA_k^e ile gösterilenler sırayla sistemin incelenmekte olan k adet maddesel noktasına uygulanan ve iç ve dış eşdeğer kuvvetlerinin yaptıkları elementer işlerdir.

Bu ifade mekanik sistemin bütün noktaları için teker teker yazılır ve taraf tarafa toplanırsa;

$$d\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{m_k\ v_k^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^{N} dA_k^i\ +\ \sum_{k=1}^{N} dA_k^e \tag{6.22}$$

denklem (6.22) elde edilir. Burada $\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{m_k\ v_k^2}{2}\right) = T$ olarak yazılbilir. T ile göterilen sistemin kinetik enerjisidir. Yani sistemin kinetik enerjisi bu sistemi meydana getiren maddesel noktaların tek tek kinetik enerjilerinin toplamına eşittir.

$$dT = \sum_{k=1}^{N} dA_k^i + \sum_{k=1}^{N} dA_k^e \tag{6.23}$$

Denklem (6.23)'den görüldüğü üzere, sistemin kinetik enerjisinin diferansiyeli, sisteme etkimekte olan tüm iç ve dış kuvvetlerin yaptıkları işlerin toplamına eşit olmaktadır. Mekanik sistemin incelenen anda ki kinetik enerjisi T_0 , herhangi bir yer değiştirme anından sonraki kinetik enerjisini ise T olarak adlandırılıp, denklem (6.23)'deki ifadenin integralini alınırsa;

$$T - T_0 = \sum A_k^i + \sum A_k^e \tag{6.24}$$

mekanik sistemin matematiksel olarak sonlu kinetik enerjisi hakkındaki teoreminin ifadesi denklem (6.24)'deki gibi elde edilir.

Eğer mekanik sistem bir yer değiştirme hareketinde bulunursa, mekanik sistemin kinetik enerjisinin artış miktarı, bu mekanik sisteme etkimekte olan bütün iç ve dış kuvvetlerin yaptığı işlerin cebirsel olarak toplamına eşit olacaktır.

Eğer mekanik sistem rijit bir sistem ise bu durumda $\sum A_k^i$=0 olacaktır ve denklem (6.24) aşağıdaki şekli alacaktır.

$$T - T_0 = \sum A_k^e \tag{6.25}$$

6.4. MEKANİK SİSTEME ETKİYEN KUVVETLERİN YAPTIĞI İŞLER

6.4.1. Ağırlık Kuvvetinin Yaptığı İş

$$A = \sum G_k \, (z_{k0} - z_{k1}) \; = \; G \, (z_{c0} - z_{c1}) = \pm \, G h_c \tag{6.26}$$

Burada z_{k0} ve z_{k1}, k olarak gösterilen maddesel noktanın, başlangıçtaki ve en son durumdaki koordinatlarının gösterimidir. $G = \sum G_k$ ise tüm mekanik sistemin genel olarak kütlesidir. h_c ise mekanik sistemin kütle merkezi olan C noktasının dikeydeki yer değiştirmesini göstermektedir.

Sonuç olarak, mekanik sistemdeki maddesel noktaların ağırlık kuvvetlerinin yaptıkları iş, bu ağırlık kuvvetlerinin eşdeğer kuvveti olan G kuvvetinin sistemin kütle merkezinin yer değiştirme esnasında yaptığı işe eşit olacaktır.

6.4.2. Dönen Cisme Etkiyen Kuvvetlerin Yaptıkları İş

Hareketsiz Z ekseni etrafında dönme hareketi yapan cisme etkimekte olan elementer kuvvetlerin yaptıkları iş denklem (6.27)'deki gibi hesaplanabilir.

$$dA = \; F_\tau ds = F_\tau h d\varphi \tag{6.27}$$

Burada $F_\tau h = m_z \left(\overline{F}\right) = M_z$ olarak düzenlenirse elementer kuvvetlerin yaptıkları iş $dA = M_z d\varphi$ olarak elde edilir. Burada $M_z = \sum m_z \, (\overline{F})$ dönme eksenine göre olan burulma momentidir. φ ise cismin sahip olduğı elementer dönme açısıdır.

Yapılan bütün işler ise şu şekilde olacaktır:

$$\text{A} = \int_0^\varphi M_z \text{d}\varphi \tag{6.28}$$

6.4.3. Yuvarlanma Sürtünmesi Durumunda Yapılan İş

R yarıçaplı bir çarkın, $\overline{F}$ kuvveti tesiri altında kaymadan yuvarlandığı zamanki yapılan iş hesaplanırken yuvarlanma durumundaki mukavemet momenti $M = dN$ ve elementer iş ise $d\varphi = \frac{s}{R}$ eşitlikleri ile yazılabilir.

Yuvarlanma sürtünmesi durumunda yapılan iş $dA = Md\varphi$ ifadesine göre aşağıdaki gibi olacaktır,

$$A = -d\,N\frac{s}{R} \tag{6.29}$$

d ile gösterilen yuvarlanma esnasında ki sürtünme katsayısıdır.

6.5. RİJİT CİSMİN ÇEŞİTLİ HAREKET HALLERİ İÇİN KİNETİK ENERJİSİ

6.5.1. Rijit Cismin Ötelenme Hareketi

Rijit cisim, ilerleme (ötelenme) hareketi yaparken kinetik enerjisi aşağıdaki eşitlik ile hesaplanır:

$$T = \sum\left(\frac{m_k\ v_k^2}{2}\right) = \frac{v_c^2}{2}\sum m_k = \frac{Mv_c^2}{2} \tag{6.30}$$

Burada M cismimizin kütlesi, v_c ise kütle merkezinin hızıdır.

6.5.2. Rijit Cisimin Hareketsiz Eksen Etrafında Dönme Hareketi

Eğer rijit cisim hareketsiz eksen etrafında sadece dönme hareketi yapıyorsa, kinetik enerjisi denklem (6.31)'deki gibi bulunur.

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k \ v_k^2}{2} \tag{6.31}$$

Sabit eksen etrafında dönen cismin hızı $v_k = \omega . r_k$ olduğundan dolayı dönmekte olan cismin kinetik enerjisi aşağıdaki gibi bulunur.

$$T = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k \omega^2 r_k^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 = \frac{\omega^2}{2} I_z \tag{6.32}$$

Yani sonuç olarak, hareketsiz eksen etrafında dönme hareketi yapan cismin kinetik enerjisi,

$T = \frac{I_z \omega^2}{2}$ eşitliği ile hesaplanabilir.

6.5.3. Cismin Hem Dönme Hem Ötelenme Hareket Durumu

Bu durumda cisim hem dönme hareketi hem de ötelenme hareketi yapmaktadır. Bu cismin kinetik enerjisi ise şöyle hesaplanır;

$$T = \frac{M v_C^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2} \tag{6.33}$$

Yukarıdaki ifade König teoremi olarak adlandırılır. Burada v_c kütle merkezinin hızı, I_c ise kütle merkezinin kütle atalet momentidir.

6.6. HAREKETSİZ EKSEN ETRAFINDA DÖNEN CİSMİN KİNETİK ENERJİSİNİN DEĞİŞMESİ TEOREMİ

Bölüm 6.2'de hareketsiz eksen çevresinde dönmekte olan cisme ait diferansiyel denklemdir aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$I_z \frac{d^2\varphi}{\mathrm{d}\, t^2} = I_z \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{dt}} = I_z\, \varepsilon = M_z^e \tag{6.34}$$

$\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ olduğu göz önünde bulundurularak, ifadenin her iki tarafı $\mathrm{d}\varphi$ ile çarpılırsa:

$$I_z \omega d\omega = M_z^e d\varphi \tag{6.35}$$

denklem (6.35) elde edilir. Denklem tekrar düzenlenerek,

$$d\left(\frac{I_z\omega^2}{2}\right) = M_z^e\, d\varphi \tag{6.36}$$

denklem (6.36)'daki gibi elde edilir. Yani bu ifade hareketsiz bir eksenin çevresinde dönme hareketi yapan cismin, kinetik enerji değişimi hakkındaki teoremin diferansiyel olarak ifade edilme biçimidir.

Hareketsiz eksen etrafında dönen cismin başlangıç durumunda açısal hızı ω_0, belli bir $d\varphi$ açısal yer değişiminden sonra kazandığı açısal hız ise ω olduğu düşünülerek denklem (6.36)'nın integrali alınırsa denklem (6.37) elde edilir.

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \mathrm{d}\left(\frac{I_z\omega^2}{2}\right) = \int_0^{\varphi} M_z^e\, \mathrm{d}\varphi \tag{6.37}$$

Denklem (6.37) matematiksel olarak denklem (6.38)'deki gibi yazılır.

$$\frac{I_z\omega^2}{2} - \frac{I_z\omega_0^2}{2} = \int_0^{\varphi} M_z^e\, \mathrm{d}\varphi \tag{6.38}$$

Kuvvetin elementer olarak yaptığı iş aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$dA = F_\tau ds\ = F_\tau . h. \mathrm{d}\varphi \tag{6.39}$$

Hareketsiz eksen etrafında dönmekte olan cisme uygulanan F kuvvetinin, bu eksene göre dönme momenti denklem (6.40) ile hesaplanır.

$$M_z^e = m_z(\overline{F}) = F_\tau h \tag{6.40}$$

Sonlu yer değiştirme boyunca yapılan iş ise denklem (6.41) ile hesaplanır.

$$A = \int_0^\varphi M_z^e \, \mathrm{d}\varphi \tag{6.41}$$

İfadeler yerine yazıldığında sonuç olarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\frac{I_z\omega^2}{2} - \frac{I_z\omega_0^2}{2} = A \tag{6.42}$$

Bu matematiksel ifade, hareketsiz eksen çevresinde dönmekte olan cismin kinetik enerjisinin değişmesi hakkında teoremin sonlu bir şekilde ifade edilmesidir. Yani, hareketsiz eksen etrafında dönmekte olan cismin herhangi bir açısal yer değişiminde kinetik enerjinde meydana gelen artış bu cisme uygulanmakta olan dış kuvvetlerin bu yer değişiminde yaptıkları işlerin toplamına eşittir.

6.7. VİRTÜEL İŞ PRENSİBİ

Bir sistemin virtüel işi, incelenen sistemin denge denklemlerinin kurulmasıyla bulunur. Mekanik bir sistemde, genelleştirilmiş koordinatların sonsuz olarak küçük ve sistemin dahil olduğu kısıtların belirli bir andaki durumuyla ilişkili olmak şartıyla herhangi bir anda meydana gelen değişme neticesinde yaptığı yer değiştirmelere virtüel iş adı verilir [30].

n adet maddesel noktadan oluşan mekanik sistemin, belirli bazı kuvvetlerin etkisi altında denge durumunda olduğunu varsayılırsa ve bu sistemin her hangi k adet fiziksel noktasına uygulanmakta olan aktif kuvvetlerin eşdeğerini; $\overline{F}_k$ ile ve reaksiyon kuvvetlerinin eşdeğerleri ise $\overline{N}_k$ ile gösterilirse, bu durumda incelenen sistemin bütün noktaları denge durumunda olduğu için, aşağıdaki ifade yazılır:

$$\overline{F}_k + \overline{N}_k = 0 \tag{6.43}$$

Denklen (6.43) ile gösterilen ifadenin her iki tarafını $\delta\overline{r}_k$ virtüel iş vektörüyle çarpıldığında;

$$\overline{F}_k \delta\overline{r}_k + \overline{N}_k \delta\overline{r}_k = 0 \tag{6.44}$$

olmaktadır. Ayrıca denklem (6.44) mekanik sistemin bütün noktaları için yazılıp toplandığında;

$$\sum \overline{F}_k \, \delta\overline{r}_k + \sum \overline{F}_k \delta\overline{r}_k = 0 \tag{6.45}$$

denklem (6.45) ifadesi elde edilir. Ayrıca mekanik sistem, ideal kısıtlı olduğu için:

$$\sum \overline{F}_k \delta\overline{r}_k = 0 \tag{6.46}$$

ya da

$$\sum \delta A_k = 0 \tag{6.47}$$

olacaktır.

Sonuç olarak bu ifadeden şu anlaşılmaktadır ki, ideal kısıtlı mekanik sistemin, incelendiği durumda dengede olması için, sisteme etkimekte olan kuvvetlerin virtüel işi hesaplandığı anda elementer işlerin toplamlarının cebirsel olarak sıfıra eşit olması gerekmektedir.

Analitik olarak bu ifade denklem (6.48)'deki gibi yazılabilir.

$$\sum_{k=1}^{n} [F_{kx} \, \delta x_k + F_{ky} \delta y_k + F_{kz} S z_k] = 0 \tag{6.48}$$

Bu ifade, analitik olarak virtüel iş prensibinin, iz düşümlerle sonlu olarak ifadesidir.

6.8. LAGRANGE METODU

Serbest olmayan bir maddesel noktanın hareketinin diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$m\ddot{x} = F + \lambda\frac{\delta f}{\delta\lambda} \tag{6.49}$$

Bu denkleme ayrıca, Lagrange 1.tür denklemleri ismi de verilmektedir.

Genelleşmiş koordinatlarla, serbest olmayan mekanik sistemin diferansiyel denklemlerine ise Lagrange'in 2. Tür Denklemleri denir. Mekanik sistemin s sayısı kadar serbestlik derecesine sahip olduğu (sistemin durumu s adet koordinatla bulunabiliyor olsun) ve n adet maddesel noktanın toplamından meydana geldiği varsayılsın. Bu durumda sistemin durumu, birbirine bağımlı olmayan, s adet q_1,q_2,....q_s kadar genelleştirilmiş koordinatla ifade edilecektir.

n adet maddesel noktaya etki eden kuvvetler $\overline{F}_1$,$\overline{F}_2$,....$\overline{F}_n$ olarak adlandırılırsa, bu durumda maddesel noktaların yer vektörlerinin $\overline{r}_n$ genelleşmiş koordinatlarla ifadesi aşağıdaki gibi olur.

$$r_i = r_i(t, q_1, q_2, \ldots . q_s);\ i = \overline{1,n} \tag{6.50}$$

Bu bağlılıklar, t zamanının mekanik sistem sabit kısıtlarına sahiptir. Eğer kısmi türevlerle, mekanik sistemin kısıtlamalarına dokunmadan virtüel iş hesabı yapılırsa;

$$\delta r_A = \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial r_a}{\partial q_k}\delta q_k \tag{6.51}$$

denklem (6.51) elde edilir. Burada δq_kgenelleştirilmiş koordinatların virtüel işidir.

$k = 1,2,3, \ldots, s.$

Ayrıca genel dinamik denklemi şu şekilde de yazılabilir:

$$\sum_{k_{1=1}}^{n} \delta A_{k1} + \sum_{k_{1=1}}^{n} \delta A_{k1}^{e} + \sum_{k_{1=1}}^{n} \delta A_{k1}^{at} = 0 \quad (6.52)$$

Ya da:

$$\sum_{k_{1=1}}^{n} \delta A_{k1} + \sum_{k_{1=1}}^{n} \delta A_{k1}^{at} = 0 \quad (6.53)$$

İlk terimde hem aktif kuvvetler hem de sürtünmeden kaynaklı meydana gelen kuvvetlerin virtüel iş esnasında maruz kaldığı işlemler dahildir. Ayrıca, ∂q_k virtüel işlerde aktif ve kısıtlı kuvvetlerin yaptıkları işler aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\sum_{k_{1=1}}^{n} \delta A_k = Q_1 \delta_{q1} + Q_2 \delta_{q2} + \cdots + Q_{n-1} \delta_{qn-1} + Q_n \delta_{qn} \quad (6.54)$$

Burada

$$\overline{Q}_1 = \sum_{k1=_1}^{n} \overline{F}_{k1} \frac{\partial \overline{r}_{k1}}{\partial q_1}; \quad (6.55)$$

$$\overline{Q}_2 = \sum_{k1=_1}^{n} \overline{F}_{k1} \frac{\partial \overline{r}_{k1}}{\partial q_2}; \quad (6.56)$$

$$\overline{Q}_n = \sum_{k1=_1}^{n} \overline{F}_{k1} \frac{\partial \overline{r}_{k1}}{\partial q_n}; \quad (6.57)$$

ve s genelleştirilmiş kuvvetlerdir (her bir q_1,q_2, ve s. genelleştirilmiş koordinatlara gelen kuvvetler)

(6.55) numaralı denklemle analoji kurulduğunda, atalet kuvvetlerinin δ_{qk} virtüel işleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\sum_{k1=1}^{n} \delta A_{k1}^{at} = Q_1^{at} \delta_{q1} + Q_2^{at} \delta_{q2} + \cdots + Q_k^{at} \delta q_k \quad (6.58)$$

$$Q_1^{at} = \sum_{k_{1=1}}^{n} \overline{F}_{k1}^{at} \frac{\partial_{\overline{r}k_1}}{\partial_{q_1}} \tag{6.59}$$

$$Q_2^{at} = \sum_{k_{1=1}}^{n} \overline{F}_{k1}^{at} \frac{\partial_{\overline{r}k_1}}{\partial_{q_2}} \tag{6.60}$$

$$Q_{n-1}^{at} = \sum_{k_{1=1}}^{n} \overline{F}_{k1}^{at} \frac{\partial_{\overline{r}k_1}}{\partial_{q_{n-1}}}$$

$$Q_n^{at} = \sum_{k_{1=1}}^{n} \overline{F}_{k1}^{at} \frac{\partial_{\overline{r}k_1}}{\partial_{q_n}} \tag{6.61}$$

Yukarıda yazılan denklemler genelleştirilmiş atalet kuvvetleridir. (6.55) ve (6.58) numaralı ifadeleri (6.57) numaralı denklemde yerine koyulursa;

$$(Q_1 + Q_1^{at})\delta_{q1} + (Q_2 + Q_2^{at})\delta_{q2} + \cdots + (Q_k + Q_k^{at})\delta_{qk} = 0 \tag{6.62}$$

Genelleştirilmiş $q_1, q_2, \ldots q_k$ koordinatları birbirlerine bağlı olmadığı için (6.60) eşitliğinin sağlanması maksadıyla, her toplanan kuvvet teker teker sıfıra eşit olmak zorundadır. ($\delta_{qk} \neq 0$ durumundan dolayı)

$$Q_1 + Q_1^{at} = 0 \ldots Q_k + Q_k^{at} = 0 \tag{6.63}$$

Anlaşıldığı üzere, bütün maddesel noktaların her bir atalet kuvveti $\overline{F}_{k_1}^{at} = -m_{k1}\overline{a}_{k_1}$ denklemi ile bulunur.

Bu özelliği göz önünde bulundurarak, genelleştirilmiş atalet kuvvetleri aşağıdaki şekilde yazılır.

$$Q_1^{at} = \sum_{k_{1=1}}^{n} \overline{F}_{k1}^{at} \frac{\partial_{\overline{r}k_1}}{\partial_{q_1}} = -\sum_{k1=1}^{n} m_{k1}\, \overline{a}_{k1} \frac{\partial_{\overline{r}k_1}}{\partial_{q_1}} = -\sum_{k_{1=1}}^{n} m_{k1} \frac{d\overline{v}_{k1}}{dt} \frac{\partial \overline{r}_{k1}}{\partial_{q1}} \tag{6.64}$$

$$Q_1^{at} = \sum_{k_{1=1}}^{n} \overline{F}_{k1}^{at} \frac{\partial_{\overline{r}k_1}}{\partial_{q_2}} = -\sum_{k1=1}^{n} m_{k1}\, \overline{a}_{k1} \frac{\partial_{\overline{r}k_1}}{\partial_{q_2}} = -\sum_{k_{1=1}}^{n} m_{k1} \frac{d\overline{v}_{k1}}{dt} \frac{\partial \overline{r}_{k1}}{\partial_{q2}} \tag{6.65}$$

Burada: $\frac{\partial \overline{v}_{k1}}{dt}\frac{\partial \overline{r}_{k1}}{\partial_{q1}}$ ifadesi şu şekilde de yazılır:

$$\frac{d\overline{v}_{k1}}{dt}\frac{\partial \overline{r}_{k1}}{\partial_{q1}} = \frac{d}{dt}\left(\overline{v}_{k_1}\frac{\partial \overline{r}_{k1}}{\partial_{q1}}\right) - \overline{v}_{k_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{r}_{k1}}{\partial_{q1}}\right) \tag{6.66}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{r}_{k1}}{\partial_{q1}}\right) = \frac{\partial}{\partial_{q1}}\left(\frac{d\overline{r}_{k1}}{dt}\right) = \frac{a\overline{v}_{k_1}}{\partial_{q1}} \tag{6.67}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{r}_{k1}}{\partial_{q2}}\right) = \frac{\partial}{\partial_{q2}}\left(\frac{d\overline{r}_{k1}}{dt}\right) = \frac{a\overline{v}_{k_1}}{\partial_{q2}} \tag{6.68}$$

Ayrıca $\frac{\partial \overline{r}_{k1}}{\partial_{q1}}$ ifadesi şöylede yazılabilir: $\overline{r}_k$ yer değiştirme vektörü, q_i genelleştirilmiş koordinatlarına göre türevi alındığında, Δq_i özel artış oranına eşit olduğundan denklem (6.67)'deki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial_{\overline{r}_{k1}}}{\partial_{q_1}} = \frac{\partial(\dot{\overline{r}}_{k_1})'}{\partial_{\dot{q}1}} = \frac{\partial \overline{v}_{k1}}{\partial \dot{q}1} \tag{6.69}$$

(6.60) ve (6.62) numaralı ifadeleri (6.63) numaralı denklemde yerine yazıldığında böylece atalet kuvvetlerinin genelleştirilmiş ifadeleri bulunur.

$$\begin{aligned}&\frac{d\overline{v}_{k1}}{dt}\frac{\partial \overline{r}_{k1}}{\partial_{q1}} = \frac{d}{dt}\left(\overline{v}_{k_1}\frac{\partial \overline{v}_{k1}}{\partial_{\dot{q}1}}\right)\overline{v}_{k1}\left(\frac{\partial r_{k_1}}{\partial_{q1}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\overline{v}_{k_1}\frac{\partial \overline{v}_{k1}}{\partial_{\dot{q}1}}\right) - \overline{v}_{k_1}\frac{\partial \overline{v}_{k1}}{\partial_{q1}} = \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{v}_{k_1}^2}{\partial_{\dot{q}1}}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial \overline{v}_{k_1}^2}{\partial_{q1}}\frac{d\overline{v_{k1}}}{dt}\frac{\partial \overline{r}_{k1}}{\partial_{q2}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{v}_{k_1}^2}{\partial_{\dot{q}_2}}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial \overline{v}_{k1}}{\partial_{q2}}\end{aligned} \tag{6.70}$$

Yani, genelleştirilmiş atalet kuvvetlerinin ifadesi aşağıdaki denklemdeki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned}&\overline{Q}_1^{at} = \sum_{k1=1}^{n}\overline{F}_{k1}^{at}\frac{\partial \overline{r}_{k1}}{\partial_{q1}} = -\left[\sum_{k1_{=1}}^{n} m_{k1}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{v}_{k1}^2}{\partial_{\dot{q}1}}\right) - \sum_{k1=_1}^{n} m_{k1}\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{v}_{k1}^2}{\partial_{q1}}\right] = \\ &\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial_{\dot{q}1}}\left(\sum_{k_{1=1}}^{n}\frac{m_{k1}\overline{v}_{k_1}^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial_{q1}}\left(\sum_{k_{1=1}}^{n}\frac{m_{k1}\overline{v}_{k_1}^2}{2}\right)\right]\end{aligned} \tag{6.71}$$

$$\overline{Q}_2^{at} = \sum_{k1=1}^{n} \overline{F}_{k1}^{at} \frac{\partial \overline{r}_{k1}}{\partial_{q2}} = -\left[\sum_{k1_{=1}}^{n} m_{k1} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{v}_{k1}^2}{\partial_{\dot{q2}}}\right) - \sum_{k1=_1}^{n} m_{k1}\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{v}_{k1}^2}{\partial_{q2}}\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial_{\dot{q2}}}\left(\sum_{k_{1=1}}^{n}\frac{m_{k1}\overline{v}_{k_1}^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial_{q2}}\left(\sum_{k_{1=1}}^{n}\frac{m_{k1}\overline{v}_{k_1}^2}{2}\right)\right] \quad (6.72)$$

$$\overline{Q}_k^{at} = \sum_{k1=1}^{n} \overline{F}_{k1}^{at} \frac{\partial \overline{r}_{k1}}{\partial_{qk}} = \left[\sum_{k1_{=1}}^{n} m_{k1} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{v}_{k1}^2}{\partial_{\dot{q}k}}\right) - \sum_{k1=_1}^{n} m_{k1}\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{v}_{k1}^2}{\partial_{qk}}\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial_{\dot{q}k}}\left(\sum_{k_{1=1}}^{n}\frac{m_{k1}\overline{v}_{k_1}^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial_{qk}}\left(\sum_{k_{1=1}}^{n}\frac{m_{k1}\overline{v}_{k_1}^2}{2}\right)\right] \quad (6.73)$$

Bilindiği üzere, $\sum_{k_{1=1}}^{n}\frac{m_{k1}\,v_{k1}^2}{2} = T$ burada sistemin kinetik enerjisidir.

Böylece aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$Q_1^{at} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) + \frac{\partial T}{\partial_{q1}} \quad (6.74)$$

$$Q_2^{at} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) + \frac{\partial T}{\partial_{q2}} \quad (6.75)$$

$$Q_k^{at} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) + \frac{\partial T}{\partial_{qk}} \quad (6.76)$$

Bu ifadeler (6.75) numaralı denklemde yerine konulduğunda, aşağıdaki ifade elde edilir.

$$Q_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial_{q1}}\right) \quad (6.77)$$

$$Q_2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_2}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial_{q2}}\right) \quad (6.78)$$

$$Q_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_k}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial_{qk}}\right) \quad (6.79)$$

$k = 1,2,3 \ldots ., s$ olur.

Bu ifade, mekanik sistemin genelleştirilmiş koordinatlar vasıtasıyla yazılan diferansiyel denklemleridir. Bu ifadeler Lagrange 2. tür denklemleri ya da Langrange denklemleri olarak adlandırılır. Anlaşıldığı üzere bu denklemlerin yazılmasında, kinetik enerjinin genelleştirilmiş koordinatlara ait ifadelerin bulunmasına gerek yoktur.

Sisteme sadece potansiyel enerjili kuvvetin etkidiğini farz edelim. Böyle bir durumda genelleşmiş kuvvet aşağıdaki gibi hesaplanacaktır.

$$Q_k = -\frac{\partial P}{\partial qk} \tag{6.80}$$

2.tür Lagrange denklemleri denklem (6.81) ya da denklem (6.82)'deki gibi yazılabilir.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial_{\dot{q}k}}\right) - \frac{\partial T}{\partial_{qk}} + \frac{\partial P}{\partial_{qk}} = 0; \ (k = 1, N) \tag{6.81}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-P)}{\partial_{qk}}\right) - \frac{\partial (T-P)}{\partial_{qk}} = 0 \tag{6.82}$$

P potansiyel enerjisi, yalnızca $q_{1,}q_{2,\ldots\ldots,}q_{N-1,}q_N$ genelleştirilmiş koordinatlarına bağlıdır, bu durumda $\frac{\partial P}{\partial_{\dot{q}_k}} = 0$ olmalıdır.

Ve ayrıca $T - P = L$ olarak yazıldığında, Lagrange'in 2. Tür denklemi de aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial qk} = 0, \ \ k = (1,2, \ldots, N-1, N) \tag{6.83}$$

Burada L olarak ifade edilen Lagrange fonksiyonudur, sistemin kinetik potansiyeli olarak da adlandırılır.

BÖLÜM 7

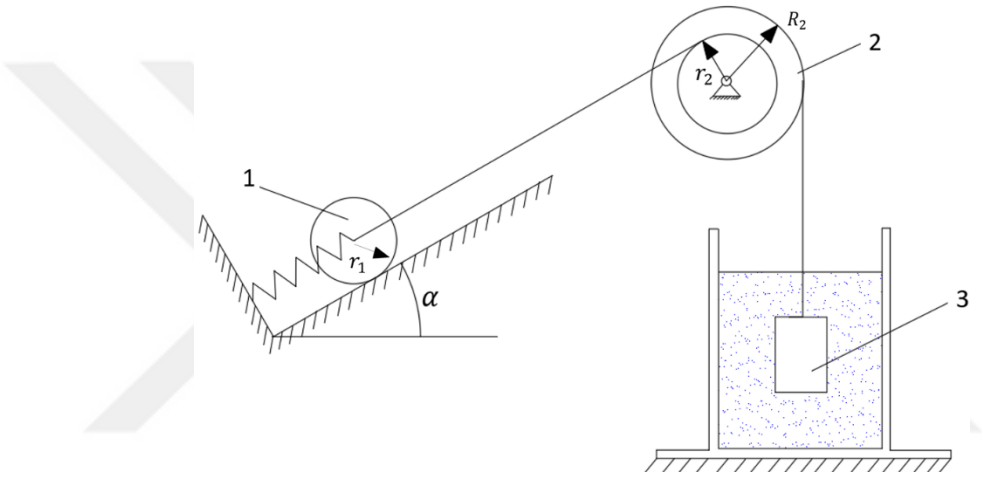
BİR SERBESTLİK DERECESİNE SAHİP MUKAVEMETLİ ORTAMDA ÇALIŞAN MEKANİZMANIN MEKANİK HAREKETİNİN İNCELENMESİ

Bu bölümde bir serbestlik derecesine sahip bir mekanizmanın mukavemetli ortamdaki mekanik hareketi incelenmiştir. Ele alınan mekanizmanın hareket denklemleri virtüel iş prensibi, Lagrange metodu ve sistemin kinetik enerjisinin değişmesi teoremi kullanılarak elde edilmiştir. Üç farklı yöntem kullanılarak elde edilen hareket denklemi doğrulanmıştır. Sistemdeki iç ve dış reaksiyon kuvvetleri sistemin momentumunun değişmesi teoremi ile bulunmuştur. Hareket denklemi elde edildikten sonra ortamın direnç mukavemeti ihmal olunan durumu için mekanizmanın sönümsüz serbest titreşim cevabı ve sönümsüz zorlanmış titreşim cevabının denklemleri elde edilmiştir. Daha sonra sistemin direnç mukavemeti ihmal olmayan viskoz ortamdaki sönümlü serbest titreşim ve sönümlü zorlanmış titreşim cevabının denklemleri elde edilmiştir. Son olarak da, verilen sayısal veriler için viskoz olmayan ortamdaki serbest titreşim analizi, zorlanmış titreşim analizi, viskoz ortamdaki serbest titreşim analizi , zorlanmış titreşim analizi ve rezonans durumu analizi yapılmıştır.

7.1. ELE ALINAN MUKAVEMETLİ ORTAMDA ÇALIŞAN BİR SERBESTLİK DERECELİ PROBLEMİN TANIMLANMASI

Mukavemetli ortamların sistemin titreşim cevabına etkisinin incelenebilmesi için Şekil 7.1' de gösterilen bir serbestlik dereceli mekanizma ele alınmıştır. Şekilde görüldüğü gibi 1 numaralı silindir α açısına sahip bir eğimli yüzeyde kaymadan yuvarlanma hareketi yapmaktadır. Silindirin merkezi bir yay vasıtası ile duvara tutturulmuştur. Silindir diğer taraftan ise uzamayan mutlak rijit kabul edilen bir iple r_2 yarıçaplı 2 numaralı kasnağa tutturulmuştur. 3 numaralı cisim ise μ direnç katsayısına sahip bir mukavemetli ortamda bulunmaktadır. Mukavemetli ortam sisteme sönüm etkisi katmaktadır. 3 numaralı cismin diğer ucu uzamayan mutlak rijit kabul edilen bir iple

R_2 yarıçaplı kasnağa tutturulmuştur böylece düşey eksende hareket etmesi sağlanmıştır. Ayrıca 3 numaralı yüke harekete geçirici yani tahrik edici F(t) dış kuvveti etki etmektedir. Elastik malzemeler ve iplerin kütleleri ihmal edilmiştir. Ele alınan problemde sistemi meydana getiren cisimlerin kütleleri m_1, m_2, m_3 , elastik yayın yay direngenlik katsayısı k, 1 numaralı homojen silindirin yarıçapı r_1, 2 numaralı bloğun yarıçapları r_2, R_2 ve 2 numaralı bloğun eylemsizlik yarıçapı i_2 sembolleri ile gösterilmiştir. Ayrıca μ ortamın direnç katsayısı ve α ise 1 numaralı silindirin yatayla olan eğim açısıdır.



Şekil 7.1. Bir serbestlik derecesine sahip mekanizma.

7.2. PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ

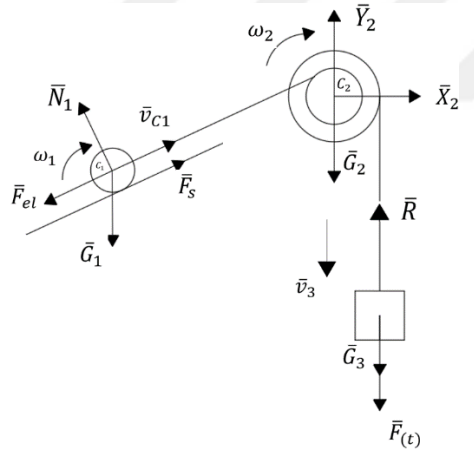
Sistemin durumu incelenilirken, 3 numaralı yükün yer değişim miktarı s serbestlik derecesi koordinatı olarak kabul edilmiştir. Sönümlü düzenekteki tepki kuvveti 3 numaralı yükün hızının birinci derecesiyle orantılıdır. Sistem dinamiğinin esas teoremleriyle birlikte teorik mekaniğin analitik yöntemleri aynı anda kullanılarak çözüm yapılmıştır [27].

7.2.1. Problemin Çözüm Aşamaları

1. Hesaplama yönteminin ve aşamalarının oluşturulması.

2. Mekanik sistemin, kinetik enerji değişimi hakkında teorem kullanarak mekanizmanın hareketinin diferansiyel denklemlerinin elde edilmesi.
3. Hareketin başlangıç koşullarının belirlenmesi.
4. Hareketin diferansiyel denkleminin çözümünün bulunması.
5. Başlangıç koşullardan yararlanarak, hareket denkleminin integralini alıp, oluşan integral sabitlerinin saptanması.
6. Bulunan integral sabitlerinin diferansiyel denklemde yerlerine yazılması ve bu sayede denklemin bulunması.
7. Mekanik sistemin momentumun değişmesi ve momentumun momentinin değişmesi hakkında teoremlerden yaralanarak tepki kuvvetlerini bulmak için sistem denklemlerinin bulunması.

7.2.2. Bir Serbestlik Dereceli Mekanizmanın Hareket Denkleminin Sistemin Kinetik Enerjisinin Değişmesi Teoremi ile Elde Edilmesi



Sistemde gösterilen sembollerin anlamları:

$\bar{G}_1$, $\bar{G}_2$, $\bar{G}_3$ sırasıyla 1,2 ve 3 numaralı cisimlerin ağırlık kuvvetleridir

$\bar{N}_1$, mesnetdeki yüzeyin normal reaksiyon kuvveti

$\bar{F}_s$, sürtünme kuvveti

$\bar{F}_{el}$, yayın elastiklik kuvveti

$\bar{X}_2$, $\bar{Y}_2$ 2 numaralı bloğun rulmanının reaksiyon kuvveti

$\bar{R}$, ortamın viskozite mukavemeti

$\bar{F}(t)$ ise harekete geçirici (tahrik edici) kuvvettir.

Şekil 7.2. Dinamiğin esas teoremlerinin mekanik sistem için uygulanması.

Ele alınan bir serbestlik dereceli mekanik sistemin serbest cisim diyagramı Şekil 7.2 ile gösterilmiştir. Silindirin konumu 3 numaralı yükün yer değişim miktarı s ile bulunacaktır. Hesaplama sisteminin başlangıç anı statik denge durumunda 3 numaralı yükün kütle merkezine yerleştirilmiştir [28].

Sistem hareketinin, diferansiyel denklemini bulmak için mekanik sistemin kinetik enerjisinin değişmesi hakkındaki teorem kullanılmıştır. Mekanik sistemin kinetik

enerjisinin zamana göre değişimi sistem üzerindeki tüm kuvvetlerin yaptığı güçlerin toplamına eşittir.

$$\frac{dT}{dt} = \sum P_e + \sum P_i \tag{7.1}$$

Burada T mekanik sistemin kinetik enerjisidir, $\sum P_e$ dış kuvvetlerin oluşturduğu güçlerin toplamıdır, $\sum P_i$ ise iç kuvvetlerin yaptıkları güçlerin toplamıdır.

Mekanik sistemin kinetik enerjisinin zamana göre türevi bu sistemin tüm noktalarına uygulanan iç ve dış güçlerin uyguladıkları güçlerin toplamına eşittir. Mekanik sistem 1, 2 ve 3 numaralı cisimlerden meydana geldiğinden, bu cisimlerin kinetik enerjilerinin toplamını aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \tag{7.2}$$

1 numaralı silindir yatayla paralel yani düzlemsel hareket ettiğinden, kinetik enerjisi denklem (7.3) ile hesaplanır.

$$T_1 = \frac{m_1 v_{C_1}^2}{2} + \frac{I_{C_1}\omega_1^2}{2} \tag{7.3}$$

Burada, v_{C_1} 1 numaralı silindirin kütle merkezinin hızı, I_{C_1} 1 numaralı silindirin merkez eksenine göre kütlesel atalet momenti ve ω_1 ise 1 numaralı silindirin açısal hızıdır.

2 numaralı blok sabitlenmiş eksen etrafında dönme hareketinde bulunduğundan dolayı kinetik enerjisi denklem (7.4)'deki gibi hesaplanır.

$$T_2 = \frac{I_{C_2}\omega_2^2}{2} \tag{7.4}$$

Eşitlikte, I_{C_2} 2 numaralı bloğun merkezi eksenine göre kütlesel atalet momentini, ω_2 ise 2 numaralı bloğun açısal hızını ifade etmektedir.

Ayrıca 3 numaralı yük düşey eksende ötelenme hareketi yapmaktadır ve bu yükün kinetik enerjisi ise denklem (7.5) ile hesaplanır.

$$T_3 = \frac{m_3 v_3^2}{2} \tag{7.5}$$

Denklem (7.3), (7.4) ve (7.5) numaralı ifadeleri denklem (7.2)'de yerine yazılır ise sistemin toplam kinetik enerjisi denklem (7.6)'de gösterildiği gibi olacaktır.

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{m_1 v_{C_1}^2}{2} + \frac{I_{C_1}\omega_1^2}{2} + \frac{I_{C_2}\omega_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2} \tag{7.6}$$

Bu ifadedeki v_{C_1}, ω_1ve ω_2 hızları, 3 numaralı yükün hızıyla ifade edilmiştir. Bunun için $v_3 = v$ olarak kabul edilir.

Bu durumda v_{C_1}, ω_1ve ω_2 hızları denklem (7.7)'deki gibi elde edilmiştir.

$$v_3 = v\,; \quad \omega_2 = v/R_2;\ v_{C_1} = r_2 v/R_2;\ \ \omega_1 = v r_2/r_1 R_2 \tag{7.7}$$

(7.7) numaralı ifade (7.6) numaralı ifadede de yerine yazılırsa:

$$T = 0{,}5\left(\frac{m_3 r_2^2}{R_2^2} + \frac{I_{C_1} r_2^2}{r_1^2 R_2^2} + \frac{I_{C_2} m_3}{R_2^2}\right) v^2 \tag{7.8}$$

Toplam kinetik enerji denklem (7.8) ile hesaplanır. Ayrıca hız;

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \tag{7.9}$$

olarak yazılırsa kinetik enerji ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$T = 0{,}5\left(\frac{m_3 r_2^2}{R_2^2} + \frac{I_{C_1} r_2^2}{r_1^2 R_2^2} + \frac{I_{C_2} m_3}{R_2^2}\right) \dot{s}^2 = 0{,}5 A \dot{s}^2 \tag{7.10}$$

Bulunan ifadenin kinetik enerjinin, zamana göre türevini alınırsa:

$$\frac{dT}{dt} = A.\dot{s}.\ddot{s} \tag{7.11}$$

olarak elde edilir. Şimdi (7.1) numaralı denklemin sağ tarafındaki kuvvetlerin yani iç ve dış kuvvetlerin güçleri bulunacaktır. Kuvvetin gücünü, noktaya etkiyen kuvvetin vektörüyle, bu noktanın hız vektörünün skaler olarak çarpımı ile bulunur.

$$P = \bar{F}\bar{v} = Fvcos\left(\widehat{\bar{F},\bar{v}}\right) \tag{7.12}$$

Ele alınan mekanik sistem, rijit ve değişmez bir sistemdir. Yani bu sistemin içinde bulunan hiçbir cisim deformasyona uğramamaktadır, ayrıca bu cisimlerin belirli tüm noktalarının birbirine göre hızları sıfıra eşittir. Bundan dolayı mekanik sistemin iç kuvvetlerinin güçleri toplamı sıfırdır.

$$\sum P_i = 0 \tag{7.13}$$

Ayrıca noktalara uygulanan bazı dış kuvvetlerin de güçleri sıfıra eşit olur, çünkü bu dış kuvvetlerinde hızı sıfırdır. Yani, bu kuvvetler hareketsiz noktalara uygulandığı için hızları sıfıra eşittir ve aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\bar{N}_1, \bar{F}_s, \bar{G}_2\ , \bar{X}_2\ , \bar{Y}_2 \tag{7.14}$$

Diğer bütün dış kuvvetlerin güçleri de aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\sum P_e = \bar{F}_{el}\bar{v}_{C_1} + \bar{G}_1\bar{v}_{C_1} + \bar{R}\bar{v}_3 + \bar{G}_3\bar{v}_3 + \bar{F}\bar{v}_3 \tag{7.15}$$

Skaler çarpımları incelersek:

$$\sum P_e = -F_{el}v_{C_1} - G_1v_{C_1}sin\alpha - Rv_3 + G_3v_3 + F(t)v_3 \tag{7.16}$$

(7.7) numaralı ifadedeki kinematik bağıntılar dikkate alınarak dış kuvvetlerin oluşturduğu güçler aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sum P_e = \left(-F_{el}\frac{r_2}{R_2} - G_1\frac{r_2}{R_2}sin\alpha - R + G_3 + F(t)\right)v \tag{7.17}$$

Ya da,

$$\sum P_e = \left(-F_{el}\frac{r_2}{R_2} - G_1\frac{r_2}{R_2}sin\alpha - R + G_3 + F(t)\right)\dot{s} \tag{7.18}$$

Elastik kuvveti yayın uzamasıyla orantılı gibi kabul edilerek (7.18) numaralı ifade yeniden düzenlenebilir. Bu durumda yayın uzaması statik ve dinamik uzamaların toplamından oluşmaktadır.

$$\delta = \delta_{st} + s_{C_1} \tag{7.19}$$

$$s_{C_1} = \frac{r_2}{R_2}s \tag{7.20}$$

Elastik kuvvet denklem (7.21) ile hesaplanmıştır.

$$F_{el} = k\left(\delta_{st} + s_{C_1}\right) = k\left(\delta_{st} + \frac{r_2}{R_2}s\right) \tag{7.21}$$

Viskozite mukavemet kuvveti $R = \mu v = \mu\dot{s}$ olarak hesaplanır. Bu yazılanları dikkate alarak;

$$F_g = -k\delta_{st}\frac{r_2}{R_2} - k\frac{r_2^2}{R_2^2}s - G_1\frac{r_2}{R_2}sin\alpha - \mu\dot{s} + G_3 + F(t) \tag{7.22}$$

olarak elde edilir. Bu durumda hareketsiz durumda olan kuvvetin değeri sıfır olacaktır.

(7.22) numaralı ifade de $s = 0;\ \dot{s} = 0\ ve\ F(t) = 0$ olduğu için, sistem aşağıdaki gibi denge durumunda kabul edilir.

$$-k\delta_{st}\frac{r_2}{R_2} - G_1\frac{r_2}{R_2}sin\alpha + G_3 = 0 \tag{7.23}$$

(7.23) numaralı denklemden yararlanarak yayın statik olarak uzaması bulunmuş olur.

$$\delta_{st} = \frac{1}{k}\left(G_3\frac{R_2}{r_2} - G_1 sin\alpha\right) \tag{7.24}$$

(7.23) numaralı ifade, (7.21) numaralı ifadede yerine yazıldığında şu ifade elde edilir:

$$F_g = -k\frac{r_2^2}{R_2^2}s - \mu\dot{s} + F(t) \tag{7.25}$$

Denklem (7.11), (7.18) ve (7.25) dikkate alındığında sonuç olarak (7.1) numaralı ifade yani sistem hareketinin diferansiyel olarak denklemi aşağıdaki gibi bulunur.

$$m_g\ddot{s} = -k\frac{r_2^2}{R_2^2}s - \mu\dot{s} + F(t) \tag{7.26}$$

(7.26) numaralı ifade aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\ddot{s} + 2n\dot{s} + {w_n}^2 s = \frac{1}{m_g}F(t) \tag{7.27}$$

(7.27) numaralı denklemde kullanılan sembollerin anlamı şöyledir:

$w_n = \frac{r_2}{R_2}\sqrt{\frac{k}{m_g}}$ serbest titreşimlerin frekansı

$n = \frac{\mu}{m_g}$ titreşimin sönümlülük göstergesidir.

Hareketin başlangıç koşulları $t = 0$ olduğu anda denklem (7.28)'deki gibi yazılır.

$$s = s_0; \qquad \dot{s} = \dot{s}_0 \tag{7.28}$$

(7.27) ve (7.28) numaraları ifadeler, dinamiğin 2. yasasını açıklamak için matematiksel olarak birer modeldir.

7.2.3. Sistemin Hareket Denkleminin Çözümü

(7.27) numaralı denklemdeki zorlama kuvveti aşağıdaki gibi harmonik bir kuvvettir.

$$F = F_0 \, sin(pt) \tag{7.29}$$

Burada, F_0 harekete geçirici kuvvetin genliği, p ise harekete geçirici yani (zorlama) kuvvetinin frekansıdır.

(7.27) numaralı homojen olmayan denklemin genel çözümü homojen ve özel çözümün toplamından meydana gelir, bundan dolayı hareket denkleminin genel çözümü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$s = s_1 + s_2 = s_h + s_{\ddot{o}} \tag{7.30}$$

(7.27) numaralı denklem ile verilen hareket denkleminin homojen çözümü aşağıdaki gibi yazılır.

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2n\frac{ds}{dt} + {w_n}^2 s = 0 \tag{7.31}$$

Homojen çözümde denklemin çözümü denklem (7.31)'deki gibi kabul edilmiştir.

$$s = Ae^{zt} \tag{7.32}$$

Burada A ve z sabit değerlerdir.

(7.32) numaralı ifade (7.31) numaralı ifadede yerine yazılırsa:

$$Ae^{zt}\ (z^2 + 2nz + {w_n}^2) = 0 \tag{7.33}$$

denklem (7.32)'deki gibi elde edilir. Burada çözüm olarak $s = Ae^{zt}$ kabul edildiği için;

$$Ae^{zt} \neq 0 \tag{7.34}$$

olacaktır. Bundan dolayı aşağıdaki denklemdeki şartın sağlanması gerekir:

$$z^2 + 2nz + {w_n}^2 = 0 \tag{7.35}$$

(7.35) numaralı denklem (7.28) numaralı diferansiyel denkleminin karakteristik denklemidir. Karakteristik denklemin denklem (7.35)'de gösterildiği gibi iki kökü vardır.

$$z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - {w_n}^2} \tag{7.36}$$

(7.36) numaralı denkleminin genel çözümü denklemin karakteristik köklerine bağlıdır ve üç adet özel durum bulunmaktadır bu durumlar:

n $< w_n$ olduğu durumda, kök içindeki ifade negatiftir, yani negatif gerçek kısımlara sahip karmaşık bir çift biçimindedir. (küçük mukavemetler için)

n $= w_n$ olduğu durumda kök içindeki ifade sıfıra eşittir ve kökler birbirine eşit negatif reel sayılardır. (ideal durum için)

n $> w_n$ olduğu durumda ise, kök içindeki ifadenin sonucu sıfırdan büyüktür, kökler birbirinden farklı reel sayılardır. (büyük mukavemetler için)

Birinci durumda $(n < w_n)$ (7.35) denkleminin genel çözümü aşağıdaki gibi olur.

$$s = \left(C_1 e^{ik_1 t} + C_2 e^{-ik_1 t}\right) e^{-nt} \tag{7.37}$$

Burada, C_1 ve C_2 integral sabitleridir.

$$k_1 = w_d = \sqrt{{w_n}^2 - n^2} \tag{7.38}$$

(7.37) numaralı denklemi çözmek için Euler formüllerinden yararlanılır.

$$e^{ik_1 t} = cos(k_1 t) + isin(k_1 t) \tag{7.39}$$

$$e^{-ik_1 t} = cos(k_1 t) - isin(k_1 t) \tag{7.40}$$

Bu ifade aşağıdaki gibi yazabilir,

$$s_h = ae^{-nt} sin(k_1 t + \beta) \tag{7.41}$$

İkinci durumda yani $n = w_n$ olduğunda ise genel çözüm aşağıdaki gibi olur.

$$s_h = e^{-nt}(A_1 + A_2 t) \tag{7.42}$$

Üçüncü durumda ise $(n > w_n)$ genel çözüm aşağıdaki gibi olur.

$$s_h = e^{-nt}(A_1 e^{k_2 t} + A_2 e^{-k_2 t}) \tag{7.43}$$

Burada:

$$k_2 = \sqrt{n^2 - {w_n}^2} \tag{7.44}$$

Homojen olmayan, diferansiyel denklemin özel çözümü denklem (7.44)'deki gibi yazılabilir.

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2n\frac{ds}{dt} + k^2 s = \frac{F_0}{m_g} sin(pt) \tag{7.45}$$

Bu denklemin özel çözümü denklem (7.45)'deki gibi kabul edilmiştir.

$$s_{ö} = A\,sin\,pt + B\,cos\,pt \tag{7.46}$$

(7.46) numaralı ifade (7.45) numaralı ifade de yerine yazılırsa;

$$[A({w_n}^2 - p^2) - 2nBp]sin\,pt + [2npA + B({w_n}^2 - p^2)]cos\,pt = \frac{F_0}{m_g} \tag{7.47}$$

Trigonometrik fonksiyonların katsayıları kıyaslandığında, sabit değerler olan A ve B'yi bulmak amacıyla aşağıdaki denklemler elde edilmiştir.

$$A({w_n}^2 - p^2) - 2nBp = \frac{F_0}{m_g} \tag{7.48}$$

$$2npA + B({w_n}^2 - p^2) = 0 \tag{7.49}$$

Böylelikle bu denklem sistemini çözerek, A ve B sabit değerleri elde edilir.

$$A = \frac{({w_n}^2 - p^2)}{({w_n}^2 - p^2) + 4n^2p^2}\,\frac{F_0}{m_g} \tag{7.50}$$

$$B = -\frac{2np}{({w_n}^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}\frac{F_0}{m_g} \tag{7.51}$$

Bu sayede (7.46) numaralı denklemin çözümü bulunmuş olur. (7.41) ve (7.46) numaralı denklemler birbiriyle toplandığında, homojen olmayan diferansiyel denklemin çözümü elde edilir.

$$s = ae^{-nt}sin(k_1t + \beta) + A\sin(pt) + B\cos(pt) \tag{7.52}$$

A ve β sabitleri başlangıç koşullarından bulunur. Bu yüzden (7.51) numaralı denklemin, zamana göre türevini alınır.

$$\frac{ds}{dt} = \dot{s} = ae^{-nt}[-nsin(k_1 t + \beta) + k_1 cos(k_1 t + \beta)] - \\ -[Bpsin(pt) + Apcos(pt)] \tag{7.53}$$

(7.52) ve (7.53) numaralı denklemlerde başlangıç koşullarını göz önüne alırsak, bulmak istediğimiz sabitler için aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$s_0 = asin\,\beta + B \tag{7.54}$$

$$\dot{s}_0 = a[-nsin\beta + k_1 cos\beta] + Ap \tag{7.55}$$

Yukarıdaki denklem sistemini çözersek aşağıdaki sonucu elde ederiz:

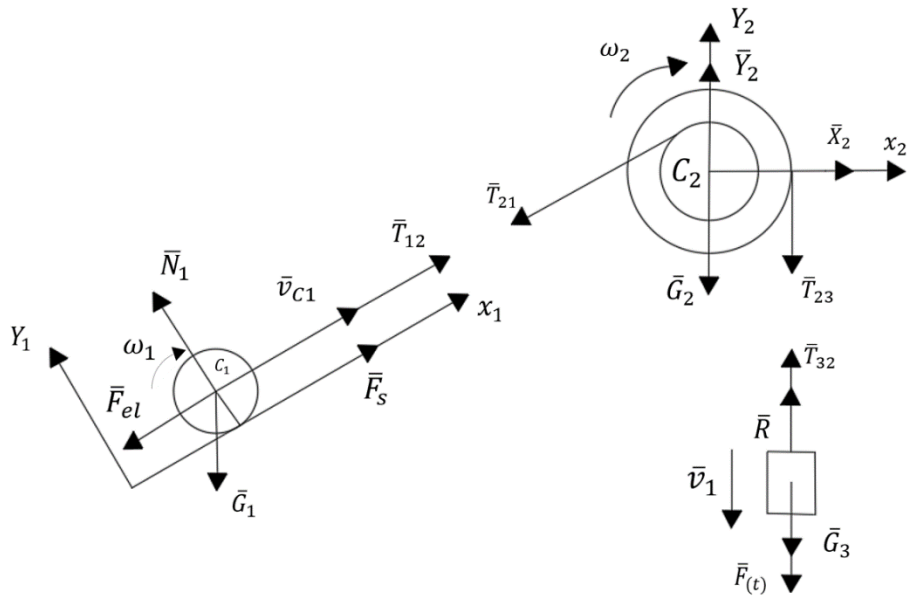
$$a = \sqrt{(s_0 - B)^2 + \frac{1}{k_1^2}(\dot{s}_0 + ns_0 - nB - Ap)^2} \tag{7.56}$$

$$tg\beta = \frac{k_1(s_0 - B)}{\dot{s}_0 + ns_0 - nB - Ap} \tag{7.57}$$

(7.49), (7.50), (7.55) ve (7.56) numaralı ifadeler denklem (7.57)'de yerine yazılarak hareket denkleminin çözümü elde edilir.

7.2.4. İç ve Dış Reaksiyon Kuvvetlerinin Bulunması

İç ve dış reaksiyon kuvvetlerinin bulunabilmesi için mekanizmanın her bir uzvu için serbest cisim diyagramının çizilmesi gerekmektedir [23, 29].



Şekil 7.3. Mekanizmanın serbest cisim diyagramı.

Tepki (reaksiyon) kuvvetlerini saptamak için sistemin momentumunun değişmesi teoremi kullanılmıştır.

$$\frac{d(mv_C)}{dt} = \sum F_i^e \tag{7.58}$$

$$\frac{d\bar{L}_{Cz}}{dt} = \sum \bar{M}_{Cz}^e \tag{7.59}$$

(7.58) ve (7.59) numaralı denklemlerin, koordinat eksenlerine göre izdüşümlerini yazılırsa;

1. Numaralı cisim için;

$$\frac{d(mv_{C1})}{dt} = T_{12} + F_s - F_{el} - G_1 sin\alpha \tag{7.60}$$

$$0 = N_1 - G_1 cos\alpha \tag{7.61}$$

$$\frac{d(I_{C1}\omega_1)}{dt} = -F_s r_1 \tag{7.62}$$

2. Numaralı cisim için;

$$0 = X_2 - T_{21}.cos\alpha \tag{7.63}$$

$$0 = Y_2 - T_{21}.sin\alpha - G_2 - T_{23} \tag{7.64}$$

$$\frac{d(I_{C2}\omega_2)}{dt} = -T_{21}r_2 + T_{23}R_2 \tag{7.65}$$

3. Numaralı cisim için;

$$\frac{dm_3 v_3}{dt} = -T_{32} - R + G_3 + F \tag{7.66}$$

denklemeri elde edilir. (7.7) numaralı kinematik denklemin bağıntılarını (7.60) dan (7.68) numaralı sistem denklemlerine kadar olan yerde yerine yazıldığında, ifadeler aşağıdaki gibi yazılır.

$$m_1 \frac{r_2}{R_2}\,\ddot{s} = T_{12} + F_s - F_{el} - G_1 sin\alpha \tag{7.67}$$

$$\frac{dm_3 v_3}{dt} = -T_{32} - R + G_3 + F \tag{7.68}$$

$$0 = N_1 - G_1 cos\alpha \tag{7.69}$$

$$I_{C1}\frac{r_2}{r_1 R_2}\ddot{s} = -F_s r_1 \tag{7.70}$$

$$0 = X_2 - T_{21}cos\alpha \tag{7.71}$$

$$0 = Y_2 - G_2 - T_{23} - T_{21}sin\alpha \tag{7.72}$$

$$I_{C2}\frac{1}{R_2}\ddot{s} = -T_{21}r_2 + T_{23}R_2 \tag{7.73}$$

$$m_3\,\ddot{s} = -T_{32} - R + G_3 - F_{el} + F \tag{7.74}$$

(7.67 – 7.73) numaralı denklemler,$(\ddot{s}, T_{21}, T_{23}, X_2, Y_2, N_1\ ve\ F_s)$ fonksiyonlarına göre cebirsel denklemlerdir. Bu denklemleri çözüp, reaksiyon kuvvetlerini saptamak için sistemin hareketinin diferansiyel denklemini yazılır.

7.2.5. Bir Serbestlik Dereceli Mekanizmanın Hareket Denkleminin Virtüel İş Prensibi ile Elde Edilmesi

Sistem dinamiğinin genel denklemi D'Alembert prensibi kullanılarak yazılan matematiksel ifadedir [30].

$$\sum \delta A_i^a + \sum \delta A_i^{at} = 0 \tag{7.75}$$

Burada:

$$\sum \delta A_i^a = \sum \bar{F}_i.\,\delta\bar{r}_i \tag{7.76}$$

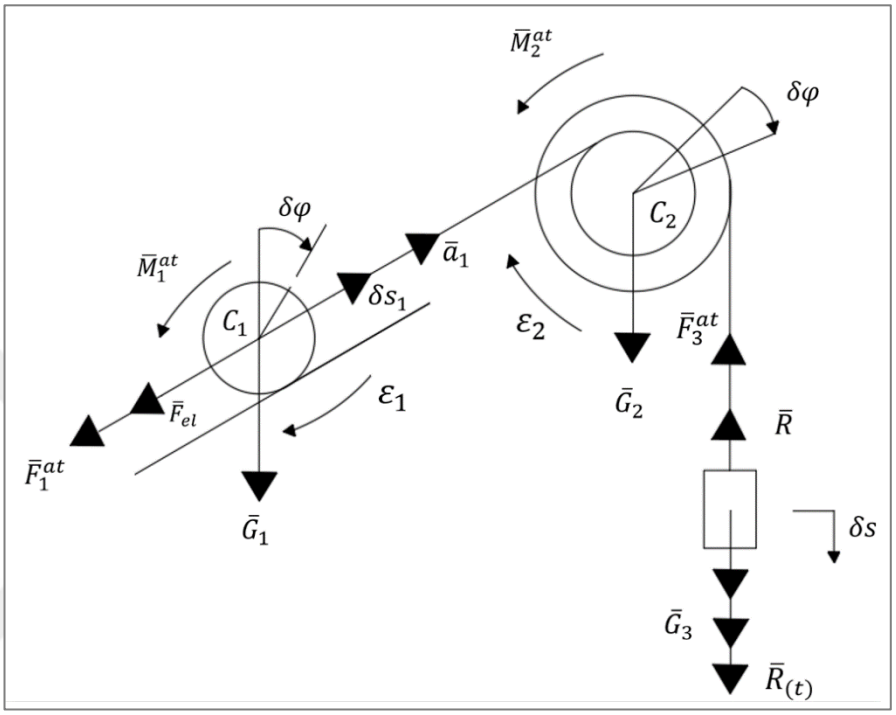
Sistemin virtüel işi, hareket esnasında bütün aktif kuvvetlerinin yaptığı elementer işlerinin toplamına eşittir.

$$\sum \delta A_i^{at} = -\sum m_i\bar{a}_i\delta\bar{r}_i \tag{7.77}$$

Şekil 7.4'te sisteme etkimekte olan bütün aktif kuvvetler ve atalet kuvvetleri gösterilmiştir. Sistemde oluşan $\bar{N}_1, \bar{F}_s, \bar{X}_2, \bar{Y}_2$ kuvvetleri şekil üzerinde gösterilmemiştir. Bunun sebebi o kuvvetlerin istenilen yerdeğişiminde yaptıkları işlerin sıfıra eşit olmasıdır.

Sisteme virtüel iş prensibini uygulanırsa, bu durumda aktif kuvvetlerin yaptığı iş elementer işlerin toplamına eşit olur.

$$\sum \delta A_i^a = \delta A_{G_1} + \delta A_{F_{el}} + \delta A_{G_3} + \delta A_F + \delta A_R \tag{7.78}$$



Şekil 7.4. Sisteme etkimekte olan bütün aktif kuvvetler ve atalet kuvvetleri.

Aktif kuvvetlerin tüm elementer işleri hesaplanarak toplanırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_i^a = \left[-k\frac{r_2^2}{R_2^2}s - \mu\dot{s} + F(t)\right]\delta s = F_s\delta s \tag{7.79}$$

Getirilmiş kuvvetler için F_g analojik ifadeleri (7.25) numaralı denklemden elde edilmiştir.

Atalet kuvvetlerinin yaptığı virtüel işler denklem (7.80) ile hesaplanır.

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_i^{at} = -F_1^{at}\delta s - M_1^{at}\delta\varphi - F_3^{at}\delta s - M_2^{at}\delta\varphi \tag{7.80}$$

Eşdeğer bileşke kuvvet ve eşdeğer bileşke momentin atalet kuvvetlerini hesaplamak için aşağıdaki ifadeler yazılır;

$$F_1^{at} = m_1 a_1 = m_1 \ddot{s}_1 \; ; \qquad M_1^{at} = I_{C1}\varepsilon_1 = I_{C1}\ddot{\varphi}_1 \tag{7.81}$$

$$F_3^{at} = m_3 a_3 = m_3 \ddot{s}_3 \; ; \qquad M_2^{at} = I_{C3}\varepsilon_2 = I_{C2}\ddot{\varphi}_2 \tag{7.82}$$

(7.7) numaralı kinematik bağıntı göz önünde bulundurulduğunda;

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta s}{R_2}\ddot{\varphi}_2 = \frac{\ddot{s}}{R_2} \tag{7.83}$$

$$\delta s_1 = \frac{r_2\delta s}{R_2}\ddot{s}_1 = \frac{r_2\ddot{s}}{R_2} \tag{7.84}$$

$$\delta\varphi_1 = \frac{r_2\delta s}{r_1 R_2}\ddot{\varphi}_1 = \frac{r_2\ddot{s}}{r_1 R_2} \tag{7.85}$$

Atalet kuvvetlerinin virtüel olarak yaptığı işler aşağıdaki gibi yazılır.

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i^{at} = -\left(\frac{3}{2}m_1\frac{r_2^2}{R_2^2} + m_2\frac{i_2^2}{R_2^2} + m_3\right)\ddot{s}\delta s \tag{7.86}$$

Ya da

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i^{at} = -m_g\ddot{s}\delta s \tag{7.87}$$

Böylece:

$$m_g = \frac{3}{2} m_1 \frac{r_2^2}{R_2^2} + m_2 \frac{i_2^2}{R_2^2} + m_3 \tag{7.88}$$

(7.87) numaralı denklem elde edilir. Kütle için analojik ifade daha önceden (7.10) numaralı denklemden elde edilmişti, Şimdi ise (7.78) ve (7.86) ifadeleri (7.74) numaralı ifadede de yerine yazılırsa,

$$\left[-c\frac{r_2^2}{R_2^2}s - \mu\dot{s} + F(t)\right]\delta s - m_g\ddot{s}\delta s = 0 \tag{7.89}$$

(7.87) ifadesinde $\delta s \neq 0$ olduğundan dolayı, zorlanmış titreşim hareketi için aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilmiş olur.

$$\ddot{s} + 2n\dot{s} + {w_n}^2 s = \frac{F_0}{m_g} sin(pt) \tag{7.90}$$

Burada:

$$w_n = \frac{r_2}{R_2}\sqrt{\frac{k}{m_g}} \quad ; \quad n = \frac{\mu}{2m_g} \tag{7.91}$$

(7.91) numaralı diferansiyel denklem önceden elde edilen (7.27) numaralı denklemle ile uyuşmaktadır.

7.2.6. Bir Serbestlik Dereceli Mekanizmanın Hareket Denkleminin Lagrange Metodu ile Elde Edilmesi

Lagrange'in 2. tip denklemi kullanıldığında, incelenen bir serbestlik derecesine sahip mekanik sistemin genelleştirilmiş koordinatlarla diferansiyel denkleminin ifadesi aşağıdaki gibi olacaktır;

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial T}{\partial s} = Q \tag{7.92}$$

Burada, T mekanik sistemin kinetik enerjisini, Q genelleştirilmiş kuvveti, s genelleştirilmiş koordinatı ve $\dot{s}$ genelleştirilmiş hızı ifade etmektedir.

Kinetik enerji ifadeleri (7.8) numaralı denklem ile elde edilmiştir.

Yani,

$$T = \frac{m_g v^2}{2} \tag{7.93}$$

Burada:

$$m_g = \frac{3}{2} m_1 \frac{r_2^2}{R_2^2} + m_2 \frac{i_2^2}{R_2^2} + m_3 \tag{7.94}$$

$v^2 = \dot{s}^2$ olduğu göz önünde bulundurulursa,

$$T = \frac{m_g \dot{s}^2}{2} \tag{7.95}$$

Kinetik enerji ifadesinin türevi alınırsa,

$$\frac{\partial T}{\partial s} = 0; \ \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = m_g \dot{s} \ ; \ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = m_g \ddot{s} \tag{7.96}$$

denklem (7.92)'nin sol tarafındaki ifade, denklem (7.96)'daki gibi elde edilmiş olur. Genelleştirilmiş Q kuvvetini saptayabilmek için mekanik sisteme $\delta \bar{s}$ yerdeğiştirmesi verilir ve tüm aktif kuvvetlerin virtüel ve elementer işleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_i^a = \left[-k \frac{r_2^2}{R_2^2} s - \mu \dot{s} + F(t) \right] \delta s \tag{7.97}$$

Diğer taraftan, bir serbestlik dereceli sistem için,

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_i^a = Q\delta s \tag{7.98}$$

olarak yazılabilir. Bu durumda en son yazılan ifadeler kıyaslandığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$Q = -k\frac{r_2^2}{R_2^2}s - \mu\dot{s} + F(t) \tag{7.99}$$

(7.96) ve (7.98) numaralı denklemler Lagrange denkleminde yerine yazıldığında ele alınan sistemin hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$m_g\ddot{s} = -k\frac{r_2^2}{R_2^2}s - \mu\dot{s} + F(t) \tag{7.100}$$

Ya da

$$\ddot{s} + 2n\dot{s} + {w_n}^2 s = \frac{F_0}{m_g} sin(pt) \tag{7.101}$$

Bulunan (7.101) numaralı denklem (7.27) ve (7.90) numaralı denklemlerle birebir uyuşmaktadır.

7.2.7. Bir Serbestlik Derecesine Sahip Mekanik Sistemin Titreşim Analizi

7.2.7.1. Mekanik Sistemin Ortamın Direnç Mukavemeti İhmal Olunan Durumu İçin Sönümsüz Titreşimi

Önceden elde edilen (7.27) numaralı diferansiyel denklemde sistemin, $n = 0$ olduğu andaki hareketinin denklemi şöyle olur;

$$\ddot{s} + {w_n}^2 s = \frac{F_0}{m_g}\sin pt \tag{7.102}$$

Başlangıç koşullarına göre: $t = t_0 = 0$, olur ve buna dayanarak $s = s_0$ ve $\dot{s} = \dot{s}_0$ olarak bulunur.

7.2.7.1.a. Sönümsüz Serbest Titreşim Durumu

Eğer dışarıdan sistemi tahrik eden kuvvet ihmal edilirse ($F_0 = 0$), homojen diferansiyel denklem aşağıdaki gibi olur.

$$\ddot{s} + {w_n}^2 s = 0 \tag{7.103}$$

Bu denklem, serbest titreşimlerin diferansiyel denklemidir. Yani sistemin hareketi, geri çağrıcı kuvvetin etkisiyle oluşmaktadır. Geri çağrıcı kuvvet her zaman sistemi statik denge durumunu getirmektedir.

(7.103) numaralı denkleminin başlangıç koşullarını göz önünde bulundurulduğunda çözüm şöyle olacaktır:

$$s = asin\,(w_n t + \alpha) \tag{7.104}$$

Burada:

$$a = \sqrt{s_0^2 + \frac{\dot{s}_0^2}{{w_n}^2}}; \quad \alpha = tg^{-1}\left(\frac{s_0 w_n}{\dot{s}_0}\right); \quad w_n = \sqrt{\frac{k_g}{m_g}} \tag{7.105}$$

(7.104) numaralı denklem incelendiğinde aşağıdaki sonuçların elde edildiğini söyleyebiliriz:

1. Bir serbestlik derecesine sahip sistemin serbest titreşimleri harmonik titreşimlerdir.
2. Titreşimin genliği ve faz açısı başlangıç koşullarına bağlıdır.

3. Doğal frekans $\omega_n = \sqrt{\frac{k_g}{m_g}}$ ve titreşimin periyodu $T = \frac{2\pi}{w_n}$ başlangıç koşullarına bağlı değildir ve sadece sistemin karakteristik k_g ve atalet m_g değerlerine bağlıdır.
4. Sistemin içindeki farklı noktaların titreşimlerinin genlik oranları başlangıç koşullarına bağlı değildir. Bu sayede, başlangıç koşullarının genliğe etkisi sadece tüm noktaların a çarpanıyla etkimesidir.
5. Sistemin tüm noktaları her zaman bir fazda yerleşmektedir. Yani aynı zamanda bir denge durumundan geçmektedir. Burada tüm noktaların koordinatları eş zaman anında kendilerinin maksimum değerine ulaşır.

7.2.7.1.b. Sönümsüz Zorlanmış Titreşim Durumu

(7.101) numaralı diferansiyel denklemin başlangıç koşullarına göre çözümü aşağıdaki gibi yazılır;

$$s = s_0 cos\,(\omega_n t) + \frac{\dot{s}_0}{\omega_n} sin\,(\omega_n t) - \frac{Hp}{\omega_n({\omega_n}^2 - p^2)} sin\,(\omega_n t) + \frac{H}{({\omega_n}^2 - p^2)} sin\,(pt) \tag{7.106}$$

Burada:

$$H = \frac{F_0}{m_g} \tag{7.107}$$

(7.106) denkleminin sağ tarafının ilk iki terimi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$s_1 = s_0 cos\,(\omega_n t) + \frac{\dot{s}_0}{\omega_n} sin\,(\omega_n t) = a_1 sin\,(\omega_n t + \alpha_1) \tag{7.108}$$

$$a_1 = \sqrt{s_0^2 + \frac{\dot{s}_0^2}{{\omega_n}^2}}; \quad \alpha_1 = tg^{-1}\left(\frac{s_0 \omega_n}{\dot{s}_0}\right) \tag{7.109}$$

Bu denklem frekansı ω_n olan serbest titreşimi ifade etmektedir. Başlangıç sıfır koşullarında bu tip titreşimler meydana gelmemektedir.

(7.106) numaralı denklemdeki üçüncü terim aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$s_2 = -\frac{Hp}{\omega_n({\omega_n}^2 - p^2)} sin\,(\omega_n t) = a_2 sin(\omega_n t + \pi) \tag{7.110}$$

(7.110) numaralı denklem harmonik titreşimdir. Bu titreşim frekansı ω_n serbest frekanslı sistemlerde sadece genliği tahrik edici kuvvete bağlı olarak oluşmaktadır.

$$a_2 = \frac{F_0}{m_g}\frac{p}{\omega_n}\left(\frac{1}{{\omega_n}^2 - p^2}\right) \tag{7.111}$$

Bu titreşimler de serbest titreşimlerdir.

(7.106) ifadesinin dördüncü terimi

$$s_{zor} = \frac{H}{{\omega_n}^2 - p^2} sin\,t \tag{7.112}$$

Zorlanmış titreşimlerin özelikleri şöyledir:

1. Zorlanmış titreşimler tahrik edici kuvvetin frekansıyla oluşur.
2. Zorlanmış titreşimler başlangıç koşullarına bağlı değildir.
3. Eğer $\omega_n > p$ ise s_{zor}, $F(t)$ kuvveti ile aynı fazda olacaktır.
4. Eğer $\omega_n < p$ ise titreşim cevabı ve $F(t)$ kuvveti zıt fazda olacaktır.

İfade aşağıdaki gibi yazıldığında;

$$s_{zor} = \frac{H}{p^2 - {\omega_n}^2} sin\,(pt + \pi) \tag{7.113}$$

Yukarıdaki denklemden varılacak sonuç, $\omega_n < p$ olduğu durumda tahrikedici kuvvet etkisinde oluşan titreşimler zıt fazlarda bulunacağıdır.

7.2.7.1.c. Rezonans Durumu

Eğer kütle ve yay enerji depolama elemanları olarak düşünülürse, rezonansı anlamak çok daha kolay olacaktır, kütle kinetik enerji oluştururken, yay ise potansiyel enerji depolar. Daha önce de bahsedildiği gibi, kütle ve yay üzerine etkiyen hiçbir kuvvet yoktur, onlar enerjilerini doğal frekansa eşit oranda bir ileri bir geri dönüştürürler. Diğer bir deyişle eğer enerji verimli bir şekilde kütle ve yayın içerisine depolansaydı enerji kaynağının doğal frekansa eşit oranda enerjiye sahip olması gerekirdi. Bir kütle ve yaya bir kuvvet uygulamak bir çocuğu salıncakta sallamaya benzer, eğer daha yükseğe sallamak istiyorsanız doğru zamanda ittirmek zorundasınız. Salıncak örneğinde olduğu gibi daha büyük bir hareket elde etmek için uygulanan kuvvetin illa ki çok fazla olması gerekmemektedir. Bu itmeler sadece enerjinin sistemin içine eklenmesini sağlar.

Sönüm ise enerji depolamak yerine enerjiyi harcar. Sönüm kuvveti hızla orantılı olduğundan, hareket büyüdükçe enerji daha fazla sönümlenir. Böylece sönüm elemanı tarafından sönümlenen enerji ile kuvvet tarafından beslenen enerjinin eşit olduğu bir noktaya ulaşılır. Bu noktada sistem kendi maksimum genliğine ulaşır ve uygulanan kuvvet aynı kaldığı sürece bu genlikte titremeye devam eder. Eğer hiç sönüm yoksa enerji yutacak hiçbir şey yoktur ve böylece hareket teorik olarak sonsuza gider [30].

Eğer $\omega_n = p$ olursa (7.110) ve (7.113) numaralı ifadeler anlamını yitirmiş olur. Bu durumda titreşimi analiz etmek için bu ifadelerinin birlikte incelenmesi gerekir.

$$s_{2_e} = s_2 + s_{zor} = H\left[\frac{-psin\ \omega_n t + \omega_n sin\ pt}{\omega_n({\omega_n}^2 - p^2)}\right]_{p=k} = \frac{0}{0} \tag{7.114}$$

$\frac{0}{0}$ sonucu elde edildiği için bir belirsizlik meydana gelir. Bunun için (7.114) numaralı denklem aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{-psin\ \omega_n t + \omega_n sin\ pt}{\omega_n({\omega_n}^2 - p^2)} = \lim_{p \to k}\left[\frac{-sin\ \omega_n t + \omega_n t cos\ pt}{-2p\omega_n}\right] = \frac{1}{2{\omega_n}^2} sin\ \omega_n t - \frac{t}{2\omega_n} cos\ \omega_n t \tag{7.115}$$

Bu durumda (7.106) numaralı integral, aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$s = s_0 cos\ (\omega_n t) + \frac{\dot{s}_0}{\omega_n} sin\ (\omega_n t) + \frac{H}{2{\omega_n}^2} sin\ (\omega_n t) - \frac{Ht}{2\omega_n} cos\ (\omega_n t) \tag{7.116}$$

Burada da yani (7.106) numaralı ifadede olduğu gibi salınım dalgalarının hareketi doğrusal üç titreşim hareketiyle meydana gelmektedir, fakat (7.106) numaralı denklemden çok farklı olur. Burada zorlanmış titreşimler periyodik değildir.

$$s_{zor} = -\frac{Ht}{2\omega_n} cos\ (\omega_n t) = \frac{H}{2\omega_n} t sin\ \left(\omega_n t - \frac{\pi}{2}\right) \tag{7.117}$$

Zaman geçtikçe bu değer mutlak değer olarak sınırsızca ve genliğin doğrusal kanunuyla büyümektedir. Böyle bir durumda ki titreşim hareketine rezonans adı verilir. Rezonans bir sistemin (genellikle doğrusal bir sistemin) bazı frekanslarda diğerlerine nazaran daha büyük genliklerde salınması eğilimidir. Bunlar, o sistemin rezonans (tınlaşım) frekansları olarak adlandırılır. Bu frekanslarda küçük periyodik kuvvetler bile çok büyük genlikler üretebilir [31].

Zorlanmış titreşimlerin frekansı serbest titreşimlerin frekansına eşit değildir, fakat yakındır, bu durumda (7.114) numaralı ifade aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$s_{2_e} = s_2 + s_{zor} = \frac{H}{{\omega_n}^2 - p^2}\left(-\frac{p}{\omega_n} sin\ \omega_n t + sin\ pt\right) \tag{7.118}$$

$p \neq \omega_n$ olduğunu fakat $p + \omega_n \approx 2\omega_n,\ p/\omega_n \approx 1$, olduğunu

${\omega_n}^2 - p^2 = (\omega_n + p)(\omega_n - p) = 2\omega_n(\omega_n - p)$ varsayılarak (7.118) numaralı ifade aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$s_{2_e} = \frac{H}{2\omega_n(\omega_n - p)}(sin\, pt - sin\, \omega_n t) \tag{7.119}$$

Trigonometrik ifadeleri kullanarak aşağıdaki denklemleri yazılır:

$$sin\, x - sin\, y = 2cos\frac{x+y}{2} sin\frac{x-y}{2} \tag{7.120}$$

Burada,

$$s_{2_e} = s_2 + s_{zor} = \frac{H}{\omega_n(\omega_n - p)} sin\, \frac{p-\omega_n}{2}\, tcos\, \omega_n t \tag{7.121}$$

Yani,

$$s_{2_e} = A_e(t) cos\, \omega_n t \tag{7.122}$$

Yani sonuç olarak:

$A_e = \frac{H}{\omega_n(\omega_n - p)} sin\, \frac{p-\omega_n}{2} t$ periyodik fonksiyonlu titreşimin genliği

Çok az yavaşlayan periyotlu

$$\tau_A = \frac{2\pi}{\frac{p-\omega_n}{2}} \tag{7.123}$$

Ve titreşimin kendi periyodu

$$\tau_{zor} = \frac{2\pi}{p} \tag{7.124}$$

Yani $\tau_A \gg \tau_{zor}$ ve küçük frekanslı $p - \omega_n/2$

Zorlanmış titreşimin frekansı serbest titreşimin frekansına çok yakınsa (fakat eşit değilse) sistemde titreşim oluşur [32].

7.2.7.2. Mekanik Sistemin Direnç Mukavemeti İhmal Olmayan Viskoz Ortamdaki Titreşimi

Sistemin viskoz ortamdaki hareket denklemdi denklem (7.125)'de gösterildiği gibi önceki bölümlerde elde edilmiştir.

$$\ddot{s} + 2n\dot{s} + k^2 s = \frac{F_0}{m_g} sin\, pt \tag{7.125}$$

Sistemin başlangıç koşulları $s = s_0$ ve $\dot{s} = \dot{s}_0$ olarak alınmıştır.

7.2.7.2.a. Sönümlü Serbest Titreşim Durumu

(7.125) numaralı denklem, tahrik edici kuvvetin ihmal edilmesi ($F_0 = 0$) durumunda aşağıdaki gibi yazılır.

$$\ddot{s} + 2n\dot{s} + {w_n}^2 s = 0 \tag{7.126}$$

Düşük mukavemet durumu ele alınırsa ($n < w_n$), (7.126) numaralı homojen diferansiyel denkleminin genel çözümünü aşağıdaki gibi yazılır;

$$s = ae^{-nt} sin\,(k_1 t + \alpha) \tag{7.127}$$

$$k_1 = w_d = \sqrt{k^2 - n^2} \;\; ; \;\; w_n = \sqrt{\frac{k_g}{m_g}} \tag{7.128}$$

Burada:

$$a = \sqrt{s_0^2 + \frac{1}{k_1^2}(\dot{s}_0 + ns_0)^2} \quad , \qquad \alpha = tg^{-1}\left(\frac{s_0 k_1}{\dot{s}_0 + ns_0}\right) \tag{7.129}$$

Sistemin hareket denkleminin çözümünden yani (7.127) numaralı denklemden anlaşılmaktadır ki, mukavemetli ortamda:

1. Serbest titreşimler sönümlü titreşimler olur.
2. Sönümlü titreşimlerin frekansı $k_1 = \sqrt{{w_n}^2 - n^2}$ sönümlü olmayan titreşimlerin frekansından küçüktür ($k_1 < w_n$).
3. Sönümlü titreşimlerin genliği, $A = a.e^{-nt}$ üstel (eksponansiyel) kanunla sönümlenir.
4. Sönümlü titreşimlerin periyodu yani $\tau_1 = 2\pi/k_1$ sönümlü olmayan titreşimlerin periyodundan yani $\tau = 2\pi/w_n$ 'dan büyüktür.
5. İstenilen iki komşu genliğin oranı;($A_i = ae^{-nt}$ ve $A_{i+1} = ae^{-n(t+\frac{1}{2}\tau_1)}$)her zaman sabittir. Yani,

$$b = \frac{A_i}{A_{i+1}} = e^{\frac{1}{2}\tau_1} \tag{7.130}$$

Bu orana sönümün katsayısı adı verilir ve Logaritmik katsayı olarak isimlendirilir.

$$\gamma = ln\, b = \frac{1}{2} n\tau_1 \tag{7.131}$$

Bu katsayılar sönümlü titreşimin genliğinin sönümlenmesinin (sıfıra yaklaşmasını) tezliğini (çabukluğunu) değerlendirmek için kullanılır [33].

7.2.7.2.b. Sönümlü Zorlanmış Titreşim Durumu

Bu durumda hareketin diferansiyel denklemi homojen olmayacaktır.

$$\ddot{s} + 2n\dot{s} + {w_n}^2 s = \frac{F_0}{m_g} sin\, pt \tag{7.132}$$

Bu denklemin genel çözümü şöyle olur.

$$s = C_1 e^{-nt} cos\, k_1 t + C_2 e^{-nt} sin\, k_1 t + D sin\,(pt - \delta) \tag{7.133}$$

Başlangıç koşulları $s = s_0$; $\dot{s} = \dot{s}_0$ olduğu andaki integral sabitleri aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned} C_1 &= s_0 + D sin\,\delta \\ C_2 &= \frac{1}{k_1}[s_0 + n(s_0 + D sin\,\delta) - Dp cos\,\delta] \end{aligned} \tag{7.134}$$

İntegral sabitleri (7.134) numaralı denklemde yerine yazılırsa, hareket denkleminin çözümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} s = a.e^{-nt} sin\,(k_1 t + \alpha) + \frac{n}{k_1} D e^{-nt} sin\,\delta sin\, k_1 t + \\ + D e^{-nt}\left(sin\,\delta cos\, k_1 t - \frac{p}{k_1} cos\,\delta sin\, k_1 t\right) + D sin\,(pt - \delta) \end{aligned} \tag{7.135}$$

Burada:

$$a = \sqrt{s_0^2 + \frac{(\dot{s}_0 + n s_0)^2}{k_1^2}} \qquad tg\alpha = \frac{s_0 k_1}{\dot{s}_0 + n s_0} \tag{7.136}$$

$$D = D_0 \eta\ ;\ D_0 = \frac{F_0}{k_g}\ \ ;\ \ tg\delta = \frac{2np}{{w_n}^2 - p^2} \tag{7.137}$$

Burada η dinamiklik katsayısıdır ve aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{{w_n}^2}\right)^2 + 4\frac{n^2}{{w_n}^2}\frac{p^2}{{w_n}^2}}} \tag{7.138}$$

(7.135) numaralı ifadenin birinci terimi sönümlü titreşimi ifade etmektedir.

$$s_1 = a.e^{-nt} sin\,(k_1 t + \alpha) \tag{7.139}$$

İkinci ve üçüncü terimlerin toplamı da eşlik eden titreşimdir.

$$s_2 = \frac{n}{k_1} De^{-nt} \sin\delta \sin(k_1 t) + De^{-nt}(sin\,\delta cos(k_t) - \frac{p}{k_1} cos\delta sin\,(k_1 t) \tag{7.140}$$

Sonuncu terim harekete geçirici (tahrik edici) kuvvetin zorlanmış titreşimdir.

$$s_{zor} = Dsin\,(pt - \delta) \tag{7.141}$$

Böylece zorlanmış titreşimlerin genliği rezonans olayında küçük mukavemetlerde en büyük değerlere sahip olur [34].

$$D = D_0 \frac{1}{2\frac{n}{w_n}} \tag{7.142}$$

Eğer $p \neq w_n$ ise fakat birbirine çok yakınsa o zaman $p/k_1 \approx 1$ ifadesi, (7.140) numaralı denklemde yerine koyulursa eşlik eden titreşimlerin ifadesi şu şekilde yazılabilir:

$$s_2 = \frac{n}{n} De^{-nt} sin\,\delta sin\,(k_1 t) + De^{-nt} sin\,(k_1 t - \delta) \tag{7.143}$$

(7.141) ve (7.143) numaralı ifadeleri birlikte incelenir ve bu ifadelere aşağıdaki ifade eklenip sıfıra eşitlenirse;

$$De^{-nt} sin\,(pt - \delta) - De^{-nt} sin\,(pt - \delta) \tag{7.144}$$

olarak bulunur. Böylece mekanik sistemin hareket denkleminin çözümü aşağıdaki gibi olur:

$$s = \frac{n}{k_1} De^{-nt} sin\,(k_1 t) + D(1 - e^{-nt}) sin\,(pt - \delta) + \\ + De^{-nt}[sin\,(pt - \delta) - sin\,(k_1 t - \delta)] \tag{7.145}$$

(7.119) numaralı denklemdeki gibi burada da köşeli parantezlerdeki ifadeler aşağıdaki gibi gösterilmiştir.

$$sin\,(pt - \delta) - sin\,(k_1 t - \delta) = 2.sin\left(\frac{p - k_1}{2} t\right) cos\,\left(\frac{p + k_1}{2} t - \delta\right) \tag{7.146}$$

$p + k_1 \approx 2p$ olarak kabul edip denklemde yerine yazılırsa,

$$s = \frac{n}{k_1} De^{-nt} sin\, k_1 t + D(1 - e^{-nt}) sin\,(pt - \delta) + \\ + 2De^{-nt} sin\,\left(\frac{p - k_1}{2} t\right) cos\,(pt - \delta) \tag{7.147}$$

(7.145) ifadesindeki sonuncu terim sönümlü titreşimli çarpıntı titreşimi ifade etmektedir.

$$A_ç = 2De^{-nt} sin\,\left(\frac{p - k_1}{2}\right) \tag{7.148}$$

Yani,

$$s_ç = A_ç cos\,(pt - \delta) \tag{7.149}$$

(7.145) ifadesindeki ikinci terim ise sönümlü olmayan zorlanmış titreşimdir.

$$s_{zor} = D(1 - e^{-nt}) sin\,(pt - \delta) \tag{7.150}$$

(7.145) ifadesindeki birinci terim ise bu sönümlü titreşime eşlik eden titreşimdir.

$$s_{e.eden} = \frac{n}{k_1} De^{-nt} sin\, k_1 t \tag{7.151}$$

Böylece gerçek durumlarda ($n \neq 0$) çarpıntı titreşimleri tahrikedici kuvvetle meydana gelen frekans sönümlü titreşimin frekansına yakın olmasının yanı sıra pratikte çok önemlidir [35].

Kararlı hareket oluştuğunda ise mukavemet yüksek olacaktır, bu durumun hareket denklemiyse aşağıdaki gibi olur:

$$s_{zor} = Dsin\,(pt - \delta) \tag{7.152}$$

7.3. Sayısal Analiz Çalışmaları

Bu bölümde, hareket denklemi çeşitli yöntemlerle elde edilip hareket denkleminin çözümü yapılan sistemin ilk olarak viskoz olmayan ortamdaki serbest titreşim analizi ve zorlanmış titreşim analizi yapılmıştır. Daha sonra sistemin viskoz ortamdaki serbest titreşim analizi ve zorlanmış titreşim analizi yapılmış ve rezonans durumu incelenmiştir. Titreşim analizleri Matlab yazılımı kullanılarak, $\Delta t = 0.01$ zaman adımında yapılmıştır.

7.3.1. Viskoz Olmayan Ortamda Serbest Titreşim Analizi

Ele alınan sistemin serbest titreşim analizinde ortam viskoz olmadığı için sönüm etkisi ihmal edilmiştir. Analiz çalışmasında aşağıdaki veriler kullanılmıştır.

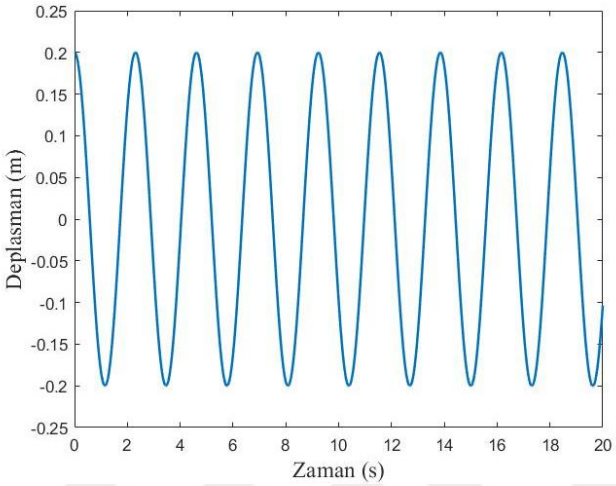
$$r_1 = 0.2\,m, \qquad r_2 = 0.2\,m, \qquad R_2 = 0.8\,m, \qquad i_2 = 0.6m, \qquad m_1 = 4kg,$$
$$m_2 = 6kg, \qquad m_3 = 3\,kg, \qquad c = 800\,\frac{N}{m}$$

Ele alınan sistemin serbest titreşim cevabı denklem (7.153)'deki gibi elde edilmiştir.

$$s = asin\,(w_n t + \alpha) \tag{7.153}$$

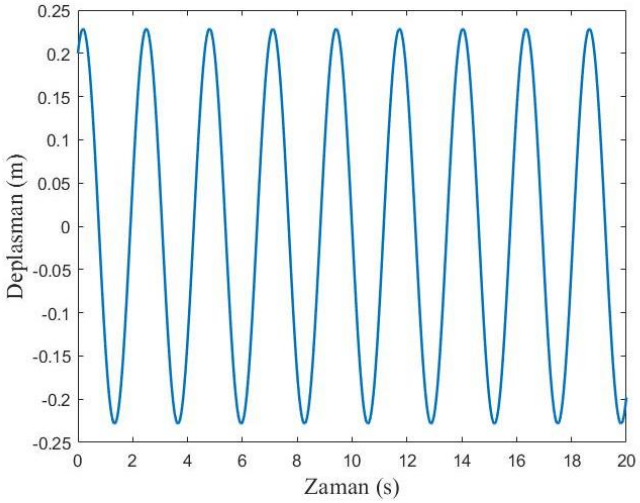
$$a = \sqrt{s_0^2 + \frac{\dot{s}_0^2}{{w_n}^2}}; \quad \alpha = tg^{-1}\left(\frac{s_0 w_n}{\dot{s}_0}\right); \quad k = \sqrt{\frac{k_g}{m_g}} \tag{7.154}$$

$s_0 = 0.2\,m,\ \dot{s}_0 = 0$ başlangıç koşulları için sistemin serbest titreşim cevabı Şekil 7.5 deki gibi elde edilmiştir.



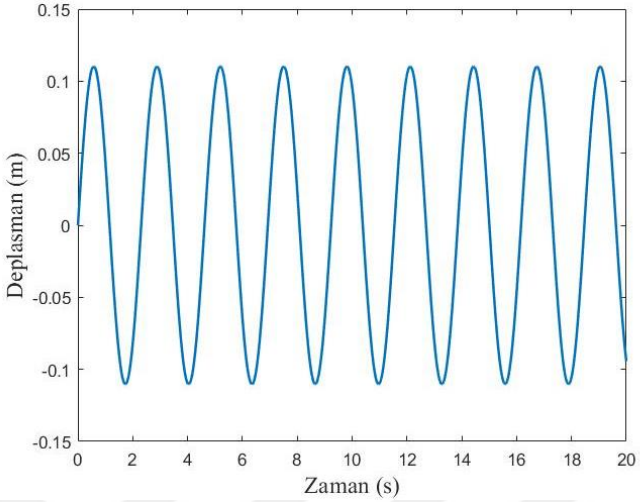
Şekil 7.5. $s_0 = 0.2\,m,\ \dot{s}_0 = 0$ başlangıç koşulları için sistemin serbest titreşim cevabı.

$s_0 = 0.2\,m, \dot{s}_0 = 0.3\,m/s$ başlangıç koşulları için sistemin serbest titreşim cevabı Şekil 7.6 daki gibi elde edilmiştir.



Şekil 7.6. $s_0 = 0.2\,m, \dot{s}_0 = 0.3\,m/s$ başlangıç koşulları için sistemin serbest titreşim cevabı.

$s_0 = 0\ m,\ \dot{s}_0 = 0.3\ m/s$ başlangıç koşulları için sistemin serbest titreşim cevabı Şekil 7.7 deki gibi elde edilmiştir.



Şekil 7.7. $s_0 = 0, \dot{s}_0 = 0.3$ başlangıç koşulları için sistemin serbest titreşim cevabı.

7.3.2. Viskoz Olmayan Ortamda Zorlanmış Titreşim Analizi

Ele alınan sistemin zorlanmış titreşim analiz çalışmasında aşağıdaki veriler kullanılmıştır.

$$r_1 = 0.2\ m, \qquad r_2 = 0.2\ m, \qquad R_2 = 0.8\ m, \qquad i_2 = 0.6\ m$$

$$m_1 = 4kg, \qquad m_2 = 6kg, \qquad m_3 = 3\ kg, \qquad c = 800\,\frac{N}{m}$$

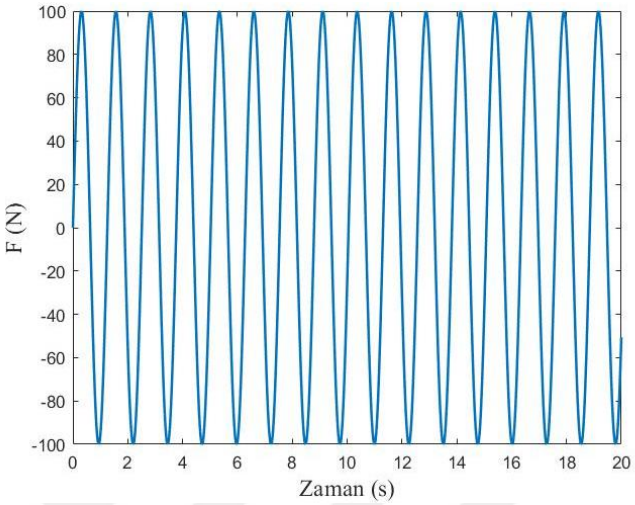
$$F = 100\sin(5t)\ N, \qquad p = 5\ rad/s$$

Ele alınan sistemin zorlanmış titreşim cevabı denklem (7.155)'teki gibi elde edilmiştir.

$$s = s_0 cos\ (\omega_n t) + \frac{\dot{s}_0}{\omega_n} sin\ (\omega_n t) - \frac{Hp}{\omega_n({\omega_n}^2 - p^2)} sin\ (\omega_n t) + \frac{H}{({\omega_n}^2 - p^2)} sin\ (pt) \tag{7.155}$$

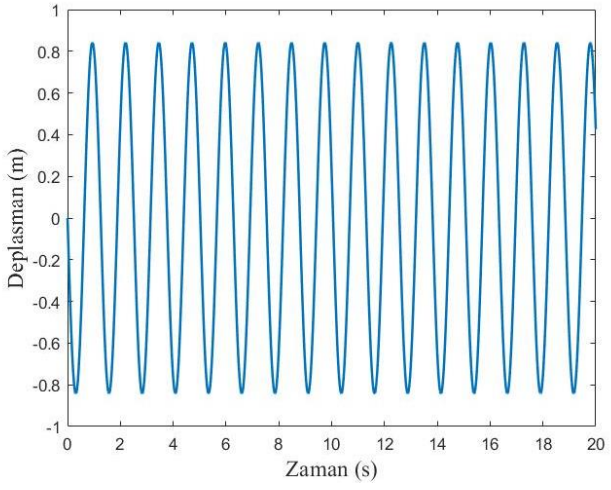
$$H = \frac{F_0}{m_g} \tag{7.156}$$

Sisteme Şekil 7.8 de gösterildiği gibi $F = 100\sin(5t)$ harmonik dış kuvveti uygulanmıştır.



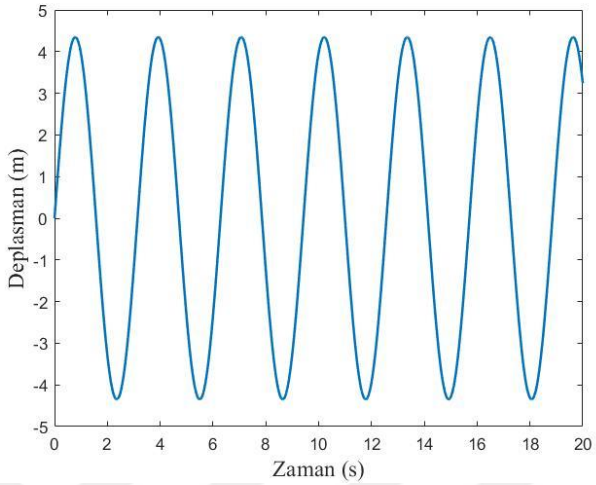
Şekil 7.8. Sisteme uygulanan $F = 100\sin(5t)$ harmonik dış kuvveti.

Sisteme $F = 100\sin(5t)$ harmonik dış kuvvet uygulanması durumunda zorlanmış titreşim cevabı Şekil 7.9 daki gibi elde edilmiştir ($w > w_n$).



Şekil 7.9. Sisteme $F_0 = 100\sin(5t)$ harmonik dış kuvvet uygulanması durumunda zorlanmış titreşim cevabı.

Sisteme $F = 100\sin(2t)$ harmonik dış kuvvet uygulanması durumunda zorlanmış titreşim cevabı Şekil 7.10 deki gibi elde edilmiştir ($w < w_n$).



Şekil 7.10. Sisteme $F_0 = 100\sin(2t)$ harmonik dış kuvvet uygulanması durumunda zorlanmış titreşim cevabı.

Şekil 7.9 da görüldüğü gibi uygulanan zorlama kuvvetinin frekansı sistemin doğal frekansından büyük olduğu durumda kuvvet ve sistem cevabı zıt fazda olmaktadır. Uygulanan kuvvetin frekansı sistemin doğal frekansından küçük olduğu durumda ise Şekil 7.10 da görüldüğü gibi kuvvet ve sistem cevabı aynı fazda olmaktadır.

7.3.3. Viskoz Olmayan Ortamda Rezonans Durumu ($w_n = p$)

Rezonans durumundaki hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

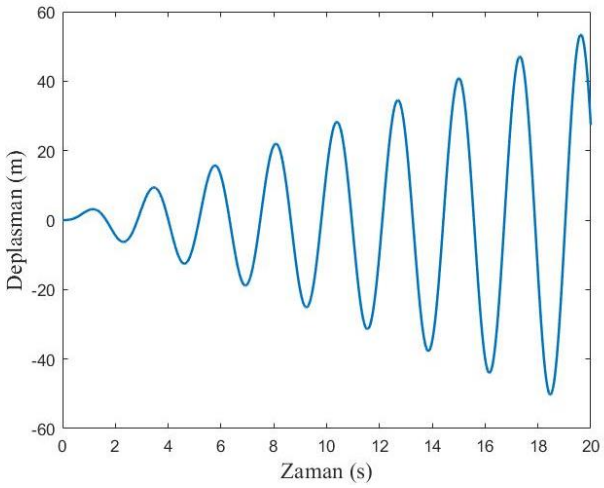
$$s = s_0 cos\,(w_n t) + \frac{\dot{s}_0}{w_n} sin\,(w_n t) + \frac{H}{2{w_n}^2} sin\,(w_n t) - \frac{Ht}{2w_n} cos\,(w_n t) \qquad (7.157)$$

Ele alınan sistemin rezonans durumunu incelemek için aşağıdaki veriler kullanılmıştır.

$r_1 = 0.2\,m, \quad r_2 = 0.2\,m, \quad R_2 = 0.8\,m, \quad i_2 = 0.6\,m \quad m_1 = 4kg$

$m_2 = 6kg, \quad m_3 = 3\,kg, \quad c = 800\,\frac{N}{m}, \quad F = 100\sin(5t)\ N$

Viskoz olmayan ortamda rezonans durumu Şekil 7.11 deki gibi elde edilmiştir.



Şekil 7.11. Viskoz olmayan ortamda rezonans durumu.

Şekil 7.11 de görüldüğü gibi uygulanan dış kuvvetin frekansı sistemin doğal frekansı ile çakıştığı zaman rezonans durumu ortaya çıkmakta ve titreşim genlikleri sonsuza gitmektedir.

7.3.4. Viskoz Ortamda Serbest Titreşim Analizi

Ele alınan sitemin viskoz ortamdaki serbest titreşim cevabı aşağıdaki denklemler ile bulunmuştur.

$$s = ae^{-nt} sin\,(k_1 t + \alpha) \tag{7.158}$$

$$k_1 = \sqrt{{w_n}^2 - n^2} \;\; ; \;\; w_n = \sqrt{\frac{k_g}{m_g}} \tag{7.159}$$

$$a = \sqrt{s_0^2 + \frac{1}{k_1^2}(\dot{s}_0 + n s_0)^2} \quad , \qquad \alpha = tg^{-1}\left(\frac{s_0 k_1}{\dot{s}_0 + n s_0}\right) \tag{7.160}$$

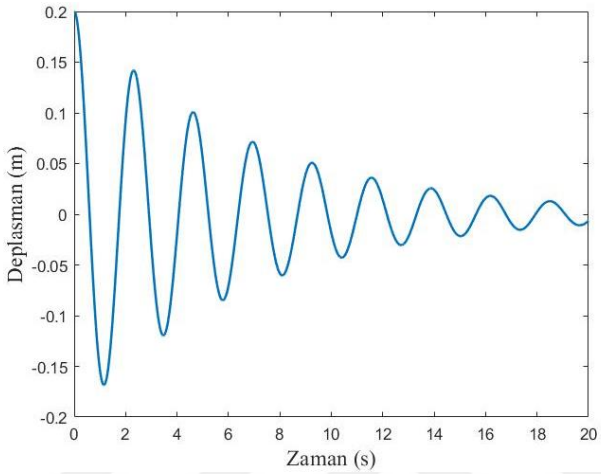
Ele alınan sistemin viskoz ortamdaki serbest titreşimini incelemek için aşağıdaki veriler kullanılmıştır.

$r_1 = 0.2\,m, \qquad r_2 = 0.2\,m, \qquad R_2 = 0.8\,m, \qquad i_2 = 0.6\,m, \;\; m_1 = 4kg,$

$$m_2 = 6kg, \qquad m_3 = 3\ kg, \qquad c = 800\frac{N}{m}, \quad \mu = 0.1\ ,$$

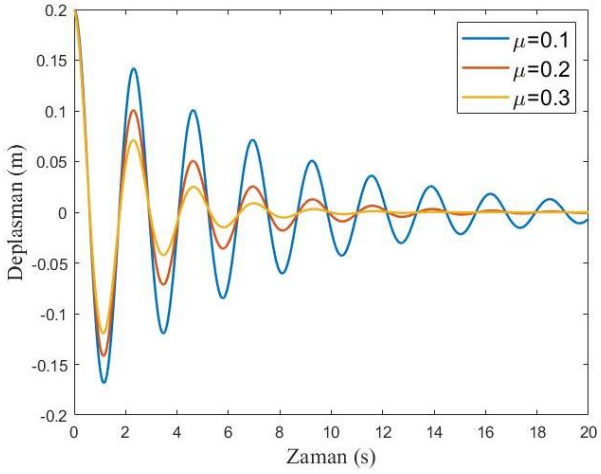
$$s_0 = 0.2\ m, \qquad \dot{s}_0 = 0\ m/s$$

Verilen parametrelere göre sistemin viskoz ortamdaki serbest titreşim cevabı Şekil 7.12 de gösterilmiştir.



Şekil 7.12. Sistemin viskoz ortamdaki serbest titreşim cevabı.

Farklı ortam viskozite değerleri için sitemin sönümlü serbest titreşim cevabı Şekil 7.13'te gösterilmiştir. Şekilde görüldüğü gibi ortam viskozitesi arttıkça ortamın sönümleme kabiliyeti artmakta ve böylelikle titreşim daha çabuk sönümlenmektedir.



Şekil 7.13. Viskoziteye göre serbest titreşim cevabının değişimi.

7.3.5. Viskoz Ortamda Zorlanmış Titreşim Analizi

Ele alınan sitemin viskoz ortamdaki hareket denklemleri bölüm 7.8'de aşağıdaki denklemler ile bulunmuştur.

$$s = ae^{-nt}sin\,(k_1 t + \alpha) + \frac{n}{k_1} De^{-nt} sin\,\delta sin\,k_1 t + \\ + De^{-nt}\left(sin\,\delta cos\,k_1 t - \frac{p}{k_1} cos\,\delta sin\,k_1 t\right) + Dsin\,(pt - \delta) \tag{7.161}$$

Burada:

$$a = \sqrt{s_0^2 + \frac{(\dot{s}_0 + ns_0)^2}{k_1^2}} \qquad tg\alpha = \frac{s_0 k_1}{\dot{s}_0 + ns_0} \tag{7.162}$$

$$D = D_0\eta\ ;\ D_0 = \frac{F_0}{k_g}\ \ ;\ \ tg\delta = \frac{2np}{{w_n}^2 - p^2} \tag{7.163}$$

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{{w_n}^2}\right)^2 + 4\frac{n^2}{{w_n}^2}\frac{p^2}{{w_n}^2}}} \tag{7.164}$$

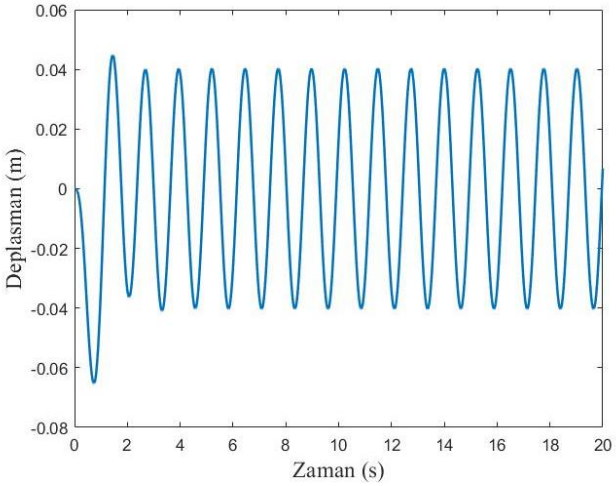
Ele alınan sistemin viskoz ortamdaki zorlanmış titreşimini incelemek için aşağıdaki veriler kullanılmıştır.

$r_1 = 0.2\,m, \quad r_2 = 0.2\,m, \quad R_2 = 0.8\,m, \quad i_2 = 0.6\,m, \quad m_1 = 4kg,$

$m_2 = 6kg, \quad m_3 = 3\,kg, \quad c = 800\frac{N}{m}, \quad F = 100\sin(5t)\ N, \quad \mu = 0.1$

$s_0 = 0\,m, \quad \dot{s}_0 = 0\,m/s$

Sisteme $F_0 = 100\sin(5t)$ harmonik dış kuvvet uygulanması durumunda zorlanmış titreşim cevabı Şekil 7.14'te gösterilmiştir.



Şekil 7.14. Sisteme $F_0 = 100\sin(5t)$ harmonik dış kuvvet uygulanması durumunda zorlanmış titreşim cevabı.

7.4. Bir Serbestlik Dereceli Mekanizmanın Hareket Denklemlerinin MATLAB/Simulink Yazılımında Çözümü

Daha önceki bölümlerde ele alınan tek serbestlik dereceli mukavemetli ortamda çalışan mekanizmanın hareket denklemleri üç farklı yöntem ile elde edilip sistemin serbest ve zorlanmış titreşim cevabı elde edilerek simülasyonları gerçekleştirilmiştir. Böylelikle üç farklı yöntem ile hareket denklemi doğrulanmıştır. Bu bölümde ise hareket denkleminin çözümü MATLAB/Simulink yazılımında yapılarak sistemin zorlanmış titreşim cevabı $\Delta t = 0.01$ zaman adımı ile Runge-Kutta çözüm metodu kullanarak elde edilmiştir. Böylelikle de hareket denkleminin çözümü doğrulanmıştır.

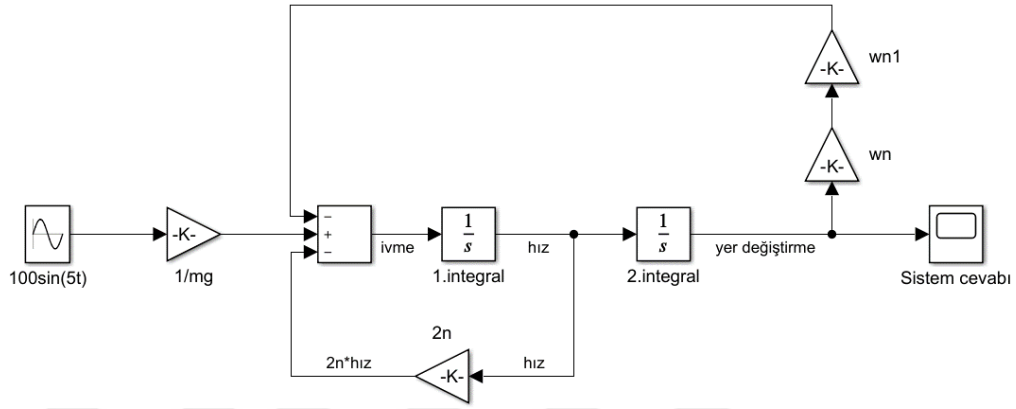
Sistemin hareket denklemi daha önceki başlıklarda aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\ddot{s} + 2n\dot{s} + {w_n}^2 s = \frac{1}{m_g} F(t) \tag{7.165}$$

Denklem (7.165) yeniden düzenlenerek aşağıdaki gibi yazılabilir.

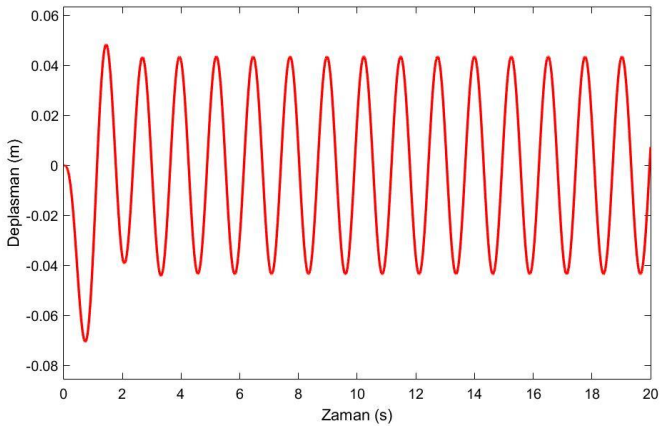
$$\ddot{s} = \frac{1}{m_g} F(t) - 2n\dot{s} - {w_n}^2 s \tag{7.166}$$

Denklem (7.165), Şekil 7.15'teki gibi MATLAB/Simulink ortamında blok diyagramlarla ifade edilip çözümü yapılmıştır. Diyagramdan görüldüğü gibi ilk olarak $\ddot{s}$ ivme ifadesi elde edilmiş daha sonra ivmenin peş peşe iki kere integrali alınarak sistemin hız ve yer değiştirme cevabı elde edilmiştir.



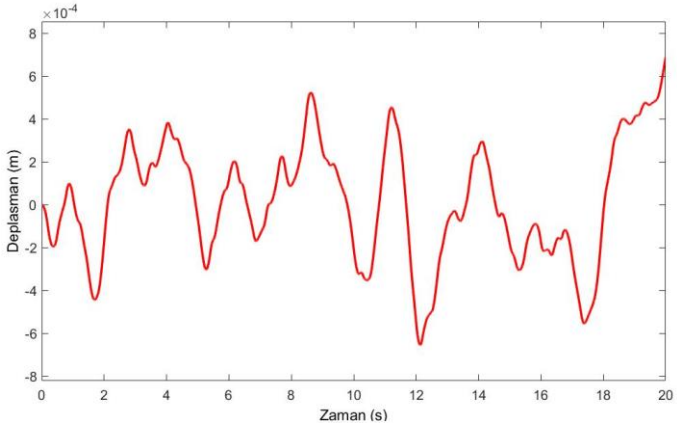
Şekil 7.15. Simulink modeli.

Sisteme $F_0 = 100\sin(5t)$ harmonik dış kuvvet uygulanması durumunda zorlanmış titreşim cevabı Şekil 7.16'daki gibi elde edilmiştir.



Şekil 7.16. Simulink modelinden elde edilen sistemin titreşim cevabı.

Ayrıca sisteme rastgele titreşim genliklerinden oluşan random giriş kullanılmış ve sistemin cevabı Şekil 7. 17'deki gibi elde edilmiştir.



Şekil 7.17. Sistemin rastgele (random) titreşim cevabı.

BÖLÜM 8

SONUÇLAR

Yapılan çalışmada, mekanik sistem Lagrange metodu, virtüel iş prensibi ve sistemin kinetik enerjisinin değişmesi teoremi kullanılarak dinamik ve statik olarak incelenmiştir. Lagrange metodu, virtüel iş prensibi ve sistemin kinetik enerjisinin değişmesi teoremi kullanılarak, mukavemetli ortamda çalışan mekanizmanın hareket denklemi üç farklı yöntem ile elde edilerek doğrulanmıştır. Sistemdeki iç ve dış reaksiyon kuvvetleri sistemin momentumunun değişmesi teoremi ile bulunmuştur

Durağan sistemler incelenirken, sistemin etki altında kaldığı kuvvetler miktarınca yazılan eşitliklerle değil, virtüel işler yöntemiyle sonuçlar elde edilmiştir. Dinamik sistemler incelenirken de kinematik ve kinetik eşitlikler kullanılmayıp, bunun yerine Lagrange denklemleri vasıtasıyla sonuçlara ulaşılmıştır. Virtüel işler prensibini statik sistemlerde kullanarak, sistemin çözümlenmesinde kuvvetlerin adedi kadar denklem sayısı oluşturulamadığı zamanlarda, bilinmeyen kuvvetler bulunmuştur. Bu durum ise yüklemenin fazla olduğu statik sistem ve bu sistemlerin çözümlenmesini kolaylaştırır ayrıca uzun ve zaman alıcı denklemler ile zaman kaybı minimuma inmiş olur.

Lagrange denklemlerini seçmek ve tercih etmek bize dinamik sistemlerde kuvvetler tesiri altında kalarak hareket eden sistemlerde ve bu sistemlerin anlaşılmasında kinematik ve kinetik formülasyonlara ihtiyaç duymadan, hızı, ivme ve harekete neden olan kuvvetlerin saptanmasını sağlamıştır. Lagrange denklemlerini kullanarak hareket halinde olan sistemler statik sistem olarak değerlendirilmiştir. Elde edilen hareket denklemleri ortamın mukavemetli ve mukavemetsiz olduğu durumları için MATLAB/Simulink programında zorlanmış ve serbest titreşimlerinin analizi yapılmıştır ve bulunan denklemlerin doğruluğu ispatlanmıştır. Bu sayede hareket durumundaki sistemlerin ivmesini ve hızını, ayrıca bu hız ve ivmeye sebep olan

kuvvetlerin saptanmasında ki denklem fazlalığını azaltmış ve direkt olarak çözüm bulunmasını sağlamıştır.

KAYNAKLAR

1. Козик и др, А. “Теория механизмов машин”, ***БГАТУ,*** Минск, 119 (2009).

2. Сильченко и др, П. “Теория механизмов и машин”, ***НГТУ,*** Красноярск, 28-30 (2008).

3. Артоболевский, И. “Теория механизмов и машин”, ***Наука,*** Москва, 551-553 (1988).

4. Kərimov, S. X., Həşimov, E. Q. and Həsənov, Q. E. “Maşın və mexanizmlər nəzəriyyəsi”, ***Ders Kitabı,*** Bakı, 77-79 (2012).

5. Aktaş, K.G., “Piezoelektrik sensör ve eyleyici entegre edilmiş akıllı kiriş ve plakaların aktif titreşim kontrolü, statik ve dinamik analizi”, Doktora Tezi, ***Karabük Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Ensitütüsü,*** Karabük, 34-40 (2021).

6. Aktaş, K.G. “Yatay eksenli bir çamaşır makinesinin dinamik modellenmesi ve titreşim karakteristiklerinin belirlenmesi”, Yüksek Lisans Tezi, ***Karabük Üniversitesi Fen Bilimleri Ensitütüsü***, Karabük, 14-38 (2016).

7. Kasap, Z. “Euler-lagrange equations on three-dimensional space”, ***Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi,*** 10 (1): 55-61 (2014).

8. Adar, N. G., Ören, H. ve Kozan, R. “5 serbestlik dereceli robot kolunun modellenmesi ve kontrolü”, ***Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi,*** 17 (1): 155-160 (2013).

9. Eroğlu, M., Koç, M. A., Kozan, R. ve Esen, İ. “Kayan kipli kontrol kullanılarak çeyrek araç ve köprü titreşimlerinin aktif kontrolü”, ***Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University,*** 1-14 (2021).

10. Çakan, A., Botsalı, F. M. and Tinkir, M. “Modeling and controller comparison for quarter car suspension system by using PID and type-1 fuzzy logic”, ***Applied Mechanics and Materials,*** 598, 524-528 (2014).

11. Lundberg, T. “Analysis of simplified dynamic truck models for parameter evaluation”, Master Thesis, ***Vehicle Engineering Department of Aeronautical and Vehicle Engineering KTH Royal Institute of Technology,*** Stockholm, 2-17 (2013).

12. Durmus, B., Temurtas, H., Yumusak, N. and Temurtas, F. "Puma 560 Robot Arm Manipulator", ***Electronic Letters on Science and Engineering***, *3* (1): 21-30 (2007).
13. Yamakita, M. and Satoh, T. "Adaptive ANN control of robot arm using structure of lagrange equation", ***Proceedings of the 1999 American Control Conference,*** San Diego, 11-15 (1999).
14. Stroe, I., Staicu, S. and Craifaleanu, A. "Internal forces calculus of compass robotic arm using lagrange equations", ***10th ESA Workshop on Advance Space Technologies for Robotics and Automation*** Noordwijk, (2011).
15. Cheng, X. "Application of the lagrange equation for ıntelligent sensor vibration control for power network monitoring", ***Hindawi International Transactions on Electrical Energy Systems Volume 2022***, Shaanxi, (2022).
16. Nagarkar, M. P., Bhalerao, Y. J., Patil, G. V. and Patil, R. Z. "Multi-objective optimization of nonlinear quarter car supension system-PID and LQR control", ***2nd International Conference on Materials Manufacturing and Design Engineering,*** Pune, 20, 420-427 (2018).
17. Al-Qahtani, H. M., Mohammed, A. A. and Sunar, M. "Dynamics and control of a robotic arm having four links", ***Arabian Journal for Science and Engineering,*** 42, 1841-1852 (2017).
18. Yüksel, Ş. and AKSOY, T. "Flexural vibrations of a rotating beam subjected to different base excitations", ***Gazi University Journal of Science,*** 22 (1): 33-40 (2009).
19. Lin, S. C. and Hsiao, K. M. "Vibration analysis of a rotating timoshenko beam", ***Journal of Sound and vibration,*** 240 (2): 303-322 (2001).
20. Sheng, G. G. and Wang, X. "The geometrically nonlinear dynamic responses of simply supported beams under moving loads", ***Applied Mathematical Modelling***, 48, 183-195 (2017).
21. Hadwan, H. H., Mahdi, M. A. and Hussein, A. W. "Modeling analysis and simulation of wheel suspension system's response for quarter car model by using 20-sim software for Honda Civic Lx 2019 Sedan", ***Periodica Polytechnica Mechanical Engineering***, 66 (1): 10-16 (2022).
22. Paweł, Ś., Misiurek, K., Szyłko-Bigus, O. and Rafał, I. "Vibrations of the euler–bernoulli beam under a moving force based on various versions of gradient nonlocal elasticity theory: Application in nanomechanics", ***Studia Geotechnica et Mechanica***, 42 (4): 306-318 (2020).
23. Bayramoğlu Eyvazlı, E. "Teorik Mekanik Statik", ***Nobel,*** Ankara, 3-5 (2018).

24. Bayramoğlu Eyvazlı, E. “Makine Dinamiği”, ***Nobel,*** Ankara, 158 (2018).
25. Bayramoğlu Eyvazov, E. “Dinamika”, Mexanika cild 3, ***Nəşriyyat-Poliqrafiya Mərkəzi,*** Bakı, 193-199 (2022).
26. Mabie, H. H. and Reinholtz, C. F. “Mechanisms and dynamics of machinery”, ***John Wiley & Sons,*** New York, 293-296 (1987).
27. Тимофеев Г.А. “Теория механимов и машин”, ***МГТУ,*** Москва, 174-175 (2010).
28. Bayramoğlu Eyvazov, E. “Statika”, Mexanika cild 1, ***Nəşriyya Poliqrafiya Mərkəzi,*** Bakı, 57-59 (2022).
29. Сильченко, П. Н. Мерко и др, М. А. “Теория механизмов и машин”, ***Инфра-М,*** Красноярск, 92-100 (2008).
30. Turhan, Ö. “Makina Teorisi”, ***Nobel Yayın Dağıtım***, Ankara, 36-37 (2012).
31. İnternet: Wikipedia, “Rezonans”, **https://tr.wikipedia.org/wiki/Rezonans_(fizik)** (2022).
32. Kəngərli, A. “Maşın ve mexanizmlər nəzəriyyəsi”, ***Ders Kitabı***, Bakı, 351-353 (2004).
33. Baxşıyev, İ.İ. and Həbibov, E. M. “Maşınların dinamikası”, ***Derslik,*** Bakı, 221-225 (2020).
34. Əliyev, Ş. and Kəngərli, L. “Maşın ve mexanizmlər nəzəriyyəsi kursu”, ***Derslik***, Baki, 121 (2009).
35. Səmidov, X. and Həmzəyeva, Q. “Maşın ve mexanizmlərin strüktür analizi və sintezi”, ***Dərs Vəsaiti,*** Bakı, 58-59 (2007).
36. Botsalı, M. “Makina Dinamiği”, ***Nobel Yayınevi***, Ankara, 220-222 (2015).
37. Dokumacı, E. “Makine Dinamiği”, ***Nobel Akademik Yayıncılık,*** Ankara, 177-185 (2012).

ÖZGEÇMİŞ

Furkan AKCA ilk ve orta öğrenimini aynı şehirde tamamladı. Etimesgut Anadolu Lisesi'nden mezun oldu. 2013 yılında Karabük Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Raylı Sistemler Mühendisliği Bölümü'nde öğrenime başlayıp 2018 yılında iyi derece ile mezun oldu. 2014-2018 yılları arasında Uluslararası İlişkiler Lisans bölümünü, 2018-2020 yılları arasında Adalet Önlisans Programını, 2019-2021 yılları arasında ise Gazi Üniversitesi TUSAŞ-Kazan MYO'da Uçak Teknolojisi Programında okudu ve yaklaşık 1,5 yıl kadar TUSAŞ'ta staj yaptı. 2020 yılında Karabük Üniversitesi Makine Mühendisliği'nde yüksek lisansa başladı ve 2023 yılında yüksek lisansını tamamladı. 2021 yılında Voestalpine Vademsaş firmasında Tasarım Mühendisi olarak göreve başladı. 2022 yılında Ankara'da Epsilon kompozit firmasında imalat mühendisi olarak işe girdi ve bir süre çalıştıktan sonra Baykar Savunma firmasında Entegrasyon Mühendisi ve İdari amir olarak görevlendirildi, TB2 ve AKINCI ihalarla çalışma fırsatı buldu. Şuanda ise Volo Kompozit firmasında üretim mühendisi olarak çalışmaktadır.