ANKARA
HACI BAYRAM VELİ ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

ORTOGONAL METRİK VE ORTOGONAL B-METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Ümran İLCAN

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Vildan ÖZTÜRK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MATEMATİK BİLİM DALI

NİSAN 2023


ankara
HBM

ORTOGONAL METRİK VE ORTOGONAL B-METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Ümran İLCAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK BİLİM DALI

ANKARA HACI BAYRAM VELİ ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

NİSAN 2023

ETİK BEYAN

Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Ümran İlcan

17.04.2023

TEZ ONAY SAYFASI

Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Ümran İLCAN tarafından hazırlanan Ortogonal Metrik ve Ortogonal B-MetrikUzaylarda Sabit Nokta Teoremleri başlıklı tez çalışması 17/04/2023 tarih ve 14:00 saatinde yapılan tez savunma sınavında aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile YÜKSEK LİSANS olarak **KABUL** edilmiştir.

	Kabul	**Ret**
Başkan: Doç. Dr. Fatih Yılmaz/Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi	■	☐
Üye: Doç. Dr. Vildan Öztürk/Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi	■	☐
Üye : Dr. Öğr. Üyesi Nesrin Manav Tatar/Erzincan Binali Yildirim Üniversitesi	■	☐

ORTOGONAL METRİK VE ORTOGONAL B-METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Ümran İLCAN

ANKARA HACI BAYRAM VELİ ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

Nisan 2023

ÖZET

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. İlk ve son bölümler sırasıyla giriş ve sonuç bölümlerini içermektedir. İkinci bölümde sabit nokta teorisi ile ilgili bazı tanım, teorem ve örneklere yer verilmiştir. Tezin üçüncü bölümünde tezin ana konusunu oluşturan ortogonal küme, ortogonal metrik uzay gibi kavramlar tanıtılmış ve ortogonal metrik uzaylarda çeşitli tipteki büzülme dönüşümlerinin sabit noktalarının varlığı ve tekliği ile ilgili çalışmalar incelenmiştir. Son olarak dördüncü bölümde ortogonal b-metrik uzay ile ilgili kavramlara ve teoremlere ayrıntılı bir şekilde yer verilmiştir. Ayrıca b-metrik uzayda ortogonal F-Suzuki büzülme dönüşümü kavramı tanıtılmış ve ortogonal b-metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremleri ispatları ile tezde yer almıştır.

Bilim Kodu : 20405
Anahtar Kelimeler : Sabit nokta, ortogonal küme, metrik uzay, b-metrik uzay
Sayfa Adedi : 67
Tez Danışmanı : Doç. Dr. Vildan ÖZTÜRK

FIXED POINT THEOREMS IN ORTHOGONAL METRIC AND ORTHOGONAL B-METRIC SPACES

(M.Sc. Thesis)

Ümran İLCAN

ANKARA HACI BAYRAM VELİ UNIVERSITY

THE INSTITUTE OF GRADUATE STUDIES

April 2023

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters. The first and last chapters contain the introduction and conclusion, respectively. In the second part, some definitions, theorems and examples related to fixed point theory are given. In the third part of the thesis, concepts such as orthogonal set, orthogonal metric space, which are the main subject of the thesis, are introduced and studies on the existence and uniqueness of fixed points of various types of contraction transformations in orthogonal metric spaces are examined. Finally, in the fourth chapter, the concepts and theorems related to orthogonal b-metric space are given in detail. In addition, the concept of orthogonal F-Suzuki contraction transformation in b-metric space is introduced and it is included in the thesis with proofs of some fixed point theorems in orthogonal b-metric spaces.

Science Code : 20405
Key Words : Fixed point, orthogonal set, metric space, b-metric space.
Page Number : 67
Supervisor : Doç.Dr.Vildan ÖZTÜRK

TEŞEKKÜR

Bana yüksek lisans öğrenimim boyunca ve tez çalışmam aşamasında her konuda yardımcı olan, değerli zamanını benden esirgemeyen kıymetli danışman hocam Doç. Dr. Vildan Öztürk'e ve hayatım boyunca en büyük destekçilerim anne ve babama en samimi duygularımla teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

ŞEKİLLERİN LİSTESİ viii

KISALTMALAR ix

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR 3

3. ORTOGONAL METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ 7

3.1. Ortogonal Metrik Uzay Temel Tanım ve Teoremleri 7

3.2. Ortogonal F Büzülme Dönüşümleri 15

3.3. Ortogonal ϕ Büzülme Dönüşümleri 25

3.4. Ortogonal Geraghty Büzülme 29

4. ORTOGONAL B- METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ 35

5. SONUÇ 63

KAYNAKLAR 65

ÖZGEÇMİŞ 67

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

Şekil 3.1. Kan grupları 8

Şekil 3.2. Tekerlek grafı..... 9

KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Kısaltmalar	**Açıklamalar**
$(X, \perp)$	Ortogonal küme
$(X, \perp, d)$	Ortogonal metrik uzay
$(X, \perp, \sigma)$	Ortogonal b-metrik uzay
(X, d)	Metrik uzay
(X, σ)	B-metrik uzay
$\{x_n\}$	Dizi
$\mathbb{R}^+$	Negatif olmayan reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	Negatif olmayan tam sayılar kümesi
$\perp$	Ortogonal dönüşüm
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
supA	A nın en küçük üst sınırı
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi

1. GİRİŞ

Sabit nokta teori ile ilgili çalışmalar 1910 yılında Brouwer ile, tam metrik uzaylarda sabit nokta teori ile ilgili çalışmalar 1922 senesinde Banach ile başlamıştır. Ortogonal küme, ortogonal süreklilik, ve ortogonal metrik uzay kavramı ilk olarak 2017 yılında Gordji, Ramezani, De la Sen ve Je Cho tarafından tanımlanmıştır. Aynı çalışmada ortogonal bir küme üzerinde tanımlı kendi kendine dönüşümler için Banach Sabit Nokta Teoremi'nin bir reel genelleştirmesi verilmiştir. Daha sonraki yıllarda ise ortogonal metrik uzaylarda F-büzülme, Geraghty tipi büzülme, Boyd ve Wong tipi büzülme ve Matkowski tipi büzülme gibi dönüşümler için sabit nokta sonuçları elde edilmiştir. B-metrik uzayla ilgili çalışmalar 1993 yılında Czerwik ile başlamıştır. Czerwik b-metrik uzayı tanımlamış Banach'ın sabit nokta teoreminin b-metrik uzaylarda bazı genelleştirmelerini elde etmiştir. Ortogonal b-metrik uzay kavramı ile ilgili ilk çalışmalar O.Yamaod ve W. Sintunavarat tarafından 2018 yılında yapılmıştır. Bu çalışmada b-metrik uzayda ortogonal büzülme, ortogonal süreklilik gibi önemli kavramlar tanımlanmıştır. 2021 yılında ise Ismat Beg, Mani ve Gnanaprakasam b-metrik uzayda ortogonal F-Suzuki büzülme dönüşümünü tanıtıp bazı sabit nokta teoremlerini ispatlamışlardır.

Sabit nokta teori son zamanlarda birçok alanda kullanılmakta olup bilim dünyasının dikkatini çekmeye devam etmektedir. Ortogonal metrik ve ortogonal b-metrik uzay ise sabit nokta teorinin yeni çalışma yapılan alanlarıdır. Bu alanda yapılan çalışmalar yeni olmasına rağmen literatürde bu kavramlarla ilgili çok sayıda çalışma vardır. Bu tez çalışmasının amacı ortogonal metrik ve ortogonal b-metrik uzayları ayrıntılı bir şekilde incelemek, bu konuda son yıllarda yapılmış olan bazı çalışmaları ve örnekleri irdeleyerek ortogonal metrik ve ortogonal b-metrik uzaylara dair sabit nokta sonuçlarını açıklamaktır. Bu tez çalışmasında ortogonal metrik uzay ve ortogonal b-metrik uzaylarda sabit nokta teoreminin varlığı ve tekliği incelenecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda tezin ilerleyen aşamalarında başvurulacak temel kavram ve teoremlere yer verilecektir.

2.1. Tanım

X boştan farklı bir küme olsun. $d: X \times X \to [0, \infty)$, dönüşümü her $x, y, z \in X$ için

(i) $0 \leq d(x, y)$

(ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

koşullarını gerçekliyorsa, d ye X'de bir metrik ve (X, d) ikilisine de metrik uzay denir (Lipschutz, 1965).

2.2. Tanım

(X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ X' de bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n, m \geq n(\varepsilon)$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir (Lipschutz, 1965).

2.3. Tanım

Eğer (X, d) metrik uzayındaki tüm Cauchy dizileri bu uzayda bir noktaya yakınsıyor ise, (X, d) ikilisine tam metrik uzay denir (Lipschutz, 1965).

2.4. Tanım

X boştan farklı bir küme ve $f: X \to X$ bir dönüşüm olmak üzere $fx = x$ olacak biçimde bir $x \in X$ varsa, bu x noktası f nin bir sabit noktasıdır. Farklı bir ifadeyle $f(x) = x$ $(x \in X)$ denkleminin çözümü f nin bir sabit noktasıdır (Lipschutz, 1965).

Örnek

$f: \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $f(x) = x^2$ dönüşümü için $x=0$ ve $x = 1$ noktaları sabit noktalardır.

Örnek

$X = [8, \infty)$ ve $a > 0$ olmak üzere $f: X \to X$ $f(x) = x + a$ olarak tanımlanırsa, bu dönüşümün herhangi bir sabit noktası yoktur.

2.5. Tanım

(X, d) bir metrik uzay ve $f: X \to X$ herhangi bir dönüşüm olmak üzere her $x, y \in X$ için,

$$d\big(f(x), f(y)\big) < \alpha d(x, y)$$

şartını sağlayan bir $\alpha > 0$ reel sayısı bulunuyorsa, f ye Lipschitz şartını sağlıyor denir.

Burada $\alpha < 1$ alınırsa, f ye büzülme dönüşümü ya da daralma dönüşümü; $\alpha = 1$ alınırsa f ye genişlemeyen dönüşüm denir.

Her $x, y \in X$ için $(x \neq y)$ $d\big(f(x), f(y)\big) < d(x, y)$ oluyorsa, f ye büzülebilir dönüşüm ya da zayıf büzülme dönüşümü denir (Banach, 1922).

2.6. Teorem

(X, d) bir tam metrik uzay ve $f: X \to X$ bir büzülme dönüşümü ise, f nin X de tek bir sabit noktası vardır (Banach , 1922).

Şimdi bu çalışmada kullanılacak Banach büzülme prensibinin bazı genelleştirilmiş formlarına değinilecektir.

2.7. Teorem

(X, d) bir tam metrik uzay $f: X \to X$ bir dönüşüm, ve $\phi: [0, \infty) \to [0, \infty)$ sağdan üst yarı sürekli ve $\forall t > 0$ için $\phi(t) < t$ bir dönüşüm olmak üzere

$$d(fx, fy) \leq \phi\big(d(x, y)\big), \forall x, y \in X$$

şartını sağlasın. Böyle bir durumda X tek bir $z \in X$ sabit noktasına sahiptir ve $\forall x \in X$ için $n \to \infty$ iken $d(f^n x, z) \to 0$'dır (Boyd ve Wong, 1969).

2.8.Teorem

(X, d) bir tam metrik uzay, $f: X \to X$ herhangi bir dönüşüm ve $\phi: [0, \infty) \to [0, \infty)$ azalmayan $t > 0$ için $\lim_{t \to \infty} \big(t, \phi(t)\big) = \infty$, $\lim_{k \to \infty} \phi^k(t) = 0$ olsun. Her $x, y \in X$ için

$d(fx, fy) \leq \phi\big(d(x, y)\big)$

ise o zaman f tek bir $a \in X$ sabit noktasına sahiptir. Böylece her $x \in X$ için $\lim_{k\to\infty} f^k(x) = a$ dır (Matkowski, 1977).

2.9. Tanım

$\mathfrak{F}$ aşağıdaki koşulları gerçekleyen tüm $F: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dönüşümlerinin ailesi olsun.

(F_1) F kesin artandır. Bunun anlamı tüm $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\alpha < \beta$ iken $F(\alpha) < F(\beta)$'dır.

(F_2) Pozitif sayıların her $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \leftrightarrow \lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = -\infty$.

(F_3) $\lim_{a\to 0^+} a^k F(a) = 0$ olacak biçimde $k \in (0,1)$ vardır.

(X, d) bir metrik uzay $f: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in X$ için

$d(fx, fy) > 0 \Rightarrow \tau + F(d(fx, fy)) \leq F(d(x, y))$

olacak şekilde $\tau > 0$ varsa f dönüşümüne F-büzülme denir (Wardowski , 2012).

2.10. Tanım

(X, d) bir metrik uzay, $F \in \mathfrak{F}$, $f: X \to X$ bir dönüşüm olmak üzere $\forall x, y \in X$ ve $fx \neq fy$ için

$\frac{1}{2} d(x, fx) > 0 \Rightarrow \tau + F(d(fx, fy)) \leq Fd(x, y)$

olacak şekilde $\tau > 0$ varsa f dönüşümüne F-Suzuki büzülme denir (Piri, Kumam , 2012).

2.11. Tanım

(X, d) bir metrik uzay, $f: X \to X$ bir dönüşüm $\mathfrak{F}$, $\beta: [0, \infty) \to [0,1)$ dönüşümünün sınıfını göstersin ve $\beta(t_n) \to 1 \Rightarrow t_n \to 0$ olsun. $\forall x, y \in X$ için

$d(fx, fy) \leq \beta(d(x, y))d(x, y)$

olacak şekilde $\beta \in \mathfrak{F}$ varsa f dönüşümüne Geraghty büzülme denir (Geraghty,1973)

3. ORTOGONAL METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

3.1. Ortogonal Metrik Uzay Temel Tanım ve Teoremleri

3.1.1.Tanım

X boş olmayan bir küme ve $\perp \subseteq X \times X$ bir ikili bağıntı olsun. $\perp$ bağıntısı

$\exists\, x_0 \in X\,; (\forall y \in X, x_0 \perp y)$ ya da $(\forall y \in X, y \perp x_0)$

koşulunu sağlıyorsa X ortogonal küme (O-küme) olarak adlandırılır ve $(X, \perp)$ ile gösterilir. Buradaki x_0 elemanına ise ortogonal eleman denir (Gordji, Ramezani, De la Sen ve Je Cho, 2017).

Örnek

$X = \mathbb{Z}$ olsun. $m \perp n$ bağıntısı $k \in \mathbb{Z}$ için $m = kn$ şeklinde tanımlansın. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $0 \perp n$ olduğundan $(X, \perp)$ bir ortogonal kümedir (Gordji vd., 2017).

Örnek

$X = [0, \infty)$ kümesi üzerinde $xy \in \{x, y\}$ şeklinde tanımlı $x \perp y$ bağıntısına göre ortogonal eleman $x_0 = 0$ veya $x_0 = 1$ dir. Bu durumda $(X, \perp)$ bir ortogonal kümedir (Gordji vd., 2017).

Örnek

$X = [2, \infty)$ olsun. $x \leq y$ şeklinde tanımlı $x \perp y$ bağıntısına göre $x_0 = 2$ alınırsa $(X, \perp)$ kümesinin bir ortogonal küme olduğu görülür (Gordji vd., 2017).

Örnek

$X = <.,.>$ iç çarpım uzayı üzerinde $x \perp y$ bağıntısı $< x, y >= 0$ biçiminde tanımlansın. Her $x \in X$ için $0 \perp x$ olduğundan $(X, \perp)$ bir ortogonal kümedir (Gordji vd., 2017).

Örnek

(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ Picard operatörü olmak üzere her $y \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} T^n(y) = x^*$$

olan bir $x^* \in X$ noktası vardır.

$$x \perp y :\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x, T^n(y)) = 0$$

olmak üzere $(X, \perp)$ bir ortogonal kümedir (Gordji vd., 2017).

Örnek

X dünyadaki bütün insanların kümesi olsun. $x \perp y$ bağıntısı x in y ye kan verebilmesi şeklinde tanımlansın.

Kan grubu	Kan verebilen gruplar	Kan alabilen gruplar
A+	A+ AB+	A+ A- 0+ 0-
0+	0+ A+ B+ AB+	0+ 0-
B+	B+ AB+	B+ B- 0+ 0-
AB+	AB+	Herkes
A-	A+ A- AB+ AB-	A- 0-
0-	Herkes	0-
B-	B+ B- AB+ AB-	B- 0-
AB-	AB+ AB-	AB- B- 0- A-

Şekil 3.1. Kan grupları

Şekil 3.1 de verilen tabloya göre x_0, 0- kan grubuna sahip bir insan olarak alınırsa her $y \in X$ için $x_0 \perp y$ elde edilir. Böylece $(X, \perp)$ bir ortogonal kümedir. Bu ortogonal kümede x_0 tek değildir. Örneğin x_0, AB+ kan grubuna sahip bir insansa her $y \in X$ için $y \perp x_0$ bağıntısı vardır (Gordji vd., 2017).

Örnek

$(G,*)$ bir grup olsun. Her $x, y \in G$ için

$$x \perp_1 y :\Leftrightarrow x * y * x^{-1} * y^{-1} = e$$

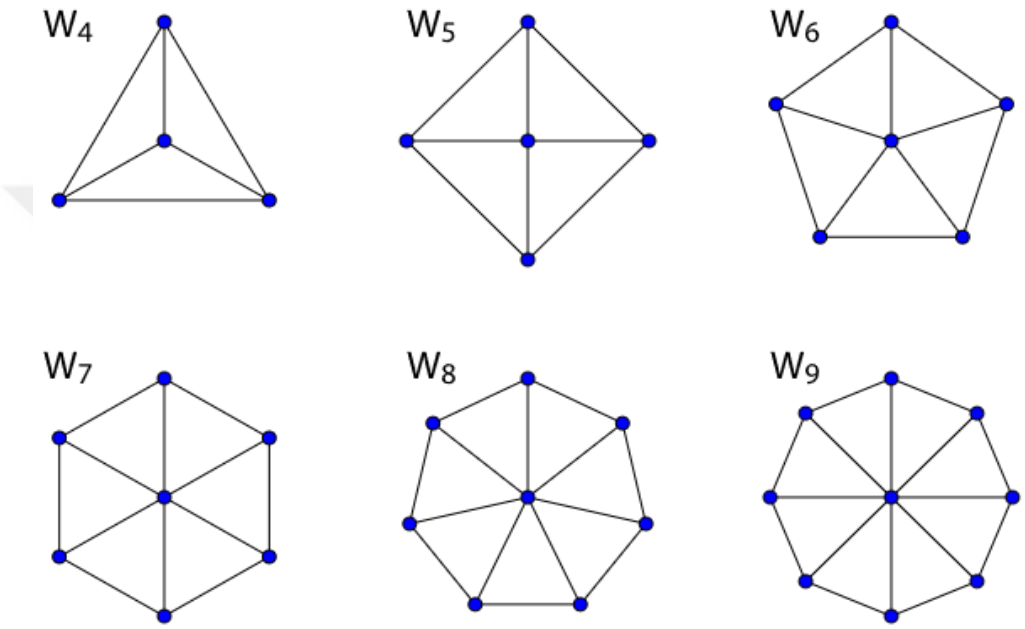
$$x \perp_2 y :\Leftrightarrow x * y = e$$

bağıntıları tanımlansın. Burada x^{-1}, x in tersi ve e, G grubunun birim elemanıdır. $\perp_1$ bağıntısı için $y = e$ ve $y^{-1} = e^{-1}$ öyle ki $(G, \perp_1)$ bir ortogonal kümedir. Benzer

şekilde, $\perp_2$ bağıntısı için $x = y^{-1}$ alınırsa $(G, \perp_2)$ kümesinin ortogonal olduğu görülür (Baghani,Gordji ve Ramezani, 2016).

Örnek

Graf teoride bir tekerlek grafı (wheel) W_n ,$n \geq 4$ olmak üzere n tane noktadan oluşan bir graftır öyle ki bu grafta $n-1$ devirin tüm noktaları sadece tek bir nokta ile birbirine bağlıdır. (Bkz. Şekil3.2).



Şekil 3.2. Tekerlek grafı

X her $n \geq 4$ için W_n grafının tüm noktalarından oluşan bir küme olsun. $a, b \in X$ öyle ki $a \perp b$ bağıntısı, a dan b ye giden bir yol olarak tanımlansın. Grafların merkezinden her yere bir yol var olduğundan $(X, \perp)$ bir ortogonal kümedir (Gordji vd., 2017).

Örnek

X bir normlu lineer uzay olsun. $x \perp y$ bağıntısı her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ şeklinde tanımlansın. Her $y \in X$ ve her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ olacak şekilde bir $x = \theta \in X$ var olduğundan $(X, \perp)$ bir ortogonal kümedir (Senepati, 2022).

Örnek

$M(n)$, $n \times n$ tipindeki matrislerin kümesi ve Q pozitif tanımlı bir matris olsun. $M(n)$ üzerindeki $\perp$ bağıntısı

$A \perp B :\Leftrightarrow$ Bir $X \in M(n)$ için $AX = B$

şeklinde tanımlansın. $(M(n), \perp)$ bir ortogonal kümedir çünkü her $B \in M(n)$ için

$I \perp B \Leftrightarrow I.B = B$

$B \perp 0 \Leftrightarrow B.0 = 0$

denkliklerini sağlayacak şekilde bir ortogonal eleman vardır (Gordji vd., 2017).

3.1.2. Tanım

Bir $(X, \perp)$ ortogonal kümesindeki $\{x_n\}$ dizisi

$(\forall\, n \in \mathbb{N}, x_n \perp x_{n+1})$ ya da $(\forall\, n \in \mathbb{N}, x_{n+1} \perp x_n)$

durumlarından birini sağlıyorsa $\{x_n\}$ dizisine ortogonal dizi denir (Gordji vd., 2017).

Örnek

$X = \mathbb{N} \cup \{0\}$ kümesi üzerindeki ortogonal bağıntı $x \perp y :\Leftrightarrow xy = 0$ olsun. $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere x_n dizisi

$$x_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \ , k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ n, & n = 2k+1 \ , \ k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_n \perp x_{n+1}$ olduğundan $\{x_n\}$ bir ortogonal dizidir (Ahmadi, Lashkaripour and Baghani, 2018).

3.1.3. Tanım

Bir $(X, \perp)$ ortogonal kümesindeki $\{x_n\}$ dizisi

$(\forall\, n \in \mathbb{N}, x_n \perp x_{n+1})$ ya da $(\forall\, n \in \mathbb{N}, x_{n+1} \perp x_n)$

durumlarından birini sağlıyorsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy ortogonal dizi (Cauchy O-dizi) denir (Gordji vd., 2017).

3.1.4. Tanım

$(X, \perp)$ bir ortogonal küme (X, d) bir metrik uzay ise $(X, \perp, d)$ üçlüsüne ortogonal metrik uzay adı verilir (Gordji vd., 2017).

3.1.5. Tanım

$(X, \perp, d)$ bir ortogonal metrik uzay olsun. X deki her Cauchy ortogonal dizisi yakınsak ise $(X, \perp, d)$ ye ortogonal tam metrik uzay (O-tam) denir.

Her tam metrik uzay ortogonal tam metrik uzaydır fakat tersi doğru değildir (Gordji vd., 2017).

3.1.6. Tanım

$(X, \perp, d)$ bir ortogonal metrik uzay ve $f: X \to X$ bir dönüşüm olsun. X de her $\{a_n\}$ dizisi için $a_n \to a$ iken $f(a_n) \to f(a)$ oluyorsa f dönüşümüne $a \in X$ noktasında ortogonal sürekli dönüşüm denir. f her $a \in X$ noktasında ortogonal sürekli ise f dönüşümüne ortogonal süreklidir ($\perp$-sürekli) denir.

Her sürekli dönüşüm ortogonal süreklidir fakat tersi doğru değildir. (Gordji vd., 2017).

Bir sonraki örnekte ortogonal sürekli bir dönüşümün sürekli olmak zorunda olmadığı gösterilmektedir

Örnek

$X = \mathbb{R}$ üzerinde

$x \perp y: \Leftrightarrow x = 0$ ya da bir $n \in \mathbb{Z}$ için $x, y \in (n + \frac{1}{3}, n + \frac{2}{3})$

bağıntısı tanımlansın. $(X, \perp)$ bir ortogonal kümedir. $f: X \to X$ dönüşümü $f(x) = [x]$ şeklinde tanımlansın. f dönüşümünün sürekli olmadığı açıktır. $\{x_k\}$ bir $x \in X$ noktasına yakınsayan X de keyfi bir ortogonal dizi olmak üzere aşağıdaki durumlar mevcuttur:

Durum 1: Her k için $x_k = 0$ ise $x = 0$ ve $f(x_k) = 0 = f(x)$ dir.

Durum 2: Bir k_0 için $x_{k_0} \neq 0$ ise her $k \geq k_0$ için $x_k \in \left(m + \frac{1}{3}, m + \frac{2}{3}\right)$ olacak biçimde bir $m \in \mathbb{Z}$ sayısı vardır. Böylece $x \in \left[m + \frac{1}{3}, m + \frac{2}{3}\right]$ ve $f(x_k) = m = f(x)$ dir.

O halde f dönüşümü ortogonal süreklidir (Gordji vd., 2017).

Örnek

$X = [0,1)$ kümesi üzerinde

$x \perp y: \Leftrightarrow x \leq y \leq \frac{1}{2}$ ya da $x = 0$

bağıntısı tanımlansın. $(X, \perp)$ bir ortagonal kümedir. Öklid metriği d olmak üzere (X, d), tam metrik uzay değildir çünkü $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ ve $a_m = \left(1 - \frac{1}{m}\right)$ alınırsa

$$d(a_n, a_m) = \left|\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\right| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right| \xrightarrow{m,n\to\infty} 0 \in X$$

olduğundan a_n bir Cauchy dizisidir fakat

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \notin X$$

olduğundan bu Cauchy dizisi yakınsak değildir. Fakat $(X, \perp, d)$ ortogonal tamdır. $\{x_k\}$, X de keyfi bir Cauchy ortogonal dizi ise $\{x_k\}$ nın her $n \geq 1$ için $\{x_{k_n}\} = 0$ olacak şekilde bir $\{x_{k_n}\}$ alt dizisi vardır veya her $n \geq 1$ için $\{x_{k_n}\} \leq \frac{1}{2}$ olacak şekilde $\{x_k\}$ nın monoton bir $\{x_{k_n}\}$ alt dizisi vardır. Bu durumda $\{x_{k_n}\}$ dizisi $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ noktasına yakınsaktır. Yakınsak alt diziye sahip her Cauchy dizisi yakınsak olduğundan $\{x_k\}$ yakınsaktır (Gordji vd., 2017).

Örnek

$X = \mathbb{Q}$ kümesi

$x \perp y: \Leftrightarrow x = 0$ ya da $y = 0$

bağıntısına göre bir ortogonal kümedir. Öklid metriği d olmak üzere $(\mathbb{Q}, d)$ tam metrik uzay değildir fakat $(\mathbb{Q}, \perp, d)$ ortogonal tam metrik uzaydır. $\{x_k\}$, $\mathbb{Q}$ da keyfi bir Cauchy ortogonal dizi ise her $n \geq 1$ için $\{x_{k_n}\} = 0$ olacak şekilde $\{x_k\}$ nın bir $\{x_{k_n}\}$ alt dizisi vardır. $\{x_{k_n}\}$, $0 \in X$ noktasına yakınsar. $\{x_k\}$ yakınsaktır çünkü yakınsak alt diziye sahip her Cauchy dizisi yakınsaktır (Baghani vd., 2016).

Örnek

$X = \{\sqrt{2}\} \cup \left\{\frac{1}{2n}\right\}, n > 1$ kümesi üzerinde $\perp$ bağıntısı

$x \perp y: \Leftrightarrow \frac{x}{y} \notin \mathbb{N} - \{1\}$ ve $x \geq y$

şeklinde tanımlansın. $x_0 = \sqrt{2}$ aldığımızda bu küme ortogonal bir kümedir. Öklid metriği d ile $(X, \perp, d)$ ortogonal tam metrik uzay değildir çünkü X deki $x_n = \frac{1}{2n}$ Cauchy ortogonal dizisi X de yakınsak değildir (Ahmadi vd., 2018).

3.1.7. Tanım

$(X, \perp, d)$ bir ortogonal metrik uzay ve $0 < \lambda < 1$ olsun. $f: X \to X$ dönüşümü için

$x \perp y \Rightarrow d(fx, fy) \leq \lambda d(x, y)$

oluyorsa f dönüşümüne λ Lipschitz sabiti ile ortogonal büzülme ($\perp$-büzülme) denir.

Her büzülme dönüşümü bir ortogonal büzülme dönüşümüdür fakat tersi doğru değildir (Gordji vd., 2017).

Örnek

$X = [0,10)$ kümesi üzerinde Öklid metriği var olsun.

$x \perp y: \Leftrightarrow x \vee y = x$ ya da $x \vee y = y$ olmak üzere $xy \leq (x \vee y)$

bağıntısına göre $(X, \perp)$ bir ortogonal kümedir. X tam değildir fakat ortogonal tamdır. $f: X \to X$ dönüşümü

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $x \perp y$ ve $xy \leq x$ olsun. f dönüşümü için aşağıdaki durumlar mevcuttur.

Durum 1: $x = 0$ ve $y \leq 2$ ise $f(x) = 0$ ve $f(y) = \frac{y}{2}$ dir.

Durum 2: $x = 0$ ve $y > 2$ ise $f(x) = f(y) = 0$ dır.

Durum 3: $y \leq 1$ ve $x \leq 2$ ise $f(x) = \frac{x}{2}$ ve $f(y) = \frac{y}{2}$ dir.

Durum 4: $y \leq 1$ ve $x > 2$ ise $x - y > y$ olup $f(x) = 0$ ve $f(y) = \frac{y}{2}$ dir.

Tüm durumlar göz önünde bulundurulursa

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$$

olur ve böylece f dönüşümü $\perp$-büzülmedir. Fakat f bir büzülme dönüşümü değildir çünkü her $\alpha < 1$ için

$$|f(3) - f(2)| = 1 > \alpha = \alpha|3 - 2|$$

eşitsizliği mevcuttur (Gordji vd., 2017).

Örnek

$X = [0,1)$ kümesi üzerinde Öklid metriği var olsun.

$x \perp y: \Leftrightarrow xy \leq max\left\{\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right\}$

olmak üzere $(X, \perp)$ bir ortogonal kümedir. $f: X \to X$ dönüşümü

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \leq \frac{1}{2} \\ 0, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $x \perp y$ ve $xy \leq \frac{x}{2}$ olsun. Bu durumda $x = 0$ ya da $y \leq \frac{1}{2}$ dir. f dönüşümü için aşağıdaki durumlar geçerlidir:

Durum 1: $x = 0$ ve $y \leq \frac{1}{2}$ ise $f(x) = 0$ ve $f(y) = \frac{y}{2}$ dir.

Durum 2: $x = 0$ ve $y > \frac{1}{2}$ ise $f(x) = f(y) = 0$ dır.

Durum 3: $y \leq \frac{1}{2}$ ve $x \leq \frac{1}{2}$ ise $f(x) = \frac{x}{2}$ ve $f(y) = \frac{y}{2}$ dir.

Durum 4: $y \leq \frac{1}{2}$ ve $x > \frac{1}{2}$ ise $x - y > y$, $f(x) = 0$ ve $f(y) = \frac{y}{2}$ dir.

Yukarıdaki dört durumdan

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$$

elde edildiği için f, bir $\perp$- büzülmedir. Fakat f bir büzülme dönüşümü değildir. Bunu göstermek için aksini kabul edelim. $\frac{1}{2}$ ve $\frac{2}{3}$ noktaları ele alınırsa her $0 < c < 1$ için

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{2}{3}\right)\right| \leq c\left|\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right|$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir (Gordji ve Habibi, 2017).

3.1.8. Tanım

$(X, \perp)$ bir ortogonal küme olsun. $f: X \to X$ dönüşümü için

$$x \perp y \Rightarrow fx \perp fy$$

oluyorsa f dönüşümüne ortogonalliği koruyan ($\perp$-koruyan) dönüşüm denir (Gordji vd., 2017).

Örnek

$X = \mathbb{R}$ üzerindeki bağıntı

$x \perp y: \Leftrightarrow x = 0$ ya da $0 \neq y \in \mathbb{Q}$

şeklinde olmak üzere $(X, \perp)$ bir ortogonal kümedir. $f: X \to X$ dönüşümü

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. f dönüşümü $\perp$-koruyan bir dönüşüm değildir çünkü $0 \perp \sqrt{2}$ olmasına rağmen $f(0) = 1$ ve $f(\sqrt{2}) = 0$ olduğundan $f(0)$ ile $f(\sqrt{2})$ ortogonal değildir (Baghani vd., 2016).

Örnek

$X = (0, \infty)$ aralığı üzerinde

$x \perp y : \Leftrightarrow xy = x$

bağıntısı tanımlansın. $(X, \perp)$ bir ortogonal kümedir. $f: X \to X$ dönüşümü

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2}, & x \leq 1 \\ \frac{1}{3}, & x > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. f nin $\perp$-koruyan bir dönüşüm olduğunu gösterelim. $x \perp y$ ise $y = 1$ dir. f nin tanımından dolayı $f(y) = 1$ olup $f(x)f(y) = f(x)$ eşitliği elde edilir. Böylece $x \perp y$ iken $f(x) \perp f(y)$ dir.

Örnek

$X = [0,1)$ kümesinde $x \perp y$ bağıntısı her $x, y \in X$ için $xy \in \{x, y\}$ şeklinde tanımlansın. $\mathrm{F} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\mathrm{F}(\alpha) = \ln(\alpha)$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{27}, & x \in \mathbb{Q} \cap X \\ 0, & x \in \mathbb{Q}^c \cap X \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $f: X \to X$ dönüşümü $\perp$-koruyan bir dönüşümdür (Baghani vd., 2016).

3.2. Ortogonal F Büzülme Dönüşümleri

3.2.1. Tanım

$(X, \perp, d)$ bir ortogonal metrik uzay olsun. Bir $f: X \to X$ dönüşümü, $F \in \mathfrak{F}$ ve $\tau > 0$ olmak üzere aşağıdaki koşulu sağlıyorsa ortogonal F-büzülme dönüşümü (kısaca, $F_\perp$-büzülme) olarak adlandırılır.

$\forall x, y \in X,\ x \perp y [d(fx, fy) > 0 \Rightarrow \tau + F(d(fx, fy)) \leq F(d(x, y))]$

(Sawangsup, Sintunavarat ve Cho, 2020).

Şimdi bir ortogonal tam metrik uzayda $(X, \perp, d)$ ortogonal F-büzülme dönüşümü için bir sabit nokta teoremi verilecektir.

3.2.2. Teorem

$(X, \perp, d)$ ortogonal tam metrik uzay, x_0 bir ortogonal eleman ve $f: X \to X$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir dönüşüm olsun,

i) f, $\perp$-koruyan;

ii) f bir $F_\perp$- büzülme dönüşümü;

iii) f $\perp$-sürekli.

O zaman f, X'te tek bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca Picard dizisi $\{f^n x_0\}$, f'nin sabit noktasına yakınsar (Sawangsup vd., 2019).

İspat

f ortogonal olduğundan, $x_0 \perp f(x_0)$ ya da $f(x_0) \perp x_0$ olur. Tüm $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$x_1 := fx_0,\ x_2 := fx_1 = f^2 x_0, \cdots, x_n := fx_{n-1} = f^n x_0$ olsun. Bazı $n^* \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_{n^*} = x_{n^*+1}$ oluyorsa x_{n^*}, f'nin bir sabit noktasıdır ve böylece ispat tamamlanır. Yani tüm $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_{n^*} \neq x_{n^*+1}$ olduğu varsayılabilir. Böylece tüm $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $d(fx_n, fx_{n+1}) > 0$ olur. f, $\perp$-koruyan olduğundan tüm $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için,

$x_n \perp x_{n+1}$ ya da $x_{n+1} \perp x_n$

olur. Böylece $\{x_n\}$ bir ortogonal dizidir. f bir $F_\perp$-büzülme dönüşümü olduğundan tüm $n \in \mathbb{N}$ için,

$$F\big(d(x_n, x_{n+1})\big) = F\big(d(fx_{n-1}, fx_n)\big) \leq F\big(d(x_{n-1}, x_n)\big) - \tau \tag{3.1}$$

olur. Tüm $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n := d(x_n, x_{n+1})$ alınırsa Eş. 3.1'i kullanarak tüm $n \in \mathbb{N}$ için,

$$F(\alpha_n) \leq F(\alpha_{n-1}) - \tau \leq F(\alpha_{n-2}) - 2\tau \leq \cdots \leq F(\alpha_0) - n\tau \tag{3.2}$$

elde edilir.

Eş.3.2 eşitsizliğinde $n \to \infty$ iken

$$\lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = -\infty$$

elde edilir. $F: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ bir dönüşüm olmak üzere, pozitif sayıların bir $\{\alpha_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ ancak ve ancak $\lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = -\infty$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \tag{3.3}$$

olur. $F: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ bir dönüşüm olmak üzere, $k \in (0,1)$ için $\lim_{\alpha\to 0^+} \alpha^k F(\alpha) = 0$ olduğundan $k \in (0,1)$ vardır öyle ki

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n^k F(\alpha_n) = 0. \tag{3.4}$$

Eş.3.2'den tüm $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\alpha_n^k F(\alpha_n) - \alpha_n^k F(\alpha_0) \leq -\alpha_n^k n\tau \leq 0 \tag{3.5}$$

olur. Eş. 3.5'de $n \to \infty$ iken ve Eş.3.3 ve Eş.3.4'den

$$\lim_{n\to\infty} n\alpha_n^k = 0 \tag{3.6}$$

Eş.3.6'dan, tüm $n \geq n_1$ için $n\alpha_n^k \leq 1$ olacak şekilde n_1 vardır ve böylece tüm $n \geq n_1$ için

$$\alpha_n \leq \frac{1}{n^{1/k}} \tag{3.7}$$

olur.

$\{x_n\}$ bir Cauchy ortogonal dizi olsun. Eş.3.7 ve üçgen eşitsizliği kullanılarak tüm $m > n \geq n_1$ için,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &= \alpha_n + \alpha_{n+1} + \cdots + \alpha_{m-1} \\ &= \textstyle\sum_{i=n}^{m-1} \alpha i \\ &\leq \textstyle\sum_{i=n}^{m-1} \frac{1}{i^{1/k}} \end{aligned}$$

$\sum_{i=n}^{m-1} \frac{1}{i^{1/k}} < \infty$ olduğundan $\{x_n\}$ X'te bir Cauchy ortogonal dizidir. X ortogonal tam olduğundan $n \to \infty$ iken $x_n \to x^*$ olacak biçimde $x^* \in X$ vardır. f $\perp$-sürekli olduğundan

$$fx^* = f\left(\lim_{n\to\infty} fx_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*$$

olur ve bu yüzden x^*, f'nin bir sabit noktasıdır.

Şimdi x^*'ın f'nin tek bir sabit noktası olduğu gösterilecektir. y^*, f'nin diğer sabit noktası olsun. $n \to \infty$ iken $x_n \to y^*$ ise $x^* = y^*$'dır. x_n, $n \to \infty$ iken y^*'a

yakınsamıyorsa, tüm $k \in \mathbb{N}$ için, $fx_{n_k} \neq y^*$ olacak şekilde bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. İspatın başında x_0 seçimi ile

$x_0 \perp y^*$ ya da $y^* \perp x_0$

elde edilir. f, $\perp$-koruyan ve tüm $n \in \mathbb{N}$ için, $f^n y^* = y^*$ olduğundan tüm $n \in \mathbb{N}$ için

$f^n x_0 \perp y^*$ ya da $y^* \perp f^n x_0$

olur. $F_\perp$-büzülme dönüşümü olduğundan tüm $k \in \mathbb{N}$ için,

$$F\big(d(f^{n_k}x_0, y^*)\big) = F\big(d(f^{n_k}x_0, f^{n_k}y^*)\big) \leq F\big(d(x_0, y^*)\big) - n_k\tau$$

Bu, $k \to \infty$ iken $F\big(d(f^{n_k}x_0, y^*)\big) \to -\infty$ olduğu anlamına gelir ve bu nedenle $F: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ bir dönüşüm olmak üzere, pozitif sayıların bir $\{\alpha_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ ancak ve ancak $\lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = -\infty$ olduğundan $k \to \infty$ iken $F\big(d(f^{n_k}x_0, y^*)\big) \to 0$ bulunur. Buradan $n \to \infty$ iken $x_n \to y^*$ olur ve bu bir çelişkidir. Bu sebeple f tek bir sabit noktaya sahiptir.

3.2.3. Teorem

$(X, \perp, d)$ bir ortogonal tam metrik uzay, x_0 bir ortogonal eleman ve $f: X \to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $\tau > 0$ vardır öyle ki

$$\forall x, y \in X \;\; x \perp y[d(fx, fy) > 0$$

$$\Rightarrow \tau + F\big(d(fx, fy)\big) \leq F(\theta_1 d(x, y) + \theta_2 d(x, fx) + \theta_3 d(x, fy) + \theta_4 d(x, fy) + \theta_5 d(y, fx))]. \quad (3.8)$$

Burada $F: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ bir artan dönüşüm; θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, θ_5 negatif olmayan sayılar ve $\theta_4 < \frac{1}{2}$, $\theta_3 < 1$, $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + 2\theta_4 = 1$, $0 < \theta_1 + \theta_4 + \theta_5 \leq 1$ ve f $\perp$- koruyan. O zaman $t \in X$ f'nin tek bir sabit noktasıdır ve tüm $x \in X$ için $\{f^m x\}_{m\in\mathbb{N}}$ dizisi t'ye yakınsar (Mani vd., 2021).

İspat

$(X, \perp)$ bir ortogonal küme olduğundan

$\exists x_0 \in X: (\forall x \in X, x \perp x_0)$ ya da $(\forall x \in X, x_0 \perp x)$.

olur. Böylece $x_0 \perp fx_0$ ya da $fx_0 \perp x_0$ dır. $\forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$x_1 := fx_0, \; \cdots\cdots, x_{m+1} := fx_m = f^{m+1}x_0$$

olsun. $\forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_m = x_{m+1}$ ise bu durumda x_m f'nin bir sabit noktasıdır. $\forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_m \neq x_{m+1}$ olduğu kabul edilsin. Böylece $\forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $d(fx_m, fx_{m+1}) > 0$ olur. T , $\perp$-koruyan olduğundan $\forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için,

$x_m \perp x_{m+1}$ ya da $x_{m+1} \perp x_m$

elde ederiz. Yani $\{x_m\}$ bir ortogonal dizidir. Dolayısıyla $\forall m \in \mathbb{N}$ için

$0 < d(x_m, fx_m) = d(fx_{m-1}, fx_m)$

olur.

Şimdi $d_m = d(x_m, x_{m+1})$ olsun. F'nin monotonluğundan $\forall m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\tau + F(d_m) &= \tau + F\big(d(x_m, x_{m+1})\big) = \tau + F\big(d(fx_{m-1}, fx_m)\big) \\ &\leq F(\theta_1 d(x_{m-1}, x_m) + \theta_2 d(x_{m-1}, fx_{m-1}) + \theta_3 d(x_m, fx_m) + \\ &\quad \theta_4 d(x_{m-1}, fx_m) + \theta_5 d(x_m, fx_{m-1})) \\ &= F(\theta_1 d(x_{m-1}, x_m) + \theta_2 d(x_{m-1}, x_m) + \theta_3 d(x_m, x_{m+1}) + \\ &\quad \theta_4 d(x_{m-1}, x_{m+1}) + \theta_5 d(x_m, x_m)) \\ &= F(\theta_1 d_{m-1} + \theta_2 d_{m-1} + \theta_3 d_m + \theta_4 d(x_{m-1}, x_{m+1})) \\ &\leq F(\theta_1 d_{m-1} + \theta_2 d_{m-1} + \theta_3 d_m + \theta_4 (d_{m-1} + d_m)) \\ &= F((\theta_1 + \theta_2 + \theta_4) d_{m-1} + (\theta_3 + \theta_4) d_m)\end{aligned}$$

elde edilir. Devam edilirse

$$\begin{aligned}F(d_m) &\leq F\big((\theta_1 + \theta_2 + \theta_4) d_{m-1} + (\theta_3 + \theta_4) d_m\big) - \tau \\ &< F\big((\theta_1 + \theta_2 + \theta_4) d_{m-1} + (\theta_3 + \theta_4) d_m\big) \qquad (3.9)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece F'nin monotonluğundan

$d_m \leq (\theta_1 + \theta_2 + \theta_4) d_{m-1} + (\theta_3 + \theta_4) d_m$

elde edilir ve buradan $\forall m \in \mathbb{N}$ için

$(1 - \theta_3 - \theta_4) d_m < (\theta_1 + \theta_2 + \theta_4) d_{m-1}$

elde edilir.

$\theta_3 \neq 1$ ve $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + 2\theta_4 = 1$ olduğundan, $(1 - \theta_3 - \theta_4) > 0$ sonucu çıkar ve böylece $\forall m \in \mathbb{N}$ için,

$d_m < \frac{\theta_1+\theta_2+\theta_4}{1-\theta_3-\theta_4} d_{m-1} = d_{m-1}$

olur. Bu nedenle $\{d_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ dizisi kesin azalandır ve dolayısıyla $\lim_{m\to\infty} d_m = d$. $d > 0$ olsun. F artan dönüşüm olduğundan $\lim_{x\to d_+} F(x) = F(d+0)$. Eş.3.9'da $m \to \infty$ iken, $F(d0 - +0) \leq F(d+0) - l$ elde edilir. Öyleyse

$$\lim_{m\to\infty} d_m = 0 \tag{3.10}$$

olur.

Şimdi $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$'nin Cauchy ortogonal dizisi olduğunu kanıtlanacaktır. $\varepsilon > 0$ öyle ki $i(m) > j(m) > m$ olacak biçimde doğal sayıların $\{i(m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ ve $\{j(m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ dizilerinin var olduğu kabul edilsin. $\forall m \in \mathbb{N}$ için

$d(x_{i(m)}, x_{j(m)}) > \varepsilon$, $d(x_{i(m)-1}, x_{j(m)}) \leq \varepsilon$.

Eş.3.10' dan

$\varepsilon < d\left(x_{i(m)}, x_{j(m)}\right) \leq d\left(x_{i(m)}, x_{i(m)-1}\right) + d\left(x_{i(m)-1}, x_{j(m)}\right) \leq$
$d\left(x_{i(m)-1}, x_{j(m)}\right) + \varepsilon$

bulunur.

$\lim_{m\to\infty} d\left(x_{i(m)}, x_{j(m)}\right) = \varepsilon$

olur.

$d\left(x_{i(m)}, x_{j(m)}\right) > \varepsilon > 0$ ve F monoton olduğundan

$\tau + F\left(d\left(x_{i(m)}, x_{j(m)}\right)\right) \leq F(\theta_1 d\left(x_{i(m)-1}, x_{j(m)-1}\right) + \theta_2 d\left(x_{i(m)-1}, fx_{i(m)-1}\right) +$
$\theta_3 d\left(x_{j(m)-1}, fx_{j(m)-1}\right) + \theta_4 d\left(x_{i(m)-1}, fx_{j(m)} - 1\right) + \theta_5 d\left(fx_{i(m)-1}, x_{j(m)-1}\right))$
$= F(\theta_1 d\left(x_{i(m)-1}, x_{j(m)-1}\right) + \theta_2 d\left(x_{i(m)-1}, x_{i(m)}\right) + \theta_3 d\left(x_{j(m)-1}, x_{j(m)}\right) +$
$\theta_4 d\left(x_{i(m)-1}, x_{j(m)}\right) + \theta_5 d\left(fx_{i(m)}, x_{j(m)-1}\right))$
$\leq F(\theta_1\left[d\left(x_{i(m)}, x_{j(m)}\right) + d_{i(m)-1} + d_{j(m)-1}\right] + \theta_2 d_{i(m)-1} + \theta_3 d_{j(m)-1} +$
$\theta_4\left[d\left(x_{i(m)}, x_{j(m)}\right) + d_{i(m)-1}\right] + \theta_5\left[d\left(x_{i(m)}, x_{j(m)}\right) + d_{j(m)-1}\right]$
$= F((\theta_1 + \theta_4 + \theta_5) d\left(x_{i(m)}, x_{j(m)}\right) + (\theta_1 + \theta_2 + \theta_4) d_{i(m)-1} + (\theta_1 + \theta_3 +$
$\theta_5) d_{j(m)-1})$

$\leq F(d(x_{i(m)}, x_{j(m)}) + d_{i(m)-1} + (\theta_1 + \theta_3 + \theta_5)d_{j(m)-1})$.

$m \to \infty$ iken $\tau + F(\varepsilon + 0) \leq F(\varepsilon + 0)$. Bu yüzden $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ bir Cauchy ortogonal dizisidir. (X, d) bir ortogonal tam metrik uzay olduğundan $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$'nin X'te bir t noktasına yakınsar. $x_{i(m)+1} = fx_{i(m)} = f(t)$ olacak biçimde bir $\{i(m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ doğal sayı dizisi varsa $\lim_{m\to\infty} x_{i(m)+1} = t$ ve $ft = t$. Aksi halde öyle $M \in \mathbb{N}$ vardır ki $\forall m \geq M$ için $x_{m+1} = fx_m \neq ft$'dir. $ft \neq t$ olduğu kabul edilsin. Eş. 3.8'den aşağıdakiler elde edilir.

$\tau + F(d(fx_m, ft)) \leq F(\theta_1 d(x_m, t) + \theta_2 d(x_m, fx_m) + \theta_3 d(t, ft) + \theta_4 d(x_m, ft) + \theta_5 d(fx_m, t))$

ve buradan

$\tau + F(d(fx_m, ft)) \leq F(\theta_1 d(x_m, t) + \theta_2 d(x_m, x_{m+1}) + \theta_3 d(t, ft) + \theta_4 d(x_m, ft) + \theta_5 d(fx_{m+1}, t))$.

F artan olduğundan

$$d(fx_m, ft) < \theta_1 d(x_m, t) + \theta_2 d(x_m, x_{m+1}) + \theta_3 d(t, ft) + \theta_4 d(x_m, ft) + \theta_5 d(fx_{m+1}, t)$$

elde edilir.

$m \to \infty$ iken

$d(t, ft) \leq \theta_3 d(t, ft) + \theta_4\, d(t, ft) < d(t, ft)$.

Böylece $ft = t$'dir. $t, r \in X$, f'nin iki farklı sabit noktası olsun. Yani $ft = t \neq r = fr$. Buradan $d(ft, fr) = d(t, r) > 0$. $0 < \theta_1 + \theta_4 + \theta_5 \leq 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}\tau + F(d(t,r)) = \tau + F(d(ft, fr)) &\leq F(\theta_1 d(t,r) + \theta_2 d(t, ft) + \theta_3 d(r, fr) + \theta_4 d(t, fr) + \theta_5 d(r, t)) \\ &= F(\theta_1 d(t,r) + \theta_4 d(t,r) + \theta_5 d(t,r)) \\ &\leq F((\theta_1 + \theta_4 + \theta_5) d(t,r)) \leq F(d(t,r))\end{aligned}$$

bulunur. Bu nedenle f'nin tek bir sabit noktası vardır (Mani vd., 2021).

3.2.4. Sonuç

$(X, \perp, d)$ bir ortogonal tam metrik uzay , x_0 bir ortogonal eleman ve $f: X \to X$ dönüşüm olsun. Varsayalım ki $F: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ bir artan dönüşüm ve $\tau > 0$ olmak üzere tüm $x, y \in X$ ve $fx \neq fy$ için

$\forall x, y \in X, x \perp y[d(fx, fy) > 0 \Rightarrow \tau + F(d(fx, fy) \leq F(d(x, y))$.

Burada f $\perp$-koruyandır. Öyleyse f, X'te tek bir sabit noktaya sahiptir (Mani vd., 2021).

Şimdi genelleştirilmiş ortogonal F-büzülme ve ortogonal F-Suzuki büzülme tanımı verilecektir. Bunun için Wardowski'nin F-büzülme tanımında (F_3) koşulu aşağıdaki şekilde değiştirilsin.

(F_3') F, $(0, \infty)$'da süreklidir.

$\mathfrak{Z} = \{F: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} | F, (F_1), (F_2)\ ve\ (F_3')$ koşullarını sağlar.$\}$

3.2.5. Tanım

$(X, \perp, d)$ bir ortogonal metrik uzay olsun. Aşağıdaki koşulu sağlayacak şekilde $F \in \mathfrak{Z}$ ve $\tau > 0$ varsa $f: X \to X$ dönüşümüne $(X, \perp, d)$'de genelleştirilmiş ortogonal F-büzülme dönüşümü (kısaca genelleştirilmiş $f_\perp$-büzülme) denir.

$\forall x, y \in X\ için\ x \perp y[d(fx, fy) > 0 \Rightarrow \tau + F(d(fx, fy)) \leq F(d(x, y))]$

(Mani, Gnanaprakasam, L. N. Mishra ve V. N. Mishra, 2021).

3.2.6. Tanım

$(X, \perp, d)$ bir ortogonal metrik uzay olsun. Aşağıdaki koşulu sağlayacak şekilde $F \in \mathfrak{Z}$ ve $\tau > 0$ varsa $f: X \to X$ dönüşümüne $(X, \perp, d)$'de ortogonal F -Suzuki büzülme dönüşümü (kısaca $f_\perp$-Suzuki büzülme) denir.

$\forall x, y \in X\ için\ x \perp y \left[d(fx, fy) > 0, \frac{1}{2} d(x, fx) < d(x, y) \Rightarrow \tau + F(d(fx, fy)) \leq F(d(x, y))\right]$

(Mani vd. , 2021).

Şimdi bir $(X, \perp, d)$ ortogonal tam metrik uzayda genelleştirilmiş ortogonal F- büzülme dönüşümü için sabit nokta teoremi verilecektir.

3.2.7. Teorem

$(X, \perp, d)$ bir ortogonal tam metrik uzay, $f: X \to X$ bir dönüşüm ve x_0, $(X, \perp, d)$'de bir ortogonal eleman olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde $F \in \mathfrak{D}$ ve $\tau > 0$ olduğunu varsayalım.

i) f , $\perp$-koruyan

ii) f genelleştirilmiş $f_\perp$-büzülme dönüşümü

iii) f , $\perp$-sürekli

O zaman f'nin tek bir $t \in X$ sabit noktası vardır ve her $x \in X$ için $\{f^n x\}$ dizisi t'ye yakınsar (Mani vd. , 2021).

İspat

$(X, \perp)$ bir ortogonal küme olduğundan

$\exists x_0 \in X: (\forall x \in X, x \perp x_0)$ ya da $(\forall x \in X, x_0 \perp x)$.

Buradan $x_0 \perp fx_0$ ya da $fx_0 \perp x_0$. Tüm $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için,

$x_1 := fx_0,\ x_2 := fx_1 = f^2 x_0 \cdots, x_{n+1} := fx_n = f^{n+1} x_0.$

Tüm $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_n = x_{n+1}$ ise x_n f'nin bir sabit noktasıdır. Kabul edilsin ki $x_n \neq x_{n+1}$. Tüm $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $d(fx_n, fx_{n+1}) > 0$'dır. f, $\perp$-koruyan olduğundan tüm $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için,

$x_n = x_{n+1}$ ya da $x_{n+1} = x_n$

olur. Buradan $\{x_n\}$ bir ortogonal dizidir. f genelleştirilmiş $f_\perp$-büzülme dönüşümü olduğundan

$$\begin{aligned} F\big(d(fx_{n-1}, fx_n)\big) &\leq F\big(d(x_{n-1}, x_n)\big) - \tau \\ &= F\big(d(fx_{n-2}, fx_{n-1})\big) - \tau \\ &\leq F\big(d(x_{n-2}, x_{n-1})\big) - 2\tau \\ &= F\big(d(fx_{n-3}, fx_{n-2})\big) - 2\tau \\ &\leq F\big(d(x_{n-3}, x_{n-2})\big) - 3\tau \\ &\leq F\big(d(x_0, x_1)\big) - n\tau\ . \end{aligned} \tag{3.11}$$

Eş.3.11'den $\lim_{n\to\infty} F\big(d(x_n, fx_n)\big) = -\infty$ elde edilir.

Tüm $\{\alpha_n\}$ pozitif tam sayı dizileri için $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} F(\alpha_{n)} = -\infty$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, fx_n) = 0 \tag{3.12}$$

elde edilir.

İddia edilsin ki $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bir Cauchy ortogonal dizisidir. Aksine $\varepsilon > 0$ ve $\{i(n)\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{j(n)\}_{n=1}^{\infty}$ pozitif sayı dizileri olsun öyle ki

$$i(n) > j(n) > n,\ d\big(x_{i(n)}, x_{j(n)}\big) \geq \varepsilon,\ d\big(x_{i(n-1)}, x_{j(n)}\big) < \varepsilon\ ,\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.13}$$

Bu yüzden

$$\begin{aligned} \varepsilon \leq d\big(x_{i(n)}, x_{j(n)}\big) &\leq d\big(x_{i(n)}, x_{i(n)-1}\big) + d\big(x_{i(n)-1}, x_{j(n)}\big) \\ &< d\big(x_{i(n)}, x_{i(n)-1}\big) + \varepsilon \\ &= d\big(x_{i(n)-1}, fx_{i(n)-1}\big) + \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir.

Eş.3.12 ve yukarıdaki eşitsizlikten

$$\lim_{n\to\infty} d\big(x_{i(n)}, x_{j(n)}\big) = \varepsilon \tag{3.14}$$

bulunur.

Diğer yandan Eş.3.12'den $N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki

$$d\big(x_{i(n)}, fx_{i(n)}\big) < \tfrac{\varepsilon}{4} \text{ ve } d\big(x_{j(n)}, fx_{j(n)}\big) < \tfrac{\varepsilon}{4},\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.15}$$

Sonra kabul edilsin ki

$$d\big(fx_{i(n)}, fx_{j(n)}\big) = d\big(x_{i(n)+1}, x_{j(n)+1}\big) > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

$m \geq \mathbb{N}$ vardır öyle ki

$$d\big(x_{i(m)+1}, x_{j(m)+1}\big) = 0 \tag{3.16}$$

Eş.3.13, Eş.3.15 ve Eş.3.16'dan

$$\begin{aligned} \varepsilon \leq d\big(x_{i(m)}, x_{j(m)}\big) &\leq d\big(x_{i(m)}, x_{i(m)+1}\big) + d\big(x_{i(m)+1}, x_{j(m)}\big) \\ &\leq d\big(x_{i(m)}, x_{i(m)+1}\big) + d\big(x_{i(m)+1}, x_{j(m)+1}\big) + d\big(x_{j(m)+1}, x_{j(m)}\big) \end{aligned}$$

$$= d\left(x_{i(m)}, fx_{i(m)}\right) + d\left(x_{i(m)+1}, x_{j(m)+1}\right) + d\left(x_{j(m)}, fx_{j(m)}\right)$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + 0 + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Bu Eş.3.16 ile çelişir. f , $\perp$-koruyan olduğundan

$x_{i(n)} = x_{j(n)}$ ya da $x_{j(n)} = x_{i(n)}$.

f genelleştirilmiş F-büzülme dönüşümü olduğundan

$$\tau + F(d\left(fx_{i(n)}, fx_{j(n)}\right) \leq F(d\left(x_{i(n)}, x_{j(n)}\right), \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.17}$$

bulunur. (F_3'), Eş.3.14 ve Eş.3.17'den $\tau + F(\varepsilon) \leq F(\varepsilon)$ elde edilir. Bu çelişki gösteriyor ki $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bir Cauchy dizidir. X'in tamlığından $t \in X$ vardır öyle ki $\lim_{n\to\infty} x_n = t$. f, $\perp$-sürekli olduğundan

$$ft = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = t$$

bulunur. Bu yüzden t, f'nin bir sabit noktasıdır.

Artık t'nin f'nin tek sabit noktası olduğu gösterilsin. $s, r \in X$, X'in iki farklı sabit noktası olsun. Yani $fs = s \neq r = fr$. Buradan

$d(fs, fr) = d(s, r) > 0$.

f, $\perp$-koruyan olduğundan $s \perp r$ ya da $r \perp s$ olur.

f genelleştirilmiş ortogonal F-büzülme dönüşümü olduğundan

$$F\left(d(s,r)\right) = F\left(d(fs, fr)\right) < \tau + F\left(d(fs, fr)\right) \leq F\left(d(s,r)\right)$$

olur. Bu bir çelişkidir. Buradan f tek bir sabit noktaya sahiptir.

3.3. Ortogonal ϕ Büzülme Dönüşümleri

3.3.1. Teorem

$(X, \perp, d)$ ortogonal tam metrik uzay ve $f: X \to X$, $\perp$-sürekli ve $\perp$- koruyan bir dönüşüm öyle ki $\forall\, x, y \in X$ ve $x \perp y$ için

$d(f(x), f(y)) \leq \phi(d(x, y))$

olsun.

Burada $\phi: \mathbb{R}^+ \to [0, \infty)$ sağdan alt yarı sürekli dönüşüm olmak üzere herhangi bir dizi için

$$t_n \to t \geq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} sup\phi(t_n) \leq \phi(t)$$

ve $t > 0$ için $0 \leq \phi(t) < t$ olarak tanımlansın. O halde f tek bir x^* sabit noktasına sahiptir. Ayrıca f bir Picard operatörü, yani tüm $x \in X$ için $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x^*$'dır (Singh B., Singh V., Uddin, Acar, 2022).

İspat

$x_0 \in X$, X'in bir ortogonal elemanı olsun. O zaman tanım gereği

$(\forall y \in X, x_0 \perp y)$ ya da $(\forall y \in X,\ \ y \perp x_0)$

olur. Buradan $\left(x_0 \perp f(x_0)\right)$ ya da $(f(x_0) \perp x_0)$ olur.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ için,

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f^2(x_0), x_{n+1} = f(x_n) = f^{n+1}(x_0)$$

olsun. f, $\perp$-koruyan olduğundan $\{x_n\}$ bir ortogonal dizidir. $a_n = d(x_{n-1}, x_n)$'dir. $\{a_n\}$ monoton azalan olup sınırlıdır ve $\{a_n\}$, a'ya yakınsar. Yani $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ olur. $a > 0$ ise $a_{n+1} \leq \phi(a_n)$ elde edilir. Böylece

$$a \leq \lim_{t\to a^+} sup\phi(t) \leq \phi(a)$$

olur ki bu bir çelişkidir.

$\{x_n\}$ ortogonal dizisinin Cauchy ortogonal dizisi olduğunu göstermek için aksi kabul edilsin. O halde $i_k \geq j_k \geq k$ olmak üzere $\{i_k\}$, $\{j_k\}$ dizileri $\exists\ \varepsilon > 0$ için,

$$d_k = d\left(x_{i_k}, x_{j_k}\right) \geq \varepsilon, d\left(x_{i_{k-1}}, x_{j_k}\right) < \varepsilon,\ \ k = 1,2,3 \ldots$$

olsun.

$$\varepsilon \leq d_k = d\left(x_{i_k}, x_{j_k}\right) \leq d\left(x_{i_k}, x_{j_{k-1}}\right) + d\left(x_{i_{k-1}}, x_{j_k}\right) < a_{i_k} + \varepsilon$$

olur ki burada $k \to \infty$ iken $d_k \to \varepsilon^+$'dır.

Ama

$$d_k = d\left(x_{i_k}, x_{j_k}\right) \leq d\left(x_{i_k}, x_{i_{k+1}}\right) + d\left(x_{i_{k+1}}, x_{j_{k+1}}\right) + d\left(x_{j_{k+1}}, x_{j_k}\right) < 2a_k + \phi(d_k)$$

olur. Böylece $k \to \infty$ iken $\varepsilon \leq \phi(\varepsilon)$ bulunur ve bu bir çelişkidir. Yani varsayım yanlıştır. Bu yüzden $\{x_n\}$ ortogonal dizisi bir Cauchy ortogonal dizisidir. X, ortogonal tam olduğu için $\{x_n\} \to x^*$ olacak biçimde $x^* \in X$ vardır. f ortogonal sürekli olduğundan $f(x_n) \to f(x^*)$ olur bu yüzden

$$f(x^*) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*.$$

Teklik için $f(y^*) = y^*$ olacak biçimde $y^* \in X$ olduğu kabul edilsin. Ayrıca $f^n(y^*) = y^*$, $x_0 \in X$ seçimi için $[x_0 \perp x^* \; ya \; da \;\; x^* \perp x_0]$ ve $[x_0 \perp y^* \; ya \; da \; y^* \perp x_0]$'dır. f, $\perp$-koruyan olduğundan tüm $n \in \mathbb{N}$ için $[f^n(x_0) \perp f^n(x^*) \; ya \; da \; f^n(x^*) \perp f^n(x_0)]$ ve $[f^n(x_0) \perp f^n(y^*) \; ya \; da \; f^n(y^*) \perp f^n(x_0)]$ bulunur.

Bu yüzden, $t > 0$, $\phi(t) < t$ için,

$$d(x^*, y^*) = d\big(f^n(x^*), f(y^*)\big) \leq \phi\left(d\big(f^{n-1}(x^*), f^{n-1}(y^*)\big)\right)$$
$$< d\big(f^{n-1}(x^*), f^{n-1}(y^*)\big) < \cdots < d(x^*, y^*).$$

Bu bir çelişkidir, yani $x^* = y^*$.

Son olarak keyfi $x \in X$ alalım. Benzer şekilde tüm $n \in \mathbb{N}$ için, $[x_0 \perp x^*$ ya da $x_0 \perp x$] ya da $[x^* \perp x_0$ ve $x \perp x_0]$ ve $[f^n(x_0) \perp f^n(x^*) \; ve \; f^n(x_0) \perp f^n(x)]$ ya da $[f^n(x^*) \perp f^n(x_0) \; ve \; f^n(x) \perp f^n(x_0)]$ olur.

Buradan herhangi $n \in \mathbb{N}$ için $n \to \infty$ iken,

$$d\big(x^*, f^n(x)\big) = d\big(f^n(x^*), f^n(x)\big) \leq \phi\left(d\big(f^{n-1}(x^*), f^{n-1}(x)\big)\right)$$
$$\leq \phi^2\left(d\big(f^{n-2}(x^*), f^{n-2}(x)\big)\right) \leq \cdots \leq$$
$$\phi^n\big(d(x^*, x)\big) \to 0$$

Böylece ispat tamamlanır.

3.3.2. Teorem

$(X, \perp, d)$ ortogonal tam metrik uzay ve $f: X \to X$, $\perp$-sürekli ve $\perp$- koruyan bir dönüşüm $\forall\, x, y \in X$ ve $x \perp y$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq \phi(d(x, y))$$

olarak tanımlansın. Burada $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\forall t > 0$ için $\lim_{n\to\infty} \phi^n(t) = 0$ olan monoton azalmayan dönüşümdür.

O halde f tek bir x^* sabit noktasına sahiptir. Ayrıca f bir Picard operatörü, yani tüm $x \in X$ için $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x^*$'dır (Singh vd., 2022).

İspat

$x_0 \in X$, X'in bir ortogonal elemanı olsun. O zaman tanım gereği

$(\forall y \in X, x_0 \perp y)$ ya da $(\forall y \in X,\ y \perp x_0)$

olur. Buradan $\big(x_0 \perp f(x_0)\big)$ ya da $(f(x_0) \perp x_0)$ bulunur.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ için,

$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f^2(x_0), x_{n+1} = f(x_n) = f^{n+1}(x_0)$

olsun. f, $\perp$-koruyan olduğundan $\{x_n\}$ bir ortogonal dizidir. $a_n = d(x_{n-1}, x_n)$ ve $n \to \infty$ iken

$$d(x_{n+1}, x_n) = d\big(f(x_n), f(x_{n-1})\big) \le \phi\big(d(x_n, x_{n-1})\big) = \phi\big(d(x_{n-1}, x_{n-2})\big)$$
$$\le \phi^2(x_{n-1}, x_{n-2}) \le \phi^n(x_1, x_0)$$

olur ve ϕ'nin tanımından $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$ bulunur. Şimdi, $\{x_n\}$ ortogonal dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterilsin. Ayrıca $\varepsilon > 0$ için $\phi(\varepsilon) < \varepsilon$ olduğunu göz önünde bulundurulsun. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$'dır. Böylece $\varepsilon > 0$ için $a_n \le \varepsilon - \phi(\varepsilon)$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ seçilebilir. Şimdi $M = \{x \in X: d(x, x_n) < \varepsilon\}$ ve $x \perp y$ şeklinde tanımlansın. O zaman herhangi bir $y \in M$ için,

$d(f(y), x_n) = d\big(f(y), f(x_n)\big) + d(f(x_n), x_n) \le \phi\big(d(y, x_n)\big) + d(x_{n-1}, x_n) \le$
$\phi(\varepsilon) + \varepsilon - \phi(\varepsilon) \le \varepsilon$

olur ki buda $f(y) \in M$, yani $f(M) \subseteq M$ anlamına gelir. Buradan $\forall n \ge m$ için $d(x_m, x_n) \le \varepsilon$ bulunur. X'in tamlığından, $x^* \in X$ vardır öyle ki $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$

f, $\perp$-sürekli olduğundan $f(x_n) \to f(x^*)$, buradan

$$f(x^*) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*$$

bulunur. O halde x^* bir sabit noktadır. Şimdi sabit noktanın tekliği ispatlansın. $y^* \in X$, f'nin x^* dan ayrı bir sabit noktası olsun öyle ki $f^n(y^*) = y^*$. O zaman $d(x^*, y^*) > 0$'dır. $x_0 \in X$ seçimi için $[x_0 \perp y^* \; ya \; da \; y^* \perp x_0]$ olur ve f, $\perp$-koruyan olduğundan tüm $n \in \mathbb{N}$ için $[f^n(x_0) \perp f^n(y^*) \; ya \; da \; f^n(y^*) \perp f^n(x_0)]$. Öyleyse

$$d(x^*, y^*) = d\big(f^n(x^*), f^n(y^*)\big) \leq \phi\left(d\big(f^{n-1}(x^*), f^{n-1}(y^*)\big)\right) \leq \cdots \leq$$

$$\phi^n d(x^*, y^*),$$

$\lim_{n\to\infty} d(f(x^*), y^*) = 0$ yani $x^* = y^*$.

Son olarak keyfi $x \in X$ alınsın. Benzer şekilde tüm $n \in \mathbb{N}$ için, $[x_0 \perp x^* \; ve \; x_0 \perp x]$ ya da $[x^* \perp x_0 \; ve \; x \perp x_0]$ ve tüm $n \in \mathbb{N}$ için, $[f^n(x_0) \perp f^n(x^*) \; ve \; f^n(x_0) \perp f^n(x)]$ ya da $[f^n(x^*) \perp f^n(x_0) \; ve \; f^n(x) \perp f^n(x_0)]$ olur.

Buradan tüm $n \in \mathbb{N}$ için $n \to \infty$ iken,

$$d\big(x^*, f^n(x)\big) = d\big(f^n(x^*), f^n(x)\big) \leq \phi\left(d\big(f^{n-1}(x^*), f^{n-1}(x)\big)\right)$$

$$\leq \phi^2\left(d\big(f^{n-2}(x^*), f^{n-2}(x)\big)\right) \leq \cdots \leq$$

$$\phi^n\big(d(x^*, x)\big) \to 0$$

Böylece ispat tamamlanır.

3.4. Ortogonal Geraghty Büzülme

3.4.1. Tanım

$(X, \perp, d)$ bir ortogonal metrik uzay, $f: X \to X$ bir dönüşüm S, $\beta: [0, \infty) \to [0,1)$ dönüşümünün sınıfını göstersin öyleki $n \to \infty$ iken $v_n \to 0$ ve $\beta(v_n) \to 1$ olmak üzere $x, y \in X$ ve $\beta \in$ S için,

$x \perp y$ olacak şekilde $d(f(x), f(y)) \leq \beta\big(d(x, y)\big)d(x, y)$ (3.18)

olursa f bir Geraghty $\perp$-büzülmedir (Razavi, Masiha, Işık, Aydi ve Park, 2022).

Örnek

Öklid metriğinde $X = [0,3)$ kümesini alalım. $xy \leq x$ ise $x \perp y$ olsun. $f: X \to X$ dönüşümünü

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}, & x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

olarak tanımlarsak aşağıdaki durumlar geçerlidir:

Durum1: $x = 0, y \leq 2$ için $f(x) = 0, f(y) = \frac{y}{4}$.

Durum2: $x = 0, y > 2$ için $f(x) = 0 = f(y)$.

Durum3: $y \leq 1, x \leq 2$ için $f(x) = \frac{x}{4}, f(y) = \frac{y}{4}$.

Durum4: $y \leq 1, x > 2$ için $f(x) = 0, f(y) = \frac{y}{4}$.

$\beta: [0, \infty) \to [0,1)$ ve $\beta\big(d(x,y)\big) = \frac{1}{1+d(x,y)}$ olduğundan $d(x,y) \to 0$ iken $\beta\big(d(x,y)\big) \to 1$ olur. Ayrıca $|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$'dir. Bu nedenle f bir Geraghty $\perp$-büzülmedir (Razavi vd., 2022).

3.4.2. Teorem

$(X, \perp, d)$ ortogonal tam metrik uzay ve $f: X \to X$ dönüşümü bir $\perp$-sürekli, $\perp$-koruyan ve Geraghty $\perp$-büzülme olsun. Böyle bir durumda f'nin X'te tek bir sabit noktası vardır. Ayrıca f bir Picard operatördür (Razavi vd., 2022).

İspat

Öncelikle f'nin bir sabit noktaya sahip olduğunu gösterilecektir. X bir ortogonal küme olduğundan bir $x_0 \in X$ vardır öyle ki tüm $y \in X$ için $x_0 \perp y$ ya da $y \perp x_0$. Böylelikle $x_0 \perp f(x_0)$ ya da $f(x_0) \perp x_0$'dır. f $\perp$-koruyan olduğundan tümevarım yöntemiyle

$$x_0 \perp f(x_0) = f^2(x_0) \perp f^3(x_0) \perp \cdots \perp f^n(x_0) \perp f^{n+1}(x_0) \perp \cdots$$

elde edilir.

Tüm $n = 1,2 \cdots$ için $x_n = f^n(x_0)$'dır. $x_n \perp x_{n+1}$ olduğundan her bir $n \in \mathbb{N}$ için Eş.3.18'den

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+2}) &= d\big(f^{n+1}(x_0), f^{n+2}(x_0)\big) \\ &\leq \beta(d(x_n, x_{n+1}))d(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}). \end{aligned}$$

$\{d(x_n, x_{n+1})\}$ bir $\perp$-koruyan dizidir ve alttan sınırlıdır. Bu yüzden $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = r \geq 0$.

Kabul edilsin ki $r > 0$, öyleyse Eş.3.18'den

$\frac{d(x_{n+1},x_{n+2})}{d(x_n,x_{n+1})} \leq \beta\big(d(x_n,x_{n+1})\big),\ n = 1,2\cdots$

elde edilir.

Yukarıdaki eşitsizlikte $\lim_{n\to\infty} \beta\big(d(x_n,x_{n+1})\big) = 1$. $\beta \in S$ olduğundan $r = 0$ bulunur. Bu yüzden $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_{n+1}) = 0$.

Şimdi $\{x_n\}$'nin bir Cauchy ortogonal dizi olduğunu gösterilecektir. Aksine

$$\lim_{m,n\to\infty} sup\, d(x_n,x_m) > 0 \tag{3.19}$$

olduğu kabul edilsin. Üçgen eşitsizliğinden

$$d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{m+1}) + d(x_{n+1},x_{m+1}) + d(x_{m+1},x_m)$$

bulunur. Böylece Eş.3.19'dan

$$d(x_n,x_m) \leq \Big(1 - \beta\big(d(x_n,x_m)\big)\Big)^{-1} [d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{m+1},x_m)]$$

$\lim_{m,n\to\infty} sup\, d(x_n,x_m) > 0$ ve $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_{n+1}) = 0$ olduğundan

$$\lim_{m,n\to\infty} sup \Big(1 - \beta\big(d(x_n,x_m)\big)\Big)^{-1} = \infty$$

bulunur.

$\lim_{m,n\to\infty} sup\, \beta\big(d(x_n,x_m)\big) = 1$ elde edilir. Fakat $\beta \in S$ olduğundan

$$\lim_{m,n\to\infty} sup\, d(x_n,x_m) = 0$$

olur.

Bu Eş.3.19 ile çelişir, bu yüzden $\{x_n\}$, X'te bir Cauchy ortogonal dizisidir. (X,d) bir ortogonal tam metrik uzay öyle ki bir $t \in X$ vardır $\lim_{n\to\infty} x_n = t$'dir. t'nin f'nin bir sabit noktası olduğunu gösterelim. f $\perp$-sürekli olduğundan

$$t = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x_0) = f\left(\lim_{n\to\infty} f^n(x_0)\right) = f(t).$$

Böylelikle $f(t) = t$, yani f'nin bir sabit noktası t 'dir.

x, f'nin diğer sabit noktası olsun. Bu yüzden tüm $n \in \mathbb{N}$ için

$f^n(x) = x$, $f^n(y) = y$ bulunur.

İspatın ilk kısmındaki x_0 seçilirse

$(x_0 \perp x, x_0 \perp y)$ ya da $(x \perp x_0, x \perp x_0)$

elde edilir.

f $\perp$-koruyan olduğundan

$(f^n(x_0) \perp f^n(x),\ f^n(x_0) \perp f^n(y), \forall n \in \mathbb{N}$

ya da

$(f^n(x) \perp f^n(x_0),\ f^n(y) \perp f^n(x_0), \forall n \in \mathbb{N}$

bulunur.

Üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d\big(x, f^n(x_0)\big) &= d(f^n(x), f^n(x_0)) \\ &\leq \beta\left(d\big(f^{n-1}(x), f^{n-1}(x_0)\big)\right) d\big(f^{n-1}(x), f^{n-1}(x_0)\big) \\ &\leq\ d\big(f^{n-1}(x), f^{n-1}(x_0)\big) \\ &= d\big(x, f^{n-1}(x_0)\big) \end{aligned} \tag{3.20}$$

$\gamma_n = d\big(x, f^n(x_0)\big)$ negatif olmayan $\perp$-koruyan olduğundan

$\lim_{n\to\infty} d\big(x, f^n(x_0)\big) = \gamma$

Şimdi $\gamma = 0$ olduğu gösterilecektir. Aksine $\gamma > 0$ olsun. Eş.3.20'den $\lambda\gamma = \gamma$ olur, yani $\lambda = 1$'dir. $\beta \in$ S olduğundan

$\gamma = \lim_{n\to\infty} \gamma_n = \lim_{n\to\infty} d\big(x, f^n(x_0)\big) = 0$ bulunur.

Bu bir çelişkidir, yani $\gamma = 0$. Benzer şekilde, $\lim_{n\to\infty} d\big(y, f^n(x_0)\big) = 0$.

Buradan $n \to \infty$ iken,

$d(x, y) \leq d\big(x, f^n(x_0)\big) + d(f^n(x_0), y) \to \infty$

Sonuç olarak $d(x, y) = 0$, bu yüzden $x = y$.

Son olarak y, X'te keyfi bir eleman olsun. Benzer şekilde tüm $n \in \mathbb{N}$ için

$(x_0 \perp x, x_0 \perp y)$ ya da $(x \perp x_0, x \perp x_0)$

ve

$(f^n(x_0) \perp f^n(x),\ f^n(x_0) \perp f^n(y)$

ya da

$(f^n(x) \perp f^n(x_0),\ f^n(y) \perp f^n(x_0)$.

Üçgen eşitsizliğinden

$$d\big(x, f^n(y)\big) = d(f^n(x), f^n(y))$$

$$\leq \beta\left(d\big(f^{n-1}(x), f^{n-1}(y)\big)\right) d\big(f^{n-1}(x), f^{n-1}(y)\big)$$

$$\leq\ d\big(f^{n-1}(x), f^{n-1}(y)\big)$$

$$= d\big(x, f^{n-1}(y)\big).$$

Yukarıdakine benzer şekilde, $\lim_{n\to\infty} d\big(y, f^n(x_0)\big) = 0$. Bu yüzden f bir Picard operatörüdür (Razavi vd., 2022).

4. ORTOGONAL B- METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

4.1. Tanım

X boş olmayan herhangi bir küme $s \geq 1$ olacak şekilde bir gerçel sayı olsun. $\sigma: X \times X \to [0, \infty)$ dönüşümü, her $x, y, z \in X$ için,

i) $\sigma(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii) $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$

iii) $\sigma(x, z) \leq s[\sigma(x, y) + \sigma(y, z)]$

şartlarını sağlıyorsa σ dönüşümüne X üzerinde bir b- metrik ve (X, σ) uzayına da bir b-metrik uzay denir.

$s = 1$ alınırsa σ dönüşümü bir metrik olur. Buradan her metrik bir b-metriktir fakat bunun tersi doğru değildir sonucu çıkar (Czerwik,1993).

Örnek

$X = \{0,1,2\}$ olsun. $\sigma: X \times X \to [0, \infty)$ dönüşümü ,

$\sigma(0,0) = \sigma(1,1) = \sigma(2,2) = 0$

$\sigma(1,2) = \sigma(2,1) = \sigma(0,1) = \sigma(1,0) = 1$

$\sigma(2,0) = \sigma(0,2) = m \geq 2$

şeklinde tanımlansın. σ dönüşümü $s = \frac{m}{2}$ için X'de bir b-metriktir. Fakat $m > 2$ olarak alınırsa üçgen eşitsizliği şartı sağlanmadığından σ bir metrik olmaz. Çünkü,

$\alpha(0,2) = m \; ve \; \sigma(0,1) + \sigma(1,2) = 1 + 1 = 2$

olur ve

$\sigma(0,2) = m > 2 = \sigma(0,1) + \sigma(1,2)$

dır. (Aydi, Bota, Karapınar ve Mitrovic, 2012)

Örnek

(X, σ) bir metrik uzay öyle ki , $\rho_\sigma: X \times X \to [0, \infty)$ dönüşümü her $x, y, z \in X$ ve $p > 1$ için,

$\rho_\sigma(x, y) = [\sigma(x, y)]^p$

şeklinde tanımlansın. $s = 2^{p-1}$ alınırsa ρ_σ bir b-metriktir. Gerçekten i) ve ii) şartlarını sağladığı açıktır. Sadece iii) şartını sağladığını göstermek yeterli olacaktır. $1 < p < \infty$ ve her $a, c \in \mathbb{R}_+$ için,

$\left(\frac{a+c}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}(a^p + c^p)$

olduğu için

$(a + c)^p \leq 2^{p-1}(a^p + c^p)$

dır. Buradan her $x, y, z \in X$ için,

$$\begin{aligned}\rho_\sigma(x,y) &= [\sigma(x,y)]^p \\ &\leq [\sigma(x,z) + \sigma(z,y)]^p \\ &\leq 2^{p-1}\left[\left(\sigma(x,z)\right)^p + \left(\sigma(z,y)\right)^p\right] \\ &= 2^{p-1}[\rho_\sigma(x,z) + \rho_\sigma(z,y)]\end{aligned}$$

olup (iii) koşulunu sağlamış olur (Sintunavarat, 2015).

4.2. Tanım

(X, σ) bir b-metrik uzay öyle ki,

$B_\sigma(x, \varepsilon) = \{y \in X : \sigma(x, y) < \varepsilon\}$

şeklinde tanımlanan kümeye $x \in X$ merkezli, $\varepsilon > 0$ yarıçaplı açık yuvar denir.

Metriklerdeki gibi b-metriklerle de açık yuvarlardan yararlanılarak X kümesinde bir topoloji tanımlanabilir.

(X, σ) b-metrik uzayında $\{B_\sigma(x, \varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ ile X'te üretilen topoloji τ_σ ile gösterilir (Karapınar,2018).

4.3. Tanım

(X, σ) herhangi bir b-metrik uzay, $\{x_n\} \subseteq X$ şeklinde tanımlanan bir dizi olsun. $x \in X$ öyle ki, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $\forall n \geq n_0$ için $\sigma(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsaktır denir ve

$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ veya $x_n \to x$ $(n \to \infty)$

şeklinde gösterilir (Boriceanu,2009).

4.4. Lemma

Bir (X, σ) b-metrik uzayında bir $A \subseteq X$ alt kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter şart A kümesindeki her yakınsak dizinin limitinin yine A' da olmasıdır (Hussain ve Shah,2011).

4.5. Önerme

(X, σ) herhangi bir b-metrik uzay , $\{x_n\} \subseteq X$ şeklinde tanımlanan bir dizi olsun. $x \in X$ öyle ki $\{x_n\}$ dizisinin x elemanına yakınsaması için gerek ve yeter şart $\lim_{n\to\infty} \sigma(x_n, x) = 0$ olmasıdır (Boriceanu,2009).

Örnek

$X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ olsun. $\sigma: X \times X \to [0, \infty)$ dönüşümü

$$\sigma(m,n) = \begin{cases} 0;\ m = n\ ise, \\ \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|;\ (m \neq n) m, n\ çift\ ise, \\ 5\ ;\ (m \neq n) m, n\ tek\ ise, \\ 2\ ;\ diğer\ durumlarda, \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. i), ii) şartlarının sağlandığı açıktır. iii) koşulu için $m, n, p \in X$ ve $s = \frac{5}{2}$ olmak üzere,

$$\sigma(m,p) \leq \frac{5}{2}[\sigma(m,n) + \sigma(n,p)]$$

olacağından (X, σ) bir b-metrik uzaydır. $\{x_n\} = \{2n\}$ dizisi için,

$$\sigma(x_n, \infty) = \frac{1}{2n} \to 0\ (n \to \infty)$$

olup, $\{x_n\} \to \infty\ (n \to \infty)$ olur. Ancak, $\sigma(x_n, 1) = 2$ ve $\sigma(\infty, 1) = 5$ olduğu için $\sigma(x_n, 1)$, $\sigma(\infty, 1)$'e yakınsamaz. Bu nedenle σ dönüşümü sürekli değildir (Huang, Deng ve Radenović, 2018).

Not

Metrik fonksiyonu sürekli olmasına karşın b-metrik sürekli olmayabilir.

4.6. Önerme

(X, σ) bir b-metrik uzay olmak üzere, $\{x_n\}$ dizisi X kümesinde yakınsak bir dizi oluyorsa $\{x_n\}$ dizisinin limiti tektir (Boriceanu, Bota ve Petruşel 2010).

4.7. Önerme

(X, σ) bir b-metrik uzay öyle ki, $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri ayrı ayrı $x, y \in X$ noktalarına yakınsak olsun. Böyle bir durumda $s \geq 1$ olmak üzere

i) $\frac{1}{s^2}\sigma(x,y) \leq \lim_{n\to\infty} inf\sigma(x_n, y_n) \leq \lim_{n\to\infty} sup\sigma(x_n, y_n) \leq s^2\sigma(x,y)$ olur.

ii) Eğer x=y ise, $\lim_{n\to\infty} \sigma(x_n, y_n) = 0$ olur.

iii) Bununla birlikte her $z \in X$ için, $\frac{1}{s}\sigma(x,z) \leq \lim_{n\to\infty} inf\sigma(x_n, z) \leq \lim_{n\to\infty} sup\sigma(x_n, z) \leq s\sigma(x,z)$ olur (Aghajani, Abbas ve Roshan,2014).

4.8. Lemma

(X, σ) herhangi bir b-metrik uzay olmak üzere, $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq X$ biçiminde iki dizi olsun. $\lim_{n\to\infty} x_n = t \in X$ ve $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = 0$ oluyorsa , $\lim_{n\to\infty} y_n = t$ olur (Roshan, Shobkolaei, Sedghi ve Abbas,2014).

4.9. Tanım

(X, σ_1) ve (Y, σ_2) iki b-metrik uzay, $f: X \to Y$ herhangi bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ öyle ki, her $\varepsilon > 0$ için,

$\sigma_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow \sigma_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

şartını sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa f dönüşümü x_0' da süreklidir denir.

f dönüşümü X kümesindeki her noktada sürekliyse f dönüşümüne süreklidir denir (Karapınar, 2018)

4.10. Teorem

(X, σ_1) ve (Y, σ_2) iki b-metrik uzay, $f: X \to Y$ herhangi bir dönüşüm olsun. f' nin $x_0 \in X$' de sürekli olması için gerek ve yeter şart, X kümesinde x_0'a yakınsayan her $\{x_n\}$ dizisi için Y kümesinde $\{f(x_n)\}$ dizisinin $f(x_0)$'a yakınsamasıdır (Boriceanu,2009).

4.11. Tanım

$(X, \perp, \sigma)$, $s \geq 1$ ($(X, \perp)$ bir ortogonal küme ve (X, σ) bir b-metrik uzay) ve $0 < \lambda < 1$ katsayılı ortogonal bir b-metrik uzay olsun. Bir $f: X \to X$ dönüşümü tüm $x, y \in X$ için $x \perp y$ olmak üzere;

$s\sigma(fx, fy) \leq \lambda\sigma(x, y)$

koşulunu sağlıyorsa f dönüşümüne Lipschitz sabiti λ ile s-ortogonal büzülme (kısaca $\perp_s$ -büzülme) denir (Yamaod ve Sintunavarat,2018).

4.12. Tanım

$(X, \perp, \sigma)$, $s \geq 1$ katsayılı ortogonal bir b-metrik uzay olsun. Her Cauchy ortogonal dizisi yakınsak oluyorsa X' in s-ortogonal tam olduğu söylenir (Yamaod ve Sintunavarat,2018).

4.13. Tanım

$(X, \perp, \sigma)$ ortogonal b-metrik uzay olsun. O zaman $a_n \to a$ ile X' teki her $\{a_n\}$ ortogonal dizisi için $f(a_n) \to f(a)$ oluyorsa $f: X \to X$ dönüşümünün $a \in X$' te ortogonal olarak sürekli (ya da $\perp_s$-sürekli) olduğu söylenir. Ayrıca f her $a \in X$ için $\perp_s$-sürekli ise f ye X üzerinde $\perp_s$-sürekli denir (Yamaod ve Sintunavarat,2018).

4.14. Teorem

$(X, \perp, \sigma)$ katsayısı $s \geq 1$ olan bir s-ortogonal tam b-metrik uzay olsun. $f: X \to X'$in Lipschitz sabiti $\lambda \in (0,1)$ ile $\perp_s$-sürekli, $\perp$-koruyan ve $\perp_s$ -büzülme olduğunu kabul edelim. Bu durumda f' nin tek bir sabit noktası $x^* \in X$ vardır. Ayrıca, her $x_0 \in X$ ve tüm $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = fx_{n-1}$' e göre tanımlanan X'teki $\{x_n\}$ Picard dizisi x^* sabit noktasına yakınsar (Yamaod ve Sintunavarat,2018).

İspat

Ortogonallik tanımına göre öyle bir $x_0 \in X$ vardır ki

$(\forall y \in X, x_0 \perp y)$ ya da $(\forall y \in X, y \perp x_0)$.

$x_0 \perp fx_0$ veya $fx_0 \perp x_0$'ı takip eder.

$x_1 \coloneqq fx_0,\ x_2 = fx_1 = f^2x_0, \dots\dots\dots, x_{n+1} = fx_n = f^{n+1}x_0$

olsun. f $\perp$-koruyan olduğundan $\{x_n\}$ bir ortogonal dizidir. Diğer yandan f bir s-ortogonal büzülmedir. O zaman tüm $n \in \mathbb{N}$ için

$\sigma(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda^n\sigma(x_1, x_0)$

dır. Herhangi bir $m \geq 1$ ve $p \geq 1$ için,

$$\sigma(x_{m+p}, x_m) \leq s\left[\sigma\left(x_{m+p}, x_{m+p-1}\right) + \sigma(x_{m+p-1}, x_m)\right]$$

$$= s\sigma\left(x_{m+p}, x_{m+p-1}\right) + s\sigma(x_{m+p-1}, x_m)$$

$$\leq s\sigma\left(x_{m+p}, x_{m+p-1}\right) + s^2\sigma\left(x_{m+p-1}, x_{m+p-2}\right) + s^2\sigma(x_{m+p-2}, x_m)$$

$$\leq s\sigma\left(x_{m+p}, x_{m+p-1}\right) + s^2\sigma\left(x_{m+p-1}, x_{m+p-2}\right) +$$
$$s^3\sigma\left(x_{m+p-2}, x_{m+p-3}\right)$$
$$+ \cdots + s^{p-1}\sigma(x_{m+2}, x_{m+1}) + s^{p-1}\sigma(x_{m+1}, x_m)$$

$$\leq s\lambda^{m+p-1}\sigma(x_1, x_0) + s^2\lambda^{m+p-2}\sigma(x_1, x_0) + s^3\lambda^{m+p-3}\sigma(x_1, x_0)$$
$$+ \cdots + s^{p-1}\lambda^{m+1}\sigma(x_1, x_0) + s^{p-1}\lambda^m\sigma(x_1, x_0)$$

$$\leq (s\lambda^{m+p-1} + s^2\lambda^{m+p-2} + s^3\lambda^{m+p-3}$$
$$+ \cdots + s^{p-1}\lambda^{m+1} + s^{p-1}\lambda^m)\,\sigma(x_1, x_0)$$

$$\leq \frac{s^p\lambda^m}{s-\lambda}\sigma(x_1, x_0)$$

$m \to \infty$ için limit alınırsa $\lim_{m\to\infty} \sigma\left(x_{m+p}, x_m\right) = 0$ olur. Bu yüzden $\{x_n\}$ Cauchy ortogonal dizisidir. X ortogonal tam olduğu için $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ olacak biçimde $x^* \in X$ vardır. f s-ortogonal sürekli olduğundan

$$fx^* = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*$$

olur. Bu yüzden x^* f'nin bir sabit noktasıdır.

Sabit noktanın tekliğini kanıtlamak için $y^* \in X$ f'nin başka bir sabit noktası olsun. Böylelikle tüm $n \in \mathbb{N}$ için $f^n x^* = x^*$ ve $f^n y^* = y^*$ olur. İspatın ilk kısmındaki x_0 seçimi ile

$[x_0 \perp x^* \; ve \; x_0 \perp y^*]$ ya da $[x^* \perp x_0 \; ve \; y^* \perp x_0\,]$

elde edilir.

f $\perp$-koruyan olduğundan tüm $n \in \mathbb{N}$ için

$[f^n x_0 \perp f^n x^* \; ve \; f^n x_0 \perp f^n y^*]$ ya da $[f^n x^* \perp f^n x_0 \; ve \; f^n y^* \perp f^n x_0]$

dır. Bu nedenle üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$\sigma(x^*, y^*) = \sigma(f^n x^*, f^n y^*)$$
$$= s[\sigma(f^n x^*, f^n x_0) + \sigma(f^n x_0, f^n y^*)]$$
$$\leq s\lambda^n \sigma(x^*, x_0) + s\lambda^n \sigma(x_0, y^*)$$

bulunur.

Yukarıdaki eşitsizlikte $n \to \infty$ olarak limit alınırsa

$\sigma(x^*, y^*)$

bulunur. Bu yüzden

$x^* = y^*$

dır.

Son olarak keyfi olarak $x \in X$ alınırsa benzer şekilde tüm $n \in \mathbb{N}$ için

$[x_0 \perp x^* \; ve \; x_0 \perp x]$ ya da $[x^* \perp x_0 \; ve \; x \perp x_0]$

ve

$[f^n x_0 \perp f^n x^* \; ve \; f^n x_0 \perp f^n x]$ ya da $[f^n x^* \perp f^n x_0 \; ve \; f^n x \perp f^n x_0]$

olur. Bu yüzden tüm $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sigma(x^*, f^n x) = \sigma(f^n x^*, f^n x)$$
$$= s[\sigma(f^n x^*, f^n x_0) + \sigma(f^n x_0, f^n x)]$$
$$\leq s\lambda^n \sigma(x^*, x_0) + s\lambda^n \sigma(x_0, x)$$

elde edilir.

Yukarıdaki eşitsizlikte $n \to \infty$ olarak limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(x^*, f^n x) = 0$$

bulunur. Bu yüzden tüm $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} f^n x = x^*$$

olur.

Örnek

$X = [0,12]$ olsun. $\sigma: X \times X \to [0, \infty)$ dönüşümü tüm $x, y \in X$ için

$\sigma(x,y) = |x-y|^2$

şeklinde tanımlansın. X üzerindeki $\perp$ bağıntısı $xy \leq (x \vee y)$ (burada $(x \vee y) = x$ ya da y) olmak üzere $x \perp y$ şeklinde tanımlansın. O zaman (X,σ), s=2 ile bir s-ortogonal tam b-metrik uzaydır. $f: X \to X$ dönüşümü

$$fx = \begin{cases} \frac{x}{3}, & 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & 3 < x \leq 12 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $x \perp y$ olsun. Genelliği kaybetmeden $xy \leq x$ olduğunu varsayılabilir. O zaman aşağıdaki durumlar ortaya çıkar:

Durum1: $x = 0$ ve $0 \leq y \leq 3$ ise bu durumda $fx = 0$ ve $fy = \frac{y}{3}$.

Durum2: $x = 0$ ve $3 < y \leq 12$ ise bu durumda $fx = fy = 0$.

Durum3: $0 \leq y \leq 1$ ve $0 < x \leq 3$ ise bu durumda $fy = \frac{y}{3}$ ve $fx = \frac{x}{3}$.

Durum4: $0 \leq y \leq 1$ ve $3 < x \leq 12$ ise bu durumda $fy = \frac{y}{3}$ ve $fx = 0$.

Durum1-4'ten $x \perp y$ ile tüm $x, y \in X$ için

$2|fx - fy|^2 \leq \frac{2}{9}|x-y|^2$

elde edilir.

Bu yüzden $\lambda = \frac{2}{9}$ ile f s-ortogonal büzülmedir. f'nin s-ortogonal sürekli ve ortogonal koruyan olduğunu göstermek kolaydır. Dolayısıyla f'nin X'de tek bir sabit noktası vardır. Bu nokta ise 0'dır (Yamaod ve Sintunavarat,2018).

4.15. Sonuç

$(X, \perp, \sigma)$ bir ortogonal tam metrik uzay olsun. Varsayalım ki $f: X \to X$ dönüşümü Lipschitz sabiti $\lambda \in (0,1)$ ile orthogonal sürekli, ortogonal koruyan ve ortogonal büzülme olsun. Öyleyse f'nin $x^* \in X$ olmak üzere tek bir sabit noktası vardır. Ayrıca her $x_0 \in X$ için, tüm $n \in \mathbb{N}$ ler için $x_n = fx_{n-1}$ tarafından tanımlanan X'teki Picard dizisi $\{x_n\}$ sabit x^* noktasına yakınsar (Boriceanu vd.,2010).

4.16. Tanım

$(X, \perp, \sigma)$ katsayısı $s \geq 1$ olan bir ortogonal b-metrik uzay olsun. Aşağıdaki koşulu sağlayacak şekilde $F \in \mathfrak{F}$ ve $\tau > 0$ varsa, bir $f: X \to X$ dönüşümüne $(X, \perp, \sigma)$ üzerinde

genelleştirilmiş bir ortogonal F-Suzuki büzülme dönüşümü (kısaca, geneleştirilmiş $f_{\perp}$-Suzuki büzülme) denir.

$a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \in [0,1)$ ve $a, b \in [0,1]$ ve $a + b + c = 1$ olmak üzere,

$\forall\, u, v \in X$ ve $u \perp v$ $\left[\sigma(fu, fv) > 0, \frac{1}{2s}\sigma(u, fu) < \sigma(u, v) \Rightarrow \tau + F\big(\sigma(fu, fv)\big) \leq aF\big(\sigma(u, v)\big) + bF\big(\sigma(u, fu)\big) + cF\big(\sigma(v, fv)\big)\right]$ (Beg, Mani ve Gnanaprakasam,2021).

Tanım 4.16 da, $a = 1$ ve $b = c = 0$ olarak alınırsa aşağıdaki tanım elde edilir.

4.17. Tanım

$(X, \perp, \sigma)$, katsayısı $s \geq 1$ olan bir ortogonal b-metrik uzay olsun. Aşağıdaki koşulu sağlayacak şekilde $F \in \mathfrak{F}$ ve $\tau > 0$ varsa, bir $f: X \to X$ dönüşümüne $(X, \perp, \sigma)$ üzerinde bir ortogonal F-Suzuki büzülme dönüşümü (kısaca, $f_{\perp}$-Suzuki büzülme) denir

$\forall\, u, v \in X$ ve $u \perp v$ $\left[\sigma(fu, fv) > 0, \frac{1}{2s}\sigma(u, fu) < \sigma(u, v) \Rightarrow \tau + F\big(\sigma(fu, fv)\big) \leq F\big(\sigma(u, v)\big)\right]$ (Beg vd., 2021).

4.18. Teorem

$(X, \perp, \sigma)$, bir ortogonal tam b-metrik uzay, $f: X \to X$ bir dönüşüm ve $s \geq 1$ olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde $F \in \mathfrak{F}$ ve $\tau > 0$ olsun.

i) f $\perp$-koruyan

ii) f genel $f_{\perp}$-Suzuki büzülme dönüşümü

Bu durumda f'nin tek bir sabit noktası vardır ve her bir $u \in X$ için $\{f^n u\}$ dizisi sabit noktaya yakınsar (Beg vd., 2021).

İspat

(X, $\perp$) ortogonal küme olduğundan

$\exists u_0 \in X$: $(\forall u \in X, u \perp u_0)$ ya da $(\forall u \in X, u_0 \perp u)$.

olur. Böylece $u_0 \perp fu_0$ ya da $fu_0 \perp u_0$ dır. Tüm $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$u_1 := fu_0\,,\ u_2 := fu_1 = f^2u_0 \cdots\cdots, u_{n+1} := fu_n = f^{n+1}u_0 \qquad (4.1)$$

olsun. Herhangi bir $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $u_n = u_{n+1}$ ise, u_n f'nin bir sabit noktasıdır. Tüm $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $u_n \neq u_{n+1}$ olsun. Böylece tüm $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\sigma(fu_n, fu_{n+1}) > 0$ olur. f $\perp$-koruyan olduğundan tüm $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için,

$u_n \perp u_{n+1}$ ya da $u_{n+1} \perp u_n$

olur. Buradan $\{u_n\}$ bir ortogonal dizidir. f genelleştirilmiş $f_\perp$-Suzuki büzülme dönüşümü olduğundan, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{2s}\sigma(u_n, fu_n) < \sigma(u_n, fu_n) \tag{4.2}$$

olur. Böylece teoremin hipotezinden

$$\tau + F\big(\sigma(fu_n, f^2u_n)\big) \leq aF\big(\sigma(u_n, fu_n)\big) + bF\big(\sigma(u_n, fu_n)\big) + cF\big(\sigma(fu_n, f^2u_n)\big),$$

ve

$$\tau + (1-c)F\big(\sigma(fu_n, f^2u_n)\big) \leq (a+b)F\big(\sigma(u_n, fu_n)\big) \tag{4.3}$$

elde edilir.

$a + b + c = 1$' den Eş.4.3

$$F\big(\sigma(fu_n, f^2u_n)\big) \leq F\big(\sigma(u_n, fu_n)\big) - \frac{\tau}{a+b} \leq F\big(\sigma(u_n, fu_n)\big).$$

eşitsizliğine dönüşür.

F kesin artan olduğundan $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için

$$\sigma(u_{n+1}, fu_{n+1}) = (fu_n, f^2u_n) < \sigma(u_n, fu_n) \tag{4.4}$$

sonucu çıkarılır.

Bu nedenle $\{\sigma(u_n, fu_n)\}_{n=1}^{\infty}$ alttan sınırlı reel sayıların azalan dizidir. Böylece $\{\sigma(u_n, fu_n)\}_{n=1}^{\infty}$ yakınsaktır ve

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(u_n, fu_n) = \delta = inf\{\sigma(u_n, fu_n) : \forall\, n \in \mathbb{N}\}$$

olur. $\delta = 0$ olduğu gösterilecektir. Aksine $\delta > 0$ olsun. Başka bir ifadeyle her bir $\varepsilon > 0$ için $k \in \mathbb{N}$ vardır, öyle ki

$$\sigma(u, fu_k) > \delta + \varepsilon$$

olur. F kesin artan olduğundan

$F\big(\sigma(u_k, fu_k)\big) < F(\delta + \varepsilon)$

bulunur. Diğer yandan Eş.4.2'den

$\frac{1}{2s}\sigma(u_k, fu_k) < \sigma(u_k, fu_k)$

olur. f genelleştirilmiş $f_\perp$-Suzuki büzülme dönüşümü olduğundan

$\tau + F\big(\sigma(fu_k, f^2u_k)\big) \leq aF\big(\sigma(u_k, fu_k)\big) + bF\big(\sigma(u_k, fu_k)\big) +$
$cF\big(\sigma(fu_k, f^2u_k)\big)$

bulunur. Bu eşitsizlikten

$\tau + (1-c)F\big(\sigma(fu_k, f^2u_k)\big) \leq (a+b)F\big(\sigma(u_k, fu_k)\big)$

eşitsizliği türetilir. Buradan $a + b + c = 1$ olduğundan

$$F\big(\sigma(fu_k, f^2u_k)\big) \leq F\big(\sigma(u_k, fu_k)\big) - \frac{\tau}{a+b} \tag{4.5}$$

elde edilir.

Benzer olarak tekrar Eş.4.2'den $(1/2s)\,\sigma(fu_k, f^2u_k) < \sigma(fu_k, f^2u_k)$ bulunur. f genelleştirilmiş $f_\perp$-Suzuki büzülme dönüşümü olduğundan

$$\tau + F\big(\sigma(f^2u_k, f^3u_k)\big) \leq aF\big(\sigma(fu_k, f^2u_k)\big) + bF\big(\sigma(fu_k, f^2u_k)\big)$$
$$+cF\big(\sigma(f^2u_k, f^3u_k)\big)$$

sonucu çıkarılır. Buradan $a + b + c = 1$ olduğundan

$$F\big(\sigma(f^2u_k, f^3u_k)\big) \leq F\big(\sigma(fu_k, f^2u_k)\big) - \frac{\tau}{a+b} \tag{4.6}$$

elde edilir. Ayrıca, Eş.4.5 ve Eş.4.6 birleştirilerek

$$F\big(\sigma(f^2u_k, f^3u_k)\big) \leq F\big(\sigma(fu_k, f^2u_k)\big) - \frac{\tau}{a+b}$$
$$\leq F\big(\sigma(u_k, fu_k)\big) - \frac{2\tau}{a+b}$$

elde edilir. Aynı şekilde devam edilirse

$$F\big(\sigma(f^nu_k, f^{n+1}u_k)\big) \leq F\big(\sigma(f^nu_k, f^{n-1}u_k)\big) - \frac{\tau}{a+b}$$
$$\leq F\big(\sigma(f^{n-1}u_k, f^{n-2}u_k)\big) - \frac{2\tau}{a+b}$$
$$\leq F\big(\sigma(fu_k, u_k)\big) - \frac{n\tau}{a+b}$$

$$\leq F(\delta+\varepsilon)-\frac{n\tau}{a+b}$$

elde edilir.

$n\to\infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} F\big(\sigma(f^n u_k, f^{n+1}u_k)\big)=-\infty$$

bulunur.

Sonuç olarak, pozitif sayıların her $\{\alpha_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0 \Leftarrow \lim_{n\to\infty}F(\alpha_n)=-\infty$ olduğundan, $\lim_{n\to\infty}\sigma(f^n u_k, f^{n+1}u_k)=0$ bulunur. Bu nedenle, öyle bir $N_1\in\mathbb{N}$ vardır ki $\forall n\geq N_1$ için,

$$\sigma(f^n u_k, f^{n+1}u_k)<\delta$$

ve Eş. 4.1 den $\forall n\geq N_1$ için,

$$\sigma(u_{k+n}, fu_{k+n})<\delta$$

Bu δ tanımıyla bir çelişkidir. Buradan,

$$\lim_{n\to\infty}\sigma(u_n, fu_n)=0 \tag{4.7}$$

elde edilir.

Şimdi

$$\lim_{n,k\to\infty}\sigma(u_n,u_k)=0$$

olduğu kanıtlanacaktır.

Aksine $\varepsilon>0$ ve doğal sayıların $\{i(n)\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{j(n)\}_{n=1}^{\infty}$ dizilerinin olduğu kabul edilsin. Öyle ki, her $n\in\mathbb{N}$ için

$$i(n)>j(n)>n, \sigma\big(u_{i(n)},u_{j(n)}\big)\geq\varepsilon, \sigma\big(u_{i(n)-1},u_{j(n)}\big)<\varepsilon. \tag{4.8}$$

Üçgen eşitsizliğinden $\forall n\in\mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned}\sigma\big(u_{i(n)},u_{j(n)}\big) &\leq s\big[\sigma\big(u_{i(n)},u_{i(n)-1}\big)+\sigma(u_{i(n)-1},u_{j(n)})\big]\\ &\leq s\,\sigma\big(u_{i(n)},u_{i(n)-1}\big)+s\varepsilon\\ &= s\,\sigma\big(u_{i(n)-1},fu_{i(n)-1}\big)+s\varepsilon \qquad (4.9)\end{aligned}$$

elde edilir.

Eş. 4.7'den dolayı öyle bir $N_2 \in \mathbb{N}$ vardır ki $\forall n > N_2$ için,

$$\sigma\left(u_{i(n)}, fu_{i(n)}\right) < \varepsilon. \tag{4.10}$$

Eş. 4.10 göz önünde bulundurulursa, Eş. 4.9 şu sonucu verir. $\forall n > N_2$ için,

$$\sigma\left(u_{i(n)}, u_{j(n)}\right) \leq 2s\varepsilon.$$

Bu yüzden pozitif sayıların her $\{\alpha_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Leftarrow \lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = -\infty$ olduğundan, $\forall n > N_2$ için,

$$F\left(\sigma\left(u_{i(n)}, u_{j(n)}\right)\right) < F(2s\varepsilon) \tag{4.11}$$

elde edilir.

Diğer yandan, $\forall n > N_2$ için,

$$\frac{1}{2s}\sigma\left(u_{i(n)}, fu_{i(n)}\right) < \frac{\varepsilon}{2s} < \varepsilon \leq \sigma\left(u_{i(n)}, u_{j(n)}\right)$$

elde edilir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$\sigma\left(fu_{i(n)}, Tu_{j(n)}\right) = \sigma\left(u_{i(n)+1}, u_{j(n)+1}\right) > 0 \tag{4.12}$$

olduğu gösterilecektir. Bunun için aksi kabul edilsin.

$k \geq \mathbb{N}$ için $\sigma\left(u_{i(k)+1}, u_{j(k)+1}\right) = 0$.

Buradan

$$\begin{aligned}
\varepsilon \leq \sigma\left(u_{i(k)}, u_{j(k)}\right) &\leq \sigma\left(u_{i(k)}, u_{i(k)+1}\right) + \sigma\left(u_{i(k)+1}, u_{j(k)}\right) \\
&\leq \sigma\left(u_{i(k)}, u_{i(k)+1}\right) + \sigma\left(u_{i(k)+1}, u_{j(k)+1}\right) + \sigma\left(u_{j(k)+1}, u_{j(k)}\right) \\
&= \sigma\left(u_{i(k)}, fu_{i(k)}\right) + \sigma\left(u_{i(k)+1}, u_{j(k)+1}\right) + \sigma\left(u_{j(k)}, fu_{j(k)}\right) \\
&< \boldsymbol{\frac{\varepsilon}{2s}} + 0 + \frac{\varepsilon}{2s} = \frac{\varepsilon}{s}.
\end{aligned}$$

Bu ise Eş. 4.12 ile çelişir. f $\perp$-koruyan olduğundan,

$u_{i(n)} \perp u_{j(n)}$ ya da $u_{j(n)} \perp u_{i(n)}$

olur. f genelleştirilmiş $f_\perp$-Suzuki büzülme dönüşümü olduğundan, $\forall n > N_2$ için,

$$\tau + F\left(\sigma\left(fu_{i(n)}, fu_{j(n)}\right)\right) \leq aF\left(\sigma\left(u_{i(n)}, u_{j(n)}\right)\right) + bF\left(\sigma\left(u_{i(n)}, fu_{i(n)}\right)\right) + cF\left(\sigma\left(u_{j(n)}, fu_{j(n)}\right)\right) \tag{4.13}$$

bulunur. Eş.4.11 dikkate alınarak Eş.4.13 dönüştürülürse, $\forall n > N_2$ için,

$$\tau + F\left(f\sigma\left(u_{i(n)}, fu_{j(n)}\right)\right) < aF(2s\varepsilon) + bF\left(\sigma\left(u_{i(n)}, fu_{i(n)}\right)\right) +$$

$$cF\left(\sigma\left(u_{j(n)}, fu_{j(n)}\right)\right)$$

olur.

Eş.4.7'den ve pozitif sayıların her $\{\alpha_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Leftarrow \lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = -\infty$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} F\left(\sigma\left(fu_{i(n)}, fu_{j(n)}\right)\right) = -\infty$$

elde edilir.

Pozitif sayıların her $\{\alpha_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Leftarrow \lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = -\infty$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} F\left(\sigma\left(fu_{i(n)}, fu_{j(n)}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} F\left(\sigma\left(u_{i(n)+1}, u_{j(n)+1}\right)\right) = 0$$

olur.

Bu Eş.4.8'deki bağıntılarla çelişir. Buradan $\lim_{n,k\to\infty} \sigma(u_n, u_k) = 0$; yani $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ X'de bir Cauchy dizisidir. (X, σ) tam olduğu için bir $t \in X$ vardır öyle ki

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(u_n, t) = 0. \tag{4.14}$$

Her $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$\frac{1}{2s}\sigma(u_n, fu_n) < \sigma(u_n, t) \text{ ya da } \frac{1}{2s}\sigma(fu_n, f^2u_n) < \sigma(fu_n, t) \tag{4.15}$$

olduğunu göstermek için tersi kabul edilsin.

Öyle bir $k \in \mathbb{N}$ alınsın ki

$$\frac{1}{2s}\sigma(u_k, fu_k) \geq \sigma(u_k, t)$$

$$\frac{1}{2s}\sigma(fu_k, f^2u_k) \geq \sigma(fu_k, t) \tag{4.16}$$

olsun.

Eş.4.4'den ve F kesin artan olduğundan

$$\sigma(fu_k, f^2u_k) < \sigma(u_k, fu_k) \tag{4.17}$$

olur.

Eş. 4.16 ve Eş. 4.17'den

$$\sigma(u_k, fu_k) \leq s\sigma(u_k, t) + s\sigma(t, fu_k)$$

$$\leq \tfrac{1}{2}\sigma(u_k, fu_k) + \tfrac{1}{2}\sigma(fu_k, f^2u_k)$$

$$< \mathbf{\tfrac{1}{2}}\sigma(u_k, fu_k) + \tfrac{1}{2}\sigma(u_k, fu_k) = \sigma(u_k, fu_k)$$

olduğu çıkarılır.

Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla Eş. 4.15 doğrudur. f genelleştirilmiş $f_\perp$-Suzuki büzülme olduğundan, Eş.4.15 şu sonucu verir, tüm $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\tau + F\big(\sigma(fu_n, ft)\big) \leq aF\big(\sigma(u_n, t)\big) + bF\big(\sigma(u_n, fu_n)\big) + cF\big(\sigma(t, ft)\big) \tag{4.18}$$

$$\tau + F\big(\sigma(f^2u_n, ft)\big) \leq aF\big(\sigma(fu_n, t)\big) + bF\big(\sigma(fu_n, f^2u_n)\big) + cF\big(\sigma(t, ft)\big)$$

eşitsizliklerinden herhangi biri geçerli olur.

Pozitif sayıların her $\{\alpha_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Leftarrow \lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = -\infty$ olduğundan Eş. 4.7 ve Eş. 4.14'deki limitler şunu gerektirir.

$$\lim_{n\to\infty} F\big(\sigma(u_n, t)\big) = -\infty, \lim_{n\to\infty} F\big(\sigma(u_n, fu_n)\big) = -\infty.$$

Bu nedenle Eş. 4.18'den $n \to \infty$ iken, şu sonuca varılır:

$$\lim_{n\to\infty} F\big(\sigma(fu_n, ft)\big) = -\infty.$$

Pozitif sayıların her $\{\alpha_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Leftarrow \lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = -\infty$ olduğundan tekrar

$$\lim_{n\to\infty} F\big(\sigma(fu_n, ft)\big) = 0 \tag{4.19}$$

olduğu görülür.

Eş.4.1'e üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\sigma(t, ft) \leq s[\sigma(t, fu_n) + \sigma(fu_n, ft)]$$

$$= s\sigma(t, u_{n+1}) + s\,\sigma(fu_n, ft)$$

elde edilir.

Eş. 4.14 ve Eş. 4.19'da $n \to \infty$ için limit alınırsa, $\sigma(t, ft) = 0$ olduğu görülür. Böylece, t f'nin bir sabit noktasıdır, yani $t = ft$ olur. Böylece

$$F\big(\sigma(f^2u_n, ft)\big) < \tau + F\big(\sigma(f^2u_n, ft)\big) \leq aF\big(\sigma(fu_n, t)\big) + bF\big(\sigma(fu_n, f^2u_n)\big) + cF\big(\sigma(t, ft)\big)$$

$$= aF\big(\sigma(u_{n+1}, t)\big) + bF\big(\sigma(u_{n+1}, fu_{n+1})\big) + cF\big(\sigma(t, ft)\big)$$

vardır. Pozitif sayıların her $\{\alpha_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Leftarrow \lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = -\infty$ olduğundan

$\lim_{n\to\infty} F\big(\sigma(f^2u_n, ft)\big) = -\infty$ dir.

Pozitif sayıların her $\{\alpha_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Leftarrow \lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = -\infty$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} F\big(\sigma(f^2u_n, ft)\big) = 0 \tag{4.20}$$

alırız.

Yine üçgen eşitsizliği ve Eş. 4.1 ile birlikte,

$$\sigma(t, ft) \leq s[\sigma(t, f^2u_n) + \sigma(f^2u_n, ft)]$$

$$= s\sigma(t, u_{n+2}) + s\,\sigma(f^2u_n, ft)$$

buluruz.

Eş. 4.14 ve Eş.4.20'deki limitlerle birlikte yukarıdaki eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa, $\sigma(t, ft) = 0$ elde edilir. Yani t, f'nin bir sabit noktasıdır. $x, y \in X$, f'nin iki sabit noktası olsun ve tüm $n \in \mathbb{N}$ için $f^n x = x \neq y = f^n y$ olduğu kabul edilsin. u_0 seçimi ile

$(u_0 \perp x \; ve \; u_0 \perp y)$ ya da $(x \perp u_0 \; ve \; y \perp u_0)$

elde edilir.

f $\perp$-koruyan olduğundan, tüm $n \in \mathbb{N}$ için

$(f^n u_0 \perp f^n x \; ve \; f^n u_0 \perp f^n y)$ ya da $(f^n x \perp f^n u_0 \; ve \; f^n y \perp f^n u_0)$

olur.

$$\sigma(x, y) = \sigma(f^n x, f^n y) \leq s\big(\sigma(f^n x, f^n u_0) + \sigma(f^n u_0, f^n y)\big).$$

$n \to \infty$ alarak, $\sigma(x, y) \leq 0$ bulunur. Yani $x = y$. Bu nedenle, f, X'de tek bir sabit noktaya sahiptir.

Örnek

$X = [0,1] \cup \{2,4\}$ kümesi üzerinde $\sigma: X \times X \to (0, \infty)$ dönüşümü tüm $x, y \in X$ için

$\sigma(x, y) = |x - y|^2$

şeklinde tanımlansın. $x \vee y = x$ ya da y olmak üzere X üzerindeki $\perp$ bağıntısı $xy \leq (x \vee y)$ ise $x \perp$ y ile tanımlansın. Öyleyse (X, σ) bir orthogonal tam metrik uzaydır. $f: X \to X$ dönüşümü

$$f(y) = \begin{cases} ln\left(1 + \frac{y}{2}\right), \ y \in [0,1] \ ise, \\ y - 1, \ y \in \{2,4\} \ ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $a = 1/2, \ b = 1/4, \ c = 1/4$ ve $\tau > 0$ olsun. $x = 2, \ y = 4$ olsun, öyleyse $xy \leq y$.

$\sigma(fx, fy) = 4, \sigma(x, y) = 4, \sigma(x, fx) = 1 \ ve \ \sigma(y, fy) = 1$

olur. Öyleyse

$\forall \ u, v \in X$ ve $u \perp v \left[\sigma(fu, fv) > 0, \frac{1}{2s}\sigma(u, fu) < \sigma(u, v) \Rightarrow \tau + \sigma(fx, fy) \geq aF\big(\sigma(x, y)\big) + bF\big(\sigma(x, fx)\big) + cF\big(\sigma(y, fy)\big)\right]$

olur.

Böylece, f, F-Suziki büzülme dönüşümü değildir. Şimdi $F(t) = \ln t, \quad t \in (0, \infty)$ ile tanımlanan F dönüşümünü ele alalım. O zaman f , $\tau = \ln 4$,$c \in (0,1)$ ve $a, b \in [0,1]$ aralığındaki reel sayılar, $a + b + c = 1$ ile F-Suziki büzülmedir. Öncelikle,

$\forall \ u, v \in X$ ve $u \perp v \left[\sigma(fu, fv) > 0, \frac{1}{2s}\sigma(u, fu) < \sigma(u, v) \Leftarrow [x, y \in [0,1] \vee x \in [0,1] \ ve \ y \in \{2,4\} \vee x \in \{2,4\} \ ve \ y \in [0,1]]\right]$

olduğu gözlemlenir.

$\forall \ u, v \in X$ ve $u \perp v \left[\sigma(fu, fv) > 0, \frac{1}{2s}\sigma(u, fu) < \sigma(u, v) \Rightarrow \tau + F(\sigma(fu, fv)) \geq aF\big(\sigma(u, v)\big) + bF\big(\sigma(u, fu)\big) + cF\big(\sigma(v, fv)\big)\right]$ (4.21)

olduğuna dikkat edilmelidir.

Açıktır ki f , $\perp$-koruyan'dır. $x \perp$ y'dir. Genelliği kaybetmeden, $xy \leq y$ olduğunu varsayabilir. O zaman aşağıdaki durumlar bulunur.

Durum 1: $x, y \in [0,1]$ olsun, öyleyse $\sigma(fx, fy) = |\ln(1 + (x/2)) - \ln(1 + (y/2))|^2, \sigma(x, y) = |x - y|^2, \sigma(x, fx) = |x - \ln(1 + (x/2))|^2$ ve $\sigma(y, fy) = |y - \ln(1 + (y/2))|^2$. Buradan Eş.4.21'in sağlandığı açıktır.

Durum 2: $x \in [0,1], y \in \{2,4\}$ olsun, öyleyse $\sigma(fx, fy) = |\ln(1 + (x/2)) - y + 1|^2, \sigma(x, y) = |x - y|^2, \sigma(x, fx) = |x - \ln(1 + (x/2))|^2$ ve $\sigma(y, fy) = 1$. Buradan Eş.4.21'in sağlandığı açıktır.

Durum 3: $x \in \{2,4\}, y \in [0,1]$ olsun, o halde $\sigma(fx, fy) = |x - 1 - \ln(1 + (y/2))|^2, \sigma(x, y) = |x - y|^2, \sigma(x, fx) = 1$ ve $\sigma(y, fy) = |y - \ln(1 + (y/2))|^2$. Buradan Eş.4.21'in sağlandığı açık. Bu nedenle Teorem4.18'in tüm hipotezi karşılanmıştır. f'nin tek bir sabit noktası $y = 0$'a sahip olduğuna dikkat edilmelidir (Beg vd., 2021).

4.19. Teorem

$(X, \perp, \sigma)$ bir ortogonal tam b-metrik uzay $f: X \to X$ bir dönüşüm ve $s \geq 1$ olmak üzre aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde $F \in \mathfrak{F}$ ve $\tau > 0$ olduğunu varsayalım.

i) f $\perp$-koruyan

ii) f genel $f_{\perp}$-Suzuki büzülme dönüşümü

Bu durumda f'nin tek bir sabit noktası vardır ve her bir $u \in X$ için $\{f^n u\}$ sabit noktaya yakınsar (Beg vd., 2021).

İspat

Teorem4.18'de $a = 1$ ve $b = c = 0$ alınırsa ispat tamamlanır.

Örnek

$X = [0,1] \cup \{4,6\}$ kümesi üzerinde $\sigma: X \times X \to (0, \infty)$ dönüşümü tüm $x, y \in X$ için

$\sigma(x, y) = |x - y|^2,$

şeklinde tanımlansın. $x \vee y = x$ ya da y olmak üzere X üzerindeki $\perp$ bağıntısı $xy \leq (x \vee y)$ ise $x \perp$ y ile tanımlansın. Öyleyse (X, σ) bir orthogonal tam b-metrik uzaydır. $f: X \to X$ dönüşümü

$$f(y)=\begin{cases} ln\left(1+\frac{y}{3}\right),\ y\in[0,1]\ ise, \\ y-1,\ y\in\{4,6\}\ ise \end{cases}$$

şeklinde verilsin. $x=2,\ y=4$ olsun, öyleyse $xy\leq y$. Tüm $F\in\Im$ ve $\tau>0$ için $\sigma(f4,f6)=4=\sigma(4,6)$ olduğundan,

$$\tau+F\big(\sigma(f4,f6)\big)>F(\sigma(4,6)\ )$$

elde edilir.

Böylece, f, F-Suziki büzülme değildir. Şimdi $F(t)=\ln t,\quad t\in(0,\infty)$ ile tanımlanan F dönüşümünü ele alınsın. O zaman $f,\ \tau=\ln 4$ ile F-Suziki büzülmedir. Öncelikle,

$$\forall\ u,v\in X \text{ ve } u\perp v\ \left[\sigma(fu,fv)>0,\frac{1}{2s}\sigma(u,fu)<\sigma(u,v)\Leftarrow[x,y\in[0,1]\vee x\in[0,1]\ ve\ y\in\{4,6\}\vee x\in\{4,6\}\ ve\ y\in[0,1]]\ \right]$$

olduğu bulunur.

$$\forall\ u,v\in X \text{ ve } u\perp v\ \left[\sigma(fu,fv)>0,\frac{1}{2s}\sigma(u,fu)<\sigma(u,v)\Rightarrow\tau+F(\sigma(fu,fv))\leq F(\sigma(u,v))\right] \qquad (4.22)$$

olduğuna dikkat edilmelidir.

Açıktır ki f, $\perp$-koruyan'dır. $x\perp$ y'dir. Genelliği kaybetmeden, $xy\leq y$ olduğu varsayılabilir. O zaman aşağıdaki durumları göz önünde bulundurulur:

Durum1: $x,y\in[0,1]$ olsun, o halde $\sigma(fx,fy)=|\ln(1+(x/3))-\ln(1+(y/3))|^2,\sigma(x,y)=|x-y|^2,\sigma(x,fx)=|x-\ln(1+(x/3))|^2\ ve\ \sigma(y,fy)=|g-\ln(1+(y/3))|^2$. Buradan Eş.4.22'nin sağlandığı açıktır.

Durum2: $x\in[0,1],y\in\{4,6\}$ olsun, o halde $\sigma(fx,fy)=|\ln(1+(x/3))-y+1|^2,\sigma(x,y)=|x-y|^2,\sigma(x,fx)=|x-\ln(1+(x/3))|^2\ ve\ \sigma(y,fy)=1$. Buradan Eş.4.22'nin sağlandığı açıktır.

Durum3: $x\in\{4,6\},\ y\in[0,1]$ olsun, o halde $\sigma(fx,fy)=|x-1-\ln(1+(y/3))|^2,\sigma(x,y)=|x-y|^2,\sigma(x,fx)=1\ ve\ \sigma(y,fy)=|y-\ln(1+(y/3))|^2$. Buradan Eş.4.22'nin sağlandığı açık. Bu nedenle Teorem4.19'un tüm hipotezi sağlanır. f'nin tek bir $y=0$ sabit noktası vardır. (Beg vd., 2021).

4.20. Sonuç

$f, (X, \perp, \sigma)$ O-tam metrik uzay üzerinde bir kendi kendine dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde $F \in \mathfrak{F}$ ve $\tau > 0$ olduğunu varsayalım.

i) f $\perp$-koruyan

ii) $\forall\, u, v \in X$ ve $u \perp v$ $\left[\sigma(fu, fv) > 0, \frac{1}{2}\sigma(u, fu) < \sigma(u, v) \Rightarrow \tau + F(\sigma(fu, fv)) \leq aF\big(\sigma(u, v)\big) + bF\big(\sigma(u, fu)\big) + cF\big(\sigma(v, fv)\big)\right]$

burada $c \in (0,1)$ ve $a, b \in [0,1]$ aralığındaki reel sayılar, $a + b + c = 1$.

O zaman $t \in X$, f'nin bir sabit noktasıdır (Beg vd., 2021).

4.21. Sonuç

$f, (X, \perp, \sigma)$ O-tam metrik uzay üzerinde bir kendi kendine dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde $F \in \mathfrak{F}$ ve $\tau > 0$ olduğunu varsayalım.

i) f $\perp$-koruyan

ii) $\forall\, u, v \in X$ ve $u \perp v$ $\left[\sigma(fu, fv) > 0, \frac{1}{2}\sigma(u, fu) < \sigma(u, v) \Rightarrow \tau + F(\sigma(fu, fv)) \leq F\big(\sigma(u, v)\big)\right]$

O zaman $t \in X$, f'nin bir sabit noktasıdır (Beg vd., 2021).

4.22. Teorem

$(X, \perp, \sigma)$, katsayısı $s \geq 1$ olan bir ortogonal tam b-metrik uzay ve u_0 ortogonal eleman ile $f: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde $F \in \mathfrak{F}$ ve $\tau > 0$ olduğunu varsayalım.

i) f $\perp$-koruyan

ii) $\forall\, u, v \in X$ ve $u \perp v$ $\left[\sigma(fu, fv) > 0 \Rightarrow \tau + F\big(\sigma(fu, fv)\big) < aF\big(\sigma(u, v)\big) + bF\big(\sigma(u, fu)\big) + cF\big(\sigma(v, fv)\big)\right]$

burada $c \in [0,1)$ ve $a, b \in [0,1]$ aralığındaki reel sayılar, $a + b + c = 1$.

iii) f $\perp$-sürekli

O zaman $t \in X$, f'nin tek bir sabit noktasıdır (Beg vd., 2021).

İspat

(X, ⊥) ortogonal küme olduğundan

$\exists u_0 \in X: (\forall u \in X, u \perp u_0)$ ya da $(\forall u \in X, u_0 \perp u)$.

olur. Böylece $u_0 \perp fu_0$ ya da $fu_0 \perp u_0$ dır. Tüm $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$u_1 := fu_0\,,\ u_2 := fu_1 = f^2u_0 \cdots\cdots, u_{n+1} := fu_n = f^{n+1}u_0\,, \tag{4.23}$$

olsun. Herhangi bir $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $u_n = u_{n+1}$ ise, u_n 'nin f'nin bir sabit noktası olduğu aşikardır. Her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $u_n \neq u_{n+1}$ olsun. Böylece tüm $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\sigma(fu_n, fu_{n+1}) > 0$ olur. f, ⊥-koruyan olduğundan tüm $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için,

$u_n \perp u_{n+1}$ ya da $u_{n+1} \perp u_n$

olur. Buradan $\{u_n\}$ bir O-dizidir. (ii) koşulundan, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için

$$0 < \sigma(u_n, fu_n) = \sigma(fu_{n-1}, fu_n) \tag{4.24}$$

elde edilir. Bu yüzden

$$\begin{aligned}\tau + F\big(\sigma(fu_{n-1}, fu_n)\big) &\\ &\leq aF\big(\sigma(u_{n-1}, u_n)\big) + bF\big(\sigma(u_{n-1}, fu_{n-1})\big) + cF\big(\sigma(u_n, fu_n)\big)\\ &= aF\big(\sigma(u_{n-1}, u_n)\big) + bF\big(\sigma(u_{n-1}, u_n)\big) + cF\big(\sigma(fu_{n-1}, fu_n)\big)\end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$\tau + (1-c)F\big(\sigma(fu_{n-1}, fu_n)\big) \leq (a+b)F\big(\sigma(u_{n-1}, u_n)\big)$$

elde edilir.

$a + b + c = 1$' den

$$F\big(\sigma(fu_{n-1}, fu_n)\big) \leq F\big(\sigma(u_{n-1}, u_n)\big) - \frac{\tau}{a+b} < F\big(\sigma(u_{n-1}, u_n)\big).$$

bulunur.

F kesin artan olduğundan $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için

$$\sigma(u_n, fu_n) = (fu_{n-1}, fu_n) < \sigma(u_{n-1}, fu_{n-1})$$

sonucunu çıkarılır.

Bu nedenle $\{\sigma(u_n, fu_n)\}_{n=1}^{\infty}$ alttan sınırlı gerçel sayılarda azalan dizidir. Böylece $\{\sigma(u_n, fu_n)\}_{n=1}^{\infty}$ yakınsaktır ve

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(u_n, fu_n) = \delta = inf\{\sigma(u_n, fu_n): \forall\, n \in \mathbb{N}\}$$

olur. Şimdi $\delta = 0$ olduğu gösterilecektir. Aksine $\delta > 0$ olsun. Başka bir ifadeyle her bir $\varepsilon > 0$ için $k \in \mathbb{N}$ vardır, öyle ki

$$\sigma(u, fu_k) < \delta + \varepsilon$$

olur. F kesin artan olduğundan

$$F\big(\sigma(u_k, fu_k)\big) < F(\delta + \varepsilon) \tag{4.25}$$

bulunur. Diğer yandan Eş. 4.24 ten

$$0 < \sigma(u_k, fu_k) < \sigma(u_{k-1}, fu_k)$$

olur. Yani

$$\begin{aligned} \tau + F\big(\sigma(fu_{k-1}, fu_k)\big) &\\ &\leq aF\big(\sigma(u_{k-1}, u_k)\big) + bF\big(\sigma(u_{k-1}, fu_{k-1})\big) + cF\big(\sigma(u_k, fu_k)\big) \\ &= aF\big(\sigma(u_{k-1}, u_k)\big) + bF\big(\sigma(u_{k-1}, u_k)\big) + cF\big(\sigma(fu_{k-1}, fu_k)\big) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\tau + (1-c)F\big(\sigma(fu_{k-1}, fu_k)\big) < (a+b)F\big(\sigma(u_{k-1}, u_k)\big)$$

elde edilir. Buradan $a + b + c = 1$ olduğundan

$$F\big(\sigma(fu_{k-1}, fu_k)\big) \leq F\big(\sigma(u_{k-1}, u_k)\big) - \frac{\tau}{a+b} \tag{4.26}$$

elde edilir. Ayrıca Eş.4.24'ten $0 < \sigma(fu_k, fu_{k+1}) < \sigma(fu_k, f^2u_k)$'dır ve dolayısıyla teoremin varsayımıyla

$$\begin{aligned} \tau + F\big(\sigma(fu_k, fu_{k+1})\big) &\\ &\leq aF\big(\sigma(u_k, u_{k+1})\big) + bF\big(\sigma(u_k, fu_k)\big) + cF\big(\sigma(u_{k+1}, fu_{k+1})\big) \\ &= aF\big(\sigma(u_k, u_{k+1})\big) + bF\big(\sigma(u_k, u_{k+1})\big) + cF\big(\sigma(fu_k, fu_{k+1})\big) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle

$$\tau + (1-c)F\big(\sigma(fu_k, fu_{k+1})\big) \leq (a+b)F\big(\sigma(u_k, fu_{k+1})\big)$$

olur. $a + b + c = 1$ olduğundan

$$F\big(\sigma(fu_k, fu_{k+1})\big) \leq F\big(\sigma(u_k, fu_{k+1})\big) - \frac{\tau}{a+b} \tag{4.27}$$

elde edilir. Şimdi Eş.4.25 kullanılarak ve Eş. 4.26 ve Eş. 4.27'de kullanılana benzer bir yöntemle

$$\begin{aligned} F\big(\sigma(u_{k+n}, u_{k+n+1})\big) &= F\big(\sigma(fu_{k+n-1}, fu_{k+n})\big) \\ &\leq F\big(\sigma(u_{k+n-1}, u_{k+n})\big) - \tfrac{\tau}{a+b} \\ &= F\big(\sigma(fu_{k+n-2}, fu_{k+n-1})\big) - \tfrac{\tau}{a+b} \\ &\leq F\big(\sigma(u_{k+n-2}, u_{k+n-1})\big) - \tfrac{2\tau}{a+b} \\ &= F\big(\sigma(fu_{k+n-3}, fu_{k+n-2})\big) - \tfrac{2\tau}{a+b} \\ &\leq F\big(\sigma(u_{k+n-3}, u_{k+n-2})\big) - \tfrac{3\tau}{a+b} \vdots \\ &\leq F\big(\sigma(u_{k+1}, u_{k+2})\big) - \tfrac{(n-1)\tau}{a+b} \\ &= F\big(\sigma(fu_k, fu_{k+1})\big) - \tfrac{(n-1)\tau}{a+b} \\ &\leq F(\delta+\varepsilon) - \tfrac{n\tau}{a+b} \end{aligned}$$

elde edilir.

$n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} F\big(\sigma(u_{k+n}, u_{k+n+1})\big) = -\infty$$

bulunur.

Sonuç olarak, pozitif sayıların her $\{\alpha_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Leftarrow \lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = -\infty$ olduğundan, $\lim_{n\to\infty} \sigma\big(\sigma(u_{k+n}, u_{k+n+1})\big) = 0$ bulunur. Bu nedenle, öyle bir $N_1 \in \mathbb{N}$ vardır ki $\forall n \geq N_1$ için,

$$\sigma(u_{k+n}, u_{k+n+1}) < \delta$$

ve Eş.4.23 ten $\forall n \geq N_1$ için,

$$\sigma(u_{k+n}, fu_{k+n}) < \delta$$

Bu δ tanımıyla bir çelişkidir. Bu yüzden $\delta = 0$ ve Eş. 4.25'den

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(u_n, fu_n) = 0 \qquad (4.28)$$

elde edilir. Şimdi

$$\lim_{n,k\to\infty} \sigma(u_n, u_k) = 0$$

olduğu kanıtlanacaktır.

Aksine $\varepsilon > 0$ ve doğal sayıların $\{i(n)\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{j(n)\}_{n=1}^{\infty}$ dizilerinin olduğu kabul edilsin. Öyle ki, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$i(n) > j(n) > n, \sigma\big(u_{i(n)}, u_{j(n)}\big) \geq \varepsilon, \sigma\big(u_{i(n)-1}, u_{j(n)}\big) < \varepsilon \tag{4.29}$$

olsun.

Üçgen eşitsizliğinden $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$\sigma\big(u_{i(n)}, u_{j(n)}\big) \leq s\big[\sigma\big(u_{i(n)}, u_{i(n)-1}\big) + \sigma(u_{i(n)-1}, u_{j(n)})\big] \leq s\,\sigma\big(u_{i(n)}, u_{i(n)-1}\big) + s\varepsilon$$

$$= s\,\sigma\big(u_{i(n)-1}, fu_{i(n)-1}\big) + s\varepsilon \tag{4.30}$$

elde edilir.

Eş.4.28'den dolayı öyle bir $N_2 \in \mathbb{N}$ vardır ki $\forall n > N_2$ için,

$$\sigma\big(u_{i(n)}, fu_{i(n)}\big) < \varepsilon. \tag{4.31}$$

Eş.4.30 ve Eş.4.31'den $\forall n > N_2$ için,

$$\sigma\big(u_{i(n)}, u_{j(n)}\big) \leq 2s\varepsilon$$

elde edilir.

Bu yüzden pozitif sayıların her $\{\alpha_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Leftarrow \lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = -\infty$ olduğundan, $\forall n > N_2$ için,

$$F\left(\sigma\big(u_{i(n)}, u_{j(n)}\big)\right) < F(2s\varepsilon) \tag{4.32}$$

elde edilir.

Diğer yandan Eş.4.29'dan kolaylıkla $\forall n > N_2$ için,

$$\varepsilon \leq \sigma\big(u_{i(n)+1}, u_{j(n)+1}\big) = \sigma\big(fu_{i(n)}, fu_{j(n)}\big)$$

elde edilir. Bu yüzden Eş.4.32'den ve teoremin kabulünden $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$\tau + F\left(\sigma\left(fu_{i(n)}, fu_{j(n)}\right)\right)$$
$$\leq aF\left(\sigma\left(u_{i(n)}, u_{j(n)}\right)\right) + bF\left(\sigma\left(u_{i(n)}, fu_{i(n)}\right)\right)$$
$$+ cF\left(\sigma\left(u_{j(n)}, fu_{j(n)}\right)\right)$$
$$< aF(2s\varepsilon) + bF\left(\sigma\left(u_{i(n)}, fu_{i(n)}\right)\right) + bF\left(\sigma\left(u_{i(n)}, fu_{i(n)}\right)\right)$$

Eş.4.30 ve pozitif sayıların her $\{\alpha_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Leftarrow \lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = -\infty$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} F\left(\sigma\left(fu_{i(n)}, fu_{j(n)}\right)\right) = -\infty$$

bulunur.

Pozitif sayıların her $\{\alpha_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Leftarrow \lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = -\infty$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} F\left(\sigma\left(fu_{i(n)}, fu_{j(n)}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} F\left(\sigma\left(u_{i(n)+1}, u_{j(n)+1}\right)\right) = 0$$

olur.

Bu Eş.4.29'daki bağıntılarla çelişir. Buradan $\lim_{n,k\to\infty} \sigma(u_n, u_k) = 0$ dır. (X, σ) tam olduğundan $t \in X$ vardır öyle ki

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(u_n, t) = 0.$$

f, ortogonal sürekli olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} F\left(\sigma(fu_n, ft)\right) = 0$$

elde edilir.

$\sigma(t, ft) \leq s[\sigma(t, u_n) + \sigma(x_n, ft)]$'dir, böylece, $\sigma(t, ft) = 0$ ve t, f'nin bir sabit noktasıdır.

$x, y \in X$ f'nin iki sabit noktası ve tüm $n \in \mathbb{N}$ için $f^n x = x \neq y = f^n y$ olsun. u_0 seçimi ile

$(u_0 \perp x \; ve \; u_0 \perp y)$ ya da $(x \perp u_0 \; ve \; y \perp u_0)$

elde edilir.

f, $\perp$-koruyan olduğundan, tüm $n \in \mathbb{N}$ için

$(f^n u_0 \perp f^n x \; ve \; f^n u_0 \perp f^n y)$ ya da $(f^n x \perp f^n u_0 \; ve \; f^n y \perp f^n u_0)$

olur. Şimdi,

$\sigma(x,y) = \sigma(f^n x, f^n y) \leq s\big(\sigma(f^n x, f^n u_0) + \sigma(f^n u_0, f^n y)\big).$

$n \to \infty$ alarak, $\sigma(x,y) \leq 0$'dır. Yani $x = y$ dir. Bu nedenle f, X'de tek bir sabit noktaya sahiptir.

Örnek

$X = \mathbb{R}$ kümesi üzerinde $\sigma: X \times X \to (0,\infty)$ dönüşümü tüm $x, y \in X$ için

$\sigma(x,y) = max\{x,y\}^2,$

şeklinde tanımlansın. Bazı $n \in \mathbb{N}$ veya $x = 0$ için $x, y \in [3, n+4]$ ise X üzerindeki $\perp$ bağıntısı $x \perp y$ ile tanımlansın. Öyleyse (X, σ) bir ortogonal tam b-metrik uzaydır. $f: X \to X$ dönüşümü

$$f(y) = \begin{cases} 0 & y = 0 \; ise \\ y+1 & y \in [1,2] \; ise \\ y+1 & y \in (2,\infty) \; ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$x \in X$ ve $\{x_n\}$ X üzerinde x'ye yakınsayan rastgele bir $\perp$-dizi olsun, o zaman aşağıdaki durumlar sağlanır:

Durum 1: Tüm n'ler için $x_n = 0$ ise $x = 0$ ve $f(x_n) = 0 = f(x)$ olur.

Durum 2: Bazı n'ler için $x_n \neq 0$ ise $x \in [3, m+4]$ ve $f(x_n) = f(x)$ olacak şekilde $m \in \mathbb{N}$ vardır. Öyleyse f, X üzerinde $\perp$-süreklidir ama sürekli değildir. $a = 1/2$, $b = 1/4$ ve $c = 1/4$ olsun. $\sigma(f1, f2) = 9, \sigma(1,2) = 4, \sigma(1, f1) = 4$ ve $\sigma(2, f2) = 9$ olduğundan tüm $F \in \mathfrak{F}$ ve $\tau > 0$ için,

$\forall\, x, y \in X$ ve $x \perp y \left[\sigma(fx, fy) > 0 \Rightarrow \tau + \sigma(fx, fy) \geq aF\big(\sigma(x,y)\big) + bF\big(\sigma(x, fx)\big) + cF\big(\sigma(y, fy)\big)\right]$

Şimdi $F(t) = \ln t, t \in (0,\infty)$ şeklinde tanımlanan F dönüşümü ele alınsın. Öncelikle

$\forall\, x, y \in X$ ve $x \perp y \big[\sigma(fx, fy) > 0 \Leftarrow [x = 0 \text{ ve } y \in (2,\infty)]\big]$

ifadesi incelenecektir.

$\forall\, x, y \in X$ ve $x \perp y$ $\left[\sigma(fx, fy) > 0, \frac{1}{2s}\sigma(x, fx) < \sigma(x, y) \Rightarrow \tau + F\big(\sigma(fx, y)\big) \leq aF\big(\sigma(x, y)\big) + bF\big(\sigma(x, fx)\big) + cF\big(\sigma(y, fy)\big)\right]$ (4.33)

dikkate alınsın.

Açıktır ki f, $\perp$-koruyandır. $x \perp y$ ve $x = 0, \mathrm{y} \in (2, \infty)$, $\tau = \ln 2$ olsun, bu durumda $(fx, fy) = (y-1)^2$, $\sigma(x, y) = y^2$, $\sigma(x, fx) = 0$ ve $\sigma(y, fy) = y^2$ olur. Eş.4.33'ün sağlandığı açıktır.

$y = 0$, f'nin tek sabit noktasıdır (Beg vd., 2021).

4.23. Sonuç

$(X, \perp, \sigma)$, katsayısı $s \geq 1$ olan bir ortogonal tam b-metrik uzay ve u_0 ortogonal eleman ile $f: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde $F \in \Im$ ve $\tau > 0$ olduğunu varsayalım.

i) f $\perp$-koruyan $\forall\, u, v \in X$ ve $u \perp v$ $\left[\sigma(fu, fv) > 0 \Rightarrow \tau + F\big(\sigma(fu, fv)\big) < F\big(\sigma(u, v)\big)\right]$

ii) f $\perp$-sürekli

O zaman $t \in X$, f'nin tek bir sabit noktasıdır (Beg vd., 2021).

4.24. Sonuç

$(X, \perp, \sigma)$, katsayısı $s \geq 1$ olan bir O-tam metrik uzay olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde $F \in \Im$ ve $\tau > 0$ olduğunu varsayalım

i) f $\perp$-koruyan

ii) $\forall\, u, v \in X$ ve $u \perp v$ $\left[\sigma(fu, fv) > 0 \Rightarrow \tau + F\big(\sigma(fu, fv)\big) < aF\big(\sigma(u, v)\big) + bF\big(\sigma(u, fu)\big) + cF\big(\sigma(v, fv)\big)\right]$

burada $c \in [0,1)$ ve $a, b \in [0,1]$ aralığındaki reel sayılar, $a + b + c = 1$.

iii) f $\perp$-sürekli

O zaman $t \in X$, f'nin tek bir sabit noktasıdır (Beg vd., 2021).

4.25. Sonuç

$(X, \perp, \sigma)$, katsayısı $s \geq 1$ olan bir O-tam metrik uzay olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde $F \in \mathfrak{F}$ ve $\tau > 0$ olduğu kabul edilsin.

i) f $\perp$-koruyan

ii) $\forall\, u, v \in X$ ve $u \perp v$ $\left[\sigma(fu, fv) > 0 \Rightarrow \tau + F\left(\sigma(fu, fv)\right) < F\left(\sigma(u, v)\right)\right]$

iii) f $\perp$-sürekli

O zaman $t \in X$, f'nin tek bir sabit noktasıdır (Beg vd., 2021).

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında metrik uzayların bir genelleştirmesi olan ortogonal metrik uzaylar ve ortogonal b-metrik uzaylarda sabit nokta sonuçları elde edilmiştir. Öncelikle sabit nokta teori ile ilgili genel tanım ve teoremlere yer verilmiş daha sonra ortogonal metrik uzaylarda F-büzülme, Geraghty tipi büzülme, Boyd ve Wong tipi büzülme ve Matkowski tipi büzülme dönüşümleri için bir takım sabit nokta teoremleri ve örnekleri verilmiştir. Son bölümde ise ortogonal b- metrik uzaylarla ilgili temel tanım, teorem ve örnekler açıklanmıştır. Ortogonal b-metrik uzaylarda F-Suzuki büzülme dönüşümleri için sabit nokta teori, ispat ve örneklere yer verilerek çalışma sonlandırılmıştır.

Bu tez ortogonal metrik uzay ve ortogonal b-metrik uzaylar ile ilgili son yıllarda yapılan pek çok çalışmayı bünyesinde barındırması nedeniyle literatüre önemli bir katkı sağlayacak ve yeni yapılacak çalışmalara zemin hazırlayacaktır.

KAYNAKLAR

Aghajani, A., Abbas, M., Roshan, J.R. (2014). "Common fixed point of Generalized Weat Contractive Mappings in Partially Ordered b-metric Spaces", *Mathematica Slovaca,* 64, 941-960.

Ahmadi, Z., Lashkaripour, R. and Baghani, H. (2018). "A fixed point problem with constraint inequalities via a contraction in incomplete metric spaces", *Filomat,* 32(9), 3365-3379pp.

Aydi, H., Bota, M.F., Karapınar, E. and Mitrović, S. (2012). "A fixed point theorem for set-valued quasi-contractions in b-metric spaces", *Fixed Point Theory and Applications,* 88,1-8.

Baghani, H., Gordji, M.E. and Ramezani, M. (2016). "Orthogonal sets: the axiom of choice and proof of a fixed point theorem", *Journal of Fixed Point Theory and Applications,* 18, 465-477pp.

Banach, S. (1922). "Sur Les Opérations Dans Les Ensembles Abstraits et Leur Application Aux Equations İntégrales", *Fundamental Mathematics,* 3(1), 133-181.

Boriceanu, M. (2009). "Fixed point theory for multivalued generalized contraction on a set with two b-metrics", *Studia Universıtatis "Babeş-Bolyai", Mathematica,* LIV(3), 3-5.

Boriceonu, M., Bota, M. and Petruşel, A. (2010). "Multivalued fractals in b-metric spaces", *Central Europen Journal of Mathematics,* 8(2), 367-377.

Boyd, D. W. and Wong, J. S. W.(1969). "On nonlinear contractions" *Proc. Amer. Math. Soc.,* 20, 458-464.

Czerwik, S. (1993). "Contraction mapping b metric spaces", *Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis,* 1,5-11.

Eshaghi Gordji, M. and Habibi, H. (2017). "Fixed Point Theory in Generalized Orthogonal Metric Space", *Journal of Linear and Topological Algebra (JLTA),* 6(3), 251-260.

Geraghty, M. (1973). "On contractive mappings", *Proceeding of the American Mathematical Society,* 40, 604-608.

Gordji, M. E., Ramezani, M., De La Sen, M. and Cho, Y. J. (2017). "On Orthogonal Sets and Banach Fixed Point Theorem", *Fixed Point Theory,* 18(2), 569-578.

Huang, H., Deng, G. and Radenović, S. (2018). "Fixed point theorems in b-metric spaces with applications to differential equations", *Journal of Fixed Point Theory Applications,* 20(52), doi:10.1007/s11784-08-0491-z.

Hussain, N. & Shah, M.H. (2011). "KKM mappings in cone b-metric spaces", *Computers and Mathematics with Applications,* 62(4), 1677-1684.

Ismat Beg, Gunaseelan Mani and Arul Joseph Gnanaprakasam.(2021). "Fixed Point of Orthogonal F-Suzuki Contraction Mapping on O-Complete b-Metric Spaces with Applications", *Hindawi Journal of Function Spaces,* Article ID 6692112, 12 Pages.

Karapınar, E. (2018). "A short survey on the recent fixed point results on b-metric spaces", *Constructive Mathematical Analysis,* 1(1), 15-44.

Lipschutz, S.(1965). General Topology, *Schaum's Outlines*.

Mani, G., Gnanaprakasam, A. J., Kauser, N., Munir, M. and Salahuddin. (2021). "Orthogonal F-Contraction Mapping on O-Complete Metric Space with

Applications", *International Journal of Fuzzy Logic and Intelligent,* 21(3), 243-250.

Mani, G., Gnanaprakasam, A. J., Mishra, L.N. and Mishra, V.N. (2021). "Fixed point theorems for orthogonal F-Suzuki contraction mappings on O-complete metric space with an applications", *Malaya Journal of Matematik,* Vol.9, No.1, 369-377.

Matkowski, J. (1977). "Fixed point theorems for mappings with contractive iterate at a point", *Proceeding of the American Mathematical Society,* 62, 344-348.

Piri, H., Kumam, P. (2014). "Some fixed point theorems concerning F-contraction in complete metric spaces", *Fixed Point Theory Applications,* 210.

Razavi, S.S., Masiha, H.P., Işık, H., Aydi, H. and Choonkil Park. (2022). "On Geraghty ⊥-contractions in O-metric spaces and an application to an ordinary type differential equation", *AIMS Mathematics,* 7(9), 17393-17402.

Roshan, R.J., Shobkolaei, N., Sedghi, S. And Abbas, M.(2014). "Common fixed point of four maps in b-metric spaces" *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics,* Volume 43(4), 613-624.

Sawangsup, K., Sintunavarad, W. and Yeol, J.C.(2020). "Fixed point theorems for orthogonal F-contraction mappings on O-complete metric spaces", *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 22:10, 1-14.

Senapati, T., Chanda, A. and Rakocevic, V. (2022). "Generalized quasi-contractions on weak orthogonal metric spaces", *Fixed Point Theory,* In press, 1-16pp.

Singh, B., Singh, V., Uddin, I., Acar, Ö. (2022). "Fixed point theorems on an orthogonal metric space using Matkowski type contraction", *Carpathian Mathematical Publications*, 14(1), 127-134.

Sintunavarat, W. (2016). "Nonlinear integral equations with new admissibility types in b-metric spaces", *Journal of Fixed Point Theory Applications,*18, 397-416.

Yamaod, O. and Sintunavarat, W. (2018). "On new orthogonal contractions in b-metric spaces", *International Journal of Pure Mathematics*, 5, 37-40.

Wardowski, D. (2012). "Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric space", *Fixed Point Theory and Applications*, 2012:94, 6pp 1-8.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: İLCAN Ümran
Uyruğu	: T.C.

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Yüksek lisans	Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı	Devam ediyor
Lisans	Ankara Üniversitesi	2013
Lise	Keçiören Lisesi	2007

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2016-Halen	M.E.B.	Öğretmen

ankara HBM



ankara HBV

le.ahbv.edu.tr