КЫРГЫЗ-ТҮРК “МАНАС” УНИВЕРСИТЕТИ
ТАБИГЫЙ ИЛИМДЕР ИНСТИТУТУ
МАТЕМАТИКА БАГЫТЫ

ВОЛЬТЕРРА-СТИЛЬТЬЕСТИН ҮЧҮНЧҮ ТҮРДӨГҮ СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРИНИН БИР КЛАССЫНЫН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫ

Даярдаган
Элиза Абсамат кызы

Илимий жетекчиси
Ф.-м.и.д., профессор Авыт Асанов

Магистрдик диссертация

Июнь 2022
КЫРГЫЗСТАН/БИШКЕК

КЫРГЫЗ-ТҮРК “МАНАС” УНИВЕРСИТЕТИ
ТАБИГЫЙ ИЛИМДЕР ИНСТИТУТУ
МАТЕМАТИКА БАГЫТЫ

ВОЛЬТЕРРА-СТИЛЬТЬЕСТИН ҮЧҮНЧҮ ТҮРДӨГҮ СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРИНИН БИР КЛАССЫНЫН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫ

Магистрдик диссертация

Даярдаган
Элиза Абсамат кызы

Илимий жетекчиси
Ф.-м.и.д., профессор Авыт Асанов

Июнь 2022
КЫРГЫЗСТАН/БИШКЕК

ПЛАГИАТ ЖАСАЛБАГАНДЫГЫ ТУУРАЛУУ БИЛДИРҮҮ

Бул диссертациялык иште тиешелүү бардык илимий маалыматтар туура, так, этикалык эрежелерге ылайык көрсөтүлгөндүгүн билдирем. Темага карата колдонулган материалдар так көрсөтүлүп, изилденип жана эч бир жерден плагиат жасалбагандыгына ынандырып кетем.

Аты-жөнү: Абсамат кызы Элиза

Колу:

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Konu ile ilgili materyaller net olarak belirtildiğini ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Adı Soyadı: Absamat kızı Eliza

İmza:

ЭРЕЖЕГЕ ЫЛАЙЫКТУУЛУК

“Вольтерра-Стильтьестин үчүнчү түрдөгү сызыктуу интегралдык тендемелеринин бир классынын чыгарылыштары” аталышындагы магистрдик иш, Кыргыз – Түрк “Манас” университетинин магистрдик иш мыйзамдарынын жана магистрдик иш жазма куралдарынын чегинде жазылды.

Даярдаган:

Абсамат кызы Элиза

Колу:

Илимий жетекчиси:

Ф.-м.и.д., профессор Асанов Авыт

Колу:

Математика багытынын мүдүрү

Ф.-м.и.к., профессор Анаркүл Урдалетова

Колу:

YÖNERGEYE UYGUNLULUK

“Üçüncü Tür Özel Tipten Volterra-Stiltjes Lineer İntegral Denklemlerin Çözümleri Üzerine’’ adlı Yüksek Lisans Tezi, Kırgızistan-Türkiye Manas Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi’ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi hazırlayan	Danışman
Eliza ABSAMAT KIZI	Prof. Dr. Avıt ASANOV
İmza:	İmza:

Matematik Anabilim Dalı Başkanı

Prof. Dr. Anarkül URDALETOVA

İmza:

КАБЫЛ АЛУУ ЖАНА БЕКИТҮҮ

Ф.-м.и.д., профессор Авыт Асановдун жетекчилигинде Абсамат кызы Элиза тарабынан даярдалган “Вольтерра-Стильтьестин үчүнчү түрдөгү сызыктуу интегралдык тендемелеринин бир классынын чыгарылыштары” темасындагы магистрдик иши комиссия тарабынан Кыргыз - Түрк “Манас” университети Табигый илимдер институту, Математика бөлүмүнүн илимий багытында магистрдик иш болуп кабыл алынды.

…….. /…… / ……..

Комиссия:

Төрага: Ф.-м.и.д., профессор Самандар Искандаров ……..

Мүчө: Ф.-м.и.д., профессор Асан Өмүралиев .....

Мүчө: Ф.-м.и.д., профессор Мухаммет Камали .....

Мүчө: Ф.-м.и.д., профессор Авыт Асанов .....

Мүчө: Ф.-м.и.к., доцент Калыскан Матанова .....

ЧЕЧИМ:

Бул магистрдик иштин кабыл алынышы Институт башкаруу кеңешинин

…… датасында жана …… санындагы чечими менен бекитилди.

……. /……../ ……

PhD., доцент Исмет Алтынташ

Институт мүдүрү

KABUL VE ONAY

Prof. Dr. Avıt ASANOV'un danışmanlığında ABSAMAT KIZI Eliza'nın "Üçüncü Tür Özel Tipten Volterra-Stiltjes Lineer İntegral Denklemlerin Çözümleri Üzerine'' adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Kırgızistan-Türkiye Manas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

…….. /…… / ……..

JÜRİ:

Komisyon başkanı:	Prof. Dr. Samandar İskandarov	.....
Üye:	Prof. Dr. Asan Ömüraliyev	.....
Üye:	Prof. Dr. Muhammet Kamali	.....
Üye:	Prof. Dr. Avıt Asanov	.....
Üye:	Doç. Dr. Kalıskan Matanova	.....

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun ……...… tarih ve ……..…… sayılı kararı ile onaylanmıştır.

……. /……../ ……

Doç.Dr. Ismet ALTINTAŞ

Enstitü Müdürü

АЛГАЧ СӨЗ/ ЫРААЗЫЧЫЛЫК

Билим жолунда туура багыт көрсөтүп, кеңештерин, алтындай убактысын аябай, мага өзүнүн сабырдуулугу, билими менен үлгү болгон жетекчим физика-математика илимдеринин доктору, профессор Асанов Авыт агайыма жана ошондой эле керек учурда жардамын, кеңештерин аябаган мугалимдер жамаатына терең ыраазычылык билдирем.

Ошондой эле, ушул диссертациялык ишимди жазууда түшүнүү менен кабыл алып, колдоо көрсөткөн апама жана жакындарыма да терең ыраазычылык билдирем.

Элиза Абсамат кызы

Бишкек

ВОЛЬТЕРРА-СТИЛЬТЬЕСТИН ҮЧҮНЧҮ ТҮРДӨГҮ СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРИНИН БИР КЛАССЫНЫН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫ

Элиза Абсамат кызы

Кыргыз- Түрк “Манас” университети, Табигый илимдер институту

Магистрдик иш, июнь 2022

Илимий жетекчиси: ф.м.и.д., профессор Авыт Асанов

БАШКЫ СӨЗ

Бул диссертациялык иште Вольтерра-Стильтьестин үчүнчү түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелеринин бир классынын чыгарылыштарынын жалгыздыгы изилденди. Мында, Авыт Асановдун 2001-жылы киргизген өсүүчү функция боюнча функциянын туундусу түшүнүгү негизги ролду ойнойт. Бул түшүнүк кадимки функциянын туундусу түшүнүгүнүн кенейтилиши жана Стильтьес интегралынын бир классы үчүн терс оператор болуп эсептелет. Өсүүчү функциянын туундусунун негизинде интегралдык өзгөртүү жана терс эмес квадраттык форма методдору аркылуу каралып жаткан интегралдык тендеменин бир классынын чыгарылышынын жалгыздыгы далилденди. Келтирилген мисалдардан өсүүчү функция боюнча функциянын туундусу түшүнүгүн колдонбостон, Вольтерра-Стильтьестин биринчи жана үчүнчү түрдөгү интегралдык тендемелерин изилдөө татаал экендигин көрүүгө болот.

Ачкыч сөздөр: Вольтерра-Стильтьестин интегралдык тендемеси, үчүнчү түр, өсүүчү функция боюнча туундуу, чыгарылыштын жалгыздыгы.

ÜÇÜNCÜ TÜR ÖZEL TİPTEN VOLTERRA-STİLTJES LİNEER İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Eliza ABSAMAT KIZI
Kırgızistan-Türkiye Manas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Haziran 2022
Danışman: Prof. Dr. Avıt ASANOV

GENİŞ ÖZET

Bu yüksek lisans tezinde Vollterra-Stieltjes'in üçüncü türden lineer integral denklemlerinin bir sınıfının çözümünün tekligi sorunu araştırılmaktadır. Çalışmadaki özel rolü 2001 yılında A. Asanov tarafından tanıtılan artan fonksiyona göre fonksiyonun türevi kavramı oynar. Bu kavram, bir fonksiyonun türevinin olağan kavramının genelleşmesidir ve Stieltjes integralinin bir sınıfı için bir ters operatördür. Artan bir fonksiyona göre türev temelinde integral dönüşümler ve negatif olmayan ikinci dereceden formlar yöntemiyle dikkate alınan integral denklemleri sınıfının çözümü için teklik teoremleri kanıtlanmıştır. Teklik teoremlerinin koşullarını sağlayan örnekler oluşturulur. Verilen örneklerden artan fonksiyona göre türev kavramını kullanmadan Volterra-Stiltjes'in birinci ve üçüncu türden doğrusal integral denklemlerini incelemek zor olduğu görülür.

Volterra integral denklemi üzerine yapılmış birçok çalışma vardır [20]. Bununla birlikte, Volterra-Stieltjes integral denklemi, genel olarak her zaman Volterra integral denklemine indirgenemez ve Stieltjes integral denklemi de her zaman Riemann veya Lebesgue integral denklemine indirgenemez. Bu nedenle Volterra - Stieltjes integral denkleminin araştırılması özellikle ilgi çekicidir. Volterra-Stieltjes integral denklemleri, bilim ve teknolojinin birçok dallarında süreçleri tanımlamak, incelemek ve tahmin etmek daha kullanışlı matematiksel modeller olarak bilinir. Örneğin, Volterra-Stieltjes integral denklemler, optimal kontrol süreçlerinde, saçılma teorisinin ters problemlerinde, dürtü etkisi ile süreçlerin stabilitesini incelemekte matematiksel modelleme için ve kuantum sistemlerinde kinetik denklemlerin dinamik teorisindeki süreçlerde kullanılır[21-24].

İlk bölümde artan fonksiyona göre türev kavramı incelendi. Artan foksiyona göre türev,

$\varphi(x)$ ' e göre differansiyel alma kuralları, $\varphi(x)$ 'e göre karmaşık fonksiyonun differensiyeli hakkında verildi.

Tanım 1.1: $\Delta x \to 0$ iken $\Delta f(x)$ artmasının $\Delta\varphi(x)$ artmasına olan oranın limitine, yani

$$f_\varphi'(x) = \frac{df}{d\varphi}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta\varphi(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}. \tag{1.1}$$

ifadesine fonsiyonun $x \in (a,b)$ noktasında $\varphi(x)$'e göre türevi denir.

$\varphi(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında artan ve sürekli bir fonksiyon, $f(x)$ fonksiyonu da $[a,b]$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $f(x)$ fonksiyonun $x \in (a,b)$ noktasında $\varphi(x)$ fonksiyona göre türevi varsa, bu durumda $f(x)$ foksiyonu o noktada $\varphi(x)$ foksiyona göre differensiyellenebilir denir. Eğer $f(x)$ fonksiyonu $\varphi(x)$ foksiyona göre, aralığın her noktasında differensiyellenebilir ise, $f(x)$ fonksiyonu $\varphi(x)$ fonksiyona göre (a,b) aralığında differensiyellenebilir denir.

$f(x)$ fonksiyonu $\varphi(x)$ fonksiyona göre (a,b) aralığının her noktasında differensiyellenebilir olsun. O zaman her $x \in (a,b)$ noktasında $f_\varphi'(x)$ türevi alınabilir. Elde edilen fonksiyona $\varphi(x)$ göre fonksiyonun türevi denir ve $f_\varphi'(x)$ şeklinde gösterilir. Bu $f_\varphi'(x)$ fonksiyonunun da $\varphi(x)$'e göre türeve sahip olması mümkündür. Bu durumda $f(x)$ fonksiyonun $\varphi(x)$'e göre ikinci türevi elde edilir ve

$$f_\varphi''(x) = (f_\varphi'(x))_\varphi'$$

şeklinde gösterilir.

Bu şekilde üçüncü, dördüncü ve sonraki türevleri aşağıdaki gibidir:

$$f_\varphi'''(x) = (f_\varphi''(x))_\varphi', \ldots, f_\varphi^{(n)}(x) = (f_\varphi^{(n-1)}(x))_\varphi',$$

$$f_\varphi^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{d\varphi^n(x)} = D_\varphi^n f(x).$$

İkinci bölümde integral denklemlerinin sınıflandırılması verildi. Volterra'nın, Fredholm'un, Volterra-Stiltjes'in integral denklemleri hakkında kısaca verildi.

Üçüncu bölümde Volterra-Stiltjes'in üçüncü türden lineer integral denklemlerinin bir sınıfı için çözümlerinin tekliği ispatlandı. Sonra verilen teoremlerin şartlarını sağlayan örnekler gösterildi.

Aşağıdaki denklem

$$m(t)u(t)+\int_a^t K(t,s)u(s)d\varphi(s)=f(t), \qquad t\in[a,b], \qquad (3.1)$$

Volterra-Stiltjes'in üçüncü türden lineer integral deklemidir. Burada $m(t)$, $\varphi(t)$, $K(t,s)$ ve $f(t)$ -belirli fonksiyonlar, $\varphi(t)$ -fonksiyonu $[a,b]$ de sürekliartan foksiyon, $m(t)\in C[a,b]$, $0\le m(t)$ her $t\in[a,b]$ için ve $m(t)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığının bir noktasında sıfıra eşittir, $u(t)$ - belirsiz fonksiyon.

Sonunda sonuç, kaynaklar, özgeçmiş verildi.

Anahtar kelimeler: Volterra-Stieltjes'in integral denklemleri, üçüncü tür, artan fonksiyona göre türev, çözümün tekliği.

О РЕШЕНИЯХ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛЬТЬЕСА ТРЕТЬЕГО РОДА

Элиза АБСАМАТ КЫЗЫ

Кыргызско-Турецкий университет «Манас», Институт Естественных наук

Магистерская диссертация, июнь 2022

Научный руководитель: Док. ф.м.н., проф. Асанов Авыт

АННОТАЦИЯ

В данной работе исследован вопрос единственности решения для одного класса линейных интегральных уравнений Вольтерра- Стильтьеса третьего рода. Особую роль в исследовании играет понятие производной по возрастающей функции, которое было введено А. Асановым 2001 г. Это понятие является обобщением обычного понятия производной функции и является обратным оператором для одного класса интеграла Стильтьеса. На основе производной по возрастающей функции, методом интегральных преобразований и методом неотрицательных квадратичных форм доказаны теоремы единственности решения для рассматриваемого класса интегральных уравнений. Построены примеры, удовлетворяющие условиям теорем единственности. Из приведенных примеров видно, что без понятия производной возрастающей функции трудно исследовать линейное интегральное уравнения Вольтерра-Стильтьеса первого и третьего рода.

Ключевые слова: интегральные уравнения Вольтерра-Стильтьеса, третий род, производная по возрастающей функции, единственность решения.

ON SOLUTIONS FOR A CLASS OF VOLTERRA-STILTJES LINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE THIRD KIND

Eliza ABSAMAT KIZI

Kyrgyzstan-Turkey Manas University, Institute of Natural and Applied Sciences

M.Sc. Thesis, June 2022

Supervisor: Prof. Dr. Avyt Asanov

ABSTRACT

In this dissertation, the question of uniqueness of the solution for the one class of Volterra-Stieltjes linear integral equations of the third kind is investigated. The notion of derivative with respect to an increasing function was introduced by A. Asanov in 2001 and plays special role in the study. This notion is a generalization of the usual concept of a derivative function and is an inverse operator for one class of the Stieltjes integral. Basing on idea of such derivative, using the method of integral transformations and the method of non-negative quadratic forms, the uniqueness theorems for the solution of the considered class of integral equations are proved. Examples satisfying the conditions of uniqueness theorems are also constructed in the dissertation. It becomes clear from these examples that it is difficult to study Volterra-Stieltjes linear integral equations of the first and third kind without using the notion of derivative with respect to increasing function.

Keywords: Volterra-Stieltjes integral equations, third kind, derivative with respect to an increasing function, uniqueness of solution.

МАЗМУНУ

ВОЛЬТЕРРА-СТИЛЬТЬЕСТИН ҮЧҮНЧҮ ТҮРДӨГҮ СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРИНИН БИР КЛАССЫНЫН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫ

ПЛАГИАТ ЖАСАЛБАГАНДЫГЫ ТУУРАЛУУ БИЛДИРҮҮ.....i

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK ii

ЭРЕЖЕГЕ ЫЛАЙЫКТУУЛУК iii

YÖNERGEYE UYGUNLULUK iv

КАБЫЛ АЛУУ ЖАНА БЕКИТҮҮ v

KABUL VE ONAY vi

АЛГАЧ СӨЗ / ЫРААЗЫЧЫЛЫК vii

БАШКЫ СӨЗ..... viii

GENİŞ ÖZET ix

АННОТАЦИЯ xii

ABSTRACT xiii

МАЗМУНУ xvi

КИРИШҮҮ 1

1-БӨЛҮМ. ӨСҮҮЧҮ ФУНКЦИЯ БОЮНЧА ФУНКЦИЯНЫН ТУУНДУСУ

1.1 Функциянын $\varphi(x)$ боюнча туундусу жана дифференциалы.....4

1.2 $\varphi(x)$ боюнча дифференцирлөө эрежеси.....7

1.3 $\varphi(x)$ боюнча татаал функцияны дифференцирлөө.....7

1.4 Жогорку тартиптеги туунду жана дифференциалдар.....8

1.5 Функциянын чекиттеги өсүүсү жана кемүүсү.....9

1.6 Өсүүчү функциянын туундусу.....11

1.7 Экстремумдар.....17

1.8 $\varphi(x)$ боюнча туунду жана Стильтес интегралы.....20

1.9 R^n де дифференцирленүүчү функция 23

1.10 Татаал функциянын дифференциалы.....27

2-БӨЛҮМ. ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН КЛАССИФИКАЦИЯСЫ.....29

2.1 Вольтерранын интегралдык теңдемелери.....29

2.2 Фредгольмдун интегралдык тендемелери.....30

2.3 Риман-Стильтьес интегралы…….32

2.4 Вольтерра-Стильтьестин интегралдык теңдемелери.....34

3-БӨЛҮМ.

3.1 Вольтерра- Стильтьестин үчүнчү түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемесинин бир классынын чыгарылышынын жалгыздыгы.....40

3.2 Теореманын шарттарын канааттандырган мисалдар.....44

ЖЫЙЫНТЫК.....46

АДАБИЯТТАР.....47

ӨМҮР БАЯН

КИРИШҮҮ

Интегралдык тендемелердин теориялык бөлүгү жана колдонулуштары көптөгөн илимий эмгектерде изилденген. Айрыкча, [1] эмгекте Вольтерра-Стильтьестин экинчи түрдөгү интегралдык тендемелерин изилдөөнүн жыйынтыктары каралган. [2] эмгек Вольтерранын биринчи жана үчүнчү түрдөгү жылмакай ядролуу интегралдык теңдемесинин көп параметрлүү чыгарылыштарынын көптүгүнүн жашашынын далили. [3] эмгекте Фредгольмдун биринчи түрдөгү интегралдык интегралдык теңдемеси изилденген, ал үчүн Лаврентьев боюнча регулярлоочу операторлор тургузулган. [4-7] эмгектерде Вольтерранын биринчи түрдөгү классикалык эмес интегралдык тендемелерине ар түрдүү колдонмо маселелер көрсөтүлгөн. [8] эмгекте Вольтерранын биринчи түрдөгү жылмакай жана диагоналдагы нөлдүк ядролуу дифференцирлөө чыгарылыштарына М.М. Лаврентьевдин регуляризациялоо методу колдонулган. [9-10] эмгектерде Вольтерранын биринчи жана үчүнчү түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемелер системасынын чыгарылыштарын регуляризациялоо изилденген жана чыгарылыштардын жалгыздыгын канааттандырган жетиштүү шарттар алынган. [11] эмгекте чыгарылыштардын жалгыздыгы далилденет жана Фредгольмдун үчүнчү түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелер системасы үчүн регуляризациялоочу оператор табылат. [14] Вольтерранын биринчи түрдөгү интегралдык теңдемеси изилденген. [15] өсүүчү функция боюнча функциянын туундусу түшүнүгү берилген жана анын жардамында [16-19] Вольтерра-Стильтьестин жана Фредгольм-Стильтьестин биринчи жана үчүнчү түрдөгү интегралдык теңдемелери изилденген.

Вольтерранын интегралдык тендемесин изилдөөгө арналган көптөгөн эмгектер бар[20]. Бирок, Вольтерра-Стильтьестин интегралдык теңдемелери жалпылап айтканда дайыма эле Вольтерранын интегралдык теңдемесине, ал эми Стильтьестин интегралдык теңдемеси дайыма эле Римандын же Лебеганын интегралдык теңдемесине алынып келинбейт. Ошон үчүн Вольтерра-Стильтьестин интегралдык тендемесин изилдөө өзгөчө кызыгууну жаратат. Вольтерра-Стильтьестин интегралдык тендемелери илимдин көптөгөн

тармактарында жана техникада процесстерди изилдөөдө, прогноздоо жана математикалык модель түзүүгө ыңгайлуу болуп жатат. Мисалы, Вольтерра-Стильтьестин интегралдык тендемелери оптималдуу башкаруу процесстеринде[22], таралуу теориясынын тескери маселелеринде [21], импульстук таасир менен берилген процесстердин туруктуулугун изилдөө үчүн математикалык модель түзүүдө [23], динамикалык теориялардын процесстеринде [24] колдонулат. Шадыканова А.Ш тарабынан Өсүүчү функция боюнча туундулуу сызыктуу эмес экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемени жалпыланган трапеция методу менен чыгаруу каралган[26]. Манжиров А.В, Полянин А.Д. интегралдык теңдемелерди чыгаруу берилген[25].

Биринчи бөлүмдө, функциянын өсүүчү функция боюнча функциянын туундусу жөнүндө берилди. Өсүүчү функциянын туундусу, $\varphi(x)$ боюнча дифференцирлөө эрежеси, $\varphi(x)$ боюнча татаал функцияны дифференцирлөө боюнча маалыматтар камтылды.

Экинчи бөлүмдө, интегралдык теңдемелердин классификациясы берилди. Вольтерранын, Фредгольмдун, Вольтерра-Стильтьестин интегралдык теңдемелери жөнүндө кыскача маалымат берилди.

Үчүнчү бөлүмдө, Вольтерра-Стильтьестин үчүнчү түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелеринин бир классынын чыгарылышынын жалгыздыгы далилденди.

Андан соң берилген теоремалардын шартын канааттандырган мисалдар келтирилди.

Теманын актуалдуулугу: Интегралдык теңдемелер теориялык жана колдонмо анализди изилдөөнүн негизги каражаты болуп саналат. Азыркы учурда интегралдык теңдемелерди колдонууга карата жаңы багыттар өнүгүүдө. Алсак, биологиянын кээ бир бөлүмдөрүндө (эпидемиянын таралышы жөнүндө маселе), экономикалык илимдерде (макро-микро экономиканын динамикалык моделдери) ж.б тармактарда колдонулууда.

Иштин максаты: Өсүүчү функция боюнча функциянын туундусу түшүнүгүнүн негизинде Вольтерра-Стильтьестин үчүнчү түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелеринин бир классынын чыгарылышынын жалгыздыгын далилдөө.

Иштин жаңылыгы: Вольтерра-Стильтьестин үчүнчү түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелеринин бир классынын чыгарылышынын жалгыздыгын далилдөө.

Иштин практикалык мааниси: Берилген теоремалардын шарттарын канааттандырган мисалдарды келтирүү.

Иштин көлөмү жана структурасы: Бул магистрдик диссертациялык иш үч бөлүмдөн турат. Андан сырткары киришүү, мазмуну, жыйынтык жана колдонулган адабияттар камтылган.

1-БӨЛҮМ

ӨСҮҮЧҮ ФУНКЦИЯ БОЮНЧА ФУНКЦИЯНЫН ТУУНДУСУ

Көптөгөн эмгектерде функциянын туундусу жана дифференциалы жөнүндө классикалык түшүнүктөр берилген. Биз, бул түшүнүктөргө жаңы аныктама беребиз. Бул түшүнүктөр функциянын туундусунун жана дифференциалынын жашашын аныктайт. Бул аныктамалардын негизинде математикалык анализдин классикалык теоремаларын колдонобуз [5].

1.1 Функциянын $\varphi(x)$ боюнча туундусу жана дифференциалы.

Мейли, $f(x)$ жана $\varphi(x)$ функциялары (a,b) интервалында аныкталган болсун. $\varphi(x)$ функциясы (a,b) интервалында так өсүүчү, үзгүлтүксүз функция дейли. $x \in (a,b)$ чекитин алалы. x маанисине $\Delta x \neq 0$ өсүндүсүн берсек, анда $f(x)$ жана $\varphi(x)$ функцияларынын өсүндүлөрү $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$ жана $\Delta\varphi(x) = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)$ болот.

Аныктама 1. Функциянын $x \in (a,b)$ чекитиндеги $\varphi(x)$ боюнча туундусу деп, аргументтин $\Delta x \to 0$ умтулганда, $\Delta f(x)$ өсүндүсүнүн $\Delta\varphi(x)$ өсүндүсүнө болгон катышынын предели аталат (эгер бул предел жашаса).

$$f_{\varphi}'(x) = \frac{df}{d\varphi}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta\varphi(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}, \qquad (1.1.1)$$

$f(x)$ функциясынын $\varphi(x)$ боюнча туундусун табууну бул функциянын $\varphi(x)$ боюнча дифференциалы деп атасак болот. Эгер $f(x)$ функциясы $x \in (a,b)$ чекитинде $\varphi(x)$ боюнча акыркы туундуга ээ болсо, анда $f(x)$ функциясы ошол чекитте $\varphi(x)$ боюнча дифференцирленүүчү деп аталат. $f(x)$ функциясынын $\varphi(x)$ боюнча интервалдын бардык чекитинде дифференцирленүүсү $\varphi(x)$ боюнча (a,b) да дифференцирленет деп аталат.

Теорема: Эгер $f(x)$ функциясы $\varphi(x)$ боюнча $x_0 \in (a,b)$ чекитинде дифференцирленсе, анда ошол чекитте үзгүлтүксүз болот.

Далилдөө: Шарт боюнча $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде $\varphi(x)$ боюнча дифференцирленсин б.а. акыркы пределди жашасын

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta\varphi(x_0)} = \frac{df}{d\varphi}(x_0) = f_{\varphi}'(x_0)$$

мында $\frac{df}{d\varphi}(x_0)$ -туракту чоңдук, Δx тен көз каранды эмес. Анда теореманын негизинде функциянын чексиз кичине байланышы жөнүндө төмөнкү

$$\frac{df(x_0)}{d\varphi(x_0)} = f_\varphi'(x_0) + \alpha(\Delta x) \qquad (1.1.2)$$

түрүндө жазууга болот, мында $\alpha(\Delta x)$ -чексиз кичине чоңдук, $\Delta x \to 0$ же $\Delta f(x_0) = f_\varphi'(x_0)\Delta\varphi(x_0) + \alpha(\Delta x)\Delta\varphi(x_0)$ болгондо. Мындан, $\Delta x \to 0$ ду чексиз кичине касиетинин негизинде $\Delta f(x_0) = f(x_0 + x) - f(x_0) \to 0$ го коёбуз, демек, $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз.

Функцияны $\varphi(x)$ боюнча дифференцирлөөдө функциянын үзгүлтүксүздүгү зарыл, бирок жетиштүү эмес шарт экенин көрүүгө болот.

Түшүндүрмө: Үзгүлтүксүз $f(x)$ функциясынын $\varphi(x)$ боюнча туундусу сөзсүз түрдө үзгүлтүксүз болушу шарт эмес. Эгерде функция (a,b) да $\varphi(x)$ боюнча үзгүлтүксүз туундуга ээ болсо, анда $f(x)$ функциясы (a,b) да $\varphi(x)$ боюнча жылмакай деп атайбыз. Эгерде $f(x)$ функциясынын $\varphi(x)$ боюнча туундусу үзүлүү чекитинин акыркы маанисине ээ болсо (биринчи түрдө), анда $f(x)$ функциясы (a,b) да $\varphi(x)$ боюнча бөлүктүү-жылмакай деп аталат.

Аныктама 2. Сызыктуу $g(\Delta\varphi) = c\Delta\varphi$ функциясы $f(x)$ функциясынын $\varphi(x)$ боюнча $x = x_0$ чекитиндеги дифференциалы деп аталат, эгер $\Delta x \to 0$ умтулганда

$$\Delta f(x_0) \square\ c\Delta\varphi(x_0)$$

болсо,б.а.

$$\Delta f(x_0) = c\Delta\varphi(x_0) + \gamma(\Delta x)\Delta\varphi(x_0)$$

мында $\Delta x \to 0$ умтулганда $c \in \square$ жана $\gamma(\Delta x) \to 0$.

$f(x)$ функциясынын $\varphi(x)$ боюнча x чекитиндеги дифференциалы $d_\varphi f(x)$ же жөн гана $d_\varphi f$ деп белгиленет. Аныктамадан ,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta\varphi(x)} = c\,,$$

б.а.

$$d_\varphi f(x) = f_\varphi'(x)\Delta\varphi \qquad (1.1.3)$$

$\varphi(x)$ функциясынын дифференциалын аныктасак,

$$d_\varphi f(x) = d\varphi(x) = (\varphi(x))'_\varphi \Delta\varphi = \Delta\varphi$$

анда (1.1.3) төн

$$d_\varphi f(x) = f'_\varphi(x) d\varphi(x) \qquad (1.1.4)$$

алабыз.

Мисал: $f(x) = |x|$ функциясы $x = 0$ чекитинде дифференцирленбейт. Эгер

$$\varphi(x)=\begin{cases}-|x|^{\frac{1}{3}}, & x<0,\\ |x|^{\frac{1}{3}}, & x\geq 0,\end{cases}$$

болсо, анда $\varphi(x)$ функциясы $(-\infty,\infty)$ аралыгында үзгүлтүксүз өсүүчү функция болот.

$f(x)=|x|$ функциясы $(-\infty,\infty)$ аралыгында $\varphi(x)$ боюнча үзгултүксүз туундуга ээ болоорун көрсөтөлү. $x<0$ болсун дейли, анда 1-аныктамадан:

$$f'_{\varphi}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|x+\Delta x|-|x|}{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(|x+\Delta x|^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(|x|^{\frac{1}{3}}\right)^3}{-\left(|x+\Delta x|^{\frac{1}{3}}-|x|^{\frac{1}{3}}\right)}=$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(|x+\Delta x|^{\frac{1}{3}}-|x|^{\frac{1}{3}}\right)\left(|x+\Delta x|^{\frac{2}{3}}+|x+\Delta x|^{\frac{1}{3}}|x|^{\frac{1}{3}}+|x|^{\frac{2}{3}}\right)^3}{\left(|x+\Delta x|^{\frac{1}{3}}-|x|^{\frac{1}{3}}\right)}=-3|x|^{\frac{2}{3}}.$$

Эгер $x>0$ болсо, анда $f'_{\varphi}(x)=3|x|^{\frac{2}{3}}$ болоорун $x<0$ учурунда далилдеген сыяктуу далилдесек болот. Мейли $x=0$ жана $\Delta x>0$ болсун. Анда

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\varphi(\Delta x)-\varphi(0)}=\lim_{x\to 0}\frac{|\Delta x|}{|\Delta x|}=0$$

болот. Эгер $x=0$ жана $\Delta x<0$ болсо, анда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\varphi(\Delta x)-\varphi(0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{|\Delta x|^{\frac{1}{3}}}=0$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\varphi(\Delta x)-\varphi(0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{-|\Delta x|^{\frac{1}{3}}}=0$$

болот. Мындан $f'_{\varphi}(0)=0.$ келип чыгат.

Ушундай жол менен $f(x)=|x|$ функциясынын $\varphi(x)$ боюнча туундусу төмөнкү формуладагыдай аныкталат:

$$f'_{\varphi}(x)=\begin{cases}-3|x|^{\frac{2}{3}}, & x<0,\\ 3|x|^{\frac{2}{3}}, & x\geq 0.\end{cases}$$

Мындан $f'_{\varphi}(x)$ функциясынын $(-\infty,\infty)$ интервалында үзгүлтүксүз экенин көрүүгө болот, б.а. $f(x)=|x|$ функциясы $(-\infty,\infty)$ интервалында $\varphi(x)$ боюнча жылмакай болот.

1.2 $\varphi(x)$ боюнча дифференцирлөө эрежеси

1. Туракту̀унун *φ(x)* боюнча туундусу нөлгө барабар, б.а.

$$(C)'_{\varphi}=0,$$ мында С – каалагандай туракту̀у

2. Дифференцирленүүчү функциянын *φ(x)* боюнча алгебралык суммасынын туундусу алардын ар биринин *φ(x)* боюнча туундусунун суммасына барабар, б.а.

$$(u+v)'_{\varphi}=u'_{\varphi}+v'_{\varphi}.$$

3. Дифференцирленүүчү эки функциянын *φ(x)* боюнча туундусу алардын биринчи функциясынын *φ(x)* боюнча туундуусун экинчисине болгон көбөйтүндүсү менен биринчисин экинчи функциянын *φ(x)* боюнча тундуусуна болгон көбөйтүндүсүнүн суммасына барабар, б.а.

$$(uv)'_{\varphi}=u'_{\varphi}v+uv'_{\varphi}.$$

Натыйжа. С туракту̀у чоңдугун *φ(x)* боюнча туунду белгисинин астына чыгарып алууга болот, б.а.

$$(Cu)'_{\varphi}=Cu'_{\varphi}.$$

4. Дифференцирленүүчү эки функциянын катышынын *φ(x)* боюнча туундусу

$$\left(\frac{u}{v}\right)'_{\varphi}=\frac{u'_{\varphi}vuv'_{\varphi}}{v^2}.$$

формуласы менен эсептелет.

Бул эреженин далилдөөсү дифференцирлөөнүн эрежелеринин аналогиясы болот.

1.3 *φ(x)* боюнча татаал функцияны дифференцирлөө

Теорема. *u(x)* функциясы *φ(x)* боюнча $x=x_0$ чекитинде дифференцирленсин дейли. $u(x_0)=u_0$, $u'_{\varphi}(x_0)=\alpha$ болсун. Ал эми *f(u)* функциясы *u* боюнча $u=u_0$

чекитинде дифференцирленсин, анда $f'(u_0)=\beta$ болот. Ошондой эле $v(x)=f(u(x)$ татаал функциясынын $\varphi(x)$ боюнча $x=x_0$ чекитинде дифференциалы

$$v'_\varphi(x_0)=f'(u_0)u'_\varphi(x_0)=\beta\alpha$$

болот.

Далилдөө: $f(u)$ функциясын дифференцирлөөдөн жана $u(x)$ функциясын $\varphi(x)$ боюнча дифференцирлөөдөн төмөнкүлөрдү алабыз:

$$\Delta u(x_0)=\alpha\Delta\varphi(x_0)+\alpha_1(\Delta x)\Delta\varphi(x_0), \qquad (1.3.1)$$

$$\Delta f(u(x_0))=\Delta f(u_0)=\beta\Delta u(x_0)+\beta_1(\Delta u(x_0))\Delta u(x_0), \qquad (1.3.2)$$

мында Δx – бул x аргументинин өсүндүсү, $\alpha_1(\Delta x)$ – бул $\Delta x\to 0$ чексиз кичине жана $\beta_1(\Delta u(x_0))$ – бул $\Delta u(x_0)$ да чексиз кичине. (1.3.1) жана (1.3.2) формулаларын эске алып,

$$\Delta f(u(x_0))=[\beta+\beta_1(\Delta u(x_0))][\alpha+\alpha_1(\Delta x)]\Delta\varphi(x_0).$$

алабыз.

Мындан, функциянын чексиз кичине пределенин байланышы жөнүндөгү тереманын негизинде төмөнкү формуланы алабыз:

$$v'_\varphi(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(u(x_0))}{\Delta\varphi(x_0)}=\beta\alpha.$$

1.4 Жогорку тартиптеги туунду жана дифференциалдар

Мейли, $f(x)$ функциясы $\varphi(x)$ боюнча (a,b) интервалынын ар бир чекитинде дифференцирленсин. Анда ар бир $x\in(a,b)$ чекитине туура келген ошол чекиттеги $f'_\varphi(x)$ туундусун алууга болот. Алынган функция $\varphi(x)$ боюнча функциянын туундусу деп аталат жана $f_\varphi{}'(x)$ түрүндө белгиленет. Ал функция өзү дагы $\varphi(x)$ боюнча туундуга ээ болушу мүмкүн. Анда ал $f(x)$ функциясы $\varphi(x)$ боюнча экинчи туундусу деп аталат жана төмөнкү түрдө белгиленет:

$$f''_\varphi(x)=(f'_\varphi(x))'_\varphi$$

Ага аналогия катары үчүнчү, төртүнчү жана андан кийинки туундулары төмөнкү түрдө берилет:

$$f'''_\varphi(x)=(f''_\varphi(x))'_\varphi,\ \ldots\ f_\varphi^{(n)}(x)=(f_\varphi^{(n-1)}(x))'_\varphi$$

$$f_{\varphi}^{(n)}(x)=\frac{d^n f(x)}{d\varphi^n(x)}=D_{\varphi}^n f(x)$$

Төмөнкү теореманы индукция методу менен далилдөөгө болот.

Теорема (Лейбництин жалпыланган формуласы). $f(x)$ жана $g(x)$ функциялары $\varphi(x)$ боюнча n -тартиптеги туундуга ээ болсун. Анда төмөнкү формуланы алабыз:

$$f_{\varphi}^{(n)}(x)g(x)+nf_{\varphi}^{(n-1)}g'_{\varphi}(x)+\frac{n(n-1)}{2}f_{\varphi}^{(n-2)}(x)g''_{\varphi}(x)+\cdots+f(x)g_{\varphi}^{(n)}=$$
$$=\sum_{m=0}^{n}C_n^m f_{\varphi}^{(m)}(x)g_{\varphi}^{(n-m)}(x),$$

мында $f^{(0)}(x)=f(x)$, $g^{(0)}(x)=g(x)$.

Эгер $f(x)$ функциясы $\varphi(x)$ боюнча эки жолу дифференцирленсе,

$$f''_{\varphi}(x)d\varphi^2=f''_{\varphi}(x)(d\varphi(x))^2$$

$f(x)$ функциясынын $\varphi(x)$ боюнча экинчи дифференциалы деп аталат, $d_{\varphi}^2 f(x)$ деп белгиленет, б.а.

$$d_{\varphi}^2 f(x)=d_{\varphi}(d_{\varphi}f(x))=f''_{\varphi}(x)d\varphi^2$$

ушул сыяктуу эле үчүнчү, төртүнчү жана андан кийинки бардык дифференциалдар төмөнкүчө болот:

$$d_{\varphi}^3 f(x)=d_{\varphi}(d^2{}_{\varphi}f(x))=f'''_{\varphi}(x)d\varphi^3$$

$$d_{\varphi}^n f(x)=d_{\varphi}(d_{\varphi}^{n-1}f(x))=f_{\varphi}^{(n)}(x)d\varphi^n$$

Мындай аныктамалардан кийин төмөнкү түрдө жазсак болот:

$$f_{\varphi}^{(n)}(x)=\frac{d_{\varphi}^n f(x)}{d\varphi^n}.$$

1.5 Функциянын чекиттеги өсүүсү жана кемүүсү

Мейли, x_0 чекити $f(x)$ областында аныкталган ички чекит болсун.

Аныктама 1. $f(x)$ функциясы $x=x_0$ чекитинде өсүүчү болот, эгерде ошол чекиттин кандайдыр бир аймагы жашаса:

1) $x>x_0$ болгондо $f(x)>f(x_0)$;

2) $x < x_0$ болгондо $f(x) < f(x_0)$.

Аныктама 2. Функция $x = x_0$ чекитинде кемүүчү болот, эгер кандайдыр бир төмөнкүдөй аймагы жашаса:

1) $x > x_0$ болгондо $f(x) < f(x_0)$,

2) $x < x_0$ болгондо $f(x) > f(x_0)$

Аныктама 3. Функция $x = x_0$ чекитинде локалдык максимумга (локалдык минимумга) ээ болот, эгер ошол чекиттин кандайдыр бир аймагында $f(x_0) > f(x)$ (тиешелүү түрдө $f(x_0) < f(x)$) барабарсыздыгы аткарылса.

Аныктама 4. x_0 функциясы $x = x_0$ чекитинде локалдык экстремумга ээ болот, эгер ошол чекитте анын локалдык максимуму, же локалдык минимуму бар болсо.

Теорема. Мейли, $\varphi(x)$ функциясы $f(x)$ функциясынын аныкталуу областында өсүүчү, үзгүлтүксүз функция болсун.

1) Эгер $\frac{df}{d\varphi}(x_0) = c > 0$ болсо, анда $x = x_0$ чекити $f(x)$ функциясынын өсүү чекити болот.

2) Эгер $\frac{df}{d\varphi}(x_0) = c < 0$ болсо, анда $x = x_0$ чекитинде $f(x)$ функциясы кемийт.

Далилдөө:

$$\frac{df}{d\varphi}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)}$$

үчүн нөлдөн чоң сан жашаса, анда $x = x_0$ чекитинин δ аймагынын бардык чекиттеринде

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} - c \right| < \frac{c}{2}$$

барабарсыздыгы аткарылса. Бул аймактан

$$0 < \frac{c}{2} < \frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} < \frac{3c}{2}$$

алабыз. Ошондой эле $\Delta\varphi(x_0)=\varphi(x)-\varphi(x_0)$ ошол эле белгини алат, $\Delta x=x-x_0$ үчүн. $\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)$ ошол эле белгини алат, $\Delta x=x-x_0$ үчүн, б.а. x_0- өсүү чекити. 2-учур $f(x)$ ти $(-f(x))$ алмаштыруудан 1-учурга келет.

1.6 Өсүүчү функциянын туундусу

Ферманын жалпыланган теоремасы. Мейли, x_0 чекити $[a,b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз $f(x)$ функциясында аныкталган функциянын локалдык экстремум чекити жана $\exists\ \frac{df}{d\varphi}(x_0)$ болсун. Мында $\varphi(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде өсүүчү үзгүлтүксүз функция. Мындан $\frac{df}{d\varphi}(x_0)=0$ алабыз.

Далилдөө: x_0 чекити өсүү (кемүү) чекити болушу мүмкүн эмес. Анда ошол чекиттеги δ -аймагы үчүн $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta\varphi(x_0)}>0$ (тиешелүү түрдө $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta\varphi(x_0)}<0$) болот.

Бирок $\frac{df}{d\varphi}(x_0)>0$ барабарсыздыгы болушу мүмкүн эмес. $\frac{df}{d\varphi}(x_0)=0$ формуланы кабыл алып, далилдөө керек болот.

Роллдун жалпыланган теоремасы. Мейли $y=f(x)$ функциясы төмөнкү шарттарды канааттандырсын:

1) $[a,b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз ;
2) (a,b) интервалында өсүүчү $\varphi(x)$ функциясында дифференцирленет;
3) кесиндинин акыркы чекитинде бирдей маанини алат, б.а. $f(a)=f(b)$

Анда кесиндинин ичинде $f(x)$ функциясынын $\varphi(x)$ боюнча туундусу нөлгө барабар болгон эң аз бир $\xi\in(a,b)$ чекити жашайт.

$$\frac{df}{d\varphi}(\xi)=0$$

Далилдөө: Вейерштрасстын теоремасынын негизинде функция кесиндиде үзгүлтүксүз жана анда өзүнүн эң чоң M, ошондой эле эң кичине m маанисине умтулат. Эгер алар $[a,b]$ кесиндисинин акыркы чекитине умтулса, анда эреже боюнча алар барабар болот (б.а. M=m), бул функциянын $[a,b]$ кесиндисинде дайыма бирдей экенин билдирет. Анда

$$\frac{df}{d\varphi}(x)$$

туундусу кесиндинин бардык чекиттеринде нөлгө барабар. Эгер максималдык же минималдык маанилердин жок дегенде бири кесиндинин ичиндеги чекиткеумтулса (б.а $m < M$) болсо, анда $\frac{df}{d\varphi}(x)$ туундусу Ферманын жалпыланган теоремасынын негизинде тиешелүү чекитте нөлгө барабар.

Кошинин жалпыланган теоремасы: Мейли, $f(x)$ жана $g(x)$ функциялары $[a,b]$ кесиндисинде үзгүлтүкүз жана анын ичинде $\varphi(x)$ өсүүчү функциясы боюнча дифференцирленсин. Бардык $x \in [a,b]$ үчүн $\frac{dg(x)}{d\varphi(x)} \neq 0$ болсун. Анда (a,b) интервалында

$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \left[\frac{df(c)}{d\varphi(c)} / \frac{dg(c)}{d\varphi(c)} \right]$$

түрүндөгү c чекити табылат.

Далилдөө: $\frac{dg(c)}{d\varphi(c)} \neq 0$ эске алып, талап кылынган барабардыкты ага эквиваленттүү түрдө

$$(f(a)-f(b))\frac{dg(c)}{d\varphi(c)} - (g(a)-g(b))\frac{df(c)}{d\varphi(c)} = 0$$

алабыз. Акыркы барабардыктын сол жагынан $H(x)$ функциясынын $\varphi(x)$ боюнча туундусунун $x = c$ чекитиндеги маанисин көрүүгө болот. Мында

$$H(x) = g(x)(f(a)-f(b)) - f(x)(g(a)-g(b))$$

Ушундай жол менен $H'(x) = 0$ болгондо, бизге c чекитинин бар экенин далилдөө жетиштүү болот. Бирок, $H(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинин ички чекиттеринде дифференцирленет жана

$$H(a) = H(b) = -g(a)f(b) + f(a)g(b)$$

болот. Ошондуктан Роллдун жалпыланган теоремасынан $c \in [a,b]$ чекити жашайт жана $H'(c) = 0$ далилденет.

Натыйжа 1 (Лагранждын жалпыланган теоремасы). Мейли, $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз жана $\varphi(x)$ өсүүчү функциясы (a,b) интервалында дифференцирленсин. Анда төмөнкү формула келип чыгат.

$$f(a)-f(b)=\frac{df(c)}{d\varphi(c)}(\phi(a)-\varphi(b)),$$

мында c -бул кесиндидеги кандайдыр бир ички чекит.

Далилдөө: $g(x)=\varphi(x)$ болгондо Кошинин жалпыланган теоремасынын жекече учуру катары натыйжа 1 келип чыгат. Бул натыйжа 1 жалпыланган чектүү өсүндү формуласы деп аталат.

Демек, $\varphi(x)$ функциясы $[a,b]$ кеиндисинде өсүүчү узгүлтүксүз функция десек болот.

Теорема 1. Мейли, бардык $x\in(a,b)$ үчүн $\frac{df}{d\varphi}(x)=0$ болсун. Анда $f(x)=const=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ болот.

Далилдөө: Лагранждын жалпыланган теоремасынан

$$\Delta f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{df}{d\varphi}(c)\left(\varphi(x)-\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$$

Мындан

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right),\qquad x\in(a,b)$$

келип чыгат. Теорема далилденди.

Теорема 2. Мейли, $f(x)$ функциясы $\varphi(x)$ боюнча (a,b) интервалында дифференцирленсин. $f(x)$ функциясы (a,b) интервалында кемибеши үчүн

$$\frac{df}{d\varphi}(x)\geq 0,\qquad \forall x\in(a,b)$$

болгондугу жетиштүү.

Далилдөө: Зарыл шарт. $f(x)$ функциясынын кемибөөсүнүн шарты

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta\varphi(x)}\geq 0$$

эквиваленттүү. Барабарсыздыкта пределге өтүп,

$$\frac{df}{d\varphi}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}\geq 0$$

алабыз.

Жетиштүү шарт: Эгер

$$\frac{df}{d\varphi}(x)\geq 0$$

болсо, анда Лагранждын жалпыланган теоремасы боюнча $c\in(a,b)$ үчүн

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}=f'(c)\geq 0$$

болот, $f(x)$ функциясы (a,b) интервалында кемибейт. Теорема 2 далилденди.

Теорема 3. Эгер (a,b) интервалында

$$\frac{df}{d\varphi}(x)>0$$

болсо, анда $f(x)$ функциясы (a,b) интервалында монотондуу өсөт.

Далилдөө: Лагранждын жалпыланган теоремасынын негизинде $\Delta x>0$ үчүн

$$\Delta f(x)=\frac{df}{d\varphi}(c)\Delta\varphi(x)>0$$

болорун далилдөө керек.

Теорема 4. Мейли $f(x)$ функциясы (a,b) интервалында $\varphi(x)$ боюнча дифференцирленсин. Анда (a,b) интервалында $f(x)$ функциясы так өсүүчү болушу үчүн

$$\frac{df}{d\varphi}(x)\geq 0$$

зарыл жана жетиштүү, ошондой эле $\frac{df}{d\varphi}(x)$, (a,b) интервалынын ичинде жаткан эч кандай $[a_1,b_1]$ кесиндисинде нөл болбойт.

Далилдөө: Зарыл шарт (карама-каршылыктан). Эгер теореманын шарты аткарылбаса,анда кээ бир $x_0\in(a,b)$ чекити үчүн

$$\frac{df}{d\varphi}(x_0)<0$$

же бардык $x\in[a_1,b_1]$ үчүн

$$\frac{df}{d\varphi}(x) \equiv 0$$

болот. Анда биринчи учурда x_0 чекити $f(x)$ функциясынын өсүүчү, экинчи учурда $[a_1, b_1]$ кесиндисинде $f(x) = const$ болот. Бул $f(x)$ функциясынын өсүү шартына карама-каршылык.

Жетиштүү шарт. Каалагандай $a_1 < b_1$ үчүн төмөнкү

$$\frac{df}{d\varphi}(x) \geq 0$$

шарттан

$$f(b_1) - f(a_1) = \frac{df}{d\varphi}(c)(\varphi(b_1) - \varphi(a_1)) \geq 0$$

алабыз. Мында $a_1, b_1 \in (a, b)$, б.а. $f(x)$ кемибейт.

$f(x)$ функциясынын өсүүчү экенин көрсөтөлү. Мейли, $b_1 > a_1$ үчүн $f(a_1) = f(b_1)$ болбосун. $[a_1, b_1]$ кесиндисинде $f(x)$ функциясынын кемибешинен $f(x) = const$ андан (a_1, b_1) де

$$\frac{df}{d\varphi}(x) = 0$$

алабыз, бул теореманын шартына карама-каршы. Ошентип, теорема 4 толук далилденди.

Теорема (Тейлордун жалпы түрдөгү калдык мүчөнү каптыган жалпыланган формуласы). Мейли, $f(x)$ функциясы (a, b) интервалында $n-1$ даражада дифференцирленсин. x_0 жана x_1 чекиттери бул интервалдын каалагандай эки чекити болсун. Анда x_0 жана x_1 чекиттеринин арасында каалагандай оң c чекити үчүн

$$r_n(x_1) = f(x_1) - f_n(x_0, x_1) = \frac{n+1}{\alpha}\left(\frac{\varphi(x_1)-\varphi(x_0)}{\varphi(x_1)-\varphi(c)}\right)^{\alpha}(\varphi(x_1)-\varphi(c))^{n+1}\frac{f_{\phi}^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

жашайт. Эске салсак,

$$f_n(x_0, x_1) = f(x_0) + \frac{f'_{\varphi}(x_0)}{1!}(\varphi(x) - \varphi(x_0)) + \cdots + \frac{f_{\varphi}^{(n)}(a)}{n!}(\varphi(x) - \varphi(x_0))^n.$$

Далилдөө: $x_1 > x_0$ болсун. H менен төмөнкү барабардыкты белгилейли.

$$H = \frac{f(x_1) - f_n(x_0, x_1)}{(\varphi(x_1) - \varphi(x_0))^n}$$

Бизге, (x_0, x_1) интервалында төмөнкү турдөгү c чекити бар экенин далилдөө керек.

$$H = \frac{n+1}{\alpha}\left(\varphi(x_1) - \varphi(c)\right)^{n+1-\alpha} \frac{f_\varphi^{n+1}(c)}{(n+1)!}$$

Муну Роллдун жалпыланган теоремасына таянып далилдейбиз. H менен белгиленген барабардыкты төмөнкү түрдө жазып алсак болот:

$$f(x_1) - f_n(x_0, x_1) - H\left(\varphi(x_1) - \varphi(x_0)\right)^\alpha = 0$$

$[x_0, x_1]$ де аныкталган $\psi(x)$ функциясын карайлы.

$$\psi(x) = f(x_1) - f_n(x, x_1) - H\left(\varphi(x_1) - \varphi(x)\right)^\alpha = 0$$

Анда $\psi(x_0) = 0$ экенин көрүүгө болот. Андан башка $\psi(x)$ функциясы (x_0, x_1) де $\varphi(x)$ боюнча дифференцирленсин жана $[x_0, x_1]$ де үзгүлтүксүз. Ошондой эле $\psi(x_1) = 0$ дө $f_n(x_1, x_1) = f(x_1)$ барабардыгы орун алат. Ошондой эле Роллдун жалпыланган теоремасы боюнча (x_0, x_1) интервалынын кээ бир c чекитинде $\psi'_\varphi(x)$ туундусу нөлгө барабар, б.а. $c = 0$, $c \in (x_0, x_1)$ болгондо $\psi'_\varphi(x) = 0$.

$\psi'_\varphi(x)$ туундуну толук түрдө жазып алалы:

$$\psi'_\varphi(x) = \left(f(x) + \frac{f'_\varphi(x)}{1!}(\varphi(x_1) - \varphi(x)) + \cdots + \frac{f_\varphi^{(n)}(x)}{n!}(\varphi(x_1) - \varphi(x))^n \right)$$

$s = 1, \ldots, n$ болгондо

$$\left(\frac{f_\varphi^{(s)}(x)}{s!}(\varphi(x_1) - \varphi(x))^s \right)'_\varphi = \frac{f_\varphi^{(s+1)}(x)}{s!}(\varphi(x_1) - \varphi(x))^s - \frac{f_\varphi^{(s)}(x)}{(s-1)!}(\varphi(x_1) - \varphi(x))^{s-1}$$

анда

$$\psi'_\varphi(x) = \alpha H(\varphi(x_1) - \varphi(x))^{\alpha-1} - \frac{f_\varphi^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(\varphi(x_1) - \varphi(x))^n.$$

Мындан $x = c$ чекитин алабыз

$$H = \frac{n+1}{\alpha}(\varphi(x_1) - \varphi(c))^{n+1-\alpha} \frac{f_\varphi^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

$x_1 < x_0$ учуру да ушул сыяктуу далилденет. Теорема далилденди.

Тейлордун жалпыланган формуласынын жекече учуру.

1. Лагранждын жалпыланган формадагы калдык мүчөсү $(\alpha = n+1)$. Бул учурда

$$r_n(x_1) = \frac{f_\varphi^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(\varphi(x_1) - (x_0))^{n+1}.$$

2. Кошинин жалпыланган формадагы калдыгы $(\alpha = 1)$.

$$r_n(x_1) = \frac{f_\varphi^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(\varphi(x_1) - \varphi(x_0))(\varphi(x_1) - \varphi(c))^n,$$

$$c = x_0 + \theta(x_1 - x_0), \quad 0 < \theta < 1, \quad 1 - \theta = (x_1 - c)/(x_1 - x_0).$$

Тейлордун жалпыланган формуласынын Пеано түрүндөгү калдык мүчөсү менен колдонуу пределди эсептөөгө ыңгайлуу.

1.7 Экстремумдар.

Биздин андан аркы максатыбыз- маселени чыгарууда берилген теорияны колдонуу, изилдөөгө байланыштуу функцияга кайрылуу. Алардын бири-функциянын локалдык жана глобалдык экстремум маселесин табуу. Буга чейин катар сыяктуу берилгендерди далилдедик. Эске салсак, бул түшүктөрдү алдыда колдонобуз.

1. $f'_\varphi(x) = 0$ болсо, x чекити стационардык чекит болот($f(x)$ боюнча).
2. (a,b) интервалында функциянын $\varphi(x)$ боюнча дифференцирленишинин кемибешинин критерийи: (a,b) интервалында $f(x)$ функциясынын кемибешинин зарыл жана жетиштүү шарты болуп, (a,b) интервалында $f'_\varphi(x) \geq 0$ болушу эсептелет.
3. Өсүүчү болушунун критерийи: $f(x)$ функциясы (a,b) интервалында өсүшүнүн зарыл жана жетиштүү шарты болуп, (a,b) интервалында

$f'_\varphi(x) \geq 0$ болушу жана андан сырткары $(a_1, b_1) \subset (a, b)$ интервалында $f'_\varphi(x) \neq 0$ болушу эсептелет.

4. $f(x)$ функциясынын өсүүчү болушунун жетиштүү шарты болуп, бардык $x \in (a, b)$ үчүн $f'_\varphi(x) > 0$ болушу эсептелет.

Теорема 1. Мейли $f(x)$ функциясы стационардык x_0 чекитинин кээ бир аймагында $\varphi(x)$ боюнча дифференцирленсин. б.а. $f'_\varphi(x_0) = 0$. Анда

1) эгер x_0 чекитинин сол жагында $f'_\varphi(x) > 0$ жана x_0 чекитинин оң жагында $f'_\varphi(x) < 0$ болсо, анда x_0 чекити $f(x)$ функциясынын локалдык максимум чекити деп аталат.
2) эгер x_0 чекитинин сол жагында $f'_\varphi(x) < 0$ жана x_0 чекитинин оң жагында $f'_\varphi(x) > 0$ болсо, анда x_0 чекити $f(x)$ функциясынын локалдык минимум чекити деп аталат.
3) эгер x_0 чекитинде $f'_\varphi(x)$ функциясы оң жана сол жагында бирдей белгиге ээ болсо, анда x_0 чекити экстремум чекитке ээ болбойт.

Далилдөө: 1) Лагранждын жалпыланган теоремасынан,

$$f(x) = f(x_0) + f'_\varphi(c)(\varphi(x) - \varphi(x_0))$$

алабыз. Мында c чекити x_0 жана x чекиттеринин арасында жатат. Шарттан

$$f'_\varphi(c)(\varphi(x) - \varphi(x_0)) < 0$$

келип чыгат. Мындан $f(x) < f(x_0)$ алабыз. Талап кылынган далилдөө.

Далилдөө 2) ушул далилдөөнүн аналогиясы болот.

3). Эгер x_0 чекитинин оң жана сол жагында $f'_\varphi(x) > 0$ болсо, анда сол жагында $f'_\varphi(c)(\varphi(x) - \varphi(x_0)) < 0$, оң жагында $f'_\varphi(c)(\varphi(x) - \varphi(x_0)) > 0$ болот. Мындан $x_1 < x_0 < x_2$ үчүн $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ талап кылынган далилдөөнү алабыз.

$f'(x) < 0$ учуру буга аналогия катары каралат.

Теорема 2. Мейли, $f(x)$ функциясы x_0 чекитинин кээ бир аймагында үзгүлтүксуз болсун жана ал чекиттин проколотой аймагында $\varphi(x)$ боюнча дифференцирленсин. Эгер $f_\varphi'(x)$ функциясы x_0 чекитинин сол жагынан оң жагына өткөндө белгисин "+" тан "–" ка өзгөртсө, $f(x)$ локалдык максимумга ээ, эгер "–" тан "+" ка өзгөртсө, анда $f(x)$ локалдык минимумга ээ, эгер белгисин өзгөртпөсө, локалдык экстремуму жок.

Бул теореманын далилдөө теорема1 ди далилдөө сыяктуу болот. Биз $x = x_0$ чекитинде $f(x)$ функциясынын $\varphi(x)$ боюнча туундусунун жашашын эч жерде колдоно элекпиз.

Теорема 3. Мейли, $f_\varphi'(x_0) = 0$ жана $f_\varphi''(x_0)$ жашасын. Анда

1) эгер $f_\varphi''(x_0) < 0$ болсо, анда x_0 -локалдык максимум чекити болот.
2) эгер $f_\varphi''(x_0) > 0$ болсо, анда x_0 -локалдык минимум чекити болот.

Далилдөө: 1) $f_\varphi''(x_0) < 0$ болсо, анда $x = x_0$ чекитинде $f_\varphi'(x)$ кемийт жана $f_\varphi'(x_0) = 0$ болгондо $f_\varphi'(x)$ функциясы x_0 дун сол жагынан оң жагына өткөндө белгисин "+" тан "–" ка өзгөртөт. Ошондуктан, теорема 2 де x_0 чекити локалдык максимум болот.

2). $f''(x_0) > 0$ болсо, анда $x = x_0$ чекитинде $f_\varphi'(x)$ өсөт. Теорема 2 ден x_0 чекити локалдык минимум чекити болот. Теорема далилденди.

Теорема 4. Мейли,

$$f_\varphi'(x_0) = \quad \cdots \quad = f_\varphi^{(2k-1)}(x_0) = 0, \quad f_\varphi^{(2k)}(x_0) \neq 0$$

анда

1) эгер $f_\varphi^{(2k)}(x_0) < 0$ болсо, анда x_0 -локалдык максимум чекити болот.

2) эгер $f_\varphi^{(2k)}(x_0) > 0$ болсо, анда x_0 -локалдык минимум чекити болот.

Далилдөө: 1) $k=1$ болгондо теорема 3 кө келет. $k>1$ болсун. $f'_{\varphi}(x)$ функциясын Тейлордун жалпыланган формуласынын негизинде төмөнкүдөй жазып алабыз:

$$f'_{\varphi}(x)=f'_{\varphi}(x_0)+\frac{f''_{\varphi}(x_0)}{1!}(\varphi(x)-\varphi(x_0))+\quad\cdots\quad+\frac{f^{(2k-2)}_{\varphi}(x_0)}{(2k-3)!}(\varphi(x)-\varphi(x_0))^{2k-3}+$$
$$+\frac{f^{(2k-1)}_{\varphi}(x_0)}{(2k-2)!}(\varphi(x)-\varphi(x_0))^{2k-2}.$$

мындан,

$$f'_{\varphi}(x)=\frac{f^{(2k-1)}_{\varphi}(c)}{(2k-2)!}(\varphi(x)-\varphi(x_0))^{2k-2}$$

Демек,

$f^{(2k)}_{\varphi}(x_0)<0$ болгондо $f^{(2k-1)}_{\varphi}(x)$ кемийт, $f^{(2k-1)}_{\varphi}(x)$ функциясы x_0 чекитинде белгисин “+” тан “–” ка өзгөртсө, анда $f'_{\varphi}(x)$ белгисин “+” тан “–” ка өзгөртөт. Ошондуктан,

x_0 -локалдык максимум чекити болот. 2-учур ушуга аналогия катары каралат. Теорема далилденди.

1.8 $\varphi(x)$ боюнча туунду жана Стильтес интегралы

Теорема 1.8.1. $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз функция жана $\varphi(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде өсүүчү үзгүлтүксүз функция болсун. Ошондой эле,

$$F(x)=\int_a^b f(t)\,d\varphi(t),\qquad x\in[a,b]$$

аныкталсын. Анда $F(x)$ функциясынын $\varphi(x)$ боюнча туундусу

$$F'_{\varphi}(x)=\left(\int_a^x f(t)\,d\varphi\right)'_{\varphi}=f(x),\qquad x\in[a,b]$$

болот. Мында,

$$F'_{\varphi}(a)=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{F(a+\Delta x)-F(a)}{\varphi(a+\Delta x)-\varphi(a)},$$

$$F'_{\varphi}(b)=\lim_{\Delta x\to 0^{-}}\frac{F(b+\Delta x)-F(b)}{\varphi(b+\Delta x)-\varphi(b)}.$$

Далилдөө: $\varphi(x)$ боюнча туунду алуунун аныктамасынан

$$F'_{\varphi}(x)=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(f(x)\int\limits_{x}^{x+\Delta x}d\varphi-\int\limits_{x}^{x+\Delta x}\left(f(x)-f(t)d\varphi\right)\right)}{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}=f(x)-\lim_{\Delta x\to 0}\psi(x,\Delta x),$$

алабыз. Мында

$$\psi(x,\Delta x)=\frac{\int\limits_{x}^{x+\Delta x}\left(f(x)-f(t)d\varphi\right)}{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}.$$

Мындан $\varphi(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде өсүүчү функция экендигин эске алып, төмөнкү

$$\left|\psi(x,\Delta x)\right|\le\frac{\omega_f(\Delta x)\left(\int\limits_{x}^{x+\Delta x}d\varphi\right)}{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}=\omega_f(\Delta x)$$

барабарсыздыгын алабыз. Мында $\omega_f\left(|\Delta x|\right)$ -бул $f(x)$ функциясынын үзгүлтүксүздүгүнүн модулу, б.а.

$$\omega_f(\delta)=\sup_{|t-x|\le\delta}\left|f(x)-f(t)\right|$$

болот, анын пределі

$$\lim_{\delta \to 0} \omega_f(\delta) = 0$$

экендиги белгилүү. Ошондуктан,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left| \psi(x, \Delta x) \right| \le \lim_{\Delta x \to 0} \omega_f\left(\left| \Delta x \right| \right) = 0$$

болот. Мындан

$$F'_{\varphi}(x) = f(x)$$

болоору келип чыгат. Теорема 1 далилденди.

Теорема 2 (Ньютон-Лейбництин жалпыланган формуласы).

Мейли, $f'_{\varphi}(x) = f(x)$ функциясы $[a,b]$ интервалында үзгүлтүксүз функция болсун. Анда төмөнкү

$$\int_a^b f'_{\varphi}(x) d\varphi(x) = f(b) - f(a)$$

формуланы колдонууга болот.

Далилдөө: Стильтестин интегралынын аныктамасы боюнча бул интеграл төмөнкүдөй

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f'_{\varphi}(\xi_i)[\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]$$

сумманын предели катары аныкталат, мында $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ \ldots \ < x_n = b,$

ξ_i -бул $[x_{i-1}, x_i]$ де каалагандай сан, $i = 1,2,3,...,n$. Лагранждын жалпыланган теоремасынын негизинде

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'_{\varphi}(c_i)[\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]$$

алабыз. Мында $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2,...,n$. Анда ξ_i ни c_i ге алмаштырып S_n ди төмөнкү түрдө жазып алабыз:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a)$$

Мындан пределге өтүп талап кылынган формуланы алабыз. Теорема далилденди.

Натыйжа: Мейли $f'_\varphi(x)$ функциясы $[a,b]$ интервалында үзгүлтүксүз болсун. Анда төмөнкү формуланы колдонууга болот.

$$\int_a^x f'_\varphi(s)d\varphi(s) = f(x) - f(a), \qquad \forall x \in [a,b]$$

Теорема 3. (Бөлүктөп интегралдоонун жалпыланган эрежеси).

Мейли $f'_\varphi(x)$ жана $g'_\varphi(x)$ функциялары $[a,b]$ интервалында үзгүлтүксүз функциялар болсун. Анда төмөнкү формуланы колдонууга болот.

$$\int_a^b f(x)g'_\varphi(x)d\varphi(x) = \left[f(x)g(x)\right]\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,f'_\varphi(x)d\varphi(x)$$

Далилдөө: Стильтестин эрежеси боюнча интегралдап

$$\left[f(x)g(x)\right]'_\varphi = f'_\varphi(x)g(x) + f(x)g'_\varphi(x)$$

талап кылынган формуласын алабыз.

1.9 R^n де дифференцирленүүчү функция.

Мейли, $f(x)$ функциясы $x = a \in R^n$ чекитинин кандайдыр бир аймагында аныкталган болсун. Мында $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $\varphi_i(x_i)$ -функциясы $x = a \in R^n$ чекитинин кандайдыр бир аймагында аныкталган өсүүчү, үзгүлтүксүз функция, $i = 1,2,...,n$.

Аныктама 1. $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясынын $x = a$ чекитиндеги $\Delta f(x)$ өсүндүсү деп, $\Delta f(x) = f(x) - f(a)$ айырмасы аталат. Δx айырмасы x аргументтин өсүндүсү деп аталат, ал эми $\Delta\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(a)$ айырмасы $\varphi(x) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2), ..., \varphi(x_n))$ вектор-функциянын өсүндүсү деп аталат. Мында

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Δx векторунун узундугу $|\Delta x|$ менен белгиленет жана төмөнкүгө барабар.

$$\rho(x, a) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2}$$

Аныктама 2. $\Delta\varphi(x)$ өсүндүсүнөн сызыктуу функция деп, $f(x)$ функциясынын $x = a$ чекитиндеги $\varphi(x)$ боюнча $d_\varphi f(x)$ дифференциалы аталат, эгер $\Delta f(x)$ өсүндүсү $\Delta x \to 0$ болсо, анда

$$\Delta f(x) = d_\varphi f(x) + o(|\Delta\varphi(x)|)$$

түрүндө жазууга болот.

Эгер $f(x)$ функциясынын $x = a$ чекитинде $\varphi(x)$ боюнча $d_\varphi f(x)$ дифференциалы жашаса, анда $f(x)$ функциясы $\varphi(x) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2), ..., \varphi(x_n))$ боюнча дифференцирленет дейбиз.

Лемма 1. $f(x)$ функциясы $x = a$ чекитинде $\varphi(x)$ боюнча дифференцирленсе, анда ошол чекитте үзгүлтүксүз деп аталат.

Далилдөө: $\Delta x \to 0$ умтулганда $\Delta f(x)$ да нөлгө умтуларын көрүүгө болот. $d_\varphi f(x)$ сызыктуу функция болгондуктан, аны төмөнкү түрдө жазып алууга болот.

$$d_\varphi f(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta\varphi_i(x_i),$$

мында, A_i -чыныгы сандар жана $\Delta\varphi_i(x_i) = \varphi_i(x_i) - \varphi_i(a_i)$

Эгер $f(x) = \varphi_i(x_i)$ болсо, анда $d_\varphi f(x) = d\varphi_i = \Delta\varphi_i(x_i)$ болот.

Теорема 1. Мейли, $f(x)$ функциясы $x = a$ чекитинде $\varphi(x)$ боюнча дифференцирленсин, анда $x_i = a_i$, $i = 1, ..., n$ чекитинде координаталык $\psi_1(x_i) = f(a_1, ..., x_i, ...a_n)$ функциясы $\varphi_i(x_i)$ боюнча дифференцирленсин. Ошондой эле

$$A_i = \frac{d\psi_i}{d\varphi_i}(a_i).$$

Далилдөө: Формулада $x = a$ чекитинде $\Delta f(x)$ өсүндүсү үчүн ал аркылуу дифференциал алып $x_r = a_r$ алабыз, мында $r \neq i$. Мындан

$$\Delta f(x) = A_i \Delta\varphi_i(x_i) + o\left(\left|\Delta\varphi_i(x_i)\right|\right)$$

алабыз. Анда $\psi_1(x_i)$ функциясынын аныктамасына таянсак,

$$f(x) - f(a) = \psi_1(x_i) - \psi_1(a_i) = A_s \Delta\psi_1(x_i) + o\left(\left|\Delta\psi_1(x_i)\right|\right)$$

келип чыгат, б.а.

$$A_i = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\psi_i(x_i) - \psi_i(a_i)}{\varphi_i(x_i) - {}_i(\varphi a_i)} = \frac{d\psi_i}{d\varphi_i}(a_i).$$

болот.

Аныктама 3. $\frac{d\psi_i}{d\varphi_i}(a_i)$ туундусу жашаса, анда $x = a$ чекитинде $f(x)$ функциясынын $\varphi_i(x_i)$ боюнча жекече туундусу деп аталат. Биринчи өзгөрмөсү боюнча төмөнкүдөй белгиленет.

$$\frac{d\psi_i}{\partial\varphi_i}(a_i) = \frac{\partial f}{\partial\varphi_i}(a) = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial\varphi_i}\right|_{x=a}.$$

Натыйжа: $f(x)$ функциясынын $x = a$ чекитиндеги $\varphi(x)$ боюнча дифференциалын бир мааниде төмөнкүдөй жазып алсак болот.

$$d_\varphi f(x)\Big|_{x=a} = \frac{\partial f(a)}{\partial\varphi_1}\Delta\varphi_1 + \ldots + \frac{\partial f(a)}{\partial\varphi_n}\Delta\varphi_n$$

Далилдөөсү ачык көрүнүп турат. Демек, функциянын $\varphi(x)$ боюнча чекитте дифференцирлөөнүн зарыл шартынан ошол чекитте $\varphi_i(x_i)$ боюнча бардык жекече туундулары жашайт десек болот.

Теорема 2. Мейли, $x=a$ чекитинин кээ бир аймагында анын бардык жекече туундулары $\frac{\partial f(x)}{\partial \varphi_i}$, $i=1,...,n$, жашасын, анда бул туундулар $x=a$ чекитинде үзгүлтүксүз болот. Анда $f(x)$ функциясы $\varphi(x)$ боюнча дифференцирленет.

Далилдөө: Жөнөкөйлүк үчүн $n=2$ деп алалы. $f(x,y)$ функциясынын (a,b) чекитиндеги $\Delta f(x,y)$ өсүндүсүн төмөнкү түрдө жазып алсак болот:

$$\Delta f(x,y)=f(a+\Delta x,b+\Delta y)-\big(f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b+\Delta y)\big)-\big(f(a,b+\Delta y)-f(a,b)\big)$$

Эки кашаанын айырмасынын ар биринен Лагранждын жалпыланган чектер формуласын колдонууга болот, каралган аймакта $f(x)$ функциясы (a,b) чекитинде $\varphi_1(x)$ жана $\varphi_2(y)$ боюнча үзгүлтүксүз жекече туундуга ээ болот, мында $\varphi_1(x)$ жана $\varphi_2(y)$ функциялары үзгүлтүксүз, өсүүчү функция. Мындан

$$\Delta f(x,y)=\frac{\partial f(a+\xi\,\Delta\varphi_1,b+\Delta y)}{\partial\varphi_1}\Delta\varphi_1+\frac{\partial f(a_1,b+\eta\,\Delta\varphi_2)}{\partial\varphi_2}\Delta\varphi_2$$

алабыз. Мында $\Delta\varphi_1=\varphi_1(a+\Delta x)-\varphi_1(a)$, $\Delta\varphi_2=\varphi_2(b+\Delta y)-\varphi_2(b)$, ξ, η - каалагандай туруктуу, $0<\xi$, $\eta<1$.

Андан кийин $\Delta x\to 0$ жана $\Delta y\to 0$ болгондо жекече туундунун үзгүлтүксүздүгүнөн

$$\frac{\partial f(a+\xi\ \Delta\varphi_1,b+\Delta\varphi_2)}{\partial\varphi_1}=\frac{\partial f(a,b)}{\partial\varphi_1}+o(1),$$

$$\frac{\partial f(a,\ b+\eta\,\Delta y)}{\partial\varphi_2}=\frac{\partial f(a,b)}{\partial\varphi_2}+o(1).$$

алабыз. Мындан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\Delta f(x,y)=\frac{\partial f(a,\ \ b)}{\partial\varphi_1}\Delta\varphi_1+\frac{\partial f(a,\ \ b)}{\partial\varphi_2}\Delta\varphi_2+o\big(|\Delta\varphi_1|+|\Delta\varphi_2|\big).$$

себеби,

$$|\Delta\varphi_1|\le|\Delta\varphi|,\quad |\Delta\varphi_2|\le|\Delta\varphi|,\qquad \Delta\varphi=(\Delta\varphi_1,\ \Delta\varphi_2),\quad |\Delta\varphi|=\sqrt{|\Delta\varphi_1|^2+|\Delta\varphi_2|^2},$$

Анда

$$\Delta f(x,y)=\frac{\partial f(a,b)}{\partial \varphi_1}\Delta\varphi_1+\frac{\partial f(a,\ \ b)}{\partial \varphi_2}\Delta\varphi_2+o\left(\left|\Delta\varphi\right|\right)=d_\varphi f(x,y)+o\left(\left|\Delta\varphi\right|\right),$$

алабыз, б.а. $f(x)$ функциясы $(x,y)=(a,b)$ чекитинде дифференцирленет. Теорема далилденди.

1.10 Татаал функциянын дифференциалы

Теорема. Мейли, $u(x)=\left(u_1(x),u_2(x),...,u_m(x)\right)$, $R^n\to R^m$ чагылдырууу менен берилген $x=a=(a_1,...,a_n)$ чекитинин аймагында аныкталган жана ошол чекитте $\varphi(x)$ боюнча дифференцирленген функция болсун. Мейли, каалагандай $\varepsilon>0$ үчүн $u(x)$ чагылдыруусу кээ бир $\delta-$ аймагында $o(a,\delta)$, ε -аймагындагы $b=u(a)$ чекитин камтыйт. Бардык $y=0(b,\varepsilon)$ чекити үчүн b чекитинде дифференцирленген сандык $f(y)$ функциясы аныкталган. Анда $x=a$ чекитинде $h(x)=f\left(u(x)\right)$ татаал функциясы $\varphi(x)$ боюнча дифференцирленет, себеби төмөнкү барабардыкка ээ.

$$\frac{\partial h(x)}{\partial \varphi_s}=\frac{\partial f}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial \varphi_s}+...+\frac{\partial f}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial u_m}{\partial \varphi_s},\qquad s=1,...,n\qquad .$$

Мында $\varphi_s(x)$ боюнча жекече туунду $x=a$ чекитинде, y_l, $l=1,...,m$ боюнча жекече туунду $y=b$ чекитинде каралган.

Далилдөө: $y=b$ чекитинде $f(y)$ функциясын эске алып, аргументтин каалагандай $\Delta y=y-b$ өсүндүсү үчүн функциянын Δf өсүндүсүн төмөнкү түрдө жазууга болот.

$$\Delta f=df+0\left(\left|\Delta y\right|\right) \tag{1}$$

Мында

$$df=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y_i.$$

Бирок $\Delta y = (\Delta y_1, ..., \Delta y_m)$, $b = (b_1, ..., b_m)$,

$$\Delta y_i = u_i(x) - u_i(a) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial u_i(a)}{\partial \varphi_s} \Delta \varphi_s + o(|\Delta \varphi|) \quad . \tag{2}$$

Анда (1) жана (2) формуласын эске алып,

$$\Delta h(x) = \Delta f = \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial \varphi_s} \right) \Delta \varphi_s + o(|\Delta \varphi|)$$

алабыз.

Мындан теореманы тастыктоо келип келип чыгат. Теорема далилденди.

Натыйжа (дифференцирлөө эрежеси): Анда төмөнкү формулалар туура.

1) $d_\varphi (Cu) = C d_\varphi u, \ \forall C \in R;$
2) $d_\varphi (u \pm v) = d_\varphi u \pm d_\varphi v;$
3) $d_\varphi (uv) = u d_\varphi v + v d_\varphi u;$
4) $d_\varphi \left| \frac{(u)}{(v)} \right| = \frac{v d_\varphi u - u d_\varphi v}{v^2}, \ v(a) \neq 0.$

Далилдөө : Формула (3) түү далилдөө менен гана чектелебиз.

Мейли, $z = z(u, v) = uv,$ анда

$$d_\varphi z = \frac{\partial z}{\partial u} d_\varphi u + \frac{\partial z}{\partial v} d_\varphi v = v d_\varphi u + u d_\varphi v$$

болот. (3)-касиет далилденди[4].

2-БӨЛҮМ

2. ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН КЛАССИФИКАЦИЯСЫ

Интегралдык тендемелер ар түрдүү өзгөчөлүктөрүнө жараша сызыктуу жана сызыктуу эмес, бир тектүү жана бир тектүү эмес, түзүлүшүнө карата түрлөргө ошондой эле Вольтерра жана Фредгольмдун интегралдык тендемелери болуп бөлүнөт.

Вольтерра жана Фредгольмдун, ошондой эле Вольтерра-Стильтьестин интегралдык теңдемелерине, алардын өзгөчөлүктөрүнө карата бөлүнүштөрүнө токтололу.

2.1 Вольтерранын интегралдык тендемелери

А) Төмөнкү теңдеме

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)\,dt, \qquad (2.1.1)$$

Вольтерранын 2-түрдөгү сызыктуу интегралдык тендемеси деп аталат. Мында $\varphi(x)$ - белгисиз функция, $K(x,t)$ -белгилүү функция, ядро деп аталат. $f(x)$ - белгилүү функция, оң тарабы деп аталат [1-4].

Б) Төмөнкү тендеме

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t,\varphi(t))dt\,, \qquad x \in [a,b]\,, \qquad (2.1.2)$$

Вольтерранын 2-түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык тендемеси деп аталат. Мында $K(x,t,\varphi)$, $f(x)$-белгилүү функциялар, $\varphi(x)$-белгисиз функция.

В) Төмөнкү теңдеме

$$\int_a^x K(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x), \qquad x \in [a,b]\,, \qquad (2.1.3)$$

Вольтерранын 1-түрдөгү сызыктуу интегралдык тендемеси деп аталат. Мында $K(x,t)$ -белгилүү функциясы ядро деп аталат. $f(x)$ -белгилүү функциясы оң тарабы деп аталат. $\varphi(x)$-белгисиз функция.

Г) Төмөнкү тендеме

$$\int_a^x K\left(x,t,\varphi(t)\right)dt = f\left(x\right), \qquad x \in [a,b], \qquad (2.1.4)$$

Вольтерранын 1-түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык тендемеси деп аталат. Мында $K\left(x,t,\varphi\right)$, $f\left(x\right)$-белгилүү функциялар, $\varphi\left(x\right)$-белгисиз функция.

Д) Төмөнкү тендеме

$$m\left(x\right)\varphi\left(x\right)+\int_a^x K\left(x,t\right)\varphi\left(t\right)dt = f\left(x\right), \qquad x \in [a,\mathrm{b}], \qquad (2.1.5)$$

Вольтерранын 3-түрдөгү сызыктуу интегралдык тендемеси деп аталат. Мында $K\left(x,t\right)$-белгилүү функциясы ядро деп аталат. Ал эми $m(x)$-белгилүү функциясы $[a,b]$ сегментинин жок дегенде бир чекитинде нөлгө барабар. $f\left(x\right)$-белгилүү функциясы оң тарабы деп аталат. $\varphi\left(x\right)$-белгисиз функция.

Е) Төмөнкү теңдеме

$$m\left(x\right)\varphi\left(x\right)+\int_a^x K\left(x,t,\varphi(t)\right)dt = f\left(x\right), \qquad x \in [a,b], \qquad (2.1.6)$$

Вольтерранын 3-түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемеси деп аталат. Мында $m\left(x\right)$, $K\left(x,t,\varphi\right)$, $f\left(x\right)$-белгилүү функциялар, $m\left(x\right)$ функциясы жок дегенде $[a,b]$ сегментинин бир чекитинде нөлгө барабар.

2.2 Фредгольмдун интегралдык тендемелери

А) Төмөнкү теңдеме

$$\varphi\left(x\right)=\int_a^x K\left(x,t\right)\varphi\left(t\right)dt + f\left(x\right), \qquad x \in [a,b], \qquad (2.2.1)$$

Фредгольмдун 2-түрдөгү сызыктуу интегралдык тендемеси деп аталат. Мында $K\left(x,t\right)$-белгилүү функциясы ядро деп аталат. $f\left(x\right)$-белгилүү функциясы оң тарабы деп аталат.

Б) Төмөнкү теңдеме

$$\varphi\left(x\right)=\int_a^b K\left(x,t,\varphi(t)\right)dt + f\left(x\right), \qquad x \in [a,\mathrm{b}], \qquad (2.2.2)$$

Фредгольмдун 2-түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемеси деп аталат. Мында $K(x,t,\varphi)$, $f(x)$-белгилүү функциялар, $\varphi(x)$-белгисиз функция.

В) Төмөнкү теңдеме

$$\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \qquad x \in [a,b], \tag{2.2.3}$$

Фредгольмдун 1-түрдөгү сызыктуу интегралдык тендемеси деп аталат. Мында $K(x,t)$-белгилүү функциясы ядро деп аталат. $f(x)$-белгилүү функциясы оң тарабы деп аталат. $\varphi(x)$-белгисиз функция.

Г) Төмөнкү теңдеме

$$\int_a^b K(x,t,\varphi(t))dt = f(x), \qquad x \in [a,b], \tag{2.2.4}$$

Фредгольмдун 1-түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык тендемеси деп аталат. Мында $K(x,t,\varphi)$, $f(x)$-белгилүү функциялар. $\varphi(x)$-белгисиз функция.

Д) Төмөнкү теңдеме

$$m(x)\varphi(x)+\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \qquad x \in [a,b], \tag{2.2.5}$$

Фредгольмдун 3-түрдөгү сызыктуу интегралдык тендемеси деп аталат. Мында $K(x,t)$-белгилүү функция ядро деп аталат. Ал эми $m(x)$-белгилүү функциясы $[a,b]$ сегментинин жок дегенде бир чекитинде нөлгө барабар. $f(x)$-белгилүү функциясы оң тарабы деп аталат. $\varphi(x)$-белгисиз функция.

Е) Төмөнкү теңдеме

$$m(x)\varphi(x)+\int_a^b K(x,t,\varphi(t))dt = f(x), \qquad x \in [a,b], \tag{2.2.6}$$

Фредгольмдун 3-түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемеси деп аталат. Мында $m(x)$, $K(x,t,\varphi)$, $f(x)$-белгилүү функциялар. $m(x)$-функциясы жок дегенде $[a,b]$ сегментинин бир чекитинде нөлгө барабар[3].

2.3 Риман-Стильтьес интегралы

Риман-Стильтьес интегралы- бул 1894-жылы Стильтьес тарабынан сунушталган жалпыланган аныкталган интеграл.

Аныктама 2.3.1: y=f(x) , $x \in [a,b]$ функциясы $[a,b]$ сегментинде Стильтьес боюнча интегралдануучу функция деп аталат, эгерде $\forall n \in \square$, $h = \frac{b-a}{n}$ кадамын аныктап, $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ чекиттеринин

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta g_i, \qquad \xi_i \in [x_{i-1}; x_i], \tag{2.3.1}$$

мында $\Delta g_i = g(x_i) - g(x_{i-1})$

суммасын аныктасак, анда $\lim_{n\to\infty} S_n = I \in \square$ аныкталса, анда I саны $f(x)$ функциясынын Стильтьес боюнча интегралы деп аталат жана ал

$$I = \int_a^b f(x)\,dg(x) = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta g_i \tag{2.3.2}$$

түрүндө жазылат. Мында: $g(x)$ функциясы $[a,b]$ сегментинде өсүүчү үзгүлтүксүз функция, $\lambda(P)$-параметр.

Көп учурда, $g(x) = x$ болгондо стандарттуу Риман интегралына келебиз.

Риман-Стильтьес интегралынын Риман интегралына келген учуру:

Эгер g функциясы жылмакай , f функциясы $[a,b]$ интервалында Риман боюнча интегралданса, анда

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,g'(x)\,d(x) \qquad (2.3.3)$$

болот. Бул учурда Риман-Стильтьестин интегралын эсептөө берилген аралыкта Риман интегралын эсептөөгө келет. Негизи g функциясынын жылмакайлыгын жана орточо жөнүндө теореманы колдонуп, (2.3.1) барабардыгынын оң жагын төмөнкүдөй жазып алсак болот:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta g_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\big(g(x_i) - g(x_{i-1})\big) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,g'\big(\overline{\xi}_i\big)\big(x_i - x_{i-1}\big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,g'(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Big(g'\big(\overline{\xi}_i\big) - g'(\xi_i)\Big)\Delta x_i\,.$$

g' функциясынын $[a,b]$ интервалында бир калыпта үзгүлтүксүздүгүнөн жана f функциясынын чектелгендигинен акыркы сумма $\lambda(P) \to 0$ нөлгө умтулат. Андан мурдагы сумма (2.3.1) дин оң жагындагы интеграл үчүн кадимки интегралдык суммага ээ. Ошондуктан, $\lambda(P) \to 0$ умтулганда берилген сумма интегралдын маанисине умтулат жана (2.3.3) барабардыгын далилдөөнү жыйынтыктайт.

Хевисайдын функциясы жана Риман-Стильтьестин интегралын эсептөөгө мисал.

Хевисайдын функциясы: $H:\ \square \to \square$, $x < 0$ үчүн $H(x) = 0$ жана $0 \le x$ $H(x) = 1$ берилсин.

$\int_a^b f(x)\,dH(x)$ интегралын эсептейли. (2.3.2) анактамасынан $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta H_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\big(H(x_i) - H(x_i)\big)$ суммасын түзөбүз. Хевисайдын

функциясынын бул сумма нөлгө барабар болот, эгер $[a,b]$ интервалында 0 чекитин камтыбаса жана $f(\xi_i)$ ге барабар болот, эгер 0 чекити $[x_{i-1},x_i]$ интервалынын кээ бир бөлүгүнө туш келсе. Биринчи учурда интеграл сөзсүз нөлгө барабар болот.

Экинчи учурда $\lambda(P)\to 0$ умтулганда $\xi\in_i[x_{i-1},x_i]$ чекити нөлгө умтулат, эгер f нөл чекитинде үзгүлтүксүз болсо, анда каралып жаткан сумманын пределди $f(0)$ болот.

Эгер f нөл чекитинде ажыраса, анда ξ_i маанисин кичине өзгөртүү менен $f(\xi_i)$ маанисин өзгөртүүгө болот[27].

2.4. Вольтерра-Стильтьестин интегралдык тендемелери

А) **Аныктама 2.4.1:** $\varphi(t)$ функциясы бардык G да өсүүчү-үзгүлтүксүз функция болсун, мында $G=[t_0,T]$ $(t_0<T<\infty)$ же $G=[t_0,T)$ $(T\le\infty)$.

Төмөнкү интегралдык тендеме

$$u(t)=\int_{t_0}^{t}K(t,s)u(s)d\varphi(s)+f(t), \qquad (2.4.1)$$

Вольтерра-Стильтестин экинчи түрдөгү сызыктуу интегралдык тендемеси деп аталат. Мында $K(t,s)$ функциясы $G=\{(t,s):a\le s\le t\le b\}$ областында белгилүү, үзгүлтүксүз функция. $f(t)$ функциясы $[a,b]$ интервалында үзгүлтүкүз, белгилүү функция, $\varphi(t)$ функциясы $[a,b]$ интервалында өсүүчү-үзгүлтүксүз функция.

Мейли, (1) интегралдык тендемедеги $K(t,s)$ ядросу $G_1=\{(t,s)\,|\,t_0\le s\le t\le T\}$ областында үзгүлтүксүз функция жана

$$M=\sup_{(t,s)\in G_1}\left|K(t,s)\right|$$

болсун. Анда төмөнкү интегралдык тендеменин $R(t,s)$ чыгарылышы

$$R(t,s)=\int_s^t K(t,\tau)R(\tau,s)d\varphi(\tau)+K(t,s),\qquad (t,s)\in G_1 \qquad (2.4.2)$$

$K(t,s)$ ядросунун резольвентасы деп аталат.

Б) **Аныктама 2.4.2:** Төмөнкү интегралдык теңдеме

$$u(t)=\int_{t_0}^t K\left(t,s,u(s)\right)d\varphi(s)+f(t) \qquad (2.4.3)$$

Вольтерра-Стильтьестин экинчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемеси деп аталат. Мында $K(t,s)$ функциясы $G=\{(t,s):a\le s\le t\le b\}$ областында белгилүү, үзгүлтүксүз функция. $f(t)$ функциясы $[a,b]$ интервалында үзгүлтүкүз, белгилүү функция, $\varphi(t)$ функциясы $[a,b]$ интервалында өсүүчү-үзгүлтүксүз функция.

В) Вольтерра- Стильтьестин биринчи түрдөгү интегралдык теңдемеси

Аныктама 2.4.3: $\varphi(t)$ функциясы бардык G – да өсүүчү үзгүлтүксүз функция болсун, мында $G=[t_0,T]$ $(t_0<T<\infty)$ же $G=[t_0,T)$ $(T\le\infty)$.

Төмөндө берилген интегралдык тендеме

$$\int_{t_0}^t K(t,s)u(s)d\varphi(s)=f(t),\quad t\in[t_0,T] \qquad (2.4.4)$$

Вольтерра-Стилтьестин биринчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемеси деп аталат. Мында $K(t,s)$ функциясы $G_1=\{(t,s):t_0\le s\le t\le T\}$ областында үзгүлтүксүз белгилүү функция. $f(t)$ функциясы $[t_0,T]$ интервалында үзгүлтүкүз белгилүү функция, Ал эми $u(t)$, $[t_0,T]$ интервалында изделүүчү функция.

Аныктама 2.4.4: $\varphi(t)$ функциясы бардык $G-$ да өсүүчү-үзгүлтүксүз функция болсун, мында $G=[t_0,T]$ $(t_0<T<\infty)$ же $G=[t_0,T)$ $(T\le\infty)$.

Төмөндө берилген интегралдык тендеме

$$\int_{t_0}^t K(t,s,u(s))d\varphi(s)=f(t),\quad t\in[t_0,T] \qquad (2.4.5)$$

Вольтерра-Стильтьестин биринчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемеси деп аталат. Мында $K(t,s)$ функциясы $G_1=\{(t,s): t_0 \le s \le t \le T\}$ областында үзгүлтүксүз белгилүү функция. $f(t)$ функциясы $[t_0,T]$ интервалында үзгүлтүкүз белгилүү функция. Ал эми $u(t)$, $[t_0,T]$ интервалында изделүүчү функция.

(2.4.4) интегралдык теңдемесин карайбыз. (2.4.4) теңдемеси үзгүлтүксүз $u(t)$ чыгарылышына ээ болуш үчүн, $f(t_0)=0$ шартынын аткарылышы зарыл. Эгерде $K(t,s)$ ядросу G_1 областында $\varphi(t)$ функциясы боюнча үзгүлтүксүз $\dfrac{\partial K(t,s)}{\partial \varphi(t)}$ туундусу болсо, анда Теорема 1.8.1 –дин негизинде (2.4.4) теңдемесинин сол жагы да $\varphi(t)$ функциясы боюнча үзгүлтүксүз туундуга ээ болот. Мындан $f(t)$ функциясы да $\varphi(t)$ функциясы боюнча үзгүлтүксүз туундуга $f'_{\varphi}(t)$ ээ болушу керек.

(2.4.4) теңдемесинин эки тарабын $\varphi(t)$ функциясы боюнча дифференцирлеп жана Теорема 1.8.1 – ди эске алуу менен,

$$K(t,t)u(t)+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial K(t,s)}{\partial \varphi(t)}u(t)d\varphi(s)=f'_{\varphi}(t) \qquad (2.4.6)$$

алабыз. (2.4.4) теңдемесинин чыгарылышы $u(t)$ (2.4.6) теңдемесин канааттандырат жана тескерисинче да орун алат.

$K(t,t)$ - $[t_0,T]$ кесиндисинин бир да чекитинде нөлгө барабар болбосун дейли. (2.4.6) – дин эки тарабын $K(t,t)$ - га бөлсөк, анда

$$u(t)+\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\partial K(t,s)}{\partial \varphi(t)}\Big/K(t,t)\right]u(s)d\varphi(s)=\frac{f'_{\varphi}(t)}{K(t,t)}$$

алабыз. Бул алынган акыркы теңдеме Вольтерра – Стилтьестин экинчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемеси жана бул теңдемеге жогоруда колдонулган теориялар колдонулат. Ошол сыяктуу далилденет.

Теорема 2.4.1: $\varphi(t)$ функциясы $[t_0,T]$ интервалында өсүүчү үзгүлтүксүз функция болсун, $K(t,s)$ ядросу G_1 областында $\varphi(t)$ функциясы боюнча үзгүлтүксүз $\dfrac{\partial K(t,s)}{\partial \varphi(t)}$ туундуга ээ болсун жана бардык $t\in[t_0,T]$ үчүн

$K(t,t) \neq 0$ болсун. Анда (2.4.4) теңдемеси $[t_0, T]$ интервалында жалгыз чыгарылышка ээ болуу үчүн, $f(t)$ функциясы $[t_0, T]$ интервалында $\varphi(t)$ функциясы боюнча үзгүлтүксүз туундуга $f'_{\varphi}(t)$ ээ болуусу жана $f(t_0) = 0$ зарыл жана жетиштүү.

Эгерде $K(t,t)$ нөлгө барабар болсо, анда (2.4.6) теңдемеси кайра эле Вольтерра – Стилтьестин биринчи түрдөгү интегралдык теңдемеси болот жана бул теңдемени биринчи сыяктуу карайбыз эгерде, $K(t,s)$ ядросу G_1 областында $\varphi(t)$ функциясы боюнча үзгүлтүксүз $\dfrac{\partial K(t,s)}{\partial \varphi(t)}$ туундуга ээ болсо. Ушул эле учурда (2.4.6) теңдемеси чексиз чыгарылышы болуш үчүн, $f'_{\varphi}(t_0) = 0$ жана $f''_{\varphi}(t)$ үзгүлтүксүз болуусу зарыл.

(2.4.6) теңдемесинин эки тарабын $\varphi(t)$ функциясы боюнча дифференцирлейбиз жана Теорема 1.8.1 ди эске алып,

$$\left[\left.\frac{\partial K(t,s)}{\partial \varphi(t)}\right|_{s=t}\right] u(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial^2 K(t,s)}{\partial \varphi^2(t)} u(s) d\varphi(s) = f''_{\varphi}(t) \qquad (2.4.7)$$

алабыз.

Эгерде $\left[\left.\dfrac{\partial K(t,s)}{\partial \varphi(t)}\right|_{s=t}\right]$, $[t_0, T]$ аралыгында нөлдөн айрымалуу болсо, анда (2.4.7) теңдемеси сызыктуу Вольтерра – Стильтьестин экинчи түрдөгү интегралдык теңдемеси болот.

Бул процесс ушул сыяктуу улана берет жана $s = t$ болгондо $\dfrac{\partial^{n-1} K(t,s)}{\partial \varphi^{n-1}(t)}$ туундусу нөлгө барабар болбогондо токтойт. Ушул эле учурда (2.4.4) теңдемесинин чыгарылышы $u(t) \in C[t_0, T]$ жашашы үчүн $f(t)$ функциясынын $[t_0, T]$ интервалында үзгүлтүксүз туундуга $f^{(n-1)}_{\varphi}(t)$ ээ болушу жана $f(t_0) = f'_{\varphi}(t_0) = \ldots = f^{n-1}_{\varphi}(t_0) = 0$ болушу шарт.

Эгерде $\dfrac{\partial^n K(t,s)}{\partial \varphi^n(t)}$ туундусу үзгүлтүксүз болсо, анда $f^{(n)}_{\varphi}(t)$ да үзгүлтүксүз болушу керек жана биз төмөнкү теңдемеге келебиз.

$$\left[\frac{\partial^{n-1}K(t,s)}{\partial\varphi^{n-1}(t)}\bigg|_{s=t}\right]u(t)+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial^{n}K(t,s)}{\partial\varphi^{n}(t)}u(s)d\varphi(s)=f_{\varphi}^{(n)}(t) \qquad (2.4.8)$$

Көрүнүп тургандай, эгерде $\left[\frac{\partial^{n-1}K(t,s)}{\partial\varphi^{n-1}(t)}\bigg|_{s=t}\right]$, $[t_0,T]$ аралыгында нөлгө барабар болбосо, анда (2.4.8) теңдемеси сызыктуу Вольтерра – Стильтьестин экинчи түрдөгү интегралдык теңдемеси болот. Бул учурда (2.4.8) теңдемеси үгүлтүксүз жалгыз чыгарылышка ээ болот жана бул чыгарылыш (2.4.4) теңдемесин канааттандырат. Теорема 2.4.1 далилденди.

Теорема 2.4.2: $\varphi(t)$ функциясы $[t_0,T]$ интервалында өсүүчү үзгүлтүксүз функция болсун, $K(t,s)$ ядросу G_1 областында $\varphi(t)$ функциясы боюнча үзгүлтүксүз $\frac{\partial^{n}K(t,s)}{\partial\varphi^{n}(t)}$ туундуга ээ болсун, $n\geq 2,\quad n\in\square$. Анда бардык $t\in[t_0,T]$ үчүн

$$K(t,t)\equiv\left[\frac{\partial K(t,s)}{\partial\varphi(t)}\bigg|_{s=t}\right]\equiv\ldots\equiv\left[\frac{\partial^{n-2}K(t,s)}{\partial\varphi^{n-2}(t)}\bigg|_{s=t}\right]\equiv 0,\left[\frac{\partial^{n-1}K(t,s)}{\partial\varphi^{n-1}(t)}\bigg|_{s=t}\right]\neq 0$$

болот. Анда (2.4.4) теңдемеси $[t_0,T]$ интервалында үзгүлтүксүз жалгыз чыгарылышка ээ болушу үчүн $f(t)$ функциясынын $[t_0,T]$ интервалында үзгүлтүксүз туундуга $f_{\varphi}^{(n-1)}(t)$ ээ болушу жана $f(t_0)=f'_{\varphi}(t_0)=\ldots=f_{\varphi}^{n-1}(t_0)=0$ болушу зарыл жана жетиштүү шарт.

Г) Төмөнкү

$$m(t)u(t)+\int_{a}^{t}K(t,s)u(s)d\varphi(s)=f(t),\qquad t\in[a,b], \qquad (2.4.9)$$

теңдемеси Вольтерра-Стильтьестин үчүнчү түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемеси деп аталат. Мында $m(t),\ \varphi(t),\ K(t,s)$ жана $f(t)$ -белгилүү функциялар, $\varphi(t)$ -функциясы $[a,b]$ да үзгүлтүксүз өсүүчү функция, $m(t)\in C[a,b],\quad 0\leq m(t)$ бардык $t\in[a,b]$ үчүн жана $m(t)$ функциясы $[a,b]$ сегментинин жок дегенде бир чекитинде нөлгө барабар, $u(t)$ - белгисиз функция.

Д) Вольтерра-Стильтьестин үчүнчү түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемеси.

$$m(t)u(t)+\int_{t_0}^{t} K(t,s,u(s))d\phi(s)=f(t), t\in[t_0,T], \quad T>t_0, \tag{2.4.10}$$

Вольтерра-Стильтьестин үчүнчү түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемеси деп аталат.

Мында $m(t)$, $f(t)\in C[t_0,T]$, $K(t,s,u)\in C(G\times R)$, $G=\{(t,s)\mid t_0\le s\le t\le T\}$

Мейли, $K(t,s,u(s))=K_0(t,s)u(s)+K_1(t,s,u(s))$, $(t,s,u)\in G\times R$.

3-БӨЛҮМ

3.1 Вольтерра-Стильтьестин үчүнчү түрдөгү сызыктуу интегралдык тендемелеринин бир классынын чыгарылышы

Төмөнкү

$$m(t)u(t)+\int_a^t K(t,s)u(s)d\varphi(s)=f(t), \qquad t\in[a,b], \qquad (3.1.1)$$

теңдемесин карайлы. Мында $m(t)$, $\varphi(t)$, $K(t,s)$ жана $f(t)$ -белгилүү функциялар, $\varphi(t)$ -функциясы $[a,b]$ да үзгүлтүксүз өсүүчү функция, $m(t)\in C[a,b]$, $0\le m(t)$ бардык $t\in[a,b]$ үчүн жана $m(t)$ функциясы $[a,b]$ сегментинин жок дегенде бир чекитинде нөлгө барабар, $u(t)$ - белгисиз функция.

$$K(t,s)=P(t)H(t,s)P(s),(t,s)\in G=\{(t,s):a\le t\le s\le b\}, \qquad (3.1.2)$$

түрүндө болсун. Мында $P(t)$ жана $H(t,s)$ тиешелүү түрдө $[a,b]$ жана G га тиешелүү белгилүү үзгүлтүксүз функциялар.

Бул магистрдик иште өсүүчү функция боюнча туунду түшүнүгүнүн негизинде терс эмес квадраттар формасы методун колдонуп, Вольтерра-Стильтьестин үчүнчү түрдөгү интегралдык тендемелеринин бир классынын чыгарылыштарынын жалгыздыгынын жетиштүү шарттары коюлган.

Төмөнкү шарттар аткарылсын дейли:

а) $P(t)\in C[a,b]$, $P(t)\ne 0$ бардык $t\in[a,b]$, үчүн, $H'_{\varphi(t)}(t,s)$ жана $H''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,s)$ функциялары $G=\{(t,s):a\le t\le s\le b\}$ областында үзгүлтүксүз функциялар $H'_{\varphi(t)}(t,a)$ жана $H'_{\varphi(t)}(b,t)$ функциялары $[a,b]$ да үзгүлтүксүз функциялар. Мында

$$H'_{\varphi(t)}(t,s)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{H(t+\Delta,s)-H(t,s)}{\varphi(t+\Delta)-\varphi(t)}, H''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,s)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{H'_{\varphi(t)}(t,s+\Delta)-H'_{\varphi(t)}(t,s)}{\varphi(s+\Delta)-\varphi(s)};$$

б)

$$m(t)\ge 0, H(t,a)\ge 0, H'_{\varphi(t)}(t,a)\le 0, \forall t\in[a,b], H'_{\varphi(s)}(t,s)\ge 0, H''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,s)\le 0, \forall(t,s)\in G;$$

в) төмөнкү шарттардын жок дегенде бири аткарылсын:

1) $m(t) > 0$ бардык $t \in [a,b]$ үчүн,

2) $H(t,a) > 0$ бардык $t \in [a,b]$ үчүн,

3) $H'_{\varphi(t)}(t,a) < 0$ бардык $t \in [a,b]$ үчүн.

г) төмөнкү шарттардын жок дегенде бири аткарылсын:

1) $m(t) > 0$ бардык $t \in [a,b]$ үчүн,

2) $H'_{\varphi(t)}(b,t) > 0$ бардык $t \in [a,b]$ үчүн,

3) $H'_{\varphi(t)}(t,a) < 0$ бардык $t \in [a,b]$ үчүн,

4) $H''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,s) < 0$ бардык $(t,s) \in G$.

Эгерде (2) ни эске алсак, анда (1) теңдеме төмөнкү

$$m(t)u(t) + \int_a^t P(t)H(t,s)P(s)d\varphi(s) = f(t) \tag{3.1.3}$$

түрүнө келет.

(3.1.3) теңдемесин $u(t)$ га көбөйтүп жана $[a,t], t \in [a,b]$ областында Стильтьес боюнча интегралдасак, анда төмөнкү теңдемеге ээ болобуз:

$$\int_a^t m(s)u^2(s)d\varphi(s) + \int_a^t \int_a^s P(s)H(s,\tau)P(\tau)u(\tau)u(s)d\varphi(\tau)d\varphi(s) = \int_a^t f(s)u(s)d\varphi(s).$$

Мындан, Дирихленин жалпыланган формуласын колдонуп,

$$\int_a^t m(s)u^2(s)d\varphi(s) + \int_a^t \left[\int_\tau^t H(s,\tau)P(s)u(s)d\varphi(s)\right]P(\tau)u(\tau)d\varphi(\tau) = \int_a^t f(s)u(s)d\varphi(s) \tag{3.1.4}$$

теңдемесин алабыз.

$$Z(t,s) = \int_s^t P(\tau)u(\tau)d\varphi(\tau) \tag{3.1.5}$$

белгилөөсүн киргизебиз. Анда

$$P(s)u(s)d\varphi(s) = -d_{\varphi(s)}Z(t,s), \tag{3.1.6}$$

$$P(t)u(t)d\varphi(t)=d_{\varphi(t)}Z(t,s), \tag{3.1.7}$$

$$Z(t,s)P(t)u(t)d\varphi(t)=\frac{1}{2}d_{\varphi(t)}Z^2(t,s), \tag{3.1.8}$$

$$Z(t,s)P(s)u(s)d\varphi(s)=-\frac{1}{2}d_{\varphi(s)}Z^2(t,s). \tag{3.1.9}$$

(3.1.5), (3.1.6), (3.1.7), (3.1.8), (3.1.9) жана Дирихленин жалпыланган формуласын , ошондой эле бөлүктөп интегралдоону колдонуп, (3.1.4) түн кош интегралы үчүн

$$\int_a^t\int_\tau^t H(s,\tau)P(s)u(s)d\varphi(s)P(\tau)u(\tau)d\varphi(\tau)=\int_a^t\left[\int_\tau^t H(s,\tau)d_{\varphi(s)}Z(s,\tau)\right]P(\tau)u(\tau)d\varphi(\tau)=$$

$$=\int_a^t\left[H(s,\tau)Z(s,\tau)|_{s=\tau}^{s=t}-\int_\tau^t H'_{\varphi(s)}(s,\tau)Z(s,\tau)d\varphi(s)\right]u(\tau)P(\tau)d\varphi(\tau)=$$

$$=\int_a^t H(t,\tau)Z(t,\tau)P(\tau)u(\tau)d\varphi(\tau)-\int_a^t\int_a^s H'_{\varphi(s)}(s,\tau)Z(s,\tau)P(\tau)u(\tau)d\varphi(\tau)d\varphi(s)=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_a^t H(t,\tau)d_{d\varphi(\tau)}Z^2(t,\tau)+\frac{1}{2}\int_a^t\int_a^s H'_{\varphi(s)}(s,\tau)d_{\varphi(\tau)}Z^2(s,\tau)d\varphi(s)=$$

$$=\frac{1}{2}H(t,a)Z^2(t,a)+\frac{1}{2}\int_a^t H'_{\varphi(\tau)}(t,\tau)Z^2(t,\tau)d\varphi(\tau)-\frac{1}{2}\int_a^t H'_{\varphi(s)}(s,a)Z^2(s,a)d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^t\int_a^s H''_{\varphi(s)\varphi(\tau)}(s,\tau)Z^2(s,\tau)d\varphi(\tau)d\varphi(s)$$

алабыз.

Мындан (3.1.5) ти колдонуп,

$$\int_a^t\int_\tau^t H(s,\tau)P(s)u(s)d\varphi(s)P(\tau)u(\tau)d\varphi(\tau)=$$

$$=\frac{1}{2}H(t,a)\left[\int_a^t P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2+\frac{1}{2}\int_a^t H'_{\varphi(\tau)}(t,\tau)\left[\int_\tau^t P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2d\varphi(\tau)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^t H'_{\varphi(s)}(s,a)\left[\int_a^s P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^t\int_a^s H''_{\varphi(s)\varphi(\tau)}(s,\tau)\left[\int_\tau^s P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2d\varphi(\tau)d\varphi(s) \tag{3.1.10}$$

алабыз.

(3.1.10) менен (3.1.4) эске алып,

$$\int_a^t m(s)u^2(s)d\varphi(s)+\frac{1}{2}H(t,a)\left[\int_a^t P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^t H'_{\varphi(\tau)}(t,\tau)\left[\int_\tau^t P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2 d\varphi(\tau)-\frac{1}{2}\int_a^t H'_{\varphi(s)}(s,a)\left[\int_a^s P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2 d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^t\int_a^s H''_{\varphi(s)\varphi(\tau)}(s,\tau)\left[\int_\tau^s P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2 d\varphi(\tau)d\varphi(s)=\int_a^t f(s)u(s)d\varphi(s)$$

(3.1.11) алабыз.

Ошондой эле, эгер бардык $t\in[a,b]$ үчүн $f(t)=0$ болсо, анда а), б) жана в) шарттардан (3.1.11) алабыз:

$$\int_a^t P(s)u(s)d\varphi(s)\equiv 0 \quad или \int_s^t P(\xi)u(\xi)d\varphi(\xi)\equiv 0, t,s\in[a,b], s<t.$$

Мында: бардык $t\in[a,b]$ үчүн $u(t)=0$. Төмөнкү теорема1 далилденген:

Теорема 1. Эгерде а), б) жана в) шарттары аткарылса, анда (1) теңдемеси $C[a,b]$ мейкиндигинде бирден көп эмес чыгарылышка ээ болот.

(3.1.11) ден $t=b$ деп, төмөнкүнү алабыз:

$$\int_a^b m(s)u^2(s)d\varphi(s)+\frac{1}{2}H(b,a)\left[\int_a^b P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b H'_{\varphi(\tau)}(b,\tau)\left[\int_\tau^b P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2 d\varphi(\tau)-\frac{1}{2}\int_a^b H'_{\varphi(s)}(s,a)\left[\int_a^s P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2 d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^s H''_{\varphi(s)\varphi(\tau)}(s,\tau)\left[\int_\tau^s P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2 d\varphi(\tau)d\varphi(s)=\int_a^b f(s)u(s)d\varphi(s) \qquad (3.1.12)$$

(3.1.12) ден теорема 2 нин да аткарылышы келип чыгат.

Теорема 2. Эгерде а), б) жана г) шарттары аткарылса, анда (1) теңдемеси $C[a,b]$ мейкиндигинде бирден көп эмес чыгарылышка ээ болот.

3.2. Теореманын шарттарын канааттандырган мисалдар

Вольтерра-Стильтьестин үчүнчү түрдөгү сызыктуу интегралдык тендемелеринин бир классынын чыгарылыштарынын жылгыздыгы үчүн жогоруда көрсөтүлгөн теоремалардын шарттарын канааттандырган мисалдарга токтололу:

Мисал 1. (3.1.1) теңдемесин карайлы. Мында

$a=0,\quad b=1,\quad \varphi(t)=\sqrt{t},\quad P(t)=\sqrt[4]{t},\quad m(t)=t\ ,\quad H(t,s)=\dfrac{s}{1+\sqrt{t}}$ болсун. Бул учурда Теорема 1 дин шарттары аткарылат. Демек,

$$H(t,0)=0,\quad H'_{\varphi(t)}(t,0)=0,\quad H'_{\varphi(s)}(t,s)=\frac{2\sqrt{s}}{1+\sqrt{t}},\quad H''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,s)=-\frac{2\sqrt{s}}{\left(1+\sqrt{t}\right)^2},\quad (t,s)\in G.$$

болот.

Мисал 2. (3.1.1) теңдемесин карайлы. Мында

$$a=0,\quad b=1,\quad \varphi(t)=\sqrt[3]{t},\quad P(t)=\sqrt[8]{t},\quad H(t,s)=\frac{\sqrt[3]{s^2}+1}{2+\sqrt[3]{t}},$$

$$m(t)=\begin{cases} 0, & при\quad t\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right] \\ t-\dfrac{1}{2}, & при\quad t\in\left[\dfrac{1}{2},1\right] \end{cases},$$

болсун. Бул учурда Теорема 1 дин бардык шарттары аткарылат. Демек,

$$H(t,0)=\frac{1}{2+\sqrt[3]{t}},\quad H'_{\varphi(t)}(t,0)=0,\quad H'_{\varphi(s)}(t,s)=\frac{2\sqrt[3]{s}}{1+\sqrt[3]{t}},\quad H''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,s)=-\frac{2\sqrt[3]{s}}{\left(1+\sqrt[3]{t}\right)^2},\quad (t,s)\in G$$

болот.

Мисал 3. (3.1.1) теңдемесинде

$$a=0,\quad b=\frac{\pi}{2},\quad \varphi(t)=\sin\sqrt{t},\quad P(t)=\sin 2\sqrt{t},\quad H(t,s)=\frac{\sin\sqrt{s}}{3+\sin\sqrt{t}},$$

$$m(t)=\begin{cases} 0, & при \quad t\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right] \\ t-\dfrac{\pi}{4}, & при \quad t\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases},$$

болсун. Бул учур үчүн тиешелүү түрдө

$$H(t,0)=0,\quad H'_{\varphi(t)}(t,0)=0,\quad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$H'_{\varphi(s)}(t,s)=\frac{1}{3+\sin\sqrt{t}},\quad H''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,s)=-\frac{1}{\left(3+\sin\sqrt{t}\right)^3},\quad (t,s)\in G$$

болот жана Теорема 2 нин бардык шарттары аткарылат.

Мисал 4. (3.1.1) теңдемесинде

$$a=0,\quad b=1,\quad \varphi(t)=\ln(1+\sqrt{t}),\quad P(t)=\sqrt{t},\quad m(t)=t^2$$

$H(t,s)=\ln^2\left(1+\sqrt{s}\right)\left[1-\ln\left(1+\sqrt{t}\right)\right]^2$ болсун. Демек,

$$H(t,0)=0,\quad H'_{\varphi(t)}(t,0)=0,\quad H'_{\varphi(s)}(t,s)=2\ln\left(1+\sqrt{s}\right)\left[1-\ln\left(1+\sqrt{t}\right)\right]^2,$$

$$H''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,s)=-4\ln\left(1+\sqrt{s}\right)\left[1-\ln\left(1+\sqrt{t}\right)\right],\quad (t,s)\in G,$$

болот. Бул учурда Теорема 1 дин бардык шарттары аткарылат.

Мисал 5. (3.1.1) теңдемесинде

$a=0,\quad b=1,\quad \varphi(t)=\sqrt{t},\quad P(t)=\sqrt{t},\quad m(t)=t^2$, $H(t,s)=s-2s\sqrt{t}+ts$ болсун.

Бул учурда Теорема 1 дин бардык шарттары аткарылат. Демек,

$$H(t,0)=0,\quad H'_{\varphi(t)}(t,0)=0,\quad H'_{\varphi(s)}(t,s)=2\sqrt{s}\left(1-\sqrt{t}\right)^2,$$

$$H''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,s)=-4\sqrt{s}\left(1-\sqrt{t}\right),\quad (t,s)\in G$$

болот.

ЖЫЙЫНТЫК

Бул магистрдик диссертацияда Вольтерра-Стильтьестин үчүнчү түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелеринин бир классынын чыгарылышынын жалгыздыгы далилденди. Мында, өсүүчү функция боюнча туунду түшүнүгүнүн негизинде терс эмес квадраттар формасы методун колдонуп, Вольтерра-Стильтьестин үчүнчү түрдөгү интегралдык тендемелеринин бир классынын чыгарылыштарынын жалгыздыгынын жетиштүү шарттары коюлган. Ага ылайык теоремалар берилди. Андан соң теоремалардын шарттарын канааттандырган мисалдар келтирилди. Негизги түшүнүк катары өсүүчү функция боюнча функциянын туундусу колдонулду.

АДАБИЯТТАР

[1]. З.Б. Цалюк, Интегральные уравнения Вольтерра. Итоги науки и техники, Мат. анализ, 15, 131–198 (1977)

[2]. Н.А. Магницкий, Линейные интегральные уравнения Вольтерра первого и третьего родов, Журнал вычислит. математики и мат. физики, 19, №4, 970–989 (1979).

[3]. М.М. Лаврентьев, Об интегральных уравнениях первого рода, Докл. АН СССР, 127, № 1, 31–33 (1959)

[4]. А.С. Апарцин, Неклассические уравнения Вольтерра первого рода, Теория и численные методы, Наука, Сиб. отд-ние, Новосибирск (1999)

[5]. А.С. Апарцин, И.В. Караулова, Е.В. Маркова, В.В. Труфанов, Применения интегральных уравнений Вольтерра для моделирования стратегий технического перевооружения электроэнергетики, Электричество, № 10, 69–75 (2005).

[6]. А.С. Апарцин, И.В. Сидлер, Исследование тестовых уравнений Вольтерра первого рода в интегральных моделях развивающихся систем, Труды Института математики и механики УрО РАН, 24, № 2, 24–33 (2018).

[7]. В.М. Глушков, В.В. Иванов, В.М. Яненко, Моделирование развивающихся систем, Наука, Москва (1983).

[8]. А.М. Денисов, О приближенном решении уравнения Вольтерра I рода, Журнал вычислительной математики и математической физики, 15, № 4,1053-1056 (1975).

[9]. М.И. Иманалиев, А.Асанов, О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода, Доклады АН СССР, 309, № 5, 1052–1055 (1989).

[10]. М.И. Иманалиев, А.Асанов, Регуляризация и единственность решений систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода, Доклады РАН, 415, №1, 14–17 (2007).

[11]. М.И. Иманалиев, А.Асанов, О решениях систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода, Доклады РАН, 430, №6, 1–4 (2010).

[12]. М.И. Иманалиев, А. Асанов, Р.А. Асанов, Об одном классе систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с

многоточечными особенностями, Дифференциальные уравнения, 54, №3, 387–397 (2018).

[13]. A. Asanov, K. Matanova, R. Asanov, A class of linear and nonlinear Fredholm integral equations of the third kind, Kuwait J. Sci., 44, №1, 17–28 (2017).

[14]. R.K. Lamm, A survey of regularization methods for first kind Volterra equations, Surveys on Solution Methods for Inverse Problems, Springer, Vienna (2000), p. 53–82.

[15]. А. Асанов, Производная функции по возрастающей функции // Табигый илимдер журналы, КТУ «Манас», Бишкек, 2001, №1, с. 18–64.

[16]. Асанов А. Интегральные уравнение Вольтерра-Стилтьеса второго и первого рода// Табигый илимдер журналы. 2002. №2. С. 79-95.

[17]. А.К.Тойгонбаева, А. Асанов, Б.Калимбетов, Об одном классе линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода // Вестник Карагандинского университета. – Серия «Математика», №4(68). – Караганды, 2012. – С. 3-6.

[18]. А.К. Тойгонбаева, А. Асанов, Об одном классе систем интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода с разрывным ядром // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим. 2012. – Вып. 45. – С.50-55.

[19]. A.K. Toigonbaeva, A. Asanov, The choice of regularization parameter of solutions of linear Fredgolm-Stieltjes integral equations of the first kind // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана, Бишкек, ISSN: 1694-7649, №6, 2019, с.с.3-8.

[20]. Federson M, Bianconi R and Barbanti L. Linear Volterra integral equations. Acta Mathematicae Applicatae Sinica,18(4) (2002): 553–560.

[21]. Сахнович ЛА. Нелинейные уравнения и обратные задачи на полуоси.

Препринт / ИМ АН Укр, ССР, 87 (1987): 30 – 56.

[22]. Корытов СГ. К вопросу об оптимальном управлении системами, описываемыми линейными функционально-дифференциальными. Краевые задачи: Межвуз. сб.науч.тр. Пермск.политехн. ин-т, (1986): 36 - 40.

[23]. Барбашин ЕА. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 224 с, 1967.

[24]. Шелест АВ. Метод Боголюбова в динамической теории кинетических уравнений. Москва: Наука, 160 с, 1990.

[25]. Манжиров АВ, Полянин АД. Справочник по интегральным уравнением, методы решение. Москва: Факториал Пресс, 384 с, 2000.

[26]. Шадыканова АШ, Өсүүчү функция боюнча туундулуу сызыктуу эмес экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемени жалпыланган трапеция методу менен чыгаруу,Магистрдик диссертация. КТУ Манас. Табигый илимдер институту, Математика багыты, Бишкек, 2021.

[27]. Интеграл Римана-Стильтьеса. http://new.math.msu.su