2D ve 3D Matrislerle Tanımlanan Cebirsel Yapılar Üzerine

Beyza Us

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Ocak 2023

On Algebraic Structures Defined by 2D and 3D Matrices

Beyza Us

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics-Computer

January 2023

2D ve 3D Matrislerle Tanımlanan Cebirsel Yapılar Üzerine

Beyza Us

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Ayşe Bayar

Ocak 2023

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Ayşe Bayar danışmanlığında hazırlamış olduğum "2D ve 3D Matrislerle Tanımlanan Cebirsel Yapılar Üzerine" başlıklı YÜKSEK LİSANS tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 05/01/2023

Beyza Us

ÖZET

Bu tezde elemanları bölümlü halkadan seçilen iki ve üç boyutlu matrisler üzerinde tanımlanan farklı matris çarpımları ve cebirsel yapılar incelenmiştir.

Tez yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin giriş ve amacı, ikinci bölümde tezin konusuyla ilgili literatür araştırması sunulmaktadır. Üçüncü bölümde ise matris teorisiyle ilgili temel kavramlara yer verilmiştir. Çalışmanın dördüncü bölümünde litaratürde iyi bilinen matris çarpımlarından Hadamard, Schur, Kroneker ve Cracovian matris çarpımları incelenmiş ve bu çarpımların bazı özellikleri verilmiştir. Beşinci bölümde ise 3D matrislerin vektör uzayı ve 3D matris halkası incelenmiş ve sonlu boyutlu 3D matris vektör uzaylarının tabanlarına örnekler verilmiştir. Altıncı bölümde, iki ve üç boyutlu aynı tipten matrisler üzerinde alışılmış matris toplamı ve bir matrisin skaler katı ile iki matrisin Zaka matris çarpımı işlemlerine göre 2D ve 3D matris halkası incelenmiş ve bu yapıların birleşme özelliği olmayan değişmeli cebir olduğu gösterilmiştir. Tezin son bölümü olan yedinci bölümde tez ile ilgili sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: 2D matris, 3D Matris, matris çarpımı, Zaka matris çarpımı

SUMMARY

In this thesis different matrix products and the algebric structures on 2-dimensional and 3-dimensional matrices whose elements are selected from a division ring are examined.

This thesis consists of seven chapters. The first chapter contains the introduction and purpose of the thesis and in the second chapter, the literature research related to the subject of thesis is given. In the third chapter, the basic definitions and concepts related to matrice theory are given. In the fourth chapter of the study; Hadamard, Schur Kroneker and Cracovian Product from the well known products of matrices are examined and some properties of them are presented. In the fifth chapter: the vector spaces and the matrix ring of 3-dimensional matrices are examined and the examples for the finite dimensional vector spaces of 3-dimensional matrices and the bases of them are given. In the sixth section, 2- and 3-dimensional matrix rings on the field were examined according to the operations of the usual sum of matrices, a scalar multiple of one matrix and the Zaka matrix multiplication of two matrices and it is shown that this structure is a non associative commutative algebra. In the last section, the results and recommendations of the study are presented.

Keywords: 2D matrices, 3D Matrices, matrix product, Zaka matrix product

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET vi
SUMMARY vii
TEŞEKKÜR viii
İÇİNDEKİLER ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ x
1. GİRİŞ VE AMAÇ 1
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI 3
3. TEMEL KAVRAMLAR 8
4. BAZI MATRİS ÇARPIMLARI 14
4.1. Hadamart Matris Çarpımı 14
4.2. Frobenius İç Çarpım 20
4.3. Kroneker Çarpım 21
4.4. Cracovian Matris Çarpımı 23
5. 3D MATRİS ÇARPIM HALKASI 25
5.1. Üç Boyutlu Matrisler 25
5.2. Üç Boyutlu Matrislerde Çarpma işlemi 29
5.3. Üç Boyutlu Matrisleri Skalerle Çarpma 33
5.4. Üç Boyutlu Matrislerin Vektör Uzayı 34
6. 2D VE 3D MATRİSLER ÜZERİNDE YENİ BİR MATRİS ÇARPIMI 38
6.1 2D Matrisler Üzerinde Zaka Matris Çarpımı 38
6.2. 2D Matrisler Üzerinde Zaka Çarpımının Özellikleri 42
6.3. 3D Matrisler Üzerinde Zaka Matris Çarpımı 47
7. SONUÇ VE ÖNERİLER 56
KAYNAKLAR DİZİNİ 57

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$(\mathrm{G},+)$	+ işlemine göre bir grup
$(\mathrm{R},+,\cdot)$	$+$ ve $\cdot$ işlemlerine göre bir halka
D	Bölümlü halka
F	Cisim
$M_{m\times n}(D)$	D üzerinde tanımlı $m \times n$ boyutlu matris uzayı
$M_{mn}(D)$	D üzerinde tanımlı $m \times n$ boyutlu matris uzayı
$M_m^n\ (B)$	B üzerinde tanımlı $m \times n$ boyutlu matris uzayı
E_{ij}	$M_{m\times n}(D)$ vektör uzayının standart bazının bir elemanı
A^T	A matrisinin transpozu
A^{-1}	A matrisinin tersi
S_n	n elamanlı kümenin simetri grubu
V	Vektör Uzayı
$\circ$	Hadamart Matris Çarpımı
$\langle A,B\rangle_F$	Frobenius iç çarpımı
$A \otimes \mathrm{B}$	Kronecker çarpımı
$A \wedge \mathrm{B}$	Cracovian matris çarpımı
$\otimes$	Zaka Matris Çarpımı

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\odot$	3D Matrisler Uzayında Skalerle Çarpım işlemi
A^*	A matrisinin eşlenik transpozu
İz(A)	A matrisinin izi
J_{mn}	Hadamart çarpımına göre birim matris
$\hat{A}$	A nın Hadamart tersi
M_{mns}	$m \times n \times s$ tipinde üç boyutlu matris uzayı

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Matris kavramı bütün bilim dallarında karşımıza çıkmaktadır. Matematikçiler, doğrusal denklemlerle ilişkili farklı sistemler oluşturarak çözüm üretmeye çalışmışlardır. Bu sislemlerin yapısı zaman içinde son şeklini almıştır. İngiliz matematikçi Arthur Cayley matrisler ve matrisleri hakkında temel bilgileri verdikten sonra bunları 1857'de "Matrisler Teorisi Üzerine Bir Anı" başlıklı makalede matematik dünyasına sundu. Bu makale modern matris analizinin ve lineer cebirin orijini olarak kabul edilmektedir. Matris teorisi zaman içinde önemli ilerlemeler kaydetmiştir. 2-boyutlu matrisler ve 3-boyutlu matrisler bilimin farklı alanlarında yer almaktadır. Matrislerle ilgili işlemler geniş uygulama alanına sahiptir. Matrislerin uygulaması matrislerin toplamı, bir skalerle bir matrisin çarpımı ya da iki matrisin çarpımı işlemlerinden ve bu işlemlerle ilgili elde edilebilecek sonuçlarla sınırlı değildir. Birçok uygulama alanlarında matrislerin kullanımı hayatımızı kolaylaştırmaktadır. Farklı amaçlar için birçok farklı matris çarpımı tanımlanmıştır. Hadamard çarpımı, Schur çarpımı, Kroneker çarpımı ve Cracovian çarpımı bunlardan bazılarıdır. Başlangıçta lineer cebirin bir alt dalı olarak görülen matrisler bugün matematiğin matris teorisi dalını oluşturmaktadır. Matris teorisi zaman içinde önemli ilerlemeler kaydetmiştir. Son zamanlarda, 2-boyutlu matrisler üçüncü veya daha yüksek boyutlara genişletilmiştir. Günümüzde 2-boyutlu matrisler 3-boyutlu matrisler bilimin farklı alanlarındaki teorilere uygulanmaktadır. 3-boyutlu matrisler ve hipermatrisler konusunda farklı çalışmalar bütün bilim dallarında geniş bir uygulama alnına sahiptir (Özkaya, 2018).

Temel olarak, bu tezde litaratürde iyi bilinen ve farklı uygulama alanlarında kullanılan matris çarpımlarından dört tanesi incelenmiş ve bu çarpımların bazı özellikleri verilmiştir. Orgest Zaka tarafından alışılmış matris toplamı ve bir matrisin skaler katı ve iki matrisin çarpım işlemlerine göre 3-boyutlu matris halkası incelenmiştir (Zaka, 2017) ve 2-boyutlu matrisler üzerinde aynı tipten matrisler için alışılmış çarpma işlemi yerine “New Matrix Multiplication” adlı makalesinde verilen ve “Zaka Matris Çarpımı” olarak adrandırılan yeni bir matris çarpımını sunulmuştur(Zaka, 2020). Bu çalışmada bu makaleler incelenerek sonlu F cismi üzerinde 2 ve 3-boyutlu matrislerin vektör uzaylarına örnekler verilip bunlar için tabanlar belirlenmiştir. Aynı tipten matrisler kümesi üzerinde matris toplamı standart matris toplamı, matrisin skaler katı alışılmış kat alma işlemi ve matris

çarpımı Zaka matris çarpımı olmak üzere bölümlü halka üzerinde oluşturulan yapının birleşme özelliği olmayan bir değişmeli cebir olduğu gösterilmiştir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Matrislerin ve determinantların başlangıcı M.Ö. ikinci yüzyıl olmasına rağmen izler M.Ö. dördüncü yüzyılda görülmektedir. 17. yüzyıl sonlarına doğru fikirlerin yeniden ortaya çıkması ile gelişim gerçekten başlamıştır.

Matrislerin ve determinantların başlangıcının, doğrusal denklem sistemlerinin incelenmesiyle ortaya çıkması şaşırtıcı değildir. Babilliler eş zamanlı doğrusal denklemlere yol açan problemleri incelemişlerdir ve bunlardan bazıları hayatta kalan kil tabletlerde korunmuştur.

Çinliler, MÖ 200 ile MÖ 100 arasında, matrislere Babillilerden çok daha yaklaşmışlardır. Gerçekten de, Han Hanedanlığı döneminde yazılan Matematik Sanatı Üzerine Dokuz Bölüm metninin, matris yöntemlerinin bilinen ilk örneğini verdiğini söylenmektedir. Problemi çözmek için üç bilinmeyendeki üç doğrusal denklem sisteminin katsayılarını bir 'sayım tahtası' üzerinde bir tablo olarak kurulmuştur. 20. yüzyılın sonlarındaki yöntemler, doğrusal denklemlerin matrisin satırları olarak yazılmasını sağlamaktadır. Günümüzde Gauss eliminasyonu olarak bilinen bu yöntem, 19.yy lın başlarına kadar iyi bilinmemekteydi. 1545 de Cardan *Ars Magna'da regula de modo* adını verdiği ve *kuralların anası* olarak adlandırdığı iki doğrusal denklemden oluşan 2×2 denklem sistemini çözmek için Cramer kuralını verir.
Bir determinant fikri, Avrupa'da ortaya çıkmadan önce Japonya'da ortaya çıkmıştır. 1683'te Seki, 2×2, 3×3, 4×4 ve 5×5 matrislerinin determinantlarını bulmuş ve bunları doğrusal denklem sistemlerinin çözümlenmesine uygulamıştır.

Avrupa'da determinantın ilk ortaya çıkışı on yıl sonradır. 1693'te Leibniz de l'Hôpital'e yazmıştır. Yayınlanmamış el yazmaları,1678'den başlayarak 50 yıllık bir süre boyunca üzerinde çalıştığı 50'den fazla farklı yazma katsayısı sistemi yolunu içermektedir. Leibniz, bir determinantın terimlerinin belirli kombinatoryal toplamları için 'sonuç' kelimesini kullanmıştır. Cramer'in kuralı da dahil olmak üzere ortaya çıkanlar üzerinde çeşitli sonuçlar kanıtlamıştır. Bugün Laplace genişlemesi olarak adlandırılan bir determinantın herhangi bir sütun kullanılarak genişletilmesini de vermiştir. Leibniz, kendisini determinantlara yönlendiren denklemlerin katsayı sistemlerini incelemenin yanı sıra, doğal olarak matris teorisine yol açan ikinci dereceden formların katsayı sistemlerini de

incelemiştir.

1730'larda Maclaurin, ölümünden iki yıl sonra, 1748'e kadar yayınlanmamasına rağmen, *Cebir İncelemesi' ni* yazdı. 2×2 ve 3×3 sistemleri için Cramer'in kuralını ispatlayan ve 4×4 sistemlerinin nasıl çalışacağını gösteren belirleyiciler hakkında yayınlanan ilk sonuçları içerir. Cramer, bunu *n*×*n* için genellemiştir. Cramer, bu terimlerin denklemlerdeki belirli katsayıların ürünleri olarak nasıl hesaplandığını ve işaretin nasıl belirlendiğini, kesirlerin n paylarının, bu hesaplamadaki belirli katsayıların sistemin sabit terimleriyle değiştirilmesiyle nasıl bulunabileceğini de açıklamıştır.

1764'te Bezout, 1771'de Vandermonde determinantları hesaplama yöntemleri vermiştir. 1772'de Laplace, Cramer ve Bezout tarafından tanıtılan yöntemlerin pratik olmadığını iddia etmiştir ve iç gezegenlerin yörüngelerini incelediği bir makalede, doğrusal denklem sistemlerinin çözümünü, aslında hesaplamadan, determinantlar kullanarak tartışmıştır.. Oldukça şaşırtıcı bir şekilde, Laplace, şimdi belirleyici olarak adlandırdığımız şey için "sonuç" kelimesini kullanmıştır: Leibniz tarafından kullanılanla aynı kelime olduğu için şaşırtıcıdır, ancak Laplace, Leibniz'in çalışmasından habersiz olarak bu kelimeyi kullanmıştır. Laplace, onun adını taşıyan bir determinantın genişlemesini yapmıştır. Lagrange, 1773 tarihli bir makalede, 3×3 fonksiyonel determinantları incelemiştir. Mekanik üzerine olan bu makale, ilk kez bir determinantın hacim yorumunu içermektedir.

'Determinant' terimi ilk olarak Gauss tarafından *Disquisitiones arithmeticae'de* (1801) ikinci dereceden formları tartışırken tanıtılmıştır. İkinci dereceden formlarının katsayılarını dikdörtgen diziler halinde ortaya koymaktadır. Matris çarpımını ve bir matrisin tersini ikinci dereceden formların katsayı dizilerinin özel bağlamında tanımlamaktadır.

İlk olarak MÖ 200 yılında yazılan Matematik Sanatı Üzerine Dokuz Bölüm metninde ortaya çıkan Gauss eliminasyonu, Gauss tarafından asteroit Pallas'ın yörüngesini inceleyen çalışmalarında kullanılmıştır. Gallas'ın 1803 ve 1809 yılları arasında yapılan gözlemlerini kullanan Gauss, altı bilinmeyende altı doğrusal denklemden oluşan bir sistem elde etmiştir. Gauss, bu tür denklemleri çözmek için verdiği sistematik bir yöntem katsayı matrisinde tam olarak Gauss eliminasyonudur.

1812'de "determinant"ı modern anlamıyla kullanan Cauchy' dir. Cauchy'nin çalışması, determinantlar üzerine yapılan ilk çalışmaların en eksiksiz olanıdır. 1812 de Cauchy, Binet (1796-1856) ten habersiz determinantlar için çarpma kuralını det(AB) = det(A)·det(B) yi kanıtlanmıştır. 1826'da Cauchy, n değişkenli ikinci dereceden formlar bağlamında, katsayılar matrisi için 'tableau' terimini kullanmıştır. Özdeğerleri bulmuştur ve bir formu karelerin toplamına dönüştürme bağlamında bir matrisin köşegenleştirimesi hakkında sonuçlar vermiştir. Ayrıca benzer matrisleri tanımlamış ve iki matris benzerse aynı karakteristik denkleme sahip olduklarını göstermiş, her gerçek simetrik matrisin köşegene göre simetrik çapraz olduğunu kanıtlamıştır.

Jacques Sturm, adi diferansiyel denklemlerin sistemlerini çözme bağlamında özdeğer probleminin bir genellemesini vermiştir. Gerçekte özdeğer kavramı 80 yıl önce, yine doğrusal diferansiyel denklem sistemleri üzerine yapılan çalışmalarda, D'Alembert'in çeşitli noktalarda kütleleri bağlı bir dizenin hareketini incelemesiyle ortaya çıkmıştır. Ne Cauchy'nin ne de Jacques Sturm'un ortaya koydukları fikirlerin genelliğini fark etmedikleri ve onları yalnızca çalıştıkları belirli bağlamlarda gördükleri anlaşılmaktadır. 1830'lardan itibaren Jacobive daha sonra 1850'lerde ve 1860'larda Kronecker ve Weierstrass da doğrusal bir dönüşüm kavramı ile matris ilişkisine baktılarmışlardır. Jacobi, 1841'de determinantlar üzerine üç tez yayınlamıştır. 1841'de de Cayley, determinantlar teorisine katkıda bulunmuştur. Yayınladığı makalede, determinantı belirtmek için şimdi standart hale gelen bir gösterim şekli olan dizinin her iki tarafında iki dikey çizgi kullanmıştır.

1844'te Eisenstein, determinantları tek bir harfle göstermiş ve komütativite eksikliği dışında sıradan sayılar gibi nasıl toplanacağını ve çarpılacağını göstermiştir. Eisenstein'nın doğrusal ikameleri, bir cebir olarak düşünen ilk kişi olduğunu söylemektedir.

"Matris" terimini ilk kullanan kişi 1850'de Sylvester idi. Sylvester, bir matrisi *terimlerin dikdörtgen bir düzenlemesi* olarak tanımlamıştır. 1853'te Cayley, ilk kez bir matrisin tersini 1858'de bir matrisin ilk soyut tanımını içerdiği için dikkat çekici olan *matrisler teorisi üzerine Memoir'i* yayınladı.

Cayley, toplama, çarpma, skaler çarpma ve tersleri tanımlayan bir matris cebiri vermiştir. Bir matrisin tersinin matrisin belirleyicisi açısından açık bir yapısını vermiştir. Cayley ayrıca, 2×2 ve 3×3 tipinde matrisin kendi karakteristik denklemini

sağladığını göstermiştir. Kuaternyonlarla ilgili araştırmaları sırasında teoremi 4×4 özel durumu için kanıtlamıştır. 1870' te Jordan, Jordan kanonik formunu sunmuştur.

1878'de Frobenius, Cayley'nin "*On linear substitutions and bilinear forms"*adlı çalışmasından habersiz olarak matrisler üzerine önemli bir çalışma yazmıştır. Bu çalışmada formların katsayılarını ele almış ve matris terimini kullanmamıştır. Bununla birlikte, matrislerin eşdeğerlik sınıflarının temsilcileri olarak kanonik matrisler üzerinde önemli sonuçlar elde etmiştir. Kronecker ve Weierstrass'ın sırasıyla 1874 ve 1868'deki sonuçlarının özel durumlarını göz önünde bulundurduklarını belirtmiştir. Frobenius ayrıca her matrisin karakteristik denklemini sağladığı genel sonucunu ispatlamıştır. Bu çalışma kanonik formlar üzerine yaptığı çalışmalarda kullandığı matris derecesinin tanımını ve ortogonal matrislerin tanımını da içermektedir.

Bir kare matrisin çekirdeği, 1884'te Sylvester tarafından tanımlanmıştır. Sylvester matrislerin belirli dönüşümler altında invaryant kalan özelliklerle ilgilenmiştir.

1896'da Frobenius, Cayley'nin matrisler teorisi üzerine yazdığı çalışmadan haberdar olmuş ve bundan sonra matris terimini kullanmaya başlamıştır. Cayley'nin Cayley-Hamilton teoremini sadece 2×2 ve 3×3 matrisleri için kanıtlamış olmasına rağmen, Frobenius, genel teoremi kanıtlayan ilk kişi olmasına rağmen, sonucu cömertçe Cayley'e atfetmiştir.

Weierstrass determinantın aksiyomatik bir tanımını derslerinde kullanılmış ve ölümünden sonra 1903 yılında "*The note on determinant theory"* adlı notta yayınlanmıştır. Aynı yıl Kronecker'in determinantlar üzerine verdiği dersler de ölümünden sonra yayınlandı. Bu iki yayında modern determinantlar teorisinde yer aldı. Ancak matris teorisinin tamamen kabul görmüş bir teori haline gelmesi biraz daha uzun sürmüştür.. 3- boyutlu matrislerle ilgili çok matematikteki uygun yerlerine getiren önemli bir erken metin, 1907'de Bôcher'in *Yüksek Cebire Giriş* adlı eseriydi. Turnbull ve Aitken, 1930'larda etkili metinler yazdılar ve Mirsky'nin 1955'te *doğrusal cebire giriş*, matris teorisinin en önemli lisans matematik konularından biri olarak bugünkü ana rolüne ulaştığını görmüştür (MacTutor, 2022).

Arthur Cayley, matris hakkındaki temel gerçekleri yayınladıktan sonra matematikçiler teoriye yeni tanımlar ve önermeler koydular. Bugün fen bilimleri ve sosyal bilimlerle ilgili hemen hemen birçok alanda matrislerin kullanımı kaçınılmazdır. Uygulama

alanlarında ise matrislerin kullanımı hızla artmaktadır ve matrisler üzerinde birçok farklı işlemler tanımlanmıştır, Hadamard çarpımı, Schur çarpımı v.b. bunlara örnek olarak verilebilir. Başlangıçta lineer cebirin bir alt dalı olan matrisler şimdilerde matris teorisi olarak matematiğin bir dalı haline gelmiştir. Matris teorisi ve uygulamaları hakkında temel bilgiler için (Perlis 1991, Herstein ve Winter 1988, Johnson 1990, Cullen 1972, Schneider ve Barker 1973, Hohn 1973, Hungerford 1974, Jacobson 1985, Fraleigh 1989, Perlis 1991, Wan 1996, Çiftçi 2015, Hacısalihoğlu,H. 2000) çalışmaları referans olarak gösterilebilir.
Son zamanlarda 2-boyutlu matrisler 3 ve daha yüksek boyutlu matrislere genişletildi ve litaratüre 3-boyutlu matrislerle ilgili çok farklı çalışma kazandırılmıştır ve yeni bir uygulama alanı olarak gelişmektedir. 2017 yılında Özkaya tarafından 3 boyutlu matrislerde norm eşitsizlikleri ve oyun teorisinde uygulaması verilmiştir (Özkaya, 2018). Bölümlü halkadan üzerinde karesel olmayan, alterne, simetrik ve hermityen matrislerin oluşturdukları bazı geometrik yapılar ve dönüşümler altında invaryant kalan özellikleri (Öztemür,2019) de incelenmiştir.

Temel olarak, bu tezde litaratürde iyi bilinen ve farklı uygulama alanlarında kullanılan matris çarpımlarından dört tanesi incelenmiş ve bu çarpımların bazı özellikleri verilmiştir. Orgest Zaka tarafından alışılmış matris toplamı ve bir matrisin skaler katı ve iki matrisin çarpım işlemlerine göre 3-boyutlu matris halkası incelenmiştir (Zaka, 2017) ve 2D matrisler üzerinde aynı tipten matrisler için alışılmış çarpma işlemi yerine "New Matrix Multiplication" adlı makalesinde verilen ve "Zaka Matris Çarpımı" olarak adrandırılan yeni bir matris çapımını sunmuştur (Zaka, 2020). Bu çalışmanın 5. ve 6. bölümlerinde Zaka'nın iki ve üç boyutlu matris teorisine kazandırdığı bu çalışmalar incelenerek sonlu F cismi üzerinde iki ve üç boyutlu matrislerin vektör uzaylarına örnekler verilip bunlar için taban belirlenmiştir. Zaka çarpımıyla tanımlanan $(M_{mns}(\mathrm{F}),+,\odot,\otimes)$ yapısının birleşme özelliği olmayan bir değişmeli cebir olduğu gösterilmiştir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda verilen temel bilgileri literatürdeki herhangi bir cebir kitabında bulmak mümkündür. Aşağıda verilecek olan temel bilgiler için (Cullen 1972, Schneider ve Barker 1973, Hohn 1973, Hungerford 1974, Jacobson 1985, Fraleigh 1989, Perlis 1991, Çiftçi 2015, Hacısalihoğlu 2000) çalışmalarına bakılabilir.

Tanım 3.1. G boş kümeden farklı bir küme ve G×G→G tanımlanan "• " bir iç işlem olsun. Eğer aşağıdaki üç aksiyom sağlanırsa (G, •) ikilisine bir grup denir.

1) • birleşimlidir: ∀ a,b,c ∈ G için a (b•c)=(a•b) •c dir,

2) • için G de bir tek birim eleman vardır: ∀ a∈G için a•e=a=e•a,

3) Her a∈G için G de a^{-1} invers elamanı vardır: $a^{-1} \bullet a = e = a \bullet a^{-1}$.

Bir (G, •) grubunda • grup işlemi değişimli, yani ∀a,b∈G için a*b=b*a şartı sağlanıyorsa (G, •) grubuna *değişmeli (komütatif) grup* ya da *Abel grubu* denir. G kümesinde sonlu sayıda eleman varsa (G, •) grubuna *sonlu grup,* aksi halde *sonsuz grup* denir.

Tanım 3.2. Boş olmayan R kümesi üzerinde + ile · herhangi iki ikili işlem olsun. Bu işlemlerle birlikte (R, +,·) üçlüsü aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa (R, +,·) sistemine bir *halka* denir.

1) (R,+) değişmeli gruptur.

2) · işlemi birleşmelidir.

3) Her a,b,c ∈ R için a·(b+c)=a·b+a·c ve (a+b)·c=a·c+b·c dir.

(R, +,·) halkasında ikinci işlem "·" değişimli ise halkaya *değişimli halka* denir.

(R, +,·) halkasında ikinci işlem "·" e göre H nin bir e birim elemanı varsa halkaya *birimli halka* denir. Hem birimli hem de değişimli olan halkaya birimli ve *değişimli halka* denir.

Halka işlemlerinden birincisine Abel grup işlemi dendiği gibi *toplama işlemi,* ikinci işleme de *çarpma işlemi* denir.

Tanım 3.3. (R, +,·) bir halka olsun. R nin boş kümeden farklı bir S alt kümesi için (S, +,·) bir halka ise (S, +,·) halkasına (R, +,·) halkasının bir alt halkası denir.

Tanım 3.4. (R, +,·) bir halka olsun. R nin ikinci işleme göre değişme özelliğini sağlayan elemanlarının oluşturduğu kümeye (R, +,·) halkasının merkezi denir.

Tanım 3.5. (R, +,·) ve $(S, +', .')$ iki halka olsun. $\phi: R, +,\cdot) \rightarrow (S, +', .')$ dönüşümü aşağıdaki iki şartı sağlarsa ϕ ye (R, +,·) den $(S, +', .')$ ye bir *homomorfizm* denir.

i) Her $a, b \in$ R için $\phi(a + b) \rightarrow \phi(a) +' \phi(b)$

ii) Her $a, b \in$ R için $\phi(a \cdot b) \rightarrow \phi(a) .' \phi(b)$.

Eğer ii koşulunun yerine

iii) Her $a, b \in$ R için $\phi(a \cdot b) \rightarrow \phi(b) .' \phi(a)$

koşulu sağlanırsa ϕ ye (R, +,·) den $(S, +', .')$ ye bir *anti-homomorfizm* denir.

ϕ , (R, +,·) dan (R, +,·) ya tanımlı homomorfizm ise ϕ ye R halkasının bir *otomorfizmi* denir.

Tanım 3.6. (R, +,·) bir halka olsun. I, (R, +,·) üzerinde özdeşlik dönüşümü olmak üzere $f^2 = I$ özelliğini sağlayan $f: (R, +,\cdot) \rightarrow (R, +,\cdot)$ ye tanımlı f otomorfizmine (R, +,·) nin bir *involüsyonu* denir.

Tanım 3.7. (R, +,·) bir birimli (özdeşlikli) bir halka olsun. Eğer $R - \{0\}$ a ait her elemanın çarpma işlemine göre tersi varsa (R, +,·) halkasına *bölümlü halka* veya *aykırı cisim* denir. Çarpma işlemi değişmeli olan bölümlü halkaya da *cisim* denir.

Eleman sayısı sonlu olan F cismine *sonlu cisim* denir.

Tanım 3.8. V, elemanlarına vektör dediğimiz bir küme, F de bölümlü halka olsun. V üzerinde vektör toplamı "+" ve skalerle çarpım "." dediğimiz iki işlem tanımlansın. (V,+) abelyen grup ve $. : VxF \rightarrow V$ işlemi her $A, B \in V$ ve her $r, s \in F$ için

i) $r.(A + B) = r.A + r.B$

ii) $(r + s).A = r.A + s.A$

iii) $(r.s).A = r.(s.A) = s.(r.A)$

iv) $e.A = A$

şartları sağlanıyorsa V ye F bölümlü halkası üzerinde bir (sol) *vektör uzayı* denir.

V nin bir U altkümesi için V vektör uzayının işlemleri ile birlikte U da bir vektör uzayı oluyorsa, U ya V nin *alt vektör uzayı* ya da kısaca *alt uzayı* denir.

Tanım 3.9. F cismi üzerinde bir vektör uzayı V olsun. $A_1, A_2, \dots, A_n \in V$ için $a_i \in F$, i=1,2,…,n olmak üzere $a_1A_1 + a_2A_2 + \cdots + aA_n = O$ bağıntısında en az bir katsayı $a_i \neq 0$ ise $A_1, A_2, \dots, A_n$ vektörleri *lineer bağımsızdır*, denir. Aksi halde *lineer bağımlıdır* denir.

Tanım 3.10. V bir vektör uzayı olsun. V nin aşağıdaki iki özelliği sağlayan B alt kümesine V nin bir *bazı* veya *tabanı* denir.

i) B lineer bağımsızdır.

ii) B, V yi gerer. Yani V nin her vektörü B nin elamanlarının bir lineer birleşimidir. Bu aksiyoma baz için germe aksiyomu denir.

Tanım 3.11. V bir vektör uzayının bir bazı B olsun. B deki vektörlerin sayısına V nin V nin *boyutu* denir *ve boy V* ile gösterilir. B deki vektörlerin sayısı sonlu ise V ye *sonlu boyutlu vektör uzayı* denir.

Tanım 3.12. Bir bölümlü halkanın elemanlarının dikdörtgensel düzenlenmesi olan ve m satır n kolondan oluşan bir tabloya m × n tipinde bir *matris* denir. Bölümlü halkanın elemanlarına matrisin *girdileri* denir. $m,n \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le m, 1 \le j \le m$ olmak üzere oluşturulan A matrisi $A=(a_{ij})$ veya $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ile gösterilir. a_{ij} elemanına A nın i.satır j. sütundaki girdisi denir.

m satır ve n sütunlu bir matris

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Aşağıda verilen A matrisi, 2 × 2 ve B matrisi de 3 × 1 tipinde matris örneğidir.

Gösterim: Girdileri bir B bölümlü halkasından alınarak oluşturulan m ×n tipinde tüm matrislerin kümesi $M_{m\times n}(B)$, $M_{mn}(B)$ veya $M_n^m(B)$ ile $m=n$ iken kısaca $M_n(B)$ ile gösterilir. Girdileri gerçel sayılar cisminden alınan m ×n tipinde tüm matrislerin kümesi $M_{m\times n}(R)$ veya $M_{mn}(R)$ ile benzer biçimde girdileri karmaşık sayılar kümesinden alınan

m×n tipinde tüm matrislerin kümesi diğeri ise C karmaşık sayılar kümesinden girdileri olan tüm $m \times n$ matrislerinin kümesi $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ veya $M_{mn}(\mathbb{C})$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.13. Bütün girdileri sıfır olan matrise *sıfır matris* denir. $M_{m\times n}(B)$ uzayının sıfır matrisi $O_{m\times n}$, m=n ise kısaca O_n ile gösterilir. 2×2 ve 3×1 tipinde sıfır matrisleri

$$O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad O_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilebilir.

Tanım 3.14. $A=(a_{ij})$, m × n tipinde matrisinin satır ve sütunlarının yer değiştirmesi ile oluşan n × m tipindeki matrise A nın *transpozu* denir ve A^T ile gösterilir. $A^T = (a_{ji})$ dir.

Tanım 3.15. $A=(a_{ij})$, n × n tipinde karesel matrisi verilsin. Her i,j için $a_{ij} = a_{ji}$ ise A ya *simetrik matris* denir. Başka bir deyişle, A nın simetrik olması için gerek ve yeter koşul $A = A^T$ olmasıdır. Eğer her i,j için $a_{ij} = -a_{ji}$ ise A ya *ters simetrik matris* denir. Yani, A nın ters simetrik olması için gerek ve yeter koşul $A = -A^T$ olmasıdır.

Tanım 3.16. Satır ve kolon sayıları eşit olan bir matrise *karesel matris* denir. n × n tipinde karesel $A=(a_{ij})$ matrisinin a_{ii}, $i = 1,2,...,n$ girdilerinin bulunduğu köşegene matrisin esas *köşegeni* denir.

Tanım 3.17. Bir karesel $A=(a_{ij})$ matrisinin esas köşegeni dışındaki tüm girdileri sıfır yani $i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ ise bu matrise *diyagonal matris* veya *köşegen matris* denir.

Tanım 3.18. Bir karesel matrisin esas köşegenin üst kısmında bulunan tüm girdileri sıfır ise bu matrise *alt üçgen matris*, alt kısmında bulunan tüm girdileri sıfır ise matrise *üst üçgen matris* denir.

Tanım 3.19. Bir köşegen matrisin esas köşegeni üzerindeki her elemanı 1 ise bu matrise *birim matris* denir. n × n tipinde birim matris I_n ile gösterilir.

Tanım 3.20. $A=(a_{ij})$ ve $B=(b_{ij})$ m × n tipinde matrisleri verilsin. Her i,j için $a_{ij}=b_{ij}$, $1 \le i \le m, 1 \le j \le m$ ise bu iki matrise *eşittir* denir ve A=B ile gösterilir.

Tanım 3.21. $A=(a_{ij})$ ve $B=(b_{ij})$ m × n tipinde matrisleri verilsin. Her i,j için A ile B nin toplamı A+B=C $A+B=C=(c_{ij})$ matrisidir. Burada $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $1\le i\le m, 1\le j\le m$ biçiminde tanımlanır.

Tanım 3.22. $A=(a_{ij})$, m × n tipinde ve $B=(b_{ij})$, n × p tipinde matrisleri verilsin. *A ile B nin çarpımı* m × p tipinde $C=A.B$ matrisidir. C matrisinin girdileri $c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$, $1\le i\le m, 1\le j\le m$ biçiminde tanımlanır.

Tanım 3.23. $A=(a_{ij})$, m × n tipinde matrisinin bir *k skaleri ile çarpımı* m × n tipinde $C=kA$ matrisidir. C matrisinin girdileri $c_{ij}=ka_{ij}$, $1\le i\le m, 1\le j\le m$ biçiminde tanımlanır.

Tanım 3.24. $A=(a_{ij})$, n × n tipinde karesel matrisinin *izi* esas köşegeninin girdileri toplamı olarak tanımlanır ve İz(A) ile gösterilir. Yani $İz(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}, i=1,2,...,n$ dir.

Tanım 3.25. $A=(a_{ij})$, n × n tipinde karesel matrisinin *determinantı* $\det A=|A|$ ile gösterilen $\sum_j \text{sgn}(j_1 j_2 ... j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} ... a_{nj_n}$ skaleridir. Burada j= $j_1 j_2 ... j_n$ dizilişi $\{1,2,...,n\}$ kümesinin bir permütasyonudur. Yani determinant $n!$ dizilişin çarpımının cebirsel toplamı olan sayıdır.

Tanım 3.26. A, n × n tipinde matrisi için $A.B=I_n=B.A$ şartını sağlayan n × n tipinde B matrisi varsa B ye A nın tersi denir ve tipinde $B=A^{-1}$ ile gösterilir. Bir karesel matrisin tersi var ise matrise singüler olmayan veya *tekil olmayan* matris denir ve bir karesel matrisin tersi yok ise singüler veya tekil *matris* olarak adlandırılır.

Tanım 3.27. Girdileri karmaşık sayılar cisminden alınan m × n tipinde $A=(a_{ij})$ matrisinin *eşlenik transpozu* A^* matrisidir ve $A^*=(a_{ji})$, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$ biçiminde tanımlanır.

Tanım 3.28. Girdileri karmaşık sayılar cisminden alınan n × n tipinde $A=(a_{ij})$ matrisinin *için* $A^*=A^{-1}$ ise A ya *uniter matris* denir.

Tanım 3.29. Girdileri karmaşık sayılar cisminden alınan n × n tipinde $A=(a_{ij})$ karesel matrisinin *için* $A=A^*$ ise A ya *hermityen matris* denir.

Tanım 3.30. $f : \mathbb{C}_{m\times n} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu $A, B \in \mathbb{C}_{m\times n}$ ve $k \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki üç özelliği sağlarsa f ye bir *matris norm* denir:

i) $f(A) \geq 0$ ve $f(A) = 0 <=> A = 0$,

ii) $f(A + B) \leq f(A) + f(B)$,

iii) $f(kA) = k\, f(A)$.

Genel olarak A matrisinin normu $f(A)$, ||A|| ile gösterilir.

Litaratürde sıkça kullanılan matris normları aşağıda verilmektedir (Meyer, 2000):

- Frobenius norm, $\| A \|_F = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2$,
- 2 - norm, $\| A \|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}}$ burada $\lambda_{\max}$, A matrisinin en büyük özdeğeridir.
- 1 - norm, $\| A \|_1 = \max_i \sum_i |a_{ij}|$, en büyük mutlak sütun toplamıdır.
- $\infty -$ norm, $\| A \|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$, en büyük mutlak satır toplamıdır.
-

Teorem 3.31. F cismi üzerinde tanımlı tüm $m \times n$ matrislerinin kümesi olan F_{mn} toplama işlemine göre aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(1) Kapalılık: C deki $m \times n$ tipinde herhangi iki matrisin toplamı yine bir $m \times n$ matristir.

(2) Asosyatiflik : Her $A, B, C \in F_{mn}$ için $(A + B) + C = A + (B + C)$.

(3) Her $A \in F_{mn}$ için $A + O = A$ olacak şekilde girdileri sıfır olan bir tek $O \in F_{mn}$ vardır.

(4) Herhangi $A \in F_{mn}$ için $A + (-A) = O$ olacak şekilde bir tek $-A \in F_{mn}$ vardır.

(5) Değişme: : Her $A, B \in F_{mn}$ için $A + B = B + A$.

4. BAZI MATRİS ÇARPIMLARI

Matris çarpımlarının matris analizinde istatistikte ve fizikte bir çok uygulamaları vardır (Horn, 1994; Charles,1990).

Bu bölümde iyi bilinen Hadamard, Frobenius , Kronecker ve Cracovian matris çarpımları tanıtılmış ve bu çarpımların özellikleri incelenmiştir.

4.1. Hadamart Matris Çarpımı

Schur 1911'deki çalışmasında aynı mertebeli iki pozitif yarı tanımlı matrisin Hadamard çarpımın pozitif yarı tanımlı matris olduğunu göstermiştir. Bu yüzden Hadamard matris çarpımı Schur çarpımı olarak da anılmaktadır. Zaman içinde Hadamard çarpımı, Hadamard-Schur çarpımı, Schur-Hadamard çarpımı, pointwise product, element-product gibi değişik şekilde adlandırılmıştır. Horn, 1990'daki çalışması bu çarpım üzerine çalışan matematikçiler için önemli bir kaynaktır (Horn, 1990). 2011 de Gümüş ve Taşkara tarafından matrislerin Hadamard çarpımı ile ilgili eşitsizlikler derlenmiştir(Gümüş ve Taşkara, 2011). Hadamard çarpımı ile temel ilgili özellikler ve eşitsizler için (Million, 2007) makelesinden incelenebilir.

Tanım 4.1.1. $A = [a_{ij}]$ ve $B = [a_{ij}]$, $m \times n$ tipiminde aynı tipten matrisler olsunlar. A ile B matrisinin Hadamard çarpımı $A \circ B$ ile gösterilir ve $A \circ B = \left[c_{ij}\right]_{m\times n}, c_{ij} = a_{ij}.b_{ij}$ biçiminde tanımlanır. Hadamard matris çarpımı aynı mertebeden matrisler için uygulanabilir. Normal matris çarpımı birinci matrisin sütun sayısı ikinci çarpan matrisin sütun sayısına eşit iken uygulanabiliyordu. Yani çarpımın yapılabilmesi için matrislerin mertebelerinin aynı olması gerekir. Ancak matrislerin kare matris olması gerekmez.
A ve B matrislerinin aynı mertebeli karesel matris olmaları durumunda hem normal matris çarpımı hem de Hadamard Matris çarpımı tanımlıdır. A ve B matrisleri aynı mertebeli fakat kare matris olmaması durumunda normal matris çarpımı tanımlı değildir fakat Hadamard matris çarpımı tanımlıdır.

Karesel aynı tipten matrisler için hem normal matris çarpımı hem de Hadamart matris çarpımı uygulanabilir.

Standart matris çarpımının değişme özelliğine sahip değilken Hadamart matris çarpımı değişmelidir.

Teorem 4.1.2. A ve B, girdileri m × n tipinde matrisler olsunlar. O zaman A ◦ B = B ◦ A.

İspat: İspat kompleks sayılar kümesi üzerinde çarpma işleminin değişme özelliğinden direkt çıkar. $A = [a_{ij}]$ ve $B = [a_{ij}]$, $m \times n$ tipiminde matrisler olsunlar. A ile B matrisinin Hadamard çarpımı $a_{ij}, b_{ij} \in C$ olmak üzere $A \circ B = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} \circ \left[b_{ij}\right]_{m\times n} = \left[a_{ij}.b_{ij}\right]_{m\times n} = [b_{ij}.a_{ij}] = B \circ A$ olur.

Teorem 4.1.3. Hadamard matris çarpımına göre birim matris bütün girdileri 1 olan m×n tipinde J_{mn} ile gösterilen matristir. Yani, her $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$

$$[J_{mn}]_{ij} = 1$$

dir.

İspat: Girdileri C de olan m × n tipinde herhangi bir matris A olsun. O zaman

$$[J_{mn} \circ A]_{ij} = \left[1 \circ [A]_{ij}\right]_{ij} = [A]_{ij}$$

olduğundan $J_{mn} \circ A = A$ dır. Hadamard matris çarpımı değişmeli olduğundan

$$J_{mn} \circ A = A \circ J_{mn} = A$$

olur. Bu yüzden J_{mn} Hadamard matris çarpımının birim matrisi olarak tanımlanır.

Dikkat edelim ki J_{mn} Hadamard matris çarpımının birim matrisi alışılmış standart matris çarpımın birim matrisi I_n den farklıdır.

Standart matris çarpımına göre karesel matrisler için determinant değeri sıfıdan farklı iken ters matris tanımlı idi. Hadamard matris çarpımı herhangi m×n tipindeki matrisler için tanımlı olduğundan karesel olmayan matrislerin de tersinden söz etmek mümkün olmaktadır. Şimdi Hadamard çarpımına göre bir matrisin tersinin var olma koşulunu aşağıdaki teoremle verebiliriz:

Teorem 4.1.4. A, girdileri C de olan m × n tipinde matris olsun. O zaman A nın Hadamart çarpımına göre ters çevrilebilir olması için gerek ve yeter koşul bütün girdilerinin sıfırdan farklı olmasıdır.

İspat: (⇒) $A = [a_{ij}]$, m × n tipinde Hadamard ters çevrilebilir matris olsun. O zaman

$$A \circ B = J_{mn}$$

olacak şekilde m × n tipinde $B = [b_{ij}]$ matrisi vardır. Hadarmard matris çarpımı tanımından

$$a_{ij}.b_{ij} = 1$$

olur. Buradan girdileri C nin elemanları olan her A matrisi için bu eşitlik $a_{ij} \neq 0$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ iken sağlanır.

($\Leftarrow$) $A = [a_{ij}]$, m × n tipinde matrisinin girdileri sıfırdan farklı olsun.

O zaman $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ iken a_{ij} girdisinin C de çarpma işlemine göre tersi vardır.

$b_{ij} = a_{ij}^{-1}$ ters elemanlarını girdi kabul eden $B = [b_{ij}]$ matrisi için $a_{ij}.b_{ij} = 1$ olduğundan $A \circ B = J_{mn}$ olur. Böylece B matrisi A nın Hadamard tersi olur.

A nın Hadamard tersini $\hat{A}$ ile gösterirsek

$$A \circ \hat{A} = \hat{A} \circ A = J_{mn}$$

olur.

Örnek 4.1.5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ ile $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -11 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ matrislerinin Hadamard çarpımı

$A \circ B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 25 \\ 11 & 4 & 24 \end{bmatrix}$

olarak bulunur.

Örnek 4.1.6. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ ile $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ matrislerini göz önüne alalım. A matrisinin a_{12} girdisi sıfır olduğundan Hadamard çarpımına göre tersi yoktur. B nin bütün girdileri sıfırdan farklı olduğundan Hadamard tersi tanımlı olup

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & -1/5 \\ 1 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Çünkü

$$B \circ \tilde{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & -1/5 \\ 1 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = J_{23}$$

olur.

Teorem 4.1.7. Sıfırdan farklı girdilere sahip m × n tipindeki matrisler Hadamard çarpımına göre bir değişmeli grup oluştururlar.

İspat: m × n tipindeki matrisler Hadamard çarpımına göre birleşme, değişme özelliklerini sağlarlar. Ayrıca sıfırdan farklı girdilere sahip m × n tipindeki tersinin varlığını teorem 4.1.4 den biliniyor. Birim eleman da bütün girdileri 1 olan m × n tipindeki matristir.

Sıfırdan farklı girdilere sahip m × n tipindeki matrisler Hadamard çarpımına göre bir değişmeli grup oluştururlar.

Teorem 4.1.8. The Hadamard matris çarpımı lineerdir. r ∈ *C* ve m × n tipindeki matrisler A, B ve C olsunlar. O zaman

i)C ◦ (A+B) = C ◦A+C ◦B

ii) r(A◦B) = (rA) ◦B = A◦ (rB).

İspat: $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ ve $C = [c_{ij}]$, m × n tipinde matrisler olsunlar.

$$\begin{aligned} \mathrm{C} \circ (\mathrm{A} + \mathrm{B}) &= [c_{ij}] \circ ([a_{ij}] + [b_{ij}]) \\ &= [c_{ij}] \circ ([a_{ij} + b_{ij}]) \\ &= [c_{ij}(a_{ij} + b_{ij})] \\ &= [c_{ij}a_{ij} + c_{ij}b_{ij}] \\ = [c_{ij}a_{ij} + c_{ij}b_{ij}] &= [c_{ij}a_{ij}] + [c_{ij}b_{ij}] \\ &= \mathrm{C} \circ \mathrm{A} + \mathrm{C} \circ \mathrm{B} \end{aligned}$$

ii) r ∈ *C* ve m × n tipindeki matrisler A ve B olsunlar.

$$\mathrm{r}(\mathrm{A} \circ \mathrm{B}) = r([a_{ij}] \circ [b_{ij}]) = r[a_{ij}b_{ij}] = [r(a_{ij}b_{ij})]$$
$$= [(ra_{ij})b_{ij}] = [ra_{ij}] \circ [b_{ij}] = \mathrm{rA} \circ \mathrm{B}$$

ve

$$[r(a_{ij}b_{ij})] = [(ra_{ij})b_{ij}] = [(a_{ij}r)b_{ij}] = [a_{ij}(rb_{ij})] = [a_{ij}] \circ [rb_{ij}] = \mathrm{A} \circ \mathrm{rB}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.9. Herhangi aynı tipten iki diagonal matrisin Hadamard çarpımı diagonal matristir.

İspat: $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrisleri n× n tipindeki matrisler olsunlar. Hadamard çarpımına göre $A \circ B = [a_{ij}.b_{ij}]_{n\times n} = [c_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin c_{ij} girdileri birbirinden farklı i ve j değerleri için $c_{ij=}0$ olduğundan yani köşegen elemanları dışındaki girdileri 0 olduğundan diagonal matristir.

Teorem 4.1.10. $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrisleri m× n tipindeki matrisler, C ve D de m ve n tipindeki diagonal matrisler olsunlar.

$$\begin{aligned} C.(A \circ B).D &= (C.A.D) \circ B = (C.A) \circ (B.D) \\ &= (AD) \circ (CB) = A \circ (CBD) \end{aligned}$$

(Horn,1994).

Örnek 4.1.11. 2× 3 tipinde $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}$ ile $B=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}$ matrislerini ve 2×2 tipinde diyagonal formda olan C=$\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ile $D=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ matrislerini göz önüne alalım.

$$C.(A\circ B).E = (C.A.D)\circ B = (C.A)\circ(B.D)$$
$$= (AD)\circ(CB) = A\circ(CBD)$$

eşitliğinin sağlandığını bu matrisler için örneklendirelim:

$$C.(A\circ B).D = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.\left(\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}\right).\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-2 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 12\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-20 & 0 & 4\\ 5 & -6 & 12\end{bmatrix}$$

olur.

$$(C.A.D)\circ B = \left(\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)\circ\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}20 & 0 & 2\\ 5 & -3 & 3\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-20 & 0 & 4\\ 5 & -6 & 12\end{bmatrix}$$

de de aynı sonuç elde edilir.

$$(C.A)\circ(B.D) = \left(\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}\right)\circ\left(\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix}4 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}-5 & 9 & 2\\ 5 & 6 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-20 & 0 & 4\\ 5 & -6 & 12\end{bmatrix}$$

ve

$$(AD)\circ(CB) = \left(\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)\circ\left(\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}\right) =$$
$$\begin{bmatrix}10 & 0 & 1\\ 5 & -3 & 3\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}-2 & 6 & 4\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-20 & 0 & 4\\ 5 & -6 & 12\end{bmatrix}.$$

Son olarak

$$A \circ (CBD) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \circ \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} -10 & 18 & 4 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 4 \\ 5 & -6 & 12 \end{bmatrix}$$

bulunur.

Vektörlerin Hadamard Çarpımı:

Vektörlerin nokta çapımı veya çarpımı bir sayı iken iki vektörlerin Hadamard çarpımı bir vektördür.

Böylece eşitliklerin hepsinin sağlandığı görülmektedir.

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ ve } \vec{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, x_i y_i \in \mathbb{R}$$

vektörleri için skaler çarpım

$$\vec{X}.\vec{Y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = [x_1, x_2, \cdots, x_n] \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}$$

iken Hadamart çarpım

$$\vec{X} \circ \vec{Y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \\ \vdots \\ x_n y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

vektörüdür. Genel olarak iki vektörün iç çarpımının mutlak değeri vektörlerin boylarının çarpımından küçük veya en fazla eşittir. Benzer eşitsizlik Hadamart çarpım vektörünün boyu içinde geçerlidir

$$\| \vec{X} \circ \vec{Y} \| \leq \| \vec{X} \| \| \vec{Y} \| .$$

Örnek 4.1.12. $\mathbb{R}^2$ de $\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ve $\vec{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

vektörleri için

$$\| \vec{X} \circ \vec{Y} \| = \| \vec{X} \circ \vec{Y} \| = \sqrt{(x_1y_1)^2+(x_2y_2)^2} \leq \sqrt{(x_1y_1)^2+(x_2y_2)^2 + (x_1y_2)^2+(x_2y_1)^2} = \sqrt{(x_1)^2+(x_2)^2}\sqrt{(y_1)^2+(y_2)^2} = \| \vec{X} \| \| \vec{Y} \|$$

elde edilir.

4.2. Frobenius İç Çarpım

Matematikte, Frobenius iç çarpımı, aynı tiptan iki matrisi bir sayı ile eşleştiren bir ikili işlemdir. Matrisler vektör formunda iseler Frobenius iç çarpımı standart iç çarpıma eşdeğerdir. Genellikle A ve B aynı tipten matrislerinin Frobenius iç çarpımı $\langle A, B \rangle_F$ biçiminde gösterilir (Zaka, 2017).

$A = [a_{ij}]$, m× n ve $B = [b_{ij}]$ matrisleri m× n tipindeki matrisler, C ve D de m ve n tipindeki matrisler olsunlar.

$$\langle A, B \rangle_F = \langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix} \rangle_F = \text{İz}(A^T B)$$

$$= \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ij}$$

biçiminde tanımlanır.

Örnek 4.2.1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ile $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrislerinin İz iççapımı Frobenius iç çarpımı

$$\langle A, B \rangle_F = \text{İz}(A^T B) = \text{İz}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \right) = \text{İz} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 7 & 3 & 28 \end{pmatrix} = 31$$

olarak bulunur.

Teorem 4.2.2. $A = [a_{ij}]$, m× n ve $B = [b_{ij}]$ matrisleri m× n tipindeki matrisleriçin iz iç çarpımı

i) $\langle A, B \rangle_F = \langle B, A \rangle_F$

ii) Her A matrisi için

$$\langle A, A\rangle_F \geq 0$$

ve

$$\langle A, A\rangle_F = 0 <=> \mathrm{A} = 0$$

özelliklerine sahiptir.

İspat: i)

$$\langle A, B\rangle_F = \langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix} \rangle_F = \mathrm{İz}(A^T B) =$$

$\sum_i \sum_j a_{ij} b_{ij} = \sum_i \sum_j b_{ij} a_{ij} = \mathrm{İz}(B^T A) = \langle B, A\rangle_F$

ii) $\langle A, A\rangle_F = \mathrm{İz}(A^T A) = \sum_i \sum_j a_{ij} a_{ij} \geq 0$ ve

$\langle A, A\rangle_F = 0 <=> \sum_i \sum_j a_{ij} a_{ij} = 0 <=> a_{ij} = 0 <=> A = O$

olur.

4.3. Kroneker Çarpım

Kronecker çarpım adını Alman matematikçi Leopold Kronecker (1823-1891) dan almıştır. Ancak onu tanımlayan ve kullanan ilk kişi olduğuna dair çok az kanıt vardır. Kronecker çarpımı 1858'de bu matris işlemini tanımlayan Johann Georg Zehfuss'tan sonra Zehfuss matrisi adlandırılmıştır, Kronecker çarpım şu anda en yaygın kullanılanıdır(Zehfuss,1858).

Tanım 4.3.1. $A = [a_{ij}]$, m× n ve $B = [b_{ij}]$ matrisleri p× r tipindeki matrisler olsunlar. A ile B nin Kronecker çarpımı $A \otimes$ B ile gösterilir ve

$$A \otimes \mathrm{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix}_F$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2} & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlanır. Sonuç mp× nr tipinde bir blok matristir.

Örnek 4.3.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrislerinin Kroneker çarpımı

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} & -1\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ 1\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} & 0\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ 5\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} & 3\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & -2 & 0 & -5 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 25 & 6 & 0 & 15 \\ -5 & 5 & 15 & -3 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

biçiminde 6× 6 tipinde karesel matristir.

Kroneker Çarpımının Özellikleri

A, B, C, D matrisler ve k reel sayı olmak üzere Kronecker çarpımı aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. Kronecker çarpımı değişme özelliğine sahip değildir.
2. $A \otimes (\mathrm{B} + \mathrm{C}) = (A \otimes \mathrm{B}) + (A \otimes \mathrm{C})$
3. $(A + B) \otimes \mathrm{C} = (A \otimes \mathrm{C}) + (B \otimes \mathrm{C})$
4. $(\mathrm{kA}) \otimes \mathrm{B} == (A \otimes \mathrm{kB}) = \mathrm{k}(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B})$
5. $A \otimes O = \mathrm{O} \otimes \mathrm{A} = \mathrm{O}$
6. $\mathrm{A} \otimes (B \otimes \mathrm{C}) = (A \otimes \mathrm{B}) \otimes \mathrm{C}$
7. $(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B})^T = A^T \otimes B^T$
8. $A.C$ *ve* $\mathrm{B.D}$ alışılmış matris çapımı tanımlı olan A,B,C ve D matrisleri verilsin. O zaman

$$(A \otimes \mathrm{B}).(C \otimes \mathrm{D}) = (A.C \otimes \mathrm{B.D})$$

özelliği geçerlidir. Bu özellik *karışık çarpım özelliği* olarak bilinir.

9. $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ matrisinin tersinin olması için gerek ve yeter koşul A ve B matrislerinin tersinin var olmasıdır. Bu durumda $(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B})^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$dir.

4.4. Cracovian Matris Çarpımı

Cracovian matris çarpımı 1930 larda Tadeusz Banachiewicz tarafından tanıtılan bir yöntemdir.

Ax = b lineer denklem sistemlerinin elle çözümü şu şekilde yazılabilir:

Ax = b lineer denklem sisteminde x ve b sütun vektörleridir ve b vektörü A nın satırlarının x vektörü ile çarpımına eşittir. xA^T = b = Ax dir. Cracovian matris çarpımı matris analizinin standart satır-sütun kuralının aksine, tek tek öğeleri belirlemek için bir sütun satırı kuralı benimsediler. Bu, iki paralel sütunu (matris gösteriminde dikey bir sütun ve yatay bir satır yerine) takip etmesi gerektiğinden elle yapılan çarpmayı kolaylaştırdı.) Ayrıca bilgisayar hesaplamalarını hızlandırdı, çünkü her iki faktörün öğeleri de benzer bir sırayla kullanıldı, bu da o zamanların bilgisayarlarındaki sıralı erişim belleğiyle daha uyumluydu.

Tanım 4.4.1. A ve B matrislerinin Cracovian matris çarpımı $A \wedge \mathrm{B}$ ile gösterilir ve

$$A \wedge \mathrm{B} = B^T.\mathrm{A}$$

biçiminde tanımlanır. Burada B^Tve A standart matris çapımı uygulanabilir tipten matrislerdir.

$(A.B)^T = B^T.A^T$

olduğundan genel olarak birleşme özelliği yoktur.
$(A \wedge \mathrm{B}) \wedge \mathrm{C} = C^T.(A \wedge \mathrm{B}) = C^T.B^T.\mathrm{A}$ ve

$$A \wedge (\mathrm{B} \wedge \mathrm{C}) = (B \wedge \mathrm{C})^T.\mathrm{A} = C^T.B.\mathrm{A}$$

sonuçları elde edilir. Buradan $(A \wedge \mathrm{B}) \wedge \mathrm{C} \neq A \wedge (\mathrm{B} \wedge \mathrm{C})$ olduğu görülmektedir.

Cracovian matris çarpımı genel olarak değişme özelliğine özelliğine sahip değildir. Bunu bir örnekle gösterebiliriz:

Örnek 4.4.2. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ matrislerinin Cracovian çarpımı

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 12 \\ 14 & 10 \end{bmatrix}$$

biçiminde 2× 2 tipinde matristir.

5. 3D MATRİS ÇARPIM HALKASI

2-boyutlu matris teorisi günümüzde 3 ve daha yüksek boyutlu matrisler teorisine genişletilmiştir ve bunlar için bazı tanımlar, teoremler ve sonuçlar litaratüre kazandırılmaya devam etmektedir.

3-boyutlu matrisler kümesi ile birimli halka arasındaki ilgi ve ilişkili bazı sonuçlar Orgest Zaka'nın "3D Matrix Ring with a "Common" Multiplication" adlı makalesinde sunulmuştur (Zaka, 2017). Bu çalışmada skaler çarpımın anlamı yorumlanıp 3D matrisler halkası veya vektör uzayına bağlı bir F modül varlığı gösterilmiştir.

Bu bölümde 2D matrisler için tanımlı alışılmış matris çarpımı 3D matrislerin çarpımına ve daha sonrada m ×n ×p tipindeki matrislerin çarpımına genişletilmekte ve girdileri F cisminden alınan 3- boyutlu matrislerin üzerinde tanımlı iki işlemle birlikte birimli matris halkası oluşturduğu incelenmektedir.

5.1. Üç Boyutlu Matrisler

Tanım 5.1.1. 3 boyutlu m × n × s matrislerin kümesi m × n tipinde s tane 2-boyutlu matrislerin dikey sayfalardan oluşan diziliştir. Bu kümenin k ıncı matrisi A_k ile gösterilirse m × n × s tipinde üç boyutlu matris $A = \cup_{k=1}^{s} A_k$ biçiminde tanımlanır, (Özkaya, 2018). 3-boyutlu m × n × s matrislerinin kümesini şu şekilde gösterebiliriz:

$M_{mns} = \{A_{mns} = (a_{ijk}) | a_{ijk} \in F \; ve \; i = 1, 2, \dots, m; \; j = 1, 2, .., n; \; k = 1, 2, \dots, s\}$

biçiminde tanımlı m.n.s girdili bir matristir.

3- boyutlu 3 × 3 × 3 matrisi alışılmış matrislerdeki satırlara benzer üç yatay katman ve alışılmış matrislerdeki sütunlara benzer ikisi gözükmeyen üç dikey sayfadan oluşan bir matristir.

Örnek 5.1.2. 3 × 2 × 4 tipinde 3 boyutlu matris 3 × 2 tipinde 4 tane 2 boyutlu matrislerin birleşim kümesidir.

$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$A = \cup_{k=1}^{4} A_k = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix}$$

matrisi $3 \times 2 \times 4$ tipinde 3 boyutlu bir matris örneğidir.

Tanım 5.1.3. $A = (a_{ijk})$ ve $B = (b_{ijk})$ üç boyutlu aynı tipten matrislerinin toplamı

$$A + B = (c_{ijk}) = (a_{ijk}) + (b_{ijk}) = (a_{ijk} + b_{ijk}), a_{ijk}, b_{ijk} \in F$$

biçiminde tanımlanan aynı tipten üç boyutlu matristir.

Örnek 5.1.4. $3 \times 2 \times 4$ tipinde 3 boyutlu matris 3×2 tipinde 4 tane 2 boyutlu matrislerin birleşim kümesidir. Örneğin ,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $A = \cup_{k=1}^{4} A_k$ matrisi $3 \times 2 \times 4$ tipinde 3 boyutlu bir matristir.

Tanım 5.1.5. Bir F cismi üzerinde üç boyutlu m × n × s tipinde sıfır matrisi $O = O_{mns}$ ile gösterilir ve bütün girdileri sıfır olan matristir.

$O = O_{mns} = (a_{ijk}), a_{ijk} = 0, 0 \in F \; ve \; i = 1, 2, \dots, m; \; j = 1, 2, .., n; \; k = 1, 2, \dots, s.$

Tanım 5.1.6. Bir F cismi üzerinde üç boyutlu m × n × s tipinde $A_{mns} = (a_{ijk})$ matrisinin toplamaya göre tersi $-A_{mns} = -(a_{ijk}) = (-a_{ijk}), a_{ijk} \in F \; ve \; i = 1, 2, \dots, m; \; j = 1, 2, .., n; \; k = 1, 2, \dots, s$ biçiminde tanımlı üç boyutlu matristir.

Örnek 5.1.7.

$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$A_{324} = \cup_{k=1}^{4} A_k = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix}$ üç boyutlu matrisinin toplamsal tersi

$-A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, -A_2 = \begin{bmatrix} -3 & -0 \\ -1 & -2 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}, -A_3 = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 0 & -4 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}, -A_4 = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -4 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

katmanlarından oluşan yine 3 × 2 × 4 tipinde

$-A_{324} = \cup_{k=1}^{4} (-A_k) = \begin{bmatrix} -A_1 \\ -A_2 \\ -A_3 \\ -A_4 \end{bmatrix}$ üç boyutlu bir matristir.

$A_{mns} + (-A_{mns}) = (a_{ijk}) + (-a_{ijk}) = O_{mns}, i = 1, \dots, m;\ j = 1, 2, .., n;\ k = 1, 2, \dots, s.$

$$A_{mns} + (-A_{mns}) = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A_1 \\ \vdots \\ -A_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + (-A_1) \\ \vdots \\ A_s + (-A_s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O \\ \vdots \\ O \end{bmatrix} = O_{mns}.$$

Teorem 5.1.8. Bir F cismi üzerinde üç boyutlu m × n × s tipinde matrislerin kümesi M_{mns} (F) toplama işlemine göre değişmeli grup oluşturur.

İspat: Üç boyutlu matrislerin toplamı Tanım5.1den $\forall\ i = 1, \dots, m;\ j = 1, 2, .., n;\ k = 1, 2, \dots, s$ için $a_{ijk} \in F, b_{ijk} = 0, 0 \in F$ iken $c_{ijk} = a_{ijk} + b_{ijk} \in F$ olduğundan kapalılık özelliğine sahiptir. Şimdi, M_{mns} kümesinin toplama işlemine göre birleşme, etkisiz eleman, ters eleman ve değişme özelliklerini sağladığını gösterilmelidir.

Birleşme özelliği: $\forall\ A = (a_{ijk}), B = (b_{ijk})$ ve $C = (c_{ijk}) \in M_{mns}(F)$ için üç boyutlu aynı tipten matrislerinin toplamının

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$ özeliği;

F cisminde toplama işleminin birleşme özelliği

$$(a_{ijk} + b_{ijk}) + c_{ijk} = a_{ijk} + (b_{ijk} + c_{ijk})$$

var olduğundan

$$(A+B)+C=\left(a_{ijk}+b_{ijk}\right)+\left(c_{ijk}\right)=\left(\left(a_{ijk}+b_{ijk}\right)+c_{ijk}\right)=\Big(a_{ijk}+\left(b_{ijk}+c_{ijk}\right)\Big)$$

$$=\left(a_{ijk}\right)+\left(b_{ijk}+c_{ijk}\right)=A+(B+\mathrm{C})$$

sağlanır.

2. $\forall A=\left(a_{ijk}\right)\in M_{mns}(F)$ için ($A+O=O+A=A$ olacak şekilde bir tek $\forall O=\left(0_{ijk}\right)\in M_{mns}(F)$ vardır.

$\forall i=1,\dots,m;\ j=1,2,..,n;\ k=1,2,\dots,s$ için F cismimde 0_F toplamaya göre etkisiz eleman olduğundan

$$A+O=\left(a_{ijk}\right)+\left(0_{ijk}\right)=\left(a_{ijk}+0_F\right)=\left(a_{ijk}\right)=A \text{ ve}$$

$$O+A=\left(0_F+a_{ijk}\right)=\left(a_{ijk}\right)=\mathrm{A}$$

elde edilir.

3. $\forall A=\left(a_{ijk}\right)\in M_{mns}(F)$ için $A+-A=O$ olacak şekilde , $a_{ijk}\in F$ bir tek $-A=\left(-a_{ijk}\right)\in M_{mns}(F)$ vardır.

$a_{ijk}\in F$ için $a_{ijk}+\left(-a_{ijk}\right)=0\in F$ olduğundan

$$A+-A=\left(a_{ijk}\right)+\left(-a_{ijk}\right)=\Big(a_{ijk}+\left(-a_{ijk}\right)\Big)=\left(0_F\right)=O$$

dir.

4. $M_{mns}(F)$ toplama işlemine göre değişme özelliğine sahiptir. Yani

$\forall A=\left(a_{ijk}\right),B=\left(b_{ijk}\right)\in M_{mns}(F)$ için üç boyutlu aynı tipten matrislerinin toplamını

$$A+B=B+A$$

dir.

F cisminde $a_{ijk}\in F, b_{ijk}\in F$ için toplama işleminin değişme özelliği

$a_{ijk}+b_{ijk}=b_{ijk}+a_{ijk}$ sağlandığından

$$A + B = (a_{ijk}) + (b_{ijk}) = (a_{ijk} + b_{ijk}) = (b_{ijk} + a_{ijk}) = B + A$$

sağlanır.

5.2. Üç Boyutlu Matrislerde Çarpma işlemi

Tanım 5.2.1. $A = (a_{ijk})$, $m \times n \times s$ ve $B = (b_{ijk})$, $n \times p \times s$ tipinde üç boyutlu matrislerinın çarpımı $m \times p \times s$ tipinden üç boyutlu $C = A * B$ matrisidir ve C matrisinin girdileri c_{ijk}

$$c_{ijk} = \sum_{t=1}^{n} a_{itk}\, b_{tjk}, a_{ijk}, b_{ijk} \in F$$

biçiminde tanımlanır(Özkaya, 2018).

Örnek 5.2.2. $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

olmak üzere $3 \times 2 \times 2$ tipinde $A = \cup_{k=1}^{2} A_k$ ve $2 \times 2 \times 2$ tipinde üç boyutlu $B = \cup_{k=1}^{2} B_k$ boyutlu matrislerinin çarpımı olan C matrisi için katmanlar

$$C_1 = A_1.B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 29 & 20 \\ 45 & 32 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = A_2.B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 14 \\ 1 & 24 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir ve

$$C = \cup_{k=1}^{2} C_k = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1.B_1 \\ A_2.B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 29 & 20 \\ 45 & 32 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 14 \\ 1 & 24 \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$3 \times 2 \times 2$ tipinde 3 boyutlu bir matristir.

Örnek 5.2.3. $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

olmak üzere $3 \times 3 \times 2$ tipinde $A = \cup_{k=1}^{2} A_k$ ve $3 \times 1 \times 2$ tipinde üç boyutlu $B = \cup_{k=1}^{2} B_k$ boyutlu matrislerinin çarpımı olan C matrisi için bloklar

$$C_1 = A_1 * B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ 32 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = A_2 * B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir ve $C = \cup_{k=1}^{2} C_k = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 . B_1 \\ A_2 . B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ 32 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$, $3 \times 1 \times 2$ tipinde 3 boyutlu bir matristir.

İki boyutlu matrislerde çarpma işleminin değişme özelliği olmadığından üç boyutlu matrislerde de çarpma işleminin değişme özelliği yoktur.

Tanım 5.2.4. 3-boyutlu n× n × s tipinde birim matris I_{nxnxs} biçiminde gösterilir ve s tane I_n birim matrisinden oluşan bir matristir.

$$I_{nxnxs} = \cup_{k=1}^{s} I_n \ni I_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{nxn}$$

Örnek 5.2.5 3-boyutlu $3 \times 3 \times 3$ tipinde birim matris

$$I_{3x3x3} = I_3 \cup I_3 \cup I_3 = \begin{bmatrix} I_3 \\ I_3 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

3-boyutlu m× n × s tipinde A matrisi sağdan 3-boyutlu I_{nxnxs} birim matris ve soldan I_{mxmxs} çarpım sonucu A matrisini verir. Yani üç boyutlu birim matris çarpmaya göre etkisiz elemandır.

Teorem 5.2.6. **(**M_{nns} (F),*) üç boyutlu matrisler uzayı alışılmış matris çarpımına göre birimli yarıgruptur.

İspat:

1)Birleşme özelliği: $\forall A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_s \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_s \end{bmatrix}$ ve $C = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_s \end{bmatrix} \in M_{nns}(F)$ için üç boyutlu aynı tipten matrislerinin çarpımının

$$(A * B * C = A * (B * C) \text{ özeliği;}$$

Girdileri F cisminden alınan iki boyutlu aynı tipten karesel matrisler uzayında çarpma işleminin birleşme özelliği

$$(A * B) * C = \left(\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_s \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_s \end{bmatrix} \right) * \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 . B_1 \\ \vdots \\ A_s . B_s \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_1 . B_1) . C_1 \\ \vdots \\ (A_s . B_s) . C_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 . (B_1 . C_1) \\ \vdots \\ A_s . (B_s . C_s) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_s \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} B_1 . C_1 \\ \vdots \\ B_s . C_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_s \end{bmatrix} * \left(\begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_s \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_s \end{bmatrix} \right) = A * (B * C)$$

sağlanır.

2) Etkisiz eleman özelliği: $\forall A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_s \end{bmatrix} \in M_{nns}(F)$ için $A * I = A$ olacak şekilde bir tek $I_{nxnxs} \in M_{mns}(F)$ vardır.

$$A * I_{nxnxs} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_s \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} I_{nxn} \\ \vdots \\ I_{nxn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 . I_{nxn} \\ \vdots \\ A_s I_{.nxn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_s \end{bmatrix} = A$$

Teorem 5.2.7. **(**M_{nns}(F),+,*) üç boyutlu matrisler uzayı alışılmış matris toplamı ve çarpımına göre birimli halkadır.

İspat: i)Teorem 5.1.8 den **(**M_{nns}(F),+) değişmeli gruptur.

ii) Teorem 5.2.6 dan **(**M_{nns}(F),*)birimli yarı gruptur.

iii) $\forall\, A=\begin{bmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_s\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}B_1\\ \vdots\\ B_s\end{bmatrix}$ ve $C=\begin{bmatrix}C_1\\ \vdots\\ C_s\end{bmatrix}\in M_{nns}(F)$ için iki boyutlu **(**M_{nn}(F),+,*) uzayında çarpma işleminin toplama işlemi üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği vardır.

İki boyutlu $n\times n$ tipinde her A_i, B_i ve C_i , i=1,2,…,s matrisleri için $A_i.(B_i+C_i)=A_i.B_i+A_i.C_i$ ve $(A_i+B_i).C_i=A_i.C_i+B_i.C_i$özellikleri geçerlidir. Böylece

$$1)\quad A*(B+C)=\begin{bmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_s\end{bmatrix}*\left(\begin{bmatrix}B_1\\ \vdots\\ B_s\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}C_1\\ \vdots\\ C_s\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_s\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}B_1+C_1\\ \vdots\\ B_s+C_s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1(B_1+C_1)\\ \vdots\\ A_s\,(B_s+C_s)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}A_1.B_1+A_1.C_1)\\ \vdots\\ A_s.B_s+A_s.C_s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1.B_1\\ \vdots\\ A_s.B_s\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}A_1.C_1)\\ \vdots\\ A_s.C_s)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_s\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}B_1\\ \vdots\\ B_s\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_s\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}C_1\\ \vdots\\ C_s\end{bmatrix}$$

$$=A*B+A*C$$

elde edilir.

$$2)\ (A+B)*C=\left(\begin{bmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_s\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1\\ \vdots\\ B_s\end{bmatrix}\right)*\begin{bmatrix}C_1\\ \vdots\\ C_s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1+B_1\\ \vdots\\ A_s+B_s\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}C_1\\ \vdots\\ C_s\end{bmatrix}.=\begin{bmatrix}(A_1+B_1).C_1)\\ \vdots\\ (A_s+B_s).C_s)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}A_1.C_1+B_1.C_1)\\ \vdots\\ A_s.C_s+B_s.C_s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1.C_1)\\ \vdots\\ A_s.C_s)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1.C_1)\\ \vdots\\ B_s.C_s)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_s\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}C_1\\ \vdots\\ C_s\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1\\ \vdots\\ B_s\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}C_1\\ \vdots\\ C_s\end{bmatrix}=A*C+B*C$$

i,ii ve iii koşulları sağlandığından **(** M_{nns}(F),+,*) üç boyutlu matrisler uzayı alışılmış matris toplamı ve çarpımına göre birimli halkadır.

5.3. Üç Boyutlu Matrisleri Skalerle Çarpma

Tanım 5.3.1. $A = (a_{ijk}) \in M_{mns}(\mathrm{F})$ matrisinin $r \in F$ ile çarpımı üç boyutlu C=r⊙A $\in M_{mns}(\mathrm{F})$matrisidir ve C matrisinin girdileri c_{ijk}

$$c_{ijk} = \sum_{t=1}^{n} r a_{itk}\,, a_{ijk} \in F$$

biçiminde tanımlanır.

Yani, $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_s \end{bmatrix} \in M_{nns}(F)$ matrisinin r skaler katı, $r \odot A = \begin{bmatrix} rA_1 \\ \vdots \\ rA_s \end{bmatrix}$ biçiminde tanımlı üç boyutlu aynı tipten matristir.

Örnek 5.3.2. $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

olmak üzere $3 \times 2 \times 2$ tipinde $A = \cup_{k=1}^{2} A_k$ matrisinin 3 katı olan C matrisi için katmanlar

$$C_1 = 3A_1 = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \\ 15 & 18 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = 3A_2 = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 6 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir ve

$$C = 3 \odot A = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3A_1 \\ 3A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \\ 15 & 18 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 6 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$3 \times 2 \times 2$ tipinde 3 boyutlu bir matristir.

$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_s \end{bmatrix} \in M_{nns}(F)$ matrisinin 0 skaler katı, $0 \odot A = \begin{bmatrix} 0A_1 \\ \vdots \\ 0A_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O \\ \vdots \\ O \end{bmatrix} = O$ boyutlu aynı tipten sıfır matrisi ve 1 skaler katı

$$1 \odot A = \begin{bmatrix} 1A_1 \\ \vdots \\ 1A_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_s \end{bmatrix} = A$$

matrisidir.

5.4. Üç Boyutlu Matrislerin Vektör Uzayı

Bu bölümde F cismi üzerinde tanımlı 3-boyutlu matrislerin M_{mns} kümesinin + ve $\odot$ işlemleri ile birlikte vektör uzayı aksiyomlarını sağladığını gösterilmektedir.

Teorem 5.4.1. **(**M_{mns}(F),+, $\odot$) bir vektör uzayıdır.

İspat: **(**M_{mns}(F),+) kümesi Teorem 5.1.8 den değişmeli gruptur. Ayrıca M_{mns}(F), skalerle çarpım işlemine göre aşağıdaki özellikleri sağlar. Ayrıca aşağıdaki skalerle çarpımla ilgili dört özelliğin sağlandığı gösterilirse ispat tamamlanır.

i) $\forall A = (a_{ijk}), B = (b_{ijk}) \in \mathrm{M}_{mns}(F)$ ve $\forall r \in F$ $r \odot (A + B) = r \odot A + r \odot B$ dir.

$$\begin{aligned} r \odot (A + B) &= r \odot \left((a_{ijk}) + (b_{ijk})\right) \\ &= r \odot \left(a_{ijk} + b_{ijk}\right), \quad (M_{mn}(\mathrm{F}) \text{ üzerinde} + \text{tanımı }) \\ &= \left(r.\left(a_{ijk} + b_{ijk}\right)\right), (M_{mns}(\mathrm{F}) \text{ üzerinde} + \text{tanımı }) \\ &= \left(ra_{ijk} + rb_{ijk}\right), \quad (M_{mn}(\mathrm{F}) \text{ üzerinde } \odot \text{ tanımı }) \\ &= r \odot \left(a_{ijk}\right) + r \odot (b_{ijk}), (M_{mns}(\mathrm{F}) \text{ üzerinde } \odot \text{ tanımı }) \\ &= r \odot A + r \odot B, \end{aligned}$$

ii) $\forall A = \left(a_{ijk}\right) \in \mathrm{M}_{mns}(F)$ ve $\forall k, r \in F$ $(k + r) \odot A = k \odot A + r \odot A$ dir.

$$
\begin{aligned}
(k+r)\odot A &= (k+r)\odot (a_{ijk}) \\
&= \left((k+r)a_{ijk}\right), \quad (M_{mns}(\mathrm{F})\ \text{üzerinde}\ \odot\ \text{tanımı}\ ) \\
&= \left(k.a_{ijk} + r.a_{ijk}\right), (M_{mn}(\mathrm{F})\ \text{üzerinde . nın + üzerine dağılma özelliği}) \\
&= (k.a_{ijk}) + (r.a_{ijk}), \quad (M_{mns}(\mathrm{F})\ \text{üzerinde} +\ \text{tanımı}\ ) \\
&= k\odot (a_{ijk}) + r\odot (a_{ijk}), (M_{mns}(\mathrm{F})\ \text{üzerinde}\ \odot\ \text{tanımı}\ ) \\
&= k\odot A + r\odot A,
\end{aligned}
$$

iii) $\forall A = (a_{ijk}) \in \mathrm{M}_{mns}(F)$ ve $\forall k, r \in F$

$(kr)\odot A = k\odot (r\odot A) = r\odot (k\odot A)$ dir.

$$
\begin{aligned}
(kr)\odot A &= (kr)\odot (a_{ijk}) \\
&= \left((kr)a_{ijk}\right), \quad (M_{mns}(\mathrm{F})\ \text{üzerinde}\ \odot\ \text{tanımı}\ ) \\
&= \left(k.(r.a_{ijk})\right), (M_{mn}(\mathrm{F})\ \text{üzerinde . tanımı}\ ) \\
&= \left(k.a_{ijk} + r.a_{ijk}\right), \quad (F\ \text{üzerinde . nın birleşme özelliği}\ ) \\
&= \left(k.a_{ijk}\right) + \left(r.a_{ijk}\right), \quad (M_{mns}(\mathrm{F})\ \text{üzerinde} +\ \text{tanımı}) \\
&= k\odot (a_{ijk}) + r\odot (a_{ijk}), (M_{mns}(\mathrm{F})\ \text{üzerinde}\ \odot\ \text{tanımı}\ ) \\
&= k\odot A + r\odot A,
\end{aligned}
$$

iv) $\forall A = (a_{ijk}) \in \mathrm{M}_{mns}(F)$ ve F cisminin çarpımsal birim elemenı e için

$e\odot A = A$ dir.

$$
\begin{aligned}
e\odot A &= e\odot (a_{ijk}) \\
&= \left(e.a_{ijk}\right), \quad (M_{mns}(\mathrm{F})\ \text{üzerinde}\ \odot\ \text{tanımı}\ ) \\
&= (a_{ijk}), (M_{mn}(\mathrm{F})\ \text{üzerinde e,. ya göre etkisiz eleman}\ ) \\
&= A.
\end{aligned}
$$

Örnek 5.4.2. GF(2) cismi üzerinde **(**$M_{212}(\mathrm{F})$,+, $\odot$) sonlu bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayının 16 tane vektörden oluşmaktadır. Bu vektörler

$$V_1 = A_{11}\cup A_{12} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, V_2 = A_{21}\cup A_{22} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},$$

$$V_3 = A_{31}\cup A_{32} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, V_4 = A_{41}\cup A_{42} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},$$

$$V_5 = A_{51}\cup A_{52} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, V_6 = A_{61}\cup A_{62} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},$$

$$V_7 = A_{71}\cup A_{72} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, V_8 = A_{81}\cup A_{82} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},$$

$$V_9 = A_{91} \cup A_{92} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, V_{10} = A_{101} \cup A_{102} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$V_{11} = A_{111} \cup A_{112} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, V_{12} = A_{121} \cup A_{122} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$V_{13} = A_{131} \cup A_{132} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, V_{14} = A_{141} \cup A_{142} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$V_{15} = A_{151} \cup A_{152} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, V_{16} = A_{161} \cup A_{162} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Örnek 5.4.3. GF(3) cismi üzerinde **(**M_{213}(F),+, $\odot$) sonlu bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayı 64 tane vektörden oluşmaktadır.

$$M_{213}(F) = \left\{ v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \mid a,b,c,d,e,f \in GF(3) \right\}$$

kümesinde a,b,c,d,e,f değişkenleri 0, 1 ve 2 değeri alabildiğinden her değişken 3 değer aldığından $3^6 = 729$ adet vektörden oluşur. Bu vektör uzayının boyutu 6 olup standart bazı

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$V_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, V_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, V_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vektörlerinin oluşturduğu kümedir.

kümesinde a,b,c,d,e,f değişkenleri 0, 1 ve 2 değeri alabildiğinden her değişken 3 değer aldığından $3^6 = 729$ adet vektörden oluşur. Bu vektör uzayının boyutu 6 olup standart bazı

$$V_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},V_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},V_3=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},$$
$$V_4=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},V_5=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},V_6=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

vektörlerinin oluşturduğu kümedir.

Örnek 5.4.4. GF(2) cismi üzerinde **(**M_{223}(F),+, $\odot$) sonlu bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayının boyutu 12 dir. Her vektör 2x2 tipinde üç adet matrisin birleşiminden oluşan üç boyutlu matristir.

$$M_{223}(F)=\left\{v=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}a''&b''\\c''&d''\end{bmatrix}\mid a,b,c,d,a',b',c',d',a'',b'',c'',d''\in GF(2)\right\}$$

kümesinde her girdi iki değer aldığından toplam $2^{12}=4096$ vektörden oluşur. Bu vektör uzayının standart bazı

$$V_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},V_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},V_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},$$
$$V_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},V_5=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},V_6=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},$$

$$V_7=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},V_8=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},V_9=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},$$
$$V_{10}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},V_{11}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},V_{12}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

vektörlerinden oluşur.

Örnek 5.4.5. F cismi üzerinde **(**M_{333}(F),+, $\odot$) sonlu bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayı

$$M_{333}(F)=\{(a_{ijk})\mid a_{ijk}\in F\ ve\ i=1,2,3;\ j=1,2,3;\ k=1,2,3\}$$

biçiminde tanımlı 3x3 tipinde üç matristen oluşan ve toplam 27 girdiye sahip olan bir matristir. GF(2) üzerinde tanımlı **(**M_{333}(GF(2)),+, $\odot$) sonlu bir vektör uzayının toplam vektör sayısı; a_{ijk} girdilerinin sayısı 27 ve her sadece 0 ve 1değeri alabildiğinden 2^{27} olur.

6. 2D VE 3D MATRİSLER ÜZERİNDE YENİ BİR MATRİS ÇARPIMI

Bu bölümde 2D ve 3D matrisler üzerinde aynı tipten matrisler için alışılmış çarpma işlemi yerine Orgest Zaka'nın "New Matrix Multiplication" adlı makalesinde verilen çarpma işlemi incelenmiştir(Zaka,2020).

Girdileri sıfırdan farklı F cismi üzerinde tanımlı 2-boyutlu matrislerin Zaka matris çapımına göre matrisin girdilerine bağlı etkisiz elemanın var olduğu gösterilmiştir.

6.1 2D Matrisler Üzerinde Zaka Matris Çarpımı

2D matrisler için tanımlı alışılmış matris çarpımında birinci matrisin sütun sayısı ikinci matrisin satır sayısına eşittir. Matrisler aynı tip olduklarında çarpım sonucu yine aynı tipten bir matristir. Şimdi aynı tipten 2D matrisler üzerinde Zaka Matris Çarpımı şu şekilde tanımlanıyor (Zaka, 2020).

Tanım 6.1.1. $A = (a_{ij})$, $m \times n$ ve $B = (b_{ij})$, $m \times n$ tipinde iki boyutlu matrislerinin Zaka matris çarpımı $m \times n$ tipinden iki boyutlu $C = A \otimes$ B matrisidir ve C matrisinin girdileri c_{ij} ler

$$c_{ij} = b_{ij}a_{ij} + b_{(i-1)j}a_{(i-1)j} + b_{(i+1)j}a_{(i+1)j} + b_{i(j-1)}a_{i(j-1)} + b_{i(j+1)}a_{i(j+1)}$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$i = 1 \ için \ b_{(i-1)j} = 0 \ ve \ a_{(i-1)j} = 0,$$

$$j = 1 \ için \ b_{i(j-1)} = 0 \ ve \ b_{i(j-1)} = 0,$$

$$i = m \ için \ b_{(i+1)j} = 0 \ ve \ a_{(i+1)j} = 0,$$

$$j = n \ için \ b_{i(j+1)} = 0 \ ve \ a_{i(j+1)} = 0,$$

dır. Böylece $\otimes : M_{mn}(F) \times M_{mn}(F) \to M_{mn}(F)$ tanımlıdır.

Örnek 6.1.2. $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -2 & 5\end{bmatrix}$ matrislerinin alışılmış matris çarpımına göre çarpım sonucu $A.B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 10\\ -11 & 20\end{bmatrix}$ matrisidir. A ve B nin Zaka çarpımı

$$A\otimes \mathrm{B}=\mathrm{C}=(c_{ij})$$

2x2 tipinde matrisidir.

$$c_{ij}=b_{ij}a_{ij}+b_{(i-1)j}a_{(i-1)j}+b_{(i+1)j}a_{(i+1)j}+b_{i(j-1)}a_{i(j-1)}+b_{i(j+1)}a_{i(j+1)}$$

tanımından

$$c_{11}=b_{11}a_{11}+b_{21}a_{21}+b_{12}a_{12}=-1.1+(-2.3)+0.2=-7,$$

$$c_{12}=b_{12}a_{12}+b_{22}a_{22}+b_{11}a_{11}+b_{13}a_{13}=0.2+4.5+(-2.3)=14,$$

$$c_{13}=b_{13}a_{13}+b_{23}a_{23}+b_{12}a_{12}=0.2+4.5+(-2.3)=14,$$

$$c_{21}=b_{21}a_{21}+b_{11}a_{11}+b_{31}a_{31}+b_{22}a_{22}=-1.1+(-2.3)+4.5=13,$$

$$c_{22}=b_{22}a_{22}+b_{12}a_{12}+b_{32}a_{32}+b_{21}a_{21}+b_{23}a_{23}=4.5+0.2+(-2.3)=14$$

$$c_{23}=b_{23}a_{23}+b_{13}a_{13}+b_{33}a_{33}+b_{22}a_{22}=4.5+0.2+(-2.3)=14$$

$$c_{31}=b_{31}a_{31}+b_{21}a_{21}+b_{32}a_{32}=0.2+4.5+(-2.3)=14,$$

$$c_{32}=b_{32}a_{32}+b_{22}a_{22}+b_{31}a_{31}+b_{33}a_{33}=0.2+4.5+(-2.3)=14,$$

$$c_{33}=b_{33}a_{33}+b_{23}a_{23}+b_{32}a_{32}+b_{13}a_{13}=0.2+4.5+(-2.3)=14$$

olarak hesaplanır. Böylece

$$A\otimes \mathrm{B}=\mathrm{C}=(c_{ij})=\begin{bmatrix}-7 & 14\\ 13 & 14\end{bmatrix}$$

şeklindedir. Görülüyor ki standart çarpım ile Zaka çarpım sonuçları aynı değildir.

Örnek 6.1.3 . $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ birim matris olmak üzere $I\otimes \mathrm{I}=\mathrm{C}=(c_{ij})$ matrisinin girdileri:

$$c_{11} = 1, c_{12} = 2, c_{21} = 2, c_{22} = 1$$

olarak hesaplanır. Böylece Zaka çarpım sonucu olarak $I \otimes \mathrm{I} = \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ simetrik matrisi elde edilir. Buradan görülüyor ki $I \otimes \mathrm{I} \neq \mathrm{I}$.

Örnek 6.1.4. $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{bmatrix}$, a, b, c ve d $\in F$ olmak üzere $A \otimes \mathrm{B} = \mathrm{C} = (c_{ij})$ matrisinin girdileri:

$$c_{11} = 0, c_{12} = 0, c_{21} = 0, c_{22} = 0$$

olarak bulunur. Böylece Zaka çarpım sonucu $A \otimes \mathrm{B} = \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sıfır matrisidir.

Buradan görülüyor ki A ve B sıfır matrisinden farklı matrisler iken $A \otimes \mathrm{B} = \mathrm{O}$ sıfır matrisidir.

Örnek 6.1.5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ A ve B nin Zaka çarpımı

$$A \otimes \mathrm{B} = \mathrm{C} = (c_{ij})$$

3x3 tipinde matrisidir. Bu matrisin girdileri

$$c_{ij} = b_{ij}a_{ij} + b_{(i-1)j}a_{(i-1)j} + b_{(i+1)j}a_{(i+1)j} + b_{i(j-1)}a_{i(j-1)} + b_{i(j+1)}a_{i(j+1)}$$

tanımından

$$c_{11} = b_{11}a_{11} + b_{21}a_{21} + b_{12}a_{12} = 1.9 + 4.6 + 2.8 = 49,$$

$$c_{12} = b_{12}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{11}a_{11} + b_{13}a_{13} = 2.8 + 5.5 + 1.9 + 3.7 = 71,$$

$$c_{13} = b_{13}a_{13} + b_{23}a_{23} + b_{12}a_{12} = 7.3 + 8.2 + 4.6 = 61,$$

$$c_{21} = b_{21}a_{21} + b_{11}a_{11} + b_{31}a_{31} + b_{22}a_{22} = 4.6 + 1.9 + 3.7 + 5.5 = 79,$$

$$c_{22} = b_{22}a_{22} + b_{12}a_{12} + b_{32}a_{32} + b_{21}a_{21} + b_{23}a_{23}$$
$$= 5.5 + 8.2 + 2.8 + 6.4 + 4.6 = 105$$

$c_{23} = b_{23}a_{23} + b_{13}a_{13} + b_{33}a_{33} + b_{22}a_{22} = 4.6 + 7.3 + 1.9 + 5.5 = 79,$

$c_{31} = b_{31}a_{31} + b_{21}a_{21} + b_{32}a_{32} = 3.7 + 5.5 + 2.8 = 62,$

$c_{32} = b_{22}a_{22} + b_{12}a_{12} + b_{32}a_{32} + b_{21}a_{21} + b_{23}a_{23} = 5.5 + 8.2 + 2.8 + 6.4 + 4.6 = 105$

$c_{33} = b_{33}a_{33} + b_{23}a_{23} + b_{32}a_{32} = 1.9 + 4.6 + 2.8 = 49$

olarak hesaplanır. Böylece

$$A \otimes \mathrm{B} = \mathrm{C} = (c_{ij}) = \begin{bmatrix} 49 & 71 & 61 \\ 79 & 105 & 79 \\ 62 & 105 & 49 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Örnek 6.1.6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ A ve B nin Zaka çarpımı

$$A \otimes \mathrm{B} = \mathrm{C} = (c_{ij})$$

3x3 tipinde matrisidir.

$$c_{ij} = b_{ij}a_{ij} + b_{(i-1)j}a_{(i-1)j} + b_{(i+1)j}a_{(i+1)j} + b_{i(j-1)}a_{i(j-1)} + b_{i(j+1)}a_{i(j+1)}$$

tanımından

$c_{11} = b_{11}a_{11} + b_{21}a_{21} + b_{12}a_{12} = 9 + 16 = 25,$

$c_{12} = b_{12}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{11}a_{11} + b_{13}a_{13} = 16 + 9 + 21 + 25 = 71,$

$c_{13} = b_{13}a_{13} + b_{23}a_{23} + b_{12}a_{12} = 21 + 16 + 24 = 61,$

$c_{21} = b_{21}a_{21} + b_{11}a_{11} + b_{31}a_{31} + b_{22}a_{22} = 1.9 + 5.5 = 34,$

$c_{22} = b_{22}a_{22} + b_{12}a_{12} + b_{32}a_{32} + b_{21}a_{21} + b_{23}a_{23}$ =25+16+24=65

$c_{23} = b_{23}a_{23} + b_{13}a_{13} + b_{33}a_{33} + b_{22}a_{22} = 79,$

$c_{31} = b_{31}a_{31} + b_{21}a_{21} + b_{32}a_{32} = 0,$

$c_{32} = b_{22}a_{22} + b_{12}a_{12} + b_{32}a_{32} + b_{21}a_{21} + b_{23}a_{23}$ =25+9=34

$c_{33} = b_{33}a_{33} + b_{23}a_{23} + b_{32}a_{32} = 24 + 9 = 33$

olarak hesaplanır. Böylece

$$A \otimes \mathrm{B} = \mathrm{C} = (c_{ij}) = \begin{bmatrix} 25 & 71 & 61 \\ 34 & 65 & 79 \\ 0 & 34 & 33 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Sonuç olarak, 3x3 tipinde iki üst üçgen matrisin standart çarpım sonucu aynı tipten üst üçgen matris iken Zaka çarpımı üst üçgen matris değildir.

6.2. 2D Matrisler Üzerinde Zaka Çarpımının Özellikleri

Bu bölümde aynı tipten 2D matrisler üzerinde Zaka Matris çarpımının sağladığı özellikler veriliyor (Zaka,2020).

Önerme 6.2.1. Zaka Matris çarpımı değişme özelliğine sahiptir.

İspat: F cismi üzerinde tanımlı her A , B $m \times n$ tipinde iki boyutlu matrislerinin Zaka matris çarpımı için $m \times n$ $A \otimes \mathrm{B} = B \otimes \mathrm{A}$ olduğu gösterilmelidir.

$A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij}) \in M_{mn}(F)$, için Tanım 6.1.1 den $C = A \otimes \mathrm{B} = (c_{ij}) = (b_{ij}a_{ij} + b_{(i-1)j}a_{(i-1)j} + b_{(i+1)j}a_{(i+1)j} + b_{i(j-1)}a_{i(j-1)} + b_{i(j+1)}a_{i(j+1)})$ matrisidir. C matrisinin girdileri c_{ij} ler için F cisminde çarpmanın değişme özelliği sağlandığından

$c_{ij} = b_{ij}a_{ij} + b_{(i-1)j}a_{(i-1)j} + b_{(i+1)j}a_{(i+1)j} + b_{i(j-1)}a_{i(j-1)} + b_{i(j+1)}a_{i(j+1)} = a_{ij}b_{ij} + a_{(i-1)j}b_{(i-1)j} + a_{(i+1)j}b_{(i+1)j} + a_{i(j-1)}b_{i(j-1)} + a_{i(j+1)}b_{i(j+1)}$, burada

$$i = 1 \ için \ b_{(i-1)j} = 0 \ ve \ a_{(i-1)j} = 0,$$

$$j = 1 \ için \ b_{i(j-1)} = 0 \ ve \ b_{i(j-1)} = 0,$$

$$i = m \ için \ b_{(i+1)j} = 0 \ ve \ a_{(i+1)j} = 0$$

$$j = n \ için \ b_{i(j+1)} = 0 \ ve \ b_{i(j+1)} = 0$$

dır. Böylece Tanım 6.1.1 den

$$\begin{aligned} C &= A \otimes \mathrm{B} \\ &= (a_{ij}b_{ij} + a_{(i-1)j}b_{(i-1)j} + a_{(i+1)j}b_{(i+1)j} + a_{i(j-1)}b_{i(j-1)} + a_{i(j+1)}b_{i(j+1)}) \\ &= B \otimes \mathrm{A} \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Örnek 6.2.2. Örnek 6.2.1 de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ matrisleri için

$$A \otimes \mathrm{B} = \begin{bmatrix} -7 & 14 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}$$

olarak bulunmuştu. Şimdi

$$B \otimes \mathrm{A} = \mathrm{C} = (c_{ij})$$

2x2 tipinde matrisinin girdileri

$$c_{ij} = b_{ij}a_{ij} + b_{(i-1)j}a_{(i-1)j} + b_{(i+1)j}a_{(i+1)j} + b_{i(j-1)}a_{i(j-1)} + b_{i(j+1)}a_{i(j+1)}$$

çarpım kuralından

$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{12}b_{12} = 1.(-1) + 3.(-2) + 2.0 = -7,$

$c_{12} = a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{11}b_{11} + a_{13}b_{13} = 2.0 + 5.4 + 3.(-2) = 14,$

$c_{21} = a_{21}b_{21} + a_{11}b_{11} + a_{22}b_{22} = 3.(-2) + 1(-1) + 4.5 = 13,$

$c_{22} = a_{22}b_{22} + a_{12}b_{12} + b_{21}a_{21} = 4.5 + 0.2 + 3.(-2) = 14$

olarak hesaplanır. Böylece

$$B \otimes \mathrm{A} = A \otimes \mathrm{B} = \begin{bmatrix} -7 & 14 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}$$

olduğundan değişme özelliğinin sağlandığı görülmektedir.

Örnek 6.2.3. 2×2 tipinde iki boyutlu $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{bmatrix}$ matrislerinin Zaka matris çarpımı

$$A \otimes \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sıfır matrisidir.

Önerme 6.2.4. Zaka Matris çarpımı birleşme özelliğine sahip değildir.

İspat: F cismi üzerinde tanımlı her A , B , C m× n tipinde iki boyutlu matrislerden Zaka matris çarpımı için birleşme özelliği $(A \otimes \mathrm{B}) \otimes \mathrm{C} = A \otimes (\mathrm{B} \otimes \mathrm{C})$ nin sağlanmadığını gösteren özel bir örnek vermek yeterlidir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ve}\ \ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{matrisleri için}$$

$$(A \otimes \mathrm{B}) \otimes \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

ve

$$A \otimes (\mathrm{B} \otimes \mathrm{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$(A \otimes \mathrm{B}) \otimes \mathrm{C} \neq A \otimes (\mathrm{B} \otimes \mathrm{C})$$

elde edilir. Böylece çarpma işleminin birleşme özelliği olmadığı görülür.

Önerme 6.2.5. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{22}(F - \{0\})$ Zaka matris çarpımına göre $A \otimes \mathrm{B} = A$ olacak şekilde

$$B = \begin{bmatrix} \dfrac{a+b+c-2d}{3a} & \dfrac{a+b-2c+d}{3b} \\ \dfrac{a-2b+c+d}{3c} & \dfrac{-2a+b+c+d}{3d} \end{bmatrix}$$

matrisi vardır.

İspat: $F - \{0\}$ cismi üzerinde tanımlı her $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 2×2 tipinde iki boyutlu matrisi için $A \otimes \mathrm{B} = \mathrm{A}$ olacak şekilde $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ matrisi var olsun. $A \otimes \mathrm{B} = \mathrm{A}$ eşitliğinden

$$\begin{cases} ax+by+cz &= a \\ ax+by+dt &= b \\ ax+cz+dt &= c \\ by+cz+dt &= d \end{cases}$$

lineer denklem sisteminin çözümünden

$$x=\frac{a+b+c-2d}{3a}, y=\frac{a+b-2c+d}{3b}, z=\frac{a-2b+c+d}{3c}, t=\frac{-2a+b+c+d}{3d}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 6.2.6. A matrisinin bütün girdileri sıfırdan farklı ise Zaka çarpımına göre A nın girdilerine bağlı bir tek etkisiz eleman vardır.

Örnek 6.2.7. $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi için $A \otimes \mathrm{B} = \mathrm{A}$ olacak şekilde $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ matrisi var olsun.

$$A \otimes \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

eşitliğinden

$$\begin{cases} y+z &= 0 \\ y &= 1 \\ z &= 1 \\ y+z &= 0 \end{cases}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemim çözüm kümesi boş küme olduğundan bu şatı sağlayan B matrisi bulunamaz. Yani bir tek çözüm bulunması için A matrisinin girdileri sıfırdan farklı olmalıdır.

Örnek 6.2.8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in M_{22}(F-\{0\})$ olmak üzere Zaka matris çarpımına göre $A \otimes \mathrm{B} = A$ olacak şekilde B matrisi

$$B = \begin{bmatrix} \frac{a+b+c-2d}{3a} & \frac{a+b-2c+d}{3b} \\ \frac{a-2b+c+d}{3c} & \frac{-2a+b+c+d}{3d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 & 1/6 \\ 4/9 & 7/12 \end{bmatrix}$$

olur. Görülüyor ki her girdileri sıfırdan farklı A matrisi için A nın girdilerine bağlı bir tek etkisiz elaman vardır. Aynı matris için $A \otimes \mathrm{X} = A$ olacak şekilde $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ matrisi

$$X = \begin{bmatrix} -11/27 & -29/216 \\ 1/324 & 91/432 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Teorem 6.2.9. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{22}(F - \{0\})$ Zaka matris çarpımına göre $A \otimes \mathrm{X} = A$ olacak şekilde bir tek X matrisi vardır.

İspat: $F - \{0\}$ cismi üzerinde tanımlı 2×2 tipinde iki boyutlu her $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisi için $A \otimes \mathrm{X} = \mathrm{A}$ olacak şekilde $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ matrisi var olsun. $A \otimes \mathrm{X} = \mathrm{A}$ eşitliğinden

$$\begin{cases} ax + by + cz = \dfrac{a+b+c-2d}{3a} \\ ax + by + dt = \dfrac{a+b-2c+d}{3b} \\ ax + cz + dt = \dfrac{a-2b+c+d}{3c} \\ by + cz + dt = \dfrac{-2a+b+c+d}{3d} \end{cases}$$

lineer denklem sisteminin çözümü,

$$\begin{cases} a + b + c - 2d = 0 \\ a + b + d - 2c = 0 \\ a + c + d - 2b = 0 \\ b + c + d - 2a = 0 \end{cases}$$

homogen lineer denklem sisteminin tek çözümü aşikar çözüm olduğundan

$$x = \frac{7abcd + bcd(\mathrm{b} + \mathrm{c} - 2\mathrm{d}) + acd(a - 2c + d) + abd(a - 2b + d) - 2abc(a + b + c)}{3bcd(a + b + c - 2d)}$$

$$y = \frac{7abcd + abd(\mathrm{a} + \mathrm{d} - 2\mathrm{c}) + abc(-2a + b + c) + bcd(b + c - 2d) - 2bcd(b + c + d)}{3acd(a + b + d - 2c)}$$

$$z = \frac{7abcd + abd(\mathrm{a} + \mathrm{d} - 2\mathrm{b}) + abc(-2a + b + c) + bcd(b + c - 2d) - 2acd(a + c + d)}{3abd(a + c + d - 2b)}$$

$$t = \frac{7abcd + bcd(\mathrm{b} + \mathrm{c} - 2\mathrm{d}) + acd(a - 2c + d) + abd(a - 2b + d) - 2abd(a + b + d)}{3abc(b + c + d - 2a)}$$

tek çözüm olarak elde edilir.

6.3. 3D Matrisler Üzerinde Zaka Matris Çarpımı

3-D matrisler için tanımlı alışılmış matris çarpımı çalışmanın beşinci bölümünde ayrıntılı incelendi. Bu bölümde, 3-D matrisler üzerinde aynı tipten matrisler için alışılmış çarpma işlemi yerine Orgest Zaka'nın "New Matrix Multiplication" adlı makalesinde verilen çarpma işlemi incelenmiştir, (Zaka, 2020).

Tanım 6.3.1. $A = \left(a_{\ ijk}\right)$ ve $B = \left(b_{\ ijk}\right)$, $m \times n \times s$ tipinde üç boyutlu matrislerinın çarpımı $m \times p \times s$ tipinden üç boyutlu $\mathrm{C} = A \otimes \mathrm{B}$ matrisidir ve C matrisinin girdileri $c_{\ ijk}$ olmak üzere

$$c_{\ ijk} = a_{\ ijk}b_{ijk} + a_{\ (i-1)jk}b_{\ (i-1)jk} + a_{\ (i+1)jk}b_{\ (i+1)jk} + a_{\ i(j-1)k}b_{\ i(j-1)k} + a_{\ i(j+1)k}b_{\ i(j+1)k} + a_{\ ij(k-1)}b_{ij(k-1)} + a_{\ ij(k+1)}b_{ij(k+1)}$$

biçiminde tanımlanır. Burada

$$i = 1 \ \ için\ a_{\ (i-1)jk} = 0\ ve\ \ b_{\ (i-1)jk} = 0,$$

$$j = 1 \ \ için\ a_{\ i(j-1)k} = 0\ ve\ \ b_{\ i(j-1)k} = 0,$$

$$i = m \ \ için\ a_{(i+1)jk} = 0\ ve\ \ b_{\ (i+1)jk} = 0,$$

$$j = n \ \ için\, a_{\,i(j+1)k} = 0 \ ve \ \ b_{\,i(j+1)k} = 0,$$

$$k = 1 \ \ için\, a_{ij(k-1)} = 0 \ ve \ \ b_{\,ij(k-1)} = 0,$$

$$k = s \ \ için\, a_{\,ij(k+1)} = 0 \ ve \ \ b_{\,ij(k+1)} = 0,$$

Böylece $\otimes : M_{mns}(F) \times M_{mns}(F) \to M_{mns}(F)$ tanımlıdır (Zaka, 2020).

Örnek 6.3.2. $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ve $B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

olmak üzere $3 \times 2 \times 2$ tipinde $A = \cup_{k=1}^{2} A_{\,k}$ ve $3 \times 2 \times 2$ tipinde üç boyutlu $B = \cup_{k=1}^{2} B_{\,k}$ boyutlu matrislerinin Zaka çarpımı olan C matrisi için katmanlar

$$C_1 = A_1 \otimes B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 + 2.0 + 3.1 & 2.0 + 1.0 + 4.2 \\ 3.1 + 1.0 + 4.2 + 5.1 & 4.2 + 2.0 + 3.1 + 6.4 \\ 5.1 + 3.1 + 6.4 & 6.4 + 4.2 + 5.1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 16 & 35 \\ 32 & 37 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = A_2 \otimes B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 + 0.0 + 1.0 & 0.0 + 1.1 + 2.2 \\ 1.0 + 1.1 + 2.2 + 1.1 & 2.2 + 0.0 + 4.0 + 1.0 \\ 1.1 + 1.0 + 4.0 & 4.0 + 2.2 + 1.1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir ve

$$C = \cup_{k=1}^{2} C_{\,k} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \otimes B_1 \\ A_2 \otimes B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 16 & 35 \\ 32 & 37 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$3 \times 2 \times 2$ tipinde 3 boyutlu bir matristir.

Örnek 6.3.3. $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

olmak üzere $3 \times 3 \times 2$ tipinde $A = \cup_{k=1}^{2} A_k$ ve $3 \times 3 \times 2$ tipinde üç boyutlu $B = \cup_{k=1}^{2} B_k$ boyutlu matrislerinin çarpımı olan C matrisi için bloklar

$$C_1 = A_1 \otimes B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = A_2 \otimes B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir ve $C = \cup_{k=1}^{2} C_k = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \otimes B_1 \\ A_2 \otimes B_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\right]$, $3 \times 3 \times 2$ tipinde 3-boyutlu bir matristir.

Önerme 6.3.4. Üç boyutlu matrisler üzerinde tanımlı Zaka Matris çarpımı değişme özelliğine sahiptir.

İspat: Tanım 6.2.1den

$A = (a_{ijk})$ ve $B = (b_{ijk})$, $m \times n \times s$ tipinde üç boyutlu matrislerinın çarpımı $m \times p \times s$ tipinden üç boyutlu $\mathrm{C} = (c_{ijk})$ için a_{ijk} ve b_{ijk} lar F cismindeki çarpma işlemi değişme özelliğine sahip olduğundan

$$\begin{aligned} c_{ijk} &= a_{ijk} b_{ijk} + a_{(i-1)jk} b_{(i-1)jk} + a_{(i+1)jk} b_{(i+1)jk} + a_{i(j-1)k} b_{i(j-1)k} \\ &\quad + a_{i(j+1)k} b_{i(j+1)k} + a_{ij(k-1)} b_{ij(k-1)} + a_{ij(k+1)} b_{ij(k+1)} \\ &= b_{ijk} a_{ijk} + b_{(i-1)jk} a_{(i-1)jk} + b_{(i+1)jk} a_{(i+1)jk} + b_{i(j-1)k} a_{i(j-1)k} \\ &\quad + b_{i(j+1)k} a_{i(j+1)k} + b_{ij(k-1)} a_{ij(k-1)} + b_{ij(k+1)} a_{ij(k+1)} \end{aligned}$$

dir. Buradan c_{ijk} lar aynı zamanda $B \otimes \mathrm{A}$ matrisinin girdileri olduğundan $A \otimes \mathrm{B} = B \otimes \mathrm{A}$ değişme özelliği sağlanır.

Örnek 6.3.5. $3 \times 3 \times 2$ tipinde $A = \cup_{k=1}^{2} A_k$ ve $3 \times 3 \times 2$ tipinde üç boyutlu $B = \cup_{k=1}^{2} B_k$ boyutlu matrisleri Örnek 6.2.1 deki gibi tanımlansınlar. $D = B \otimes \mathrm{A}$ matrisi için bloklar

$$D_1 = B_1 \otimes A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D_2 = B_2 \otimes A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir ve $D = \cup_{k=1}^{2} D_k = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \otimes A_1 \\ B_2 \otimes A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \otimes B_1 \\ A_2 \otimes B_2 \end{bmatrix} =$

C olduğundan değişme özelliği sağlanır.

Önerme 6.3.6. Üç boyutlu matrisler üzerinde tanımlı Zaka Matris çarpımı birleşme özelliğine sahip değildir.

İspat: F cismi üzerinde tanımlı her girileri sırdan farklı $A = (a_{ijk})$, $B = (b_{ijk})$ ve $C = (b_{ijk})$, m× n × s tipinde üç boyutlu matrislerden Zaka matris çarpımının blokları iki boyutlu matrislerde Zaka çarpımı olan matrislerden oluşur. İki boyutlu matrislerde Önerme 6.2.4 ten birleşme özelliği sağlanmadığından üç boyutlu matrisler üzerinde de birleşme özelliği gösteren özel sağlanmaz.

Örnek 6.3.7. $A = \cup_{k=1}^{2} A_k$, $B = \cup_{k=1}^{2} B_k$ ve $C = \cup_{k=1}^{2} C_k$, 2×2 × 2 tipinde matrisleri için bloklar

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\ B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlansın. $(A \otimes B) \otimes C$ nin 1. bloğu

$$(A_1 \otimes B_1) \otimes C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

için

$$A_1 \otimes (B_1 \otimes C_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

olarak elde edildiğinden $(A_1 \otimes B_1) \otimes C_1 \neq A_1 \otimes (B_1 \otimes C_1)$ dir. Böylece

elde edilir. Böylece çarpma işleminin birleşme özelliği sağlanmaz.

Önerme 6.3.8. Zaka matris çarpımı sağ ve sol dağılma özelliklerini sağlar.

İspat: i) $\forall\, A = (a_{ijk}), B = (b_{ijk}), C = (c_{ijk}) \in M_{mns}(F)$ için $\otimes$ nin $+$ üzerine soldan dağılma özelliği

$$A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$$

nin sağlandığını gösterelim. $\otimes$ nin tanımı ve cisim elemanları üzerinde soldan dağılma özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
A \otimes (B + C) &= (a_{ijk}) \otimes \big((b_{ijk}) + (c_{ijk})\big) = (a_{ijk}) \otimes (b_{ijk} + c_{ijk}) \\
&= \Big(a_{ijk}.(b_{ijk} + c_{ijk}) + a_{(i-1)jk}.\big(b_{ia_{(i-1)jk}jk} + c_{ia_{(i-1)jk}jk}\big) \\
&\quad + a_{(i+1)jk}.(b_{(i+1)jk} + c_{ijk}) + a_{i(j-1)k}.(b_{i(j-1)k} + c_{i(j-1)k}) \\
&\quad + a_{i(j+1)k}.(b_{i(j+1)k} + c_{i(j+1)k}) \\
&\quad + a_{ij(k-1)}.(b_{ij(k-1)} + c_{ij(k-1)}) \\
&\quad + a_{ij(k+1)}.(b_{ij(k+1)} + c_{ij(k+1)})\Big) \\
&= (a_{ijk}.b_{ijk} + a_{ijk}c_{ijk} + a_{(i-1)jk}.b_{(i-1)jk} + a_{(i-1)jk}.c_{(i-1)jk} \\
&\quad + a_{(i+1)jk}.b_{(i+1)jk} + a_{(i+1)jk}.c_{ijk} + a_{i(j-1)k}.b_{i(j-1)k} \\
&\quad + a_{i(j-1)k}c_{i(j-1)k} + a_{i(j+1)k}.b_{i(j+1)k} + a_{i(j+1)k}c_{i(j+1)k} \\
&\quad + a_{ij(k-1)}.b_{ij(k-1)} + a_{ij(k-1)}c_{ij(k-1)} + a_{ij(k+1)}.b_{ij(k+1)} \\
&\quad + a_{ij(k+1)}.c_{ij(k+1)}) \\
&= (a_{ijk}.b_{ijk} + a_{(i-1)jk}.b_{(i-1)jk} + a_{(i-1)jk}.+a_{(i+1)jk}.b_{(i+1)jk} \\
&\quad + a_{i(j-1)k}.b_{i(j-1)k} + a_{i(j+1)k}.b_{i(j+1)k} + +a_{ij(k-1)}.b_{ij(k-1)} \\
&\quad + a_{ij(k+1)}.b_{ij(k+1)} + a_{ijk}.c_{ijk} + a_{(i-1)jk}.c_{(i-1)jk} \\
&\quad + a_{(i+1)jk}.c_{(i+1)jk} + a_{i(j-1)k}.c_{i(j-1)k} + a_{i(j+1)k}.c_{i(j+1)k} \\
&\quad + a_{ij(k-1)}.c_{ij(k-1)} + a_{ij(k+1)}.c_{ij(k+1)})
\end{aligned}$$

$$= \left(a_{\,ijk}.b_{\,ijk} + a_{\,(i-1)jk}.b_{\,(i-1)jk} + a_{\,(i-1)jk}. + a_{\,(i+1)jk}.b_{\,(i+1)jk}\right.$$
$$+ a_{\,i(j-1)k}.b_{\,i(j-1)k} + a_{\,i(j+1)k}.b_{\,i(j+1)k} + + a_{\,ij(k-1)}.b_{\,ij(k-1)}$$
$$\left. + a_{\,ij(k+1)}.b_{\,ij(k+1)}\right) + \left(a_{\,ijk}.c_{\,ijk} + a_{\,(i-1)jk}.c_{\,(i-1)jk}\right.$$
$$+ a_{\,(i+1)jk}.c_{\,(i+1)jk} + a_{\,i(j-1)k}.c_{\,i(j-1)k} + a_{\,i(j+1)k}.c_{\,i(j+1)k}$$
$$\left. + a_{\,ij(k-1)}.c_{\,ij(k-1)} + a_{\,ij(k+1)}.c_{\,ij(k+1)}\right)$$
$$= \mathrm{A} \otimes \mathrm{B} + A \otimes \mathrm{C}$$

elde edilir.

ii) i) $\forall\, A = \left(a_{\,ijk}\right), B = \left(b_{\,ijk}\right), C = \left(c_{\,ijk}\right) \in \mathrm{M}_{\,mns}(F)$ için $\otimes$ nin $+$ üzerine sağdan dağılma özelliği

$$(A + B) \otimes \mathrm{C} = \mathrm{A} \otimes \mathrm{C} + B \otimes \mathrm{C}$$

nin sağlandığını gösterelim. $\otimes$ nin tanımı ve cisim elemanları üzerinde soldan dağılma özelliği kullanılarak

$$(A + B) \otimes \mathrm{C} = \left(\left(a_{\,ijk}\right) + \left(b_{\,ijk}\right)\right) \otimes \left(c_{\,ijk}\right) = \left(a_{\,ijk} + b_{\,ijk}\right) \otimes \left(c_{\,ijk}\right)$$
$$= \left(\left(\, a_{ijk} + b_{\,ijk}\right).c_{\,ijk} + \left(a_{\,ia_{\,(i-1)jk}jk} + b_{\,ia_{\,(i-1)jk}jk}\right).c_{\,(i-1)jk}\right.$$
$$+ \left(a_{\,(i+1)jk} + b_{\,ijk}\right).c_{\,(i+1)jk} + \left(a_{\,i(j-1)k} + b_{\,i(j-1)k}\right).c_{\,i(j-1)k}$$
$$+ \left(a_{\,i(j+1)k} + b_{\,i(j+1)k}\right).c_{\,i(j+1)k} + \left(a_{\,ij(k-1)}\right.$$
$$\left. + b_{\,ij(k-1)}\right).c_{\,ij(k-1)} + \left(a_{\,ij(k+1)} + b_{\,ij(k+1)}\right) + c_{\,ij(k+1)}\Big)$$

$$= \left(\, a_{ijk}.c_{\,ijk} + b_{\,ijk}.c_{\,ijk} + a_{\,(i-1)jk}.c_{\,(i-1)jk} + b_{\,(i-1)jk}.c_{\,(i-1)jk}\right.$$
$$+ a_{\,(i+1)jk}.c_{\,(i+1)jk} + b_{\,(i+1)jk}.c_{\,(i+1)jk}$$
$$+ a_{\,i(j-1)k}c_{\,i(j-1)k} + b_{\,i(j-1)k}.c_{\,i(j-1)k}$$
$$+ a_{\,i(j+1)k}.c_{\,i(j+1)k} + b_{\,i(j+1)k}.c_{\,i(j+1)k} + a_{\,ij(k-1)}.c_{\,ij(k-1)}$$
$$\left. + b_{\,ij(k-1)}.c_{\,ij(k-1)} + a_{\,ij(k+1)}.c_{\,ij(k+1)} + b_{\,ij(k+1)}.c_{\,ij(k+1)}\right)$$

$$= (a_{ijk}.c_{ijk} + a_{(i-1)jk}.c_{(i-1)jk} + a_{(i+1)jk}.c_{(i+1)jk} + a_{i(j-1)k}c_{i(j-1)k} +$$
$$+ a_{i(j+1)k}.c_{i(j+1)k} + a_{ij(k-1)}.c_{ij(k-1)} + a_{ij(k+1)}.c_{ij(k+1)}$$
$$+ b_{ijk}.c_{ijk}$$
$$+ b_{(i-1)jk}.c_{(i-1)jk} + b_{(i+1)jk}.c_{(i+1)jk} + b_{i(j-1)k}.c_{i(j-1)k}$$
$$+ b_{i(j+1)k}.c_{i(j+1)k} + b_{ij(k-1)}.c_{ij(k-1)} + b_{ij(k+1)}.c_{ij(k+1)})$$

$$= (a_{ijk}.c_{ijk} + a_{(i-1)jk}.c_{(i-1)jk} + a_{(i+1)jk}.c_{(i+1)jk} + a_{i(j-1)k}c_{i(j-1)k} +$$
$$+ a_{i(j+1)k}.c_{i(j+1)k} + a_{ij(k-1)}.c_{ij(k-1)} + a_{ij(k+1)}.c_{ij(k+1)})$$
$$+ (b_{ijk}.c_{ijk}$$
$$+ b_{(i-1)jk}.c_{(i-1)jk} + b_{(i+1)jk}.c_{(i+1)jk} + b_{i(j-1)k}.c_{i(j-1)k}$$
$$+ b_{i(j+1)k}.c_{i(j+1)k} + b_{ij(k-1)}.c_{ij(k-1)} + b_{ij(k+1)}.c_{ij(k+1)})$$

$$= \mathrm{A} \otimes \mathrm{C} + B \otimes \mathrm{C}$$

elde edilir.

Önerme 6.3.9. $\forall A = (a_{ijk}), B = (b_{ijk}) \in \mathrm{M}_{mns}(F)$ ve $r \in F$ için $\otimes$ işlemi üç boyutlu matrisler için tanımlanan skalerle çarpım işlemi $\odot$ ile birlikte

$$(r \odot A) \otimes \mathrm{B} = \mathrm{A} \otimes (\mathrm{r} \odot \mathrm{B}) = \mathrm{r} \odot (\mathrm{A} \otimes \mathrm{B})$$

özelliği sağlanır.

İspat: $A = (a_{ijk}), B = (b_{ijk}) \in \mathrm{M}_{mns}(F)$ ve $r \in F$ olsun.

$(r \odot A) \otimes \mathrm{B} = (r.a_{ijk}) \otimes (b_{ijk}) = ((\mathrm{r}.a_{ijk}).b_{ijk} + (\mathrm{r}.a_{(i-1)jk}).b_{(i-1)jk} +$
$(r.a_{(i-1)jk}).+(r.a_{(i+1)jk}).b_{(i+1)jk} + (r.a_{i(j-1)k}).b_{i(j-1)k} + (\mathrm{r}.a_{i(j+1)k}).b_{i(j+1)k} +$
$(r.a_{ij(k-1)}).b_{ij(k-1)} + (r.a_{ij(k+1)}).b_{ij(k+1)})$

F cismi üzerinde çarpma işleminin değişme ve birleşme özellikleri var olduğundan

$$(r \odot A) \otimes \mathrm{B} = (a_{ijk}.(\mathrm{r}.b_{ijk}) + a_{(i-1)jk}.(r.b_{(i-1)jk}) + a_{(i+1)jk}.(r.b_{(i+1)jk})$$
$$+ a_{i(j-1)k}.(r.b_{i(j-1)k}) + a_{i(j+1)k}.(r.b_{i(j+1)k}) + a_{ij(k-1)}.(r.b_{ij(k-1)})$$
$$+ a_{ij(k+1)}.(r.b_{ij(k+1)})) = \mathrm{A} \otimes (\mathrm{r} \odot \mathrm{B})$$

elde edilir.

$$(r\odot A)\otimes \mathrm{B} = \big((\mathrm{r}.a_{\ ijk}).b_{\ ijk} + (\mathrm{r}.a_{\ (i-1)jk}).b_{\ (i-1)jk} + (r.a_{\ (i-1)jk}).+(r.a_{\ (i+1)jk}).b_{\ (i+1)jk} + (r.a_{\ i(j-1)k}).b_{\ i(j-1)k} + (\mathrm{r}.a_{\ i(j+1)k}).b_{\ i(j+1)k} + (r.a_{\ ij(k-1)}).b_{\ ij(k-1)} + (r.a_{\ ij(k+1)}).b_{\ ij(k+1)}\big)$$

eşitliğinde F cisminde çarpma işleminin birleşme özelliği, çarpma işleminin toplama işlemi üzerine solan dağılma özelliği ve $\mathrm{M}_{\ mns}(F)$ üzerinde skalerle çarpma tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned}(r\odot A)\otimes \mathrm{B} &= \big(\mathrm{r}.\big(a_{\ ijk}.b_{\ ijk}\big) + \mathrm{r}.\big(a_{\ (i-1)jk}.b_{\ (i-1)jk}\big) + r.(a_{\ (i+1)jk}).b_{\ (i+1)jk}) \\ &+ r.(a_{\ i(j-1)k}.b_{\ i(j-1)k}) + \mathrm{r}.(a_{\ i(j+1)k}.b_{\ i(j+1)k}) + r.(a_{\ ij(k-1)}.b_{\ ij(k-1)}) \\ &+ r.(a_{\ ij(k+1)}).b_{\ ij(k+1)})\big) \\ &= \big(r.((a_{\ ijk}.b_{\ ijk}) + \big(a_{\ (i-1)jk}.b_{\ (i-1)jk}\big) + (a_{\ (i+1)jk}).b_{\ (i+1)jk}) \\ &+ (a_{\ i(j-1)k}.b_{\ i(j-1)k}) + (a_{\ i(j+1)k}.b_{\ i(j+1)k}) + (a_{\ ij(k-1)}.b_{\ ij(k-1)}) \\ &+ (a_{\ ij(k+1)}).b_{\ ij(k+1)}))\big) = \mathrm{r}\odot(\mathrm{A}\otimes \mathrm{B})\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 6.3.10. $A = \cup_{k=1}^{2} A_{\ k}$, $B = \cup_{k=1}^{2} B_{\ k}$, 2×2 × 2 tipinde matrisleri için bloklar

$$A_1 = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\ B_1 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlansın. $r = 3$ için $(r * A)\otimes \mathrm{B} = \mathrm{A}\otimes(\mathrm{r} * \mathrm{B}) = \mathrm{r} * (\mathrm{A}\otimes \mathrm{B})$ özelliğinin sağlandığını gösterelim.

$$(3\odot A)\otimes \mathrm{B} = \left(3 * \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\end{bmatrix}\right) \otimes \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 3\\ 0 & 3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & 0\end{bmatrix}\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}3 & 3\\ 6 & 3\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}6 & 3\\ 6 & 3\end{bmatrix} & \end{bmatrix},$$

$$A\otimes(3\odot B)=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\end{bmatrix}(3\odot\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0\\3&0\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}3&0\\3&0\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}3&3\\3&0\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}6&3\\6&3\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

ve

$$r\odot(A\otimes B)=3\odot(\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\end{bmatrix})$$

$$=3\odot\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}2&1\\2&1\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}3&3\\3&0\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}6&3\\6&3\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

olarak bulunduğundan

$$(3\odot A)\otimes B=A\otimes(3\odot B)=3(A\otimes B)$$

eşitliği gerçeklenir.

5. Bölümde 3-boyutlu matrisler kümesinin üzerinde tanımlı vektör toplamı, + ve skalerle çarpım $\odot$ işlemlerine göre $(M_{mns}(F),+,\odot)$ bir vektör uzayı oluşturduğu görüldü. Ayrıca bu vektör uzayında Zaka matris çarpımının değişme özelliğini sağladığını fakat birleşme özelliğini sağlamadığı görüldü. Bütün bunlardan yola çıkarak şu teoremi verebiliriz:

Teorem 6.3.11. $(M_{mns}(F),+,\odot,\otimes)$ birleşme özelliği olmayan bir değişmeli cebirdir.

İspat: Teorem 5.1.4 ten $(M_{mns}(F),+,\odot)$ bir vektör uzayıdır. Önerme 6.2.4 ten bu vektör uzayı üzerindeki çarpma işlemi ile birlikte $(M_{mns}(F),+,\odot,\otimes)$ yapısı değişme özelliğini sağlar. Bu yapı Önerme 6.2.7 den sağ ve sol dağılma özellikleri ile birlikte Önerme 6.2.7 den

$$(r\odot A)\otimes B=A\otimes(r\odot B)=r\odot(A\otimes B)$$

özelliğini sağlamaktadır. Ancak Önerme 6.2.4 den çarpım işleminin birleşme özelliği yoktur. Böylece $(M_{mns}(F),+,\odot,\otimes)$ birleşme özelliği olmayan bir değişmeli cebir oluşturur.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde litaratürde iyi bilinen ve farklı uygulama alanlarında kullanılan matris çarpımlarından dört tanesi incelenmiş ve bu çarpımların bazı özellikleri verilmiştir. Orgest Zaka tarafından alışılmış matris toplamı ve bir matrisin skaler katı ve iki matrisin çarpım işlemlerine göre 3-boyutlu matris halkası incelenmiştir (Zaka, 2017) ve 2-boyutlu matrisler üzerinde aynı tipten matrisler için alışılmış çarpma işlemi yerine "New Matrix Multiplication" adlı makalesinde verilen ve "Zaka Matris Çarpımı" olarak adrandırılan yeni bir matris çarpımını sunmuştur (Zaka, 2020). Bu çalışmalar incelenerek sonlu F cismi üzerinde 2 ve 3-boyutlu matrislerin vektör uzaylarına örnekler verilip bunlar için tabanlar belirlenmiştir. Aynı tipten matrisler kümesi üzerinde matris toplamı standart matris toplamı, matrisin skaler katı alışılmış kat alma işlemi ve matris çarpımı Zaka matris çarpımı olmak üzere bölümlü halka üzerinde oluşturulan yapının birleşme özelliği olmayan bir değişmeli cebir olduğu gösterilmiştir.

Sonuç olarak, bu çalışmada 2-boyutlu matrisler bazı tanım ve özelliklerini 3- boyutlu matrislere genellendi, 2- ve 3- boyutlu matris teorisinde cebirsel yapılar ve matrislerde çarpma işlemi değiştirilerek elde edilen cebirsel yapılar incelendi.

Yüksek boyutlu matrisler kümesi üzerindeki işlemler değiştirilerek elde edilen yeni cebirsel yapılar yüksek boyutlu matrislerin teorisinin gelişimine ve diğer bilim dallarına uygulamalarda önemli bir katkı sağlayacaktır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Boztemür, B. (2019), Bazı matris uzaylarının özellikleri, Yüksek lisans tezi, Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 64 sf.

Cullen, C. G. (1972), Matrices and Linear Transformations, Dover Publications, New York, 318 pp.

Çiftçi, S. (2015), Lineer Cebir, Dora Yayınevi, Bursa, 430 s. Fraleigh, J. B. (1989), A First Course in Abstract Algebra, Addison Wesley P.C., USA,518 pp.

Gümüş, İ. H; Taşkara, N.(2011), Matrislerin Hadamard Çarpımı Üzerine, S Ü Fen Fak. Fen Derg. Sayı 37, 9-14.

Herstein, I. N., Winter, D. J. (1988), Matrix Theory and Linear Algebra, Macmillan Publishing Company, New York, 508 pp.

Hacısalihoğlu, H. H.(2000), Lineer Cebir (Cilt 1), Hacısalihoğlu Yayıncılık , Ankara .

Hohn, F. E. (1973) Elementary Matrix Algebra, Dover Publications, New York, 522 pp.

Horn, R. (1994), Topics in Matrix Analysis, Cambridge University Press.

Horn, R. A.; Johnson, C.R. (2012), Matrix analysis. Cambridge University Press.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Johnson, C. R. (Editör) (1990), Matrix Theory and Applications, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol. 40, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 260 pp.

MacTutor. "Matrices and determinants". Erişim: 21 Aralık 2022. (Matrices and determinants -MacTutor History of Mathematics (st-andrews.ac.uk).

Meyer, C.D. (2000). Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, Siam, Philadelphia.

Million, E.(2007), The Hadamard Product. http://buzzard.ups.edu/courses/2007spring/projects/ million-paper.pdf, 2007. Accessed on 1 Novamber 2022.

Perlis, S. (1991), Theory of Matrices, Dover Publications, New York, 237 pp.

Özkaya, M.(2018), Matris Normlarının Oyun Teorisindeki Rolleri, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Schneider, H., Barker, G. P. (1973), Matrices and Linear Algebra, Dover Publications, New York, 413 pp.

Zaka, O. (2017), 3D Matrix Ring with a "Common" Multiplication. Open Access Library Journal, 4, e3593. doi: http://dx.doi.org/10.4236/oalib.1103593.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Zaka, O. (2020), The New Matrix Multiplication. viXra.org, Corpus ID: 216188726. 2003.0282v1.pdf (vixra.org).

Zehfuss, G. (1858), Ueber eine gewisse Determinante, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 3: 298–301.