İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DAİRESEL BİR PLAKANIN SERBEST HARMONİK TİTREŞİMİNİN DİFERANSİYEL TRANSFORM METODU YARDIMIYLA ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müh. Hasan Serter YALÇIN

Anabilim Dalı : UÇAK VE UZAY MÜHENDİSLİĞİ

Programı : UÇAK VE UZAY MÜHENDİSLİĞİ

OCAK 2008

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DAİRESEL BİR PLAKANIN SERBEST HARMONİK TİTREŞİMİNİN DİFERANSİYEL TRANSFORM METODU YARDIMIYLA ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müh. Hasan Serter YALÇIN

(511051014)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 24 Aralık 2007

Tezin Savunulduğu Tarih : 28 Ocak 2008

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. İbrahim ÖZKOL**

Diğer Jüri Üyeleri **Doç. Dr. Metin Orhan KAYA (İ.T.Ü)**

Doç. Dr. Erol UZAL (İ.Ü)

OCAK 2008

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, ilk defa 1986 yılında elektrik devrelerinde diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılan diferansiyel transform metodu, dairesel bir plakanın serbest harmonik titreşimi problemine uygulanmıştır.

Gerek yüksek lisans öğrenimim boyunca ve gerekse bu tez çalışması sırasında çok değerli fikirleriyle beni yönlendiren, bana olan desteklerini ve güvenlerini esirgemeyen saygıdeğer danışmanım Prof. Dr. İbrahim Özkol'a en içten teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Ayrıca çalışmanın yayın haline gelmesi aşamasında gösterdiği yardımlardan dolayı Araş. Gör. Aytaç Arıkoğlu'na teşekkür ederim.

Yoğun bir çalışmanın eseri olan bu çalışmayı bana maddi ve manevi desteklerini hiç bir zaman esirgememiş olan aileme ithaf ediyorum.

OCAK 2008 **Hasan Serter YALÇIN**

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ ii
İÇİNDEKİLER iii
KISALTMALAR v
TABLO LİSTESİ vi
ŞEKİL LİSTESİ vii
SEMBOL LİSTESİ ix
ÖZET xi
SUMMARY xii

1. GİRİŞ 1
2. İNCE PLAKA TEORİSİ VE DENGE DENKLEMLERİ 4
2.1. Plaka Statik Denge Denklemleri 4
2.1.1. Kabuller ve Kısıtlamalar 4
2.1.2. Gerinme – Eğrilik Bağıntıları 6
2.1.3. Gerilme – Gerinme Bağıntıları ve Kuvvetler – Momentler 8
2.1.4. Plaka İçerisinde Gerilmenin Değişimi – Denge Denklemleri 11
2.1.5. Genel Denklem 13
2.2. Plaka Dinamik Denge Denklemleri 13
2.2.1. Statik Halden Dinamik Hale Geçiş 14
2.2.2. Polar Koordinat Dönüşümleri 15
2.3. Serbest Titreşim Denkleminin Analitik Çözümü 16
3. PROBLEMİN TANIMI VE DİFERANSİYEL TRANSFORM METODU 20
3.1. Diferansiyel Transform Metodu 20
3.1.1. Diferansiyel Transform Metodunun Matematiksel Modeli 20
3.1.2. Teoremler 21
3.2. Serbest Titreşim Denklemi ve Dönüşümü 22
3.3. Sınır Koşullarının Dönüşümü 26
3.3.1. Basit Mesnetli Durum 26
3.3.2. Ankastre Durum 27
3.3.3. Serbest Durum 27
3.4. Plaka Merkezindeki Düzenlilik Halleri ve Dönüşümler 29
4. PROBLEMİN ANALİZİ VE ÇÖZÜMLER 32
4.1. Basit Mesnetli Durum 32

4.1.1. Simetrik Durum 33
4.1.2. Antisimetrik Durum 40
4.2. Ankastre Durum 45
4.2.1. Simetrik Durum 45
4.2.2. Antisimetrik Durum 50
4.3. Serbest Durum 54
4.3.1. Simetrik Durum 55
4.3.2. Antisimetrik Durum 59
4.4. Sınır Şartlarının Karşılaştırılması 63
5. SONUÇ **67**
KAYNAKLAR **69**
EKLER **71**
ÖZGEÇMİŞ **82**

KISALTMALAR

DTM : Diferansiyel Transfom Metodu

Ref. : Referans

D.F. : Doğal Frekans

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 3.1 : Bir boyutlu DTM teoremleri 22
Tablo 3.2 : Sınır koşulları için özelleştirilmiş DTM teoremleri 26
Tablo 3.3 : Üç sınır koşulunun DTM ile dönüştürülmüş ifadeleri 29
Tablo 3.4 : Plaka merkezindeki düzenlilik halleri ve dönüştürülmüş ifadeleri 31
Tablo 4.1 : Basit mesnetli simetrik durumda özdeğerler 36
Tablo 4.2 : Basit mesnetli simetrik durumda özdeğerlerin yakınsadığı seri büyüklükleri 36
Tablo 4.3 : Basit mesnetli antisimetrik durumda özdeğerler 42
Tablo 4.4 : Basit mesnetli antisimetrik durumda özdeğerlerin yakınsadığı seri büyüklükleri 42
Tablo 4.5 : Ankastre simetrik durumda özdeğerler 47
Tablo 4.6 : Ankastre simetrik durumda özdeğerlerin yakınsadığı seri büyüklükleri 48
Tablo 4.7 : Ankastre antisimetrik durumda özdeğerler 51
Tablo 4.8 : Ankastre antisimetrik durumda özdeğerlerin yakınsadığı seri büyüklükleri 52
Tablo 4.9 : Serbest simetrik durumda özdeğerler 56
Tablo 4.10 : Serbest simetrik durumda özdeğerlerin yakınsadığı seri büyüklükleri. 57
Tablo 4.11 : Serbest antisimetrik durumda özdeğerler 60
Tablo 4.12 : Serbest antisimetrik durumda özdeğerlerin yakınsadığı seri büyüklükleri 61
Tablo 4.13 : Üç sınır şartında simetrik ve antisimetrik durumda ilk üç özdeğerler .. 63
Tablo B.1 : Farklı sınır koşullarında dairesel plakanın boyutsuz doğal frekansları .. 78

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1 : Deformasyon öncesi ve sonrası plaka elemanı 4
Şekil 2.2 : Moment altındaki plakanın tarafsız ekseni..... 5
Şekil 2.3 : Yayılı momentler altındaki dikdörtgen plaka..... 6
Şekil 2.4 : Tarafsız yüzeye olan uzaklıkla gerilmenin değişimi..... 6
Şekil 2.5 : Plaka elamanının burulması 8
Şekil 2.6 : Plaka elemanı üzerindeki gerilmeler..... 9
Şekil 2.7 : Plaka elamanına etkiyen kuvvet ve momentler..... 11
Şekil 2.8 : Polar koordinatlarda plaka elemanı üzerindeki kuvvet, momentler..... 15
Şekil 2.9 : Nodal daire ve nodal çap kavramları..... 19
Şekil 3.1 : Dairesel plakaların simetrik titreşim modları..... 30
Şekil 3.2 : Dairesel plakaların antisimetrik titreşim modları..... 30
Şekil 4.1 : Basit mesnetli simetrik durumda ilk dört özdeğerin yakınsaması..... 37
Şekil 4.2 : Basit mesnetli simetrik durumda titreşimin ilk üç mod şekli..... 39
Şekil 4.3 : Basit mesnetli simetrik durumda titreşimin normalize edilmiş ilk üç mod şekli..... 40
Şekil 4.4 : Basit mesnetli antisimetrik durumda ilk dört özdeğerin yakınsaması..... 43
Şekil 4.5 : Basit mesnetli antisimetrik durumda titreşimin ilk üç mod şekli..... 44
Şekil 4.6 : Basit mesnetli antisimetrik durumda titreşimin normalize edilmiş ilk üç mod şekli..... 44
Şekil 4.7 : Ankastre simetrik durumda ilk dört özdeğerin yakınsaması..... 48
Şekil 4.8 : Ankastre simetrik durumda titreşimin ilk üç mod şekli..... 50
Şekil 4.9 : Ankastre simetrik durumda titreşimin normalize edilmiş ilk üç mod şekli..... 50
Şekil 4.10 : Ankastre antisimetrik durumda ilk dört özdeğerin yakınsaması..... 52
Şekil 4.11 : Ankastre antisimetrik durumda titreşimin ilk üç mod şekli..... 53
Şekil 4.12 : Ankastre antisimetrik durumda titreşimin normalize edilmiş ilk üç mod şekli..... 54
Şekil 4.13 : Serbest simetrik durumda ilk dört özdeğerin yakınsaması..... 57
Şekil 4.14 : Serbest simetrik durumda titreşimin ilk üç mod şekli..... 59

Şekil 4.15 : Serbest simetrik durumda titreşimin normalize edilmiş ilk üç mod şekli 59
Şekil 4.16 : Serbest antisimetrik durumda ilk dört özdeğerin yakınsaması..... 61
Şekil 4.17 : Serbest antisimetrik durumda titreşimin ilk üç mod şekli..... 62
Şekil 4.18 : Serbest antisimetrik durumda titreşimin normalize edilmiş ilk üç mod şekli 62
Şekil 4.19 : Simetrik durumda üç sınır şartı için ilk özdeğerlerin yakınsaması 63
Şekil 4.20 : Antisimetrik durumda üç sınır şartında ilk özdeğerlerin yakınsaması ... 64
Şekil 4.21 : Simetrik durumda üç sınır şartı için titreşimin ilk mod şekilleri..... 65
Şekil 4.22 : Simetrik durumda üç sınır şartı için titreşimin normalize edilmiş ilk mod şekilleri..... 65
Şekil 4.23 : Antisimetrik durumda üç sınır şartı için titreşimin ilk mod şekilleri 66
Şekil 4.24 : Antisimetrik durumda üç sınır şartı için titreşimin normalize edilmiş ilk mod şekilleri..... 66
Şekil C.1 : Basit mesnetli dairesel plakanın ilk üç mod şekli (m=0 ve m=1) 79
Şekil C.2 : Ankastre dairesel plakanın ilk üç mod şekli (m=0 ve m=1)..... 80
Şekil C.3 : Serbest dairesel plakanın ilk üç mod şekli (m=0 ve m=1) 81

SEMBOL LİSTESİ

D	: Plaka rijitliği
E	: Elastisite modülü
G	: Kayma modülü
h	: Plaka kalınlığı
I	: Atalet momenti
m	: Nodal çap sayısı
$\mathbf{M_x}$, $\mathbf{M_y}$	: x ve y düzlemlerindeki eğilme momentleri
$\mathbf{M_{xy}}$	: x düzlemindeki burulma momenti
$\mathbf{M_r}$, $\mathbf{M_\theta}$	: Radyal ve teğetsel momentler
n	: Yakınsama parametresi
N	: Serilerdeki terim sayısı
p	: Yük
$\mathbf{Q_r}$	: Radyal kesme kuvveti
r	: Plakanın radyal yöndeki koordinatı
f(r)	: Radyal mod fonksiyonu
s	: Nodal daire sayısı
t	: Zaman değişkeni
u, v	: x, y doğrultularındaki yer değiştirmeler
$\mathbf{V_r}$	: Efektif radyal kesme kuvveti
w	: Yer değiştirme
W	: Pozisyon koordinat fonksiyonu
β	: Uygunluk parametresi
ρ	: Birim alandaki kütlesel yoğunluk
ω	: Dairesel frekans
λ^2_{ms}	: Frekans parametresi
Ω	: Boyutsuz doğal frekans (özdeğer)
ν	: Poisson oranı
θ	: Eğim
σ	: Normal gerilme

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	: x, y ve z düzlemlerindeki normal gerilmeler
σ_r, σ_θ	: Radyal ve teğetsel gerilmeler
τ	: Kayma gerilmesi
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$	: x,y,z düzlemlerindeki, y,z ve x doğrultularındaki kayma gerilmeleri
ε	: Normal gerinme
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	: x, y ve z yönlerindeki normal gerinmeler
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	: xy, yz ve zx düzlemlerindeki kayma gerinmeleri
κ	: Eğrilik
∇^2	: Laplace operatörü
∇^4	: Biharmonik operatör

DAİRESEL BİR PLAKANIN SERBEST HARMONİK TİTREŞİMİNİN DİFERANSİYEL TRANSFORM METODU YARDIMIYLA ANALİZİ

ÖZET

Plakalar yüzeysel eğriliği bulunmayan ve kalınlığı diğer boyutlarına oranla çok küçük olan düzlemsel yapılardır. Dairesel plakalar ya da genel olarak plakalar konusu gerek mühendislikteki geniş kullanım alanları, gerekse de teorik olarak ilgi çekici olmaları nedeniyle pek çok araştırmacının ve bilim adamının ilgisini çekmiştir. Bu çalışmada ankastre, serbest ve basit mesnetlenmiş ince dairesel bir plakanın serbest harmonik titreşimi diferansiyel transform metodu (DTM) kullanılarak incelenmiştir. DTM birçok farklı diferansiyel denklem problemine uygulanabilen yarı analitik yarı sayısal bir yöntemdir. İlk olarak hareketin yönetici diferansiyel denklemleri reküratif bağıntılara indirgenmiş, ilgili sınır ve düzenlilik koşulları da cebirsel denklem takımlarına dönüştürülmüştür. Daha sonra frekans denklemlerinin ve radyal mod fonksiyonlarının elde edilebilmesi için altı değişik dairesel plaka düzeni için DTM uygulaması çözüm detayları sunularak yapılmıştır. Dairesel plakanın dış kenarındaki sınır koşullarından ve merkezindeki düzenlilik koşullarından ileri gelen simetrik/antisimetrik mod şekillerinin birleşimi ile öngörülen altı plaka düzeni için de frekans denklemleri ve mod fonksiyonları elde edilmiştir. Literatürde, dairesel plakaların yönetici diferansiyel denklemi, sınır ve düzenlilik koşulları DTM uygulaması yapılarak dönüştürülmüş olarak halen türetilmemiştir. Boyutsuz doğal frekansların sayısal çözümlemesi sonucu elde edilen değerler, literatürde sıklıkla ifade edilmiş olan Bessel ve diğer sayısal yöntemler ile karşılaştırmalı olarak tablolaştırılmıştır. Ayrıca, dairesel plakanın mod şekilleri ve doğal frekansların hesaplanan seri büyüklüklerine göre yakınsamaları farklı sınır koşulları için karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Bulunan sonuçlara göre, DTM'nin özdeğer problemleri için oldukça etkili ve güvenilir bir yöntem olduğu ortaya çıkmaktadır.

FREE HARMONIC VIBRATION ANALYSIS OF A CIRCULAR PLATE BY DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD

SUMMARY

Plates are planar structures which have no tangential curvature. Their thicknesses remain very small compared with other geometrical dimensions. Circular plates or generally the subject of plates arouse interest of many researchers and scientists by means of their engrossing theory and common usage in the industry. This study analyses the free harmonic vibrations of simply supported, clamped and free circular thin plates with the application of differential transform method (DTM), which is a semi numerical-analytical solution technique that can be applied to various types of differential equations. Firstly, the governing differential equations are reduced to recurrence relations and its related boundary/regularity conditions are transformed into a set of algebraic equations. Then, DTM is applied to derive the frequency equation and radial mode function with solution details for six type of plate configuration. The frequency equations and mode functions are obtained for the six types of configurations which may be possible with the combinations of the outer edge boundary conditions and symmetric/antisymmetric mode cases defined by the regularity conditions at the center of the circular plate. The boundary/regularity conditions and the governing differential equation have never been derived for circular plates in terms of DTM. Numerical results for the dimensionless natural frequencies are tabulated in comparison with Bessel and numerical solutions that appear in literature. Convergence of these natural frequencies and mode shapes are investigated in comparison with different boundary conditions. From the results, it is deduced that DTM is quite a robust and powerful tool for eigenvalue problems.

1. GİRİŞ

Plakalar yüzeysel eğriliği bulunmayan ve kalınlığı diğer boyutlarına oranla çok küçük olan düzlemsel yapılardır. Klasik plaka teorisi, elastisite teorisinin önemli bir özel uygulama alanıdır. Bilindiği gibi elastisite teorisi, elastik cisimlerde, kuvvet, yer değiştirme, şekil değiştirme ve gerilmeler arasındaki ilişkileri inceler. Bunu yaparken incelediği cisimlerin, doğrusal - elastik, homojen ve izotrop olduğunu varsayar. Elastik plaka teorisi ise, özel olarak plaka problemlerini ve matematiksel çözüm yollarını araştırır. Plakalar gemi ve uçak endüstrisi başta olmak üzere çeşitli mühendislik dallarında geniş bir kullanım alanına sahiptirler. Örnek olarak, türbin diskleri, gövde panelleri, bina çatıları, depo tanklarının altları ve gemi bölmeleri verilebilir.

Dairesel plakalar ya da genel olarak plakalar konusu gerek mühendislikteki geniş kullanım alanları, gerekse de teorik olarak ilgi çekici olmaları nedeniyle pek çok araştırmacının ve bilim adamının ilgisini çekmiştir. 1800'lü yıllarda başlayan çalışmalar günümüzde de devam etmektedir. Temel plaka teorisi Navier, Kirchoff ve Levy tarafından oluşturulduktan sonra Galerkin, Ritz ve Wahl gibi bilim adamlarının sayısal yaklaşımlarıyla geliştirilmiştir. 1956 yılında Turner, Clough, Martin ve Topp gibi bilim adamları kompleks plaka problemlerin sayısal çözümleri için sonlu eleman yöntemini geliştirmişlerdir. Bu sayede bilgisayar tekniğindeki gelişmelerle birlikte denklemler matris formunda ifade edilebilmektedir.

Farklı geometrik özelliklere sahip plakalar çeşitli şekillerde mesnetlenebilir; statik veya dinamik etkilere maruz bırakılabilirler. Dairesel plakaların statiği ile ilgili olarak oldukça fazla sayıda çalışma mevcuttur [1, 2]. Dairesel plakaların dinamik özellikleri de yapısal performansı önemli derecede etkilemektedir. Bilindiği üzere, yapıyı zorlayan dış kuvvetin frekansı plakanın doğal frekansı ile benzeşirse ciddi deformasyonlar ve yapısal çökmeler meydana gelebilir. Bu nedenle plakaların doğal frekansları uzun yıllardır araştırmacıların ilgisini çekmektedir ve Galerkin, Ritz, sonlu elemanlar gibi birçok ağırlık fonksiyonu yöntemi ile çözülebilmektedir [3, 4]. Farklı sınır koşulları altındaki dairesel plakaların doğal frekanslarını araştıran ve

hareketin diferansiyel denklemini Bessel fonksiyonları cinsinden ifade eden çok sayıda çalışma literatürde mevcuttur [3, 5, 6].

Diferansiyel Transform Metodu (DTM) kavramı ilk olarak Zhou [7] tarafından 1986 yılında elektrik devrelerindeki lineer ve lineer olmayan başlangıç problemlerinin çözümünde kullanılmıştır. DTM, Taylor serisi açılımını esas alan ve polinomlar şeklinde çözüm öngören yarı analitik bir yöntemdir. Geleneksel yüksek mertebedeki Taylor serisi çözümleri oldukça fazla sayıda sembolik hesaplama ve uzun işlem süreleri gerektirir. DTM iteratif bir prosedür öngörerek cebirsel polinom serileri şeklinde bir çözüm imkanı verir ve çoğu sayısal yöntemde olan sayısal hesaplamaların zorluk derecesini düşürür. Bununla beraber, diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri, DTM uygulaması yapılarak polinomlar şeklinde kapalı formda analitik olarak tekrar ifade edilebilir. Bu yöntem kullanılarak diferansiyel ve integro-diferansiyel denklemler için yüksek doğrulukta ya da kesin çözümlere ulaşmak mümkündür [8].

Bilindiği üzere özdeğer problemleri hem analitik hem de yaklaşık yöntemler vasıtası ile çözülebilir. Bazı özdeğer problemlerinde bütün özdeğerleri ve özvektörleri analitik yöntemler yardımıyla ayırt edebiliriz. Yaklaşık yöntemler ile bazı özdeğer ve özvektörler hesaplanabilmektedir, ancak i'inci ($i \geq 2$) özvektörleri bulmak oldukça zor olabilmektedir [9]. DTM dönüşümünün özdeğer problemleri için uygulamaları [9-13] yöntemin diğer sayısal çözümlere göre daha yüksek doğrulukta sonuçlar getirdiğini ortaya koymuştur.

Bu çalışmada başka bir özdeğer problemi olan dairesel plaka serbest titreşimi konusu DTM uygulamaları ile birlikte incelenmektedir. Plaka titreşimi konusunu DTM ile inceleyen çalışma sayısı literatürde oldukça azdır. Yeh ve Jang [14] dikdörtgen bir plakanın dinamik problemini sonlu farklar yöntemi ve DTM'yi barındıran melez bir yöntem geliştirerek incelemişlerdir. Malik ve Allahi [15] ise DTM kullanarak dikdörtgen plakaların karakteristik denklemlerini dönüştürülmüş olarak türetmişlerdir. Ancak yapılan bu iki çalışma da dikdörtgen plakalar üzerine olup, dairesel plakaların farklı ve daha zor sınır/düzenlilik koşulları için DTM uygulaması literatürde açık bırakılmıştır. Dairesel plakalar için, Wu ve arkadaşları [16] dört sınır/düzenlilik koşulu tanımlayarak sayısal bir yöntem olan genelleştirilmiş diferansiyel dörtlük kuralı yardımıyla çözümler geliştirmiştir. Bu çalışmada literatürde atlanmış durumda olan bu konu incelenmiş ve dairesel plakaların serbest

titreşimleri için DTM uygulanarak frekans denklemleri ve mod fonksiyonları dönüştürülmüş olarak ifade edilmiştir. Böylelikle DTM'nin oldukça zor sınır şartları altında bir özdeğer problemi için ne derece başarılı olduğu da araştırılmıştır.

Bölüm 2'de ince plaka teorisi için genel kabullerin tanıtılması ile birlikte statik ve dinamik olarak denge denklemleri ortaya konmaktadır. Dairesel plakalar için serbest titreşim hareketinin diferansiyel denklemi elde edildikten sonra Bessel fonksiyonları formunda analitik ifadeler de tanıtılmaktadır. Bölüm 3'de çözüm yöntemi olarak öngörülen DTM detaylı tanıtılmakta, hareketin yönetici diferansiyel denklemleri reküratif bağıntılara indirgenmekte, ilgili sınır ve düzenlilik koşulları da cebirsel denklem takımlarına dönüştürülmektedir. Bölüm 4'de ise sembolik hesaplamalar için dönüştürülmüş olarak ifade edilen denklemler üzerinde bazı cebirsel operasyonlar yürütüldükten sonra i'inci doğal frekanslar (özdeğerler) ve i'inci mod fonksiyonları (özvektörler) için analizler yapılmaktadır. Sayısal çözümlemeler sonucu elde edilen değerler, literatürde sıklıkla ifade edilmiş olan Bessel [3] ve genelleştirilmiş diferansiyel dörtlük yöntemi [16] sonuçları ile karşılaştırılmaktadır. Ayrıca, dairesel plakanın mod şekilleri ve doğal frekansların hesaplanan seri büyüklüklerine göre yakınsamaları da farklı sınır koşulları için karşılaştırmalı olarak incelenmektedir.

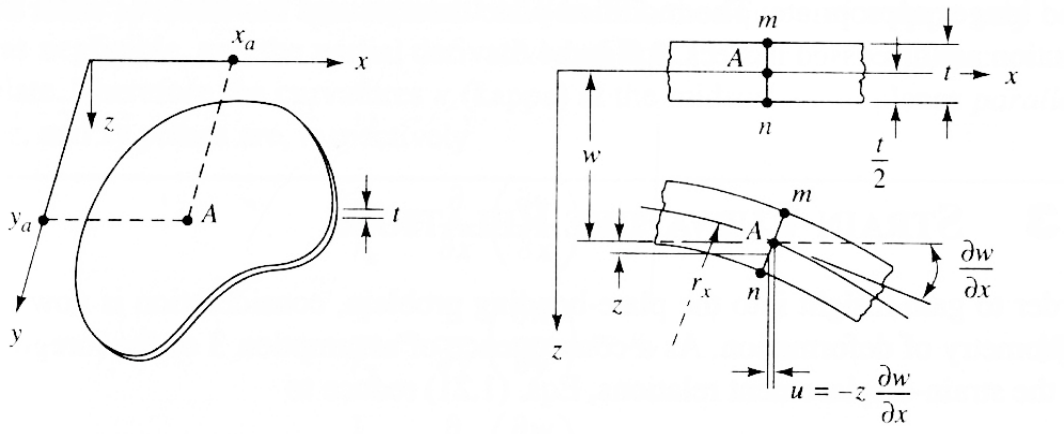
2. İNCE PLAKA TEORİSİ VE DENGE DENKLEMLERİ

Bu bölümde küçük deformasyonlu ince plakalar için genel kısıtlamalar ve kabuller verilecektir. Buradan hareketle plaka geometrisine bağlı olarak plaka içerisindeki gerilme değişimi yardımıyla ana denklemler çıkartılacak ve plaka yer değiştirmesi için genel diferansiyel denklem ortaya konacaktır. Elastisite teorisinden statik denge denklemlerinin ortaya konmasının ardından dinamik denge denklemlerine geçilecektir. Böylelikle enine yer değiştirmesi "w" ile ifade edilen bir plakanın serbest titreşim hareketinin diferansiyel denklemi elde edilecektir. Polar koordinat dönüşümleri tanıtıldıktan sonra serbest titreşim ifadesinin Bessel denklemleri formunda analitik çözümü gösterilecektir.

2.1. Plaka Statik Denge Denklemleri

2.1.1. Kabuller ve Kısıtlamalar

Şekil 2.1'deki yüklenmemiş plaka göz önüne alındığında xy düzleminin plaka orta düzlemiyle çakıştığı görülür. Herhangi bir noktada oluşan x, y ve z yönlerindeki deplasman bileşenleri, sırasıyla u, v ve w olarak tanımlanır. Şekil 2.1'de gösterildiği gibi yanal yükleme nedeniyle oluşan deformasyonla birlikte, plaka orta yüzeyindeki herhangi bir $A(x_a,y_a)$ noktasında w yer değiştirmesi görülür.



Şekil 2.1 : Deformasyon öncesi ve sonrası plaka elemanı

Klasik ince plak teorisinin getirdiği kabuller ve kısıtlamalar şunlardır [2]:

1. Kalınlığın en küçük kenar uzunluğuna oranı 1/20 den küçüktür.

2. Plaka malzemesi homojen, izotropik ve elastiktir.

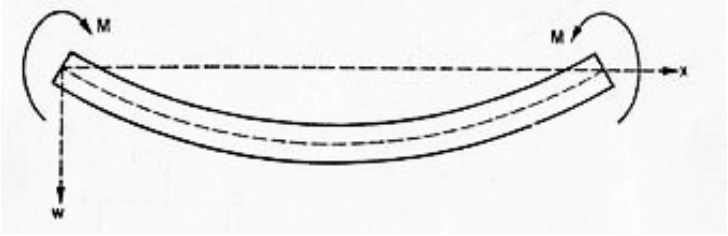
3. Orta yüzeyin yer değiştirmesi kalınlığa oranla küçüktür. Bu nedenle, deforme olmuş yüzeyin eğimi de çok küçüktür ve eğim ifadesinin karesi ihmal edilebilir bir büyüklüktür.

4. Orta düzlem plakanın eğilmesinden sonra da aynı şekilde kalır. Bu nedenle tarafsız düzlem olarak adlandırır. Diğer bi deyişle z = 0 düzleminde $u_0 = v_0 = 0$ yazılabilir.

5. Şekil 2.1'deki orta yüzeye normal olan düzlem kesitleri (mn), plakanın eğilmesinden sonra da orta yüzeye normal ve düzlem kalırlar. Bu γ_{xz} ve γ_{yz} dik kayma gerinmelerinin ihmal edildiği anlamına gelmektedir. Plakanın bütün yer değiştirmesi eğilmeden kaynaklanan gerinmeler nedeniyle oluşur. Bu nedenle enine yüklemenin bir sonucu olan normal gerinme, ε_z de ihmal edilir.

6. Orta düzleme normal olan σ_z gerilmesi diğer gerilme bileşenlerine göre küçüktür ve ihmal edilir.

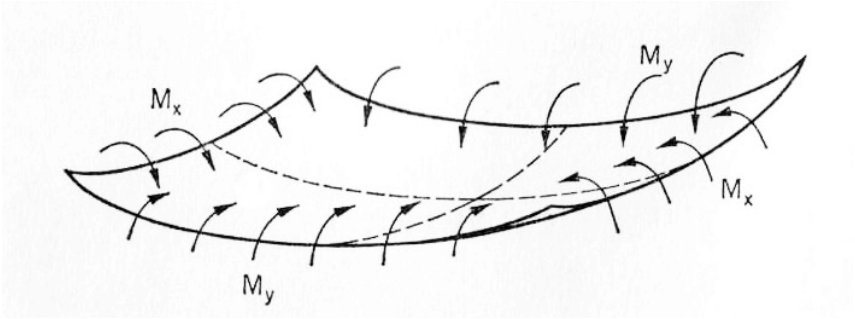
Literatüde Kirchhoff hipotezi olarak da bilinen bu kabuller basit kirişlerin temel eğilme teorisi ile de paraleldir. Bilindiği üzere basit kirişlerin eğilme teorisinde tek bir ana eksen olduğu kabul edilir. Bu temel teoriye göre, Şekil 2.2'de kesikli çizgilerle gösterilen eksen tarafsız eksendir ve bu eksen üzerinde çekme ve basma gerilmeleri sıfıra eşittir.



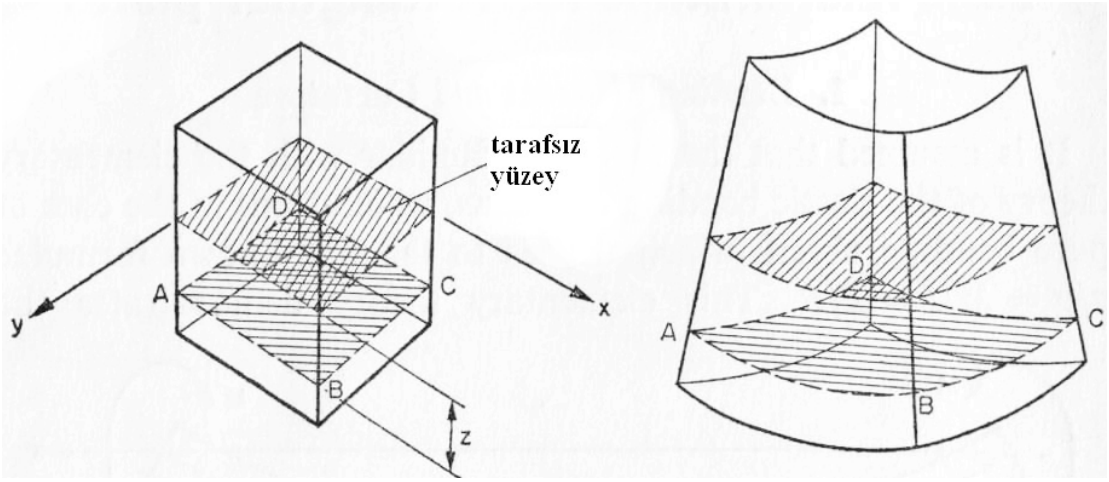
Şekil 2.2 : Moment altındaki plakanın tarafsız ekseni

Şekil 2.3'de gösterildiği gibi yayılı momentlerin uygulandığı dikdörtgen bir plaka için de aynı yaklaşım uygulanabilir. Yapılan kabullere göre plakanın orta yüzeyi tarafsız yüzey olarak adlandırılabilir. Bu plakanın küçük bir parçası göz önüne

alındığında (Şekil 2.4), bu parçanın kenarlarının eğilmesinden sonra yine düz bir yüzeye sahip olduğu kabulüyle tarafsız düzleme z uzaklığındaki bir ABCD yüzeyi için x yönündeki boylamasına birim uzama (ε_x) ve y yönündeki boylamasına birim uzama (ε_y), z mesafesiyle orantılı olarak değişir. Bundan dolayı, elastik davranışta gerilmenin tarafsız yüzeyden olan uzaklıkla değiştiği sonucuna varılır.



Şekil 2.3 : Yayılı momentler altındaki dikdörtgen plaka



Şekil 2.4 : Tarafsız yüzeye olan uzaklıkla gerilmenin değişimi

2.1.2. Gerinme – Eğrilik Bağıntıları

Plaka eğilmesi bağıntıları oluşturulurken ilk önce deformasyon geometrisi incelenmelidir. Bu nedenle gerinme – deplasman bağıntıları ve bunların uygunluğu oluşturulmalıdır. Yapılan kabullerden bilindiği üzere z yönündeki ε_z normal gerinmesi ve γ_{xz} ve γ_{yz} dik kayma gerinmeleri sıfır kabul edilmektedir. Bağıntılar iki boyutlu düzlemsel gerilme problemi olarak incelendiğinde x,y,z eksenlerindeki normal ve kayma gerinmeleri için şu ifadeler yazılabilir:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \qquad \textbf{(2.1)}$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

(2.1) denklemindeki ε_z ifadesi integre edildiğinde plaka yer değiştirmesinin plaka kalınlığı boyunca değişmediği sonucuna varılır ($w = w(x, y)$). Benzer şekilde γ_{xz} ve γ_{yz} ifadelerinin integrasyonundan da (2.2) denklemi elde edilir.

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x} + u_o(x, y) \qquad v = -z\frac{\partial w}{\partial y} + v_o(x, y) \qquad \textbf{(2.2)}$$

$u_o(x, y)$ ve $v_o(x, y)$ ifadeleri plaka orta düzlemindeki u ve v değerlerini tanımlamaktadır. Yapılan kabullere göre $u_0 = v_0 = 0$ olduğu bilinmektedir. Bu kabüle göre (2.2) denklemi (2.1) denklemindeki ε_x, ε_y, γ_{xy} ifadelerinde kullanılarak (2.3) denklemine ulaşılır. (2.3) ifadeleri kullanılarak plaka üzerindeki herhangi bir noktada gerinme değerleri hesaplanabilir.

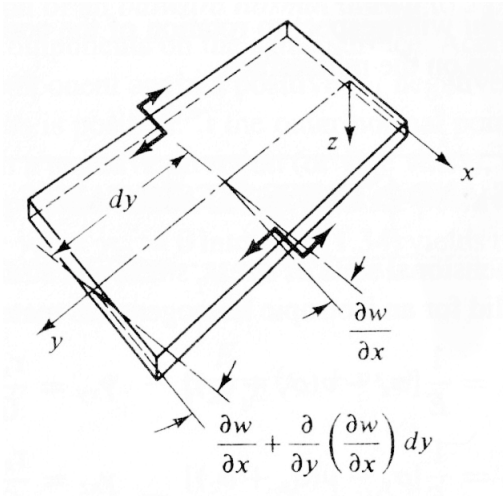
$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad \textbf{(2.3)}$$

Bir düzlem eğrisinin eğriliği, eğrinin eğiminin $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$ eğri uzunluğu boyunca değişim oranıdır. Eğrilik aynı zamanda eğrilik yarıçapının da tersine eşittir. Yapılan kabullerden, eğim ifadesinin karesinin ihmal edilebilir olduğu bilinir. (2.3) denklemindeki ifadelerde kısmi türevler plakanın eğriliğini göstermektedir. Böylece plakanın orta yüzeyindeki eğrilikler (κ) ifade edilibilir:

$$\frac{1}{r_x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \kappa_x \qquad \frac{1}{r_y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = \kappa_y \qquad \frac{1}{r_{xy}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = \kappa_{xy} \qquad \textbf{(2.4)}$$

Şekil 2.1'de xz düzleminin orta yüzeyinde eğrilik, κ_x ve eğrilik yarıçapı, r_x görülmektedir. Buna benzer olarak κ_y ve r_y de yz düzleminde görülebilir. (2.4)

denklemindeki κ_{xy} ifadesi ise plaka orta düzleminin x,y eksenlerine göre burulması ile ilgilidir. Plaka elemanının burulması Şekil 2.5'de görülmektedir.



Şekil 2.5 : Plaka elamanının burulması

Böylelikle (2.3) ve (2.4) denklemlerinin yardımıyla gerinme – eğrilik bağıntıları oluşturulabilir. (2.3), (2.4) ve (2.5) denklemleri, bir plakadaki gerinmelerin orta düzlemden z uzaklığıyla lineer olarak değiştiğini ortaya koyar.

$$\varepsilon_x = -z\kappa_x \qquad \varepsilon_y = -z\kappa_y \qquad \gamma_{xy} = -2z\kappa_{xy} \tag{2.5}$$

2.1.3. Gerilme – Gerinme Bağıntıları ve Kuvvetler – Momentler

Üç boyutlu gerilme ifadesinde, izotropik, homojen bir malzeme için Hooke yasası yardımıyla gerilme – gerinme bağıntısı şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned} \tag{2.6}$$

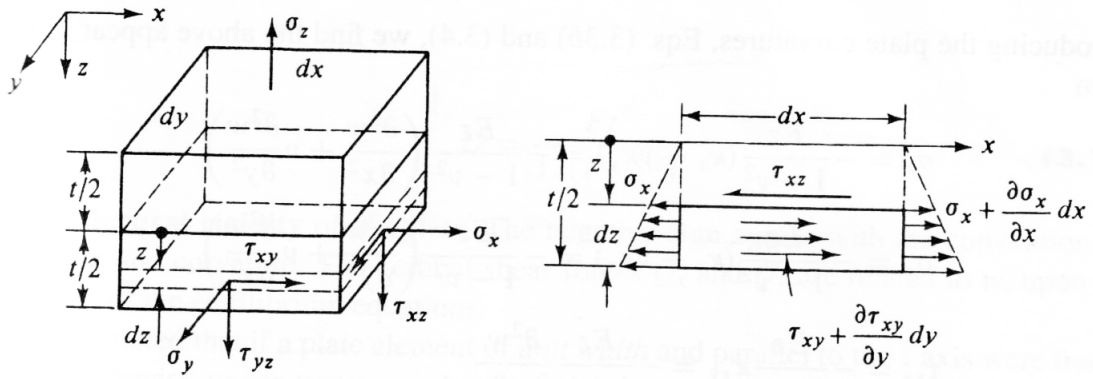
Burada E, ν ve G sabitleri sırasıyla elastise modülü, Poissson oranı ve kayma modülüdür. Bu ifadeler arasındaki ilişki (2.7) denkleminde gösterilmektedir.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.7}$$

Düzlemsel gerilme durumu göz önüne alındığında bilindiği üzere en başta yapılan kabullerden $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$ dır. (2.6) denkleminde bu kabule göre çözüm yapılırsa düzlemsel gerilme – gerinme ifadeleri şu hali alırlar:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \qquad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \qquad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \tag{2.8}$$

Şekil 2.6'da plaka elemanının alt yarısındaki ve orta düzlemindeki gerilmeler gösterilmektedir.



Şekil 2.6 : Plaka elemanı üzerindeki gerilmeler

(2.5) ve (2.6) denklemleri kullanılarak (2.8) denklemi yeniden oluşturulduğunda (2.9) denklemi yazılabilir. (2.9) ifadesi ve Şekil 2.6 incelendiğinde, gerilmelerin plaka kalınlığı boyunca lineer olarak değiştiği, fakat orta yüzeyde sıfır olduğu sonucuna varılabilir.

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2}(\kappa_x + \nu\kappa_y) = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\
\sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2}(\kappa_y + \nu\kappa_x) = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\
\tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\nu^2}\kappa_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Plakanın kalınlığı boyunca dağılmış olan gerilmeler, eğilme – burulma momentleri ve kesme kuvvetleri oluştururlar. Şekil 2.6'ya dayanarak birim uzunluk başına momentler ve kuvvetler için şunlar yazılabilir:

$$\int_{-t/2}^{t/2} z\sigma_x dydz = dy \int_{-t/2}^{t/2} z\sigma_x dz = M_x dy \tag{2.10}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} zdz \tag{2.11}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \tag{2.12}$$

Yüzey normali ve gerilme bileşeninin yönleri pozitif ise gerilmenin de pozitif olduğu kabul edilir. Bu işaret anlaşmasına göre Şekil 2.6'daki bütün gerilme bileşenleri pozitiftir. Kesme kuvveti için de bu işaret anlaşması uygulanır. (2.9) denklemi (2.11) denkleminde kullanıldığında eğilme ve burulma momentleri için şu ifadeler elde edilebilir [2]:

$$\begin{aligned} M_x &= -D(\kappa_x + \nu\kappa_y) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ M_y &= -D(\kappa_y + \nu\kappa_x) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ M_{xy} &= -D(1-\nu)\kappa_{xy} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \tag{2.13}$$

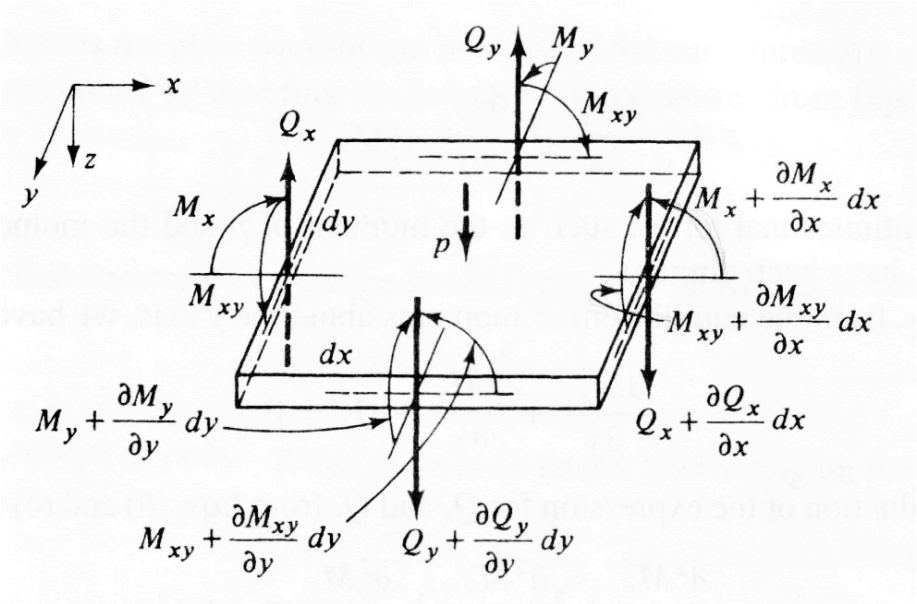
(2.13) denklemlerinden ikincisinden M_x momentinin sadece xw düzleminde değil, yw düzleminde de deformasyona neden olduğu anlaşılır. Şekil 2.3 tekrar hatırlanırsa, M_x momenti xw düzleminde aşağı doğru, yw düzleminde ise yukarı doğru bir eğilmeye neden olmaktadır. Bu durum Poisson oranı etkisiyle açıklanabilir. Benzer durum M_y momenti için de geçerlidir. (2.13) denklemlerindeki D ifadesi plakanın rijitliği olarak adlandırılır. Denklemde, h, plaka kalınlığı, I, birim uzunluk başına düşen atalet momentidir ve $I = 12/h^3$ olarak bilinir.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{EI}{(1-\nu^2)} \tag{2.14}$$

Böylece (2.9) denklemindeki iki boyutlu gerilme bileşenleri tekrardan yazılabilir. (2.13) denklemlerindeki moment ifadeleri, (2.9) denkleminde kullanılırsa ve (2.14) denklemi de uygulanırsa gerilmeler için aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$\sigma_x = \frac{12M_x z}{h^3} \qquad \sigma_y = \frac{12M_y z}{h^3} \qquad \tau_{xy} = \frac{12M_{xy} z}{h^3} \tag{2.15}$$

2.1.4. Plaka İçerisinde Gerilmenin Değişimi – Denge Denklemleri



Şekil 2.7 : Plaka elamanına etkiyen kuvvet ve momentler

Plaka elemanının denge denklemleri yazılırken, yüklenmiş plakanın gerilme bileşenleri ve bunların sonucu ortaya çıkan kuvvet ve momentlerin genel statik dengesi incelenir. Şekil 2.7'de gösterilen plaka elemanı dxdy alanına sahiptir ve birim alan başına üniform yayılı bir p yükü etkisindedir. Burada denge denklemleri oluşturulurken plaka ağırlığı, p yüküne göre küçük olduğundan ihmal edilir. Ayrıca sonsuz küçük elemanların çarpımı da denklemlerde ihmal edilir. z yönündeki kuvvetler sıfıra eşitlendiğinde:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dxdy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dxdy + pdxdy = 0 \tag{2.16a}$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \tag{2.16b}$$

Ayrıca x ekseni etrafında moment dengesi yazıldığında:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}dxdy + \frac{\partial M_y}{\partial y}dxdy - Q_y dxdy = 0 \qquad \textbf{(2.17a)}$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \qquad \textbf{(2.17b)}$$

Benzer şekilde, y ekseni etrafında momentlerin dengesinden:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \qquad \textbf{(2.18)}$$

Sonuçta, (2.18) ve (2.17b) denklemleri (2.16b) denkleminde yerlerine yazıldığında aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p \qquad \textbf{(2.19)}$$

(2.19) ifadesi, ince plakaların eğilmesinde denge denkleminin diferansiyel ifadesidir. Görüldüğü üzere tek bir denklem için üç tane bilinmeyen moment vardır. Bu nedenle plaka problemleri statikçe belirsiz olmaktadırlar. Bütün bunlara ek olarak, (2.18) ve (2.17b) denklemleri (2.13) denklemlerinde kullanıldığında, Q_x ve Q_y dik kesme kuvvetleri için yer değiştirmeye bağlı ifadeler yeniden oluşturulabilir:

$$\begin{aligned} Q_x &= -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 w) \\ Q_y &= -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 w) \end{aligned} \qquad \textbf{(2.20)}$$

Denklemlerde kullanılan Laplace operatörü de şu şekildedir:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad \textbf{(2.21)}$$

2.1.5. Genel Denklem

Plaka yer değiştirmesi için diferansiyel bir denklem, bundan önceki kısımlarda bulunan sonuçlara dayanarak kolaylıkla oluşturulabilir. (2.13) denklemlerindeki M_x, M_y, M_{xy} ifadelerinin ilk kısımları (2.19) denkleminde yerlerine koyulursa:

$$\frac{\partial^2 \kappa_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \kappa_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \kappa_y}{\partial y^2} = \frac{p}{D} \qquad \textbf{(2.22a)}$$

(2.22a) denklemi plaka dengesini eğrilikler cinsinden gösterir. Bu denklemin alternatif bir şekli ise eğrilik ifadelerinin denklem (2.4) yardımıyla değiştirilmesi sonucu türetilebilir:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \qquad \textbf{(2.22b)}$$

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \qquad \textbf{(2.22c)}$$

(2.22c) denklemi, (2.22b) denkleminin 1811 yılında Lagrange tarafından geliştirilmiş diğer bir ifadesidir. (2.22c) denklemindeki biharmonik operatör için $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = (\nabla^2)^2$ eşitliği göz önünde bulundurulmalıdır. (2.22) denklemi ince plakaların yer değiştirmesi için genel diferansiyel denklemdir. Burada w yer değiştirmesinin bulunması için denklem integre edilmelidir. İntegrasyon sabitleri ise plakanın sınır şartları yardımıyla oluşturularak "w" elde edilir.

2.2. Plaka Dinamik Denge Denklemleri

Plaka deformasyonları zamanla değişiyorsa ve bunlar ihmal edilemeyecek büyüklükte atalet kuvvetlerinin oluşmasına neden oluyorsa plakanın denge şartlarında bu kuvvetlerin de göz önüne alınması gerekir. Sistemde atalet kuvvetlerinden bağımsız olarak dış kuvvetler de var ise zorlanmış titreşim söz konusu olur. Eğer dış kuvvet yoksa deformasyondaki etken atalet kuvvetlerinden ibarettir ve serbest titreşimler söz konusu olur.

Plakaların dinamik davranışında statik davranışındaki hipotezlerin ve yasaların geçerli oldukları kabul edilir. Bu durumda statik haldeki kuvvetler yerine, dinamik halde zamanla değişen kuvvetlerle yine zamanla değişen atalet kuvvetleri gelir.

Statik halde kesit etkileri söz konusu kesitin yerine bağlı iken dinamik halde ayrıca zamana da bağlı olur. Diferansiyel denklemler "t" zaman değişkenini ve ona ait türevleri de içerirler. Statik halde diferansiyel denklemin sınır koşullarını sağlaması aranırken dinamik halde sınır koşullarınına ek olarak başlangıç koşullarını da sağlaması aranır [17].

2.2.1. Statik Halden Dinamik Hale Geçiş

Plakaların titreşim denklemlerini yazmak için Newton'un 2. kanununu (2.22c) denklemine uygulamak yeterli olmaktadır. Newton'un dinamik kanununa göre hareket miktarının değişme hızı cisme tesir eden kuvvetle orantılı olup kuvvetle aynı doğrultudadır. Bir diğer manada kütleye tesir eden kuvvet bu kütle ile ivmenin çarpıma eşittir ve kütle ile ivmenin işareti değiştirilmiş çarpımı atalet kuvveti olarak tanımlanır.

Statik halde yüzeysel yayılı p(x,y) statik yükleri ile yüklü elastik ince plakaların genel yer değiştirmesini belirten (2.22c) denklemi, dinamik halde atalet kuvvetlerinin etkisi altında şu şekilde ifade edilebilir:

$$D\nabla^4 w(x,y,t) = p(x,y,t) - \rho \frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2} \qquad \textbf{(2.23)}$$

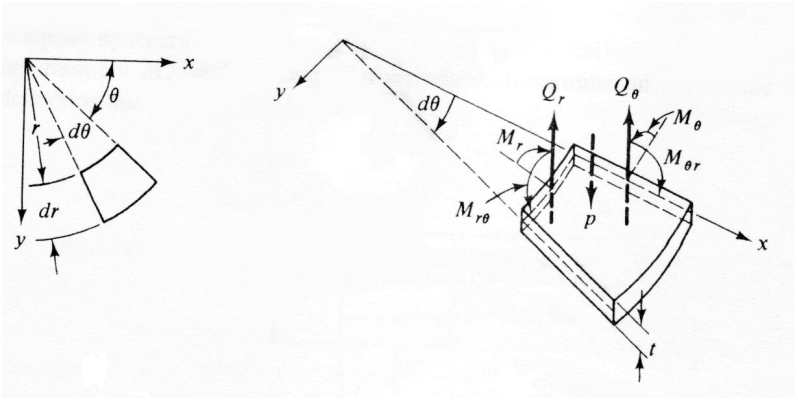
(2.23) denklemindeki $\partial^2 w / \partial t^2$ terimi ivmeyi göstermektedir ve birim alandaki kütlesel yoğunluk, ρ ile çarpımı atalet kuvveti olarak sisteme etkimektedir. (2.23) denklemi dış kuvvet etkisindeki plakaların zorlanmış titreşimine ait diferansiyel denklemdir. (2.23) denkleminde p(x,y,t) ile gösterilen dış kuvvetin etkisi altında olmayan sistemde deformasyonlar atalet kuvvetlerinden ibarettir ve plaka için serbest (doğal) titreşimler söz konusudur.

Buna göre enine yer değiştirmesi w(x,y,t) ile ifade edilen bir plakanın serbest titreşim hareketinin diferansiyel denklemi şu şekilde ifade edilmektedir:

$$D\nabla^4 w(x,y,t) + \rho \frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad \textbf{(2.24)}$$

2.2.2. Polar Koordinat Dönüşümleri

Kartezyen koordinatlarda x ve y'ye bağlı olarak ifade edilen denklemler polar koordinatlarda r ve θ'ya bağlı olarak ifade edilirler. Dairesel plaka problemlerinde polar koordinatlarda çalışmak kartezyen koordinatlarda çalışmaktan çok daha kolaydır. Bunun nedeni dairesel plakalarda yükleme ve geometri açısından eksenel simetri durumunun var olmasıdır.



Şekil 2.8 : Polar koordinatlarda plaka elemanı üzerindeki kuvvet, momentler

Şekil 2.8 göz önüne alındığında polar koordinatlar ve kartezyen koordinatlar arasında şu bağıntılar yazılabilir:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta & r^2 &= x^2 + y^2 \\ y &= r\sin\theta & \theta &= \tan^{-1}\frac{y}{x} \end{aligned} \qquad \textbf{(2.25)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} = \cos\theta & \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{y^2}{r^2} = -\frac{\sin\theta}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} = \sin\theta & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{x^2}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r} \end{aligned} \qquad \textbf{(2.26)}$$

Plaka yer değiştirme ifadesi r ve θ' ya bağlı bir fonksiyon olduğu için (2.25) ve (2.26) bağıntıları kullanılarak ve zincir kuralı uygulanarak aşağıdaki eşitlikler elde edilebilir:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\sin\theta \qquad \textbf{(2.27)}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \qquad \textbf{(2.28a)}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\cos^2\theta - 2\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\partial r}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\sin^2\theta}{r} + 2\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\frac{\sin^2\theta}{r^2} \quad \textbf{(2.28b)}$$

(2.27) ve (2.28) denklemlerinin mantığıyla kartezyen koordinattaki yer değiştirme ifadesinin diferansiyelleri $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)$ polar koordinatlarda ifade edilebilir:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\sin^2\theta + 2\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\partial r}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\cos^2\theta}{r} - 2\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\frac{\cos^2\theta}{r^2} \quad \textbf{(2.29)}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 w}{\partial\theta\partial r}\frac{\cos 2\theta}{r} - \frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\cos 2\theta}{r^2} - \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} - \frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2} \quad \textbf{(2.30)}$$

(2.21) denkleminde tanıtılan Laplace operatörü (2.28) ve (2.29) denklemlerinin kullanılması ile polar koordinatlarda ifade edilebilir:

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} \quad \textbf{(2.31)}$$

Polar koordinat dönüşümlerinin genel plaka teorisi kapsamında ortaya konan ifadelere uygulanması ile dairesel plakalar için denklemler türetilebilir.

2.3. Serbest Titreşim Denkleminin Analitik Çözümü

Enine yer değiştirmesi w ile gösterilen plakanın serbest titreşim hareketinin diferansiyel denklemi (2.24) ifadesi ile tanıtılmıştı. Dairesel plakalarda bu ifade polar koordinatlarda şu şekilde ifade edilebilir:

$$D\nabla^4 w(r,\theta,t) + \rho\frac{\partial^2 w(r,\theta,t)}{\partial t^2} = 0 \quad \textbf{(2.32)}$$

Serbest harmonik titreşim kabulu ile yer değiştirme fonksiyonu ise [4];

$$w(r,\theta,t) = W(r,\theta)e^{i\omega t} \tag{2.33}$$

(2.33) denklemindeki ω terimi dairesel frekans, W ifadesi ise pozisyon koordinatlarının fonksiyonu olarak tanımlanır. (2.33) denklemi (2.32) ifadesinde kullanıldığında [3];

$$(\nabla^4 - \beta^4)W = (\nabla^2 + \beta^2)(\nabla^2 - \beta^2)W = 0 \tag{2.34}$$

$$\beta^4 = \frac{\rho\omega^2}{D} \tag{2.35}$$

(2.35) denklemindeki β terimi uygunluk parametresi olarak adlandırılır. (2.34) denkleminin genel çözümü lineer diferansiyel denklem teorisine göre çözümlerin üst üste getirilmesi yöntemiyle elde edilebilir.

$$\nabla^2 W_1 + \beta^2 W_1 = 0, \qquad \nabla^2 W_2 + \beta^2 W_2 = 0 \tag{2.36}$$

(2.34) denklemindeki W terimi Fourier bileşenleri cinsinden şu şekilde ifade edilebilir [3]:

$$W(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} W_m(r)\cos m\theta + \sum_{n=1}^{\infty} W_m^*(r)\sin m\theta \tag{2.37}$$

(2.37) denklemini (2.36) denklemi içinde kullanarak;

$$\begin{aligned} &\frac{d^2W_{m_1}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dW_{m_1}}{dr} - \left(\frac{m^2}{r^2} - \beta^2\right)W_{m_1} = 0 \\ &\frac{d^2W_{m_2}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dW_{m_2}}{dr} - \left(\frac{m^2}{r^2} + \beta^2\right)W_{m_2} = 0 \end{aligned} \tag{2.38}$$

(2.37) denklemindeki W^*_m terimi için de (2.38) denklemindeki ile aynı iki denklem tanımlanabileceği unutulmamalıdır. (2.38) denklemleri literatürde Bessel çözümü fonksiyonları ile ifade edilmektedir ve çözümü şu şekilde önerilmektedir:

$$W_{m_1} = A_m J_m(\beta r) + B_m Y_m(\beta r), \qquad W_{m_2} = C_m I_m(\beta r) + D_m K_m(\beta r) \tag{2.39}$$

(2.39) denkleminde J_m, 1. türden, m. mertebeden Bessel fonksiyonu, Y_m, 2. türden, m. mertebeden Bessel fonksiyonu, I_m, 1. türden, m. mertebeden değiştirilmiş Bessel

fonksiyonu, K_m ise 2. türden, m. mertebeden değiştirilmiş Bessel fonksiyonu olarak isimlendirilir. A_m, B_m, C_m ve D_m katsayıları mod şekillerini belirlerler ve problemin sınır koşullarına göre çözülürler. Böylece (2.34) denkleminin genel çözümü kutupsal koordinatlarda şu şekilde oluşturulur:

$$W(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty}[A_m J_m(\beta r) + B_m Y_m(\beta r) + C_m I_m(\beta r) + D_m K_m(\beta r)]\cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty}[A^*_m J_m(\beta r) + B^*_m Y_m(\beta r) + C^*_m I_m(\beta r) + D^*_m K_m(\beta r)]\sin m\theta \quad \textbf{(2.40)}$$

Dairesel plakalar için (2.40) denkleminde bazı terimler ihmal edilebilir. Polar koordinat sisteminin başlangıç noktası dairesel plaka merkezinde alındığında; r = 0 noktasında sonsuz yer değiştirmelerden ve gerilmelerden dolayı tekilliklerin oluşmaması için $Y_m(\beta r)$ ve $K_m(\beta r)$ terimleri (2.40) denkleminden çıkarılmalıdır. Ayrıca eksenel simetrik olarak uygulanacak sınır koşulları düşünüldüğünde, çözümü ifade edecek denklemde sin(mθ) terimleri de ihmal edilmelidir. Bütün bu basitleştirmeler yapıldığında (2.40) denklemi tipik bir dairesel plaka modu için son halini alır.

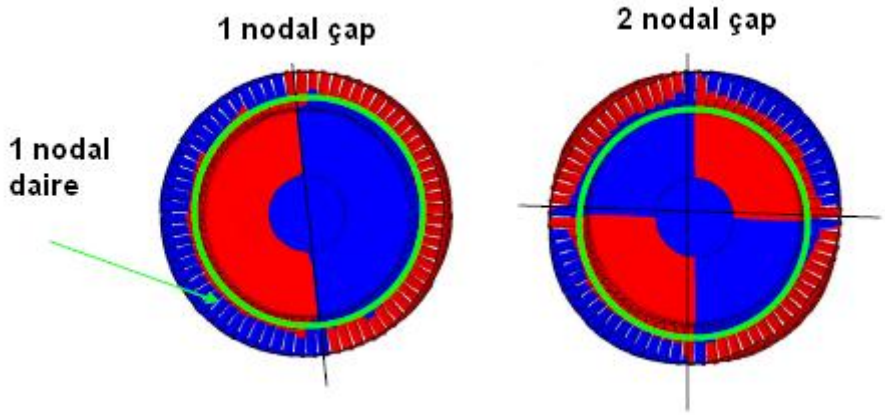
$$W(r,\theta) = [A_m J_m(\beta r) + C_m I_m(\beta r)]\cos m\theta \quad \textbf{(2.41)}$$

(2.41) denklemi literatürde dairesel plakalar için serbest titreşim denkleminin analitik çözümü olarak ifade edilir. Sınır koşullarının uygulanması ile birlikte A_m ve C_m katsayıları cinsinden bir özdeğer problemi yaklaşımı ile frekans denklemi ve mod fonksiyonları belirlenebilir. (2.41) denklemine sınır koşullarının tanıtılması ile elde edilen özdeğer probleminin çözümünde denklemin kökleri (özdeğerler), $\lambda = \beta r$ ile gösterilir. Bu köklerin karesi, λ^2_{ms} ifadesi literatürde titreşimin frekans parametresi olarak adlandırılır ve plakanın dairesel frekansı ω_{ms} ile aralarında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır [3]:

$$\lambda^2_{ms} = \omega_{ms} r^2 \sqrt{\frac{\rho}{D}} \quad \textbf{(2.42)}$$

(2.42) denkleminde gösterilen λ^2_{ms} frekans parametresindeki m, nodal çap sayısını, s ise nodal daire sayısını belirtmektedir. Dairesel plaka titreşiminin mod şekli için bu iki kavram önemlidir. Bir nodal çizgi plaka üzerinde yer değiştirmenin olmadığı

noktalardan meydana gelmektedir. Bu nodal çizgi, dairesel plakayı çapı boyunca keser ise nodal çap olarak, çevresel bir hat oluşturursa nodal daire olarak adlandırılır.



Şekil 2.9 : Nodal daire ve nodal çap kavramları

Şekil 2.9'da dairesel plaka titreşim modlarında nodal çap ve nodal daire tanımlamaları gösterilmektedir. Mavi ve kırmızı ile gösterilen bölümler birbirlerine zıt yönde yer değiştirmektedir ve nodal çizgilerde yer değiştirme sıfırdır.

3. PROBLEMİN TANIMI VE DİFERANSİYEL TRANSFORM METODU

Bu bölümde çözüm yöntemi olarak öngörülen DTM tanıtılmakta, dairesel bir plakanın serbest harmonik titreşim problemi öngörülerek yöntemin uygunluğu açıklanmaktadır. Dairesel plakanın titreşim hareketinin diferansiyel denklemi DTM kullanılarak reküratif bir bağıntı yardımıyla cebirsel olarak ifade edilebilir. İncelenecek olan basit mesnetli, ankastre ve serbest durum sınır şartlarının tanımlanması ile diferansiyel dönüşüm kuralları yardımıyla gerekli teoremler oluşturulup listelenebilir. Böylelikle sınır koşulları da sembolik hesaplamalar için cebirsel olarak ifade edilebilecektir.

3.1. Diferansiyel Transform Metodu

DTM kavramı ilk olarak Zhou tarafından 1986 yılında elektrik devrelerindeki lineer ve nonlineer başlangıç problemlerinin çözümünde kullanılmıştır [7]. DTM teknik bazı tekillikleri ve süreksizlikleri yok etmek konusunda oldukça başarılı olup, basitliği ve yüksek doğruluğu ile avantaj sağlamaktadır. İki ve üç boyutlu DTM uygulamalarının örnekleri literatürde bulunmaktadır [18, 19]. Ancak bu çalışmada bir boyutlu DTM kullanılmaktadır.

3.1.1. Diferansiyel Transform Metodunun Matematiksel Modeli

$r = r_0$ noktası R kümesi üzerinde herhangi bir nokta, f(r) fonksiyonu da R kümesinde analitik bir fonksiyon olsun. f(r) fonksiyonu böylelikle merkezi r_0 olan bir kuvvet serisi ile ifade edilebilir. f(r) fonksiyonun diferansiyel transformu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$F(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(r)}{dr^k}\right]_{r=r_0} \qquad \textbf{(3.1)}$$

(3.1) denkleminde f(r) orijinal fonksiyon, F(k) ise dönüştürülmüş fonksiyon olarak tanımlanır. F(k) fonksiyonunun ters dönüşümü ise şu şekildedir:

$$f(r)=\sum_{k=0}^{\infty}(r-r_0)^k F(k) \tag{3.2}$$

(3.1) ve (3.2) denklemlerini birleştirirsek,

$$f(r)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(r-r_0)^k}{k!}\left[\frac{d^k f(r)}{dr^k}\right]_{r=r_0} \tag{3.3}$$

(3.3) denklemi incelendiğinde diferansiyel transform kavramının Taylor serisi açılımını esas aldığı görülmektedir. Ancak Taylor serisi açılımından farklı olarak türevler sembolik olarak değerlendirilmezler. Geleneksel yüksek mertebedeki Taylor serisi çözümleri oldukça fazla sayıda sembolik hesaplama gerektirir. Diferansiyel transform metodunda ilgili türevler, orijinal fonksiyonun dönüştürülmesi ile oluşturulan iteratif bir prosedür ile cebirsel polinom serileri şeklinde ifade edilebilir.

DTM'nin gerçek uygulamalarında f(r) fonksiyonu sonlu sayıda seri ile ifade edilmektedir. Seri içerisindeki $\sum_{k=n+1}^{\infty}(r-r_0)^k F(k)$ teriminin ihmal edilebilecek kadar küçük olması yaklaşımı ile (3.3) denklemi sonlu sayıda seri açılımı şeklinde tekrar ifade edilebilir:

$$f(r)=\sum_{k=0}^{n}(r-r_0)^k F(k) \tag{3.4}$$

Bu çalışmada orijinal fonksiyon küçük harfli gösterim ile, dönüştürülmüş fonksiyon ise büyük harfli gösterim ile ifade edilmektedir. (3.4) denklemindeki n değeri doğal frekansların yakınsamasını ifade eden parametredir.

3.1.2. Teoremler

Bir boyutlu DTM teoremleri diferansiyel denklemlerin dönüştürülmesi sırasında sıklıkla kullanılmaktadır. (3.1) ve (3.2) denklemlerinden türetilen bir boyutlu dönüşüm teoremlerinden en sıklıkla kullanılanları Tablo 3.1'de gösterilmektedir [10].

Tablo 3.1 : Bir boyutlu DTM teoremleri

Orijinal fonksiyon	**DTM (Dönüştürülmüş Fonksiyon)**
$f(r) = g(r) \pm h(r)$	$F(k) = G(k) \pm H(k)$
$f(r) = cg(r)$	$F(k) = cG(k)$, c sabit bir sayı
$f(r) = g(r)h(r)$	$F(k) = \sum_{l=0}^{k} G(k-l)H(k)$
$f(r) = \frac{d^n g(r)}{dr^n}$	$F(k) = \frac{(k+n)!}{k!} G(k+n)$
$f(r) = r^n$	$F(k) = \delta(k-n) = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$

3.2. Serbest Titreşim Denklemi ve Dönüşümü

Enine yer değiştirmesi w ile gösterilen ince dairesel bir plakanın diferansiyel hareket denklemi serbest harmonik titreşim durumunda (2.32) ve (2.33) denklemlerinin kullanılması ile boyutsuzlaştırılmış olarak şu şekildedir [15]:

$$\nabla^4 w = \Omega^2 w \qquad \textbf{(3.5)}$$

(3.5) denkleminde Ω titreşimin boyutsuz frekansı, w = w(r,θ) ise boyutsuz yer değiştirme fonksiyonudur. Ω frekansının Bölüm 2'de tanıtılan λ_{ms}^2 frekans parametresinin boyutsuzlaştırılması ile türetildiği ve aynı değere sahip olduğu unutulmamalıdır. (2.41) denklemi hatırlandığında, dairesel plakanın tipik bir modu için "w" fonksiyonu radyal ve teğetsel bileşenlere sahiptir:

$$w = f(r)\cos(m\theta) \qquad \textbf{(3.6)}$$

(3.6) denkleminde r plakanın radyal yöndeki boyutsuzlaştırılmış koordinatı, f(r) radyal yöndeki mod fonksiyonu olup, m de serbest titreşim modlarının simetri davranışını belirleyen nodal çap sayısıdır. (3.5) denklemindeki biharmonik operatör (3.6) denklemine göre açılır ve cos(mθ) terimleri sadeleştirilirse (3.7) ve (3.8) denklemleri elde edilir:

$$-\frac{4m^2 f}{r^4}+\frac{m^4 f}{r^4}+\frac{1}{r^3}\frac{df}{dr}+\frac{2m^2}{r^3}\frac{df}{dr}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2 f}{dr^2}-\frac{2m^2}{r^2}\frac{d^2 f}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d^3 f}{dr^3}+\frac{d^4 f}{dr^4}=\Omega^2 f \qquad \textbf{(3.7)}$$

$$\frac{d^4 f}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3 f}{dr^3}-\frac{\left(1+2m^2\right)}{r^2}\frac{d^2 f}{dr^2}+\frac{\left(1+2m^2\right)}{r^3}\frac{df}{dr}+\frac{\left(m^4-4m^2\right)}{r^4}f=\Omega^2 f \qquad \textbf{(3.8)}$$

(3.8) denklemi DTM kullanılarak dönüştürülecek plaka yönetici denklemidir. Dönüşümü kolaylaştırma adına (3.9) denkleminde tanımlanan katsayılar ile gruplandırılmış olarak (3.8) denklemi tekrar yazılabilir:

$$A = m^4 - 4m^2, \quad B = 1 + 2m^2 \qquad \textbf{(3.9)}$$

$$\frac{d^4 f}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3 f}{dr^3}-\frac{B}{r^2}\frac{d^2 f}{dr^2}+\frac{B}{r^3}\frac{df}{dr}+\frac{A}{r^4}f=\Omega^2 f \qquad \textbf{(3.10)}$$

Tablo 3.1'de tanımlanan teoremler kullanılarak (3.10) denklemine DTM dönüşümü yapılır:

$$\begin{aligned}
&AF_k \\
&+B\sum_{l=0}^{k}\delta(l-1)(k-l+1)F_{k-l+1} \\
&-B\sum_{l=0}^{k}\delta(l-2)(k-l+1)(k-l+2)F_{k-l+2} \\
&+2\sum_{l=0}^{k}\delta(l-3)(k-l+1)(k-l+2)(k-l+3)F_{k-l+3} \\
&+\sum_{l=0}^{k}\delta(l-4)(k-l+1)(k-l+2)(k-l+3)(k-l+4)F_{k-l+4}=\Omega^2\sum_{l=0}^{k}\delta(l-4)F_{k-l}
\end{aligned} \qquad \textbf{(3.11)}$$

Dirac-Delta fonksiyonu özellikleri de kullanılarak (3.11) denklemi yeniden yazılır:

$$\begin{aligned}
&AF_k \\
&+BkF_k \\
&-Bk(k-1)F_k \\
&+2k(k-1)(k-2)F_k \\
&+k(k-1)(k-2)(k-3)F_k=\Omega^2 F_{k-4}
\end{aligned} \qquad \textbf{(3.12)}$$

(3.12) denklemi $k < 0$ için $F_k = 0$ kuralı göz önünde tutularak reküratif olarak;

$$
\begin{aligned}
&AF_{k+4} \\
&+B(k+4)F_{k+4} \\
&-B(k+4)(k+3)F_{k+4} \\
&+2(k+4)(k+3)(k+2)F_{k+4} \\
&+(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)F_{k+4} = \Omega^2 F_k
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

(3.13) denkleminde F_k ve F_{k+4} terimlerine göre sadeleştirmeler ve gruplandırmalar yapılarak rekürans eşitliği son hali ile yazılır:

$$F_{k+4} = \frac{\Omega^2}{A - B(k+4)(k+2) + (k+4)(k+3)^2(k+2)} F_k \tag{3.14}$$

(3.14) denkleminde ortaya konan rekürans bağıntısı incelendiğinde (k+4)'üncü terimin k'inci terimle ve Ω^2 değişkeni ile bağıntılı olduğu görülür. İlk dört terim olan F_0, F_1, F_2 ve F_3, (3.14) eşitliği kullanılarak açılabilir.

$$F_4 = \frac{\Omega^2 F_0}{A - B(4\cdot 2) + (4\cdot 3^2\cdot 2)} \tag{3.15}$$

$$F_5 = \frac{\Omega^2 F_1}{A - B(5\cdot 3) + (5\cdot 4^2\cdot 3)} \tag{3.16}$$

$$F_6 = \frac{\Omega^2 F_2}{A - B(6\cdot 4) + (6\cdot 5^2\cdot 4)} \tag{3.17}$$

$$F_7 = \frac{\Omega^2 F_3}{A - B(7\cdot 5) + (7\cdot 6^2\cdot 5)} \tag{3.18}$$

$$F_8 = \frac{\Omega^2 F_4}{A - B(8\cdot 6) + (8\cdot 7^2\cdot 6)} = \frac{\Omega^2\Omega^2 F_0}{A - B(8\cdot 6) + (8\cdot 7^2\cdot 6)\left(A - B(4\cdot 2) + (4\cdot 3^2\cdot 2)\right)} \tag{3.19}$$

$$F_9 = \frac{\Omega^2 F_5}{A - B(9\cdot 7) + (9\cdot 8^2\cdot 7)} = \frac{\Omega^2\Omega^2 F_1}{A - B(9\cdot 7) + (9\cdot 8^2\cdot 7)\left(A - B(5\cdot 3) + (5\cdot 4^2\cdot 3)\right)} \tag{3.20}$$

$$F_{10} = \frac{\Omega^2 F_6}{A - B(10\cdot 8) + (10\cdot 9^2\cdot 8)} = \frac{\Omega^2\Omega^2 F_2}{A - B(8\cdot 6) + (8\cdot 7^2\cdot 6)\left(A - B(6\cdot 4) + (6\cdot 5^2\cdot 4)\right)} \tag{3.21}$$

$$F_{11} = \frac{\Omega^2 F_7}{A - B(11\cdot 9) + (11\cdot 10^2 \cdot 9)} = \frac{\Omega^2\Omega^2 F_3}{A - B(11\cdot 9) + (11\cdot 10^2 \cdot 9)\left(A - B(7\cdot 5) + (7\cdot 6^2 \cdot 5)\right)} \quad \textbf{(3.22)}$$

(3.15) – (3.22) denklemlerinde F_0, F_1, F_2, F_3 terimleri cinsinden ifade edilen dönüştürülmüş ifadeler cebirsel olarak $F_{4k,}$ F_{4k+1}, F_{4k+2}, F_{4k+3} cinsinden genel olarak yazılabilir. Böylelikle tüm F_k terimleri F_0, F_1, F_2, F_3 cinsinden ifade edilebilir.

$$F_{4k} = \frac{\Omega^{2k} F_0}{\prod_{k=1}^{k}\left(A - B(4k)(4k-2) + (4k)(4k-1)^2(4k-2)\right)} \quad \textbf{(3.23)}$$

$$F_{4k+1} = \frac{\Omega^{2k} F_1}{\prod_{k=1}^{k}\left(A - B(4k+1)(4k-1) + (4k+1)(4k)^2(4k-1)\right)} \quad \textbf{(3.24)}$$

$$F_{4k+2} = \frac{\Omega^{2k} F_2}{\prod_{k=1}^{k}\left(A - B(4k+2)(4k) + (4k+2)(4k+1)^2(4k)\right)} \quad \textbf{(3.25)}$$

$$F_{4k+3} = \frac{\Omega^{2k} F_3}{\prod_{k=1}^{k}\left(A - B(4k+3)(4k+1) + (4k+3)(4k+2)^2(4k+1)\right)} \quad \textbf{(3.26)}$$

(3.2) denkleminde genel olarak dönüştürülmüş denklemler cinsinden ifade edilen radyal mod fonksiyonu $r_0 = 0$ noktası için tekrar yazılabilir:

$$f(r) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k F(k) \quad \textbf{(3.27)}$$

Böylelikle radyal mod fonksiyonu, $F_{4k,}$ F_{4k+1}, F_{4k+2}, F_{4k+3} terimleri ile ifade edilebilir.

$$f(r) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{4k} F_{4k} + \sum_{k=0}^{\infty} r^{4k+1} F_{4k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} r^{4k+2} F_{4k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} r^{4k+3} F_{4k+3} \quad \textbf{(3.28)}$$

(3.28) denklemi ile ifade edilen mod fonksiyonunun sınır koşullarından bağımsız olduğu unutulmamalıdır. Hatırlanacağı üzere rekürans bağıntısından yararlanarak tüm terimler F_0, F_1, F_2, F_3 terimleri cinsinden yazılarak mod fonksiyonları elde edilebilmekte idi. İleride uygulacağımız çözümlerde dönüştürülmüş sınır koşulları kullanılarak Ω frekans parametresi, serinin boyutunu belirleyen ve boyutsuz doğal

frekansların yakınsamasını ifade eden n terimine göre bulunacaktır. Bulunan frekans değeri ve n terimi kullanılarak serbest titreşimin mod şeklini belirtecek olan mod fonksiyonları polinom cinsinden ifade edilebilecektir.

3.3. Sınır Koşullarının Dönüşümü

Tablo 3.1'de gösterilen bir boyutlu DTM teoremlerinden yola çıkılarak genelleştirilmiş sınır koşulları için de dönüşüm teoremleri türetilebilir. Dairesel bir plaka için r, plakanın radyal yöndeki boyutsuzlaştırılmış koordinatı olmak üzere, r = 0 noktası plaka merkezini, r = 1 noktası da plaka uç kenarını temsil etmektedir. Tablo 3.1'de gösterilen bir boyutlu DTM teoremleri (3.1) ve (3.2) denklemlerinde gösterilen dönüşüm kuralları ile birleştirilerek plaka merkezi ve plaka uç kenarı için özelleştirilebilir. Tablo 3.2'de r = 0 ve r = 1 noktaları için karşılaştırmalı olarak sınır koşulları için özelleştirilmiş teoremler gösterilmektedir [13].

Tablo 3.2 : Sınır koşulları için özelleştirilmiş DTM teoremleri

r = 0		**r = 1**	
Orijinal SK	**DTM**	**Orijinal SK**	**DTM**
$f(0)=0$	$F_0=0$	$f(1)=0$	$\sum_{k=0}^{\infty} F(k)=0$
$\frac{df(0)}{dr}=0$	$F_1=0$	$\frac{df(1)}{dr}=0$	$\sum_{k=0}^{\infty} kF(k)=0$
$\frac{d^2f(0)}{dr^2}=0$	$F_2=0$	$\frac{d^2f(1)}{dr^2}=0$	$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)F(k)=0$
$\frac{d^3f(0)}{dr^3}=0$	$F_3=0$	$\frac{d^3f(1)}{dr^3}=0$	$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)F(k)=0$

3.3.1. Basit Mesnetli Durum

Basit mesnetlenmiş dairesel bir plakanın uç kenarında (r =1) yer değiştirme sıfırdır. Ayrıca mesnetli kenar kenar hattına göre serbestçe dönebileceği için radyal eğilme momenti de sıfırdır, ancak eğim vardır. Bu sınır koşulları matematiksel olarak;

$$w\big|_{r=1}=0, \qquad M_r\big|_{r=1}=-D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)\right]=0 \qquad \textbf{(3.29)}$$

(3.29) denklemindeki M_r radyal eğilme momenti için (3.6) denklemi kullanılarak sadeleştirmeler yapılabilir:

$$M_r = -D\cos(m\theta)\left[\frac{d^2 f(1)}{dr^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{df(1)}{dr} - \frac{m^2}{r^2} f(1)\right)\right] = 0 \qquad \textbf{(3.30)}$$

Tablo 3.2'de sınır koşulları için özelleştirilen dönüşüm teoremleri ve (3.1), (3.2) denklemleri kullanılarak dairesel plakanın basit mesnetli durumda sınır koşullarının dönüşümü tamamlanır. Böylelikle (3.29) denkleminde orijinal fonksiyon olarak verilmiş sınır koşulları DTM ile dönüştürülmüş olarak tekrardan yazılmış olur.

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_k = 0 \qquad \textbf{(3.31)}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(k(k-1) + \nu k - m^2 \nu\right) F_k = 0 \qquad \textbf{(3.32)}$$

3.3.2. Ankastre Durum

Ankastre mesnetlenmiş dairesel bir plakanın uç kenarında (r =1) yer değiştirme ve orta yüzeyin eğimi sıfırdır. Bu sınır koşulları (3.33) denkleminde gösterilmektedir.

$$w\big|_{r=1} = 0, \qquad \left.\frac{dw}{dr}\right|_{r=1} = 0 \qquad \textbf{(3.33)}$$

(3.33) denkleminde orijinal fonksiyon olarak verilmiş sınır koşulları Tablo 3.2 teoremlerinin ve (3.1), (3.2) denklemlerinin de kullanılması ile dönüştürülür. Yer değiştirme ifadesinin dönüşümü (3.31) denklemi ile aynıdır, eğim ifadesinin dönüşümü ise (3.34) denkleminde gösterilmektedir.

$$\sum_{k=0}^{\infty} k F_k = 0 \qquad \textbf{(3.34)}$$

3.3.3. Serbest Durum

Tamamen serbest dairesel plakalarda eğilme mometleri, burulma momenti ve kesme kuvvetleri oluşmaz. Ancak w(r,θ) yer değiştirme fonksiyonu çözümü aynı noktada iki sınır şartını sağlayacak biçimde düzenlenmelidir. Literatürde Kirchoff 'un ek kuvvetleri olarak bilinen hipotez ile birlikte iki sınır şartının yeterliliği ortaya

konmuştur. Böylelikle serbest dairesel bir plakanın uç kenarında (r =1) radyal eğilme momentinin ve efektif radyal kesme kuvvetinin (V_r) sıfır olduğu sonucuna varılabilir [2]. Bu sınır koşulları (3.35) denkleminde gösterilmektedir.

$$M_r\big|_{r=1} = 0\,, \qquad V_r = \left(Q_r + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} \right)\Bigg|_{r=1} = 0 \tag{3.35}$$

(3.35) denklemindeki efektif radyal kesme kuvveti ifade içerisindeki radyal kesme kuvveti ve burulma momenti ifadeleri açık olarak yazılırsa;

$$\begin{aligned} V_r = D\Bigg[& -\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \\ & -2\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{\nu}{r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \Bigg] \end{aligned} \tag{3.36}$$

(3.36) denkleminde V_r efektif radyal kesme kuvveti için (3.6) denklemi kullanılarak sadeleştirmeler yapılabilir:

$$\left[\frac{d^3 f(1)}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2 f(1)}{dr^2} + \left(\frac{m^2\nu - 2m^2 - 1}{r^2} \right)\frac{df(1)}{dr} + \left(\frac{3m^2 - m^2\nu}{r^3} \right) f(1) \right] = 0 \tag{3.37}$$

(3.35) denkleminde orijinal fonksiyon olarak verilmiş sınır koşulları Tablo 3.2 teoremlerinin ve (3.1), (3.2) denklemlerinin de kullanılması ile dönüştürülür. Radyal eğilme momenti ifadesinin dönüşümü (3.32) denklemi ile aynıdır, V_r efektif radyal kesme kuvveti ifadesinin dönüşümü ise (3.38) denkleminde gösterilmektedir.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big(k(k-1)(k-2) + k(k-1) + \left(m^2\nu - 2m^2 - 1\right)k + \left(3m^2 - m^2\nu\right) \Big) F_k = 0 \tag{3.38}$$

Bölüm 3.3'de incelenen üç sınır şartı için de DTM uygulanarak dönüştürülmüş ifadeler özet olarak Tablo 3.3'de gösterilmektedir.

Tablo 3.3 : Üç sınır koşulunun DTM ile dönüştürülmüş ifadeleri

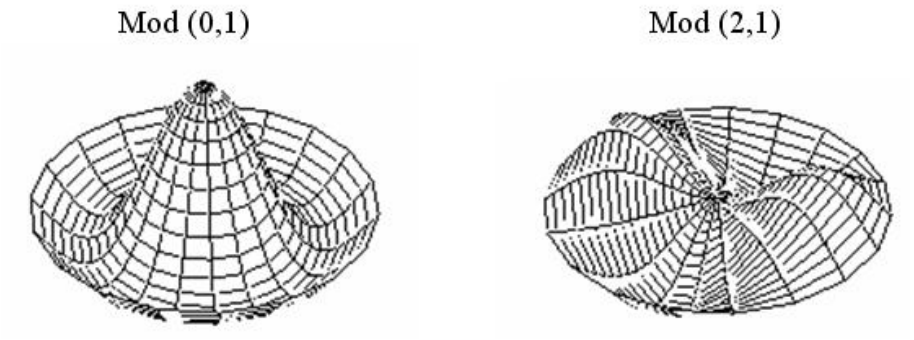
	Sınır Koşulları	DTM
BASİT MESNET	$w\big\|_{r=1} = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} F_k = 0$
	$M_r\big\|_{r=1} = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} \left(k(k-1) + \nu k - m^2\nu\right) F_k = 0$
ANKASTRE	$w\big\|_{r=1} = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} F_k = 0$
	$\left.\frac{dw}{dr}\right\|_{r=1} = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} k F_k = 0$
SERBEST	$M_r\big\|_{r=1} = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} \left(k(k-1) + \nu k - m^2\nu\right) F_k = 0$
	$V_r\big\|_{r=1} = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} \Big(k(k-1)(k-2) + k(k-1) + \left(m^2\nu - 2m^2 - 1\right)k + \left(3m^2 - m^2\nu\right)\Big) F_k = 0$

3.4. Plaka Merkezindeki Düzenlilik Halleri ve Dönüşümler

(3.5) denklemi ile gösterilen ve enine yer değiştirmesi w ile gösterilen ince dairesel bir plakanın diferansiyel hareket denklemi dördüncü dereceden bir diferansiyel denklemdir. Denklemin genel analitik çözümünden gelecek dört integrasyon sabiti ile beraber çözüm için dört sınır şartı ortaya konmalıdır. Bölüm 3.3'de ankastre, basit mesnet ve serbest olmak üzere üç sınır şartı için plakanın uç kenarında (r = 1) ikişer adet sınır koşulu tanımlanmıştı ve DTM dönüşümleri bu terimlere uygulanmıştı. Serbest titreşim problemi için diğer iki sınır şartı plaka merkezinde (r = 0) araştırılarak ortaya konmalıdır.

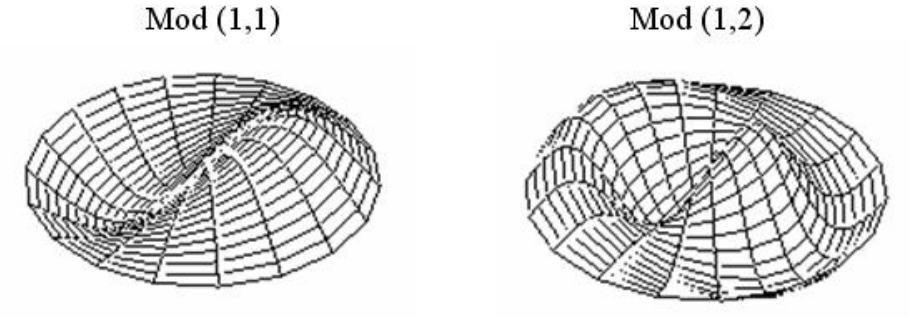
Litearatürde bu problemi çözmek için plaka merkezindeki düzenlilik halleri incelenmiştir ve titreşim modunun simetrik ya da antisimetrik olmasına göre iki sınır şartı merkezde tanımlanmıştır. Dairesel plakaların serbest titreşimleri tek sayıda nodal çap (m) için antisimetrik modda, çift sayıda nodal çap için simetrik moddadır [16]. Enine yer değiştirmesi w ile gösterilen dairesel plakaların serbest titreşim modunun simetrik ya da antisimetrik olmasını (3.6) ifadesinde teğetsel bileşen olan

cos(mθ) terimi ifade eder. Şekil 3.1'de dairesel plakaların simetrik titreşim modlarına örnek gösterilmektedir.



Şekil 3.1 : Dairesel plakaların simetrik titreşim modları

Şekil 3.1'de mod şekli isminin parantez içindeki ilk terimi nodal çap sayısını (m), ikinci terimi ise nodal daire sayısını göstermektedir. Örnek olarak mod (2,1) ile gösterilen serbest titreşim mod şeklinde iki nodal çap ve bir nodal daire söz konusudur. Benzer olarak dairesel plakaların antisimetrik titreşim modları da Şekil 3.2'de gösterilmektedir.



Şekil 3.2 : Dairesel plakaların antisimetrik titreşim modları

Dairesel plaka merkezindeki (r = 0) düzenlilik halleri nodal çap sayısının tek ya da çift olmasına göre şu şekilde ifade edilmektedir [16]:

$$w\big|_{r=0} = 0, \qquad M_r\big|_{r=0} = \left.\frac{d^2w}{dr^2}\right|_{r=0} = 0, \qquad (m = 1, 3, 5, ...) \tag{3.39}$$

$$\left.\frac{dw}{dr}\right|_{r=0} = 0, \quad V_r\big|_{r=0} = \left.\frac{d^3w}{dr^3}\right|_{r=0} = 0, \qquad (m = 0, 2, 4, 6, ...) \tag{3.40}$$

(3.39) ve (3.40) denklemlerinde orijinal fonksiyon olarak verilmiş plaka merkezindeki sınır koşulları, Tablo 3.2 teoremlerinin ve r = 0 noktası için (3.1) ifadesinin kullanılması ile dönüştürülür. Tablo 3.4'de plaka merkezindeki düzenlilik halleri için DTM uygulanarak dönüştürülmüş ifadeler gösterilmektedir.

Tablo 3.4 : Plaka merkezindeki düzenlilik halleri ve dönüştürülmüş ifadeleri

Nodal Çap Sayısı (m)	**Sınır Koşulları**	**DTM**
SİMETRİK DURUM **(m = 0, 2, 4, 6, ...)**	$\left.\frac{dw}{dr}\right\|_{r=0} = 0$ $V_r\|_{r=0} = \left.\frac{d^3w}{dr^3}\right\|_{r=0} = 0$	$F_1 = F_3 = F_5 = \ldots\ldots F_{4k+1} = F_{4k+3} = 0$
ANTİSİMETRİK DURUM **(m = 1, 3, 5, ...)**	$w\|_{r=0} = 0$ $M_r\|_{r=0} = \left.\frac{d^2w}{dr^2}\right\|_{r=0} = 0$	$F_0 = F_2 = F_4 = \ldots\ldots F_{4k} = F_{4k+2} = 0$

4. PROBLEMİN ANALİZİ VE ÇÖZÜMLER

Bilindiği üzere özdeğer problemleri hem analitik hem de yaklaşık yöntemler vasıtası ile çözülebilir. Bazı özdeğer problemlerinde bütün özdeğerleri ve özvektörleri analitik yöntemler yardımıyla ayırt edebiliriz. Yaklaşık yöntemler ile bazı özdeğer ve özvektörler hesaplanabilmektedir. Ancak i'inci ($i \geq 2$) özvektörleri bulmak oldukça zor olabilmektedir [9].

Bölüm 3'de yönetici diferansiyel denkleme ve üç sınır koşuluna DTM uygulanması ile elde edilen dönüştürülmüş ifadeler yardımıyla, ankastre, basit mesnet ve serbest olmak üzere farklı sınır koşullarında nodal çap sayısı m'nin tek ya da çift olmasına göre simetrik ve antisimetrik olarak serbest titreşim durumu tanıtılmıştı. DTM ile dönüştürülmüş olan denklemler üzerinde cebirsel operasyonların yürütülmesi ile i'inci doğal frekanslar (özdeğerler) ve i'inci mod fonksiyonları (özvektörler) için kapalı formda çözümler geliştirilebilir. Cebrik denklem takımlarının çözümünde Mathematica 5.2 paket programı kullanılmış olup, basit mesnetli ve serbest sınır koşulları için Poisson oranı (ν) 0.3 alınarak sonuçlar ortaya konmuştur.

4.1. Basit Mesnetli Durum

Uç kenarlarından basit mesnetlenmiş dairesel plakanın dönüştürülmüş sınır koşulları Bölüm 3'de (3.31) ve (3.32) denklemlerinde tanıtılmıştı. Dönüştürülmüş sınır koşulları reküratif olarak $F_{4k,}$ F_{4k+1}, F_{4k+2}, F_{4k+3} terimleri cinsinden tekrar yazılırsa (3.31) ve (3.32) denklemleri için yeni ifadeler oluşturulur.

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_{4k} + \sum_{k=0}^{\infty} F_{4k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} F_{4k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} F_{4k+3} = 0 \qquad \textbf{(4.1)}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big((4k)(4k-1)+\nu 4k-m^2\nu\Big)F_{4k}+$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big((4k+1)(4k)+\nu(4k+1)-m^2\nu\Big)F_{4k+1}+$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big((4k+2)(4k+1)+\nu(4k+2)-m^2\nu\Big)F_{4k+2}+ \qquad (4.2)$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big((4k+3)(4k+2)+\nu(4k+3)-m^2\nu\Big)F_{4k+3}=0$$

(3.31) denkleminin $F_{4k,}$ F_{4k+1}, F_{4k+2}, F_{4k+3} terimleri cinsinden ifadesi (4.1) denkleminde, (3.32) denkleminin $F_{4k,}$ F_{4k+1}, F_{4k+2}, F_{4k+3} terimleri cinsinden ifadesi ise (4.2) denkleminde gösterilmektedir. Basit mesnetli dairesel plakanın serbest titreşimi Bölüm 3.4'de tanıtılan, nodal çap sayısı m'nin tek ya da çift olmasına göre simetrik ve antisimetrik olarak incelenmektedir.

4.1.1. Simetrik Durum

Bölüm 3.4'de incelendiği üzere dairesel plakaların serbest titreşimleri çift sayıda nodal çap (m = 0, 2, 4, ...) için simetrik moddadır. Bu durumdaki sınır şartlarının dönüşümü Tablo 3.4'de gösterildiği üzere F_1 ve F_3 terimlerinin sıfır olması ile sonuçlanmaktadır. F_1 ve F_3 terimlerinin sıfır olması reküratif olarak F_{4k+1} ve F_{4k+3} ifadelerinin bağıntı içerisinden çıkarılması sonucunu verir. Böylelikle (4.1) ve (4.2) denklemleri F_{4k} ve F_{4k+2} terimleri cinsinden (3.23) – (3.26) rekürans bağıntılarının kullanılması ile açık olarak yazılabilir.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}F_0}{\prod_{k=1}^{k}\Big(A-B(4k)(4k-2)+(4k)(4k-1)^2(4k-2)\Big)}+$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}F_2}{\prod_{k=1}^{k}\Big(A-B(4k+2)(4k)+(4k+2)(4k+1)^2(4k)\Big)}=0 \qquad (4.3)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Big((4k)(4k-1)+\nu 4k-m^2\nu\Big)\Omega^{2k}F_0}{\prod_{k=1}^{k}\Big(A-B(4k)(4k-2)+(4k)(4k-1)^2(4k-2)\Big)}+$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Big((4k+2)(4k+1)+\nu(4k+2)-m^2\nu\Big)\Omega^{2k}F_2}{\prod_{k=1}^{k}\Big(A-B(4k+2)(4k)+(4k+2)(4k+1)^2(4k)\Big)}=0 \qquad (4.4)$$

(4.3) ve (4.4) denklemleri çözümde kolaylık sağlaması adına gruplandırılarak şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} a(\nu,m,\Omega)F_0+b(\nu,m,\Omega)F_2=0 \\ c(\nu,m,\Omega)F_0+d(\nu,m,\Omega)F_2=0 \end{aligned} \qquad \textbf{(4.5)}$$

(4.5) denklemindeki a, b, c, d ifadeleri Poisson oranının (ν), titreşimin boyutsuz frekansının (Ω) ve nodal çap sayısının (m) fonksiyonları olmak üzere (4.5) ifadesi matris formunda ifade edilebilir:

$$\begin{bmatrix} a^{(n)} & b^{(n)} \\ c^{(n)} & d^{(n)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_0 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(4.6)}$$

(4.6) ifadesi incelendiğinde çözüm sisteminin özdeğer problemine indirgendiği söylenebilir. Buna göre katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması frekans denklemini bize verir. Frekans denkleminin kökleri de özdeğerleri, yani titreşimin boyutsuz frekanslarını (Ω) ifade eder. Frekans denklemini oluşturan özdeğer eşitliği (4.6) ifadesine göre şu şekilde yazılır:

$$\begin{vmatrix} a^{(n)} & b^{(n)} \\ c^{(n)} & d^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \qquad \textbf{(4.7)}$$

(4.7) denklemindeki $a^{(n)}$, $b^{(n)}$, $c^{(n)}$, $d^{(n)}$ ifadeleri serinin n'inci terimine karşılık gelen Ω boyutsuz frekansının polinomlarıdır. Bilindiği üzere (3.4) denkleminde serinin boyutunu belirleyen n değeri, boyutsuz doğal frekansların yakınsamasını ifade eden parametredir. (4.7) ifadesi genelleştirilmiş basit mesnetli simetrik durumda frekans denklemini ifade eder.

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k)(4k-2)+(4k)(4k-1)^2(4k-2)\right)}\right)$$
$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k+2)(4k+1)+\nu(4k+2)-m^2\nu\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+2)(4k)+(4k+2)(4k+1)^2(4k)\right)}\right)$$
$$-\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+2)(4k)+(4k+2)(4k+1)^2(4k)\right)}\right)$$
$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k)(4k-1)+\nu 4k-m^2\nu\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k)(4k-2)+(4k)(4k-1)^2(4k-2)\right)}\right)=0 \qquad \textbf{(4.8)}$$

(4.7) denkleminde katsayılar cinsinden, (4.8) denkleminde de genelleştirilmiş olarak ifade edilen frekans denklemi çözülürse;

$$\Omega = \Omega_j^{(n)},\ j = 1, 2, 3, ...n \qquad \textbf{(4.9)}$$

(4.9) ifadesindeki $\Omega_j^{(n)}$ değeri, n parametresine karşılık gelen j'inci tahmini özdeğerdir. Serinin büyüklüğünü belirleyen ve boyutsuz doğal frekansların yakınsamasını ifade eden n parametresi şu eşitlik ile belirlenmektedir [9]:

$$\left|\Omega_j^{(n)} - \Omega_j^{(n-1)}\right| \le \xi \qquad \textbf{(4.10)}$$

(4.10) denklemindeki ξ değeri oldukça küçük değeri olan tolerans parametresi olarak adlandırılır. (4.10) denklemindeki eşitliğin sağlanması durumunda j'inci özdeğer, $\Omega j^{(n)}$ belirlenmiş olur. Genelde $\Omega_j^{(n)}$ değerleri eşlenik kompleks değerlerdir ve $\Omega_j^{(n)} = x_j + iy_j$ şeklinde ifade edilirler. İfadede küçük değeri olan sanal kısmın (y_j) ihmal edilmesi ile j'inci doğal frekans, x_j elde edilir [13].

Basit mesnetli dairesel plakanın simetrik durumda Ω özdeğerleri, yani doğal frekansları (4.8) frekans denkleminin çözülmesi ile bulunmuştur. Tablo 4.1'de farklı nodal çap sayılarına göre ilk altı doğal frekansın değişimi gösterilmektedir. Ω boyutsuz doğal frekansı, literatürde λ_{ms}^2 ile gösterilen frekans parametresinin boyutsuzlaştırılmış halidir ve değerleri aynıdır. Bu doğal frekans değerlerinin

değişimi, problemi Bessel çözümleri ile inceleyen Leissa [3] ve sayısal çözüm yöntemi olan "Genelleştirilmiş Diferansiyel Dörtlük Kuralı (GDQR)" ile inceleyen Wu ve arkadaşlarının [16] sonuçları ile karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

Tablo 4.1 : Basit mesnetli simetrik durumda özdeğerler

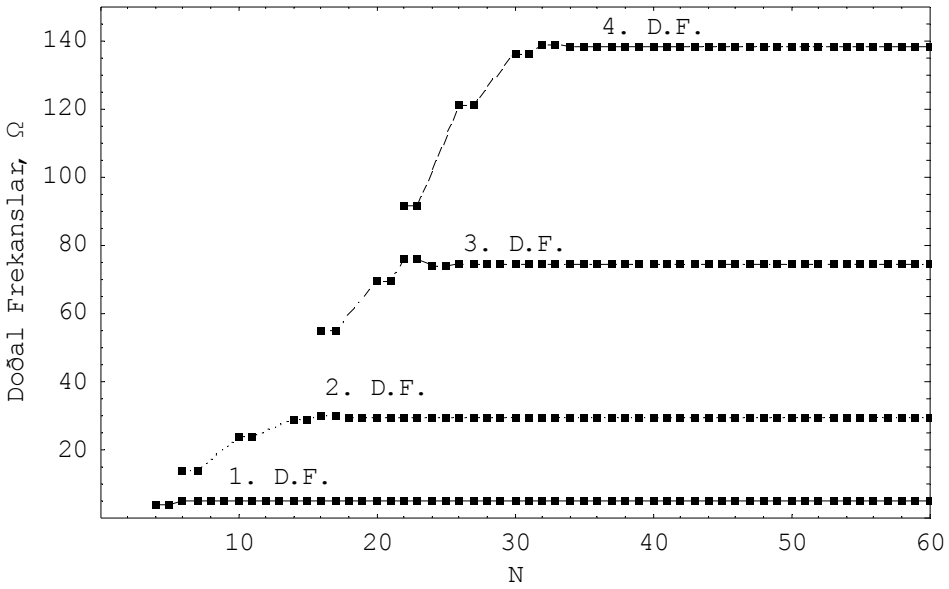
$\Omega\ (\lambda^2_{ms})$		m = 0	m = 2	m = 4
1. D.F. (Ω_1)	**DTM**	4,9351	25,613	56,8416
	Ref. [3]	4,977	25,65	-
	Ref. [16]	4,935	25,613	56,842
2. D.F. (Ω_2)	**DTM**	29,72	70,117	121,7023
	Ref. [3]	29,76	70,14	...
	Ref. [16]	29,72	70,117	121,702
3. D.F. (Ω_3)	**DTM**	74,1561	134,2978	205,851
	Ref. [3]	74,2	134,33	-
	Ref. [16]	74,156	134,298	205,851
4. D.F. (Ω_4)	**DTM**	138,3181	218,2026	309,6073
	Ref. [3]	138,34	218,24	-
	Ref. [16]	138,318	218,203	309,607
5. D.F. (Ω_5)	**DTM**	222,215	321,8408	433,0487
	Ref. [3]	-	-	-
	Ref. [16]	222,215	321,841	433,049
6. D.F. (Ω_6)	**DTM**	325,8492	445,2154	576,2026
	Ref. [3]	-	-	-
	Ref. [16]	325,849	445,216	576,203

Tablo 4.1 incelendiğinde DTM çözümünün özdeğerleri belirlemede oldukça başarılı olduğu sonucuna varılır. Tablo 4.1'de yer alan doğal frekansların sırası serbest titreşimin o modunda dairesel plakanın nodal daire sayısını belirtmektedir. (4.8) frekans denkleminin çözümünde hesaplamalar yapılırken, özdeğerlerin virgülden sonra dört basamak hassasiyete yakınsaması göz önünde tutularak iterasyon yapılmıştır.

Tablo 4.2 : Basit mesnetli simetrik durumda özdeğerlerin yakınsadığı seri büyüklükleri

D.F	Ω	n	N
1	4,9351	3	14
2	29,72	5	22
3	74,1561	8	34
4	138,3181	10	42
5	222,215	12	50
6	325,8492	15	62

Tablo 4.2'de nodal çap olmayan durumda (m=0) özdeğerlerin yakınsadığı parametreler ve seri büyüklükleri gösterilmektedir. Tablo 4.2'de N terimi o özdeğerin yakınsaması için hesaplanan F(k) terimlerinin sayısını göstermektedir ve seri büyüklüğünü ifade etmektedir. Basit mesnetli simetrik durumda denklemler rekürans bağıntısı dolayısı F_{4k} ve F_{4k+2} terimleri cinsinden ifade edildikleri için DTM çözümündeki yakınsama parametresi n ile hesaplanan F(k) terimlerinin sayısını ve seri büyüklüğünü ifade eden N arasında da aynı ilişki mevcuttur. Şekil 4.1'de m=0 için ilk dört doğal frekansın yakınsaması gösterilmektedir. Tablo 4.2 ve Şekil 4.1 incelendiğinde, ilk dört doğal frekans için dört basamak hassasiyet göz önünde tutulduğunda hesaplamalarda en az 42 terim kullanılması gerekmektedir.



Şekil 4.1 : Basit mesnetli simetrik durumda ilk dört özdeğerin yakınsaması

(4.8) frekans denkleminin çözümü sırasında bazı m ve k terimleri için rekürans ifadelerinin paydalarının sıfıra gitmesinden dolayı tekillikler meydana gelebilmektedir. Tekillik problemi, tekilliği oluşturan k'ıncı teriminin atlanıp reküransın bu k'ıncı terimden sonra devam etmesi ile kolaylıkla aşılabilir. DTM uygulamaları bu gibi bazı tekillik ve süreksizlikleri yok etmek konusunda gayet başarılıdır.

(4.8) frekans denkleminin çözümünden elde edilen özdeğer değeri ve bu özdeğerin yakınsadığı seri büyüklüğü bilindiğine göre özvektörler, yani serbest titreşimin mod fonksiyonları araştırılabilir. (3.28) denkleminde genel durum için oluşturulan radyal

mod fonksiyonu ifadesi, basit mesnetli dairesel plakanın simetrik durumu için F_{4k} ve F_{4k+2} terimleri cinsinden şu şekildedir:

$$f(r)=\sum_{k=0}^{\infty} r^{4k}F_{4k}+\sum_{k=0}^{\infty} r^{4k+2}F_{4k+2} \tag{4.11}$$

(4.5) ifadesindeki ilk denklem göz önüne alındığında (4.11) denklemi açık olarak yazılabilir:

$$a(\nu,m,\Omega)F_0+b(\nu,m,\Omega)F_2=0 \tag{4.12}$$

$$F_2=-\left(\frac{a}{b}\right)F_0 \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned} f(r)=&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{4k}\Omega^{2k}F_0}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k)(4k-2)+(4k)(4k-1)^2(4k-2)\right)}\\ &+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{4k+2}\Omega^{2k}F_2}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+2)(4k)+(4k+2)(4k+1)^2(4k)\right)} \end{aligned} \tag{4.14}$$

(4.14) denklemi (4.11) denkleminin reküratif olarak polinomlar cinsinden açılmış ifadesidir. (4.14) denklemi (4.13) denklemindeki sadeleştirmelerin uygulanması ile tekrar yazılır ve radyal mod fonsiyonu ifadesi son halini alır:

$$\begin{aligned} f(r)=F_0&\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{4k}\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k)(4k-2)+(4k)(4k-1)^2(4k-2)\right)}\right)\\ &-\left(\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k)(4k-2)+(4k)(4k-1)^2(4k-2)\right)}}{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+2)(4k)+(4k+2)(4k+1)^2(4k)\right)}}\right)F_0\\ &\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{4k+2}\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+2)(4k)+(4k+2)(4k+1)^2(4k)\right)}\right) \end{aligned} \tag{4.15}$$

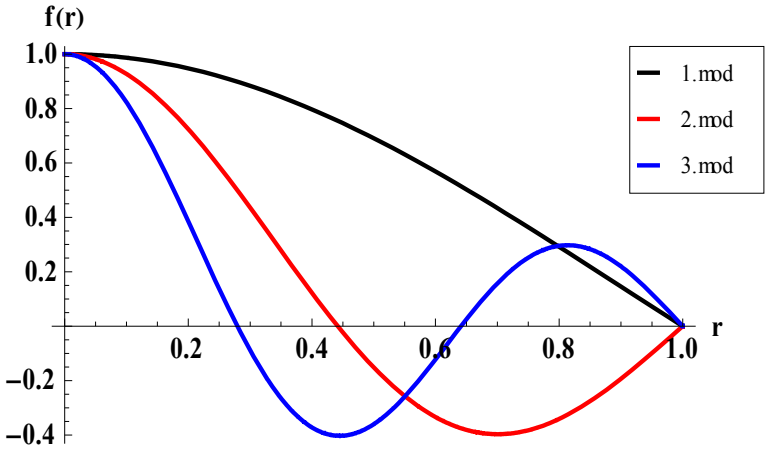
(4.15) denklemi basit mesnetli simetrik durum için radyal mod fonksiyonu ifadesidir. Frekans denkleminin çözümünden elde edilen $\Omega^{(n)}$ özdeğeri, özdeğerin yakınsadığı seri büyüklüğünü belirleyen n parametresi (4.15) denkleminde kullanıldığında, F_0 sıfırdan farklı sabit bir sayı olmak üzere, radyal mod fonksiyonu f(r), plakanın radyal yöndeki boyutsuzlaştırılmış koordinatı r'ye bağlı olarak bulunur. (4.16), (4.17) ve (4.18) denklemleri sırasıyla nodal çap olmayan basit mesnetli simetrik durumda (m=0) ilk üç mod fonksiyonunu belirtmektedir.

$$f_1(r) = 1 - 1{,}32821\, r^2 + 0{,}380558\, r^4 - 0{,}0561623\, r^6 + 0{,}00402289\, r^8 - 0{,}00021373\, r^{10} + 6{,}80419\times10^{-6}\, r^{12} - 1{,}84437\times10^{-7}\, r^{14} \quad \textbf{(4.16)}$$

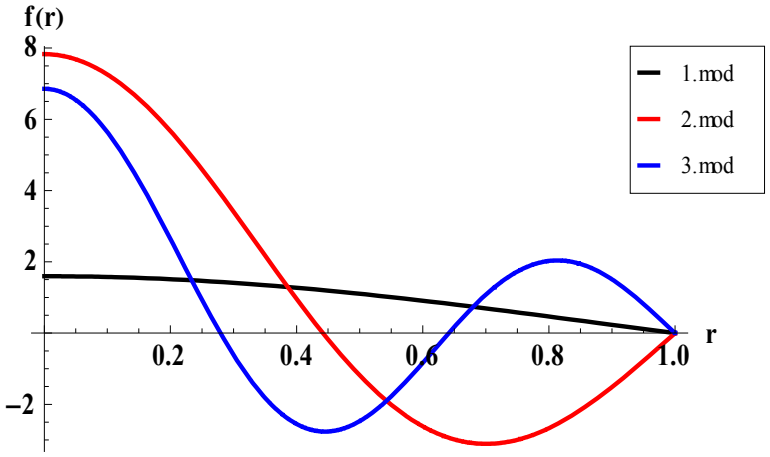
$$f_2(r) = 1 - 7{,}42148\, r^2 + 13{,}8012\, r^4 - 11{,}3806\, r^6 + 5{,}29092\, r^8 - 1{,}57066\, r^{10} + 0{,}324538\, r^{12} - 0{,}0491541\, r^{14} + 0{,}00571302\, r^{16} - 0{,}000523445\, r^{18} + 0{,}0000389366\, r^{20} - 2.38816\times10^{-6}\, r^{22} \quad \textbf{(4.17)}$$

$$f_3(r) = 1 - 18{,}5396\, r^2 + 85{,}9238\, r^4 - 176{,}999\, r^6 + 205{,}08\, r^8 - 152{,}084\, r^{10} + 78{,}3168\, r^{12} - 29{,}6318\, r^{14} + 8{,}58326\, r^{16} - 1{,}96457\, r^{18} + 0{,}3642\, r^{20} - 0{,}0558026\, r^{22} + 0{,}00718399\, r^{24} - 0{,}000788095\, r^{26} + 0{,}0000745412\, r^{28} - 6{,}14205\times10^{-6}\, r^{30} + 4{,}44782\times10^{-7}\, r^{32} - 2{,}85331\times10^{-8}\, r^{34} \quad \textbf{(4.18)}$$

Şekil 4.2'de nodal çap olmayan durumda (m=0) serbest titreşimin ilk üç mod şekli gösterilmektedir. Şekil 4.3'de de normalize edilmiş mod şekilleri karşılaştırmalı olarak gösterilmektedir.



Şekil 4.2 : Basit mesnetli simetrik durumda titreşimin ilk üç mod şekli



Şekil 4.3 : Basit mesnetli simetrik durumda titreşimin normalize edilmiş ilk üç mod şekli

Dairesel plakanın serbest titreşim modlarının incelenmesinde plaka yer değiştirmesinin de kıyaslanabilmesi açısından normalize edilmiş mod fonksiyonları ve şekilleri önem kazanmaktadır. Bu sebeple $\Omega j^{(n)}$'e karşılık gelen j'inci normalize edilmiş özvektör (mod fonksiyonu) (4.19) denklemi ile tanımlanmıştır [9]:

$$\hat{f}_j(r) = \frac{f_j(r)}{\int_0^1 \left| f_j(r) \right| dr} \qquad \textbf{(4.19)}$$

4.1.2. Antisimetrik Durum

Bölüm 3.4'de incelendiği üzere dairesel plakaların serbest titreşimleri tek sayıda nodal çap (m = 1, 3, 5, ...) için antisimetrik moddadır. Bu durumdaki sınır şartlarının dönüşümü Tablo 3.4'de görüldüğü üzere F_0 ve F_2 terimlerinin sıfır olması ile sonuçlanmaktadır. F_0 ve F_2 terimlerinin sıfır olması reküratif olarak F_{4k} ve F_{4k+2} ifadelerinin bağıntı içerisinden çıkarılması sonucunu verir. Böylelikle (4.1) ve (4.2) denklemleri F_{4k+1} ve F_{4k+3} terimleri cinsinden (3.23) – (3.26) rekürans bağıntılarının kullanılması ile açık olarak yazılabilir. Açık olarak yazılan bu ifadeler simetrik durumdakine benzer olarak gruplandırılır ve denklem sistemi katsayılar matrisi şeklinde ifade edilerek özdeğer problemine indirgenir.

$$\begin{aligned} a(\nu, m, \Omega) F_1 + b(\nu, m, \Omega) F_3 &= 0 \\ c(\nu, m, \Omega) F_1 + d(\nu, m, \Omega) F_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(4.20)}$$

Bölüm 4.1.1'de simetrik durum için anlatılan prosedür antisimetrik durum için de tekrar edilebilir. Katsayılar matrisi oluşturulduktan sonra katsayılar determinantını sıfır yapan denklem frekans denklemi olarak adlandırılır.

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+1)(4k-1)+(4k+1)(4k)^2(4k-1)\right)}\right)$$
$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k+3)(4k+2)+\nu(4k+3)-m^2\nu\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+3)(4k+1)+(4k+3)(4k+2)^2(4k+1)\right)}\right)$$
$$-\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+3)(4k+1)+(4k+3)(4k+2)^2(4k+1)\right)}\right)$$
$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k+1)(4k)+\nu(4k+1)-m^2\nu\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+1)(4k-1)+(4k+1)(4k)^2(4k-1)\right)}\right)=0 \qquad \textbf{(4.21)}$$

(4.21) denklemi uç kenarlarından basit mesnetlenmiş dairesel plakanın antisimetrik titreşim durumunda frekans denklemi ifadesidir. Antisimetrik durumda Ω özdeğerleri, yani doğal frekansları, (4.21) frekans denkleminin çözülmesi ile ve simetrik durum için Bölüm 4.1.1'de tanıtılan prosedürün uygulanması ile bulunur. Tablo 4.3'de antisimetrik durum için (m = 1, 3, 5, ..) farklı nodal çap sayılarına göre ilk altı doğal frekansın değişimi ve DTM ile bulunmuş değerlerin diğer referanslar ile karşılaştırması bulunmaktadır.

Tablo 4.3 : Basit mesnetli antisimetrik durumda özdeğerler

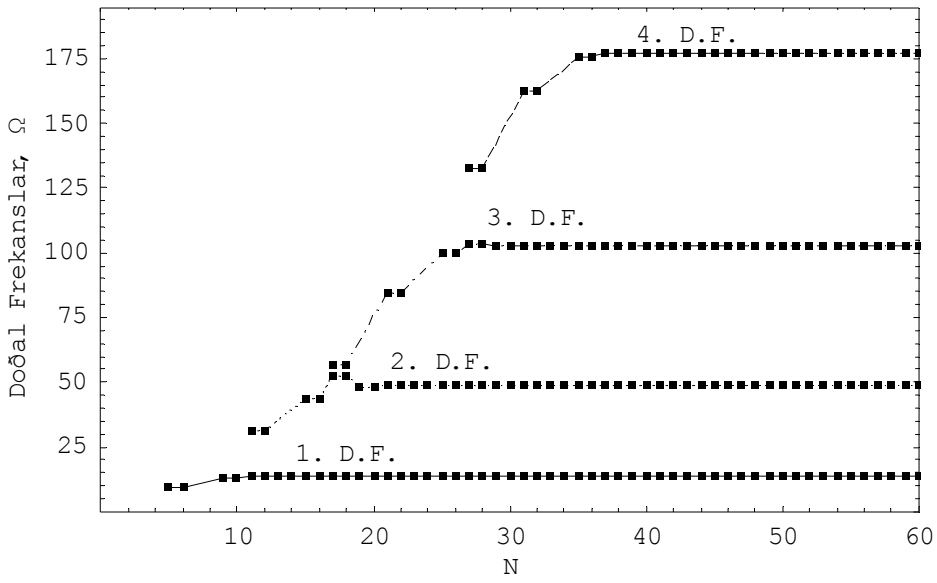
Ω (λ^2_{ms})		m = 1	m = 3	m = 5
1. D.F. (Ω_1)	**DTM**	13,8982	39,9573	76,203
	Ref. [3]	13,94	-	-
	Ref. [16]	13,898	39,957	76,203
2. D.F. (Ω_2)	**DTM**	48,4789	94,5489	151,518
	Ref. [3]	48,51	-	-
	Ref. [16]	48,479	94,549	151,518
3. D.F. (Ω_3)	**DTM**	102,7733	168,6749	245,778
	Ref. [3]	102,8	-	-
	Ref. [16]	102,772	168,675	245,778
4. D.F. (Ω_4)	**DTM**	176,8012	262,4847	359,5315
	Ref. [3]	176,84	-	-
	Ref. [16]	176,801	262,485	359,532
5. D.F. (Ω_5)	**DTM**	270,566	376,012	492,9189
	Ref. [3]	-	-	-
	Ref. [16]	270,566	376,012	492,919
6. D.F. (Ω_6)	**DTM**	384,0689	509,268	645,992
	Ref. [3]	-	-	-
	Ref. [16]	384,069	509,268	645,992

(4.21) frekans denkleminin çözümünde hesaplamalar yapılırken, özdeğerlerin virgülden sonra dört basamak hassasiyete yakınsaması göz önünde tutularak iterasyon yapılmıştır. Tek nodal çaplı durum için (m=1) özdeğerlerin yakınsadığı parametreler ve seri büyüklükleri Tablo 4.4'de listelenmiştir.

Tablo 4.4 : Basit mesnetli antisimetrik durumda özdeğerlerin yakınsadığı seri büyüklükleri

D.F	Ω	n	N
1	13,8982	4	17
2	48,4789	6	27
3	102,7733	9	39
4	176,8012	11	47
5	270,566	13	55
6	384,0689	15	63

Tablo 4.4'de N terimi o özdeğerin yakınsaması için hesaplanan F(k) terimleri sayısını göstermektedir ve seri büyüklüğünü ifade etmektedir. Şekil 4.4'de de tek nodal çaplı durum için (m=1) ilk dört özdeğerin yakınsaması gösterilmektedir. Şekil 4.4 ve Tablo 4.4 incelendiğinde, ilk dört doğal frekans için dört basamak hassasiyet göz önünde tutulduğunda hesaplamalarda en az 47 terim kullanılması gerekmektedir.



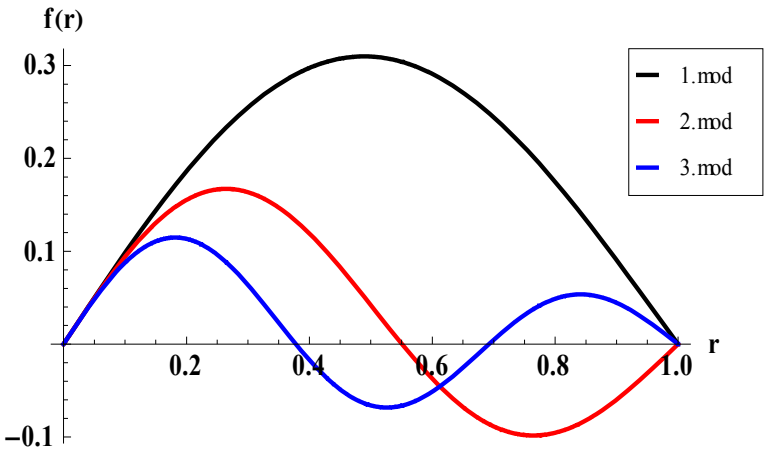
Şekil 4.4 : Basit mesnetli antisimetrik durumda ilk dört özdeğerin yakınsaması

Boyutsuz doğal frekanslar ve bunların yakınsadığı seri büyüklükleri bilindiğine göre basit mesnetli dairesel plakanın antisimetrik durumu için serbest titreşimin mod fonksiyonları (özvektörler) incelenebilir. Simetrik durumdakine benzer mantık ile, (3.28) denkleminde genel durum için oluşturulan radyal mod fonksiyonu ifadesi, basit mesnetli dairesel plakanın antisimetrik durumu için F_{4k+1} ve F_{4k+3} terimleri cinsinden şu şekildedir:

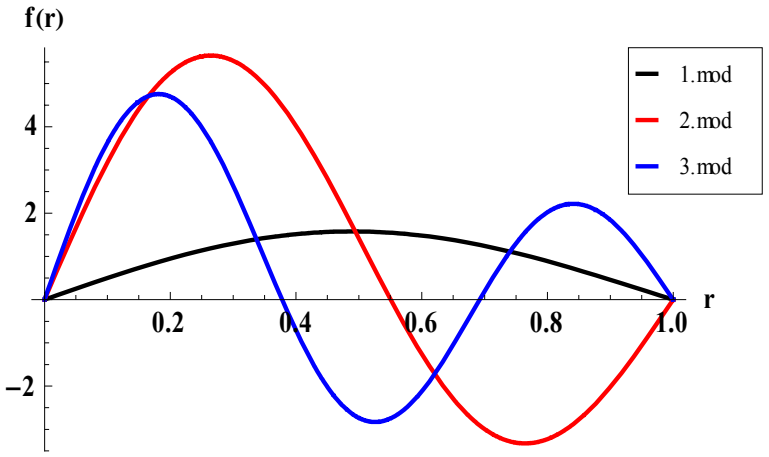
$$f(r)=\sum_{k=0}^{\infty} r^{4k+1}F_{4k+1}+\sum_{k=0}^{\infty} r^{4k+3}F_{4k+3} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned} f(r)=F_1&\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{4k+1}\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+1)(4k-1)+(4k+1)(4k)^2(4k-1)\right)}\right)\\ &-\left(\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+1)(4k-1)+(4k+1)(4k)^2(4k-1)\right)}}{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+3)(4k+1)+(4k+3)(4k+2)^2(4k+1)\right)}}F_1\right)\\ &\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{4k+3}\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+3)(4k+1)+(4k+3)(4k+2)^2(4k+1)\right)}\right) \end{aligned} \tag{4.23}$$

Simetrik durum için Bölüm 4.1.1'de özvektör çözümüne yönelik yöntem antisimetrik duruma da uygulandığında (4.23) denklemi elde edilebilir. (4.23) denklemi (4.22) denkleminin reküratif olarak polinomlar cinsinden açılıp sadeleştirilmiş olan basit mesnet antisimetrik durumdaki radyal mod fonksiyonu ifadesidir. Simetrik durumda bahsedildiği üzere, frekans denkleminin çözümünden elde edilen $\Omega^{(n)}$ özdeğeri, özdeğerin yakınsadığı seri büyüklüğünü belirleyen n parametresi (4.23) denkleminde kullanıldığında, F_1 sıfırdan farklı sabit bir sayı olmak üzere, radyal mod fonksiyonu f(r), plakanın radyal yöndeki boyutsuzlaştırılmış koordinatı r'ye bağlı olarak bulunur. Böylelikle dairesel plakanın serbest titreşiminin mod şekilleri elde edilebilir.



Şekil 4.5 : Basit mesnetli antisimetrik durumda titreşimin ilk üç mod şekli



Şekil 4.6 : Basit mesnetli antisimetrik durumda titreşimin normalize edilmiş ilk üç mod şekli

Şekil 4.5'de tek nodal çaplı durumda (m=1) serbest titreşimin ilk üç mod şekli gösterilmektedir. Şekil 4.3'de de normalize edilmiş mod şekilleri karşılaştırmalı olarak gösterilmektedir. Normalize edilmiş mod şekilleri, dairesel plakanın o

modunda enine yer değişmelerin karşılaştırılabilmesi açısından fikir verici olma özelliği taşımaktadır.

4.2. Ankastre Durum

Uç kenarlarından ankastre mesnetlenmiş dairesel plakanın dönüştürülmüş sınır koşulları Bölüm 3'de (3.31) ve (3.34) denklemlerinde tanıtılmıştı. Dönüştürülmüş sınır koşulları reküratif olarak $F_{4k,}$ F_{4k+1}, F_{4k+2}, F_{4k+3} terimleri cinsinden tekrar yazılırsa (3.31) ve (3.34) denklemleri için yeni ifadeler oluşturulur.

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_{4k} + \sum_{k=0}^{\infty} F_{4k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} F_{4k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} F_{4k+3} = 0 \qquad \textbf{(4.24)}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (4k) F_{4k} + \sum_{k=0}^{\infty} (4k+1) F_{4k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} (4k+2) F_{4k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} (4k+3) F_{4k+3} = 0 \qquad \textbf{(4.25)}$$

(3.31) denkleminin $F_{4k,}$ F_{4k+1}, F_{4k+2}, F_{4k+3} terimleri cinsinden ifadesi (4.24) denkleminde, (3.34) denkleminin $F_{4k,}$ F_{4k+1}, F_{4k+2}, F_{4k+3} terimleri cinsinden ifadesi ise (4.25) denkleminde gösterilmektedir. Burada unutulmaması gereken husus, basit mesnetli durum ile ankastre durumun bir sınır şartının aynı olmasıdır. İki mesnet durumunda da uçlarda yer değiştirmenin olmadığını gösteren dönüştürülmüş (4.24) ve (4.1) denklemlerinin hem basit mesnet hem de ankastre durum için aynı olduğu görülmektedir. Basit mesnetli durumda yapılan incelemelere benzer olarak, ankastre durumda da nodal çap sayısı m'nin tek ya da çift olmasına göre simetrik ve antisimetrik olarak çözümler incelenmektedir.

4.2.1. Simetrik Durum

Dairesel plakaların serbest titreşimlerinin çift sayıda nodal çap (m = 0, 2, 4, ...) için simetrik modda olması, ankastre durumda da sınır şartlarının dönüşümünde F_1 ve F_3 terimlerinin, reküratif olarak da F_{4k+1} ve F_{4k+3} ifadelerinin incelenmeyeceği sonucunu doğurur. Bölüm 4.1'de tanıtılan prosedürü uygularsak, (4.24) ve (4.25) denklemleri F_{4k} ve F_{4k+2} terimleri cinsinden (3.23) – (3.26) rekürans bağıntılarının kullanılması ile açık olarak yazılabilir.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}F_0}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k)(4k-2)+(4k)(4k-1)^2(4k-2)\right)}+$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}F_2}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+2)(4k)+(4k+2)(4k+1)^2(4k)\right)}=0 \qquad \textbf{(4.26)}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)\Omega^{2k}F_0}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k)(4k-2)+(4k)(4k-1)^2(4k-2)\right)}+$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k+2)\Omega^{2k}F_2}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+2)(4k)+(4k+2)(4k+1)^2(4k)\right)}=0 \qquad \textbf{(4.27)}$$

Açık olarak yazılan (4.26) ve (4.27) ifadeleri Bölüm 4.1'de yapılan çözüme benzer olarak gruplandırılır ve denklem sistemi katsayılar matrisi şeklinde ifade edilirse ifadeler özdeğer problemine indirgenir.

$$\begin{aligned} a(m,\Omega)F_0+b(m,\Omega)F_2&=0\\ c(m,\Omega)F_0+d(m,\Omega)F_2&=0 \end{aligned} \qquad \textbf{(4.28)}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k)(4k-2)+(4k)(4k-1)^2(4k-2)\right)}\right)$$
$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k+2)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+2)(4k)+(4k+2)(4k+1)^2(4k)\right)}\right)$$
$$-\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+2)(4k)+(4k+2)(4k+1)^2(4k)\right)}\right)$$
$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k)(4k-2)+(4k)(4k-1)^2(4k-2)\right)}\right)=0 \qquad \textbf{(4.29)}$$

Basit mesnetli durumdan farklı olarak (4.28) denklemindeki a, b, c, d ifadeleri artık Poisson oranının fonksiyonu değildir. Bölüm 4.1.1'de basit mesnetli simetrik durum

için anlatılan prosedür tekrar edilirse, katsayılar matrisi determinantını sıfır yapan denklem ankastre simetrik durum için (4.29) frekans denklemi olarak türetilir. (4.29) frekans denkleminin çözümü ile bulunan özdeğerler ankastre mesnetlenmiş dairesel plakanın simetrik serbest titreşimi için boyutsuz doğal frekansları verir. Tablo 4.5'de simetrik durum için (m = 0, 2, 4, ..) farklı nodal çap sayılarına göre ilk altı doğal frekansın değişimi ve DTM ile bulunmuş değerlerin diğer referanslar ile karşılaştırması bulunmaktadır.

Tablo 4.5 : Ankastre simetrik durumda özdeğerler

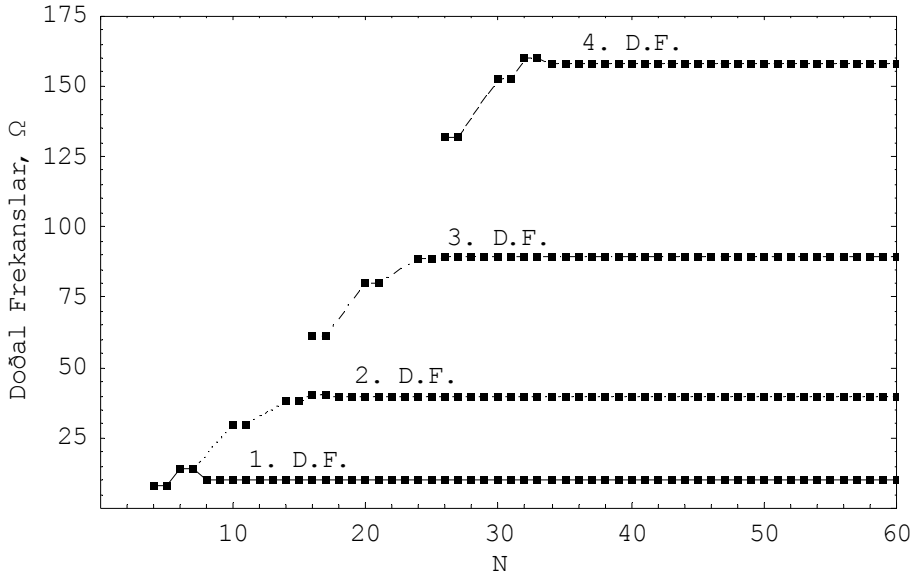
$\Omega\ (\lambda^2_{ms})$		**m = 0**	**m = 2**	**m = 4**
1. D.F. (Ω_1)	**DTM**	10,2158	34,877	69,6658
	Ref. [3]	10,2158	34,88	69,6659
	Ref. [16]	10,216	34,877	69,666
2. D.F. (Ω_2)	**DTM**	39,7711	84,5826	140,1079
	Ref. [3]	39,771	84,58	140,1079
	Ref. [16]	39,771	84,583	140,108
3. D.F. (Ω_3)	**DTM**	89,1041	153,815	229,5185
	Ref. [3]	89,104	153,81	229,5186
	Ref. [16]	89,104	153,815	229,519
4. D.F. (Ω_4)	**DTM**	158,1842	242,7205	338,4112
	Ref. [3]	158,183	242,71	338,4113
	Ref. [16]	158,184	242,721	338,411
5. D.F. (Ω_5)	**DTM**	247,0064	351,3359	466,925
	Ref. [3]	247,005	351,38	-
	Ref. [16]	247,006	351,336	466,925
6. D.F. (Ω_6)	**DTM**	355,5693	479,6899	615,114
	Ref. [3]	355,568	479,65	-
	Ref. [16]	355,569	479,675	615,114

Bölüm 4.1'de incelenen basit mesnetli durumda olduğu gibi, ankastre durumda da DTM çözümünün özdeğerleri belirlemede oldukça başarılı olduğu Tablo 4.5'e göre söylenebilir. Nodal çap olmayan durumda (m=0) yapılan hesaplamalarda özdeğerlerin yakınsadığı parametreler ve seri büyüklükleri de Tablo 4.6'da gösterilmektedir.

Tablo 4.6 : Ankastre simetrik durumda özdeğerlerin yakınsadığı seri büyüklükleri

D.F	Ω	n	N
1	10,2158	4	18
2	39,7711	6	26
3	89,1041	9	38
4	158,1842	11	46
5	247,0064	12	50
6	355,5693	15	62

Şekil 4.7'de nodal çap olmayan durum için (m=0) ilk dört özdeğerin yakınsaması gösterilmektedir.



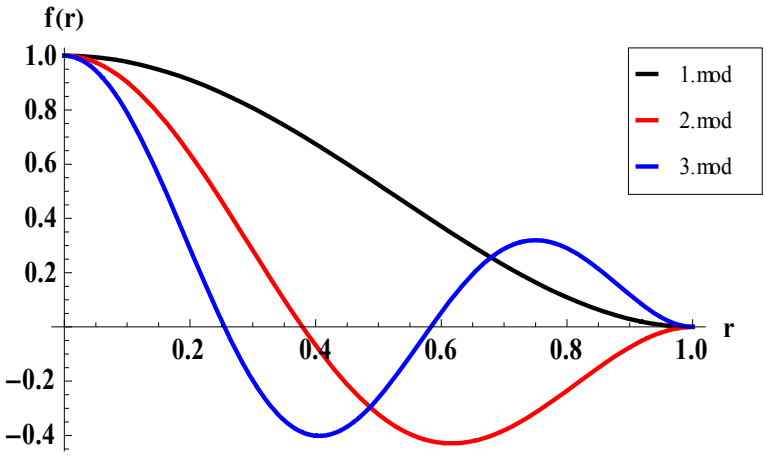
Şekil 4.7 : Ankastre simetrik durumda ilk dört özdeğerin yakınsaması

Boyutsuz doğal frekanslar ve bunların yakınsadığı seri büyüklükleri bilindiğine göre ankastre mesnetlenmiş dairesel plakanın simetrik durumu için serbest titreşimin mod fonksiyonları (özvektörler) incelenebilir. Bölüm 4.1.1'de anlatılana benzer mantık ile, (3.28) denkleminde genel durum için oluşturulan radyal mod fonksiyonu ifadesi, ankastre dairesel plakanın simetrik durumu için F_{4k} ve F_{4k+2} terimleri cinsinden (4.11) ifadesi ile ifade edilir. Gerekli düzenlemelerin yapılması ile birlikte ankastre mesnetlenmiş dairesel plakanın serbest titreşiminin simetrik hali için radyal mod fonksiyonu ifadesi oluşturulur:

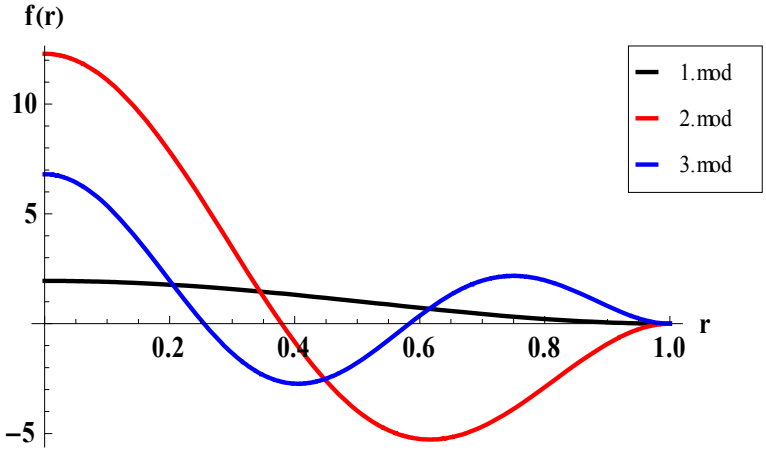
$$f(r) = F_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{4k}\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A - B(4k)(4k-2) + (4k)(4k-1)^2(4k-2)\right)} \right) - \left(\frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A - B(4k)(4k-2) + (4k)(4k-1)^2(4k-2)\right)}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A - B(4k+2)(4k) + (4k+2)(4k+1)^2(4k)\right)}} F_0 \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{4k+2}\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A - B(4k+2)(4k) + (4k+2)(4k+1)^2(4k)\right)} \right) \quad \textbf{(4.30)}$$

(4.30) denklemi ankastre mesnetlenmiş dairesel plakanın simetrik durumu için mod fonksiyonu ifadesi olup, (4.15) denklemi ile ifade edilen basit mesnetli simetrik durumdaki mod fonksiyonu ile aynıdır. Bunun nedeni bölümün başında da belirtildiği gibi, basit mesnet ve ankastre durumların birer sınır şartının aynı olmasıdır. İki durum için de mod fonksiyonu ifadesi ortak olan sınır şartı göz önünde bulundurularak ifade edildiği için sembolik mod fonksiyonu ifadeleri aynı çıkmaktadır. Ancak unutulmamalıdır ki, frekans denklemi ifadeleri basit mesnet simetrik durum ve ankastre simetrik durum için farklıdır.

(4.29) frekans denkleminin çözümünden elde edilen $\Omega^{(n)}$ özdeğeri, özdeğerin yakınsadığı seri büyüklüğünü belirleyen n parametresi (4.30) mod fonksiyonu denkleminde kullanıldığında, F_0 sıfırdan farklı sabit bir sayı olmak üzere, radyal mod fonksiyonu f(r), plakanın radyal yöndeki boyutsuzlaştırılmış koordinatı r'ye bağlı olarak bulunur. Böylelikle ankastre dairesel plakanın serbest titreşiminin simetrik durum mod şekilleri elde edilebilir. Şekil 4.8 ve Şekil 4.9'da nodal çap olmayan durumda (m=0) serbest titreşimin ilk üç mod şekli gösterilmektedir. Şekil 4.9'da gösterilen normalize edilmiş mod şekillerinin, dairesel plakanın o modunda enine yer değişmesinin diğer modlarındaki ile karşılaştırılabilmesini sağladığı unutulmamalıdır. Örneğin ankastre simetrik moddaki dairesel plakanın 2. modunun yer değiştirmesi diğer modlarına göre oldukça fazladır.



Şekil 4.8 : Ankastre simetrik durumda titreşimin ilk üç mod şekli



Şekil 4.9 : Ankastre simetrik durumda titreşimin normalize edilmiş ilk üç mod şekli

4.2.2. Antisimetrik Durum

Tek sayıda nodal çap (m = 1, 3, 5, ...) için dairesel plakaların serbest titreşimlerinin antisimetrik modda olması ile birlikte (4.24) ve (4.25) denklemleri F_{4k+1} ve F_{4k+3} terimleri cinsinden yazılarak katsayılar matrisi önceki bölümlerdeki gibi oluşturulur. Bölüm 4.1.1'de tanıtılan prosedür tekrar edildiğinde, katsayılar matrisi determinantını sıfır yapan denklem ankastre antisimetrik durum için frekans denklemini belirtir. (4.31) ifadesi frekans denklemini göstermektedir ve bu denklemin çözümü ile bulunan özdeğerler ankastre mesnetlenmiş dairesel plakanın antisimetrik serbest titreşimi için boyutsuz doğal frekansları vermektedir.

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+1)(4k-1)+(4k+1)(4k)^2(4k-1)\right)}\right)$$
$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k+3)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+3)(4k+1)+(4k+3)(4k+2)^2(4k+1)\right)}\right)$$
$$-\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+3)(4k+1)+(4k+3)(4k+2)^2(4k+1)\right)}\right)$$
$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k+1)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+1)(4k-1)+(4k+1)(4k)^2(4k-1)\right)}\right)=0 \qquad \textbf{(4.31)}$$

Tablo 4.7'de antisimetrik durum için (m = 1, 3, 5, ..) farklı nodal çap sayılarına göre ilk altı doğal frekansın değişimi ve DTM ile bulunmuş değerlerin diğer referanslar ile karşılaştırması bulunmaktadır. Tablo 4.8'de de tek nodal çaplı durumda (m=1) özdeğerlerin yakınsadığı parametreler ve seri büyüklükleri gösterilmektedir.

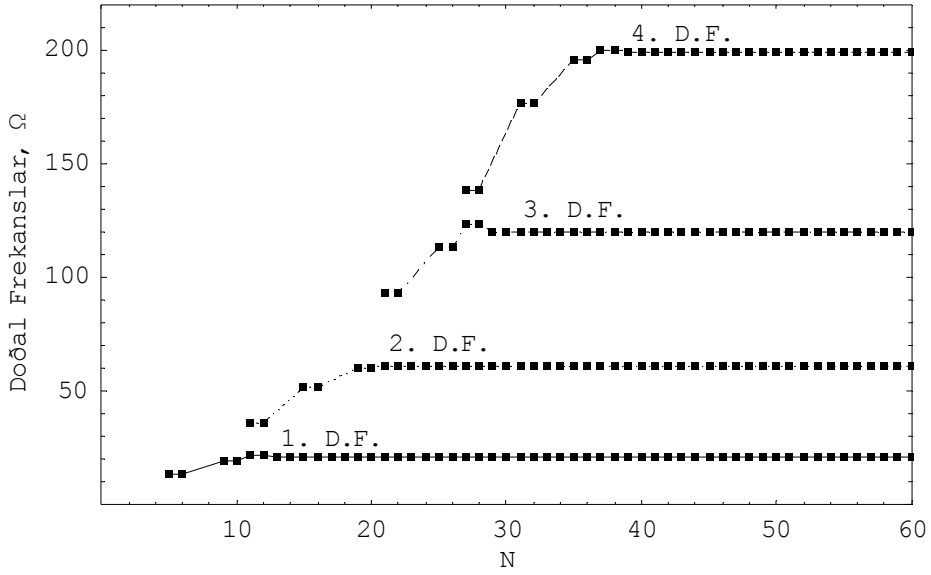
Tablo 4.7 : Ankastre antisimetrik durumda özdeğerler

$\Omega\,(\lambda_{ms}^2)$		**m = 1**	**m = 3**	**m = 5**
1. D.F. (Ω_1)	**DTM**	21,2604	51,03	90,7389
	Ref. [3]	21,26	51,04	90,739
	Ref. [16]	21,26	51,03	90,739
2. D.F. (Ω_2)	**DTM**	60,8287	111,021	171,8029
	Ref. [3]	60,82	111,01	171,8029
	Ref. [16]	60,829	111,021	171,803
3. D.F. (Ω_3)	**DTM**	120,0792	190,3037	271,428
	Ref. [3]	120,08	190,3	271,4283
	Ref. [16]	120,079	190,304	271,428
4. D.F. (Ω_4)	**DTM**	199,0533	289,1798	390,389
	Ref. [3]	199,06	289,170	390,3896
	Ref. [16]	199,053	289,180	390,389
5. D.F. (Ω_5)	**DTM**	297,76	407,7294	528,902
	Ref. [3]	297,77	407,720	-
	Ref. [16]	297,76	407,730	528,902
6. D.F. (Ω_6)	**DTM**	416,2025	545,983	687,051
	Ref. [3]	416,2	545,97	-
	Ref. [16]	416,203	545,983	687,051

Tablo 4.8 : Ankastre antisimetrik durumda özdeğerlerin yakınsadığı seri büyüklükleri

D.F	Ω	n	N
1	21,2604	4	19
2	60,8287	7	31
3	120,0792	9	39
4	199,0533	11	47
5	297,76	13	55
6	416,2025	15	63

Şekil 4.10'da tek nodal çaplı durum için (m=1) ilk dört özdeğerin yakınsaması gösterilmektedir. Şekil 4.10'dan ve Tablo 4.8'den anlaşılacağı üzere ilk dört doğal frekans için dört basamak hassasiyet göz önünde tutulduğunda hesaplamalarda en az 47 terim kullanılması gerekmektedir.

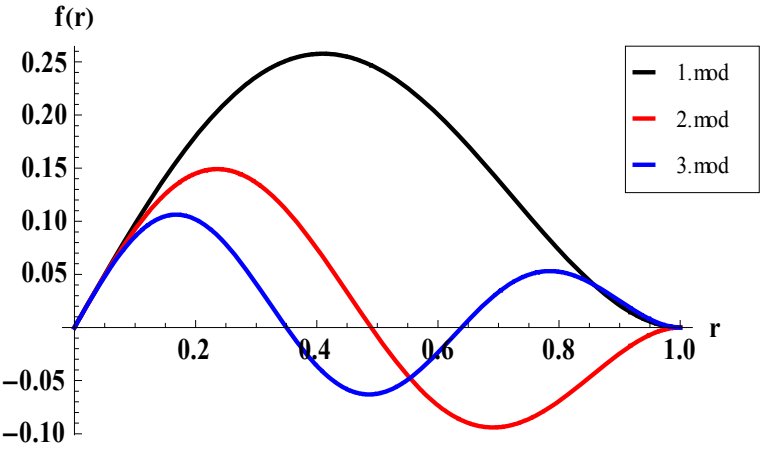


Şekil 4.10 : Ankastre antisimetrik durumda ilk dört özdeğerin yakınsaması

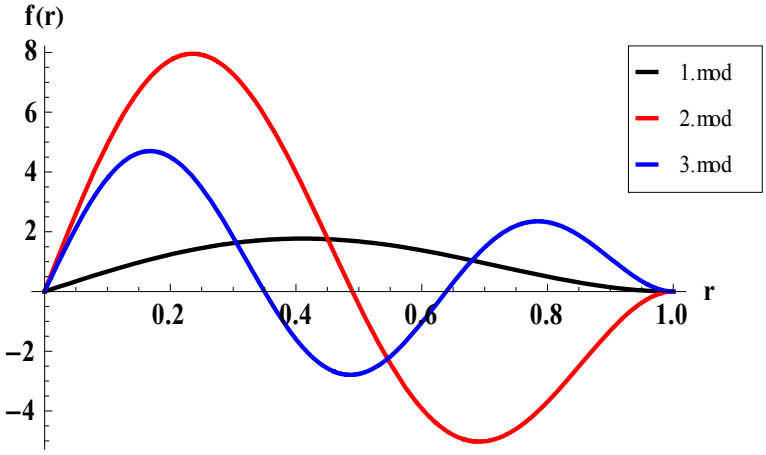
Boyutsuz doğal frekansların ve bunların yakınsadığı seri büyüklüklerinin belirlenmesi ile ankastre mesnetli dairesel plakanın antisimetrik durumu için de serbest titreşimin mod fonksiyonları (özvektörler) önceki bölümlerde olduğu gibi türetilir. (4.32) denklemi ankastre mesnetlenmiş dairesel plakanın antisimetrik durumu için mod fonksiyonu ifadesi olup, (4.23) denklemi ile ifade edilen basit mesnetli antisimetrik durumdaki mod fonksiyonu ile aynıdır. Bölüm 4.2.1'de bahsedildiği gibi, basit mesnet ve ankastre durumların birer sınır şartının aynı olması nedeniyle hem simetrik durumda hem de antisimetrik durumda radyal mod fonksiyonu ifadeleri sembolik olarak aynıdır.

$$f(r)=F_1\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{4k+1}\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+1)(4k-1)+(4k+1)(4k)^2(4k-1)\right)}\right)$$
$$-\left(\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+1)(4k-1)+(4k+1)(4k)^2(4k-1)\right)}}{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+3)(4k+1)+(4k+3)(4k+2)^2(4k+1)\right)}}F_1\right)$$
$$\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{4k+3}\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+3)(4k+1)+(4k+3)(4k+2)^2(4k+1)\right)}\right) \quad \textbf{(4.32)}$$

(4.32) denklemi bulunan özdeğerler için dikkate alındığında ankastre dairesel plakanın serbest titreşiminin antisimetrik durum mod şekilleri elde edilebilir. Şekil 4.11 ve Şekil 4.12'de tek nodal çaplı durumda (m=1) serbest titreşimin ilk üç mod şekli gösterilmektedir.



Şekil 4.11 : Ankastre antisimetrik durumda titreşimin ilk üç mod şekli



Şekil 4.12 : Ankastre antisimetrik durumda titreşimin normalize edilmiş ilk üç mod şekli

4.3. Serbest Durum

Uç kenarlarından serbest olan dairesel plakanın dönüştürülmüş sınır koşulları Bölüm 3'de (3.32) ve (3.38) denklemlerinde tanıtılmıştı. Dönüştürülmüş sınır koşulları reküratif olarak $F_{4k,}$ F_{4k+1}, F_{4k+2}, F_{4k+3} terimleri cinsinden tekrar yazılırsa (3.32) ve (3.38) denklemleri için yeni ifadeler oluşturulur:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}\Big((4k)(4k-1)+\nu 4k-m^2\nu\Big)F_{4k}+\\
&\sum_{k=0}^{\infty}\Big((4k+1)(4k)+\nu(4k+1)-m^2\nu\Big)F_{4k+1}+\\
&\sum_{k=0}^{\infty}\Big((4k+2)(4k+1)+\nu(4k+2)-m^2\nu\Big)F_{4k+2}+\\
&\sum_{k=0}^{\infty}\Big((4k+3)(4k+2)+\nu(4k+3)-m^2\nu\Big)F_{4k+3}=0
\end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}(4k(4k-1)^2+4k(4k-1)+(m^2\nu-2m^2-1)4k+(3m^2-m^2\nu)F_{4k}+\\
&\sum_{k=0}^{\infty}((4k+1)(4k)^2+(4k+1)(4k)+(m^2\nu-2m^2-1)(4k+1)+(3m^2-m^2\nu)F_{4k+1}+\\
&\sum_{k=0}^{\infty}((4k+2)(4k+1)^2+(4k+2)(4k+1)+(m^2\nu-2m^2-1)(4k+2)+(3m^2-m^2\nu)F_{4k+2}+\\
&\sum_{k=0}^{\infty}((4k+3)(4k+2)^2+(4k+3)(4k+2)+(m^2\nu-2m^2-1)(4k+3)+(3m^2-m^2\nu)F_{4k+3}=0
\end{aligned} \tag{4.34}$$

(3.32) denkleminin $F_{4k,}$ F_{4k+1}, F_{4k+2}, F_{4k+3} terimleri cinsinden ifadesi (4.33) denkleminde, (3.38) denkleminin $F_{4k,}$ F_{4k+1}, F_{4k+2}, F_{4k+3} terimleri cinsinden ifadesi ise (4.34) denkleminde gösterilmektedir. Burada unutulmaması gereken husus, basit mesnetli durum ile serbest durumun bir sınır şartının aynı olmasıdır. İki mesnet durumunda da uçlarda radyal momentin olmadığını gösteren dönüştürülmüş (4.33) ve (4.2) denklemlerinin hem basit mesnet hem de serbest durum için aynı olduğu görülmektedir. Basit mesnetli ve ankastre durumda yapılan incelemelere benzer olarak, serbest durumda da nodal çap sayısı m'nin tek ya da çift olmasına göre simetrik ve antisimetrik olarak çözümler ayrı ayrı incelenmektedir.

4.3.1. Simetrik Durum

Dairesel plakaların serbest titreşimlerinin çift sayıda nodal çap (m = 0, 2, 4, ...) için simetrik modda olması, serbest durumda da sınır şartlarının dönüşümünde F_1 ve F_3 terimlerinin, reküratif olarak da F_{4k+1} ve F_{4k+3} ifadelerinin incelenmeyeceği sonucunu doğurur. Bölüm 4.1'de tanıtılan prosedürü uygularsak, (4.33) ve (4.34) denklemleri F_{4k} ve F_{4k+2} terimleri cinsinden (3.23) – (3.26) rekürans bağıntılarının kullanılması ile açık olarak şu şekilde yazılabilir:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k)(4k-1)+\nu 4k-m^2\nu\right)\Omega^{2k}F_0}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k)(4k-2)+(4k)(4k-1)^2(4k-2)\right)}+ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k+2)(4k+1)+\nu(4k+2)-m^2\nu\right)\Omega^{2k}F_2}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+2)(4k)+(4k+2)(4k+1)^2(4k)\right)}=0 \tag{4.35}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k)(4k-1)^2+\left(m^2\nu-2m^2-1\right)4k+\left(3m^2-m^2\nu\right)\right)\Omega^{2k}F_0}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k)(4k-2)+(4k)(4k-1)^2(4k-2)\right)}+ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k+2)(4k+1)^2+\left(m^2\nu-2m^2-1\right)(4k+2)+\left(3m^2-m^2\nu\right)\right)\Omega^{2k}F_2}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+2)(4k)+(4k+2)(4k+1)^2(4k)\right)}=0 \tag{4.36}$$

Açık olarak yazılan (4.35) ve (4.36) ifadeleri Bölüm 4.1 ve Bölüm 4.2'de yapılan çözüme benzer olarak gruplandırılır ve denklem sistemi katsayılar matrisi şeklinde ifade edilirse ifadeler özdeğer problemine indirgenir. Bölüm 4.1.1'de basit mesnetli

simetrik durum için anlatılan prosedür tekrar edilirse, katsayılar matrisi determinantını sıfır yapan denklem serbest simetrik durum için frekans denklemini belirtir.

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k)(4k-1)+\nu 4k-m^2\nu\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k)(4k-2)+(4k)(4k-1)^2(4k-2)\right)}\right)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k+2)(4k+1)^2+\left(m^2\nu-2m^2-1\right)(4k+2)+\left(3m^2-m^2\nu\right)\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+2)(4k)+(4k+2)(4k+1)^2(4k)\right)}\right)$$

$$-\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k+2)(4k+1)+\nu(4k+2)-m^2\nu\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+2)(4k)+(4k+2)(4k+1)^2(4k)\right)}\right)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k)(4k-1)^2+\left(m^2\nu-2m^2-1\right)4k+\left(3m^2-m^2\nu\right)\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k)(4k-2)+(4k)(4k-1)^2(4k-2)\right)}\right)=0 \qquad \textbf{(4.37)}$$

Tablo 4.9 : Serbest simetrik durumda özdeğerler

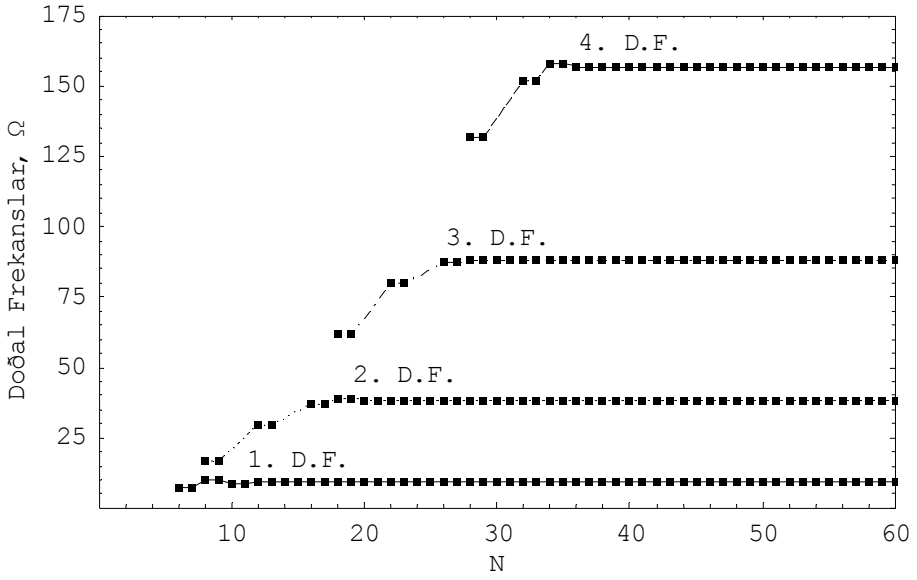
$\Omega\,(\lambda^2_{ms})$		**m = 0**	**m = 2**	**m = 4**
1. D.F. (Ω_1)	**DTM**	9,0031	5,3583	21,8352
	Ref. [3]	9,084	5,253	21,6
	Ref. [16]	9,003	5,358	21,835
2. D.F. (Ω_2)	**DTM**	38,4432	35,2601	73,5426
	Ref. [3]	38,55	35,25	73,1
	Ref. [16]	38,443	35,26	73,543
3. D.F. (Ω_3)	**DTM**	87,7052	84,3662	142,431
	Ref. [3]	87,8	83,9	142,8
	Ref. [16]	87,75	84,366	142,431
4. D.F. (Ω_4)	**DTM**	156,8183	153,306	231,03
	Ref. [3]	157	154	232,3
	Ref. [16]	156,818	153,306	231,03
5. D.F. (Ω_5)	**DTM**	245,6335	242,036	339,413
	Ref. [3]	245,9	242,7	340,4
	Ref. [16]	245,634	242,036	339,413
6. D.F. (Ω_6)	**DTM**	354,1918	350,534	467,573
	Ref. [3]	354,6	350,8	467,9
	Ref. [16]	-	350,534	467,573

(4.37) ifadesi frekans denklemini göstermektedir ve bu denklemin çözümü ile bulunan özdeğerler serbest dairesel plakanın simetrik serbest titreşimi için boyutsuz doğal frekansları vermektedir. Tablo 4.9'da simetrik durum için (m = 0, 2, 4, ..) farklı nodal çap sayılarına göre ilk altı doğal frekansın değişimi ve DTM ile bulunmuş değerlerin diğer referanslar ile karşılaştırması bulunmaktadır. Bölüm 4.1'de basit mesnetli durumda, Bölüm 4.2'de ankastre durumda olduğu gibi, serbest durumda da DTM çözümünün özdeğerleri belirlemede oldukça başarılı olduğu Tablo 4.9'a göre söylenebilir. Nodal çap olmayan durumda (m=0) yapılan hesaplamalarda özdeğerlerin yakınsadığı parametreler ve seri büyüklükleri de Tablo 4.10'da gösterilmektedir.

Tablo 4.10 : Serbest simetrik durumda özdeğerlerin yakınsadığı seri büyüklükleri

D.F	Ω	n	N
1	9,0031	4	18
2	38,4432	6	26
3	87,7052	8	34
4	156,8183	11	46
5	245,6335	13	54
6	354,1918	15	62

Şekil 4.13'de nodal çap olmayan durum için (m=0) ilk dört özdeğerin yakınsaması gösterilmektedir.



Şekil 4.13 : Serbest simetrik durumda ilk dört özdeğerin yakınsaması

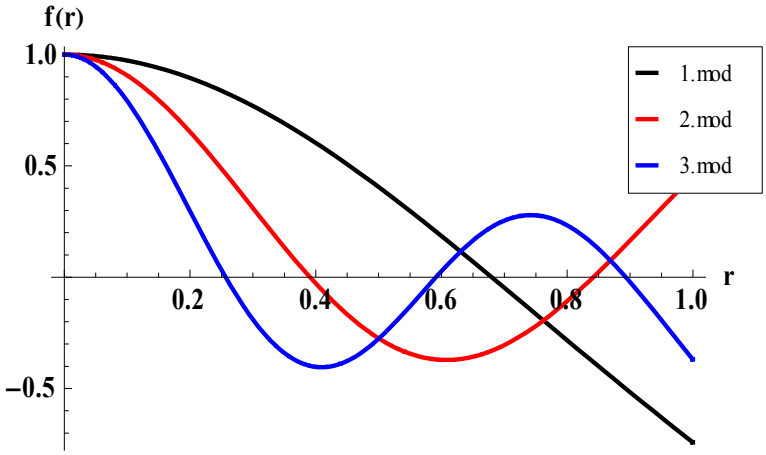
Boyutsuz doğal frekanslar ve bunların yakınsadığı seri büyüklükleri bilindiğine göre serbest dairesel plakanın simetrik durumu için serbest titreşimin mod fonksiyonları (özvektörler) incelenebilir. Bölüm 4.1.1'de anlatılana benzer mantık ile, (3.28) denkleminde genel durum için oluşturulan radyal mod fonksiyonu ifadesi, serbest dairesel plakanın simetrik durumu için F_{4k} ve F_{4k+2} terimleri cinsinden (4.11) ifadesi ile ifade edilir. Gerekli düzenlemelerin yapılması ile birlikte serbest dairesel plakanın serbest titreşiminin simetrik hali için radyal mod fonksiyonu ifadesi oluşturulur:

$$f(r) = F_0\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{4k}\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k)(4k-2)+(4k)(4k-1)^2(4k-2)\right)}\right) - \left(\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k)(4k-1)+\nu 4k-m^2\nu\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k)(4k-2)+(4k)(4k-1)^2(4k-2)\right)}}{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k+2)(4k+1)+\nu(4k+2)-m^2\nu\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+2)(4k)+(4k+2)(4k+1)^2(4k)\right)}}\right)F_0 \cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{4k+2}\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+2)(4k)+(4k+2)(4k+1)^2(4k)\right)}\right) \quad \textbf{(4.38)}$$

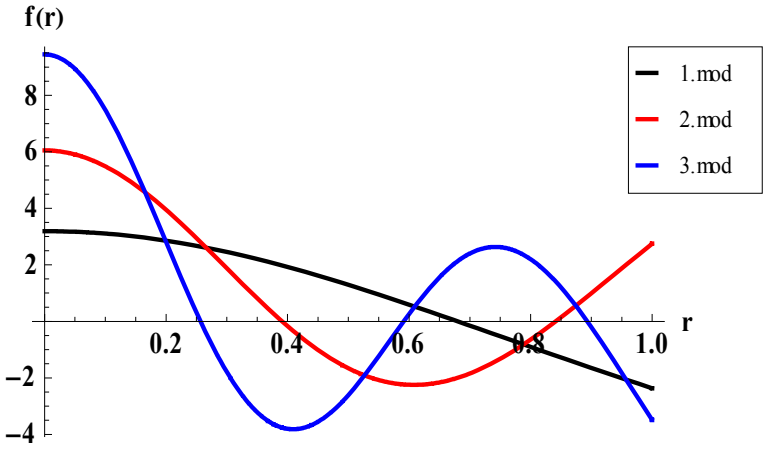
(4.38) denklemi kenarlarından serbest olan dairesel plakanın simetrik durumu için mod fonksiyonu ifadesidir. Önceden de belirtildiği gibi basit mesnetli ve serbest durumların birer sınır şartı aynıdır. Bu nedenle (4.38) ifadesindeki mod fonksiyonunun, basit mesnet simetrik durumu için (4.15) denkleminde ifade edilen mod fonksiyonu ile aynı olması beklenmektedir. Ancak basit mesnet simetrik durumdaki mod fonksiyonunun radyal momentin sıfır olması şartına göre oluşturulmamış olmasından dolayı sembolik olarak (4.38) ve (4.15) mod fonksiyonu ifadeleri farklıdır. Hem basit mesnetli hem de serbest durumda mod fonksiyonu ifadeleri ortak olan sınır şartı göz önünde bulundurularak oluşturulursa sembolik ifadeler aynı çıkacaktır. Ancak unutulmamalıdır ki, frekans denklemi ifadeleri basit mesnet simetrik durum ve serbest simetrik durum için farklıdır.

(4.38) denklemi bulunan özdeğerler için dikkate alındığında serbest dairesel plakanın serbest titreşiminin simetrik durum mod şekilleri elde edilebilir. Şekil 4.14 ve Şekil

4.15'de nodal çap olmayan durumda (m=0) serbest titreşimin ilk üç mod şekli gösterilmektedir. Şekil 4.15 incelendiğinde normalize mod şekilleri için serbest uçlu dairesel plakanın simetrik titreşim durumunda 3. mod şeklinin yer değiştirmesinin ilk iki moduna göre fazla olduğu görülmektedir.



Şekil 4.14 : Serbest simetrik durumda titreşimin ilk üç mod şekli



Şekil 4.15 : Serbest simetrik durumda titreşimin normalize edilmiş ilk üç mod şekli

4.3.2. Antisimetrik Durum

Tek sayıda nodal çap (m = 1, 3, 5, ...) için dairesel plakaların serbest titreşimlerinin antisimetrik modda olması ile birlikte katsayılar matrisinin oluşturulması ve gerekli düzenlemelerin yapılması ile birlikte serbest antisimetrik durum için frekans denklemi şu şekilde tanımlanır:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k+1)(4k)+\nu(4k+1)-m^2\nu\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+1)(4k-1)+(4k+1)(4k)^2(4k-1)\right)}\right)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k+3)(4k+2)^2+\left(m^2\nu-2m^2-1\right)(4k+3)+\left(3m^2-m^2\nu\right)\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+3)(4k+1)+(4k+3)(4k+2)^2(4k+1)\right)}\right)$$

$$-\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k+3)(4k+2)+\nu(4k+3)-m^2\nu\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+3)(4k+1)+(4k+3)(4k+2)^2(4k+1)\right)}\right)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k+1)(4k)^2+\left(m^2\nu-2m^2-1\right)(4k+1)+\left(3m^2-m^2\nu\right)\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+1)(4k-1)+(4k+1)(4k)^2(4k-1)\right)}\right)=0 \qquad \textbf{(4.39)}$$

(4.39) frekans denkleminin çözümü ile bulunan özdeğerler serbest dairesel plakanın antisimetrik serbest titreşimi için boyutsuz doğal frekansları vermektedir. Tablo 4.11'de antisimetrik durum için (m = 1, 3, 5, ..) farklı nodal çap sayılarına göre ilk altı doğal frekansın değişimi gösterilmektedir.

Tablo 4.11 : Serbest antisimetrik durumda özdeğerler

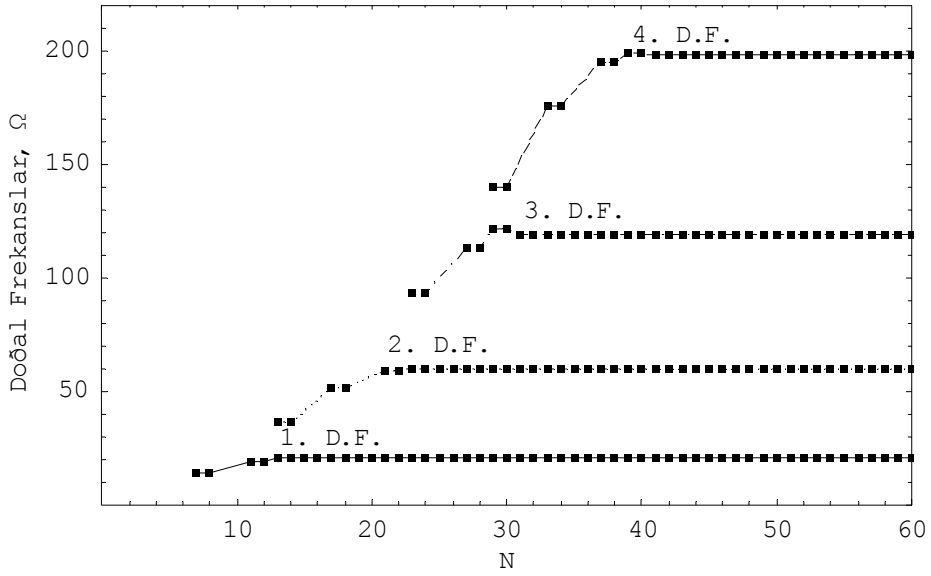
$\Omega\,(\lambda^2_{ms})$		**m = 1**	**m = 3**	**m = 5**
1. D.F. (Ω_1)	**DTM**	20,4746	12,439	33,4949
	Ref. [3]	20,52	12,23	33,1
	Ref. [16]	20,475	12,439	33,495
2. D.F. (Ω_2)	**DTM**	59,8116	53,0078	96,7554
	Ref. [3]	59,86	52,91	95,8
	Ref. [16]	59,812	53,008	96,755
3. D.F. (Ω_3)	**DTM**	118,9573	111,945	175,735
	Ref. [3]	119	111,3	175
	Ref. [16]	118,957	111,945	175,735
4. D.F. (Ω_4)	**DTM**	197,8718	190,692	274,252
	Ref. [3]	198,2	192,1	274,6
	Ref. [16]	197,872	190,692	274,252
5. D.F. (Ω_5)	**DTM**	296,54	289,238	392,505
	Ref. [3]	296,9	290,7	392,4
	Ref. [16]	296,54	289,238	392,505
6. D.F. (Ω_6)	**DTM**	414,955	407,562	530,521
	Ref. [3]	415,3	408,4	529,5
	Ref. [16]	-	407,562	530,521

Tek nodal çaplı durumda (m=1) yapılan hesaplamalarda özdeğerlerin yakınsadığı parametreler ve seri büyüklükleri de Tablo 4.12'de gösterilmektedir.

Tablo 4.12 : Serbest antisimetrik durumda özdeğerlerin yakınsadığı seri büyüklükleri

D.F	Ω	n	N
1	20,4746	6	27
2	59,8116	7	31
3	118,9573	9	39
4	197,8718	12	51
5	296,54	14	59
6	414,955	16	67

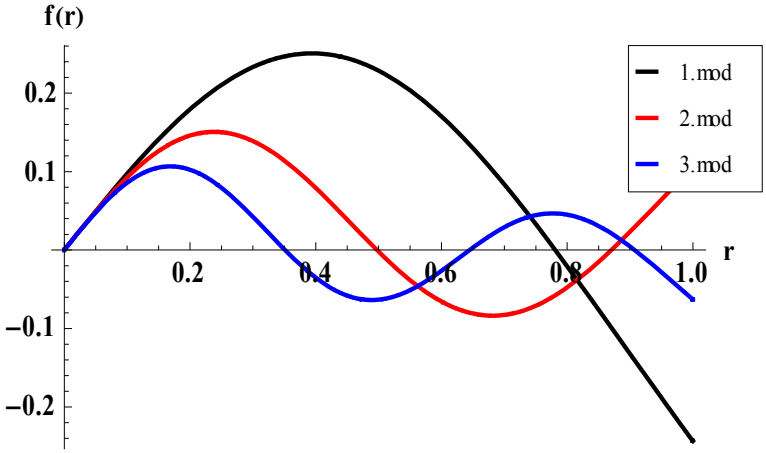
Şekil 4.16'da tek nodal çaplı durum için (m=1) ilk dört özdeğerin yakınsaması gösterilmektedir. Şekil 4.16'dan ve Tablo 4.12'den anlaşılacağı üzere ilk dört doğal frekans için dört basamak hassasiyet göz önünde tutulduğunda hesaplamalarda en az 51 terim kullanılması gerekmektedir.



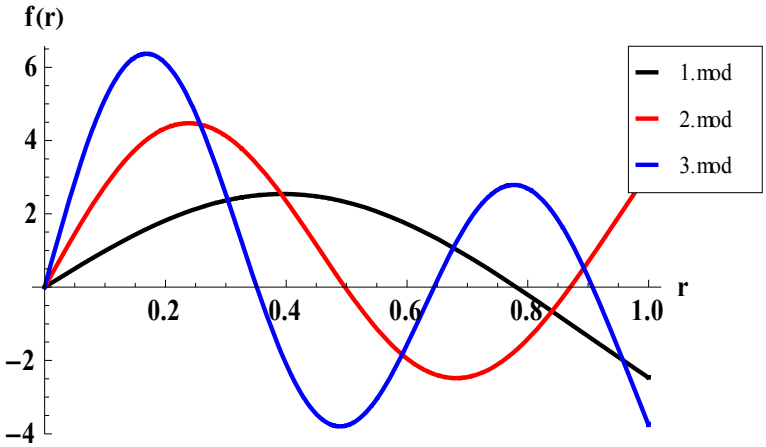
Şekil 4.16 : Serbest antisimetrik durumda ilk dört özdeğerin yakınsaması

Boyutsuz doğal frekansların ve bunların yakınsadığı seri büyüklüklerinin belirlenmesi ile serbest dairesel plakanın antisimetrik durumu için de serbest titreşimin mod fonksiyonları (özvektörler) önceki bölümlerde olduğu gibi türetilir. (4.40) denklemi kenarlarından serbest olan dairesel plakanın antisimetrik durumu için mod fonksiyonu ifadesidir.

$$f(r)=F_1\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{4k+1}\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+1)(4k-1)+(4k+1)(4k)^2(4k-1)\right)}\right)$$
$$-\left(\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k+1)(4k)+\nu(4k+1)-m^2\nu\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+1)(4k-1)+(4k+1)(4k)^2(4k-1)\right)}}{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k+3)(4k+2)+\nu(4k+3)-m^2\nu\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+3)(4k+1)+(4k+3)(4k+2)^2(4k+1)\right)}}F_1\right) \qquad \textbf{(4.40)}$$
$$\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{4k+3}\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+3)(4k+1)+(4k+3)(4k+2)^2(4k+1)\right)}\right)$$



Şekil 4.17 : Serbest antisimetrik durumda titreşimin ilk üç mod şekli



Şekil 4.18 : Serbest antisimetrik durumda titreşimin normalize edilmiş ilk üç mod şekli

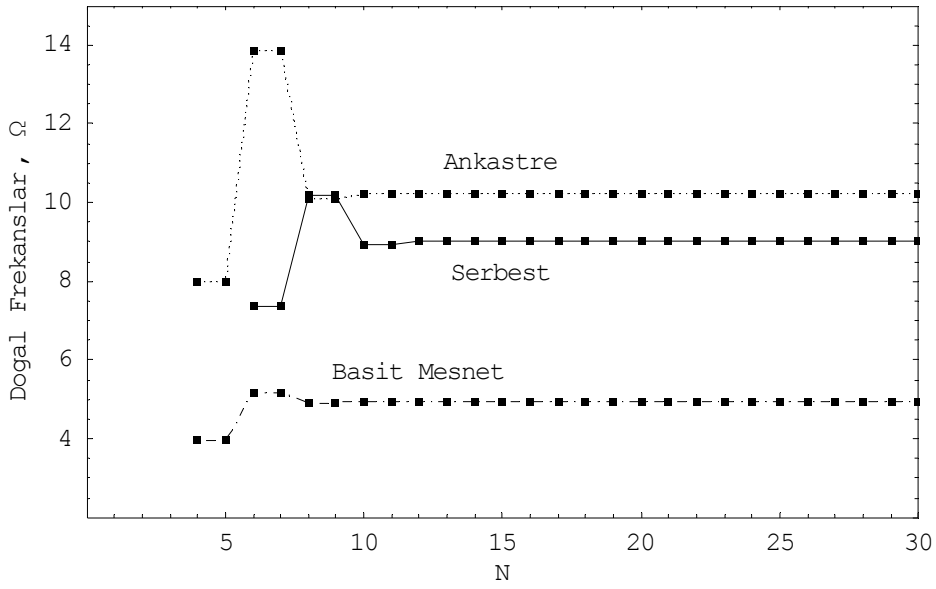
(4.40) denklemi bulunan özdeğerler için dikkate alındığında serbest dairesel plakanın serbest titreşiminin antisimetrik durum mod şekilleri elde edilebilir. Şekil 4.17 ve Şekil 4.18'de tek nodal çaplı durumda (m=1) serbest titreşimin ilk üç mod şekli gösterilmektedir. Şekil 4.18 incelediğinde, normalize mod şekilleri için serbest uçlu dairesel plakanın antisimetrik titreşim durumunda, simetrik durumda olduğu gibi 3. mod şeklinin yer değiştirmesinin ilk iki moduna göre fazla olduğu görülmektedir.

4.4. Sınır Şartlarının Karşılaştırılması

Bölüm 4.1, 4.2 ve 4.3'de basit mesnetli, ankastre ve serbest durum olmak üzere dairesel plakaların simetrik ve antisimetrik serbest titreşimleri için dönüştürülmüş ifadeler ile birlikte DTM uygulamaları ve sonuçlar tanıtılmıştı. Bu altı durum göz önüne alındığında sınır şartları arasında bazı karşılaştırmalar yapılabilmektedir. Tablo 4.13'de simetrik ve antisimetrik titreşimler için, nodal çap olmayan durumda (m=0) ve tek nodal çaplı durumda (m=1), üç sınır şartı için ilk üç boyutsuz doğal frekanslar gösterilmektedir.

Tablo 4.13 : Üç sınır şartında simetrik ve antisimetrik durumda ilk üç özdeğerler

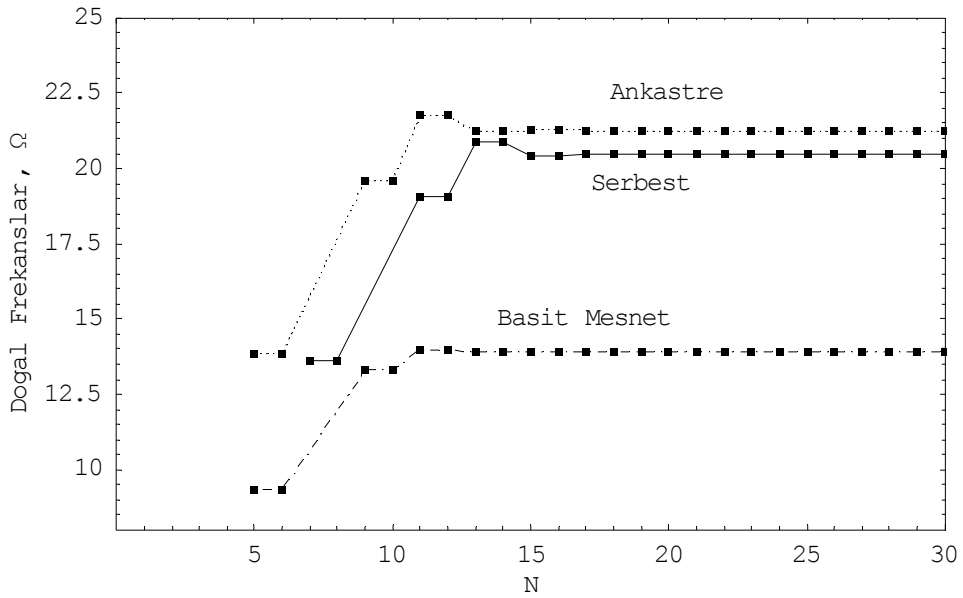
	m = 0 (simetrik)			**m = 1 (antisimetrik)**		
	1. mod (Ω)	**2. mod (Ω)**	**3. mod (Ω)**	**1. mod (Ω)**	**2. mod (Ω)**	**3. mod (Ω)**
Basit Mesnet	4,9351	29,72	74,1561	13,8982	48,4789	102,7733
Ankastre	10,2158	39,7711	89,1041	21,2604	60,8287	120,0792
Serbest	9,0031	38,4432	87,7052	20,4746	59,8116	118,9573



Şekil 4.19 : Simetrik durumda üç sınır şartı için ilk özdeğerlerin yakınsaması

Şekil 4.19'da basit mesnetli, ankastre, serbest dairesel plakalar için simetrik serbest titreşimin ilk doğal frekanslarının (özdeğerlerin) yakınsaması nodal çap olmayan durum için (m=0) gösterilmektedir. Şekil 4.19'dan görüldüğü üzere simetrik titreşim durumu göz önüne alındığında, basit mesnetli plakanın 1. doğal frekansının yakınsaması için hesaplanması gereken F(k) terimlerinin sayısı diğerlerinden küçüktür. Bir diğer değişle, daha küçük seri büyüklüğü ile yapılan çözüm ile basit mesnet simetrik durumda ilk özdeğer yakınsamaktadır. Ankastre ve serbest simetrik durumda ilk özdeğerlerin aynı seri boyutunda yakınsadığı da Şekil 4.19'dan görülebilmektedir.

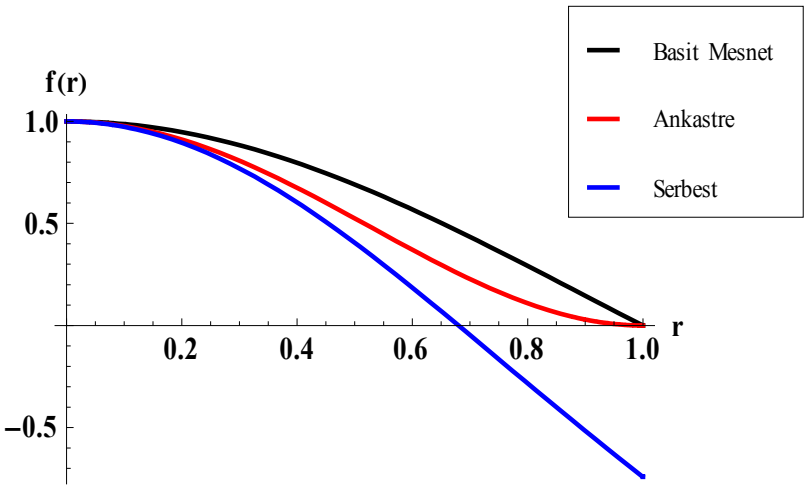
Şekil 4.20'de de basit mesnetli, ankastre, serbest dairesel plakalar için antisimetrik serbest titreşimin ilk doğal frekanslarının (özdeğerlerin) yakınsaması tek nodal çaplı durum için (m=1) gösterilmektedir. Şekil 4.19'da olduğu gibi antisimetrik titreşim durumunda da daha küçük seri büyüklüğü ile yapılan çözüm ile basit mesnetli dairesel plakanın serbest titreşiminin ilk özdeğeri yakınsamaktadır. Ancak Şekil 4.20 incelendiğinde, ankastre plakanın ilk özdeğerinin serbest uçlu plakanın ilk özdeğerine göre daha küçük seri büyüklüğünde yakınsadığı söylenebilir.



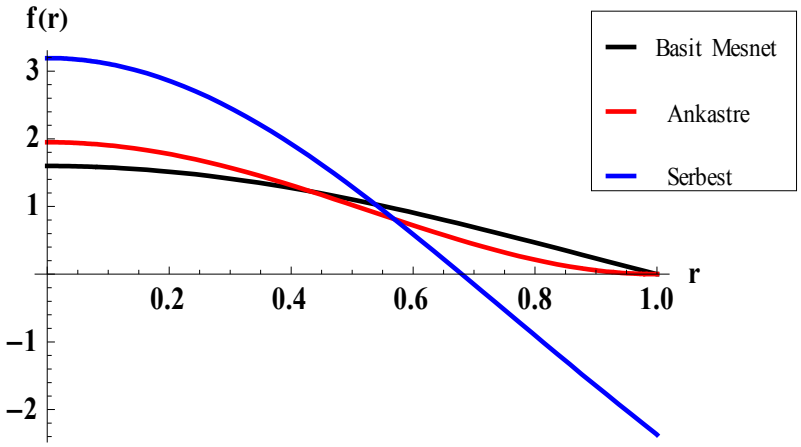
Şekil 4.20 : Antisimetrik durumda üç sınır şartında ilk özdeğerlerin yakınsaması

Şekil 4.21 ve Şekil 4.22'de simetrik durumda ankastre, basit mesnetli ve serbest dairesel plakaların serbest titreşimlerinin nodal çap olmayan durum için (m=0) ilk mod şekilleri karşılaştırmalı olarak gösterilmektedir. Şekil 4.22'de normalize edilmiş mod şekillerinin karşılaştırması yapıldığında, serbest uçlu dairesel plakanın simetrik

titreşiminin yer değiştirmesinin ankastre ve basit mesnetli duruma göre daha fazla olduğu görülmektedir.

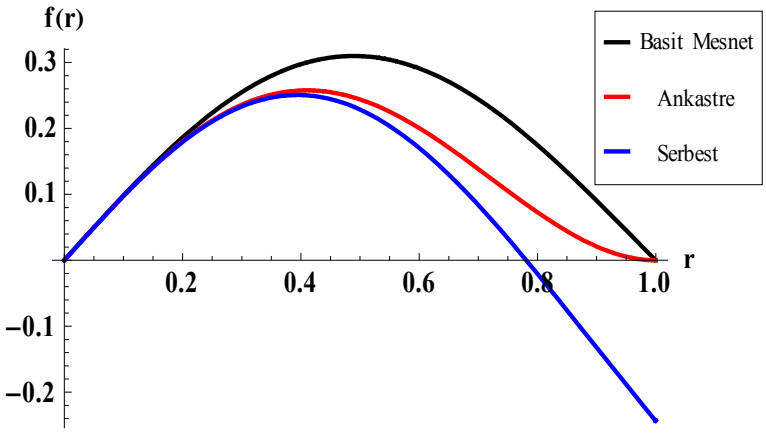


Şekil 4.21 : Simetrik durumda üç sınır şartı için titreşimin ilk mod şekilleri

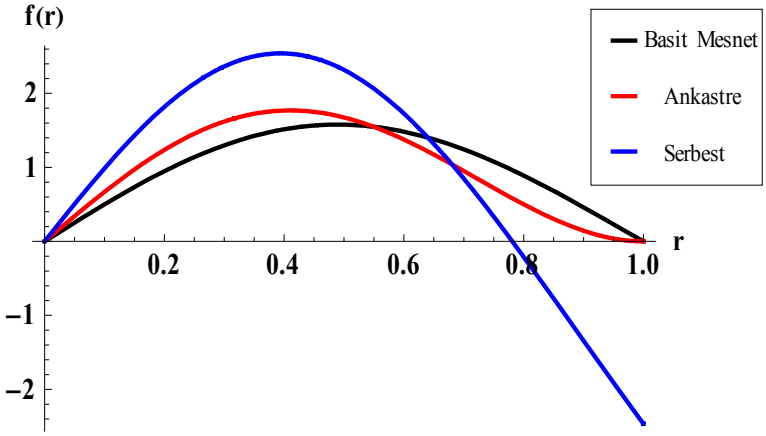


Şekil 4.22 : Simetrik durumda üç sınır şartı için titreşimin normalize edilmiş ilk mod şekilleri

Şekil 4.23 ve Şekil 4.24'de antisimetrik durumda ankastre, basit mesnetli ve serbest dairesel plakaların serbest titreşimlerinin tek nodal çaplı durum için (m=1) ilk mod şekilleri karşılaştırmalı olarak gösterilmektedir. Simetrik durumda olduğu gibi, şekil 4.24'de de normalize edilmiş mod şekillerinin karşılaştırması yapıldığında, serbest uçlu dairesel plakanın antisimetrik titreşiminin yer değiştirmesinin ankastre ve basit mesnetli duruma göre daha fazla olduğu görülmektedir.



Şekil 4.23 : Antisimetrik durumda üç sınır şartı için titreşimin ilk mod şekilleri



Şekil 4.24 : Antisimetrik durumda üç sınır şartı için titreşimin normalize edilmiş ilk mod şekilleri

5. SONUÇ

Sürekli sistemler için DTM uygulanması ile frekans denklemlerinin türetilmesi, ince kirişler ve dikdörtgen plakalar için literatürde incelenmişti [11, 15]. Ancak dairesel plakaların serbest titreşim hareketinin diferansiyel denklemi, sınır ve düzenlilik koşulları DTM uygulaması yapılarak dönüştürülmüş olarak halen türetilmemişti. Bu çalışmada dairesel plakanın dış kenarındaki sınır koşullarından ve merkezindeki düzenlilik koşullarından ileri gelen simetrik/antisimetrik mod şekillerinin birleşimi ile öngörülen altı plaka düzeni için de frekans denklemleri ve mod fonksiyonları DTM ile elde edilmiştir.

Bu çalışmada görüldüğü gibi DTM uygulaması sonucunda ortaya konan çözüm sistemleri sonsuz sayıdaki seriler şeklinde ifade edilmektedir. Ancak sayısal hesaplamalar için sonlu sayıda terime ihtiyaç vardır. Hesaplamalar için kullanılacak terimlerin sayısını serilerin yakınsama karakteristikleri belirlemektedir. DTM ile bulunan karakteristik denklemler literatürde Leissa [3] tarafından ifade edilen Bessel fonksiyonu ifadeleri ile karşılaştırıldığında sembolik olarak karışık gözükebilirler. Ancak bu ifadeler cebirsel olarak güçlü bir matematiksel yazılım ile kolaylıkla çözülebilir. Bessel fonksiyonu ifadelerinin çözümünde ortaya çıkan bazı tekillik ve süreksizlikleri yok etmek konusunda da DTM oldukça başarılıdır.

DTM uygulaması sonucu elde edilen frekans denklemlerinden boyutsuz doğal frekansların hesaplanmasında, bu doğal frekansların yakınsama özelliklerinin belirlenmesinde ve dairesel plakanın mod şekillerinin oluşturulmasında Mathematica 5.2 paket programı kullanılmış olup, Poisson oranı 0.3 alınmıştır. Dairesel plakanın incelenen altı durumu için mod şekillerinin ve doğal frekansların hesaplanan seri büyüklüklerine göre yakınsamalarının karşılaştırılması üç sınır koşulu için yapılmıştır. Doğal frekansların yakınsadığı seri büyüklükleri incelendiğinde yüksek mertebedeki özdeğerlerin bulunması için hesaplamalarda kullanılan terim sayısının arttırılmasının gerekliliği açıkça gözükmektedir. Ayrıca yöntemin doğruluk derecesi hesaplamalarda kullanılan terim sayısı ile orantılı olarak artmaktadır. Bununla

beraber özdeğerlerin yakınsamaları detaylı incelendiğinde DTM çözümlerinin hızlı yakınsadığı açık olarak görülmektedir.

Ek A'da incelenen altı durum için de dairesel plakanın frekans denklemleri ve mod fonksiyonu ifadeleri gösterilmektedir. Ek B'de üç sınır koşulu için de simetrik ve antisimetrik titreşim durumu için yapılan sayısal çözümlemeler sonucu elde edilen ilk beş boyutsuz doğal frekans değerleri, literatürde sıklıkla ifade edilmiş olan Bessel [3] ve genelleştirilmiş diferansiyel dörtlük yöntemi [16] sonuçları ile karşılaştırmalı olarak gösterilmektedir. Karşılaştırmalar sonucu DTM'nin özdeğer problemleri için oldukça güçlü ve yüksek doğruluk oranına sahip olduğu görülmektedir. Ek C'de ise serbest titreşim durumundaki dairesel plakanın her bir sınır şartı için nodal çap olmayan durumda (m=0) ve tek nodal çaplı durumda (m=1) ilk üç mod şekilleri gösterilmektedir. Üç boyutlu mod şekillerinin incelenmesi ile serbest titreşimin simetrik ve antisimetrik modlarının farklılığı açıkça görülebilmektedir.

KAYNAKLAR

[1] **Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S.,** 1959. Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, New York.

[2] **Ugural, A. C.,** 1999. Stresses in Plates and Shells, 2nd ed., McGraw-Hill, New York.

[3] **Leissa, A. W.,** 1969. Vibration of Plates, NASA SP.160, Washington.

[4] **Soedel, W.,** 1993. Vibrations of Shells and Plates, Marcel Dekker, New York.

[5] **Airey, J.,** 1911. The vibration of circular plates and their relation to Bessel functions, *Proceedings of the Physical Society (London),* **23**, 225–232.

[6] **Bauer, H. F. and Eidel, W.,** 2005. Determination of the lower natural frequencies of circular plates with mixed boundary conditions, *Journal of Sound and Vibration,* **292**, 742–764.

[7] **Zhou, J. K.,** 1986. Differential Transformation and its Application for Electrical Circuits, Huazhong University Press, Wuhan, China.

[8] **Arikoglu, A. and Ozkol, I.,** 2005. Solution of boundary value problems for integro-differential equations by using differential transform method, *Applied Mathematics and Computation,* **168**, 1145–1158.

[9] **Abdel-Halim Hassan, I. H.,** 2002. On solving some eigenvalue problems by using a differential transformation, *Applied Mathematics and Computation,* **127**, 1–22.

[10] **Chen, C.-K. and Ho, S.-H.,** 1996. Application of differential transformation to eigenvalue problems, *Applied Mathematics and Computation,* **79**, 173–188.

[11] **Malik, M. and Dang, H. H.,** 1998. Vibration analysis of continuous systems by differential transformation, *Applied Mathematics and Computation,* **96**, 17–26.

[12] **Ho, S. H. and Chen, C. K.,** 1998. Analysis of general elastically end restrained non-uniform beams using differential transform, *Applied Mathematical Modelling,* **22**, 219–234.

[13] **Kaya, M. O.,** 2006. Free Vibration Analysis of Rotating Timoshenko Beam by Differential Transform Method, *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 78, Issue: **3**, 194–203.

[14] **Yeh, Y.-L. and Jang, M.-J.,** 2006. Analyzing the free vibrations of a plate using finite difference and differential transformation method, *Applied Mathematics and Computation,* **178**, 463–501.

[15] **Malik, M. and Allahi, M.,** 1998. Characteristic equations of rectangular plates by differential transformation. *Journal of Sound and Vibration,* **233**, 359–366.

[16] **Wu, T. Y., Wang, Y. Y. and Liu, G. R.,** 2002. Free vibration analysis of circular plates using generalized differential quadrature rule, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* **191**, 5365–5380.

[17] **Zeytinci, A.,** 1980. İnce elastik dairesel plakların titreşimi için başlangıç koşullarını da içeren genel bir yaklaşım, *Doktora Tezi,* İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi, İstanbul.

[18] **Jang, M. J., Chen, C. L. and Liu, Y.C.,** 2001. Two-dimensional differential transform for partial differential equations, *Applied Mathematics and Computation,* **121**, 261–270.

[19] **Ayaz, F.,** 2003. On the two-dimensional differential transform method, *Applied Mathematics and Computation,* **143**, 361–374.

[20] **Zeng, H. and Bert, C. W.,** 2001. Vibration analysis of a tapered bar by differential transformation, *Journal of Sound and Vibration,* **242**, 737–739.

EKLER

EK A : Frekans denklemleri ve radyal mod fonksiyonları

EK B : Serbest titreşimin boyutsuz doğal frekansları

EK C : Üç boyutlu mod şekilleri

Basit mesnetli – simetrik durum

- Frekans denklemi

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k)(4k-2)+(4k)(4k-1)^2(4k-2)\right)}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k+2)(4k+1)+\nu(4k+2)-m^2\nu\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+2)(4k)+(4k+2)(4k+1)^2(4k)\right)}\right)$$
$$-\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+2)(4k)+(4k+2)(4k+1)^2(4k)\right)}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k)(4k-1)+\nu 4k-m^2\nu\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k)(4k-2)+(4k)(4k-1)^2(4k-2)\right)}\right)=0$$

- Mod fonksiyonu

$$f(r)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{4k}\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k)(4k-2)+(4k)(4k-1)^2(4k-2)\right)}-\left(\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k)(4k-2)+(4k)(4k-1)^2(4k-2)\right)}}{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+2)(4k)+(4k+2)(4k+1)^2(4k)\right)}}\right)$$
$$\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{4k+2}\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+2)(4k)+(4k+2)(4k+1)^2(4k)\right)}\right)$$

Basit mesnetli – antisimetrik durum

- Frekans denklemi

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+1)(4k-1)+(4k+1)(4k)^2(4k-1)\right)}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k+3)(4k+2)+\nu(4k+3)-m^2\nu\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+3)(4k+1)+(4k+3)(4k+2)^2(4k+1)\right)}\right)$$
$$-\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+3)(4k+1)+(4k+3)(4k+2)^2(4k+1)\right)}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k+1)(4k)+\nu(4k+1)-m^2\nu\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+1)(4k-1)+(4k+1)(4k)^2(4k-1)\right)}\right)=0$$

- Mod fonksiyonu

$$f(r)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{4k+1}\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+1)(4k-1)+(4k+1)(4k)^2(4k-1)\right)}-\left(\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+1)(4k-1)+(4k+1)(4k)^2(4k-1)\right)}}{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+3)(4k+1)+(4k+3)(4k+2)^2(4k+1)\right)}}\right)$$
$$\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{4k+3}\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+3)(4k+1)+(4k+3)(4k+2)^2(4k+1)\right)}\right)$$

Ankastre – simetrik durum

- Frekans denklemi

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k)(4k-2)+(4k)(4k-1)^2(4k-2)\right)}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k+2)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+2)(4k)+(4k+2)(4k+1)^2(4k)\right)}\right)$$
$$-\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+2)(4k)+(4k+2)(4k+1)^2(4k)\right)}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k)(4k-2)+(4k)(4k-1)^2(4k-2)\right)}\right)=0$$

- Mod fonksiyonu

$$f(r)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{4k}\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k)(4k-2)+(4k)(4k-1)^2(4k-2)\right)}-\left(\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k)(4k-2)+(4k)(4k-1)^2(4k-2)\right)}}{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+2)(4k)+(4k+2)(4k+1)^2(4k)\right)}}\right)$$
$$\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{4k+2}\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+2)(4k)+(4k+2)(4k+1)^2(4k)\right)}\right)$$

Ankastre – antisimetrik durum

- Frekans denklemi

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+1)(4k-1)+(4k+1)(4k)^2(4k-1)\right)}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k+3)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+3)(4k+1)+(4k+3)(4k+2)^2(4k+1)\right)}\right)$$
$$-\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+3)(4k+1)+(4k+3)(4k+2)^2(4k+1)\right)}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k+1)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+1)(4k-1)+(4k+1)(4k)^2(4k-1)\right)}\right)=0$$

- Mod fonksiyonu

$$f(r)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{4k+1}\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+1)(4k-1)+(4k+1)(4k)^2(4k-1)\right)}-\left(\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+1)(4k-1)+(4k+1)(4k)^2(4k-1)\right)}}{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+3)(4k+1)+(4k+3)(4k+2)^2(4k+1)\right)}}\right)$$
$$\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{4k+3}\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+3)(4k+1)+(4k+3)(4k+2)^2(4k+1)\right)}\right)$$

Serbest – simetrik durum

- Frekans denklemi

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k)(4k-1)+\nu 4k-m^2\nu\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k)(4k-2)+(4k)(4k-1)^2(4k-2)\right)}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k+2)(4k+1)^2+\left(m^2\nu-2m^2-1\right)(4k+2)+\left(3m^2-m^2\nu\right)\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+2)(4k)+(4k+2)(4k+1)^2(4k)\right)}\right)$$
$$-\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k+2)(4k+1)+\nu(4k+2)-m^2\nu\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+2)(4k)+(4k+2)(4k+1)^2(4k)\right)}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k)(4k-1)^2+\left(m^2\nu-2m^2-1\right)4k+\left(3m^2-m^2\nu\right)\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k)(4k-2)+(4k)(4k-1)^2(4k-2)\right)}\right)=0$$

- Mod fonksiyonu

$$f(r)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{4k}\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k)(4k-2)+(4k)(4k-1)^2(4k-2)\right)}-\left(\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k)(4k-1)+\nu 4k-m^2\nu\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k)(4k-2)+(4k)(4k-1)^2(4k-2)\right)}}{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k+2)(4k+1)+\nu(4k+2)-m^2\nu\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+2)(4k)+(4k+2)(4k+1)^2(4k)\right)}}\right)$$
$$\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{4k+2}\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+2)(4k)+(4k+2)(4k+1)^2(4k)\right)}\right)$$

Serbest – antisimetrik durum

- Frekans denklemi

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k+1)(4k)+\nu(4k+1)-m^2\nu\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+1)(4k-1)+(4k+1)(4k)^2(4k-1)\right)}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k+3)(4k+2)^2+\left(m^2\nu-2m^2-1\right)(4k+3)+\left(3m^2-m^2\nu\right)\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+3)(4k+1)+(4k+3)(4k+2)^2(4k+1)\right)}\right)$$
$$-\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k+3)(4k+2)+\nu(4k+3)-m^2\nu\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+3)(4k+1)+(4k+3)(4k+2)^2(4k+1)\right)}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k+1)(4k)^2+\left(m^2\nu-2m^2-1\right)(4k+1)+\left(3m^2-m^2\nu\right)\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+1)(4k-1)+(4k+1)(4k)^2(4k-1)\right)}\right)=0$$

- Mod fonksiyonu

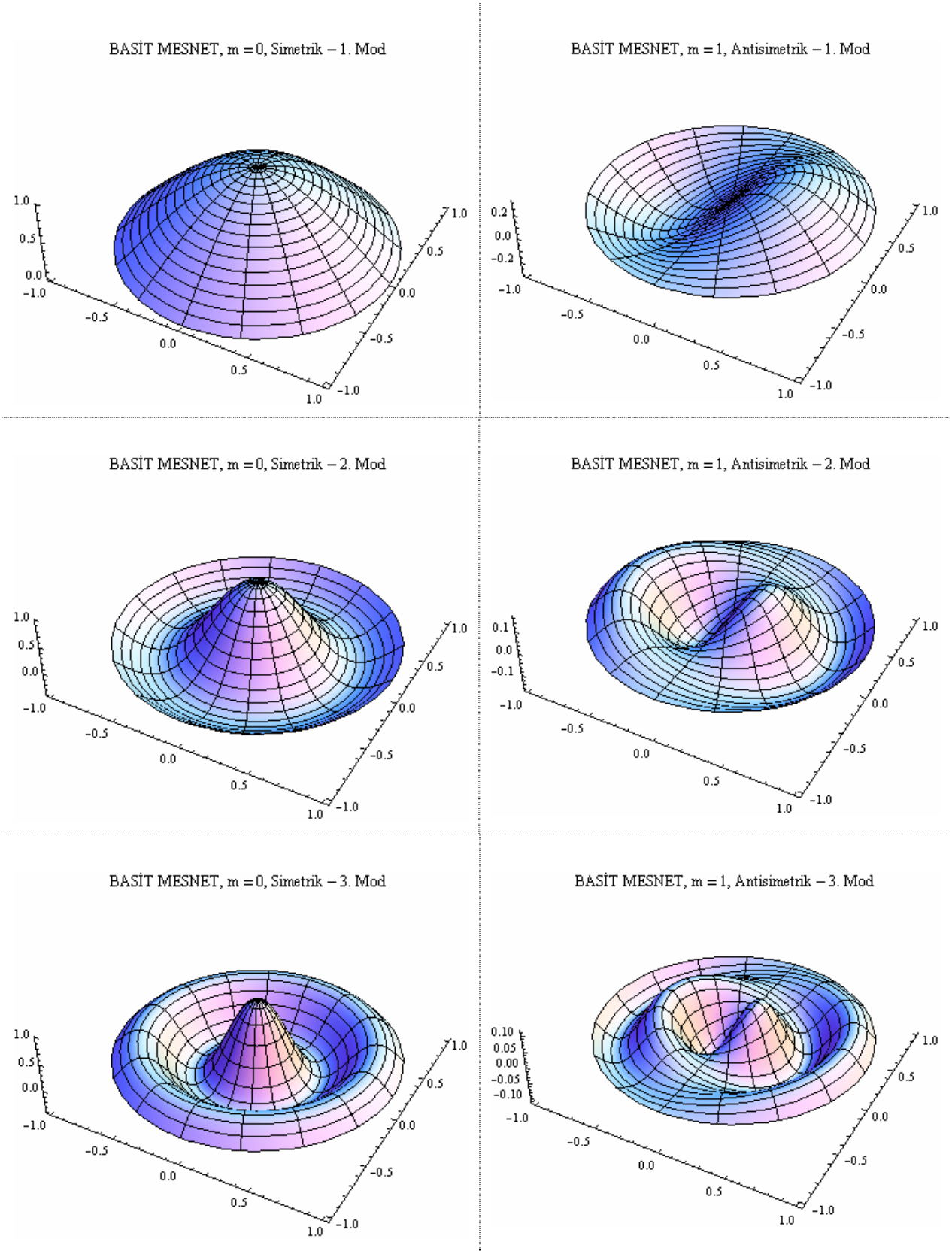
$$f(r)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{4k+1}\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+1)(4k-1)+(4k+1)(4k)^2(4k-1)\right)}-\left(\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k+1)(4k)+\nu(4k+1)-m^2\nu\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+1)(4k-1)+(4k+1)(4k)^2(4k-1)\right)}}{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((4k+3)(4k+2)+\nu(4k+3)-m^2\nu\right)\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+3)(4k+1)+(4k+3)(4k+2)^2(4k+1)\right)}}\right)$$
$$\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{4k+3}\Omega^{2k}}{\prod_{k=1}^{k}\left(A-B(4k+3)(4k+1)+(4k+3)(4k+2)^2(4k+1)\right)}\right)$$

EK B

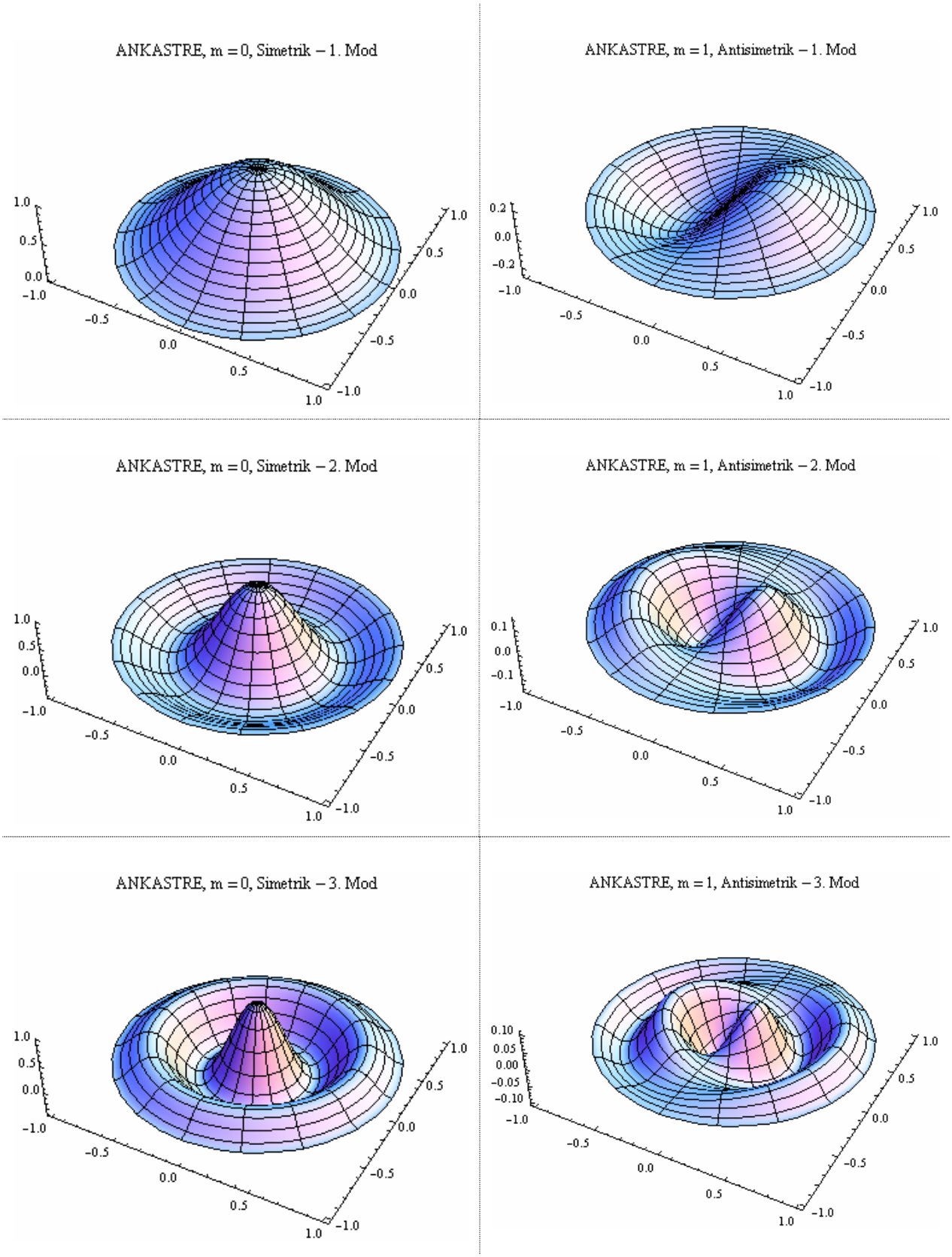
Tablo B.1 : Farklı sınır koşullarında dairesel plakanın boyutsuz doğal frekansları

Sınır Koşulları	Boyutsuz doğal frekans, Ω		Nodal çap sayısı, m					
			0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Basit Mesnetli		DTM	4,9351	13,8982	25,613	39,9573	56,8416	76,203
	Ω_1	Ref. [3]	4,977	13,94	25,65	-	-	-
		Ref. [16]	4,935	13,898	25,613	39,957	56,842	76,203
		DTM	29,72	48,4789	70,117	94,5489	121,7023	151,518
	Ω_2	Ref. [3]	29,76	48,51	70,14	-	-	-
		Ref. [16]	29,72	48,479	70,117	94,549	121,702	151,518
		DTM	74,1561	102,7733	134,2978	168,6749	205,851	245,778
	Ω_3	Ref. [3]	74,2	102,8	134,33	-	-	-
		Ref. [16]	74,156	102,772	134,298	168,675	205,851	245,778
		DTM	138,3181	176,8012	218,2026	262,4847	309,6073	359,5315
	Ω_4	Ref. [3]	138,34	176,84	218,24	-	-	-
		Ref. [16]	138,318	176,801	218,203	262,485	309,607	359,532
		DTM	222,215	270,566	321,8408	376,012	433,0487	492,9189
	Ω_5	Ref. [3]	-	-	-	-	-	-
		Ref. [16]	222,215	270,566	321,841	376,012	433,049	492,919
Ankastre		DTM	10,2158	21,2604	34,877	51,03	69,6658	90,7389
	Ω_1	Ref. [3]	10,2158	21,26	34,88	51,04	69,6659	90,739
		Ref. [16]	10,216	21,26	34,877	51,03	69,666	90,739
		DTM	39,7711	60,8287	84,5826	111,021	140,1079	171,8029
	Ω_2	Ref. [3]	39,771	60,82	84,58	111,01	140,1079	171,8029
		Ref. [16]	39,771	60,829	84,583	111,021	140,108	171,803
		DTM	89,1041	120,0792	153,815	190,3037	229,5185	271,428
	Ω_3	Ref. [3]	89,104	120,08	153,81	190,3	229,5186	271,4283
		Ref. [16]	89,104	120,079	153,815	190,304	229519	271,428
		DTM	158,1842	199,0533	242,7205	289,1798	338,4112	390,389
	Ω_4	Ref. [3]	158,183	199,06	242,71	289,170	338,4113	390,3896
		Ref. [16]	158,184	199,053	242,721	289,180	338,411	390,389
		DTM	247,0064	297,76	351,3359	407,7294	466,925	528,902
	Ω_5	Ref. [3]	247,005	297,77	351,38	407,720	-	-
		Ref. [16]	247,006	297,76	351,336	407,730	466,925	528,902
Serbest	Ω_1	DTM	9,0031	20,4746	5,3583	12,439	21,8352	33,4949
		Ref. [16]	9,003	20,475	5,358	12,439	21,835	33,495
	Ω_2	DTM	38,4432	59,8116	35,2601	53,0078	73,5426	96,7554
		Ref. [16]	38,443	59,812	35,26	53,008	73,543	96,755
	Ω_3	DTM	87,7052	118,9573	84,3662	111,945	142,431	175,735
		Ref. [16]	87,75	118,957	84,366	111,945	142,431	175,735
	Ω_4	DTM	156,8183	197,8718	153,306	190,692	231,03	274,252
		Ref. [16]	156,818	197,872	153,306	190,692	231,03	274,252
	Ω_5	DTM	245,6335	296,54	242,036	289,238	339,413	392,505
		Ref. [16]	245,634	296,54	242,036	289,238	339,413	392,505

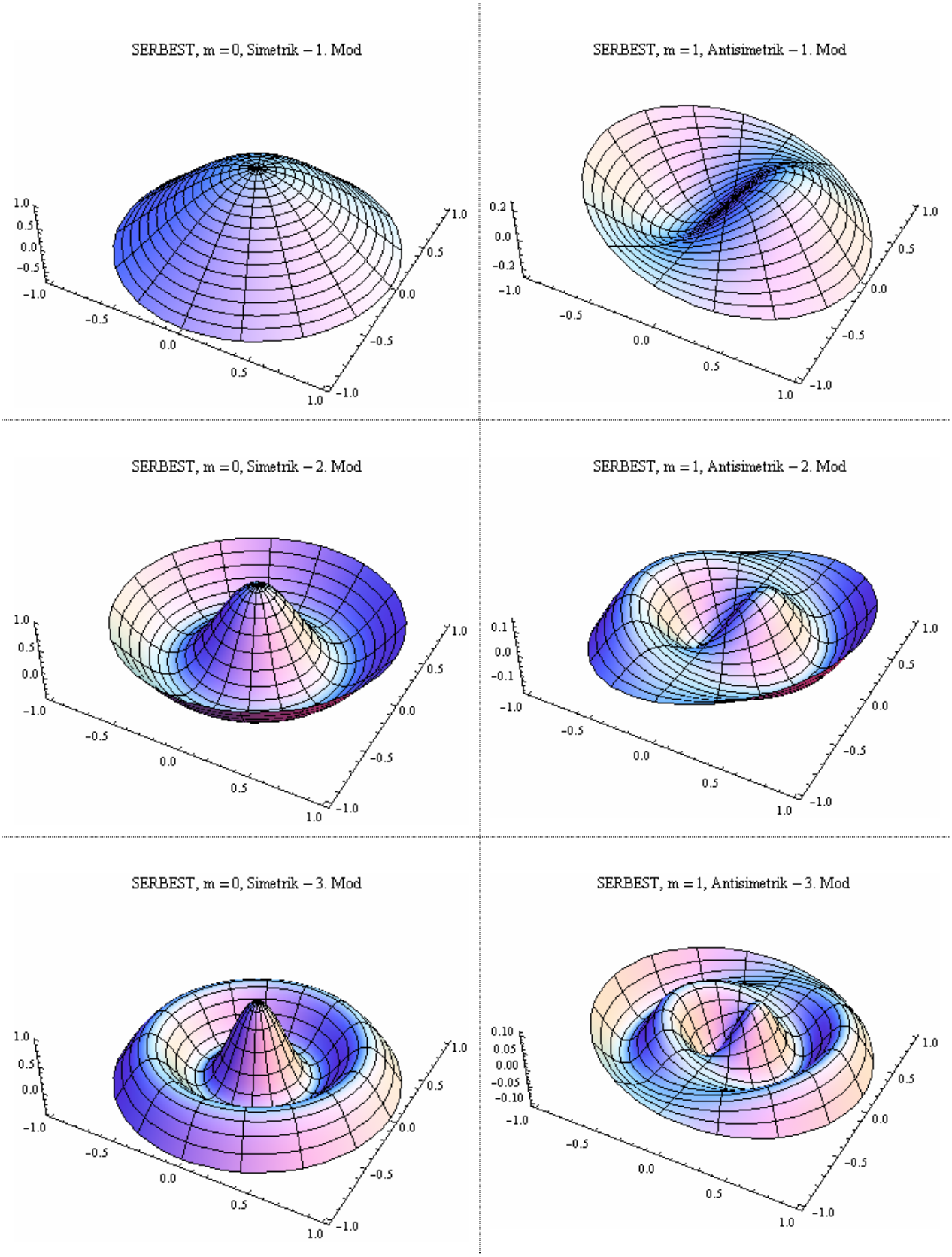
EK C



Şekil C.1 : Basit mesnetli dairesel plakanın ilk üç mod şekli (m=0 ve m=1)



Şekil C.2 : Ankastre dairesel plakanın ilk üç mod şekli (m=0 ve m=1)



Şekil C.3 : Serbest dairesel plakanın ilk üç mod şekli (m=0 ve m=1)

ÖZGEÇMİŞ

Hasan Serter Yalçın 1982 yılında Eskişehir'de doğdu. 2000 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Uçak Mühendisliği programında lisans öğrenimine başladı. 2005 yılında lisans programını tamamlamasının ardından yüksek lisans eğitimine İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Disiplinler Arası Anabilim Dalı Uçak ve Uzay Mühendisliği programında başladı. 2006 yılından beri özel bir şirkette ürün geliştirme mühendisi olarak çalışmaktadır.