İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

VEKTÖR TİPİ GÜRSEY MODELİ VE MODELİN RENORMALİZASYON GRUBU ANALİZİ

DOKTORA TEZİ

Y. Fiz. Ferhat TAŞKIN

Anabilim Dalı : **FİZİK MÜHENDİSLİĞİ**

Programı : **FİZİK MÜHENDİSLİĞİ**

ARALIK 2007

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

VEKTÖR TİPİ GÜRSEY MODELİ VE MODELİN RENORMALİZASYON GRUBU ANALİZİ

DOKTORA TEZİ

Y. Fiz. Ferhat TAŞKIN

(509022056)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 3 Ekim 2007

Tezin Savunulduğu Tarih : 17 Aralık 2007

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mahmut HORTAÇSU

Diğer Jüri Üyeleri Prof. Dr. Ayşe H. BİLGE (İ.T.Ü.)

Prof. Dr. Neşe ÖZDEMİR (İ.T.Ü.)

Prof. Dr. Ömer OĞUZ (B.Ü.)

Prof. Dr. Haluk BEKER (B.Ü.)

ARALIK 2007

ÖNSÖZ

Tez çalışmamda maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen danışman hocam değerli bilim adamı sayın Prof.Dr. Mahmut HORTAÇSU'ya sonsuz teşekkür ederim. Ayrıca tez izleme komitesi üyeleri değerli hocalarım Prof.Dr. Ayşe H. BİLGE ve Prof.Dr. Neşe ÖZDEMİR'e bilimsel katkılarından dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

Tezin her aşamasında maddi, manevi ve bilimsel katkılarından dolayı bilimsel kardeşlerim ve meslektaşım Arş.Gör. Bekir Can LÜTFÜOĞLU'na, değerli bilimsel yorumları nedeniyle Doç.Dr. Kayhan ÜLKER'e ve Arş.Gör. Tolga BİRKANDAN'a teşekkür ederim.

Ayrıca doktora tez çalışmalarım sırasında bana her zaman anlayış ve sabır gösterip destek olan kıymetli eşim Birsen TAŞKIN'a teşekkürü bir borç bilirim.

Maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen ve bugünlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme sonsuz teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında bana gerekli çalışma ortamını sağlayan İTÜ Fizik Bölümüne, değerli hocalarıma ve meslektaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Aralık 2007 Ferhat TAŞKIN

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR **v**
ŞEKİLLER LİSTESİ **vi**
SEMBOL LİSTESİ **ix**
ÖZET **xi**
SUMMARY **xii**

1. GİRİŞ **1**

2. VEKTÖR TİPİ GÜRSEY MODELİ **5**
2.1. Modellerin Simetri Özellikleri 6
2.1.1. Eşdeğer Modelin Simetrisi 6
2.1.2. BRST Benzeri Simetri 6
2.2. Bağ Analizi 7
2.3. Fonksiyonel İntegral Kuantizasyonu 13
2.4. Propagatörler 15
2.4.1. Spinör Alan Propagatörü 15
2.4.2. Kompozit Vektör Alan Propagatörü 15
2.5. Schwinger-Dyson Denklemi 18
2.5.1. Spinör Propagatorü İçin SD Denklemi 18
2.5.2. Kompozit Vektör Alan İçin SD Denklemi 20
2.6. Etkileşmeler 21
2.6.1. Spinör-Vektör Alan Etkileşmesi 21
2.6.2. Yüksek Mertebeden Spinör-Vektör Alan Etkileşmesi 24
2.6.3. Dörtlü Vektör Alan Etkileşmesi 25
2.6.4. Yüksek Mertebeden Dörtlü Vektör Alan Etkileşmesi 25
2.6.5. Spinör Saçılması 27
2.7. RG Denklemi 29
2.8. Sonuç 29

3. SKALER ALAN EKLENMİŞ MODEL **30**
3.1. Bağ Analizi 30
3.2. Fonksiyonel İntegral Kuantizasyonu 34
3.3. Propagatörler 35
3.3.1. Skaler Alan Propagatörü 36
3.3.2. Kompozit Vektör Alan Propagatörü 36
3.4. Etkileşmeler 36
3.4.1. Spinör-Vektör Alan Etkileşmesi 37
3.4.2. Spinör-Skaler Alan Etkileşmesi 38
3.4.3. İkinci Mertebeden Halka Köşe Düzeltmeleri 39
3.4.4. Birinci Mertebeden Halka Kutu Düzeltmeleri 40

3.4.5. Kutu Etkileşmelerinin İkinci Mertebeden Halka Düzeltmeleri 43
3.4.6. Kutu Etkileşmelerinin Üçüncü Mertebeden Halka Düzeltmeleri 44
3.5. Üçgen Etkileşme Diyagramları 46
3.6. Spinör Saçılması 47
3.6.1. Spinör Üretimi 47
3.6.2. Çoklu Saçılmalar 48
3.7. Propagatörler ve Düzeltmeleri 49
3.8. RG Denklemleri ve Çözümleri 50
3.9. Trivial Olmayan Teori Arayışları 52
3.10. Sonuç 53

4. AYAR ALAN EKLENMİŞ MODEL VE RENORMALİZASYON GRUBU ANALİZİ 54
4.1. Model 54
4.2. RG Denklemleri ve Çözümleri 55
4.3. Bazı Limitler 59
4.3.1. A $\to +0$ Limiti 60
4.3.2. A $\to C$ Limiti 60
4.3.3. A $\to 2C$ Limiti 61
4.4. Trivial Olmayan Modelin İncelenmesi 61
4.4.1. Sabit Nokta Çözümleri 62
4.4.2. Yukawa Etkileşme Sabiti 63
4.4.3. Kompozit Vektör Alan Etkileşme Sabiti 64
4.4.4. Dörtlü Skaler Alan Etkileşme Sabiti 64
4.5. Sonuç 65

5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA 67

KAYNAKLAR 70

EKLER 74

A. DİRAC MATRİSLERİ 74

B. İNTEGRAL TABLOSU 75

ÖZGEÇMİŞ 77

KISALTMALAR

gHY	:	Gauge Higgs-Yukawa
gNJL	:	Ayarlanmış Nambu Jona-Lasinio
KED	:	Kuantum Elektrodinamiği
KRD	:	Kuantum Renkdinamiği
NJL	:	Nambu Jona-Lasinio
RG	:	Renormalizasyon Grup
SD	:	Schwinger-Dyson

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1 : Giydirilmiş Spinör Alan Propagatörü İçin SD Diyagramı. . . . 19
Şekil 2.2 : Giydirilmiş Kompozit Vektör Alan İçin SD Diyagramı. 20
Şekil 2.3 : Giydirilmiş Spinör-Vektör Alan Etkileşmesinin Birinci Mertebeden Halka Diyagramı. 21
Şekil 2.4 : Spinör-Vektör Alan İçin (a) İkinci Mertebeden Halka (b) Üçüncü Mertebeden Halka (c) Yüksek Mertebeden Halka Etkileşme Diyagramları. 24
Şekil 2.5 : Üçgen Spinör-Vektör Alan Etkileşme Diyagramı. 25
Şekil 2.6 : Giydirilmiş Dörtlü Vektör Alanı Birinci Mertebeden Halka Diyagramı. 25
Şekil 2.7 : Dörtlü Vektör Alan Etkileşmesi İçin (a) İkinci Mertebeden Halka (b) Üçüncü Mertebeden Halka Diyagramları. 26
Şekil 2.8 : Yüksek Mertebeden Spinör Kutu Etkileşme Diyagramı. 26
Şekil 2.9 : Üç Halka Spinör Kutu Etkileşme Diyagramı. 26
Şekil 2.10 : İki Vektör Parçacığın Çift Sayıda Vektör Parçacık Oluşturma Diyagramı. 27
Şekil 2.11 : Dört Spinörün Bir Vektör Alanla Etkileşme Diyagramı. 27
Şekil 2.12 : Dört Spinör İki Vektör Etkileşme Diyagramı. 27
Şekil 2.13 : Bethe-Salpeter Denkleminin Diyagramı. 28
Şekil 2.14 : Spinör Kutu Etkileşmesinden Spinör Üretim Diyagramı. . . . 28
Şekil 3.1 : Giydirilmiş Spinör-Vektör Alan Etkileşmesinin Birinci Mertebeden Halka Diyagramı. 37
Şekil 3.2 : Giydirilmiş Spinör-Skaler Alan Etkileşmesinin Birinci Mertebeden Halka Diyagramı. 38
Şekil 3.3 : Spinör-Vektör Alan Etkileşmesi İçin İkinci Mertebeden Halka Düzeltmeleri. 40
Şekil 3.4 : Spinör-Skaler Alan Etkileşmesi İçin İkinci Mertebeden Halka Düzeltmeleri. 40
Şekil 3.5 : Giydirilmiş Dörtlü Vektör Alan İçin Birinci ve İkinci Mertebeden Halka Düzeltmeleri. 40
Şekil 3.6 : Giydirilmiş Dörtlü Skaler Alan İçin Birinci ve İkinci Mertebeden Halka Düzeltmeleri. 41
Şekil 3.7 : İki Skaler İki Vektör Alan Etkileşmesinde (a) Skaler Alan Düzeltmesi (b) Vektör Alan Düzeltmesi (c) Köşe Skaler Alan Düzeltmesi (d) Köşe Vektör Alan Düzeltmesi. 43
Şekil 3.8 : Dörtlü Vektör Alan Etkileşmesinde (a) Vektör Alan Düzeltmesi (b) Skaler Alan Düzeltmesi (c) Köşe Vektör Alan Düzeltmesi (d) Köşe Skaler Alan Düzeltmesi. 43

Şekil 3.9 : Dörtlü Skaler Alan Etkileşmesinde (a) Skaler Alan Düzeltmesi (b) Vektör Alan Düzeltmesi (c) Köşe Skaler Alan Düzeltmesi (d) Köşe Vektör Düzeltmesi. 43
Şekil 3.10 : Dörtlü Vektör Alan Etkileşmesi İçin Üç Halkada (a) İki Vektör Alan Düzeltmesi (b) Vektör Ve Skaler Alan Düzeltmesi (c) İki Skaler Alan Düzeltmesi. 44
Şekil 3.11 : İki Skaler İki Vektör Alan Etkileşmesi İçin Üç Halkada (a) İki Skaler Alan Düzeltmesi (b) Skaler Ve Vektör Alan Düzeltmesi (c) İki Vektör Alan Düzeltmesi. 44
Şekil 3.12 : Dörtlü Skaler Alan Etkileşmesi İçin Üçüncü Mertebeden Halkada (a) İki Vektör Alan Düzeltmesi (b) Skaler Ve Vektör Alan Düzeltmesi (c) İki Skaler Alan Düzeltmesi. 45
Şekil 3.13 : Dörtlü Skaler Alan Etkileşmesi İçin Üçüncü Mertebeden Halkada (a) İki Skaler Kanalla Düzeltme (b) Vektör Ve Skaler Kanalla Düzeltme (c) İki Vektör Kanalla Düzeltme. 45
Şekil 3.14 : İki Skaler İki Vektör Alan Etkileşmesi İçin Üçüncü Mertebeden Halkada (a) İki Skaler Kanalla Düzeltme (b) Vektör Ve Skaler Kanalla Düzeltme (c) İki Vektör Kanalla Düzeltme. 45
Şekil 3.15 : Dörtlü Vektör Alan Etkileşmesi İçin Üçüncü Mertebeden Halkada (a) İki Vektör Kanalla Düzeltme (b) Vektör Ve Skaler Kanalla Düzeltme. 46
Şekil 3.16 : Üçgen Etkileşmeleri (a) Üç Skaler Alan (b) İki Skaler Bir Vektör Alan (c) İki Vektör Bir Skaler Alan (d) Üç Vektör Alan. 46
Şekil 3.17 : Dörtlü Spinör Alan Etkileşmesi İçin Ağaç Diyagramları (a) Vektör Alan Kanalıyla Etkileşme (b) Skaler Alan Kanalıyla Etkileşme. 47
Şekil 3.18 : Dört Spinör Alanın Birinci Mertebeden Halka Etkileşmeleri (a) İki Vektör Alan Kanalıyla (b) Vektör Ve Skaler Alan Kanalıyla (c) İki Skaler Alan Kanalıyla. 47
Şekil 3.19 : İki Vektör Alandan Dört Spinör Alan Üretimi (a) İki Vektör Alan Yardımıyla (b) Skaler Ve Vektör Alan Yardımıyla (c) İki Skaler Yardımıyla. 48
Şekil 3.20 : İki Skaler Alandan Dört Spinör Alan Üretimi (a) İki Skaler Alan Yardımıyla (b) Skaler Ve Vektör Alan Yardımıyla (c) İki Vektör Alan Yardımıyla. 48
Şekil 3.21 : Farklı Spinör Alan Üretim Yollarından Bazıları (a) İki Vektör Alan Ve Başka Bir Vektör Alan Yardımıyla (b) İki Vektör Alan Ve Bir Skaler Alan Yardımıyla, (c) İki Skaler Alan Ve Başka Bir Skaler Alan Yardımıyla, (d) İki Skaler Alan Ve Başka Bir Vektör Alan Yardımıyla. 48
Şekil 3.22 : (a) İki Vektör Alandan Çift Sayıda Vektör Alan Üretimi, (b) İki Skaler Alandan Çift Sayıda Vektör Alan Üretimi (c) İki Skaler Alandan Çift Sayıda Skaler Alan Üretimi (d) İki Vektör Alandan Çift Sayıda Skaler Alan Üretimi. 49
Şekil 3.23 : (a) Vektör Alan İçin (b) Skaler Alan İçin Öz Enerji Diyagramları 49

Şekil 3.24 : Vektör Alan Propagatörü İçin Öz Enerji Diyagram Düzeltmeleri (a) Vektör Alan Katkısı (b) Skaler Alan Katkısı (c) İki Vektör Alan Katkısı (d) Skaler Ve Vektör Alan Katkısı (e) İki Skaler Alan Katkısı. 49
Şekil 3.25 : Skaler Alan Propagatörü İçin Öz Enerji Diyagram Düzeltmeleri (a) Skaler Alan Katkısı (b) Vektör Alan Katkısı (c) İki Skaler Alan Katkısı (d) Skaler Ve Vektör Alan Katkısı (e) İki Vektör Alan Katkısı. 50
Şekil 3.26 : RG denklemleri İçin (a) Skaler Alana Skaler Alan Düzeltmesi, (b) Vektör Alana Skaler Alan Düzeltmesi, (c) Skaler Alan Birinci Mertebeden Halka Düzeltmesi, (d) Skaler Alan Kutu Düzeltmesi. 51
Şekil 4.1 : Farklı H_0 Değerleri İçin $y^2(t)$'nin $g^2(t)$'ye Göre Grafiği. Oklar Morötesine Doğru Akışı Göstermektedir. 63
Şekil 4.2 : Kompozit Vektör Alan Etkileşme Sabitinin Yukawa Etkileşme Sabitine Göre $H_0 > 0$ ve $P_0 < 0$ Değerleri İçin Grafiği. 64
Şekil 4.3 : Dörtlü Skaler Alan Etkileşme Sabitinin Yukawa Etkileşme Sabitine Göre $H_0 > 0$ ve $K_0 = 0$ Değerleri İçin Grafiği. 65

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbf{A,B,C,D,E,F,G}$	:	Sonsuzluk içeren etkileşmelerin katsayıları
$\mathbf{C_{ij}}$	:	İkinci sınıf bağların oluşturduğu matris
$\mathbf{C_2(R)}$	:	İkinci Casimir
$\mathbf{D}_\mu$	:	Kovaryant renk türevi
$\mathbf{\Delta}_F$	:	Faddeev-Popov determinantı
$\mathbf{\Delta}_{\mu\nu}(p)$	:	Vektör alan propagatörü
$\mathbf{e,\ y,\ a,\ g}$	:	Etkileşme sabitleri
$\boldsymbol{\varepsilon}$	:	Boyut düzeltme parametresi
$\boldsymbol{\phi}$	:	Skaler alan
$\mathbf{G(p)}$	:	Skaler alan propagatörü
$\boldsymbol{G}_\mu$,$\boldsymbol{\lambda}_\mu$	:	Yardımcı vektör alanlar
$\boldsymbol{\gamma}^\mu$	:	Gamma matrisleri
$\mathscr{H}_\mathbf{k}$	:	Kanonik Hamilton fonksiyonu
$\mathscr{H}_\mathbf{e}$	:	Etkin Hamilton fonksiyonu
$\mathbf{H(t),\ P(t),\ K(t)}$	:	Renormalizasyon grubu sabitleri
$\mathbf{J}_\mu$	:	Kompozit vektör alan
$\mathscr{L}$, $\mathbf{L}$	:	Lagrange fonksiyonu
$\mathscr{L}_\mathbf{etkin}$	:	Etkin Lagrange fonksiyonu
$\mathbf{m}$	:	Kütle
$\boldsymbol{N}_C$	:	Fermiyon renk sayısı
$\boldsymbol{n}_f$, $\boldsymbol{N}_f$	:	Fermiyon çeşni sayısı
$\mathbf{N}_\mu$	:	Vektör alan
$\mathbf{S_{etkin}}$	:	Etkin eylem
$\mathbf{S(p)}$	:	Spinör alan propagatörü
$\overline{\boldsymbol{\psi}}$, $\boldsymbol{\psi}$	:	Spinör alanlar
$\boldsymbol{\theta}_m$	:	Bağlar
$\boldsymbol{\pi}$, $\overline{\boldsymbol{\pi}}$, $\boldsymbol{\rho}_\mu$, $\boldsymbol{\alpha}_\mu$, $\boldsymbol{\kappa}$	:	Momentumlar
$\mathbf{U(1),\ SU(N)}$	:	Alanların grupları
$\mathscr{Z}$	:	Bölüşüm fonksiyonu

VEKTÖR TİPİ GÜRSEY MODELİ VE MODELİN RENORMALİZASYON GRUBU ANALİZİ

ÖZET

Fermiyonlar doğanın vazgeçilmez yapıtaşlarıdır. Sadece Fermiyonları kullanarak doğayı açıklayan bir model oluşturmak hep tekrar eden bir fikirdir. Bu modellerde fermiyon özellikli elektronlar bozonları oluşturmak için bir araya getirilmiştir. Heisenberg sadece fermiyonları kullanarak "Herşeyin Teorisi"ni yapmak için yıllarca çalışmıştır. Bu doğrultuda başka bir deneme de Gürsey'in çalışmasıdır. Bu çalışmada, polinom formunda olmayan Lagrange fonksiyonu kendi kendine etkileşen spinörleri tanımlamak için yazılmıştır. Bu spinör model, klasik olarak konformal değişmez ve ayrıca klasik çözümlere sahip olması nedeniyle önemlidir. Gürsey modeli skaler, pseodoskaler ve pseodovektör tipi etkileşmeler için de genelleştirilebilir.

Kortel bu model için sonradan instantonik ve mezonik çözümler olduğu gösterilen çözümler bulmuştur. Bu çözümler dört boyutta saf Yang-Mills teorisinin çözümleriyle benzerlik göstermektedir. Bir süre önce, Akdeniz ve diğerleri tarafından vektör tipi Gürsey modeline eşdeğer polinom formunda Lagrange fonksiyonu yazılması ve kuantize edilmesi için bir kaç çalışma ile yapılmıştır. Oluşturulan bağlı polinom formunda Lagrange fonksiyonlu model ile orjinal vektör tipi Gürsey modelinin farklı simetrilere sahip olmaları nedeniyle bu iki modelin eşdeğer olmadığı görülmüştür. Modelde, temel alanların birbirleriyle saçılmaları cut-off kaldırıldığında sıfır olmakta, kompozit alanların birbirleriyle saçılmaları sonlu kalmaktadır. Ayrıca, kompozit alanlarla spinör alanların etkileşmeleri sıfır saçılma genliğine sahiptir. Sonuç olarak kompozit spinör alanlar için sonlu renormalizasyona sahip bir model elde edilmiştir.

Trivial olmayan bir model elde edilip edilmeyeceğini görmek için Bardeen ve diğerlerinin çalışmalarına benzer olarak modele skaler alan eklenmiştir ve polinom formundaki modele ait bazı özelliklerin değiştiği görülmüştür. Yeni modelde spinörler saçılabilmektedir ve bazı etkileşmelerin sonsuz renormalizasyona ihtiyacı vardır. Renormalizasyon grubu analiz yöntemleri kullanılarak renormalizasyon grubu denklemleri oluşturulmuş ve etkileşme sabitleri elde edildiğinde, kuantum elektrodinamiğinde çok iyi bilinen "Landau Kutbu" problemi ile karşılaşılmıştır. Sonuç olarak trivial bir model elde edilmiştir.

Landau kutbu problemini kaldırmak için modele abelyen olmayan $SU(N)$ ayar alanı eklenmiştir. Oluşturulan modelde bazı saçılmaların sonsuzluk içerdiği kuantum renk dinamiğinden bilinmektedir. Renormalizasyon grubu analiz yöntemleri kullanılarak birinci mertebede, bir halka yaklaştırması için renormalizasyon grubu denklemleri çıkartılmıştır ve etkileşme sabitlerinin çözümleri elde edilmiştir. Belirli limitler altında etkileşme sabitlerinin davranışları çalışılmıştır. Etkileşme sabitleri için sıfırdan farklı sabit nokta

çözümleri bulunmuştur ve morötesi bölgede akış grafikleri çizilmiştir. Sonuç olarak, belirli şartlar altında trivial olmayan bir model edilmiştir.

VECTOR TYPE GÜRSEY MODEL AND ITS RENORMALIZATION GROUP ANALYSIS

SUMMARY

Fermions are essential ingredients in nature. It is an ever repeating idea to build a model of nature using only fermions, where all the observed bosons are constructed as composites of these entities. In these models electrons, fermions in character, come together to form bosons. Heisenberg spent years to formulate a "Theory of Everything" using only fermions. Another attempt in this direction came with the work of Gürsey where a non-polynomial Lagrangian was written to describe self-interacting spinors. This model is important since it is conformally invariant classically and has classical solutions. Gürsey's model can be generalized to include scalar, pseudoscalar and pseudovector interactions.

Kortel found solutions to this model which were shown to be instantonic and meronic solutions later. These solutions are similar to the solutions of pure Yang-Mills theories in four dimensions. Akdeniz et al. made same work to write an equivalent polynomial Lagrangian form of the vector type Gürsey model and to quantize this model a while ago. It is seen that the constrained model, which has polynomial Lagrangian, is not equivalent to the original one since the two models have different symmetries. In the model, the scattering of constituent fields goes to zero when the cut-off is removed and the scattering of composite fields is finite. Moreover, composite fields and spinor fields interactions have zero cross section. As a result, for the composite fields one obtains a model which has finite renormalization.

To see whether one gets a non-trivial model, a scalar field is added to the model, similar to the work of Bardeen et al. and it is seen that some properties of the previous model are changed. In the new model, spinors can scatter from each other and some interactions need infinite renormalization. Using renormalization group analysis techniques the renormalization group equations are constructed. When the renormalization group equations are solved, one encounters the "Landau Pole" problem which is well known in quantum electro dynamics. As a result, a trivial model is found.

To get rid of the Landau pole problem, a non-abelian $SU(N)$ gauge field is added the model. It is known from quantum chromodynamics that in the constructed model some scattering amplitudes need infinite renormalization. Using renormalization group analysis techniques the renormalization group equations are constructed for one loop and solutions are found. Under certain limits, behaviors of the coupling constants are studied. The fixed point solutions for coupling constants are found and flow graphs are plotted in the ultraviolet region. As a result, under certain conditions, a non-trivial model is found.

1. GİRİŞ

Trivial olmayan bir alan teorisi elde etmek teorik yüksek enerji fiziğinin önünde duran önemli bir problemdir. Pertürbatif açılımlar bir modelin trivial olup olmadığı konusunda karar vermek için kullanılan tek yöntem değildir ve alternatif yöntemler popüler çalışma alanları oluşturmaya başlamıştır. İlk kez Wilson ve Kogut [1] tarafından tanımlanan renormalizasyon grubu (RG) metodu ise en çok kullanılan yöntemlerden biridir. Diğer bir yöntem ise Polchinski [2] tarafından önerilen tam (exact) RG yöntemidir. Yeni çalışmalar her iki yöntemde de önemli gelişmeler sağlamıştır [3–5].

Son otuz yıl içerisinde, "cut-off" u sonsuz olmayan ve efektif teori olarak yorumlanan trivial modellerin anlaşılabilmesi için birçok çalışma yapılmıştır. Dört boyutta pertürbatif olarak trivial olmayan ϕ^4 teorisinin cut-off kaldırıldığında serbest teoriye gittiği gösterilmiştir [6, 7] ve bu konudaki çalışmalar hala devam etmektedir [8]. Pertürbatif olarak trivial olmayan Nambu-Jona-Lasinio (NJL) modelinin [9] trivial modele gittiği gösterilmiştir [10, 11]. NJL modelinin özelliği etkileşme sabitinin morötesi cut-off'un negatif logaritmik kuvveti olarak sıfıra gitmesi ve etkin modelin düşük enerjiye sahip olmasıdır. NJL modelinden trivial olmayan bir alan teorisi elde edebilmek için ayar alanı ile NJL modelini birleştirme çabaları olmuştur. Oluşturulan modele ayarlanmış NJL (gNJL) modeli [12, 13] adı verilmiştir. Bu çalışmalar elinizde yeteri kadar fermiyon çeşnisi varsa trivial olmayan bir alan teorisi elde edilebileceğini göstermiştir [14, 15]. Ayrıca değişik çalışmalarda RG yöntemleri kullanılarak gNJL modelinin trivial olmayan teoriye gittiği gösterilmiştir [16–20].

Diğer taraftan, sonsuz sayıda yerel ve yerel olmayan yüklere sahip iki boyutlu modeller de vardır [21, 22]. Bu modellerin saçılma matrislerinin birden farklı oldukları, ancak yeni parçacık üretmeyip, sadece iki parçacığın iki parçacığa saçıldığı gösterilmiştir [23, 24].

Diğer sınıf modellerde, Lagrange fonksiyonlarında sıfırdan farklı etkileşme terimine sahip gözükmelerine rağmen, temel alanlar sıfır saçılma genliğine sahiptir. Bu etkileşmeler bağlardan kaynaklanmaktadır ve modellerde temel alanlar ile kompozit alanların etkileşmeleri tanımlanmıştır. Modellerin Lagrange fonksiyonu sadece temel spinör alanların kinetik terimini içerir ve kompozit alanların kinetik terimleri kompozitlerin temel alanlarla etkileşiminden kaynaklanan vakum polarizasyonlarının sonucu olarak elde edilir. Bu tip modeller sadece spinörlerden oluşan modellere benzemektedir.

Sadece fermiyonları kullanarak doğayı açıklayan modellerde bozonlar da fermiyonların karışımı olarak yapılandırılmaktadır. Örneğin katıhal fiziğinde elektronların bozonik parçacıklar oluşturmak için kullanıldığı teoriye Bardeen-Cooper-Schrieffer teorisi denir [25, 26]. Heisenberg sadece fermiyonları kullanarak "Herşeyin Teorisi"ni yapmak için yıllarca çalışmıştır [27]. Bu doğrultuda başka bir deneme de Feza Gürsey'in çalışmasıdır [28]. Bu çalışmada, polinom formunda olmayan Lagrange fonksiyonu kendi kendine etkileşen spinörleri tanımlamak için yazılmıştır. Bu spinör model kalsik olarak konformal değişmezliği ve klasik çözümlere sahip olması nedeniyle önemlidir. Fikret Kortel bu model için çözümler bulmuştur [29] ve sonradan bunların instantonik ve mezonik çözümler olduğu gösterilmiştir [30]. Ayrıca bulunan çözümler dört boyutta saf Yang-Mills teorisinin çözümleriyle benzerlik göstermektedir [31–33]. Gürsey modeli skaler, pseodoskaler ve pseodovektör etkileşmeler için de genelleştirilebilir.

1980'li yılların başında Akdeniz ve arkadaşları tarafından vektör tipi Gürsey modeline eşdeğer polinom formunda Lagrange fonksiyonu yazılması ve kuantize edilmesi için bir kaç çalışma yapılmıştır [34, 35]. Kuantizasyon için kullanılan yöntem skaler Gürsey model ile aynıdır [36], fakat bazı temel farklılıklar vardır. Örneğin vektör modelde spinörler renormalize edilebilirliği bozmadan kütle terimi eklenebilir ve vakum polarizasyonu renormalizasyon çerçevesinden bağımsızdır. Ayrıca giren ve çıkan spinörleri içeren birkaç süreç hesaplanmıştır, sonuç saf kuark modeli sonuçları ile aynıdır [37]. Çalışmalar sırasında oluşturulan modellerin sadece "naive" olarak orijinal spinör modele eşit olduğu görülmüştür.

Sonuç olarak, cut-off kaldırılıp kuantizasyon yapılsa dahi modelin trivial olduğu bulunmuştur.

Makalelerde [34–37] oluşturulan modellerin bazılarında spinör-spinör etkileşmesinin sıfıra gittiği, iki kompozit alanın birbirleriyle saçılabileceği ve sonlu değerle kompozit parçacık oluşturabileceği gösterilmiştir. Temel spinörler için modelin sadece asimptotik serbest olmadığı, aslında serbest olduğu, yani etkileşme sabitinin cut-off kaldırıldığında sıfıra gittiği görülmüştür ve bu alanlar için herhangi bir etkileşme teorisini veren fiziksel bir sonuç bulunamamıştır. Bu sonuçlar Gürsey modelini ilginç kılmaktadır. Bu çalışmada "vektör tipi Gürsey modelinden trivial olmayan bir teori elde edilebilir mi?" sorusuna cevap aramaya çalışılacaktır.

Tezin ikinci bölümünde, vektör tipi Gürsey modeli ile polinom formundaki Lagrange fonksiyonunun simetriler yardımıyla eşdeğerliliği araştırılmış ve modellerin birbirlerine tam olarak benzemediği görülmüştür. Eşdeğer Lagrange fonksiyonu için bağ analizi yapılmış ve kuantizasyonu için yol integralleri yöntemi kullanılmıştır. Kuantizasyondan sonra yardımcı alanların bazıları dinamik karakter kazanmıştır. Bunun nedeni spinör halkalarının sebep olduğu vakum polarizasyonlarıdır. Eğer modeldeki spinör etkileşmeleri vektör tipi seçilirse [36] dinamik olarak üretilen bozonlar abelyen olmayan ayar bozonları ile birçok benzerlik gösterir. Ayrıca modelin etkileşme kısımlarında türevler de kullanılabilir [38]. Bu çalışmada abelyen durum incelenmiştir. Etkileşme teriminde türevlere yer verilmeyecektir.

Etkin eylem yardımıyla alanlar için propagatör fonksiyonları hesaplanmıştır. Propagatöre yüksek mertebeden katkılar ve kütle üretimi için Schwinger-Dyson (SD) denklemi çözülmüştür. Bazı temel etkileşmelerin daha iyi anlaşılması için Bethe-Salpeter denklemi [39] incelenmiştir. Modeldeki bir halka saçılmalarının hesapları açık olarak yapılmıştır ve daha yüksek mertebeden saçılmalar için boyut analizi yöntemi kullanılmıştır. Ayrıca temel alanların saçılması cut-off kaldırıldığında sıfıra gitmektedir. Modelde renormalize edilmesi gereken bir saçılma bulunamamıştır ve model sonlu renormalizasyona sahiptir [40].

Tezin üçüncü bölümünde, trivial olmayan model arayışlarına modele kütlesiz gerçek skaler alan eklenerek devam edilmiştir. Oluşturulan yeni modeldeki değişiklikler ayrıntılı olarak araştırılmıştır. Motivasyonumuz Bardeen ve diğerleri [12, 13] tarafından yapılan çalışmalardır. Bu çalışmalarda NJL modeline vektör alan eklendiğinde ilginç sonuçlar elde edilmiştir. Modele skaler alan eklenmesiyle birlikte iki yeni etkileşme sabiti gelmektedir ve modeldeki etkileşme sabiti sayısı üçe çıkmıştır. Bazı saçılma sonuçlarında değişim gözlenmiştir. Örneğin skaler alanın varlığı nedeniyle spinör alanların saçılması mümkün olmaktadır. Modelde sonsuzluk içeren saçılmaların olması nedeniyle üç etkileşme sabitinin de renormalize edilmesi gerekmektedir ve bir halka için RG denklemleri oluşturulmuştur. RG denklem çözümleri elde edildiğinde kuantum elektrodinamiğinde (KED) çok iyi bilinen "Landau Kutbu" problemiyle karşılaşılmıştır [41]. Modele skaler alan eklenmesine rağmen trivial bir model elde edilmiştir. Modeldeki bu sorunun giderilmesi için 2. bölümde çalışılan modele değişik gruplarda skaler ve/veya vektör alanlar eklenmiştir ve altı tane yeni model oluşturulmuştur. Oluşturulan modellerin sadece bir tanesinin RG denklem çözümlerinden elde edilen etkileşme sabitlerinde Landau kutbu bulunmamaktadır.

Dördüncü bölümde, etkileşme sabitlerinde sonsuzluk içermeyen model, skaler alan ve abelyen olmayan $SU(N)$ alanı eklenen model, incelenmeye devam edilmiştir. Oluşturulan modeldeki bazı saçılmaların sonsuzluk içerdiği kuantum renk dinamiğinden (KRD) bilinmektedir. RG teknikleri kullanılarak modelin bir halka yaklaşımında RG denklemleri çıkartılmıştır. RG denklem çözümleri için RG akış yöntemi kullanılmıştır. RG denklemlerinin çözümleri üzerine belirli şartlar konulduğunda trivial olmayan model sonuçları verdiği görülmüştür. Etkileşme sabitlerin sıfırdan farklı sabit nokta çözümleri bulunmuş ve morötesi bölgede etkileşme sabitlerinin grafikleri çizilmiştir. Sonuç olarak, trivial olmayan bir model elde edilmiştir [41].

2. VEKTÖR TİPİ GÜRSEY MODELİ

Feza Gürsey tarafından 1956 yılında önerilmiş dört boyutta ve sadece spinörlerden oluşan Lagrange fonksiyonu aşağıdaki gibidir [28]

$$L = \overline{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - m\right)\psi + g\left(N_\mu N^\mu\right)^{2/3}, \quad N_\mu = \overline{\psi}\gamma_\mu\psi. \tag{2.1}$$

Denklemde γ_μ gamma matrislerini, ψ ve Dirac adjointi $\overline{\psi}$ yüklü alanları, m kütleyi ve g etkileşme sabitini temsil etmektedir. Bu modelin genel özelliği birinci mertebeden türev içeren tek mümkün klasik olarak konformal değişmez vektör model olmasıdır. Ayrıca modelin etkileşme terimi polinom formunda değildir, türevden bağımsızdır ve sadece boyutsuz etkileşme sabiti içermektedir.

Klasik olarak yazılan vektör tipi Gürsey modeli, kuantum alan teorisi bağlamında tam anlamıyla belirlenmiş değildir. Çünkü spinör alanı ψ için kompozit operatör $\left(N_\mu N^\mu\right)^{2/3}$ pertürbasyon teorisinde bulunmamaktadır. Bu nedenle modelin eşdeğer polinom formuna dönüştürülmesi gerekmektedir. Akdeniz ve diğerleri tarafından orijinal vektör modelin polinom formuna dönüştürülmesi için iki çalışma yapılmıştır [34, 35]. Modelin kuantizasyon işlemi yapılıncaya kadar ayar değişmezliğinin korunması için bir saf ayar terimi, $ig\partial\!\!\!/g^{-1}$ eklenmiştir ve model aşağıdaki hale gelmiştir.

$$L' = \overline{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - ig\partial\!\!\!/g^{-1} - m\right)\psi + g\left(N_\mu N^\mu\right)^{2/3}. \tag{2.2}$$

Makalelerde, yardımcı alanlar tanımlanarak polinom formunda Lagrange fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilmiştir

$$\mathscr{L} = \overline{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - ig\partial\!\!\!/g^{-1} - m\right)\psi + e\lambda_\mu\left(N^\mu - e^3 G^\mu G^2\right) + e\overline{\psi}G_\mu\gamma^\mu\psi. \tag{2.3}$$

Denklemde λ_μ, G_μ iki yardımcı vektör alan, e boyutsuz etkileşme sabiti ve $G^2 = G_\mu G^\mu$ olarak tanımlıdır. Lagrange fonksiyonunun orijinal Gürsey Lagrange fonksiyonuna eşitliği klasik olarak λ_μ ve G_μ alanlarının Euler-Lagrange hareket

denklemleri yardımıyla görülebilir. λ_μ ve G_μ alanları için hareket denklemleri

$$N^\mu - e^3 G^\mu G^2 = 0, \tag{2.4a}$$

$$N^\mu - e^3(\lambda^\mu G^2 + 2\lambda G G^\mu) = 0 \tag{2.4b}$$

olarak elde edilir ve denklemde $\lambda G = \lambda_\nu G^\nu$ olarak tanımlıdır. Aynı zamanda denklem (2.4)'de verilen hareket denklemleri polinom formundaki Lagrange fonksiyonu için bağlardır.

2.1 Modellerin Simetri Özellikleri

Bu bölümde modellerin simetrileri ve orijinal modelle polinom formundaki modelin eşdeğerliliği araştırılacaktır. Modellerin tüm simetri işlemleri altında değişmez kalması, modellerin eşdeğer olduğu anlamına gelmektedir.

2.1.1 Eşdeğer Modelin Simetrisi

Orijinal modelin kuantizasyon işleminden sonra etkin Lagrange fonksiyonunun Feynman kuralları standart ayar teorisi ile karşılaştırıldığında, tanım olarak hayalet alanlara ait propagatörlerinin sıfır olduğu görülür. Bu özellik orijinal modelde ayar değişmezliği olmadığı anlamına gelebilir. Fakat bu durum modele bir saf ayar terimi $g\partial\!\!\!/ g^{-1}$ eklenerek sağlanabilir ve modeli ayar değişmez yapar [35].

Denklem (2.3)'de verilen Lagrange fonksiyonunda

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow g_1\psi, \\ g &\rightarrow g_1 g, \\ \overline{\psi} &\rightarrow \overline{\psi} g_1^{-1} \end{aligned} \tag{2.5}$$

simetrisi vardır ve bu ayar seçimi altında Lagrange fonksiyonu değişmez kalmaktadır.

2.1.2 BRST Benzeri Simetri

Vektör tipi Gürsey modeli ile polinom formundaki modelin eşdeğer olup olmadığını anlamak için her iki modelin de simetrilerinin incelenmesi gerekir.

Vektör tipi Gürsey modeline aşağıdaki gibi bir simetri terimi eklenebilir

$$L = \overline{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi + g\left[N_\mu N^\mu\right]^{2/3} + s\left[\overline{\omega}_\mu(N^\mu - G^\mu G^2)\right]. \tag{2.6}$$

s BRST benzeri bir simetri operatörü olmak üzere simetri işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\begin{aligned} s\overline{\omega}_\mu &= \lambda_\mu \qquad & s\lambda_\mu &= 0, \\ sG^\mu &= \omega^\mu, \qquad & s\omega^\mu &= 0, \\ s\psi &= s\overline{\psi} = 0, \qquad & s^2 &= 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Denklem (2.6)'da s simetri işlemleri uygulanırsa ve işlemler açıkça yapılacak olursa

$$\begin{aligned} sL &= s\left[\lambda_\mu\left(N^\mu - G^\mu G^2\right) + \overline{\omega}_\mu(\omega^\mu G^2 + 2G^\mu\omega_\lambda G^\lambda)\right], \\ sL &= -\lambda_\mu\omega^\mu G^2 - 2\lambda G\omega_\lambda G^\lambda + \lambda_\mu\omega^\mu G^2 + 2\lambda G\omega_\lambda G^\lambda \\ &\quad + 2\overline{\omega}_\mu\omega^\mu\omega_\lambda G^\lambda - 2\overline{\omega}_\mu\omega^\mu\omega_\lambda G^\lambda + 2\overline{\omega}_\mu G^\mu\omega_\lambda\omega^\lambda = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\overline{\omega}_\mu$, ω^μ Grassman özelliği göstermektedir. Görüldüğü üzere denklem (2.6)'da verilen Lagrange fonksiyonu s simetrisine sahiptir.

Modellerin eşdeğer olabilmesi için denklem (2.3)'de verilen Lagrange fonksiyonunun s simetrisi altında değişmezliğini koruması gerekir. Polinom formundaki Lagrange fonksiyonuna s simetri işlemi uygulanırsa

$$s\mathscr{L} = e\overline{\psi}\omega_\mu\gamma^\mu\psi - e^4\lambda_\mu\omega^\mu G^2 - 2e^4\lambda G\omega_\lambda G^\lambda \neq 0 \tag{2.8}$$

elde edilir ve görüldüğü üzere bu Lagrange fonksiyonunun s simetrisi yoktur. Modellerin s simetri işlemleri altında eşdeğer olmaması ikinci modelin, $\mathscr{L}$, vektör tipi Gürsey modeline benzer ama eşdeğer olmayan bir model olarak yorumlamamıza neden olmaktadır. Modellerin tam olarak birbirlerine benzer olmamalarına rağmen polinom formundaki model incelenmeye devam edilecektir. Vektör tipi Gürsey modeli motivasyon olarak alınacaktır.

2.2 Bağ Analizi

Bağlı sistemlerin işlemleri eylem fonksiyonu ile başlamaktadır ve en genel haliyle eylem fonksiyonu aşağıda verildiği gibidir.

$$\mathbf{S}[q_i(\tau)] = \int_{\tau_2}^{\tau_1} \mathrm{d}\tau L(q_i, \dot{q}_i)$$

denklemde $q_i(\tau)$ kanonik koordinatlar ve $\dot{q}_i = \mathrm{d}q_i/\mathrm{d}\tau$ kanonik hızlar. Kanonik momentum ise aşağıdaki gibi tanımlıdır

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{2.9}$$

Varyasyon yöntemi kullanılarak Euler-Lagrange denklemleri

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}\tau} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{2.10}$$

olarak elde edilir. Sistem için kanonik Hamilton fonksiyonu

$$\mathscr{H}_k(p^i, q_i) \;=\; p^i \dot{q}_i - \mathscr{L}(q_i, \dot{q}_i) \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlıdır ve Hamilton fonksiyonunun hareket denklemleri aşağıda verildiği gibidir:

$$\dot{q}_i \;=\; \{q_i, \mathscr{H}_k\} = \frac{\partial \mathscr{H}_k}{\partial p^i}, \tag{2.12a}$$

$$\dot{p}^i \;=\; \{p^i, \mathscr{H}_k\} = -\frac{\partial \mathscr{H}_k}{\partial q_i}. \tag{2.12b}$$

Bu noktada Lagrange fonksiyonunu tekil varsayılabilir, diğer bir ifadeyle kanonik koordinatlar ve momentumlarla ifade edilen hız çözümlerinin, $\dot{q}_i(q,p)$, tek olmadığı farzedilebilir. Lagrange fonksiyonunun tekil olması için gerekli ve yeterli şart

$$\det \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = 0 \tag{2.13}$$

ile verilir. Tekil olma koşulu sistemde birincil bağların olduğunu göstermektedir ve en genel haliyle birincil bağlar aşağıdaki gibi gösterilir

$$\theta_m(q,p) \approx 0, \qquad m = 1, ..., M. \tag{2.14}$$

Denklemde M birincil bağ sayısıdır ve $\theta_m(q,p)$ bağları temsil etmektedir. Ayrıca bağ analizinde "≈ 0" gösteriminin okunuşu "zayıf olarak sıfır"dır ve anlamı θ_m bağlarının bazı kanonik değişkenlerle Poisson parantezlerinin sıfırdan farklı olmasıdır. Poisson parantezinin tanımı aşağıdaki gibidir

$$\{A, B\} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p^i} - \frac{\partial A}{\partial p^i}\frac{\partial B}{\partial q_i} \right) \equiv \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p^i} - \frac{\partial A}{\partial p^i}\frac{\partial B}{\partial q_i}. \tag{2.15}$$

Kanonik hareket denklemlerinin kanonik Hamilton fonksiyonu için tek olmaması nedeniyle etkin Hamilton fonksiyonunun oluşturulması gerekmektedir. Etkin

Hamilton fonksiyonu kanonik Hamilton fonksiyonuna bağ koşulları eklenerek aşağıdaki gibi elde edilir

$$\mathscr{H}_e = \mathscr{H}_k + u_m \theta_m(q,p) \approx \mathscr{H}_k. \tag{2.16}$$

Denklemdeki u_m'ler daha sonra belirlenecek katsayılardır. Etkin Hamilton fonksiyonu için hareket denklemleri denklem (2.12)'de verilen hareket denklemlerinden farklı olarak aşağıdaki gibidir

$$\dot{q}_i = \{q_i, \mathscr{H}_e\} \approx \frac{\partial \mathscr{H}_k}{\partial p^i} + u_m \frac{\partial \theta_m}{\partial p^i}, \tag{2.17a}$$

$$\dot{p}^i = \{p^i, \mathscr{H}_e\} \approx -\frac{\partial \mathscr{H}_k}{\partial q_i} - u_m \frac{\partial \theta_m}{\partial q_i}. \tag{2.17b}$$

Bu denklemler, $\theta_m \approx 0$ bağlarını δq_i, δp^i değişimleri altında koruyan en genel hareket denklemleridir.

Modelin tutarlı olması için bağların zaman türevleri sıfır veya bağların lineer kombinasyonları olmalıdır. Bu durumda bağların zaman türevleri zayıf olarak sıfıra eşittir.

$$\dot{\theta}_n = \{\theta_n, \mathscr{H}_e\} \approx \{\theta_n, \mathscr{H}_k\} + u_m \{\theta_n, \theta_m\} \approx 0. \tag{2.18}$$

Eğer denklem (2.18) birincil bağların sonucu olarak sıfırdan farklı ise, iki ihtimal bulunmaktadır. Birincisi, denklem (2.18) sistem hakkında yeni bir bilgi vermez fakat u_m katsayılarını elde etmek için gerekli eşitlikler elde edilir. İkincisi, denklem (2.18) u_m katsayılarından bağımsız olarak koordinatlar ve momentumlar arasında yeni ilişkiler verir ve bu yeni ilişkiler sistemde ikincil bağları oluştur. Denklem (2.18)'de verilen işlem, sistemdeki tüm u_m katsayıları elde edilinceye kadar devam ettirilir. Eğer K ikincil bağların sayısı olarak alınırsa, birincil bağların sayısı M'e eklenmelidir ve tüm setle aşağıdaki gibi toplanmalıdır.

$$\theta_a(q,p) \approx 0, \qquad a = 1, ..., M+K = T. \tag{2.19}$$

Sonuç olarak, hareket denklemlerindeki tüm bağların değişmemesi için, u_m katsayılarının q ve p'nin fonksyonu olarak aşağıdaki gibi bir çözüme sahip olmaları gerekir.

$$u_m = u_m(q,p).$$

u_m katsayılarının elde edilmesiyle birlikte etkin Hamilton fonksiyonu q ve p'ler cinsinden

$$\mathscr{H}_e = \mathscr{H}_e(q,p).$$

olarak ifade edilir. Bu durumda modeldeki bağların sınıfları incelenebilir. Dirac [42], bağları iki sınıfa ayırmıştır:

Tanım : θ_i ve θ_j modeldeki bağları temsil etmek üzere her i ve j için, $i,j=1,...,T$, bağların sınıfları aşağıdaki gibi tanımlanabilir

$$\{\theta_i,\theta_j\}\begin{cases}\approx 0 & \text{birinci sınıf bağ olabilme koşulu}\\ \not\approx 0 & \text{ikinci sınıf bağ olabilme koşulu.}\end{cases} \tag{2.20}$$

Sistemdeki tüm bağlar birinci sınıf olabildiği gibi ikinci sınıf da olabilir. Dirac ikinci sınıf bağların Poisson parantezlerinin $T\times T$ boyutunda tekil olmayan bir matris oluşturduklarını göstermiştir [42] ve bu matris aşağıda verildiği gibidir

$$C_{i,j} = \{\theta_i,\theta_j\}. \tag{2.21}$$

Orijinal modelden polinom formundaki modele geçerken yardımcı vektör alanlar kullanılması, modelin aynı zamanda bağlanmış bir model olmasına neden olmuştur. Bağlanmış sistemin kuantizasyonu içinde tek trivial olmayan kısım olan Faddeev-Popov determinantı hesaplanmalıdır [43, 44].

Yukarıda verilen bağ analizi yöntemi bağlı modele uygulanacaktır. Bu bölümde kullanılacak Lagrange fonksiyonu aşağıdaki gibidir

$$\mathscr{L} = \overline{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - ig\partial\!\!\!/ g^{-1} + eG\!\!\!/ + e\lambda\!\!\!/ - m\right)\psi - e^4\lambda GG^2. \tag{2.22}$$

Denklemde $G\!\!\!/ = G_\mu\gamma^\mu$ ve $\lambda\!\!\!/ = \lambda_\mu\gamma^\mu$ olarak tanımlıdır. Model için alanlar $q_i(\overline{\psi},\psi,\lambda_\mu,G_\mu)$ ve alanlara karşılık gelen kanonik momentumlar $p^i(\pi,\overline{\pi},\rho_\mu,\alpha_\mu)$ şeklindedir. Modelin kanonik momentumları

$$\pi = \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta(\partial_0\overline{\psi})} \approx 0, \tag{2.23a}$$

$$\overline{\pi} = \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta(\partial_0\psi)} \approx i\overline{\psi}\gamma_0, \tag{2.23b}$$

$$\rho_\mu = \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\left(\partial_0\lambda_\mu\right)} \approx 0, \tag{2.23c}$$

$$\alpha_\mu = \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\left(\partial_0 G_\mu\right)} \approx 0 \tag{2.23d}$$

olarak elde edilir. Kanonik momentumlardan yararlanılarak oluşturulan birincil bağlar aşağıdaki gibidir

$$\theta_1 = \pi \approx 0, \tag{2.24a}$$

$$\theta_2 = \overline{\pi} - i\overline{\psi}\gamma_0 \approx 0, \tag{2.24b}$$

$$\theta_3 = \rho_\mu \approx 0, \tag{2.24c}$$

$$\theta_4 = \alpha_\mu \approx 0. \tag{2.24d}$$

Kanonik momentumlar ve denklem (2.11) yardımıyla model için kanonik Hamilton fonksiyonu

$$\mathscr{H}_k = \overline{\psi}\left(i\gamma^i\partial_i + ig\partial\!\!\!/ g^{-1} - eA\!\!\!/ - eX\!\!\!/ + m\right)\psi + e^4\lambda GG^2 \tag{2.25}$$

olarak hesaplanır ve denklem (2.12) yardımıyla kanonik hareket denklemleri

$$\dot{\overline{\psi}} = \frac{\partial\mathscr{H}_k}{\partial\pi} = 0,\ \dot{\pi} = -\frac{\partial\mathscr{H}_k}{\partial\overline{\psi}} = \left(-i\gamma^i\partial_i - ig\partial\!\!\!/ g^{-1} + eA\!\!\!/ + eX\!\!\!/ - m\right)\psi \tag{2.26a}$$

$$\dot{\psi} = \frac{\partial\mathscr{H}_k}{\partial\overline{\pi}} = 0,\ \dot{\overline{\pi}} = -\frac{\partial\mathscr{H}_k}{\partial\psi} = \overline{\psi}\left(-i\gamma^i\partial_i - ig\partial\!\!\!/ g^{-1} + eA\!\!\!/ + eX\!\!\!/ - m\right) \tag{2.26b}$$

$$\dot{\lambda}_\mu = \frac{\partial\mathscr{H}_k}{\partial\rho_\mu} = 0, \qquad \dot{\rho}_\mu = -\frac{\partial\mathscr{H}_k}{\partial\lambda_\mu} = eN^\mu - e^4G^\mu G^2, \tag{2.26c}$$

$$\dot{G}_\mu = \frac{\partial\mathscr{H}_k}{\partial\alpha_\mu} = 0, \qquad \dot{\alpha}_\mu = -\frac{\partial\mathscr{H}_k}{\partial G_\mu} = eN^\mu - e^4\lambda^\mu G^2 - 2e^4\lambda GG^\mu \tag{2.26d}$$

olarak elde edilir. Kanonik hareket denklemlerinin tek olmaması nedeniyle etkin Hamilton fonksiyonu denklem (2.16) yardımıyla

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_e = {} & \overline{\psi}\left(i\gamma^i\partial_i + ig\partial\!\!\!/ g^{-1} - eA\!\!\!/ - eX\!\!\!/ + m\right)\psi + e^4\lambda GG^2 \\ & + u_1\pi + u_2(\overline{\pi} - i\overline{\psi}\gamma_0) + u_3^\mu\rho_\mu + u_4^\mu\alpha_\mu,\end{aligned} \tag{2.27}$$

olarak bulunur. Denklem (2.27)'de verilen etkin Hamilton fonksiyonu için hareket denklemleri

$$\dot{\overline{\psi}} = \frac{\partial\mathscr{H}_k}{\partial\pi} + u_1\frac{\partial\theta_1}{\partial\pi} = u_1,$$

$$\dot{\pi} = -\frac{\partial\mathscr{H}_k}{\partial\overline{\psi}} - u_1\frac{\partial\theta_1}{\partial\overline{\psi}} = \left(-i\gamma^i\partial_i - ig\partial\!\!\!/ g^{-1} + eA\!\!\!/ + eX\!\!\!/ - m\right)\psi + i\gamma^0u_1, \tag{2.28a}$$

$$\dot{\psi} = \frac{\partial\mathscr{H}_k}{\partial\overline{\pi}} + u_2\frac{\partial\theta_2}{\partial\overline{\pi}} = u_2,$$

$$\dot{\overline{\pi}} = -\frac{\partial\mathscr{H}_k}{\partial\psi} - u_2\frac{\partial\theta_2}{\partial\psi} = \overline{\psi}\left(-i\gamma^i\partial_i - ig\partial\!\!\!/ g^{-1} + eA\!\!\!/ + eX\!\!\!/ - m\right), \tag{2.28b}$$

$$\dot{\lambda}_\mu = \frac{\partial\mathscr{H}_k}{\partial\rho_\mu} + u_3^\mu\frac{\partial\theta_3}{\partial\rho_\mu} = u_3^\mu,$$

$$\dot{\rho}_\mu = -\frac{\partial\mathscr{H}_k}{\partial\lambda_\mu} - u_3^\mu\frac{\partial\theta_3}{\partial\lambda_\mu} = eN^\mu - e^4G^\mu G^2, \tag{2.28c}$$

$$\begin{aligned}\dot{G}_\mu &= \frac{\partial \mathscr{H}_k}{\partial \alpha_\mu} + u_4^\mu \frac{\partial \theta_4}{\partial \alpha_\mu} = u_4^\mu, \\ \dot{\alpha}_\mu &= -\frac{\partial \mathscr{H}_k}{\partial G_\mu} - u_4^\mu \frac{\partial \theta_4}{\partial G_\mu} = eN^\mu - e^4 \lambda^\mu G^2 - 2e^4 \lambda G G^\mu \end{aligned} \tag{2.28d}$$

olarak hesaplanır.

Modelin tutarlı olması için denklem (2.18)'den yararlanılarak bağların zaman türevleri

$$\dot{\theta}_1 = -\left(i\gamma^i \partial_i + ig\not{\partial} g^{-1} - e\not{C} - e\not{\lambda} + m\right)\psi + i\gamma_0 u_2, \tag{2.29a}$$

$$\dot{\theta}_2 = -\overline{\psi}\left(i\gamma^i \partial_i + ig\not{\partial} g^{-1} - e\not{C} - e\not{\lambda} + m\right) - i\gamma^0 u_1, \tag{2.29b}$$

$$\dot{\theta}_3 = eN^\mu - e^4 G^\mu G^2, \tag{2.29c}$$

$$\dot{\theta}_4 = eN^\mu - e^4 \lambda^\mu G^2 - 2e^4 \lambda G G^\mu \tag{2.29d}$$

olarak elde edilir. Denklem (2.29a) ve (2.29b) yeni bir bilgi vermemektedir fakat u_1 ve u_2 katsayıları ile alanlar arasındaki ilişkiyi göstermektedir. Denklem (2.29c) ve (2.29d) ise u_m katsayılarından bağımsız olarak alanlar ve momentumlar arasında yeni ilişkiler vermektedir. Bunlar "ikincil bağlar" dır ve model için ikincil bağlar aşağıdaki gibidir:

$$\theta_5 = N^\mu - e^3 G^\mu G^2 \approx 0, \tag{2.30a}$$

$$\theta_6 = N^\mu - e^3 \lambda^\mu G^2 - 2e^3 \lambda G G^\mu \approx 0. \tag{2.30b}$$

İkincil bağlar denklem (2.14)'de verilen birincil bağlara eklenmelidir. İkincil bağların zaman türevleri aşağıdaki gibidir

$$\dot{\theta}_5 = u_1 \gamma^\mu \psi + u_2 \overline{\psi}\gamma^\mu - u_4^\mu e^3 \left(g^{\mu\nu} G^2 + 2G^\mu G^\nu\right) \approx 0, \tag{2.31a}$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_6 &= u_1 \gamma^\mu \psi + u_2 \overline{\psi}\gamma^\mu - u_3^\mu e^3 \left(g^{\mu\nu} G^2 + 2G^\mu G^\nu\right) \\ &\quad + 6e^3 u_4^\mu \lambda G \approx 0. \end{aligned} \tag{2.31b}$$

Yukardaki denklemler sayesinde u_3^μ ve u_4^μ katsayıları elde edilir ve böylece bağ hesaplama işlemi tamamlanmış olur. Modelde dördü birincil ve ikisi ikincil olmak üzere toplam altı adet bağ vardır.

Bu durumda modeldeki bağların sınıfları denklem (2.20) yardımıyla incelenebilir. Modeldeki bağların sıfırdan farklı Poisson parantezleri aşağıda verildiği gibidir

$$\{\theta_1, \theta_2\} \approx i\gamma^0, \tag{2.32a}$$

$$\{\theta_1, \theta_5\} \approx -\gamma^\mu \psi, \tag{2.32b}$$

$$\{\theta_1,\theta_6\} \approx -\gamma^\mu\psi, \tag{2.32c}$$

$$\{\theta_2,\theta_5\} \approx -\overline{\psi}\gamma^\mu, \tag{2.32d}$$

$$\{\theta_2,\theta_6\} \approx -\overline{\psi}\gamma^\mu, \tag{2.32e}$$

$$\{\theta_3,\theta_6\} \approx e^3\left(g^{\mu\nu}G^2+2G^\mu G^\nu\right), \tag{2.32f}$$

$$\{\theta_4,\theta_5\} \approx e^3\left(g^{\mu\nu}G^2+2G^\mu G^\nu\right), \tag{2.32g}$$

$$\{\theta_4,\theta_6\} \approx 6e^3\lambda G. \tag{2.32h}$$

Görüleceği üzere modeldeki bağlar ikinci sınıf bağlardır ve ikinci sınıf bağlar denklem (2.21) ve (2.32) yardımıyla aşağıdaki gibi (6×6) boyutunda tekil olmayan bir matris oluştururlar [45]

$$C_{ij}=\{\theta_i,\theta_j\}=\begin{pmatrix} 0 & A & 0 & 0 & B & B \\ -A & 0 & 0 & 0 & C & C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D & E \\ -B & -C & 0 & -D & 0 & 0 \\ -B & -C & -D & -E & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

Matriste $A=i\gamma^0$, $B=-\gamma^\mu\psi$, $C=-\overline{\psi}\gamma^\mu$, $D=e^3\left(g^{\mu\nu}G^2+2G^\mu G^\nu\right)$ ve $E=6e^3\lambda G$ olarak tanımlıdır.

Denklem (2.33) yardımıyla Faddeev-Popov determinantı oluşturulur ve C_{ij} matris determinantının karekökünün determinantı olarak tanımlıdır

$$\Delta_F=\det\left|\{\theta_i,\theta_j\}\right|^{1/2}=\det\left[e^6\left(g^{\mu\nu}G^2+2G^\mu G^\nu\right)^2\right]. \tag{2.34}$$

Denklemdeki alan bağımlılığı denklem (2.30)'dan gelmektedir.

2.3 Fonksiyonel İntegral Kuantizasyonu

Modelin sürekli kuantizasyonu için yol integralleri yöntemi kullanılacaktır. Model için bölüşüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir

$$\mathscr{Z}=\int\mathscr{D}\Pi\mathscr{D}\chi\,\delta(\theta_a)\Delta_F\exp\left(i\int \mathrm{d}^4x(\dot{\chi}\Pi-\mathscr{H}_k)\right). \tag{2.35}$$

Denklemde χ tüm alanları, Π tüm momentumları, $\delta(\theta_a)$ Kronecker delta fonksiyonunu ve θ_a tüm bağları temsil etmektedir. Tüm momentumlar üzerinden integral alındığında bölüşüm fonksiyonu

$$\mathscr{Z}=\int\mathscr{D}\overline{\psi}\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\lambda_\mu\mathscr{D}G_\mu\left(\frac{\Delta_F}{\det\left[e^3\left(g^{\mu\nu}G^2+2G^\mu G^\nu\right)\right]}\right)\exp\left(i\int\mathrm{d}^4x\mathscr{L}\right) \tag{2.36}$$

olarak hesaplanır ve denklemdeki bölüm halindeki kısım için işlem yapılacak olursa

$$\frac{\Delta_F}{\det\left[e^3\left(g^{\mu\nu}G^2+2G^\mu G^\nu\right)\right]}=\det\left[e^3\left(g^{\mu\nu}G^2+2G^\mu G^\nu\right)\right] \tag{2.37}$$

elde edilir. Denklem (2.37) Faddeev-Popov hayalet alanları C^*_μ ve C_ν kullanarak aşağıdaki eşitlik yardımıyla integral formunda yazılabilir

$$\det\left[e^3\left(g^{\mu\nu}G^2+2G^\mu G^\nu\right)\right]=\int \mathscr{D}C^*_\mu \mathscr{D}C_\nu \exp\left[-\int \mathrm{d}^4x C^*_\mu e^3\left(g^{\mu\nu}G^2+2G^\mu G^\nu\right)C_\nu\right].$$

Denklemdeki üstel kısım Lagrange fonksiyonuna eklenebilir. Sonuç olarak model için elde edilen etkin Lagrange fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{etkin}=\overline{\psi}\left(i\partial\!\!\!/-ig\partial\!\!\!/g^{-1}+e\left[G\!\!\!/+\lambda\!\!\!/\right]-m\right)\psi-e^4\lambda GG^2\\ +iC^*_\mu e^3\left(g^{\mu\nu}G^2+2G^\mu G^\nu\right)C_\nu.\end{aligned} \tag{2.38}$$

Etkin Lagrange fonksiyonunun spinör alanlar üzerinden integrali alındığında

$$\begin{aligned}\int \mathscr{D}\overline{\psi}\mathscr{D}\psi\exp\left[i\int \mathrm{d}^4x\,\overline{\psi}\left(i\partial\!\!\!/-ig\partial\!\!\!/g^{-1}+e\left[G\!\!\!/+\lambda\!\!\!/\right]-m\right)\psi\right]=\\ (-i)\det\left[i\partial\!\!\!/-ig\partial\!\!\!/g^{-1}+e\left(G\!\!\!/+\lambda\!\!\!/\right)-m\right]\end{aligned} \tag{2.39}$$

elde edilir. Denklem (2.39)'daki determinant aşağıdaki eşitlikle tekrar üstel hale dönüştürülebilir

$$\det A=e^{\mathrm{Tr}\ln A}. \tag{2.40}$$

Bu durumda bölüşüm fonksiyonu

$$\begin{aligned}\mathscr{Z} &= \int \mathscr{D}\lambda_\mu \mathscr{D}G_\mu \mathscr{D}C^*_\mu \mathscr{D}C_\nu \exp\left(i\left[\mathrm{Tr}\ln\left(i\partial\!\!\!/-ig\partial\!\!\!/g^{-1}+e\left(G\!\!\!/+\lambda\!\!\!/\right)-m\right)\right.\right.\\ &\left.\left.-\int \mathrm{d}^4x e^4\lambda GG^2+iC^*_\mu e^3\left(g^{\mu\nu}G^2+2G^\mu G^\nu\right)C_\nu\right]\right)\end{aligned} \tag{2.41}$$

halini alır. Bölüşüm fonksiyonunun üstel kısmı etkin eyleme eşittir ve elde edilen etkin eylem ise aşağıdaki gibidir

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{etkin} &= \mathrm{Tr}\ln\left[i\partial\!\!\!/-ig\partial\!\!\!/g^{-1}+e(G\!\!\!/+\lambda\!\!\!/)-m\right]\\ &-\int dx^4\left(e^4\lambda GG^2+iC^*_\mu e^3\left(g^{\mu\nu}G^2+2G^\mu G^\nu\right)C_\nu\right).\end{aligned} \tag{2.42}$$

Modeldeki alanlar aşağıdaki gibi yeniden tanımlanabilir

$$\begin{aligned}J_\mu &= -\frac{i}{e}g\partial_\mu g^{-1}+G_\mu+\lambda_\mu,\\ F_\mu &= \lambda_\mu-G_\mu,\\ A_\mu &= G_\mu+\lambda_\mu+2\frac{i}{e}g\partial_\mu g^{-1}\end{aligned} \tag{2.43}$$

ve yeni alanların ters dönüşümleri

$$\begin{aligned} \frac{i}{e} g \partial_\mu g^{-1} &= \frac{A_\mu - J_\mu}{3}, \\ G_\mu &= \frac{2J_\mu - 3F_\mu + A_\mu}{6}, \\ \lambda_\mu &= \frac{2J_\mu + 3F_\mu + A_\mu}{6} \end{aligned} \tag{2.44}$$

olarak elde edilir. Ters dönüşümlerin denklem (2.42)'de kullanılmasıyla elde edilen yeni etkin eylem aşağıdaki gibidir

$$\mathbf{S}_{etkin} = \mathrm{Tr} \ln \left(i\partial\!\!\!/ + eJ\!\!\!/ - m \right) + \int dx^4 \left[e^4 J^4 + \text{diğer terimler} \right]. \tag{2.45}$$

Görüldüğü gibi fermiyonlarla etkileşen alan sadece kompozit vektör alan J_μ'dür. Diğer terimler bütün alanların üçüncü veya dördüncü kuvveti olarak gitmektedir. İlk olarak etkin eylemin alanlara göre birinci türevleri alarak sıfıra eşitlenebilir ve iribaşlar (tadpole) yokedilebilir. Tüm vektör alanların vakum beklenen değerleri sıfırdır ve bu durum Lorentz değişmezliği tarafından da doğrulanmaktadır, çünkü teoride sabit vektör ifadeler yoktur.

2.4 Propagatörler

Alanlara ait propagatörlerin hesaplanması için denklem (2.45)'de verilen etkin eylemin alanlara göre ikinci türevlerinin alınması gerekmektedir. Etkin teoriye göre etkin eylemin alanlara göre ikinci türevi öz enerji etkileşmesine eşittir ve etkileşmelerden elde edilecek sonuç ters propagatörü vermektedir.

2.4.1 Spinör Alan Propagatörü

Euclidyen uzayda spinör alan propagatörü aşağıdaki gibidir

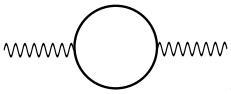
$$S(p) = \frac{-i}{p\!\!\!/ + m} = i \frac{p\!\!\!/ - m}{p^2 + m^2}. \tag{2.46}$$

Modelde kütle terimi bulunması nedeniyle spinör propagatörü kütle içermektedir.

2.4.2 Kompozit Vektör Alan Propagatörü

Kompozit vektör alanı, J_μ, için propagatör aşağıdaki gibidir

$$\Delta^{-1}_{\mu\nu} = - \left. \frac{\partial^2 \mathbf{S}_{etkin}}{\partial J_\mu \partial J_\nu} \right|_{J_\mu = 0} = -$$



.

Denklemin sağ tarafındaki etkileşme öz enerji diyagramıdır ve diyagramının matematiksel ifadesi aşağıdaki gibidir

$$\Pi^{\mu\lambda}(p) = -\int_{\Lambda} \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left[(-ie\gamma^{\mu})S(p+k)(-ie\gamma^{\lambda})S(k)\right]. \tag{2.47}$$

Alan propagatörleri yerine yazılırsa denklem

$$\Pi^{\mu\lambda}(p) = -e^2 \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left[\gamma^{\mu} \frac{1}{\not{k}+\not{p}+m} \gamma^{\lambda} \frac{1}{\not{k}+m}\right] \tag{2.48}$$

halini alır ve payda $\not{k}+\not{p}-m$ ve $\not{k}-m$ terimleri ile çarpılıp yeniden düzenlenirse denklem

$$\Pi^{\mu\lambda}(p) = (ie)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{Tr}\left[\gamma^{\mu}(\not{k}+\not{p}-m)\gamma^{\lambda}(\not{k}-m)\right]}{[k^2+m^2]\,[(p+k)^2+m^2]} \tag{2.49}$$

olarak elde edilir. Payda için Feynman parametrizasyonu uygulanırsa elde edilecek eşitlik aşağıdaki gibidir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{[(k^2+m^2)((k+p)^2+m^2)]} &= \int_0^1 \mathrm{d}\alpha \frac{1}{[\alpha((k+p)^2+m^2)+(1-\alpha)(k^2+m^2)]^2}, \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}\alpha \frac{1}{[k^2+2\alpha k.p+\alpha p^2+m^2]^2}, \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}\alpha \frac{1}{\left[(k+\alpha p)^2+\alpha p^2(1-\alpha)+m^2\right]^2}.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Bu durumda yeni halka momentumu k' aşağıdaki gibi tanımlanabilir

$$k' = k+\alpha p. \tag{2.51}$$

Yeni momentuma göre denklem

$$\Pi^{\mu\lambda}(p) = -e^2 \int_0^1 \mathrm{d}\alpha \int \frac{\mathrm{d}^4k'}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{Tr}\left[\gamma^{\mu}(\not{k}'+\not{p}(1-\alpha)-m)\gamma^{\lambda}(\not{k}-\not{p}\alpha-m)\right]}{\left[k'^2+p^2\alpha(1-\alpha)+m^2\right]^2} \tag{2.52}$$

olarak elde edilir. Denklem (2.52)'de tek sayıda gamma matrisi içeren ifadeler izden dolayı sıfır olacaktır. Denklem (2.52)'nin üst kısmı düzenlenirse

$$\left[k'^{\nu}k'^{\rho} - p^{\nu}p_{\rho}\alpha(1-\alpha)\right] \mathrm{Tr}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\rho}\right) + m^2 \mathrm{Tr}\left(\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\right) \tag{2.53}$$

elde edilir. İkili gamma ve dörtlü gamma matrislerinin izleri olan denklem (A.9) ve (A.10) kullanılarak denklem (2.53)

$$\begin{gathered}
4\left[k'^{\nu}k'^{\rho} - p^{\nu}p^{\rho}\alpha(1-\alpha)\right]\left(g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda}\right) + 4m^2 g^{\nu\rho}, \\
4\left[2k'^{\mu}k'^{\lambda} - 2\alpha(1-\alpha)\left(p^{\mu}p^{\lambda} - g^{\mu\lambda}p^2\right) - g^{\nu\rho}\left(k'^2+m^2+\alpha(1-\alpha)p^2\right)\right]
\end{gathered}$$

halini alır. Elde edilen sonuç denklem (2.52)'de yerine yazılırsa

$$\Pi^{\mu\lambda}(p) = -4e^2 \int_0^1 \mathrm{d}\alpha \int \frac{\mathrm{d}^4k'}{(2\pi)^4} \left[\frac{2k'^{\mu}k'^{\lambda} - 2\alpha(1-\alpha)\left(p^{\mu}p^{\lambda} - g^{\mu}\lambda p^2\right)}{\left[k'^2 + p^2\alpha(1-\alpha) + m^2\right]^2} - \frac{g^{\nu\rho}}{\left[k'^2 + p^2\alpha(1-\alpha) + m^2\right]} \right] \quad (2.54)$$

elde edilir. Burada boyutsal regülarizasyon kullanılacaktır. Çevrim momentumu üzerinden integral almak için denklem (B.1) ve (B.3) kullanılırsa denklem

$$\Pi^{\mu\lambda}(p) = -\frac{4e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 \mathrm{d}\alpha \int \left[\frac{2p^{\mu}p^{\lambda}\Gamma(\varepsilon)}{\left[p^2\alpha(1-\alpha) + m^2\right]^{\varepsilon}} + \frac{g^{\mu\lambda}\Gamma(\varepsilon-1)}{\left[p^2\alpha(1-\alpha) + m^2\right]^{\varepsilon-1}} - \frac{g^{\mu\lambda}\Gamma(\varepsilon-1)}{\left[p^2\alpha(1-\alpha) + m^2\right]^{\varepsilon-1}} - \frac{2\alpha(1-\alpha)\left(p^{\mu}p^{\lambda} - g^{\mu\lambda}p^2\right)\Gamma(\varepsilon)}{\left[p^2\alpha(1-\alpha) + m^2\right]^{\varepsilon}} \right] \quad (2.55)$$

olarak elde edilir ve denklem üzerinde sadeleştirme yapılırsa

$$\Pi^{\mu\lambda}(p) = \frac{e^2}{2\pi^2}\Gamma(\varepsilon)\left(p^{\mu}p^{\lambda} - g^{\mu\lambda}p^2\right) \int_0^1 \mathrm{d}\alpha\alpha(1-\alpha) \left[\frac{p^2(1-\alpha)\alpha + m^2}{2\pi} \right]^{-\varepsilon} \quad (2.56)$$

bulunur. $\Gamma(\varepsilon)$ için denklem (B.6) açılımı kullanılırsa denklem

$$\Pi^{\mu\lambda}(p) = \frac{e^2}{2\pi^2}\left(p^{\mu}p^{\lambda} - g^{\mu\lambda}p^2\right) \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma - \int_0^1 \mathrm{d}\alpha\alpha(1-\alpha) \left[\frac{p^2(1-\alpha)\alpha + m^2}{2\pi} \right] \right]$$

olarak elde edilir ve denklemde parantez içindeki ilk terim hariç geri kalan ifadeler sonludur. Sonsuzluk ise ilk terimden gelmektedir ve sonuç aşağıdaki gibi ters propagatöre eşittir

$$\Delta^{-1}_{\mu\nu} = -\left.\frac{\partial^2 \mathrm{S}_{etkin}}{\partial J_{\mu}\partial J_{\nu}}\right|_{J_{\mu}=0} = \frac{e^2}{2\pi^2}\left(g^{\mu\lambda}p^2 - p^{\mu}p^{\lambda}\right)\left[\frac{1}{\varepsilon} + \text{sonlu kısım}\right]. \quad (2.57)$$

Elde edilen sonucun tersine çevrilebileceğini düşünerek, Feynman ayarında kompozit vektör alan için propagatör aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\Delta_{\mu\nu}(p) = \varepsilon\frac{g_{\mu\nu}}{p^2} \quad (2.58)$$

ve denklemde $\varepsilon = 4 - d$ boyut düzeltme parametresidir. Yüksek mertebeden hesapları gerçekleştirmek için vektör alan propagatörü olarak denklem (2.58) kullanılacaktır.

Normal vektör alanda olduğu gibi vektör alanın kinetik kısmını yazmak için logaritmik kısım seriye açılmıştır. Kompozit vektör alan için Feynman ayarında

normal kütlesiz vektör alan propagatörü kullanılacaktır. Bunun için gerekirse Lagrange fonksiyonunda bir ayar alanı terimi eklenebilir. Sonsuzlukların dalga fonksiyonlarındaki renormalizasyonda olduğu gibi kompozit vektör alan propagatöründen geldiği varsayılacaktır.

Diğer alanların ters propagatör fonksiyonları ise aşağıda verildiği gibi sıfır olmaktadır

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial^2 \mathbf{S}_{etkin}}{\partial F_\mu \partial F_\nu}\right|_{F_\mu=0} &= 0, \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{S}_{etkin}}{\partial F_\mu \partial J_\nu} = 0, \\ \left.\frac{\partial^2 \mathbf{S}_{etkin}}{\partial A_\mu \partial A_\nu}\right|_{A_\mu=0} &= 0, \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{S}_{etkin}}{\partial A_\mu \partial J_\nu} = 0. \end{aligned}$$

Dolayısıyla, kompozit vektör alan, J_μ, dışındaki alanlar ve hayalet alanları modelden düşmektedir. Sonuçta etkin eylem aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\mathbf{S}_{etkin} = \mathrm{Tr}\ln(i\partial\!\!\!/ + eJ\!\!\!/ - m) + e^4 J^4 \tag{2.59}$$

2.5 Schwinger-Dyson Denklemi

Schwinger [46] ve Dyson [47] farklı teknikler kullanarak alan denklemlerinin sonucu olarak Green fonksiyonu için bağımsız bir integral denklemi çıkartmışlardır. Dikkatli incelendiğinde bu denklemin sistem denklemlerinin sonsuz hiyerarşisini içerdiği görülebilir [48]. Bundan sonraki bölümlerde temel parçacıkların propagatörleri SD denklemi yardımıyla hesaplanacaktır.

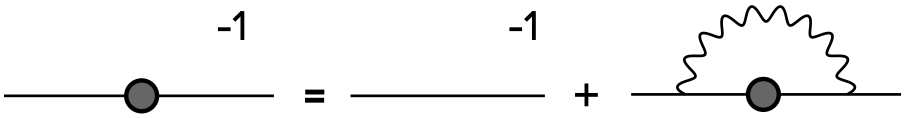
2.5.1 Spinör Propagatorü İçin SD Denklemi

Bu bölümde KED'de spinör propagatörü için SD denklemi hesaplanacaktır. Spinör propagatör açılımı Şekil 2.1'deki gibidir, şekilde düz çizgiler spinörleri ve dalgalı çizgiler kompozit vektör alanı temsil etmektedir. Şeklin SD denklemi aşağıdaki gibidir

$$S'^{-1}(p) = S^{-1}(p) + \int \mathrm{d}^4 q(-ie\gamma^\mu) S'(q)(-ie\gamma^\nu)\Delta_{\mu\nu}(p-q). \tag{2.60}$$

Denklem (2.60)'de alan propagatörleri yerine yazılırsa eşitlik

$$iA p\!\!\!/ + B = i p\!\!\!/ + m + 4e^2\pi \int \mathrm{d}^4 q \frac{\varepsilon\gamma^\mu g_{\mu\nu}\gamma^\nu}{(iA q\!\!\!/ + B)(p-q)^2} \tag{2.61}$$



Şekil 2.1: Giydirilmiş Spinör Alan Propagatörü İçin SD Diyagramı.

olarak elde edilir. Bu denklemde $iA\not{p} + B$ terimi giydirilmiş spinör propagatörüdür. Skaler propagatör için bastırılmış merdiven yaklaşımı kullanılmıştır. Bu bölümde denklem (2.61)'de bulunan A ve B katsayıları hesaplanmaya çalışılacaktır. B katsayısını elde etmek için denklem (2.61)'in sağ tarafı $(-iA\not{q} + B)$ ile çarpılıp bölünürse

$$iA\not{p} + B = i\not{p} + m + 16\pi e^2 \varepsilon \int \mathrm{d}^4 q \frac{-iA\not{q} + B}{(A^2 q^2 + B^2)(p-q)^2} \tag{2.62}$$

elde edilir. Denklem (2.62)'nin izi alınırsa, (A.7) yardımıyla tek sayıda gamma matrisi içeren ifadelerin sıfır olacağı görülür. Sıfır olmayan bileşen aşağıdaki gibidir

$$B = m + 16\pi e^2 \varepsilon \int \mathrm{d}^4 q \frac{B(q^2)}{(A^2 q^2 + B^2)(p-q)^2}. \tag{2.63}$$

Denklem (2.63)'ü çözmek için integrali iki kısma ayırmamız gerekir, q nun p den büyük ve küçük olduğu yerlere göre integral sınırları ayrılırsa denklem

$$B = m + 16\pi e^2 \varepsilon \left[\int_0^{p^2} \mathrm{d}^4 q \frac{B}{(A^2 q^2 + B^2)(p-q)^2} + \int_{p^2}^{\infty} \mathrm{d}^4 q \frac{B}{(A^2 q^2 + B^2)(p-q)^2} \right]$$

halini alır. Denklemdeki birinci ve ikinci integralde denklem (B.14) kullanılır ve açısal integraller alınırsa B katsayısı için

$$B = m + 16\pi e^2 \varepsilon \left[\int_0^{p^2} \mathrm{d}q^2 \frac{q^2 B}{p^2 (A^2 q^2 + B^2)} + \int_{p^2}^{\infty} \mathrm{d}q^2 \frac{B}{(A^2 q^2 + B^2)} \right] \tag{2.64}$$

ifadesi elde edilir. Denklem (2.64)'ün p^2'ye göre türevi alındığında elde edilen ifade aşağıdaki gibidir:

$$\frac{dB}{dp^2} = -16\pi e^2 \varepsilon \int_0^{p^2} \mathrm{d}q^2 \frac{q^2 B}{(p^2)^2 (A^2 q^2 + B^2)}. \tag{2.65}$$

Denklemden de anlaşılacağı üzere $\varepsilon \to 0$ durumunda B bir sabittir ve $B = m$ seçilebilir.

SD denklemindeki A ifadesini hesaplamak için denklem (2.62)'nin her iki tarafı $-i\not{p}$ ile çarpılırsa sonuç

$$p^2 A - i\not{p} B = p^2 - i\not{p} m + 4\pi e^2 \varepsilon \int \mathrm{d}^4 q \frac{\gamma_\mu g^{\mu\nu} \gamma_\nu (-A\not{p}\not{q} - iB\not{p})}{(A^2 q^2 + B^2)(p-q)^2} \tag{2.66}$$

olarak elde edilir. Denklem (2.66)'nın izi alınırsa, (A.7) yardımıyla tek sayıda gamma matrisi içeren ifadelerin sıfır olacağı görülür. Sıfırdan farklı terimler aşağıdaki gibidir

$$p^2 A = p^2 - 16\pi e^2 \varepsilon \int \mathrm{d}^4 q \frac{Apq}{(A^2q^2+B^2)(p-q)^2}. \tag{2.67}$$

Denklem (2.67)'yi çözmek için integrali iki kısma ayırmamız gerekir, bunun için q nun p den büyük ve küçük olduğu yerlere göre integral sınırları ayrılırsa denklem

$$p^2 A = p^2 - 16\pi e^2 \varepsilon \left[\int_0^{p^2} \mathrm{d}^4 q \frac{Apq}{(A^2q^2+B^2)(p-q)^2} + \int_{p^2}^{\infty} \mathrm{d}^4 q \frac{Apq}{(A^2q^2+B^2)(p-q)^2} \right]$$

halini alır. Denklemdeki birinci ve ikinci integralde denklem (B.15) kullanılır ve açısal integraller yapılırsa A katsayısı için

$$p^2 A = p^2 - 8\pi e^2 \varepsilon \left[\int_0^{p^2} \mathrm{d}q^2 \frac{(q^4)A}{p^2(A^2q^2+B^2)} + \int_{p^2}^{\infty} \mathrm{d}q^2 \frac{p^2 A}{(A^2q^2+B^2)} \right] \tag{2.68}$$

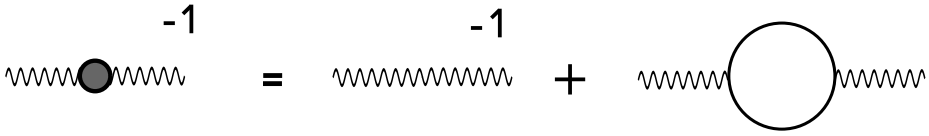
ifadesi elde edilir. Denklemin her iki tarafını p^2 ile bölüp yeni ifadenin p^2'ye göre türevini alırsak aşağıdaki sonuç bulunur.

$$\frac{dA}{dp^2} = 16\pi e^2 \varepsilon \int_0^{p^2} \mathrm{d}q^2 \frac{(q^4)A}{(p^2)^3(A^2q^2+B^2)}. \tag{2.69}$$

Denklemden de anlaşılacağı üzere $\varepsilon \to 0$ durumunda A bir sabittir ve $A = 1$ seçilebilir. Denklem (2.61) çözülerek A ve B değerleri elde edilmiştir ve modelde kullanılan spinör propagatöre yüksek mertebeden katkı gelmediği görülmüştür.

2.5.2 Kompozit Vektör Alan İçin SD Denklemi

Modelde serbest vektör alan olmamasına rağmen hesaplarımız sırasında bir kompozit vektör terimi elde edilmişti. Vektör alanın propagatöre getireceği katkı birinci mertebeden hesaplanabilir. Bu işlemin diyagramı Şekil 2.2'de gösterilmiştir.



Şekil 2.2: Giydirilmiş Kompozit Vektör Alan İçin SD Diyagramı.

Şekildeki eşitliğin sol tarafındaki resim giydirilmiş vektör alan propagatörüdür. Eşitliğin sağ tarafındaki ilk resim serbest durum propagatörüdür ve orijinal

Lagrange fonksiyonunda kompozit vektör alanın kinetik teriminin olmaması nedeniyle yoktur. İkinci resim ise birinci mertebeden katkıdır, etkileşme bölüm 2.4.2'de hesaplanmıştır ve sonuç denklem (2.57)'de verilmiştir. Bastırılmış merdiven yaklaştırmasında kompozit vektör alan propagatörüne ek bir katkı getirmemektedir.

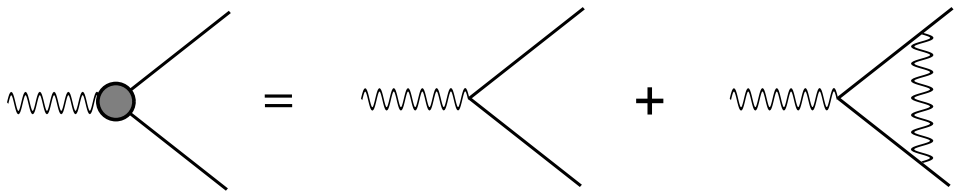
2.6 Etkileşmeler

Bu bölümde modelde bulunan etkileşme terimlerinin halka açılımları üzerinden elde edilen üç, dört ve daha yüksek mertebeden nokta fonksiyon diyagramları analiz edilecektir. Üç nokta fonksiyonlarının birinci mertebeden katkısı haricinde açık hesap yapılmayacaktır. Daha yüksek mertebeden hesaplar için boyut analizi yöntemi kullanılacaktır. Hesaplar sırasında sadece merdiven resimlerinin katkıları kullanılacaktır. $1/N$ açılımını doğrulamak için modele bir indeks N iç simetrisi eklendiği, bu durumda sonuçların doğrulanacağı söylenebilir.

Model ayar değişmez değildir. Ayar değişmezliği denklem (2.22)'de verilen Lagrange fonksiyonunda g terimiyle bulunmaktaydı. Fakat bu özellik kuantizasyon sırasında tanımlanan yeni alanlarla değişmiştir. Denklem (2.59)'da verilen etkin eylemdeki dörtlü vektör alan etkileşmesi, $e^4 J^4$, nedeniyle ayar değişmezliği kırılmaktadır.

2.6.1 Spinör-Vektör Alan Etkileşmesi

Spinör-vektör alan etkileşmesi KED'de temel bir etkileşmedir. Lagrange fonksiyonunda bulunan spinör-vektör alan, $(\overline{\psi} \not{J} \psi)$, etkileşmesinin birinci mertebeden, bir halka katkıları hesaplanacaktır. Birinci mertebeden hesaplar Ball, Chui [49] ve Kızılersu ve diğerleri [50] tarafından incelenmiştir. Bir halka katkısıyla beraber diyagram Şekil 2.3'de gösterilmiştir.



Şekil 2.3: Giydirilmiş Spinör-Vektör Alan Etkileşmesinin Birinci Mertebeden Halka Diyagramı.

Şeklin matematiksel ifadesi aşağıdaki gibidir

$$\Lambda^{\mu}(p,q) = e\gamma^{\mu} + \Gamma^{\mu}(p,q). \tag{2.70}$$

Denklemdeki $\Gamma^{\mu}(p,q)$ terimi aşağıdaki gibi tanımlıdır

$$-i\Gamma^{\mu}(p,q) = \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}(-ie\gamma^{\mu})S(p+k)(-ie\gamma^{\nu})\Delta_{\nu\lambda}(k)(-ie\gamma^{\lambda})S(q+k). \tag{2.71}$$

Alan propagatörleri denklemde yerine yazılırsa denklem

$$I_1 = \Gamma^{\mu}(p,q) = -4ie^3\gamma^{\mu}\varepsilon \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{\not{p}+\not{k}+m}\frac{1}{k^2}\frac{1}{\not{q}+\not{k}+m} \tag{2.72}$$

halini alır ve $I_1(p,q)$ integrali $I(p,q)$ integrali yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir

$$I_1(p,q) = -4ie^3\gamma^{\mu}\varepsilon I(p,q). \tag{2.73}$$

Denklemdeki $I(p,q)$ integrali aşağıdaki gibi tanımlıdır

$$I(p,q) = \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{(\not{p}+\not{k}-m)(\not{q}+\not{k}-m)}{k^2[(p+k)^2+m^2][(q+k)^2+m^2]}. \tag{2.74}$$

$I(p,q)$ integralini hesaplamak için integralin paydasına üçlü Feynman parametrizasyonu uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k^2[(p+k)^2+m^2][(q+k)^2+m^2]} \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}\alpha \int_0^{1-\alpha} \mathrm{d}\beta \frac{2}{\left[\alpha\left[(p+k)^2+m^2\right]+\beta\left[(q+k)^2+m^2\right]+(1-\alpha-\beta)k^2\right]^3} \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}\alpha \int_0^{1-\alpha} \mathrm{d}\beta \frac{2}{\left[k^2+2k(\alpha p+\beta q)+\alpha p^2+\beta q^2+m^2(\alpha+\beta)\right]^3} \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}\alpha \int_0^{1-\alpha} \mathrm{d}\beta \frac{2}{\left[k'^2+\alpha p^2(1-\alpha)+\beta q^2(1-\beta)+m^2(\alpha+\beta)-2\alpha\beta\, p.q\right]^3}
\end{aligned}$$

elde edilir. Denklem için yeni halka momentumu k' ve M^2 sabiti aşağıdaki gibi tanımlanabilir

$$k' = k + p\alpha + q\beta, \tag{2.75a}$$

$$M^2 = \alpha p^2(1-\alpha) + \beta q^2(1-\beta) + m^2(\alpha+\beta) - 2\alpha\beta\, p.q. \tag{2.75b}$$

Yeni değişkenlere göre denklem (2.74)

$$\begin{aligned}
I(p,q) = 2\int_0^1 \mathrm{d}\alpha \int_0^{1-\alpha} \mathrm{d}\beta \\
\int \frac{\mathrm{d}^4k'}{(2\pi)^4}\frac{\left[k'+p(1-\alpha)-q\beta-m\right]_{\rho}\left[k'+q(1-\beta)-p\alpha-m\right]_{\delta}\gamma^{\rho}\gamma^{\delta}}{\left[k'^2+M^2\right]^3}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Boyut analizi yöntemine göre yukarıdaki denklemde sonsuzluk içeren kısım sıralı $k'_\rho k'_\delta$ momentumlu terimdir. Bu nedenle denklemin payında sıralı k' içeren ve içermeyen kısımlar olarak ikiye ayrılabilir:

$$I(p,q) = I_a(p,q) + I_b(p,q). \tag{2.76}$$

Denklemde $I(p,q)_a$ payında sıralı k' momentumu içeren terimdir ve aşağıdaki gibi tanımlıdır

$$I_a(p,q) = 2\int_0^1 \mathrm{d}\alpha \int_0^{1-\alpha} \mathrm{d}\beta \int \frac{\mathrm{d}^4k'}{(2\pi)^4} \frac{\left[k'_\rho k'_\delta\right]\gamma^\rho\gamma^\delta}{\left[k'^2 + M^2\right]^3}. \tag{2.77}$$

Denklem (2.77)'yi hesaplamak için denklem (B.3) kullanılırsa integral

$$I_a(p,q) = \frac{\Gamma(\varepsilon)}{2(4\pi)^2}\int_0^1 \mathrm{d}\alpha \int_0^{1-\alpha} \mathrm{d}\beta \frac{g_{\rho\delta}\gamma^\rho\gamma^\delta}{\left[M^2\right]^\varepsilon} \tag{2.78}$$

halini alır. Gamma matrislerinin özelliği $g_{\rho\delta}\gamma^\rho\gamma^\delta = 4$ denklem (2.78)'de yerine yazılırsa

$$I_a(p,q) = \frac{2\Gamma(\varepsilon)}{(4\pi)^2}\int_0^1 \mathrm{d}\alpha \int_0^{1-\alpha} \mathrm{d}\beta M^{-2\varepsilon} \tag{2.79}$$

elde edilir. $M^{-2\varepsilon}$ için aşağıdaki açılım yapılırsa

$$M^{-2\varepsilon} = e^{-2\varepsilon \ln M} = 1 - 2\varepsilon \ln M + ... \tag{2.80}$$

bulunur. Denklem (2.79)'da denklem (B.6) ve (2.80) açılımları kullanılırsa denklem

$$I_a(p,q) \simeq \frac{2}{16\pi^2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - O(1)\right)\int_0^1 \mathrm{d}\alpha \int_0^{1-\alpha} \mathrm{d}\beta \left(1 - 2\varepsilon \ln M + ...\right) \tag{2.81}$$

halini alır. Denklem (2.79)'da yapılan açılımların ilk terimleri alınır, β ve α üzerinden integral alınırsa denklem (2.81)

$$I_a(p,q) \simeq \frac{1}{16\pi^2}\frac{1}{\varepsilon} + O(1) \tag{2.82}$$

olarak elde edilir. Bu ifade sonsuzluk içermektedir. Yakınsak kısım olan $I_b(p,q)$, $I(p,q)$ integralinin içerisinde k' değişkenini içermeyen parçasıdır ve $I_b(p,q)$ için denklem (B.1) kullanılırsa integral

$$I_b(p,q) = \frac{2}{(4\pi)^2}\Gamma(\varepsilon+1)\int_0^1 \mathrm{d}\alpha \int_0^{1-\alpha} \mathrm{d}\beta \frac{(\not{q}(1-\beta) - \not{p}\alpha - m)(\not{p}(1-\alpha) - \not{q}\beta - m)}{\left[M^2\right]^{\varepsilon+1}}$$

olarak bulunur. Bu denklemin yakınsak olması nedeniyle $\varepsilon = 0$ alınabilir ve bu durumda integral

$$I_b(p,q) = \frac{2}{(4\pi)^2}\int_0^1 \mathrm{d}\alpha \int_0^{1-\alpha} \mathrm{d}\beta \frac{(\not{q}(1-\beta) - \not{p}\alpha - m)(\not{p}(1-\alpha) - \not{q}\beta - m)}{[M^2]} \quad (2.83)$$

olarak elde edilir ve sonludur. Denklem (2.82) ve (2.83) denklem (2.76)'da yerine yazılırsa sonuç

$$I(p,q) \simeq \frac{1}{16\pi^2}\frac{1}{\varepsilon} + \text{sonlu kısım} \quad (2.84)$$

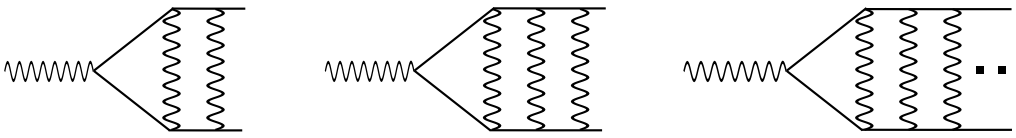
olarak elde edilir. Bulunan sonuç denklem (2.73)'de kullanılırsa integral sonucu

$$I_1 \simeq -i\frac{e^3}{4\pi^2}\gamma^\mu + \text{sonlu terim} \quad (2.85)$$

olarak bulunur. Bu saçılma sonludur ve renormalize edilmesine gerek yoktur.

2.6.2 Yüksek Mertebeden Spinör-Vektör Alan Etkileşmesi

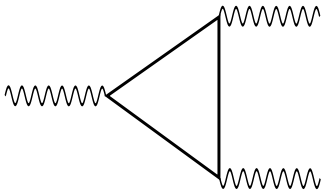
Modeldeki $\langle\overline{\psi}\not{A}\psi\rangle$ etkileşme teriminin sonlu olduğu görülmüştür, sonsuz renormalizasyona ihtiyaç yoktur ve etkileşmenin bir halka düzeltmesi Şekil 2.3'de verilmiştir.



(a) **(b)** **(c)**

Şekil 2.4: Spinör-Vektör Alan İçin (a) İkinci Mertebeden Halka (b) Üçüncü Mertebeden Halka (c) Yüksek Mertebeden Halka Etkileşme Diyagramları.

Düzeltme teriminde bir vektör ve iki spinör propagatör vardır ve çevrim momentumu üzerinden gelen ıraksaklık vektör propagatör tarafından gelen ε terimiyle yok olmaktadır. Etkileşmenin daha yüksek mertebeden düzeltmeleri Şekil 2.4'de verilmiştir. Daha yüksek mertebeden etkileşmeler de vektör propagatördeki ε nedeniyle sonlu kalmaktadır ve sonuç değişmemektedir. Sonuç olarak spinör-vektör alan etkileşmesinin renormalizasyonları sonludur. Ayrıca Şekil 2.5'de verilen üçgen spinör-vektör alan etkileşmesi Furry teoremi nedeniyle sıfırdır. Furry teoremi, abelyen teoride tek sayıda vektör parçacık içeren fermiyon halkalarının Green fonksiyonu hesaplanarını sıfır yapmaktadır [51].

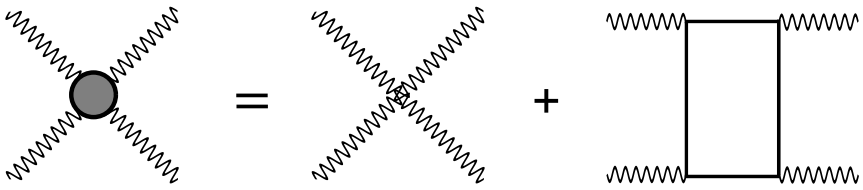


Şekil 2.5: Üçgen Spinör-Vektör Alan Etkileşme Diyagramı.

Elde edilen sonuçları doğrulamak için SD denklemi kullanılabilir. Üç nokta fonksiyonu dörtlü spinör çekirdeği içindeki iki spinöre giden vektör parçacıklarına sahiptir. Çevrim integralinin ıraksaklığı çekirdekten gelen bir $\boldsymbol{\varepsilon}$'la sıfırlanır. Sonuç olarak üç nokta fonksiyonlarının renormalizasyonları sonludur.

2.6.3 Dörtlü Vektör Alan Etkileşmesi

Denklem (2.22)'de verilen modelde dörtlü vektör alan etkileşmesi bulunmamaktadır, fakat kuantizasyon sonrası yapılan alan değişiklikleri nedeniyle modelde dörtlü alan etkileşmesi ortaya çıkmıştır. Bu etkileşmenin vektör alan etkileşme sabitine birinci mertebeden katkısı hesaplanmalıdır. Ağaç diyagramının ilk düzeltmesi dört spinör propagatör içeren kutu diyagramıdır ve Şekil 2.6'da gösterilmiştir. Dörtlü kompozit vektör alan için sonsuz renormalizasyona ihtiyaç olmadığını söylenebilir, çünkü spinör kutu diyagramı spinör KED'de sonlu olarak bilinmektedir [52–54].

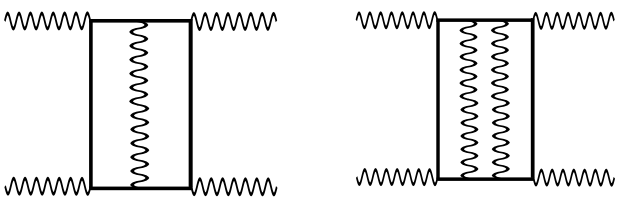


Şekil 2.6: Giydirilmiş Dörtlü Vektör Alanı Birinci Mertebeden Halka Diyagramı.

Şeklin sonlu olması nedeniyle daha yüksek mertebeler için etkileşme sabiti koşmamaktadır, yani sonlu kalmaktadır. Etkileşmenin etkileşme sabitine sonlu katkısı sadece sonlu bir etkileşme sabiti ile renormalize edilebilir.

2.6.4 Yüksek Mertebeden Dörtlü Vektör Alan Etkileşmesi

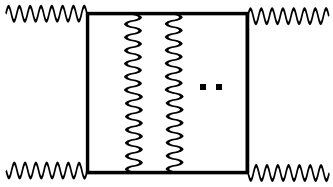
Dörtlü vektör alan etkileşmesi için yüksek mertebeden halkalarda sonsuzluk bulunmamaktadır. İki ve üç halka yaklaştırmasında elde edilen etkileşmeler Şekil 2.7'deki gibidir. Şekil 2.7a da verilen etkileşme bir kompozit vektör alan



Şekil 2.7: Dörtlü Vektör Alan Etkileşmesi İçin (a) İkinci Mertebeden Halka (b) Üçüncü Mertebeden Halka Diyagramları.

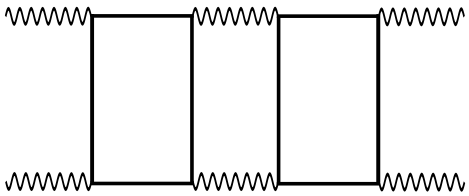
propagatörü içermektedir ve boyut analizi yöntemi kullanıldığında sonlu olduğu görülür, çünkü her bir vektör propagatör ε içermektedir. Şekil 2.7b de verilen etkileşme sekiz spinör ve iki vektör propagatör içermektedir ve etkileşme ε sıfıra gittiğinde sıfır olmaktadır.

Daha yüksek mertebeden halkalar Şekil 2.8'de verilmiştir ve ε'un lineer kuvveti olarak sıfır olmaktadır. Bu tip etkileşmeler sonsuz katkı getirmemektedir.



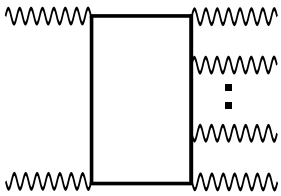
Şekil 2.8: Yüksek Mertebeden Spinör Kutu Etkileşme Diyagramı.

Şekil 2.9'da verilen üç halka etkileşmesi spinör kutu etkileşmesi kullanılarak oluşturulabilir ve diyagramın katkısı ε mertebesinde sıfır olmaktadır. Bu tip daha yüksek mertebeden etkileşmelerin katkısı yine sıfır olmaktadır.



Şekil 2.9: Üç Halka Spinör Kutu Etkileşme Diyagramı.

Kutu diyagramı kompozit parçacıklar oluşturmak için kullanılabilir ve Şekil 2.10'daki verildiği gibidir. İki gelen kompozit parçacık hariç, saçılmadan çıkan parçacıkların çift sayılı olması durumunda kompozit parçacıklar oluşturulur.

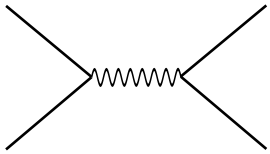


Şekil 2.10: İki Vektör Parçacığın Çift Sayıda Vektör Parçacık Oluşturma Diyagramı.

Furry teoremine göre fermiyon halka hesabında tek sayılı parçacık oluşturulması yasaktır. Bu nedenle tek sayıda parçacık oluşturulamaz.

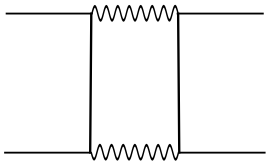
2.6.5 Spinör Saçılması

Bu bölümde spinör alan saçılmaları ve spinör alan üretimi incelenecektir. İlk olarak dörtlü spinör alan etkileşmesi incelenebilir. Modelde dörtlü spinör etkileşmesi ve etkileşme sabiti bulunmamaktadır, fakat bu etkileşmeyi elde edebilmek için vektör alan ve spinör alanın etkileşme sabitlerine ihtiyaç vardır. Bu nedenle vektör propagatörü Şekil 2.11'de olduğu gibi iç çizgi olarak kullanılmalıdır.



Şekil 2.11: Dört Spinörün Bir Vektör Alanla Etkileşme Diyagramı.

Dörtlü spinör etkileşmesi ε mertebesinde sıfıra gitmektedir, çünkü her bir vektör propagatör ε katkısı içerir. İki spinör üretmek için ağaç diyagramlarına gidildiğinde Şekil 2.12'de olduğu gibi en azından iki vektör propagatöre ihtiyaç vardır ve etkileşme ε^2 mertebesinde sıfır olmaktadır. Daha yüksek mertebeden spinör saçılmaları ε'un kuvveti olarak sıfır olmaktadır.

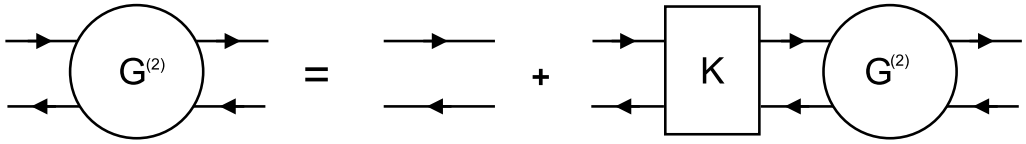


Şekil 2.12: Dört Spinör İki Vektör Etkileşme Diyagramı.

Şekil 2.11 ve Şekil 2.12'de yapılan hesaplamaları doğrulamak için Bethe-Salpeter denklemi [39] kullanılabilir ve denkleminin en genel ifadesi aşağıdaki gibidir

$$G^{(2)}(p,q;P) = G_0^{(2)}(p,q;P) + \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4}\frac{d^4q'}{(2\pi)^4} G_0^{(2)}(p,p';P)K(p',q';P)G^{(2)}(q',q;P). \quad (2.86)$$

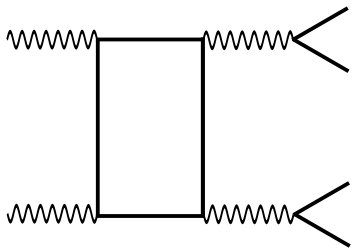
Denklemde $G_0^{(2)}(p,q;P)$ kesişmeyen spinör çizgileridir, $G^{(2)}(p,q;P)$ düzgün dört nokta fonksiyonudur, K Bethe-Salpeter çekirdeğidir ve Şekil 2.13'de gösterilmiştir.



Şekil 2.13: Bethe-Salpeter Denkleminin Diyagramı.

Denklem (2.86)'deki dörtlü spinör çekirdeği en azından bir ε içerir. Diyagramları incelemek için bastırılmış merdiven yaklaşımı kullanılabilir [25]. Burada çekirdek sadece çıplak propagatörle sınırlandırılmış vektör katkılarına ayrılmıştır ve çekirdeğe iki spinör bacakla bağlıdır. Düzgün çekirdek ε mertebesindedir, bu nedenle vektör ve iki spinör katkıları sonludur. "$\overline{\psi}\psi\overline{\psi}\psi$" terimi için toplam sonuç ε mertebesindedir ve spinör-spinör saçılma durumu $\varepsilon \to 0$ limitinde sıfır olmaktadır.

Öte yandan spinör kutu etkileşmesinden yararlanılarak spinör üretimi mümkündür. İki kompozit vektör alandan iki spinör üretimi Şekil 2.14'de gösterilmiştir ve vektör alanın uç kısmından iki spinör üretilmektedir.



Şekil 2.14: Spinör Kutu Etkileşmesinden Spinör Üretim Diyagramı.

Spinör üretimi için en az iki tane vektör propagatöre ihtiyaç vardır. Şekle göre spinör halka vektör propagatörden gelen ε^2 nedeniyle etkileşmeyi sıfıra götürür. Bu sebeple iki kompozit vektörden oluşacak spinör çift üretimi sıfır olacaktır.

2.7 RG Denklemi

Modelde bir tane etkileşme sabiti vardır ve hesaplamalar sonucunda sonsuz renormalizasyona ihtiyaç duyulan bir saçılmanın olmadığı görülmüştür. Spinör-vektör alan etkileşmesi sonlu ve dörtlü vektör alan etkileşmesinin ilk düzeltmesi olan spinör kutu etkileşmesi sonludur. Renormalizasyonda düşük enerjilerin referans noktası μ_0, renormalizasyon noktası μ olarak alınabilir ve $t = \ln \frac{\mu}{\mu_0}$ tanımlanabilir. Bu durumda etkileşme sabiti için birinci mertebeden RG denklemi aşağıdaki gibidir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} e_0 = 0. \tag{2.87}$$

Yüksek mertebeden hesaplara gidildiğinde denklemin sağ tarafını değiştirecek bir etkileşme bulunamamıştır. Bu durumda model sonlu renormalizasyona sahiptir.

2.8 Sonuç

Hesaplar sonucunda, birbirleriyle saçılabilen kompozit vektör alan içeren bir model oluşturulmuştur. Modelde temel alanların birbirleriyle saçılmaları cut-off kaldırıldığında sıfır olmaktadır, kompozit alanların birbirleriyle saçılmaları sonlu kalmaktadır ve kompozit vektör alanlarla spinör alanların etkileşmeleri sıfır saçılma genliğine sahiptir. Saçılmalarda kompozit vektör alan, sadece giren ya da çıkan parçacıklar olarak yer aldıklarında saçılma genliği sıfıra gitmektedir. Sonuç olarak, modeldeki tek etkileşme sabitinin sonsuz renormalizasyona ihtiyacı yoktur, diğer bir deyişle model sonlu renormalizasyona sahiptir.

3. SKALER ALAN EKLENMİŞ MODEL

Bir önceki bölümde oluşturulan modelin sonlu saçılma genliğine sahip olması nedeniyle sonlu renormalizasyona sahip bir teori elde edilmiştir. Bu bölümde trivial olmayan model arayışımıza devam etmek için modele kütlesiz gerçek skaler alan eklenecektir. Motivasyonumuz Bardeen ve diğerleri tarafından yapılan çalışmalardır [12, 13]. Bu çalışmalarda NJL modeline vektör alan eklendiğinde ilginç sonuçlar elde edilmiştir. Modelde kompozit vektör alanın olması nedeniyle kinetik kısma sahip kütlesiz bir skaler alan eklenebilir. Ayrıca Lagrange fonksiyonunda yeni etkileşme terimleri olacaktır ve bu etkileşmeler Lagrange fonksiyonunda dörtlü skaler alan a etkileşme sabiti ve Yukawa tipi etkileşme terimi y etkileşme sabiti ile gösterilecektir. Böylece modeldeki etkileşme sabiti sayısı üçe çıkmıştır. Bu durumda yeni Lagrange fonksiyonu aşağıdaki gibidir

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= \overline{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - ig\partial\!\!\!/ g^{-1} + eA\!\!\!/ + e\lambda\!\!\!/ - m\right)\psi - e^4\lambda GG^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\right)^2 - y\overline{\psi}\phi\psi - \frac{a}{4}\phi^4. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Lagrange fonksiyonunun kinetik terimleri spinörlerden ve skaler alandan oluşmaktadır. λ_μ, G_μ ve ϕ alanları için Euler-Lagrange hareket denklemleri

$$N^\mu - e^3 G^\mu G^2 = 0, \tag{3.2a}$$

$$N^\mu - e^3(\lambda^\mu G^2 + 2\lambda G G^\mu) = 0, \tag{3.2b}$$

$$\partial^2\phi + y\overline{\psi}\psi + a\phi^3 = 0 \tag{3.2c}$$

olarak elde edilir. (3.2a) ve (3.2b) ile gösterilen denklemler aynı zamanda yeni model için bağlardır.

3.1 Bağ Analizi

Yeni modele ait alanlar $q_i\,(\overline{\psi}, \psi, \lambda_\mu, G_\mu, \phi)$ ve alanlara karşılık gelen momentumlar $p_i\,(\pi, \overline{\pi}, \rho_\mu, \alpha_\mu, \kappa)$ şeklindedir. Denklem (2.13) kullanılarak modelin tekil olduğu söylenebilir ve bu durum denklem (2.14)'de verilen birincil bağların oluşmasına

neden olur. Model için kanonik momentumlar aşağıdaki gibidir

$$\pi = \frac{\delta L}{\delta(\partial_0 \overline{\psi})} \approx 0, \tag{3.3a}$$

$$\overline{\pi} = \frac{\delta L}{\delta(\partial_0 \psi)} \approx i\overline{\psi}\gamma_0, \tag{3.3b}$$

$$\rho_\mu = \frac{\delta L}{\delta(\partial_0 \lambda_\mu)} \approx 0, \tag{3.3c}$$

$$\alpha_\mu = \frac{\delta L}{\delta(\partial_0 G_\mu)} \approx 0, \tag{3.3d}$$

$$\kappa = \frac{\delta L}{\delta(\partial_0 \phi)} \approx \partial_0 \phi. \tag{3.3e}$$

Kanonik momentumlardan yararlanılarak oluşturulan birincil bağlar

$$\theta_1 = \pi \approx 0, \tag{3.4a}$$

$$\theta_2 = \overline{\pi} - i\overline{\psi}\gamma_0 \approx 0, \tag{3.4b}$$

$$\theta_3 = \rho_\mu \approx 0, \tag{3.4c}$$

$$\theta_4 = \alpha_\mu \approx 0, \tag{3.4d}$$

$$\theta_5 = \kappa - \partial_0 \phi \approx 0 \tag{3.4e}$$

olarak elde edilir. Denklem (2.11) kullanılarak oluşturulan kanonik Hamilton fonksiyonu

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_k &= i\overline{\psi}\gamma^i \partial_i \psi + \left(eg\partial\!\!\!/ g^{-1} - eG\!\!\!/ - e\lambda\!\!\!/ + m\right)\psi + e^4 \lambda G G^2 \\ &\quad + y\overline{\psi}\phi\psi + \frac{a}{4}\phi^4 + \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_i\phi)^2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

olarak bulunur. Denklem (2.12) kullanılarak kanonik hareket denklemleri

$$\dot{\overline{\psi}} = \frac{\partial \mathscr{H}_k}{\partial \pi} = 0,$$

$$\dot{\pi} = -\frac{\partial \mathscr{H}_k}{\partial \overline{\psi}} = -\left(i\gamma^i\partial_i + ig\partial\!\!\!/ g^{-1} - eG\!\!\!/ - e\lambda\!\!\!/ + y\phi + m\right)\psi, \tag{3.6a}$$

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \mathscr{H}_k}{\partial \overline{\pi}} = 0,$$

$$\dot{\overline{\pi}} = -\frac{\partial \mathscr{H}_k}{\partial \psi} = -\overline{\psi}\left(i\gamma^i\partial_i + ig\partial\!\!\!/ g^{-1} - eG\!\!\!/ - e\lambda\!\!\!/ + y\phi + m\right), \tag{3.6b}$$

$$\dot{\lambda}_\mu = \frac{\partial \mathscr{H}_k}{\partial \rho_\mu} = 0, \qquad \dot{\rho}_\mu = -\frac{\partial \mathscr{H}_k}{\partial \lambda_\mu} = eN^\mu - e^4 G^\mu G^2, \tag{3.6c}$$

$$\dot{G}_\mu = \frac{\partial \mathscr{H}_k}{\partial \alpha_\mu} = 0, \qquad \dot{\alpha}_\mu = -\frac{\partial \mathscr{H}_k}{\partial G_\mu} = eN^\mu - e^4\lambda_\mu G^2 - 2e^4\lambda G G_\mu, \tag{3.6d}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \mathscr{H}_k}{\partial \kappa} = 0, \qquad \dot{\kappa} = -\frac{\partial \mathscr{H}_k}{\partial \phi} = -\left(\partial^2\phi + y\overline{\psi}\psi + a\phi^3\right) \tag{3.6e}$$

olarak elde edilir. Kanonik hareket denklemleri kanonik Hamilton fonksiyonunun tek olmadığını göstermektedir. Bu nedenle denklem (2.16) kullanılarak oluşturulan etkin Hamilton fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_e &= i\overline{\psi}\gamma^i\partial_i\psi+\overline{\psi}\left(ig\partial\!\!\!/g^{-1}-eA\!\!\!/-e\lambda\!\!\!/+m\right)\psi+e^4\lambda GG^2+\frac{1}{2}\left(\partial_0\phi\right)^2+\frac{1}{2}\left(\partial_i\phi\right)^2 \\ &\quad +y\overline{\psi}\phi\psi+\frac{a}{4}\phi^4+u_1\pi+u_2(\overline{\pi}-i\overline{\psi}\gamma_0)+u_3^\mu\rho_\mu+u_4^\mu\alpha_\mu+u_5\kappa. \qquad (3.7)\end{aligned}$$

Denklemde u_m ve u_m^μ bağların katsayılardır. Denklem (2.17) kullanılarak etkin Hamilton fonksiyonu için hareket denklemleri

$$\begin{aligned}\dot{\overline{\psi}} &= \frac{\partial\mathscr{H}_k}{\partial\pi}+u_1\frac{\partial\theta_1}{\partial\pi}=u_1, \\ \dot{\pi} &= -\frac{\partial\mathscr{H}_k}{\partial\overline{\psi}}-u_1\frac{\partial\theta_1}{\partial\overline{\psi}}=-\left(i\gamma^i\partial_i+ig\partial\!\!\!/g^{-1}-eA\!\!\!/-e\lambda\!\!\!/+y\phi+m\right)\psi, \qquad (3.8a) \\ \dot{\psi} &= \frac{\partial\mathscr{H}_k}{\partial\overline{\pi}}+u_2\frac{\partial\theta_2}{\partial\overline{\pi}}=u_2, \\ \dot{\overline{\pi}} &= -\frac{\partial\mathscr{H}_k}{\partial\psi}-u_2\frac{\partial\theta_2}{\partial\psi}=-\overline{\psi}\left(i\gamma^i\partial_i+ig\partial\!\!\!/g^{-1}-eA\!\!\!/-e\lambda\!\!\!/+y\phi+m\right), \qquad (3.8b) \\ \dot{\lambda}_\mu &= \frac{\partial\mathscr{H}_k}{\partial\rho_\mu}+u_3^\mu\frac{\partial\theta_3}{\partial\rho_\mu}=u_3^\mu, \\ \dot{\rho}_\mu &= -\frac{\partial\mathscr{H}_k}{\partial\lambda_\mu}-u_3^\mu\frac{\partial\theta_3}{\partial\lambda_\mu}=eN^\mu-e^4G^\mu G^2, \qquad (3.8c) \\ \dot{G}_\mu &= \frac{\partial\mathscr{H}_k}{\partial\alpha_\mu}+u_4^\mu\frac{\partial\theta_4}{\partial\alpha_\mu}=u_4^\mu, \\ \dot{\alpha}_\mu &= -\frac{\partial\mathscr{H}_k}{\partial G_\mu}-u_4^\mu\frac{\partial\theta_4}{\partial G_\mu}=eN^\mu-e^4\lambda^\mu G^2-2e^4\lambda GG^\mu, \qquad (3.8d) \\ \dot{\phi} &= \frac{\partial\mathscr{H}_k}{\partial\kappa}+u_5\frac{\partial\theta_5}{\partial\kappa}=u_5, \\ \dot{\kappa} &= -\frac{\partial\mathscr{H}_k}{\partial\phi}-u_5\frac{\partial\theta_5}{\partial\phi}=-\left(\partial^2\phi+y\overline{\psi}\psi+a\phi^3\right) \qquad (3.8e)\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Modelin tutarlı olması için bağların zaman içinde değişmemesi gerekir ve denklem (2.18) kullanılarak bağların zaman türevleri

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= -\left(i\gamma^i\partial_i+ig\partial\!\!\!/g^{-1}-eA\!\!\!/-e\lambda\!\!\!/+y\phi+m\right)\psi+i\gamma_0u_2, \qquad (3.9a) \\ \dot{\theta}_2 &= -\overline{\psi}\left(i\gamma^i\partial_i+ig\partial\!\!\!/g^{-1}-eA\!\!\!/-e\lambda\!\!\!/+y\phi+m\right)-i\gamma^0u_1, \qquad (3.9b) \\ \dot{\theta}_3 &= -\left(-eN^\mu+e^4G^\mu G^2\right), \qquad (3.9c) \\ \dot{\theta}_4 &= -\left(-eN^\mu+e^4\lambda^\mu G^2+2e^4\lambda GG^\mu\right), \qquad (3.9d) \\ \dot{\theta}_5 &= -\left(\partial^2\phi+y\overline{\psi}\psi+a\phi^3\right). \qquad (3.9e)\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Denklem (3.9a) ve (3.9b) u_1 ve u_2 katsayıları ile alanlar arasındaki ilişkiyi vermektedir. Denklem (3.9c), (3.9d) ve (3.9e) u_m katsayılarından bağımsız olarak alanlar ve momentumlar arasında yeni ilişkiler vermiştir ve bunlar "ikincil bağlar" dır. Model için ikincil bağlar aşağıdaki gibidir

$$\theta_6 = N^\mu - e^3 G^\mu G^2 \approx 0, \tag{3.10a}$$

$$\theta_7 = N^\mu - e^3 \lambda^\mu G^2 - 2e^3 \lambda G G^\mu \approx 0, \tag{3.10b}$$

$$\theta_8 = \partial^2 \phi + y\overline{\psi}\psi + a\phi^3 \approx 0. \tag{3.10c}$$

Denklemde θ_8 sistemin hareket denklemidir, bu nedenle model için θ_5 ve θ_8 bağ olarak alınamaz. İkincil bağların zaman türevleri aşağıdaki gibidir

$$\dot{\theta}_6 = ie\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^i\partial_i\psi + u_1 e\gamma^\mu\psi + u_2 e\overline{\psi}\gamma^\mu - u_4^\mu e^4\left(g^{\mu\nu}G^2 + 2G^\mu G^\nu\right) \approx 0 \tag{3.11a}$$

$$\dot{\theta}_7 = ie\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^i\partial_i\psi + u_1 e\gamma^\mu\psi + u_2 e\overline{\psi}\gamma^\mu - u_3^\mu e^4\left(g^{\mu\nu}G^2 + 2G^\mu G^\nu\right) + 6e^3 u_4^\mu \lambda G \approx 0. \tag{3.11b}$$

Denklem (3.11) yardımıyla u_3^μ ve u_4^μ katsayıları elde edilir ve bağ hesaplama işlemi tamamlanmış olur. Modelde dördü birincil ve ikisi ikincil olmak üzere altı adet bağ bulunmaktadır.

Modeldeki bağların sınıflarını denklem (2.20) yardımıyla incelenebilir. Bağların sıfırdan farklı Poisson parantezleri

$$\{\theta_1, \theta_2\} \approx i\gamma^0, \tag{3.12a}$$

$$\{\theta_1, \theta_6\} \approx -\gamma^\mu\psi, \tag{3.12b}$$

$$\{\theta_1, \theta_7\} \approx -\gamma^\mu\psi, \tag{3.12c}$$

$$\{\theta_2, \theta_6\} \approx -\overline{\psi}\gamma^\mu, \tag{3.12d}$$

$$\{\theta_2, \theta_7\} \approx -\overline{\psi}\gamma^\mu, \tag{3.12e}$$

$$\{\theta_3, \theta_7\} \approx e^3\left(g^{\mu\nu}G^2 + 2G^\mu G^\nu\right), \tag{3.12f}$$

$$\{\theta_4, \theta_6\} \approx e^3\left(g^{\mu\nu}G^2 + 2G^\mu G^\nu\right), \tag{3.12g}$$

$$\{\theta_4, \theta_7\} \approx 6e^3\lambda G \tag{3.12h}$$

olarak elde edilir ve görüleceği üzere modeldeki bağlar ikinci sınıf bağlardır. İkinci sınıf bağlar denklem (3.12) yardımıyla aşağıdaki gibi (6×6) boyutunda tekil olmayan bir matris oluştururlar [45]

$$C_{ij} = \{\theta_i, \theta_j\} = \begin{pmatrix} 0 & A & 0 & 0 & B & B \\ -A & 0 & 0 & 0 & C & C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D & E \\ -B & -C & 0 & -D & 0 & 0 \\ -B & -C & -D & -E & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

matriste $A = i\gamma^0$, $B = -\gamma^\mu \psi$, $C = -\overline{\psi}\gamma^\mu$, $D = e^3\left(g^{\mu\nu}G^2 + 2G^\mu G^\nu\right)$ ve $E = 6e^3\lambda G$ olarak tanımlıdır.

Model için Faddeev-Popov determinantı aşağıdaki gibi oluşturulur

$$\Delta_F = \det\left|\{\theta_i, \theta_j\}\right|^{1/2} = \det\left[e^6\left(g^{\mu\nu}G^2 + 2G^\mu G^\nu\right)^2\right]. \tag{3.14}$$

Denklemdeki alan bağımlılığı denklem (3.2a) ve (3.2b)'den gelmektedir.

3.2 Fonksiyonel İntegral Kuantizasyonu

Modelin kuantizasyonu için yol integralleri yöntemi kullanılacaktır. Model için bölüşüm fonksiyonunu aşağıdaki gibidir

$$\mathscr{Z} = \int \mathscr{D}\Pi\mathscr{D}\chi\,\delta(\theta_a)\Delta_F \exp\left(i\int \mathrm{d}^4x(\dot{\chi}\Pi - \mathscr{H}_k)\right). \tag{3.15}$$

Denklemde χ tüm alanları, Π tüm momentumları ve θ_a tüm bağları temsil etmektedir. Tüm momentumlar üzerinden integral alındığında bölüşüm fonksiyonu

$$\mathscr{Z} = \int \mathscr{D}\overline{\psi}\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\lambda_\mu\mathscr{D}G_\mu\mathscr{D}\phi\left(\frac{\Delta_F}{\det\left[e^3\left(g^{\mu\nu}G^2 + 2G^\mu G^\nu\right)\right]}\right)\exp\left(i\int \mathrm{d}^4x\mathscr{L}\right)$$

olarak elde edilir ve denklemdeki bölüm halindeki kısım için işlem yapılacak olursa

$$\frac{\Delta_F}{\det\left[e^3\left(g^{\mu\nu}G^2 + 2G^\mu G^\nu\right)\right]} = \det\left[e^3\left(g^{\mu\nu}G^2 + 2G^\mu G^\nu\right)\right] \tag{3.16}$$

elde edilir. Denklem (3.16) Faddeev-Popov hayalet alanları C^*_μ ve C_ν kullanarak aşağıdaki eşitlik yardımıyla integral formunda yazılabilir

$$\det\left[e^3\left(g^{\mu\nu}G^2 + 2G^\mu G^\nu\right)\right] = \int \mathscr{D}C^*_\mu\mathscr{D}C_\nu \exp\left[-\int \mathrm{d}^4x C^*_\mu e^3\left(g^{\mu\nu}G^2 + 2G^\mu G^\nu\right)C_\nu\right].$$

Denklemdeki üstel kısım Lagrange fonksiyonuna eklenebilir ve sonuç olarak model için elde edilen etkin Lagrange fonksiyonu aşağıdaki gibidir

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{etkin} &= \overline{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - ig\phi\!\!\!/ g^{-1} + e\left[G\!\!\!/ + \lambda\!\!\!/\right] - y\phi - m\right)\psi - e^4\lambda G G^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\right)^2 - \frac{a}{4}\phi^4 + iC^*_\mu e^3\left(g^{\mu\nu}G^2 + 2G^\mu G^\nu\right)C_\nu. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Etkin Lagrange fonksiyonunun spinör alanlar üzerinden integrali alındığında

$$\int \mathscr{D}\overline{\psi}\mathscr{D}\psi \exp\left[i\int \mathrm{d}^4x\overline{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - ig\partial\!\!\!/ g^{-1} + e\left[G\!\!\!/ + \lambda\!\!\!/\right] - y\phi - m\right)\psi\right] = (-i)\det\left[i\partial\!\!\!/ - ig\partial\!\!\!/ g^{-1} + e\left(G\!\!\!/ + \lambda\!\!\!/\right) + y\phi - m\right] \tag{3.18}$$

elde edilir. Denklem (3.18)'deki determinant denklem (2.40) yardımıyla üstel şekilde ifade edilebilir ve bu durumda bölüşüm fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir

$$\mathscr{Z} = \int \mathscr{D}\lambda_\mu \mathscr{D}G_\mu \mathscr{D}\phi \mathscr{D}C^*_\mu \mathscr{D}C_\nu \exp\left(i\left[\mathrm{Tr}\ln\left(i\partial\!\!\!/ - ig\partial\!\!\!/ g^{-1} + e\left(G\!\!\!/ + \lambda\!\!\!/\right) - y\phi - m\right) - \int \mathrm{d}^4x e^4\lambda GG^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\right)^2 - \frac{a}{4}\phi^4 + iC^*_\mu e^3\left(g^{\mu\nu}G^2 + 2G^\mu G^\nu\right)C_\nu\right]\right).$$

Bölüşüm fonksiyonunun üstel kısmı etkin eyleme eşittir ve elde edilen etkin eylem aşağıdaki gibidir

$$\mathbf{S}_{etkin} = \mathrm{Tr}\ln\left[i\partial\!\!\!/ - ig\partial\!\!\!/ g^{-1} + e(G\!\!\!/ + \lambda\!\!\!/) - y\phi - m\right] + \int dx^4\left(-e^4\lambda GG^2 + iC^*_\mu e^3\left(g^{\mu\nu}G^2 + 2G^\mu G^\nu\right)C_\nu + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\right)^2 - \frac{a}{4}\phi^4\right). \tag{3.19}$$

Alanlar denklem (2.43)'da olduğu gibi yeniden tanımlanabilir ve yeni alanların ters dönüşümleri denklem (2.44)'de verilmiştir. Ters dönüşümlerin denklem (3.19)'da kullanılmasıyla yeni etkin eylem

$$\mathbf{S}_{etkin} = \mathrm{Tr}\ln\left(i\partial\!\!\!/ + eJ\!\!\!/ - y\phi - m\right) + \int \mathrm{d}x^4\left[e^4J^4 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\right)^2 - \frac{a}{4}\phi^4 + \text{diğer terimler}\right] \tag{3.20}$$

olarak elde edilir. Etkin eylemden açıkca anlaşılacağı üzere etkileşen alanlar kompozit vektör alan ve skaler alandır. Diğer terimler alanların üçlü veya dörtlü çarpımları halinde bulunmamaktadır. İlk olarak etkin eylemin alanlara göre birinci türevi alınarak sıfıra eşitlenebilir ve iribaşlar yokedilebilirler. Ayrıca tüm vektör alanların vakum beklenen değerleri sıfırdır.

3.3 Propagatörler

Alanlara ait propagatörlerin hesaplanması için denklem (3.20)'de verilen etkin eylemin alanlara göre ikinci türevlerinin alınması gerekmektedir. Elde edilecek sonuçlar ters propagatöre eşittir.

3.3.1 Skaler Alan Propagatörü

Modelimiz için skaler alan propagatörü aşağıdaki gibidir

$$G(p) = \frac{1}{p^2}. \tag{3.21}$$

Modele eklenen skaler terim kütlesiz olduğu için propagatörde kütle terimi bulunmamaktadır.

3.3.2 Kompozit Vektör Alan Propagatörü

Kompozit vektör alan için propagatör

$$\Delta^{-1}_{\mu\nu} = -\left.\frac{\partial^2 \mathbf{S}_{etkin}}{\partial J_\mu \partial J_\nu}\right|_{J_\mu=0} = \frac{e^2}{2\pi^2}\left(g_{\mu\nu}p^2 - p_\mu p_\nu\right)\left[\frac{1}{\varepsilon} + \text{sonlu kısım}\right] \tag{3.22}$$

olarak elde edilir. Modele skaler alan eklenmesi kompozit vektör alan propagatörüne yeni bir katkı getirmemiştir. Bu nedenle bundan sonraki hesaplarımızda vektör alan propagatörü için denklem (2.58)'de verilen propagatör, $\varepsilon\frac{g_{\mu\nu}}{p^2}$, kullanılacaktır.

Spinör alan propagatörü için denklem (2.46) kullanılacaktır. Diğer alanların propagatör fonksiyonları ise sıfır olmaktadır

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^2 \mathbf{S}_{etkin}}{\partial F_\mu \partial F_\nu}\right|_{F_\mu=0} &= 0, \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{S}_{etkin}}{\partial F_\mu \partial J_\nu} = 0, \\
\left.\frac{\partial^2 \mathbf{S}_{etkin}}{\partial A_\mu \partial A_\nu}\right|_{A_\mu=0} &= 0, \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{S}_{etkin}}{\partial A_\mu \partial J_\nu} = 0.
\end{aligned}$$

Böylece F_μ, A_μ alanları ve hayalet alanlar modelden düşmektedir. Sonuç olarak etkin eylem aşağıdaki gibidir

$$\mathbf{S}_{etkin} = \mathrm{Tr}\ln\left(i\partial\!\!\!/ + eA\!\!\!/ - y\phi - m\right) + \int \mathrm{d}x^4 \left(e^4 J^4 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)^2 - \frac{a}{4}\phi^4\right). \tag{3.23}$$

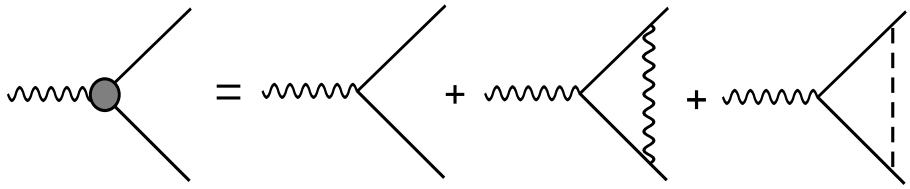
3.4 Etkileşmeler

Modele skaler alan eklenmesi temel etkileşmelerin bir halka açılımlarına katkıda bulunmuştur ve yeni saçılma grafikleri ortaya çıkmıştır. Bu bölümde yeni modeldeki üç ve dört nokta fonksiyonları yeniden incelenecektir. Yeni model için saçılma grafikleri elde edilecek ve bu grafiklerin saçılma genlikleri hesaplanacaktır. Üç nokta fonksiyonları için açık hesaplar yapılacaktır, fakat dört ve daha büyük

nokta fonksiyonları için boyut analizi yönteminden yararlanılacaktır. Hesaplar sırasında sadece merdiven resimlerinin katkıları kullanılacaktır. Sadece merdiven katkılarını almak aslında $1/N$ açılımında geçerlidir. Burada, gerekirse N iç simetrisi eklenip böyle bir açılım yapılabileceği düşünülmektedir. Bu düşünceyle sadece merdiven katkıları dikkate alınmaktadır.

3.4.1 Spinör-Vektör Alan Etkileşmesi

Modele gerçek skaler alan eklenmesi nedeniyle giydirilmiş spinör-vektör köşesine bir halka yaklaştırmasında skaler alandan katkı gelmektedir. Etkileşme diyagramı Şekil 3.1'deki gibidir ve burada skaler alan kesikli çizgi ile gösterilmiştir.



Şekil 3.1: Giydirilmiş Spinör-Vektör Alan Etkileşmesinin Birinci Mertebeden Halka Diyagramı.

Şekildeki eşitliğin sağ tarafındaki ilk iki etkileşme bölüm 2.6.1'de hesaplanmıştır ve sonludur. İkinci resim vektör alan propagatöründen gelen ε nedeniyle sonludur. Son resim ise modele skaler alan eklendikten sonra birinci mertebeden düzeltme olarak gelmektedir. Sonsuzluk içeren bir diyagramdır ve sonsuzluğunun hesaplanması gerekmektedir. Şeklin matematiksel ifadesi aşağıdaki gibidir

$$I_2 = -i\Gamma^{\mu}(p,q) = \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}(-ie\gamma^{\mu})S(q+k)(-iy)G(k)(-iy)S(p+k). \qquad (3.24)$$

Denklemde alan propagatörleri yerine yazıldığında integral

$$I_2 = -iey^2\gamma^{\mu}\int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{(\not{q}+\not{k}-m)}\frac{1}{k^2}\frac{1}{(\not{q}+\not{k}-m)} \qquad (3.25)$$

olarak elde edilir. İntegral, denklem (2.74)'de tanımlan $I(p,q)$ integrali yardımıyla aşağıdaki gibi yazılabilir

$$I_2 = -iey^2\gamma^{\mu}I(p,q). \qquad (3.26)$$

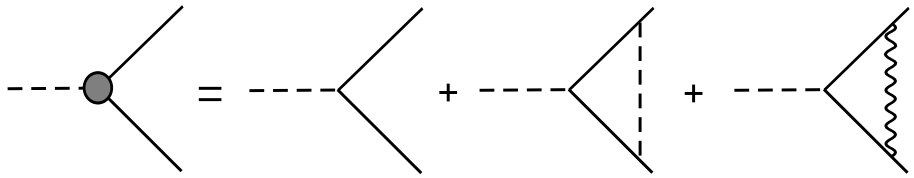
$I(p,q)$ integral sonucu denklem (2.84)'de verilmiştir. Denklem (3.26)'da kullanılarak sonuç

$$I_2 \simeq -i\frac{ey^2}{16\pi^2}\frac{\gamma^{\mu}}{\varepsilon} + \text{sonlu kısım} \qquad (3.27)$$

olarak hesaplanır ve saçılma beklenildiği gibi sonsuzluk içermektedir. Bu nedenle saçılmanın sonsuz renormalizasyona ihtiyacı vardır ve RG denkleminde kullanılacaktır.

3.4.2 Spinör-Skaler Alan Etkileşmesi

Modele gerçek skaler alan eklenmesiyle birlikte spinör-skaler alan etkileşmesi ortaya çıkmıştır ve etkileşmenin incelenmesi gerekmektedir. Giydirilmiş spinör-skaler alan etkileşmesinin bir halka açılımı Şekil 3.2'de verilmiştir.



Şekil 3.2: Giydirilmiş Spinör-Skaler Alan Etkileşmesinin Birinci Mertebeden Halka Diyagramı.

Şekilde eşitliğin sağ tarafındaki ilk resim sonludur, üçüncü resim birinci meretebeden vektör alan katkısıdır ve vektör alan propagatöründen gelen ε nedeniyle sonludur. İkinci resim ise sonsuzluk içermektedir ve resmin matematiksel ifadesi aşağıdaki gibidir

$$I_3 = -i\Gamma(p,q) = \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}(-iy)S(p+k)(-iy)G(k)(-iy)S(q+k). \tag{3.28}$$

Denklemde alan propagatörleri yerine yazıldığında integral

$$I_3 = -iy^3 \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\not{p}+\not{k}-m)} \frac{1}{(\not{q}+\not{k}-m)} \frac{1}{k^2} \tag{3.29}$$

halini alır ve denklem düzenlenirse

$$I_3 = -iy^3 \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \frac{(\not{p}+\not{k}-m)(\not{q}+\not{k}-m)}{k^2\left[(p+k)^2+m^2\right]\left[(q+k)^2+m^2\right]} \tag{3.30}$$

elde edilir. Görüleceği üzere I_3 integrali denklem (2.74)'de tanımlanmış $I(p,q)$ integrali ile orantılıdır

$$I_3 = -iy^3 I(p,q). \tag{3.31}$$

Denklemde $I(p,q)$ integral sonucu denklem (2.84) kullanılarak I_3 integrali

$$I_3 \simeq -i\frac{y^3}{16\pi^2}\frac{1}{\varepsilon} + \text{sonlu kısım} \tag{3.32}$$

olarak hesaplanır. Saçılma sonsuzluk içermektedir. Bu nedenle saçılmanın sonsuz renormalizasyona ihtiyacı vardır ve RG denkleminde kullanılacaktır.

Şekil 3.2'de eşitliğin sağ tarafındaki üçüncü etkileşmenin boyut analizi kullanılarak sonlu saçılma genliğine sahip olduğu görülebilir, fakat öngörüyü doğrulamak için hesap yapılmalıdır. Etkileşmenin matematiksel ifadesi aşağıdaki gibidir

$$I_4 = -i\Gamma(p,q) = \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}(-iy)iS(p+k)(-ie\gamma^\mu)\Delta_{\mu\nu}(k)(-ie\gamma^\nu)S(q+k).$$

Denklemde alan propagatörleri yerine yazıldığında integral

$$I_4 = -4iye^2\varepsilon \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2}\frac{1}{(\not{p}+\not{k}-m)}\frac{1}{(\not{q}+\not{k}-m)} \tag{3.33}$$

olarak elde edilir ve denklem düzenlenirse integral

$$I_4 = -4iye^2\varepsilon \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{(\not{p}+\not{k}-m)(\not{q}+\not{k}-m)}{k^2\left[(q+k)^2+m^2\right]\left[(p+q)^2+m^2\right]} \tag{3.34}$$

halini alır. Görüleceği üzere I_4 integrali denklem (2.74)'de tanımlanmış $I(p,q)$ integrali ile orantılıdır

$$I_4 = -4iye^2\varepsilon I(p,q). \tag{3.35}$$

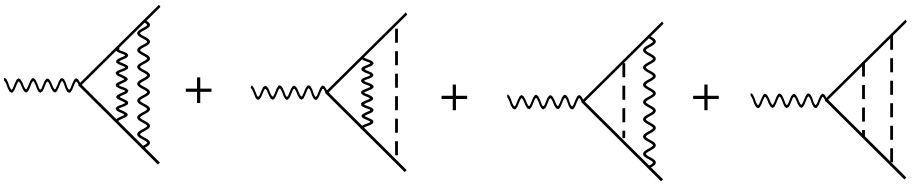
Denklemde $I(p,q)$ integral sonucu denklem (2.84) kullanılarak I_4 integrali

$$I_4 \simeq -i\frac{4ye^2}{16\pi^2} + \text{sonlu kısım} \tag{3.36}$$

olarak elde edilir ve saçılma sonludur. Bu nedenle saçılmanın renormalize edilmesine gerek yoktur.

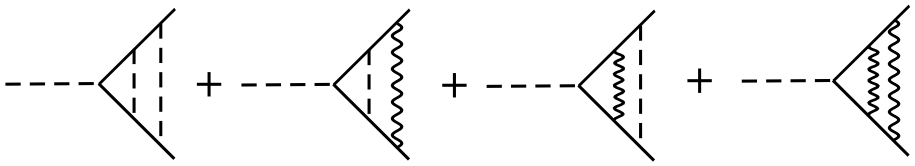
3.4.3 İkinci Mertebeden Halka Köşe Düzeltmeleri

Spinör-vektör alan ve spinör-skaler alan etkileşmelerinin iki halka düzeltmeleri de incelenebilir ve işlemler boyut analizi yöntemi kullanılarak kolaylıkla hesaplanabilir. Spinör-vektör alan etkileşmesine iki halka düzeltmeleri Şekil 3.3'deki gibidir. Bu saçılmaların içerisinde iki vektör alan bulunan ilk resim sonludur, ikinci ve üçüncü resim $1/\varepsilon$ mertebesinde sonsuzdur ve son resim $1/\varepsilon^2$ mertebesinde sonsuzluk içermektedir.



Şekil 3.3: Spinör-Vektör Alan Etkileşmesi İçin İkinci Mertebeden Halka Düzeltmeleri.

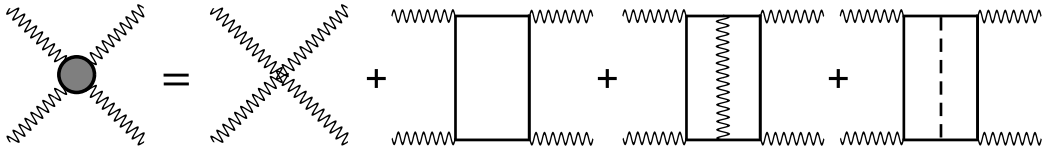
Spinör-skaler alan etkileşmesinin iki halka düzeltmeleri Şekil 3.4'deki gibidir. Bu saçılmaların içerisinde ilk resim $1/\varepsilon^2$ mertebesinde sonsuzdur, ikinci ve üçüncü resim $1/\varepsilon$ mertebesinde sonsuzluk içermektedir ve son resim vektör alan propagatöründeki ε nedeniyle sonludur.



Şekil 3.4: Spinör-Skaler Alan Etkileşmesi İçin İkinci Mertebeden Halka Düzeltmeleri.

3.4.4 Birinci Mertebeden Halka Kutu Düzeltmeleri

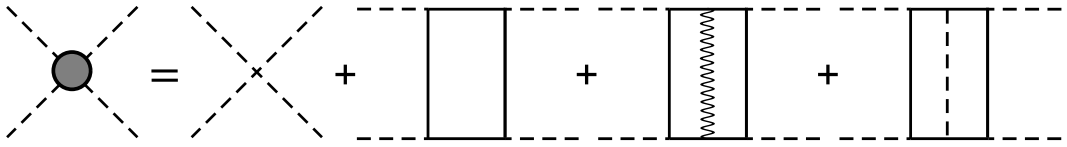
İkinci bölümde incelenen modelde dörtlü kompozit vektör etkileşmelerine sadece vektör düzeltmeleri gelebiliyordu ve dörtlü skaler alan etkileşmesi bulunmuyordu. Yeni modelde hem dörtlü kompozit vektör alan etkileşmelerine skaler alan katkısı bulunmakta hem de dörtlü skaler alan etkileşmesi bulunmaktadır. Yeni modelde dörtlü vektör alan etkileşmesi için bir ve iki halka düzeltmeleri Şekil 3.5'deki gibidir.



Şekil 3.5: Giydirilmiş Dörtlü Vektör Alan İçin Birinci ve İkinci Mertebeden Halka Düzeltmeleri.

Eşitliğin sağ tarafındaki ikinci etkileşme bölüm 2.6.3'de incelenmiştir ve saçılmasının standart KED'de sonlu olduğu bilinmektedir. Diğer iki etkileşme ise iki halka katkısıdır.

Modelde dörtlü skaler alan etkileşmesi $\phi^4/4$ terimi ile bulunmaktadır ve etkileşmenin bir ve iki halka düzeltmeleri Şekil 3.6'daki gibidir. Etkileşmelerde



Şekil 3.6: Giydirilmiş Dörtlü Skaler Alan İçin Birinci ve İkinci Mertebeden Halka Düzeltmeleri.

skaler köşe oluşturabilmek için en az iki tane spinöre ihtiyaç vardır. Bir halka yaklaştırmasından gelecek katkı spinör kutu diyagramıdır ve diğer iki etkileşme iki halka katkısıdır. Spinör kutu etkileşmesi boyut analizi kullanılarak logaritmik ıraksak olduğu görülebilir ve içerdiği sonsuzluğun hesaplanması gerekmektedir. Spinör kutu etkileşmesinin matematiksel ifadesi aşağıdaki gibidir

$$I_5 = (-iy)^4 \mathrm{Tr} \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} S(k)S(k+p_1)S(k+p_1+p_2)S(k+p_1+p_2-p_3). \quad (3.37)$$

Denklemde spinör alan propagatörleri yerine yazıldığında

$$I_5 = (-iy)^4 \mathrm{Tr} \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}-m}{k^2+m^2} \frac{(\not{k}+\not{p_1}-m)}{(k+p_1)^2+m^2} \frac{(\not{k}+\not{p_1}+\not{p_2}-m)}{(k+p_1+p_2)^2+m^2} \frac{(\not{k}+\not{p_1}+\not{p_2}-\not{p_3}-m)}{(k+p_1+p_2-p_3)^2+m^2} \quad (3.38)$$

elde edilir. Denklem (3.38)'in izi denklem (A.10) yardımıyla alınabilir. İşlemleri daha sade bir halde ifade etmek için yeni momentumlar aşağıdaki gibi tanımlanabilir

$$\begin{aligned} t &= k, \\ t_1 &= k+p_1, \\ t_2 &= k+p_1+p_2, \\ t_3 &= k+p_1+p_2-p_3. \end{aligned}$$

Paydaki kütle terimlerinden gelecek çapraz ifadeler için boyut analizi yöntemi kullanılabilir ve sonlu değere sahip oldukları görülür. Bu nedenle integrallerin payında kütle terimleri yer almayacaktır. Denklem (3.38)'de verilen integral yeni momentumlar kullanılarak üç parçaya ayrılabilir

$$I_{51} = y^4 \int \frac{\mathrm{d}^4t}{(2\pi)^4} \left[\frac{2(t.t_1).2(t_2.t_3)}{(t^2+m^2)(t_1^2+m^2)(t_2^2+m^2)(t_3^2+m^2)} \right], \quad (3.39a)$$

$$I_{52} = y^4 \int \frac{\mathrm{d}^4t}{(2\pi)^4} \left[\frac{2(t.t_2)2(t_1.t_3)}{(t^2+m^2)(t_1^2+m^2)(t_2^2+m^2)(t_3^2+m^2)} \right], \quad (3.39b)$$

$$I_{53} = y^4 \int \frac{\mathrm{d}^4 t}{(2\pi)^4} \left[\frac{2(t.t_3)2(t_1.t_2)}{(t^2+m^2)(t_1^2+m^2)(t_2^2+m^2)(t_3^2+m^2)} \right] \tag{3.39c}$$

Denklem (3.38)'de verilen I_5 integrali (3.39) denklemleri yardımıyla $I_5 = I_{51} - I_{52} + I_{53}$ şeklinde oluşturulabilir. (3.39) denklemlerini çözmek için ilk olarak aşağıdaki gibi tam kareye tamamlanırsa

$$I_{51} = y^4 \int \frac{\mathrm{d}^4 t}{(2\pi)^4} \left[\frac{(t^2+t_1^2-p_1^2)(t_2^2+t_3^2-p_3)^2}{(t^2+m^2)(t_1^2+m^2)(t_2^2+m^2)(t_3^2+m^2)} \right], \tag{3.40a}$$

$$I_{52} = y^4 \int \frac{\mathrm{d}^4 t}{(2\pi)^4} \left[\frac{(t^2+t_2^2-(p_1+p_2)^2)(t_1^2+t_3^2-(p_2+p_3)^2)}{(t^2+m^2)(t_1^2+m^2)(t_2^2+m^2)(t_3^2+m^2)} \right], \tag{3.40b}$$

$$I_{53} = y^4 \int \frac{\mathrm{d}^4 t}{(2\pi)^4} \left[\frac{(t^2+t_3^2-(p_1+p_2+p_3)^2)(t_1^2+t_2^2-p_2^2)}{(t^2+m^2)(t_1^2+m^2)(t_2^2+m^2)(t_3^2+m^2)} \right] \tag{3.40c}$$

elde edilir. Gerekli cebirsel işlemler yapıldıktan sonra terimler boyutlarına göre sıralandığında bazı terimlerin $\mathrm{d}^4 t \frac{t^4}{t^8}$, bazı terimlerin $\mathrm{d}^4 t \frac{t^2}{t^8}$ ve bazı terimlerin ise $\mathrm{d}^4 t \frac{1}{t^8}$ boyutunda olduğu görülmektedir. Bu terimler boyut analizi kullanılarak sırasıyla incelendiğinde, birinci terimin logaritmik sonsuzluk içerdiği, ikinci ve üçüncü terimlerin sonlu kaldığı görülebilir. Sonsuzluk içeren terimin hesabına devam edilirse integral

$$I_{51} \approx 2y^4 \int \frac{\mathrm{d}^4 t}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{t_1^2 t_3^2} + \frac{1}{t^2 t_2^2} \right] + \text{sonlu kısım} \tag{3.41}$$

olarak bulunur. Denklem (3.41)'de ikili Feynman parametrizasyonu yapılır ve denklem (B.1) kullanılarak düzenlenirse integral

$$I_{51} \approx \frac{4y^4}{16\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} + \text{sonlu kısım} \tag{3.42}$$

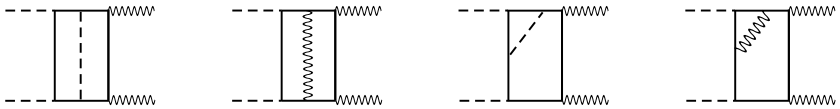
olarak hesaplanır. Sonuç beklenildiği gibi $\frac{1}{\varepsilon}$ mertebesinde çıkmıştır. Denklem (3.42) denklem (3.38)'de yerine yazılırsa spinör kutu etkileşmesinin sonucu

$$I_5 \approx \frac{4y^4}{16\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} + \text{sonlu kısım} \tag{3.43}$$

olarak elde edilir. Saçılma sonsuzluk içermektedir ve RG denkleminde kullanılacaktır.

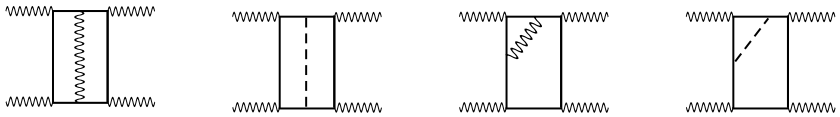
3.4.5 Kutu Etkileşmelerinin İkinci Mertebeden Halka Düzeltmeleri

Kutu etkileşmelerinin daha yüksek mertebeden hesapları da yapılabilir. Daha yüksek mertebeden düzeltmeler iki halka katkıları ile başlamaktadır.



Şekil 3.7: İki Skaler İki Vektör Alan Etkileşmesinde (a) Skaler Alan Düzeltmesi (b) Vektör Alan Düzeltmesi (c) Köşe Skaler Alan Düzeltmesi (d) Köşe Vektör Alan Düzeltmesi.

İki skaler iki vektör alan etkileşmesinin düzeltmeleri Şekil 3.7'deki gibidir. Şekildeki etkileşmelerden akım korunumu nedeniyle sonsuz katkı gelmemektedir. Ayrıca Şekil 3.7c ve 3.7d etkileşme sabitinin köşe düzeltmelerine katkıda bulunmaktadır.



Şekil 3.8: Dörtlü Vektör Alan Etkileşmesinde (a) Vektör Alan Düzeltmesi (b) Skaler Alan Düzeltmesi (c) Köşe Vektör Alan Düzeltmesi (d) Köşe Skaler Alan Düzeltmesi.

Dörtlü vektör alan etkileşmesinin düzeltmeleri Şekil 3.8'deki gibidir. Şekil 3.8a sonlu kalmaktadır ve Şekil 3.8b $1/\varepsilon$ mertebesinde sonsuzluk içerdiği öngörülmesine rağmen akım korunumu nedeniyle sonlu kalmaktadır, Şekil 3.8c ve 3.8d etkileşme sabitinin köşe düzeltmelerine katkıda bulunmaktadır.

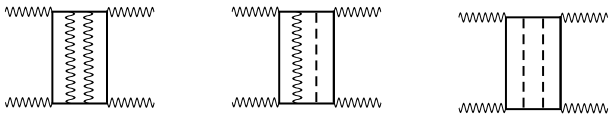


Şekil 3.9: Dörtlü Skaler Alan Etkileşmesinde (a) Skaler Alan Düzeltmesi (b) Vektör Alan Düzeltmesi (c) Köşe Skaler Alan Düzeltmesi (d) Köşe Vektör Düzeltmesi.

Dörtlü skaler alan etkileşmesinin düzeltmeleri Şekil 3.9'daki gibidir. Şekil 3.9a $1/\varepsilon$ mertebesinde sonsuzluk içermektedir, Şekil 3.9b vektör propagatöründen gelen ε nedeniyle sonludur, Şekil 3.9c ve Şekil 3.9d etkileşme sabitinin köşe düzeltmelerine katkıda bulunmaktadır.

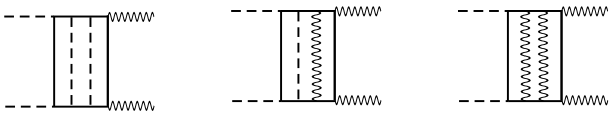
3.4.6 Kutu Etkileşmelerinin Üçüncü Mertebeden Halka Düzeltmeleri

Modeldeki etkileşme sabitlerinin davranışlarını daha iyi anlayabilmek için kutu etkileşmelerinin üç halka etkileşmeleri de incelenebilir. Dörtlü vektör alan etkileşmesi için üç halka yaklaştırmasından elde edilen saçılmalar Şekil 3.10'da verilmiştir. Şekil 3.10a ε mertebesinde sıfırdır, Şekil 3.10b vektör



Şekil 3.10: Dörtlü Vektör Alan Etkileşmesi İçin Üç Halkada (a) İki Vektör Alan Düzeltmesi (b) Vektör Ve Skaler Alan Düzeltmesi (c) İki Skaler Alan Düzeltmesi.

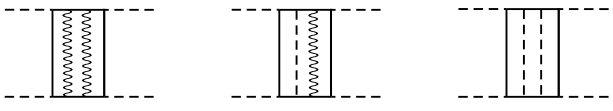
propagatör nedeniyle sonludur ve Şekil 3.10c $1/\varepsilon$ mertebesinde sonsuzluk içerdiği öngörülmesine rağmen akım korunumu nedeniyle sonlu olmaktadır.



Şekil 3.11: İki Skaler İki Vektör Alan Etkileşmesi İçin Üç Halkada (a) İki Skaler Alan Düzeltmesi (b) Skaler Ve Vektör Alan Düzeltmesi (c) İki Vektör Alan Düzeltmesi.

Kutu diyagramlarında bir diğer etkileşme iki skaler iki vektör etkileşmesidir ve üç halka yaklaştırmasından elde edilen saçılmalar Şekil 3.11'deki gibidir. Şekil 3.11a akım korunumu nedeniyle sonludur, Şekil 3.11b vektör propagatör nedeniyle sonludur ve Şekil 3.11c ε mertebesinde sıfır olmaktadır.

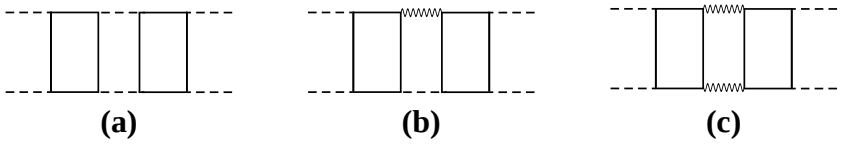
Dörtlü skaler alan etkileşmesi için üç halka yaklaştırmasından elde edilen saçılmalar Şekil 3.12'de verilmiştir.



Şekil 3.12: Dörtlü Skaler Alan Etkileşmesi İçin Üçüncü Mertebeden Halkada (a) İki Vektör Alan Düzeltmesi (b) Skaler Ve Vektör Alan Düzeltmesi (c) İki Skaler Alan Düzeltmesi.

Şekil 3.12a ε mertebesinde sıfırdır, Şekil 3.12b vektör propagatör nedeniyle sonludur ve Şekil 3.12c $1/\varepsilon$ mertebesinde sonsuzluk içermektedir. Açıkca görüldüğü gibi bu tip halkalardan da katkı gelmeye başlamıştır.

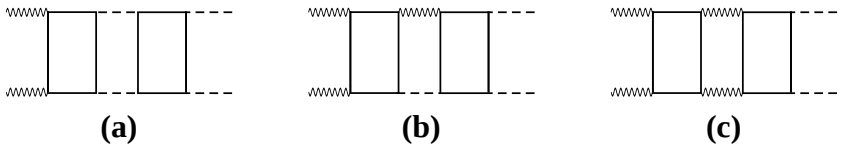
Kutu diyagramları kullanılarak oluşturulabilecek yeni etkileşmeler bulunmaktadır. Bu etkileşmeler iki kutu diyagramının skaler ve/veya vektör alan kullanılarak birleştirilmesinden oluşur. İki skaler alanın iki skaler alana gittiği etkileşme için üç halka yaklaştırmasından elde edilen saçılmalar Şekil 3.13'de verilmiştir.



Şekil 3.13: Dörtlü Skaler Alan Etkileşmesi İçin Üçüncü Mertebeden Halkada (a) İki Skaler Kanalla Düzeltme (b) Vektör Ve Skaler Kanalla Düzeltme (c) İki Vektör Kanalla Düzeltme.

Şekil 3.13a $1/\varepsilon^3$ mertebesinde sonsuzluk içermektedir, Şekil 3.13b spinör halkadaki iz nedeniyle sıfırdır ve Şekil 3.13c ε mertebesinde sıfır olmaktadır.

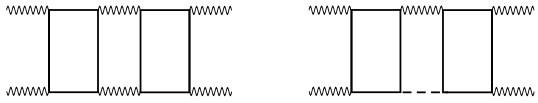
İki vektör alanın iki skaler alana gittiği etkileşme için üç halka yaklaştırmasından elde edilen saçılmalar Şekil 3.14 deki gibidir.



Şekil 3.14: İki Skaler İki Vektör Alan Etkileşmesi İçin Üçüncü Mertebeden Halkada (a) İki Skaler Kanalla Düzeltme (b) Vektör Ve Skaler Kanalla Düzeltme (c) İki Vektör Kanalla Düzeltme.

Şekil 3.14a $1/\varepsilon^3$ mertebesinde sonsuzluk içermektedir, Şekil 3.14b spinör halkadaki iz nedeniyle sıfırdır ve Şekil 3.14c ε mertebesinde sıfır olmaktadır.

İki vektör alanın iki vektör alana gittiği etkileşme için üç halka yaklaştırmasından elde edilen saçılmalar Şekil 3.15'de verilmiştir.

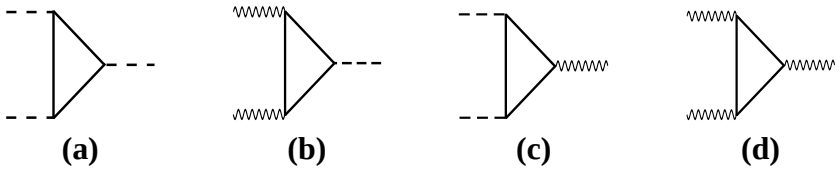


Şekil 3.15: Dörtlü Vektör Alan Etkileşmesi İçin Üçüncü Mertebeden Halkada (a) İki Vektör Kanalla Düzeltme (b) Vektör Ve Skaler Kanalla Düzeltme.

Şekil 3.15a sonludur ve Şekil 3.15b spinör halkadaki iz nedeniyle sıfırdır.

Sonuç olarak kutu diyagramlarından elde edilen üç halka etkileşmelerinde dörtlü skaler alan etkileşme sabiti koşmaktadır, yani $1/\varepsilon$'un kuvvetleri olarak sonsuzluk içermektedir. Dörtlü vektör alan ve iki sakaler iki vektör alan etkileşmeleri için etkileşme sabitleri koşmamaktadır, yani sonlu veya sıfır olmaktadır.

3.5 Üçgen Etkileşme Diyagramları

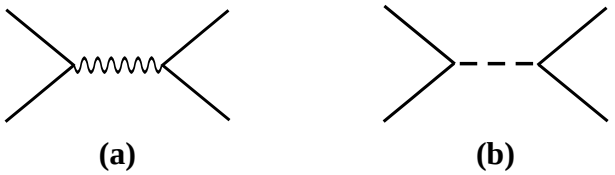


Şekil 3.16: Üçgen Etkileşmeleri (a) Üç Skaler Alan (b) İki Skaler Bir Vektör Alan (c) İki Vektör Bir Skaler Alan (d) Üç Vektör Alan.

Modelde bulunan üçgen etkileşmeleri Şekil 3.16'daki gibidir. Etkileşmelerden Şekil 3.16a ve Şekil 3.16b izin sıfır olması nedeniyle, Şekil 3.16c ve Şekil 3.16d Furry teoremi nedeniyle sıfırdır. Dolayısıyla bu etkileşmelerden etkileşme sabitlerine katkı gelmemektedir ve bu etkileşmelerin yüksek mertebeden katkıları da sıfır olmaktadır.

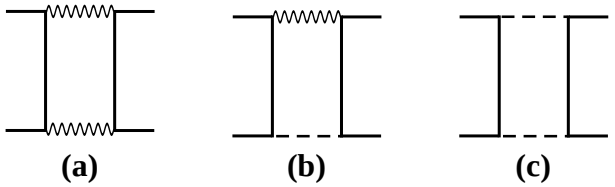
3.6 Spinör Saçılması

Modeldeki spinör alan saçılmaları Şekil 3.17'deki gibidir. Şekil 3.17a vektör alan



Şekil 3.17: Dörtlü Spinör Alan Etkileşmesi İçin Ağaç Diyagramları (a) Vektör Alan Kanalıyla Etkileşme (b) Skaler Alan Kanalıyla Etkileşme.

yardımıyla oluşturulan spinör-spinör saçılmasıdır ve vektör propagatörden gelen ε nedeniyle sıfırdır. Şekil 3.17b skaler alan yardımıyla oluşturulan spinör-spinör saçılmasıdır ve modelde bu tip saçılmalar mümkün hale gelmiştir.



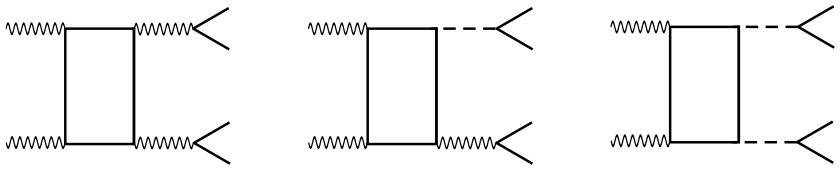
Şekil 3.18: Dört Spinör Alanın Birinci Mertebeden Halka Etkileşmeleri (a) İki Vektör Alan Kanalıyla (b) Vektör Ve Skaler Alan Kanalıyla (c) İki Skaler Alan Kanalıyla.

Daha yüksek mertebeden spinör-spinör saçılmaları mümkündür ve Şekil 3.18'de verildiği gibidir. Şekil 3.18a etkileşmesi ε^2 mertebesinde, Şekil 3.18b etkileşmesi ε mertebesinde sıfıra gitmektedir ve Şekil 3.18c etkileşmesi ise sonlu kalmaktadır.

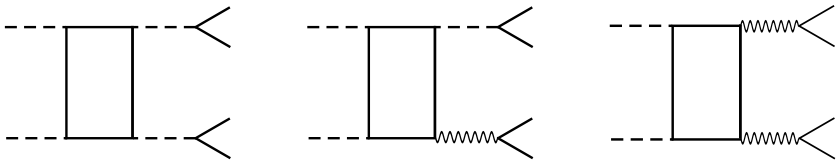
3.6.1 Spinör Üretimi

Modeldeki kutu etkileşmelerden yararlanılarak spinör üretilebilir. Kutu etkileşmesinde gelen iki vektör alan yardımıyla oluşturulabilecek dört spinör alan üretimi Şekil 3.19 daki gibidir. Şekil 3.19a'daki etkileşme vektör propagatör nedeniyle sıfırdır, Şekil 3.19b fermiyon halkadaki iz nedeniyle sıfırdır ve Şekil 3.19c sonlu bir değere sahiptir.

Kutu etkileşmesinde gelen iki skaler alan yardımıyla oluşturulabilecek dört spinör alan üretimi Şekil 3.20 daki gibidir. Şekil 3.20a $1/\varepsilon$ mertebesinde sonsuzluk



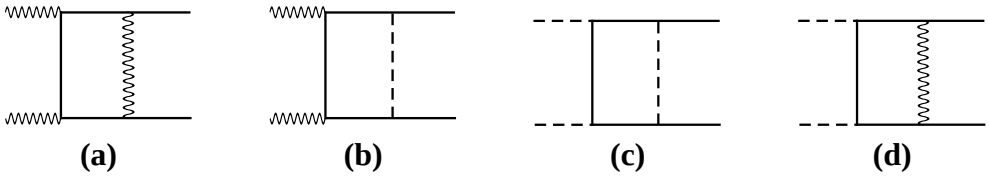
Şekil 3.19: İki Vektör Alandan Dört Spinör Alan Üretimi (a) İki Vektör Alan Yardımıyla (b) Skaler Ve Vektör Alan Yardımıyla (c) İki Skaler Yardımıyla.



Şekil 3.20: İki Skaler Alandan Dört Spinör Alan Üretimi (a) İki Skaler Alan Yardımıyla (b) Skaler Ve Vektör Alan Yardımıyla (c) İki Vektör Alan Yardımıyla.

içermektedir, Şekil 3.20b fermiyon halkadaki iz nedeniyle sıfırdır ve Şekil 3.20c sonlu bir değere sahiptir.

Modeldeki alanları kullanarak farklı şekillerde spinör üretimi de söz konusudur ve etkileşmeler Şekil 3.21 deki gibidir. Şekil 3.21a ve Şekil 3.21d vektör alan nedeniyle sıfırdır, Şekil 3.21b ve Şekil 3.21c sonlu değere sahiptir.

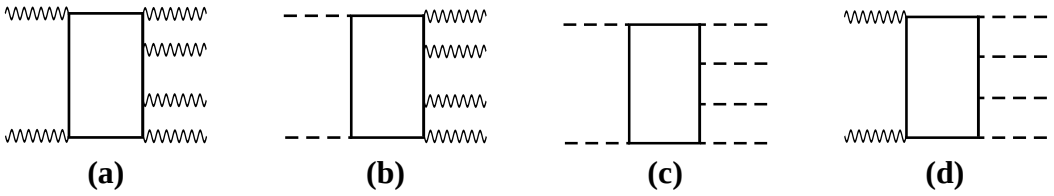


Şekil 3.21: Farklı Spinör Alan Üretim Yollarından Bazıları (a) İki Vektör Alan Ve Başka Bir Vektör Alan Yardımıyla (b) İki Vektör Alan Ve Bir Skaler Alan Yardımıyla, (c) İki Skaler Alan Ve Başka Bir Skaler Alan Yardımıyla, (d) İki Skaler Alan Ve Başka Bir Vektör Alan Yardımıyla.

3.6.2 Çoklu Saçılmalar

Modeldeki kutu etkilşmelerinden yararlanılarak parçacık oluşturulabilir. Çoklu saçılmalar Şekil 3.22 deki gibidir ve sonlu değere sahiptir.

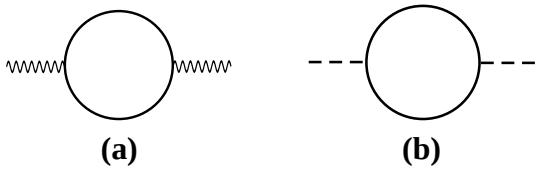
Daha önce olduğu gibi modelde çift sayıda parçacık üretimine izin verilmekte, tek sayıda parçacık üretimine ise Furry teoremi nedeniyle izin verilmemektedir.



Şekil 3.22: (a) İki Vektör Alandan Çift Sayıda Vektör Alan Üretimi, (b) İki Skaler Alandan Çift Sayıda Vektör Alan Üretimi (c) İki Skaler Alandan Çift Sayıda Skaler Alan Üretimi (d) İki Vektör Alandan Çift Sayıda Skaler Alan Üretimi.

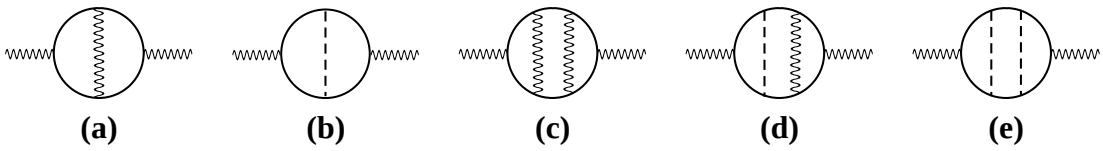
3.7 Propagatörler ve Düzeltmeleri

Bu bölümde Şekil 3.23'de gösterilen vektör ve skaler alan propagatörlerine vektör ve skaler alan katkıları incelenecektir.



Şekil 3.23: (a) Vektör Alan İçin (b) Skaler Alan İçin Öz Enerji Diyagramları

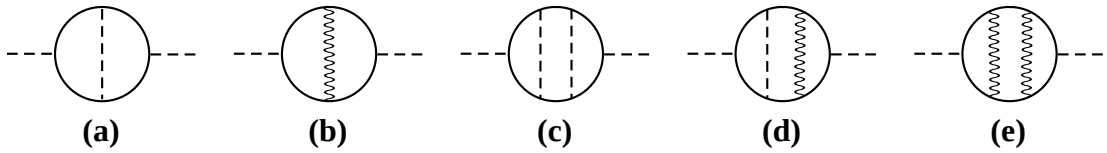
Vektör alan propagatörüne bir ve iki halkada skaler ve vektör alan düzeltmeleri Şekil 3.24 deki gibidir. Vektör alan düzeltmesi Şekil 3.24a ve Şekil 3.24c de görüldüğü gibi olup, etkileşmeler $1/\varepsilon$ mertebesinde sonsuzluk içermektedir. Skaler alan düzeltmesi Şekil 3.24b ve Şekil 3.24e de görüldüğü gibidir, etkileşmeler $1/\varepsilon$ ve $1/\varepsilon^2$ mertebesinde sonsuzluk içermektedir. Vektör ve skaler alan düzeltmesi Şekil 3.24d de görüldüğü gibidir ve etkileşme $1/\varepsilon$ mertebesinde sonsuzluk içermektedir.



Şekil 3.24: Vektör Alan Propagatörü İçin Öz Enerji Diyagram Düzeltmeleri (a) Vektör Alan Katkısı (b) Skaler Alan Katkısı (c) İki Vektör Alan Katkısı (d) Skaler Ve Vektör Alan Katkısı (e) İki Skaler Alan Katkısı.

Skaler alan propagatörüne bir ve iki halka üzerinden skaler ve vektör alan düzeltmeleri Şekil 3.25 deki gibidir ve diyagramlara baskın katkı skaler alan düzeltmelerinden gelmektedir. Skaler alan düzeltmeleri Şekil 3.25a ve Şekil

3.25c de görüldüğü gibidir, etkileşmeler $1/\varepsilon$ ve $1/\varepsilon^2$ mertebesinde sonsuzluk içermektedir. Vektör alan düzeltmeleri Şekil 3.25b ve Şekil 3.25e de görüldüğü gibi olup, etkileşmeler $1/\varepsilon$ mertebesinde sonsuzluk içermektedir. Skaler ve vektör alan düzeltmesi Şekil 3.25d de görüldüğü gibidir ve etkileşme $1/\varepsilon$ mertebesinde sonsuzluk içermektedir.



Şekil 3.25: Skaler Alan Propagatörü İçin Öz Enerji Diyagram Düzeltmeleri (a) Skaler Alan Katkısı (b) Vektör Alan Katkısı (c) İki Skaler Alan Katkısı (d) Skaler Ve Vektör Alan Katkısı (e) İki Vektör Alan Katkısı.

Kazakov ve Vartanov'un [55] yaptıkları çalışmaya benzer olarak elde edilen diyagramlar bir seri halinde toplanabilir.

3.8 RG Denklemleri ve Çözümleri

Modele skaler alana eklemeden önce modelde bir tane etkileşme sabiti, e, bulunuyordu ve renormalize edilmesi gereken bir saçılma yoktu. Modele skaler alan eklenmesiyle birlikte etkileşme sabiti sayısı üçe çıkmıştır ve modelde renormalize edilmesi gereken, sonsuzluk içeren, saçılmalar bulunmaktadır. Renormalizasyonu gerekli olan saçılmaların birinci mertebeden RG denklemleri aşağıdaki gibidir

$$16\pi^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} y(t) = A y^3(t), \tag{3.44a}$$

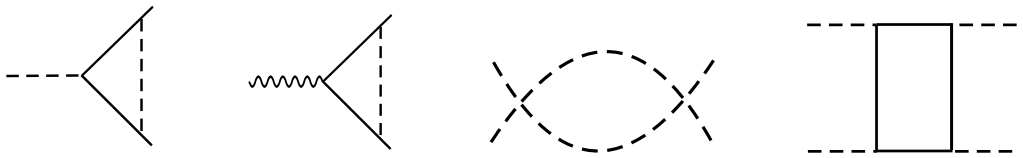
$$16\pi^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} e(t) = B e(t) y^2(t), \tag{3.44b}$$

$$16\pi^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} a(t) = C a^2(t) - D y^4(t). \tag{3.44c}$$

Denklemde A, B, C ve D sabitlerdir ve sırasıyla Şekil 3.26'deki saçılma grafiklerinin katsayılarıdır.

RG denklemlerinin çözümüne denklem (3.44a)'dan başlayalım. Değişkenler aynı tarafta toplandığında denklem

$$16\pi^2 \frac{\mathrm{d}y}{y^3(t)} = A\mathrm{dt} \tag{3.45}$$



Şekil 3.26: RG denklemleri İçin (a) Skaler Alana Skaler Alan Düzeltmesi, (b) Vektör Alana Skaler Alan Düzeltmesi, (c) Skaler Alan Birinci Mertebeden Halka Düzeltmesi, (d) Skaler Alan Kutu Düzeltmesi.

olarak elde edilir ve integral alındığında sonuç

$$-\frac{1}{2y^2(t)}+\frac{1}{2y_0^2}=\frac{A}{16\pi^2}t \tag{3.46}$$

olarak bulunur. Denklem düzenlenirse Yukawa etkileşme sabiti $y(t)$ için çözüm aşağıdaki gibidir

$$y^2(t)=\frac{y_0^2}{Z(t)} \tag{3.47}$$

denklemde $Z(t)=1-\frac{y_0^2A}{8\pi^2}t$ olarak tanımlıdır.

İkinci RG denklemi (3.44b)'nin çözümü için değişkenler aynı tarafa toplanır ve denklem (3.47) kullanılırsa

$$\frac{\mathrm{d}e}{e(t)}=B\frac{y_0^2}{Z(t)}\mathrm{dt} \tag{3.48}$$

elde edilir. İfadenin integrali alındığında vektör alan etkileşme sabiti $e(t)$ için çözüm

$$e(t)=e_0Z^{-B/2A}(t) \tag{3.49}$$

olarak elde edilir.

Son RG denklemi (3.44c)'yi çözmek için aşağıdaki gibi bir çözüm önerilebilir.

$$a(t)=\frac{E}{Z(t)}. \tag{3.50}$$

Denklemde E bir sabittir. Önerilen çözüm denklem (3.44c)'de yerine yazılır ve türevler alınırsa denklem

$$\frac{2y_0^2AE}{Z^2(t)}=\frac{CE^2-Dy_0^4}{Z^2(t)} \tag{3.51}$$

olarak elde edilir. Denklem (3.51) düzenlenirse E katsayısı için elde edilen eşitlik aşağıdaki gibidir

$$CE^2 - 2y_0^2 AE - Dy_0^4 = 0.$$

Yukardaki denklemin çözümü

$$E_{1,2} = \frac{y_0^2}{C}\left(A \pm \sqrt{A^2 + CD}\right) \tag{3.52}$$

olarak elde edilir. Sonuç denklem (3.50)'de yerine yazılarak etkileşme sabiti $a(t)$ için çözüm

$$a(t) = \frac{y_0^2}{C}\frac{A \pm \sqrt{A^2 + CD}}{Z(t)} \tag{3.53}$$

olarak elde edilir.

Açıkça görüldüğü gibi etkileşme sabitlerinin çözümünlerinde bulunan $Z(t)$ belirli bir momentum değeri için sıfır olmaktadır, yani etkileşme sabitleri ıraksamaktadır. Bu ıraksaklığa "Landau Kutbu" denilmektedir. Karşımıza çıkan bu ıraksaklığın burada bulunması KED'den iyi bilinen bir triviyallik problemidir. Aynı problemle skaler tipi Gürsey modeline ayar alanı eklendiğinde de karşılaşılmıştır [56]. Gelecek bölümde modelden Landau kutbu problemini kaldırma yolları araştırılacaktır.

3.9 Trivial Olmayan Teori Arayışları

Görüldüğü üzere modele minimal yolla kütlesiz gerçek skaler alan eklenmesi RG denklemlerinin çözümlerinde bir ıraksaklık oluşturmuştur. Bu bölümde ıraksaklığı kaldırma yolları araştırılacaktır ve denklem (2.22)'de verilen modele değişik gruplarda gerçek skaler ve/veya vektör alan eklenecektir. Oluşturulan her model için RG denklemleri oluşturulacak ve etkileşme sabitlerinin ıraksaklıklığı araştırılacaktır. Oluşturulan her model için yapılan hesaplamalar burada açıkça gösterilmeyecektir, sadece sonuçlara yerverilecektir. Modele eklenen skaler ve/veya vektör alanlar ve grupları aşağıdaki gibidir

1. $U(1)$ vektör alan eklemek,

2. Kompozit vektör alanı $SU(N)$ yapıp modele $U(1)$ vektör alan eklemek,

3. Kompozit vektör alanı $SU(N)$ yapıp modele skaler alan eklemek,

4. Kompozit vektör alanı $SU(N)$ yapıp modele skaler alan ve $U(1)$ vektör alan eklemek,

5. Skaler alan ve $U(1)$ vektör alan eklemek,

6. Skaler alan ve $SU(N)$ vektör alan eklemek.

Hesapların sonucunda ilk üç seçenekte oluşturulan modellerin RG denklem çözümlerinde Landau kutbu ile karşılaşılmıştır. Dördüncü ve beşinci seçenekte oluşturulan modellerin RG denklem çözümlerinde etkileşme sabitleri için birbirlerine bağlı çözümler elde edilmiştir, en az bir etkileşme sabiti için lineer bağımsız bir çözüme ulaşılamamıştır. Dolayısıyla etkileşme sabitlerinin ıraksaklık içerip içermedikleri konusunda bir sonuca ulaşılamamıştır. Altıncı seçenekte oluşturulan modeldelin RG denklem çözümlerinden elde edilen etkileşme sabitlerinde ıraksaklık bulunmamaktadır. Modelin RG denklem çözümleri ve trivial olmayan bir model verip vermediği gelecek bölümde ayrıntılı olarak incelenecektir.

3.10 Sonuç

Bu bölümde skaler alan eklenmiş model ile eski model arasındaki farklar açıklanmaya çalışılmıştır. Eski modele ait bazı özelliklerin değiştiği görülmüştür. Örneğin önceki modelde spinörler saçılamazken artık saçılabilmektedir. Hesaplamalar sonucunda modeldeki bazı etkileşmelerin sonsuzluk içerdiği görülmüştür. Etkileşme sabitleri için birinci mertebeden RG denklemleri oluşturulmuştur ve çözümlerde KED'de çok iyi bilinen "Landau Kutbu" problemi ile karşılaşılmıştır. Modeldeki bu problemin giderilmesi için denklem (2.22)'de verilen modele değişik gruplarda skaler ve/veya vektör alanlar eklenmiştir. Oluşturulan yeni modellerden bir tanesinin etkileşme sabitlerinde Landau kutbu bulunmamaktadır ve bu model gelecek bölümde incelenecektir.

4. AYAR ALAN EKLENMİŞ MODEL VE RENORMALİZASYON GRUBU ANALİZİ

Morötesi cut-off altında tanımlı bir teorinin sürekli limit altında gerçekten iyi tanımlı bir teori olup olmadığının belirlenmesi genel olarak zor bir problemdir. Eğer bir teori sürekli limitte her zaman serbest hale geliyorsa, teoriye "Trivial" teori denir. Eğer bir teori sürekli limitte bir etkileşme torisi veriyorsa, teoriye "Trivial olmayan" teori denir. Trivial olmak veya olmamak her zaman teorinin pertürbatif renormalize olup olmadığından bağımsızdır [17].

Denklem (2.22)'de verilen polinom formundaki modele minimal yolla kütlesiz gerçek skaler alan eklenmesi modeli trivial model olmaktan kurtaramamıştır. Bu bölümde, bölüm 3.9'da araştırılan ve trivial olmayan model sonuçları verdiği öngörülen model incelenecektir.

Modelin renormalizasyonu sırasında, cut-off teorisindeki etkileşme sabitlerinin RG akışları Wilson'un [7] çalışmasına benzer olarak analiz edilebilir. Fakat bu bölümde doğrudan cut-off teorisinde çalışılmayacaktır, bunun yerine RG denklemlerinin sürekli teorisi incelenecektir. Ayrıca etkileşme sabitlerinin momentum cut-off'u μ noktasında renormalize olduğu kabul edilmiştir.

4.1 Model

Yeni model 3. bölümde incelenen modele abelyen olmayan $SU(N_C)$ renk ayar etkileşmesi ekleyerek oluşturulmuştur. Burada spinörler $\psi_i (i = 1 - N_f)$ değişik N_f çeşnilere sahiptir ve skaler alan ϕ bir çeşniye sahiptir. $1/N_C$ yaklaşımında birinci mertebeden çalışmamıza rağmen, bütün saçılma diyagramları RG denklemleri ile ilişkili varsayılacaktır. Bununla birlikte KRD ayar alan etkileşme sabitlerinin pertürbatif olarak yeteri kadar küçük olacağı, $\frac{g^2 N_C}{4\pi} \ll 1$, yüksek enerji asimptotik bölge ile ilgilenilmektedir ve ayar alanın açılımındaki ilk trivial olmayan mertebede çalışılacaktır.

Bu bölümde incelenecek model için etkin Lagrange fonksiyonu aşağıdaki gibidir

$$\mathscr{L}_{etkin} = \sum_{i=1}^{N_f} \overline{\psi}_i \left(i\not{D} + e\not{J} - m\right) \psi_i - e^4 J^4 - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{a}{4}\phi^4 - \sum_{i=1}^{n_f} y\overline{\psi}_i \phi \psi_i + L_{hayalet} + L_{ayar}. \tag{4.1}$$

Modelde e, y, a ve g sırasıyla kompozit vektör alan, Yukawa, dörtlü skaler ve ayar alan etkileşme sabitleri, $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$ kovaryant renk türevi, N_f çeşni sayısıdır ve N_C renk sayısı N_f çeşni sayısı mertebesindedir. Modelde büyük fermiyon sayıları durumunu ele alındığında, sadece n_f tane fermiyon ψ_i $(i = 1 - n_f << N_f)$ Yukawa tipi etkileşmede bulunacaktır. Diğer durumlarda fermiyonlar için Yukawa etkileşme sabiti ihmal edilebilir olacaktır.

Modelde iki çeşit hayalet alanı vardır. Birincisi kompozit bağlardan gelmektedir $(L_{hayalet})$ ve modelden düşmektedir [35], ikincisi ayar alanı üzerindeki ayar şartından gelmektedir, (L_{ayar}), modelden düşmemektedir ve RG denklemlerine katkıda bulunmaktadır.

4.2 RG Denklemleri ve Çözümleri

Modelde bazı birinci mertebeden saçılmaların sonsuzluk içerdiğini KRD'den bilinmektedir. Sonsuzluk içeren terimler için birinci mertebeden RG denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$16\pi^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} g(t) = -Ag^3(t), \tag{4.2a}$$

$$16\pi^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} y(t) = By^3(t) - Cy(t)g^2(t), \tag{4.2b}$$

$$16\pi^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} e(t) = De(t)y^2(t) - Ee(t)g^2(t), \tag{4.2c}$$

$$16\pi^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} a(t) = Fa(t)y^2(t) - Gy^4(t). \tag{4.2d}$$

Denklemlerdeki A, B, C, D, E, F ve G pozitif sabitleri sonsuzluk içeren etkileşmelerin katsayılarıdır. RG denklemlerinde kompozit vektör alanın yer aldığı saçılmaların ε'nun kuvvetleri olarak sonlu veya sıfır olduğu görülmüştür. Bu nedenle $e^2(t)$, $e^3(t)$, $y(t)e^2(t)$ ve $g(t)e^2(t)$ ile orantılı olan katkılar RG denklemlerinde bulunmamaktadır.

Önemli bir not olarak belirtmek gerekirse ayar etkileşme sabitine göre pertürbasyon haricinde, $1/N_C$ yaklaşımının birinci mertebesinde çalışılmakta

ve skaler halka katkısı ihmal edilmektedir. Bu yaklaştırma dörtlü skaler alan etkileşme sabiti $a(t)$'nin $N_C y^2$'ye göre küçük kaldığı sürece geçerlidir ve matematiksel gösterimi aşağıdaki gibidir

$$N_C \gtrsim \left| \frac{a}{y^2} \right|. \tag{4.3}$$

Eğer $1/N_C$ açılım mertebesinde RG denklemi (4.2d) ile tanımlanan akış takip edilirse, çoğunlukla denklem (4.3)'de verilen şartın bozulduğu bir bölgeye gidilir. Bu gibi durumlarda $1/N_C$ açılımının ilk mertebe katkıları ötesindeki skaler halka katkılarının da dahil edilmesi gerekmektedir. Örneğin bir halkada, RG denklemi (4.2d) aşağıdaki denklemle yer değiştirilmelidir

$$16\pi^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} a(t) = Ha^2(t) + Fa(t)y^2(t) - Gy^4(t). \tag{4.4}$$

Denklemde $H > 0$ bir sabittir ve denklem (4.4) referans [17]'de ayrıntılı olarak incelenmiştir.

RG denklemlerinin çözümüne denklem (4.2a)'dan başlanabilir ve denklem yeniden düzenlenirse

$$16\pi^2 \int \frac{\mathrm{d}g(t)}{g^2(t)} = -A \int \mathrm{dt} \tag{4.5}$$

bulunur. Denklemdeki integraller alınırsa sonuç

$$\frac{1}{g^2(t)} = \frac{1}{g_0^2} \left(1 + \frac{A\alpha_0}{2\pi} t \right) \tag{4.6}$$

olarak elde edilir ve denklemde $\alpha_0 = \frac{g_0^2}{4\pi}$ olarak tanımlıdır. Bu durumda ayar alan etkileşme sabitinin çözümü aşağıdaki gibidir

$$g^2(t) = g_0^2 \left(1 + \frac{A\alpha_0}{2\pi} t \right)^{-1}. \tag{4.7}$$

Elde edilen çözüm yeni bir değişkenle aşağıdaki gibi ifade edilebilir

$$\eta(t) \equiv \frac{\alpha(t)}{\alpha_0} \equiv \frac{g^2(t)}{g_0^2} = \left(1 + \frac{A\alpha_0}{2\pi} t \right)^{-1}. \tag{4.8}$$

t'nin bazı limitleri altında $\eta(0) = 1$ ve $\eta(t \to \infty) \to +0$ değerlerini almaktadır.

İkinci RG denkleminin çözüme ulaşmak için RG sabiti $H(t)$ aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$H(t) = -\eta^{\gamma}(t) \left[1 - \frac{C - A}{B} \frac{g^2(t)}{y^2(t)} \right]. \tag{4.9}$$

$H(t)$'nin sabit olması nedeniyle t'ye göre türevi sıfırdır, $\frac{dH(t)}{dt} = 0$ ve bu özellik yardımıyla $\eta(t)$'nin üsteli γ bulunabilir. $H(t)$'nin t'ye göre türevi aşağıdaki gibidir

$$\gamma\eta^{\gamma-1}(t)\frac{d\eta(t)}{dt}\left[1-\frac{C-A}{B}\frac{g^2(t)}{y^2(t)}\right]-\eta^{\gamma}(t)\frac{C-A}{B}\frac{d}{dt}\left(\frac{g^2(t)}{y^2(t)}\right)=0. \tag{4.10}$$

Denklem (4.10)'deki türevler denklemler (4.8), (4.2a) ve (4.2b) kullanılarak

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = -\frac{A\alpha_0}{2\pi}\eta^2(t), \tag{4.11a}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{g^2(t)}{y^2(t)}\right) = -B\eta(t)\frac{\alpha_0}{2\pi}\left[1-\frac{C-A}{B}\frac{g^2(t)}{y^2(t)}\right] \tag{4.11b}$$

elde edilir. Denklem (4.11) denklem (4.10)'de yerine yazılır ve düzenlenirse γ için aşağıdaki gibi bir eşitlik elde edilir.

$$-A\gamma+C-A=0 \quad \Rightarrow \quad \gamma=-1+C/A.$$

Bulunan γ değeri denklem (4.9)'de kullanılırsa RG sabiti $H(t)$ aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$H(t)=-\eta^{-1+C/A}(t)\left[1-\frac{C-A}{B}\frac{g^2(t)}{y^2(t)}\right]. \tag{4.12}$$

$H(t)$'nin bir sabit olması nedeniyle yerine başka bir sabit H_0 kullanılabilir. Denklem (4.12) kullanılarak Yukawa etkileşme sabitinin çözümü aşağıdaki gibi elde edilir

$$y^2(t)=\frac{C-A}{B}g^2(t)\left[1+H_0\eta^{1-C/A}\right]^{-1}. \tag{4.13}$$

Üçüncü RG denkleminde çözüme ulaşmak için RG sabiti $P(t)$ aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$P(t)=-\eta^{\beta}(t)\left[\frac{g^2}{y^2}+\frac{D-2B}{2C-A-E}\right]\frac{e^2(t)}{y^2(t)}. \tag{4.14}$$

$P(t)$'nin sabit olması nedeniyle t'ye göre türevi sıfırdır, $\frac{dP(t)}{dt} = 0$ ve bu özellik yardımıyla $\eta(t)$'nin üsteli β bulunabilir. $P(t)$'nin t'ye göre türevi aşağıdaki gibidir

$$-\beta\eta^{\beta-1}(t)\frac{d\eta(t)}{dt}\left[\frac{g^2}{y^2}+\frac{D-2B}{2C-A-E}\right]\frac{e^2(t)}{y^2(t)} -\eta^{\beta}\frac{d}{dt}\left(\frac{e^2(t)}{y^2(t)}\frac{g^2(t)}{y^2(t)}\right)-\eta^{\beta}\frac{d}{dt}\left(\frac{e^2(t)}{y^2(t)}\right). \tag{4.15}$$

İlk terimdeki türev denklemler (4.11a)'da verilmiştir. İkinci ve üçüncü terimdeki türevler ise aşağıdaki gibidir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{e^2(t)}{y^2(t)}\frac{g^2(t)}{y^2(t)}\right) = (2C-A-E)\eta(t)\frac{\alpha_0}{2\pi}\left[\frac{g^2}{y^2}+\frac{D-2B}{2C-A-E}\right]\frac{e^2(t)}{y^2(t)}, \tag{4.16a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{e^2(t)}{y^2(t)}\right) = (C-E)\eta(t)\frac{\alpha_0}{2\pi}\left[1+\frac{D-B}{C-E}\frac{y^2(t)}{g^2(t)}\right]\frac{e^2(t)}{y^2(t)}. \tag{4.16b}$$

Bilinenler denklem (4.15)'de yerine yazılır ve denklem tekrar düzenlenirse sonuç

$$(\beta A-2C+A+E)\left(\frac{e^2(t)}{y^2(t)}\frac{g^2(t)}{y^2(t)}\right)\left(\beta A-3C+A+2E+\frac{D-B}{C-E}\frac{y^2(t)}{g^2(t)}\right)\left(\frac{e^2(t)}{y^2(t)}\right)=0$$

olarak elde edilir. Denklemi sağlayan iki β değeri bulunmaktadır ve çözümün tek olması için $D=B$, $C=E$ olarak alınmalıdır. Bu durumda β'nın değeri aşağıdaki gibidir

$$\beta = -1+C/A.$$

Bulunan değer denklem (4.14)'de yerine yazılırsa RG sabiti $P(t)$ aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$P(t) = -\eta^{-1+C/A}(t)\left[\frac{g^2(t)}{y^2(t)}-\frac{B}{C-A}\right]\frac{e^2(t)}{y^2(t)}. \tag{4.17}$$

$P(t)$'nin sabit olması nedeniyle yerine başka bir sabit P_0 kullanılabilir. Denklem (4.17) kullanılarak kompozit vektör alan etkileşme sabitinin çözümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$e^2(t) = -\frac{P_0}{H_0}\left(\frac{C-A}{B}\right)y^2(t) = -\frac{P_0}{H_0}\left(\frac{C-A}{B}\right)^2 g^2(t)\left[1+H_0\eta^{1-C/A}\right]^{-1}. \tag{4.18}$$

Son RG denkleminin çözüme ulaşmak için RG sabiti $K(t)$ aşağıdaki gibi tanımlanabilir

$$K(t) = -\eta^{\sigma}(t)\left[1-\frac{2B}{2C-A}\frac{a(t)}{y^2(t)}\frac{g^2(t)}{y^2(t)}\right]. \tag{4.19}$$

$K(t)$'nin sabit olması nedeniyle t'ye göre türevi sıfırdır, $\frac{\mathrm{d}K(t)}{\mathrm{dt}}=0$ ve bu özellik yardımıyla $\eta(t)$'nin üsteli σ bulunabilir. $K(t)$'nin t'ye göre türevi aşağıdaki gibidir

$$-\sigma\eta^{\sigma-1}(t)\frac{\mathrm{d}\eta(t)}{\mathrm{dt}}\left[1-\frac{2B}{2C-A}\frac{a(t)}{y^2(t)}\frac{g^2(t)}{y^2(t)}\right]+\eta^{\sigma}\frac{2B}{2C-A}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{a(t)}{y^2(t)}\frac{g^2(t)}{y^2(t)}\right). \tag{4.20}$$

İlk terimdeki türev denklemler (4.11a)'da verilmiştir. İkinci terimdeki türev ise aşağıdaki gibidir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{a(t)}{y^2(t)}\frac{g^2(t)}{y^2(t)}\right) = (2C-A)\eta(t)\frac{\alpha_0}{2\pi}\left[\frac{a(t)}{y^2(t)}\frac{g^2(t)}{y^2(t)} - \frac{2B}{2C-A}\right]. \tag{4.21}$$

Bilinenler denklem (4.20)'da yerine yazılır ve denklem yeniden düzenlenirse σ için aşağıdaki sonuç elde edilir

$$\sigma A - 2C + A = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma = -1 + 2C/A.$$

Bulunan σ değeri denklem (4.19)'de yerine yazılırsa RG sabiti $K(t)$ aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$K(t) = -\eta^{-1+2C/A}(t)\left[1 - \frac{2B}{2C-A}\frac{a(t)}{y^2(t)}\frac{g^2(t)}{y^2(t)}\right]. \tag{4.22}$$

$K(t)$'nin sabit olması nedeniyle yerine başka bir sabir K_0 kullanılabilir. Denklem (4.22) kullanılarak dörtlü skaler alan etkileşme sabitinin çözümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$a(t) = \frac{2B}{2C-A}\frac{y^4(t)}{g^2(t)}\left[1 + K_0\eta^{1-2C/A}\right]. \tag{4.23}$$

RG değişmezleri olan H_0, P_0 ve K_0, etkileşme sabitlerinin çözümleri (4.7), (4.13), (4.18) ve (4.23)'ün davranışlarında önemli rol oynamaktadır. RG denklemlerindeki katsayılar aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} A &= \frac{11N_C - 4T(R)N_f}{3}, & B = D = \frac{G}{4} = 2n_f N_C, \\ C &= E = 6C_2(R), & F = G \end{aligned} \tag{4.24}$$

$C_2(R)$ ikinci Casimir, $C_2(R) = \frac{(N_C^2-1)}{2N_C}$ ve $T(R) = \frac{1}{2}$ olarak tanımlıdır. Sabit nokta çözümlerine geçmeden önce bazı limitler altında etkileşme sabitlerinin davranışları ayrıntılı olarak incelenecektir.

4.3 Bazı Limitler

RG Denklemlerinin morötesi limitteki davranışlarını incelemeden önce bazı sonlu enerjideki özel durumlar incelenecektir ve özel durumlar ilginç sonuçlar içermektedir. RG denklem çözümler için üç özel durum sırasıyla $A \to +0$, $A \to C$ ve $A \to 2C$ bulunmaktadır.

4.3.1 A $\to +0$ Limiti

Bu limitte öncelikle incelenmesi gereken $\eta^{-C/A}$ durumudur, çünkü $\eta(t)$ sonsuz olmaktadır. İfade seriye açılır ve $\frac{C}{2\pi} = \frac{1}{\alpha_c}$ kritik noktası tanımlanırsa

$$\eta^{-C/A} = \exp\left(\frac{\alpha}{\alpha_c}t\right) \tag{4.25}$$

elde edilir ve burada $\alpha = \alpha_0$ olarak tanımlıdır. Bu limitte etkileşme sabitlerinin çözümleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$g^2(t) = g_0^2, \tag{4.26a}$$
$$y^2(t) = \frac{8\pi^2}{B}\frac{\alpha}{\alpha_c}\left[1+H_0 exp\left(\frac{\alpha}{\alpha_c}t\right)\right]^{-1}, \tag{4.26b}$$
$$e^2(t) = -\frac{16\pi^3}{B^2}\frac{P_0}{H_0}\frac{\alpha}{\alpha_c^2}\left[1+H_0 exp\left(\frac{\alpha}{\alpha_c}t\right)\right]^{-1}, \tag{4.26c}$$
$$a(t) = \frac{8\pi^2}{B}\frac{\alpha}{\alpha_c}\frac{\left[1+K_0 exp\left(\frac{2\alpha}{\alpha_c}t\right)\right]}{\left[1+H_0 exp\left(\frac{\alpha}{\alpha_c}t\right)\right]^2}. \tag{4.26d}$$

4.3.2 A $\to C$ Limiti

Bu limit durumunda etkileşme sabitlerinin çözümleri denklemler (4.13) ve (4.18)'in sıfır olacağı gözükmektedir. RG sabiti H_0 yerine yeni bir RG sabiti olan H_1 tanımlanırsa, $H_0 = -1 + \frac{C-A}{A}H_1$, Yukawa ve dörtlü skaler alan etkileşme sabitleri sıfırdan farklı olmaktadır. Buna karşılık kompozit vektör etkileşme sabiti sıfıra gitmektedir. Etkileşme sabitlerinin bu limit altında davranışları aşağıdaki gibidir.

$$y^2(t) = \frac{A}{B}g^2(t)\left[H_1 + \ln\eta(t)\right]^{-1}, \tag{4.27a}$$
$$e^2(t) = -\frac{P_0}{H_0}\left(\frac{C-A}{B}\right)\left(\frac{A}{B}\right)g^2(t)\left[H_1+\ln\eta(t)\right]^{-1}, \tag{4.27b}$$
$$a(t) = \frac{2A}{B}g^2(t)\frac{1+K_0\eta^{-1}(t)}{\left[H_1+\ln\eta(t)\right]^2}. \tag{4.27c}$$

İlginç bir şekilde modele eklenen etkileşmeler kompozit vektör alan etkileşme sabitini sıfırlamaktadır.

4.3.3 $\mathbf{A \to 2C}$ Limiti

Bu limit durumunda sadece denklem (4.23)'de verilen dörtlü skaler alan etkileşme sabiti kritik davranışta bulunmaktadır. $A \to C$ limitindeki duruma benzer olarak RG sabiti K_0 yerine yeni bir RG sabiti K_1 tanımlanırsa, $K_0 = -1 + \frac{2C-A}{A} K_1$, dörtlü skaler alan etkileşme sabiti aşağıdaki formu alır.

$$a(t) = \frac{C}{B} g^2(t) \frac{K_1 + \ln \eta(t)}{\left[H_0 + \ln \eta^{1/2}(t)\right]^2}. \tag{4.28}$$

Bu limite izin verilmez çünkü asimptotik serbestliği vermemektedir.

4.4 Trivial Olmayan Modelin İncelenmesi

Trivial olmayan bir teori elde edebilmek için modelde bazı şartların bulunması gerekmektedir. Birincisi, tüm koşan etkileşme sabitlerinin tüm sonlu enerji değerleri için ıraksamaması gerekmektedir, yani etkileşme sabitlerinin çözümlerinde Landau kutbu bulunmamalıdır. İkincisi, sürekli bir teori için etkileşme sabitlerinin çözümleri tanım olarak sıfır olmamalıdır. Üçüncüsü, modeli evrensel yapmak ve vakum durağanlığını sağlamak için etkileşme sabitleri reel ve pozitif değerlere sahip olmalıdır. Eğer skaler ve kompozit vektör alanı sistemden çıkartılırsa, KRD'dekine benzer olarak trivial olmayan bir teori elde etmiş oluruz. Bu nedenle $e(t) \equiv g(t) \equiv a(t) \equiv 0$ çözümü kompozit modelin trivial olmaması olarak düşünülmemelidir. Kütle parametresi düzenlenmiş minimum çıkartım ($\overline{MS}$) çerçevesinde renormalize edilebilir ve kütle sıfır seçilebilir.

RG denklemleri oluşturulurken ayar alanı etkileşme sabitine skaler alan katkısı ihmal edilmiştir. Ancak kompozit vektör katkısı ihmal edilmemiştir fakat katkılar kompozit vektör propagatöründeki ε nedeniyle sonlu kalmaktadır. Eğer Yukawa ve/veya dörtlü skaler etkileşme sabitleri çok büyük olurlar ve $1/N_C$ yaklaşımı kırılırsa, ayar etkileşme sabitinin davranışı etkilenebilir.

Trivial olmama koşulları gauge-Higgs-Yukawa (gHY) sistemindeki koşullarla aynıdır [17]. Benzer yöntemle skaler tipi Gürsey modeli de çalışılmıştır [57] ve modelde kullanılan kompozit skaler alanın propagatörü referans [17]'de kullanılan gerçek skaler alandan tamamen farklıdır. Bu nedenle kompozit skaler alan ve ayar etkileşme sabiti arasında kısıtlayıcı bir şartın olmasına gerek yoktur. Çünkü ayar alanına skaler alanın katkısı skaler propagatördeki ε nedeniyle

düşmektedir. Bu çalışmada, kütlesiz gerçek skaler alan ve gHY sisteminde bulunmayan kompozit vektör alan vardır. Bu kompozit alan sisteme yeni bir RG denklemi eklemektedir. Ayrıca gHY sisteminden tamamen farklı bir nedenle diğer RG denklemlerine kompozit vektör alan katkıda bulunmamaktadır. Gelecek bölümlerde modelin hangi koşullar altında trivial olmayan model koşullarını sağlayacağı araştırılacaktır.

4.4.1 Sabit Nokta Çözümleri

RG denklemleri başka bir formda aşağıdaki gibi yazılabilir

$$8\pi^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\frac{y^2(t)}{g^2(t)}\right] = Bg^2(t)\left[\frac{y^2(t)}{g^2(t)}\right]\left[\frac{y^2(t)}{g^2(t)} - \frac{C-A}{B}\right], \tag{4.29a}$$

$$8\pi^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\frac{e^2(t)}{y^2(t)}\frac{g^2(t)}{y^2(t)}\right] = (C-A)g^2(t)\left[\frac{e^2(t)}{y^2(t)}\right]\left[\frac{g^2(t)}{y^2(t)} - \frac{B}{C-A}\right], \tag{4.29b}$$

$$8\pi^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\frac{a(t)}{y^2(t)}\frac{g^2(t)}{y^2(t)}\right] = (2C-A)g^2(t)\left[\frac{a(t)}{y^2(t)}\frac{g^2(t)}{y^2(t)} - \frac{2B}{2C-A}\right]. \tag{4.29c}$$

Yukardaki denklemlerden yararlanılarak sabit nokta çözümleri aşağıdaki gibi verilebilir

$$\frac{y^2(t)}{g^2(t)} = \frac{C-A}{B}, \tag{4.30a}$$

$$\frac{e^2(t)}{y^2(t)} = \text{sabit}, \tag{4.30b}$$

$$\frac{a(t)}{y^2(t)} = \frac{2(C-A)^2}{B(2C-A)}. \tag{4.30c}$$

Sabit nokta çözümleri aynı zamanda denklem (4.13), (4.18) ve (4.23)'ün çözümleridir. Burada RG sabitleri $P_0 = H_0 = K_0 = 0$ ve ζ bir sabit olmak üzere $P_0 = \zeta H_0$ seçilmiştir.

Bütün etkileşme sabitleri ayar etkileşme sabiti, $g^2(t)$, tarafından ifade edilebilir. Bu indirgemeye Kubo, Sibold ve Zimmermann'nın "etkileşme sabitleri indirgemesi" [58] denir ve RG içinde Pendleton-Ross sabit noktası [59] ile ilişkilidir. Denklem (4.30)'dan anlaşıldığı üzere evrenselliği koruyan ve vakum durağanlığını sağlayan, etkileşme sabitlerini pozitif ve gerçek yapan, sadece $C > A$ durumudur. Ayrıca model, çözümlerde RG sabitleri sıfır alındığında trivial olmayan model sonuçları vermektedir. TBundan sonraki bölümlerde sıfırdan farklı RG değişmezleri için etkileşme sabitleri incelenecektir.

4.4.2 Yukawa Etkileşme Sabiti

Yukawa etkileşme sabitinin çözümü denklem (4.13)'de verilmiştir. B'nin pozitif olduğu durumda RG sabiti H_0'ın işareti çözümlerin davranışlarında önemli rol oynamaktadır. $C > A$ durumunu incelemeden önce $\eta(t)$'nin morötesi limitte davranışının incelenmesi gerekir ve morötesi limitte $\eta(t)$'nin davranışı

$$\eta^{1-\frac{C}{A}}(t \to \infty) \to \quad +\infty \tag{4.31}$$

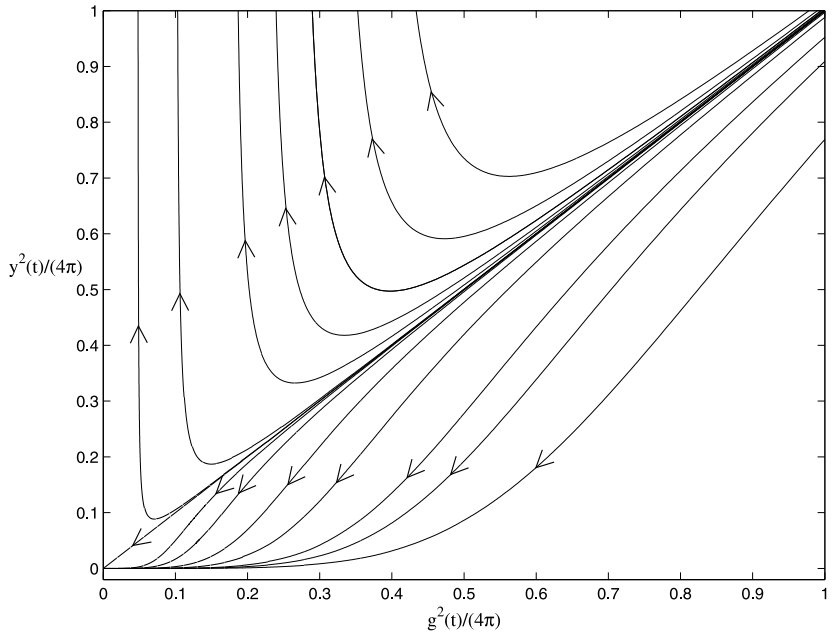
olarak elde edilir. Yukawa etkileşme sabitinin sıfırdan farklı H_0 değerleri için morötesi limitte davranışı aşağıdaki gibidir

$$y^2(t \to \infty) \to \begin{cases} +0, & 0 < H_0 < \infty \\ \text{Landau Kutbu}, & -1 < H_0 < 0 \\ -0, & -\infty < H_0 \leq -1. \end{cases} \tag{4.32}$$

Yukawa etkileşme sabitinin $-1 < H_0 < 0$ durumunda t sonsuza gitmeden önce aşağıdaki gibi sonlu değere sahiptir

$$1 + \frac{A\alpha_0}{2\pi} t = \left(\frac{-1}{H_0}\right)^{A/(C-A)}. \tag{4.33}$$

Bu H_0 değerinde Yukawa etkileşme sabiti ıraksamaktadır ve işaretini değiştirmektedir. Bu asimptotik davranış modelin ancak ve ancak RG sabiti H_0'ın pozitif değer aldığında trivial olmayacağını gösterir.

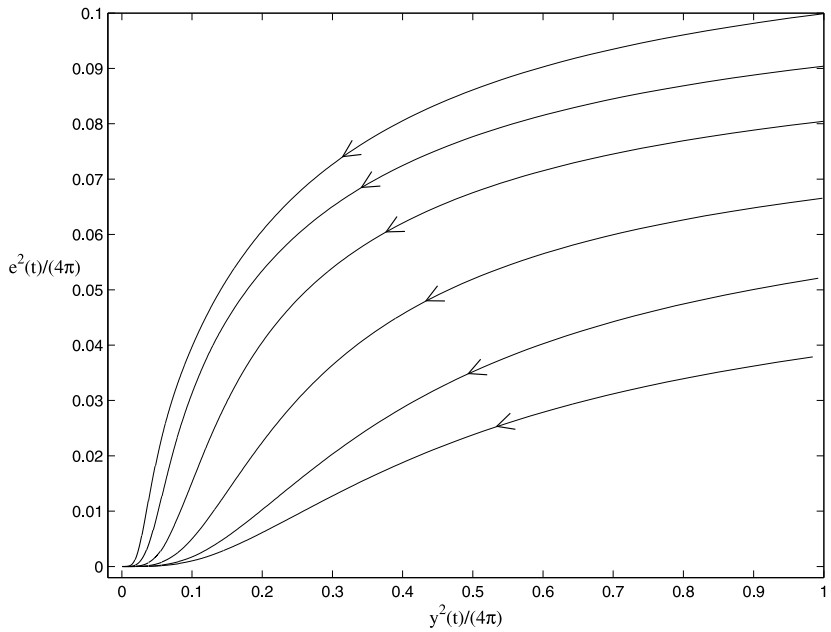


Şekil 4.1: Farklı H_0 Değerleri İçin $y^2(t)$'nin $g^2(t)$'ye Göre Grafiği. Oklar Morötesine Doğru Akışı Göstermektedir.

Şekil 4.1'de Yukawa etkileşme sabitinin ayar alan etkileşme sabitine göre grafiği verilmiştir ve şeklin üst kısmı Landau Kutbuna akışı göstermektedir.

4.4.3 Kompozit Vektör Alan Etkileşme Sabiti

Kompozit vektör alan etkileşme sabitinin çözümü denklem (4.18)'de verilmiştir. Bu durumda H_0'ın işareti yanında P_0'ın da işareti trivial olmayan model için oldukça önemlidir. Trivial olmayan model için H_0'ın pozitif olması nedeniyle P_0'ın negatif olması gerekmektedir. Kompozit vektör alan etkileşme sabiti Yukawa etkileşme sabitinin pozitif katı olacak şekilde davranmaktadır. Şekil 4.2'de vektör alan etkileşme sabitinin Yukawa etkileşme sabitine göre $P_0 < 0$ ve $H_0 > 0$ değerleri için grafiği verilmiştir. İki etkileşme sabiti de t sonsuza giderken orijine yaklaşmaktadır. Bu durum modelin asimptotik serbestlik kriterini sağladığını göstermektedir.



Şekil 4.2: Kompozit Vektör Alan Etkileşme Sabitinin Yukawa Etkileşme Sabitine Göre $H_0 > 0$ ve $P_0 < 0$ Değerleri İçin Grafiği.

4.4.4 Dörtlü Skaler Alan Etkileşme Sabiti

Son olarak dörtlü skaler alan etkileşme sabitinin çözümü denklem (4.23)'de verilmiştir. Trivial olmayan model için $C > A$, $H_0 > 0$ ve $P_0 < 0$ şartları daha önceden elde edilmiştir. $t \gg 1$ limitinde, denklem (4.23)'deki $\eta(t)$ terimi baskın olacaktır, dolayısıyla denklemdeki 1 ihmal edilebilir. Sonuç olarak çözüm

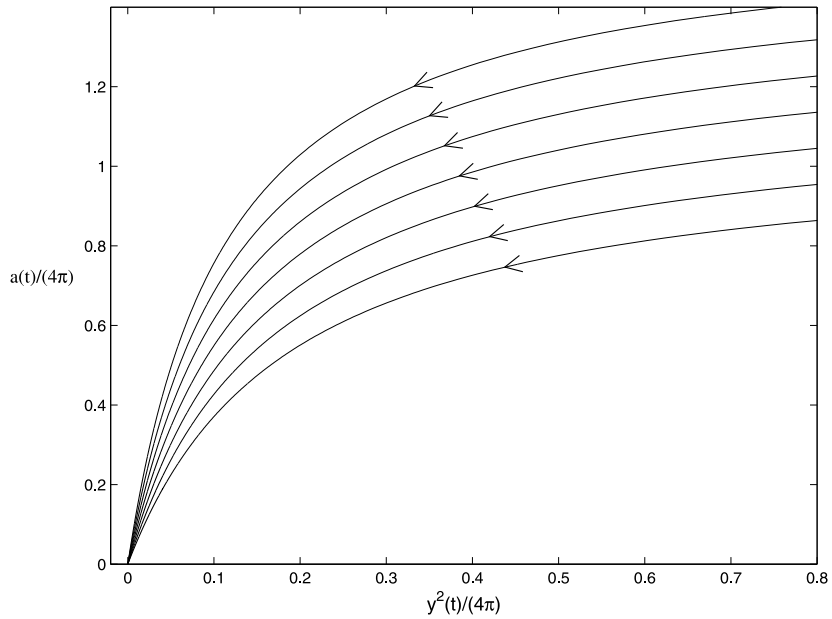
aşağıdaki gibi ifade edilebilir

$$a(t) \approx \frac{2(C-A)^2}{(2C-A)B} g_0^2 \eta(t) \frac{K_0 \eta^{1-2C/A}(t)}{\left[H_0 \eta^{1-C/A}(t)\right]^2}. \tag{4.34}$$

$t \to \infty$ limiti altında dörtlü skaler alan etkileşme sabiti aşağıdaki gibidir.

$$a(t \to \infty) = \frac{2(C-A)^2}{(2C-A)B} g_0^2 \frac{K_0}{H_0^2}. \tag{4.35}$$

Asimptotik davranış ve trivial olmayan model elde edebilmek için RG sabiti $K_0 = 0$ olmalıdır. $K_0 \neq 0$ olduğu durum çözümleri referans [17]'de geniş olarak incelenmiştir. Şekil 4.3'de dörtlü skaler alan etkileşme sabitinin Yukawa etkileşme sabitine göre H_0'ın sıfırdan farklı değerleri ve ayar alanın $\alpha(t=0) = 1$ değeri için grafiği verilmiştir. İki etkileşme sabiti de t sonsuza giderken $K_0 = 0$ değeri için orijine yaklaşmaktadır.



Şekil 4.3: Dörtlü Skaler Alan Etkileşme Sabitinin Yukawa Etkileşme Sabitine Göre $H_0 > 0$ ve $K_0 = 0$ Değerleri İçin Grafiği.

4.5 Sonuç

Bu bölümde incelenen modele 3.bölümde çalışılan modele ek olarak $SU(N_C)$ abelyen olmayan ayar alanı eklenmiştir. Model için RG analizi yöntemleri kullanılarak RG denklemleri çıkartılmıştır ve etkileşme sabiti çözümleri için RG değişmezleri kullanılmıştır. Belirli limitler altında etkileşme sabitlerinin davranışları incelenmiştir. Bu incelemelerin sonucu olarak $C > A$, $H_0 > 0$, $P_0 < 0$ ve

$K_0 = 0$ tanımlanırsa, sonuçlar trivial olmayan bir model vermektedir. Etkileşme sabitleri için sıfırdan farklı sabit nokta çözümleri bulunmuştur ve morötesi bölgede grafikleri çizilmiştir. Bu grafiklerde etkileşme sabitleri asimptotik olarak sıfıra gitmektedirler.

5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Çalışmalara vektör tipi Gürsey modeli ile başlanılmıştır. Modelin etkileşme terimi, $\left(N_\mu N^\mu\right)^{2/3}$, polinom formunda değildir ve modelin kuantizasyonu için gerekli yöntem olan pertürbasyon teorisinde bu ifadenin hesaplanma yöntemi bulunmaması nedeniyle modelin polinom formuna dönüştürülmesi gerekmektedir. Akdeniz ve diğerleri tarafından orijinal modele eşdeğer olduğu düşünülen polinom formunda bir model önerilmiştir. Çalışmalarımız sırasında iki modele de uygulanan bir simetri işlemi ile modellerin eşdeğerlilikleri araştırılmış ve modellerin eşdeğer olmadığı görülmüştür. Modellerin eşdeğer olmamasına rağmen polinom formundaki model incelenmeye devam edilmiştir ve orijinal vektör tipi Gürsey modeli motivasyon olarak alınmıştır.

Modelin polinom formuna dönüştürülmesi sırasında kullanılan yardımcı alanlar nedeniyle model bağlı bir model haline gelmiştir. Dirac bağ analizi kullanılarak bağlı modellerde kuantizasyon için gerekli olan Faddeev-Popov determinantı hesaplanmıştır. Kuantizasyon için yol integralleri yöntemi kullanılmıştır ve kuantizasyon sonrası yeniden tanımlanan alanlarla etkin eylem elde edilmiştir. Etkin eylem kompozit vektör alan, kendi kendine etkileşen vektör alan, karışık etkileşme terimleri ve Faddeev-Popov hayalet alanlarını içermektedir. Alanlara ait propagatörler hesaplanmış ve sadece kompozit vektör alanın propagatöre sahip olduğu, $\varepsilon\frac{g_{\mu\nu}}{p^2}$, görülmüştür. Modelden hayalet alanlar ve karışık etkileşmeler düşmüştür. Spinör ve kompozit vektör alan propagatörleri için SD denklemi çözülmüş ve yüksek mertebelerden spinör ve vektör alan propagatörlerine katkı gelmediği görülmüştür.

Yapılan hesaplamalar sonucunda, birbirleriyle saçılabilen ve kompozit vektör alan içeren bir model oluşturulmuştur. Bununla birlikte temel alanların birbirleriyle saçılmaları cut-off kaldırıldığında sıfır olduğu, kompozit vektör alanların birbirleriyle saçılmalarının sonlu kaldığı ve kompozit vektör alanla

spinör alanın saçılmaları sıfır saçılma genliğine sahip olduğu görülmüştür. Vektör alanla spinör alanın saçılmaları vektör parçacıklarla spinör oluşturma olarak bilinen bir başka kanalda yazılabilir, bir spinör bir kompozit vektör alanla saçılır ve ağaç yaklaşımına ek olarak parçacık oluşturulabilir. Etkileşmede sadece ağaç diyagramlarını kullanabilmek için kural olarak iç vektör çizgileri kullanılmalıdır. Spinör alanların vakum dalgalanmaları olabilir ve bu durum propagatöre sadece sonlu bir katkı getirmektedir. Çünkü kompozit vektör propagatöründe ε bulunmaktadır ve bu durum saçılmaları sonlu yapmaktadır. Etkileşmelerde kompozit vektör alanlar sadece gelen ya da çıkan parçacıklar olarak yer aldıklarında saçılma genliği sıfıra gitmektedir. Sonuç olarak, polinom formundaki modelin tek etkileşme sabiti e sonlu renormalizasyona sahiptir.

Trivial olmayan model arayışına devam etmek için Bardeen ve diğerleri [12, 13] tarafından yapılan çalışmaya benzer olarak modele kütlesiz gerçek skaler alan eklenmiştir. Modeldeki etkileşme sabitlerinin sayısı skaler alan eklenmesiyle birlikte üçe çıkmıştır. Lagrange fonksiyonunda kendi kendine etkileşen skaler alan a etkileşme sabiti ve Yukawa tipi etkileşme y etkileşme sabiti ile gösterilmiştir. Model için bağ analizi yapılmıştır, yol integralleri yöntemiyle kuantize edilmiştir ve alanlar için propagatörler hesaplanmıştır. Kompozit vektör alan için yine $\varepsilon\frac{g_{\mu\nu}}{p^2}$ propagatörü ve skaler alan için standart kütlesiz skaler alan propagatörü kullanılmıştır.

Modele skaler alan eklenmesi etkileşmelerin bir halka düzeltmelerine katkıda bulunmuştur. Spinör-vektör alan etkileşmesinde skaler alan katkısı olarak gelen etkileşme ve spinör-skaler alan etkileşmesinde skaler alanın bir halka katkısı sonsuzluk içermektedir. Ayrıca kendi kendine etkileşen skaler alan etkileşmesinde bir halka düzeltmesi olan spinör kutu katkısının hesaplar sonucunda sonsuzluk içerdiği görülmüştür. Sonsuzluk içeren etkileşmeler RG yöntemleri kullanılarak renormalize edilmelidir. Bir önceki modelde $\overline{\psi}\psi \to \overline{\psi}\psi$ etkileşmesinin saçılma genliği vektör alan propagatöründeki ε nedeniyle sıfır olmaktaydı, fakat yeni modelde skaler alanın olması nedeniyle bu tür saçılmalara izin verilmektedir. RG analiz yöntemleri kullanılarak modelde sonsuz renormalizasyona ihtiyaç duyulan etkileşmelerin RG denklemleri yazılmıştır. Hesaplamaların sonucu olarak KED'de

çok iyi bilinen Landau kutbu problemiyle karşılaşılmıştır ve modele skaler alan eklenmesine rağmen trivial bir model elde edilmiştir.

Modeldeki bu sorunun giderilmesi için 2. bölümde çalışılan modele değişik gruplarda skaler ve/veya vektör alanlar eklenmiştir ve altı tane yeni model oluşturulmuştur. Oluşturulan üç modelin RG denklem çözümlerinde Landau kutbu ile karşılaşılmıştır, iki modelin RG denklem çözümlerinde en az bir etkileşme sabiti için lineer bağımsız bir çözüme ulaşılamamıştır. Son modelin RG denklem çözümlerinden elde edilen etkileşme sabitlerinde Landau kutbu bulunmamaktadır. Etkileşme sabitlerinde sonsuzluk içermeyen, skaler alan ve abelyen olmayan $SU(N)$ alanı eklenen modeli incelenmeye devam edilmiştir.

Oluşturulan yeni modelde bazı saçılmaların sonsuzluk içerdiği KRD'den bilinmektedir. Model için RG analiz yöntemleri kullanılarak bir halka için RG denklemleri çıkartılmıştır ve denklem çözümleri RG sabitleri kullanılarak elde edilmiştir. Belirli limitler altında etkileşme sabitlerinin davranışları ayrıntılı olarak araştırılmıştır. Hesaplamalar sonucunda belirli şartlar altında, $C > A$, $H_0 > 0$, $P_0 < 0$ ve $K_0 = 0$, trivial olmayan bir model elde edilmiştir. Etkileşme sabitleri için sıfırdan farklı sabit nokta çözümleri bulunmuştur ve morötesi bölgede grafikleri çizilmiştir. Bu grafiklerde etkileşme sabitleri asimptotik olarak sıfıra gitmektedir ve bunun anlamı trivial olmayan modelin bir özelliği olan asimptotik serbestliktir.

Çalışmaların devamı olarak elde edilen RG denklem çözümleri iki halka yaklaştırmasında çözülebilir. Ayrıca pseodovektör tipi Gürsey modeli oluşturularak araştırmalara devam edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] **Wilson, K.G. and Kogut, J.B.**, 1974. The renormalization group and the ε expansion, *Phys.Rep.*, **12**, 75–200.

[2] **Polchinski, J.**, 1984. Renormalization and effective Lagrangians., *Nucl.Phys.B*, **231**, 269–295.

[3] **Sonoda, H.**, 2007. On the construction of QED using ERG, *J.Phys.A:Math.Theor.*, **40**, 9675–9690, *arXiv:hep-th/073167*.

[4] **Sonoda, H.**, 2007. On the relation between RG and ERG, *J.Phys.A:Math.Theor.*, **40**, 5733–5750, *arXiv:hep-th/0612294*.

[5] **Igarashi, Y.**, **Itoh, K. and Sonoda, H.**, 2007. Quantum master equation for QED in exact renormalization group, *Prog.Theor.Phys.*, **118**, 121–134, *arXiv:hep-th/0704.2349*.

[6] **Baker, G.A. and Kincaid, J.M.**, 1979. Continuous spin Ising model and $\lambda\phi^4$ in d-dimensions field theory, *Phys.Rev.Lett.*, **42**, 1431–1434.

[7] **Wilson, K.G.**, 1973. Quantum field theory models in less than four-dimensions, *Phys.Rev.*, **7**, 2911–2926.

[8] **Klauder, J.F.**, 2007. A new approach to nonrenormalizable models, *Annals of Physics*, **322**, 2569–2602, *arXiv:hep-th/0609091*.

[9] **Nambu, Y. and Jona-Lasinio, G.**, 1961. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity 1, *Phys.Rev.*, **112**, 345–358.

[10] **Kocic, A. and Kogut, J.B.**, 1994. Compositeness, triviality and bounds on critical exponents for fermions and magnets, *Nucl.Phys.B*, **422**, 593–604, *arXiv:hep-th/9312007*.

[11] **Zinn-Justin, J.**, 1989. Quantum field theory and critical phenomena, Clarendon-Oxford, Cambridge, Massachusetts.

[12] **Bardeen, W.A.**, **Leung, C.N. and Love, S.T.**, 1986. Dilation and chiral-symmetry breaking, *Phys.Rev.Lett.*, **56**, 1230–1233.

[13] **Leung, C.N.**, **Love, S.T. and Bardeen, W.A.**, 1986. Spontaneous symmetry breaking in scale invariant quantum electrodynamics, *Nucl.Phys.B*, **273**, 649–662.

[14] **Reenders, M.**, 2000. Nontriviality of abelian gauged Nambu Jona Lasinio models in four dimensions, *Phys.Rev.D*, **62**, 025001, *arXiv:hep-th/9908158*.

[15] **Reenders, M.**, 1999. Dynamical symmetry breaking in the gauged Nambu Jona Lasinio model, Ph.D. thesis, Groningen Uni., *arXiv:hep-th/9906034*.

[16] **Kondo, K.**, **Tanabashi, M. and Yamawaki, K.**, 1993. Renormilization in the gauge Nambu-Jona-Lasinio model, *Prog.Theor.Phys.*, **89**, 1249–1301, *arXiv:hep-ph/9212208*.

[17] **Harada, M.**, **Kikukawa, Y.**, **Kugo, T. and Nakano, H.**, 1994. Nontriviality of gauge-Higgs-Yukawa system and renormalizability of gauge NJL model, *Prog.Theor.Phys.*, **92**, 1161–1184, *arXiv:hep-ph/9407398*.

[18] **Kubota, K. and Terao, H.**, 1999. Non-perturbative renormalization group and renormalizability of gauged NJL model, *Prog.Theor.Phys.*, **102**, 1163–1179, *arXiv:hep-th/9908062*.

[19] **Aoki, K.I.**, **Morikawa, K.**, **Sumi, J.I.**, **Terao, H. and Tomoyose, M.**, 1999. Wilson renormalization group equations for the critical dynamics of chiral symmetry, *Prog.Theor.Phys.*, **102**, 1151–1162, *arXiv:hep-th/9908042*.

[20] **Aoki, K.I.**, **Morikawa, K.**, **Sumi, J.I.**, **Terao, H. and Tomoyose, M.**, 2000. Analysis of the Wilsonian effective potentials in dynamical chiral symmetry breaking, *Phys.Rev.D*, **61**, 045008, *arXiv:hep-th/9908043*.

[21] **Brezin, E.**, **Itzykson, C.**, **Zinn-Justin, J. and Zuber, B.**, 1979. Remarks about the existence of nonlocal charges in two-dimensional models, *Phys.Lett.B*, **82**, 442–444.

[22] **Eichenherr, H. and Forger, M.**, 1979. On the dual symmetry of the nonlinear sigma models, *Nucl.Phys.B*, **155**, 381–393.

[23] **Zomolodchikov, A.B. and Zomolodchikov, A.B.**, 1978. Relativistic factorized S-matrix in two dimensions having O(N) isotopic symmetry, *Nucl.Phys.B*, **133**, 525–535.

[24] **Berg, B.**, **Karowski, M.**, **Weisz, P. and Kurak, V.**, 1978. Factorized U(N) symmetric S-matrices in 2 dimensions, *Nucl.Phys.B*, **134**, 125–132.

[25] **Miransky, V.A.**, 1993. Dynamical symmetry breaking in quantum field theories, World Scientific, Singapore.

[26] **Bardeen, J.**, **Cooper, L. and Schrieffer, J.**, 1957. Theory of superconductivity, *Phys.Rev.*, **108**, 1175–1204.

[27] **Heisenberg, W.**, 1954. Zur Quantentheorie Nichtrenormierbarer Wellengleichungen (On the quantum theory of non-renormalized wave equations), *Z für Naturforschung*, **9A**, 292–303.

[28] **Gürsey, F.**, 1956. On a conform-invariant spinor wave equation, *Nuovo Cimento*, **3**, 988–1006.

[29] **Kortel, F.**, 1956. On same solutions of Gürsey conformal-invariant spinor wave equation, *Nuovo Cimento*, **4**, 210–215.

[30] **Akdeniz, K.G.**, 1982. On classical-solutions of Gürsey conformal-invariant spinor model, *Lett.Nuovo Cimento*, **33**, 40–44.

[31] **Fushchich, W.I. and Shtelen, W.M.**, 1983. On some solutions of the nonlinear Dirac equation, *J.Phys.A: Math. Gen.*, **16**, 271–277.

[32] **Fushchich, W.I. and Shtelen, W.M.**, 1990. Merons and instantons as product of self-interaction of the Dirac-Gürsey spinor field, *J.Phys.A: Math. Gen.*, **23**, L517–L520.

[33] **Fushchich, W.I.**, **Shtelen, W.M. and Zhdanov, R.Z.**, 1985. On the new conformally invariant equations for spinor fields and their exact solutions, *Phys.Lett.B*, **159**, 189–191.

[34] **Akdeniz, K.G.**, **Arık, M.**, **Durgut, M.**, **Hortaçsu, M.**, **Kaptanoğlu, S. and Pak, N.**, 1982. A pure spinor model with composite gluons, *Phys.Lett.B*, **116**, 41–43.

[35] **Akdeniz, K.G.**, **Arık, M.**, **Hortaçsu, M. and Pak, N.K.**, 1983. Gauge bosons as composites of fermions, *Phys.Lett.B.*, **124**, 79–82.

[36] **Akdeniz, K.G.**, **Arık, M.**, **Durgut, M.**, **Hortaçsu, M.**, **Kaptanoğlu, S. and Pak, N.**, 1982. The quantization of the Gürsey model, *Phys.Lett.B*, **116**, 34–36.

[37] **Arık, M. and Hortaçsu, M.**, 1983. Parton-like behavior in a pure fermionic model, *J.Phys.G*, **9**, L119–L124.

[38] **Amati, D.**, **Barbieri, R.**, **Davis, A.C. and Veneziano, G.**, 1981. Dynamical gauge bosons from fundamental fermions, *Phys.Lett.B*, **102**, 408–416.

[39] **Salpeter, E.E. and Bethe, H.A.**, 1951. A relativistic equation for bound-state problems, *Phys.Rev.*, **84**, 1232–1242.

[40] **Hortaçsu, M. and Taşkın, F.**, 2007. Another model with interacting composites, *Int.J.Mod.Phys.A*, **22**, 83–93, *arXiv:hep-th/0605217*.

[41] **Lütfüoğlu, B.C. and Taşkın, F.**, 2007. Renormalization group analysis of a Gürsey model inspired field theory II, *Phys.Rev.D*, **76**, 105010, *arXiv:0707.2531*.

[42] **Dirac, P.A.M.**, 1964. Lectures on quantum mechanics, Belfer Graduate School of Science Yeshiva University, New York.

[43] **Faddeev, L.**, 1969. The Feynman integral for singular Lagrangians, *Theor.Math.Phys.*, **1**, 1–13.

[44] **Senjanovic, P.**, 1976. Path integral quantization of fields with second-class constraints, *Ann.Phys.*, **100**, 227–261.

[45] **Hanson, A. and Regge, C.T.**, 1976. Constraint hamiltonian systems, Accademia Nazionale Del Lincei Roma.

[46] **Schwinger, J.**, 1951. On the Green's functions of quantized fields: I, *Proc.Nat.Acad.Sc.*, **37**, 452–455.

[47] **Dyson, F.J.**, 1949. The S matrix in quantum electrodynamics, *Phys.Rev.*, **75**, 1736–1755.

[48] **Itzykson, C. and Zuber, J.B.**, 1980. Quantum field theory, McGraw-Hill, USA.

[49] **Ball, J.S. and Chui, T.W.**, 1980. Analytic properties of the vertex function in gauge theories. I, *Phys.Rev.D*, **22**, 2542–2549.

[50] **Kızılersu, A.**, **Reenders, M. and Pennigton, M.R.**, 1995. One loop QED vertex in any covariant gauge: Its complete analytic form, *Phys.Rev.D*, **52**, 1242–1259.

[51] **Weinberg, S.**, 1996. The quantum theory of fields vol 2- modern applications, Cambridge University Press.

[52] **Feynman, R.P.**, 1949. Space-time approach to quantum electrodynamics, *Phys.Rev.*, **76**, 769–789.

[53] **Karplus, R. and Neuman, M.**, 1950. Non-linear interactions between electromagnetic fields, *Phys.Rev.*, **80**, 380–385.

[54] **Ward, J.C.**, 1950. The scattering of light by light, *Phys.Rev.*, **77**, 293–293.

[55] **Kazakov, D.I. and Vartanov, G.S.**, 2006. Renormalizable expansion for non-renormalizable theories: I. scalar higher dimensional theories, *arXiv:hep-th/0607177*.

[56] **Hortaçsu, M.**, **Lütfüoğlu, B.C. and Taşkın, F.**, 2007. Gauge system mimicking the Gürsey model, *Mod.Phys.Lett.A*, **22**, 2521–2531, *arXiv:hep-th/0611116*.

[57] **Hortaçsu, M. and Lütfüoğlu, B.C.**, 2007. Renormalization group analysis of a Gürsey model inspired field theory, *Phys.Rev.D*, **76**, 025013, *arXiv:hep-th/0703103*.

[58] **Kubo, J.**, **Sibold, K. and Zimmermann, W.**, 1989. Cancelation of divergencies and reduction of couplings in the standard model, *Phys.Lett.B*, **220**, 191–194.

[59] **Pendleton, B. and Ross, G.G.**, 1981. Mass and mixing angle predictions from infrared fixed points, *Phys.Lett.B*, **98**, 291–294.

A. DİRAC MATRİSLERİ

A.1. Matris Çarpımları

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4 \tag{A.1}$$
$$\gamma_\mu\gamma^\mu = 4 \tag{A.2}$$
$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{A.3}$$
$$\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu = -2\gamma^\nu \tag{A.4}$$
$$\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\mu = 4g^{\nu\lambda} \tag{A.5}$$
$$\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma\gamma^\mu = -2\gamma^\sigma\gamma^\lambda\gamma^\nu \tag{A.6}$$

A.2. Matris İzleri

$$Tr(\text{tek sayıda}\,\sharp\,\gamma^\mu) = 0 \tag{A.7}$$
$$Tr(1) = 4 \tag{A.8}$$
$$Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu} \tag{A.9}$$
$$Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda}) \tag{A.10}$$
$$\tag{A.11}$$

B. İNTEGRAL TABLOSU

B.1. Farklı Boyutlar Üzerinden İntegraller

Euclidian uzayda bazı n-boyutlu integrallerin açık ifadeleri verilmiştir, burada $w = N/2$ ve N'de integralin boyutudur.

$$\int \frac{d^{2w}k}{(2\pi)^{2w}} \frac{1}{(k^2+2p.k+M^2)^A} = \frac{\Gamma(A-w)}{(4\pi)^w\Gamma(A)} \frac{1}{(M^2-p^2)^{A-w}} \tag{B.1}$$

$$\int \frac{d^{2w}k}{(2\pi)^{2w}} \frac{k_\mu}{(k^2+2p.k+M^2)^A} = -\frac{\Gamma(A-w)}{(4\pi)^w\Gamma(A)} \frac{p_\mu}{(M^2-p^2)^{A-w}} \tag{B.2}$$

$$\int \frac{d^{2w}k}{(2\pi)^{2w}} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2+2p.k+M^2)^A} = \frac{1}{(4\pi)^w\Gamma(A)} \left[p_\mu p_\nu \frac{\Gamma(A-w)}{(M^2-p^2)^{A-w}} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\Gamma(A-1-w)}{(M^2-p^2)^{A-1-w}} \right] \tag{B.3}$$

$$\int \frac{d^{2w}k}{(2\pi)^{2w}} \frac{k_\mu k_\nu k_\rho}{(k^2+2p.k+M^2)^A} = \frac{-1}{(4\pi)^w\Gamma(A)} \left[p_\mu p_\nu p_\rho \frac{\Gamma(A-w)}{(M^2-p^2)^{A-w}} + \frac{1}{2} \left(g_{\mu\rho}p_\nu + g_{\nu\rho}p_\mu + g_{\mu\nu}p_\rho \right) \frac{\Gamma(A-1-w)}{(M^2-p^2)^{A-1-w}} \right] \tag{B.4}$$

$$\int \frac{d^{2w}k}{(2\pi)^{2w}} \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma}{(k^2+2p.k+M^2)^A} = \frac{1}{(4\pi)^w\Gamma(A)} \left[p_\mu p_\nu p_\rho p_\sigma \frac{\Gamma(A-w)}{(M^2-p^2)^{A-w}} + \frac{1}{2} \left[g_{\mu\rho}p_\nu p_\sigma + g_{\nu\sigma}p_\mu p_\rho + g_{\mu\nu}p_\rho p_\sigma + g_{\rho\sigma}p_\mu p_\nu + g_{\nu\rho}p_\mu p_\sigma + g_{\mu\sigma}p_\rho p_\nu \right] \frac{\Gamma(A-1-w)}{(M^2-p^2)^{A-1-w}} + \frac{1}{4} \left[g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} + g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma} + g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} \right] \frac{\Gamma(A-2-w)}{(M^2-p^2)^{A-2-w}} \right] \tag{B.5}$$

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \frac{1}{2}\left(\gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}\right)\varepsilon + O(\varepsilon^2) \tag{B.6}$$

$$\Gamma(\varepsilon-1) = -\frac{1}{\varepsilon} + (\gamma-1) - \frac{1}{2}\left(\gamma^2 - 2\gamma + \frac{\pi^2}{6}\right)\varepsilon + O(\varepsilon^2) \tag{B.7}$$

$$\Gamma(\varepsilon-n) = \frac{(-1)^n}{n!}\left[\frac{1}{\varepsilon} + \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \gamma\right)\right] + O(\varepsilon^2) \tag{B.8}$$

burada $\gamma \simeq 0.577$ Euler sabitidir.

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)dt = \frac{dv(x)}{dx} f(x,v(x)) - \frac{du(x)}{dx} f(x,u(x)) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt \tag{B.9}$$

B.2. 4-Boyutlu Euclidean Uzayda Açı İntegralleri

k_μ ve p_μ iki momentum olsun ve $pk = |p||k|cos\theta; |p| = (p_0^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}$. Bu durumda [25]

$$\begin{aligned} \int d^4k F((p-k)^2) &= \pi^2 \int dk^2 d\Omega_k k^2 F(k^2 - 2|k||p|cos\theta + p^2) \\ d\Omega_k &= \frac{2}{\pi} sin^2\theta d\theta; \int d\Omega_k = 1 \end{aligned} \tag{B.10}$$

kullanılacak integrallerin genel yapıları aşağıdaki gibidir

$$I_n((pk)^m) \equiv \int d\Omega_k \frac{(pk)^m}{(k-p)^{2n}} \tag{B.11}$$

$$I_n(k_\mu (pk)^m) \equiv \int \mathrm{d}\Omega_k \frac{k_\mu (pk)^m}{(k-p)^{2n}} \tag{B.12}$$

$$I_n(k_\mu k_\nu (pk)^m) \equiv \int d\Omega_k \frac{k_\mu k_\nu (pk)^m}{(k-p)^{2n}} \tag{B.13}$$

Bazı kullanışlı açık iafadeler $x \equiv p^2, y \equiv k^2$

$$I_1((pk)^0) = \frac{1}{max(x,y)} \tag{B.14}$$

$$I_1((pk)^1) = \frac{1}{2}\frac{min(x,y)}{max(x,y)} \tag{B.15}$$

$$I_1((pk)^2) = \frac{1}{4}\frac{(x+y)min(x,y)}{max(x,y)} \tag{B.16}$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-\alpha} \frac{d\alpha d\beta}{p^2\alpha(1-\alpha) + q^2(1-\alpha-\beta)(\alpha+\beta) + 2pq\alpha(1-\alpha-\beta)} = \frac{1}{p(p+q)} \tag{B.17}$$

ÖZGEÇMİŞ

Ferhat TAŞKIN 1977 yılında Kayseri'de dünyaya geldi. İlk, orta ve lise eğitimini Kayseri'de tamamladı. 1994 yılında kazandığı Erciyes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü'nden 1998 yılında mezun oldu. Bir yıl Orta Doğu Teknik Üniversitesi'nde yabancı dil eğitimi gördü. 2000 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde başladığı yüksek lisans eğitimini 2001 yılında tamamladı. 2002 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Doktora öğrenimine başladı. Halen İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.