T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PİYASA DENGESİ ÜZERİNE KESİRLİ MERTEBEDEN MATEMATİKSEL MODELLEMELER

Serpil YILDIRIM

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

OCAK 2023

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

PİYASA DENGESİ ÜZERİNE KESİRLİ MERTEBEDEN MATEMATİKSEL MODELLEMELER

Tez Yazarı
Serpil YILDIRIM

Danışman
Prof. Dr. Erdal BAŞ

OCAK 2023
ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı:	Piyasa Dengesi Üzerine Kesirli Mertebeden Matematiksel Modellemeler
Yazarı:	Serpil YILDIRIM
İlk Teslim Tarihi:	01.12.2022
Savunma Tarihi:	10.01.2023

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

	İmza	
Danışman:	Prof. Dr. Erdal BAŞ Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Başkan:	Doç. Dr. Münevver TUZ Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi	Onayladım
Üye:	Dr. Öğr. Üyesi Funda TÜRK Bartın Üniversitesi Fen Fakültesi	Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun ...../...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza

Prof. Dr. Burhan ERGEN
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım "Piyasa Dengesi Üzerine Kesirli Mertebeden Matematiksel Modellemeler" Başlıklı Yüksek Lisans Tezinın içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

10.01.2023

Serpil YILDIRIM

ÖNSÖZ

İlk olarak Leibniz tarafından tanımlanan Kesirli Mertebeden Türev hesaplamaları, geçmişten ve lokal olmayan özelliklerden yararlanarak integral hesabı ile çözüme ulaşmayı sağladığı için özellikle son yıllarda mühendislik ve bilim alanındaki çalışmalar arasında önem kazanmıştır. Ekonomideki önceki değişiklikleri gözlemlemeye imkan sağlamasından dolayı bu tez çalışmasında kesirli mertebeden türev operatörleri yardımıyla ekonomideki belli sorunları araştırmak ve analiz etmek amaçlanmıştır.

Bu çalışmamda engin tecrübesi ve değerli bilgileriyle bana rehberlik eden, bilimsel veriler ışığında ve etik kurallar doğrultusunda beni yönlendiren değerli hocam Prof. Dr. Erdal BAŞ'a emeklerinden dolayı teşekkür eder, saygılar sunarım.

Serpil YILDIRIM
ELAZIĞ, 2023

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ iv
İÇİNDEKİLER v
ÖZET vi
ABSTRACT vii
ŞEKİLLER LİSTESİ viii
SİMGELER VE KISALTMALAR ix
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER 3
3. KESİRLİ HESAPLAMALARDA DÖNÜŞÜMLER 12
Lokal Türev ile Lokal olmayan türev arasında farklar 20
4. KLASİK DURUMDA PİYASA DENGESİ ÜZERİNDE EKONOMİK MODELLEME 21
4.1. Caputo Kesirli Türevli Ekonomik Model 22
4.2. CFC Kesirli Türevli Ekonomik Model 25
4.3. ABC Kesirli Türevli Ekonomik Model 27
4.4. Genelleştirilmiş Mittag-Leffler Fonksiyonu ile ABC Türevli Ekonomik Model 30
4.5. Karşılaştırma, Analiz ve Tartışma 33
5. SONUÇLAR 35
KAYNAKLAR 41
ÖZGEÇMİŞ

ÖZET

Piyasa Dengesi Üzerine Kesirli Mertebeden Matematiksel Modellemeler

Serpil YILDIRIM

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Ocak 2023, Sayfa: ix + 42

Bu tezde, ele aldığımız ekonomik matematiksel modellemelerin Caputo, Caputo Fabrizio (CFC) ve Genelleştirilmiş Mittag-Leffler, Atangana Baleanu (ABC) gibi kesirli mertebeden türevler yardımıyla analiz edilmesi ve sonuçlarının değerlendirilmesi amaçlanmıştır. Bu çerçevede tezimiz beş bölümden oluşmaktadır. Birinci ve ikinci bölümde tezde gerekli temel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde lokal ve lokal olmayan türevler arasındaki farklar, dördüncü bölümde Caputo, CFC, ABC, Genelleştirilmiş ABC gibi kesirli türevlerin klasik durumda piyasa dengesine ilişkin ekonomik modelleri incelenmiştir. Son bölümde sonuçların genel değerlendirmesi şekiller ile sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Ekonomik Matematiksel Model, Riemann Liouville, Mittag-Leffler, Caputo Fabrizio, Atangana Baleanu.

ABSTRACT

Fractional Order Economic Mathematical Models

Serpil YILDIRIM

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

January 2023, Pages: ix + 42

In this thesis, It is aimed to analyze the economic mathematical models we have discussed with the help of fractional derivatives such as Caputo, Caputo Fabrizio (CFC), Caputo and Generalized Mittag-Leffler, Atangana Baleanu (ABC) and evaluate the results. In this context, our thesis consists of five main parts. In the first and second parts, necessary fundamental concepts are given in the thesis. The differences between local and non-local derivatives, and in the third part, the economic models of fractional derivatives such as Caputo, CFC, ABC, Generalized ABC in the classical case of market equilibrium are examined. In the last chapter, the general evaluation of the results is presented with figures.

Keywords: Economic Mathematical Model, Rimann Liouville, Mittag-Leffler, Caputo Fabrizio, Atangana Baleanu.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 5.1. Caputo Kesirli Türevi için 35
Şekil 5.2. CFC Kesirli Türevi için 36
Şekil 5.3. α=0.8 değeri için,..... 36
Şekil 5.4. α=0.95 değeri için,..... 37
Şekil 5.5. α=0.9 değeri için karşılaştırdığımızda 37
Şekil 5.6. α=0.95 değeri için karşılaştırdığımızda 38
Şekil 5.7. α=0.85 değeri için karşılaştırdığımızda 38
Şekil 5.8. α=0.95 değeri için karşılaştırdığımızda 39
Şekil 5.9. α=0.93, $\mu = 0{,}91$ değeri için..... 39
Şekil 5.10. α=0.97, $\mu = 0{,}95$ değeri için..... 40

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

α : alpha sembolü
β : beta sembolü
μ : nü sembolü
γ : gama sembolü
$\mathbb{R}$: Reel Sayılar kümesi
$\mathcal{L}$: Laplace Sembolü
$\mathbb{N}$: Doğal Sayılar Kümesi
D : Türev Sembolü
Σ : Toplam Sembolü
E_{α} : Tek parametreli Mittag Leffler Fonksiyonu
$E_{\alpha,\alpha}$: İki Parametreli Mittag Leffler Fonksiyonu

Kısaltmalar

CFC : Caputo anlamında Caputo Fabrizio

ABC :Caputo anlamında Atangana Baleanu

1. GİRİŞ

Farklı Mühendislik bilimleri, fizik, kimya, biyoloji gibi temel fen bilimleri, tıp bilimi ve ekonomi gibi farklı alanlarda karşılaşılan problemlerin matematiksel modellemelerinde genelde diferansiyel denklemler kullanılarak çözüme ulaşılmaktadır. Zaman içinde insanoğlunun ihtiyaçları değişime uğradıkça insanın doğaya, doğada meydana gelen karmaşık forma ve doğrusal olmayan karmaşık düzene uyum sağlama çalışmalarının gerekli olduğu anlaşılmıştır. Bu çalışmalar, ilk kez karşılaşılmış yeni bir alanda olması ile birlikte integral ve türev tanımlarının genişletilmesi sonucunda tanımlanabilen " Kesirli Analiz " alanının doğmasını sağlamıştır [19]. Kesirli analizin çözüme odaklı önemli avantajlarından biri, ele alınan problem ve bu problemle birlikte verilen koşulların matematiksel açıdan en iyi şekilde modellenebilmesini sağlamasıdır [18].

L'Hospital' ın Leibniz'e $z \in N_0 = \{0,1,2, \dots\}$ inci mertebeden bir türev için kullanılabilecek sayının $z = \frac{1}{2}$ olduğu varsayılırsa nasıl bir durumla karşılaşılacağını sorması ve Leibniz tarafından 30.09.1965 tarihinde de bu sorunun cevaplanmasıyla kesirli türev ifadesi kullanılmıştır. Sonraki yıllarda farklı kitaplar ve makalelerde " kesirli türev " üzerine çalışmalar ortaya konulmuştur [27]. Kesirli mertebeden türev ve integral kavramları tam sayılı mertebeden türev ve integral kavramları kadar geçmiş tarihe dayanmasına rağmen, kesirli diferansiyel denklemler teorisi çalışmaları son yıllarda hız kazanmıştır. Bu süreçte araştırmacılar tarafından yapılan çalışmalar incelendiğinde matematiğin teorik kısmından ziyade uygulama alanları üzerinde daha verimli sonuçlar alınmıştır.

New Haven şehrinde 1974 yılında düzenlenen " The First Conference on Fractional Calculus and its Applicatıons" isimli konferansta kesirli türev konusunun literatürdeki yerinin varlığı gösterilmiştir. Yine 1974 yılında Oldham ve Spanier "Fractional Calculus" kitabını yazmışlardır. Daha sonrasında kesirli türev ifadesi üzerine çok sayıda önemli kitaplar yazılmıştır. 1783 yılında Leonardo Euler, kesirli türev alanına temel oluşturan çalışmalardan birini yapmış ve çalışmasında faktöriyel ifadesini genelleştirip, kesirli analizin önemli bir kavramı olan Gamma fonksiyonunu tanımlamıştır [31]. Kesirli türev tanımı ayrıntılı olarak ilk kez, 1812 yılında P.S Laplace tarafından yazılan " Theoric anlytique des probalities " isimli kitapta yer almaktadır [31].

Laplace, kesirli türev ifadesini $\int T(t)t^{-x}dt$ şeklinde integral ile gösterilen fonksiyonlar için açıklamıştır. N.H.Abel Tautochrone 1823 yılında bir probleminde ortaya çıkan integral denklemini kesirli türev tanımını uygulayarak çözmeyi başarmıştır [31]. Son yıllarda kesirli hesaplamalar mühendislik ve bilimde önemli derecede dikkat çekmektedir. Bunun sebebi geçmiş tarihten ve lokal olmayan özelliklerden yararlanmaya izin veren integral ile tanımlanan kesirli operatörler, Newton mekanikleri, Bio mühendislik, Isı Transferi, Finans vb. çeşitli alanlardaki karışık süreçleri daha iyi modelleyen güçlü çözümlerdir.

2014 yılında ilk defa tanımlanan conformable kesirli türev ve integral kavramı, Khalil tarafından yayınlandığı tarihten itibaren çok sayıda bilim insanının ilgisine mazhar olmuş, birçok yayının konusunu oluşturmuştur. Hammad ve Khalil tarafından değişkenlerine ayırma yöntemi kullanılarak conformable kesirli türevini oluşturan ısı denkleminin analitik çözümü ifade edilmiştir [13]. Abdeljawad tarafından yapılan çalışmalarda conformable türevi için zincir kuralı, üstel fonksiyonlar, Gronwall eşitsizliği, kısmi integrasyon, Taylor seri açılımı ve Laplace dönüşümü ifade edilmiştir [25-28]. Chung Newton mekaniği üzerine yaptığı çalışmalarında conformable türev ve integral kullanarak açıklamalarda bulunmuştur [12]. Eslami ve Rezazadeh integral metodunu kullanarak conformable Wu-Zhang sistemini çözmeyi başarmışlardır [11]. Atagana ve arkadaşları yaptıkları çalışmalarda conformable türevin yeni özelliklerini ifade etmişlerdir [4]. Eslami ise doğrusal olmayan conformable kesirli mertebeden Schrödinger sisteminin yeni dalga çözümlerini elde etmek için Kudryashov metodunu kullanmıştır [11]. Ayrıca 2017 yılında Sousa ve Oliveira, tamsayı mertebeli hesabın özelliklerini karşılayan bir parametre ile Mittag-Leffler fonksiyonunu içeren bir M-türevi bulmuşlardır [30]. Sonuç olarak pek çok bilim insanları çeşitli araştırmalar yapmıştır [7].

Şüphesiz Riemann Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov, Hadamard, Katugampola gibi kesirli türevlerinin yanı sıra bir çok araştırmacı özel çekirdekler seçerek yeni kesirli operatörler geliştirmeye çalışmaktadırlar. Bunlardan bazıları Caputo and Fabrizio (CFC) ve Atangana and Baleanu (ABC) kesirli türevleridir [9]. Ayrıca son zamanlarda Abdeljawad, genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu yardımıyla $E_{\alpha\mu}^{\gamma}(\lambda, t-s)$ çekirdekli Atangana Baleanu kesirli operatörlerini sunmuştur [3]. Ekonomi ve çeşitli kesirli matematiksel modeller üzerine bu konuda bilime hizmet edebilecek çok sayıda çeşitli çalışmalar yapılmıştır [29-35].

Özellikle de son yıllarda yapılan çok sayıda araştırmada kesirli türev ve integral uygulamalarının fiziksel yorumları incelenmiştir. Günümüzde kesirli analiz kavramı biyolojik sistemlerin modellenmesinde, beyin ve sinir hücrelerinin yapısındaki normal olmayan durumların modellenmesi çalışmalarıyla tıp alanında [14], fiyat analizi gibi lineer olmayan hareketlerin modellerinin analizi ile finans alanında, deprem anında fay hatlarında normal olmayan hareketlerin incelenmesindeki modellemelerde, nükleer manyetik üzerine teorik çalışmalarda [24], eczacılık ve kimyasal madde üreten pek çok sektördeki içerik analizini elde etmede kullanılmaktadır [8].

Ekonomik süreci tanımlamak için ekonomik verileri modelleyen en önemli öğeler olan türev ve integral ekonomik teoride büyük öneme sahiptir. Çünkü ekonomik verilerin davranışları geçmişteki dalgalanmalara bağlı olabilir, tamsayı yerine kesirli türev ve integrali kullanılarak ekonomik veri ve sonuçlarında çok daha hassas sonuçlar elde etmek mümkündür [1].

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1 (Gama Fonksiyonu)

Gama fonksiyonu, $0 < z < \infty$ değerleri için Euler integrali dediğimiz

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{z-1} dt \qquad z \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

integral ile ifade edilir.

Öncelikle bu ifadeyi daha ayrıntılı bir şekilde açıklamaya çalışalım:

$z-1$ bir reel sayı olduğundan , t^{z-1} ifadesi $e^{(z-1)lnt}$ şeklinde ifade edilir. Bundan dolayı t'nin doğal logaritmasının tanım kümesinde, $t > 0$ olması gerekir. Bu da

$$f(t) = t^{z-1}e^{-t}$$

fonksiyonun $t = 0$ da tanımsız olduğunu gösterir.

Ayrıca $t > 0$ olduğunda $f(t) > 0$ dır ve $e^{-t} < 1$ gerçeklenir.

Bu integralin sonlu olup olmadığını incelemeliyiz. Hem sonsuz uzunluktaki bir aralık üzerinde integral alıyoruz, hem de $0 < z < 1$ iken $f(t)$ fonksiyonu t sıfıra (sağdan) yaklaşırken sınırsız artıyor, yani

$$\lim_{t \to 0^+} t^{z-1}e^{-t} = +\infty$$

elde edilir.

Burada f fonksiyonunun grafiğinin altında kalan alanı gama fonksiyonunu tanımlayan integral olarak ele alırsak, bu iki sebepten dolayı integralin sonsuz çıkma olasılığıyla karşılaşırız. Fakat z' yi pozitif bir sayı olacak şekilde seçmemiz bütün bu sorunları ortadan kaldırıyor.
Burada ε ve M' yi pozitif sayılar olarak kabul edelim. Eğer limitleri olsaydı,

$$\Gamma(z) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} t^{z-1}e^{-t}\, dt + \lim_{M \to \infty} \int_{1}^{M} t^{z-1}e^{-t}\, dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} I_{\varepsilon +} \lim_{M \to \infty} J_M$$

şeklinde ifade edilirdi. Buradan $f(t)$' nin $t = 0$ ' da tanımlı olmasının zorunlu olmadığını görürüz. Aslında $z \geq 1$ olduğu durumda, $f(t)$ fonksiyonu $(0,1]$ aralığında sürekli ve sınırlı olduğundan, ilk integralde limit almaya gerek kalmaz.

Şimdi son yazılan limitlerin varlığını inceleyelim:

$$I_\varepsilon = \int_\varepsilon^1 t^{z-1}e^{-t}\,dt < \int_\varepsilon^1 t^{z-1}e^{-t}$$

$$= \frac{t^z}{z}|_{t=\varepsilon}^{t=1} = \frac{1}{z} - \frac{\varepsilon^z}{z}$$

Eşitsizliği, $z > 0$ iken I_ε integralinin, $\varepsilon > 0$ olduğu durumda,$1/z$ ile üstten sınırlı olduğunu ifade eder. $\varepsilon \to 0^+$ olduğunda, pozitif bir fonksiyonun belli bir aralıktaki integrali olduğundan I_ε artar. Bu fonksiyonun üstten sınırlı ve artan olması, $z > 0$ olduğu durumda

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} I_\varepsilon$$

limitinin varlığını gösterir. Dolayısıyla buradan, $0 < z < 1$ olsa bile, $t \to 0^+$ iken t^{z-1}' in sınırsız arttığı için grafiği ile z ekseni arasında kalan alanın sonlu kalabildiğini anlayabiliriz.

J_M integralinin limiti için Önerme 1' i inceleyelim:

Önerme 1. *N* pozitif bir tamsayı ve $t > 0$ olduğu durumda,

$$e^t > \frac{t^0}{0!} + \frac{t^1}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots \frac{t^n}{n!} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^n}{n!}$$

şeklindedir.

İspat.

Tümevarım yöntemi ile Önerme 1' i ispat edelim.

$n = 0$ iken $0! = 1$ dir.

O halde $t > 0$ iken $e^t > 1$ olacağı açıkça anlaşılır. Eşitsizliğin $n = k$ için doğru olduğunu varsayalım ve $t \geq 0$ için

$$h(t) = e^t - 1 - t - \frac{t^2}{2!} - \cdots - \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}$$

şeklinde ifade edelim. $h(0) = 1$ dir. Ayrıca

$$h'(t) = e^t - 1 - t - \frac{t^2}{2!} - \cdots - \frac{t^k}{k}$$

$t > 0$ iken tümevarım varsayımı gereğince pozitiftir; yani $h(t)$ fonksiyonu, $t > 0$ aralığında artandır diyebiliriz.

$t = 0$ da 1 değerini alan ve pozitif sayılarda artan bir fonksiyonun, oranı negatif veya sıfır olamayacağı açıktır. Bu önermenin özel bir hali negatif olmayan n tamsayıları için eşitsizliği

$$e^t > \frac{t^n}{n!} \qquad (t > 0)$$

şeklinde ifade edilir.

Şimdi J_M integralini inceleyebiliriz. n bir pozitif tamsayı olsun. Önerme 1' den

$$e^{-t} = \frac{1}{e^t} < \frac{n!}{t^n} \qquad (t > 0)$$

$$t^{z-1}e^{-t} < \frac{n!}{t^{n+1-z}} \qquad (t > 0)$$

elde edilir. $z > 0$ için $n > z$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı ele alalım.

$$J_M = \int_1^M t^{z-1}e^{-t}\,dt < \int_1^M n!\,t^{z-n-1}\,dt$$

$$= n!\frac{t^{z-n}}{z-n}\Big|_{t=1}^{t=M} = \frac{n!}{z-n}(M^{z-n} - 1)$$

$$= \frac{n!}{n-z}\left(1 - \frac{1}{M^{n-z}}\right)$$

eşitsizliği, J_M integralinin, $M > 0$ olması durumunda $\frac{n!}{n-z}$ ile üstten sınırlı olduğunu ifade eder. Ayrıca $M \to \infty$ iken J_M artan olduğundan,

$$\lim_{M\to\infty} J_M$$

limiti vardır. Buradan,

$t \to \infty$ için $t^{z-1}e^{-t}$, nin grafiğiyle z ekseni arasında kalan alanın sonlu olduğu görülür.

Bu da $z > 0$ için gama fonksiyonunu ifade eder. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Gama Fonksiyonunun Temel Özellikleri

1. $t > 0$ için $f(t)$ pozitif olduğundan, $z > 0$ için $\Gamma(z)$ de pozitiftir.

$z = 1$ için gama fonksiyonu değerini hesaplamak kolaydır.

$$\Gamma(1) = \lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-t}dt = \lim_{M\to\infty}[\,e^{-t}\,]_0^M$$

$$= \lim_{M\to\infty}[1 - e^{-M}] = 1$$

Ayrıca , $\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t}\,dt$ olmak üzere bu integrali $z > 0$ için kısmi integrasyon yardımıyla hesaplamaya çalışalım. $u = t^z$ ve $dv = e^{-t}\,dt$ dersek, $du = \mathrm{z}t^{z-1}$ ve $v = -e^{-t}$ olur.

$$\Gamma(z+1) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ M\to\infty}} \int_0^{\infty} t^z e^{-t}\, dt$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ M\to\infty}} [-t^z e^{-t}]_{t=\varepsilon}^{t=M} + z \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ M\to\infty}} \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^z - \lim_{M\to\infty} M^{\,z} e^{-M} + z\Gamma(z)$$

bulunur. Burada birinci limit sıfırdır ve ikinci limit de sıfırdır; Bunu görebilmek için z sabit tutulup M'yi değişken olarak düşünerek $\frac{M^{\,z}}{e^M}$ üzerinde L'Hospital kuralını [22] uygulamak yeterlidir. Buradan

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

gama fonksiyonunun fonksiyonel denklemini elde ederiz.

2. Şimdi z'i bir n pozitif tam sayısı olarak seçer ve fonksiyonel denklemi kendisinin sağ tarafındaki

$\Gamma(n)$ fonksiyonuna uygularsak;

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\Gamma(n-1)$$

şeklinde elde ederiz; sonra bu işlemi sağ tarafta $\Gamma(1) = 1$ çıkana kadar tekrar edersek

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (n = 0,1,2,\dots)$$

buluruz. Bu da, sadece doğal sayılarda tanımlı olan faktöriyel işleminin gama fonksiyonu yardımıyla bütün pozitif reel sayılarda da tanımlı olduğunu gösterir.

Şimdi ise gama fonksiyonunun pozitif olmayan sayılarda da tanımlı olabileceğini gösterelim. Yukarıdaki yöntemi kullanırsak, n bir pozitif sayı ve fonksiyonel denklemi $\Gamma(z+1)$ yerine $\Gamma(z+n)$ yazarsak ve bu işlemi sağ tarafta $\Gamma(z)$ kullanana kadar tekrarlarsak, her $z > 0$ için

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2)\dots(z+1)z\Gamma(z),$$

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)(z+n-2)\dots(z+1)z}$$

elde ederiz. $-n < z < -n+1$ ise $0 < z+n < 1$ olur ve $\Gamma(z+n)$ tanımlıdır.

O halde gama fonksiyonunu $-n < z < -n+1$ aralığında tanımlamak için kullanabiliriz. z' in negatife veya sıfıra yaklaştığı durumda son denklemde $\Gamma(z)'$ in sınırsız arttığı görülür.

Buradan gama fonksiyonu yalnızca $(0,1]$ aralığında tanımlıdır diyebiliriz. $\Gamma\,(z+n)$' in tanım aralığını $(n, n+1]$ şeklindeki tüm aralıklara yani, bütün pozitif reel sayılara genişletebiliriz.

3. Bir $1 < p < \infty$ ve bunun eşleniği q ile Hölder eşitsizliğini [15] gama fonksiyonunun tanımındaki integrale uygularsak;

$\Gamma\,(z)\ ve\ \Gamma\,(y)$ nin pozitif olması için $0 < z, y < \infty$ olmak üzere ,

$$\Gamma\left(\frac{z}{p}+\frac{y}{q}\right)=\int_0^{\infty} t^{\frac{z}{p}+\frac{y}{q}-1}\, e^{-t}\, dt$$

$$=\int_0^{\infty} (\,t^{z-1}e^{-t}\,)^{\frac{1}{p}}\,(t^{y-1}e^{-t}\,)^{\frac{1}{q}}\, dt$$

$$\leq\left(\int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\infty} t^{y-1}e^{-t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\Gamma\,(z)^{\frac{1}{p}}\,\Gamma\,(y)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte her iki tarafın logaritmasını aldığımızda logaritma artan bir fonksiyon olduğu için eşitsizlik korunur. Logaritmayı çarpma üzerinde toplama olarak dağıtıp $a, b > 0$ için $ln\, a^b = b\, ln\, a$
özelliğini kullanırsak,

$$\Gamma\left(\frac{z}{p}+\frac{y}{q}\right)\leq\frac{1}{p}\,ln\,\Gamma\,(z)+\frac{1}{q}\,ln\,\Gamma\,(y)$$

elde ederiz ki bu da $ln\,\Gamma$ fonksiyonunun dışbükey [15] olması demektir.

Tanım 2.2 (Mittag-Leffler Fonksiyonu) Klasik mertebeli diferansiyel denklem teorisinde üstel e^z fonksiyonun genelleştirilmiş bir parametreli hali

$$E_\alpha\,(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \qquad (x\in\mathbb{C}, \mathbb{R}(\alpha)>0) \qquad (2.2)$$

şeklinde olup, bu fonksiyona tek parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu denir [27].
İki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu ise

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \qquad (x, \beta) \in \mathbb{C}, \qquad \mathbb{R}(\alpha) > 0 \tag{2.3}$$

seri açılımı şeklindedir. α ve β nın belli değerleri için Mittag-Leffler fonksiyonu temel fonksiyonlara indirgenebilir. Öte yandan $\beta = 1$ alındığında genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonunu elde ederiz.

$$E^{\,p}_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k\,(p)k}{\Gamma(\alpha k + \beta)k!} \qquad ((x) \in \mathbb{C},\ \ \alpha, \beta, p \in \mathbb{C}\,,\ \ \mathbb{R}(\alpha) > 0). \tag{2.4}$$

Burada $(p)_k$ Prabhakar Pochhammer sembolüdür.

Prabhakar tarafından $(p)_k = p(p+1) + \cdots .(p+k-1)$ ve $p = 1$ alındığında $(1)_k = k!$ olacak şekilde tanımlanmıştır. $p = 1$ olduğunda Mittag-Leffler fonksiyonuna karşılık gelir.

Mittag-Leffler fonksiyonunun özel bir fonksiyonu olarak,

$$E_{\alpha}(\lambda, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k x^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (\,0 \notin \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{C}, \mathbb{R}(\alpha) > 0\,) \tag{2.5}$$

ve

$$E_{\alpha,\beta}(\lambda, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k x^{\alpha k+\beta-1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (\,0 \notin \lambda \in \mathbb{R}, \quad x, \beta \in \mathbb{C}, \qquad \mathbb{R}(\alpha) > 0\,) \tag{2.6}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan

$$E_{\alpha,1}(\lambda, x) = E_{\alpha}(\lambda, x)$$

yazabiliriz.

Üç parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu [1]:

$$E^{\,p}_{\alpha,\beta}(\lambda, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k x^{\alpha k+\beta-1}\,(p)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)k!}\,(\,0 \notin \lambda \in \mathbb{R}, \quad x, \beta \in \mathbb{C}, \qquad \mathbb{R}(\alpha) > 0\,) \tag{2.7}$$

Şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.3 (Conformable Türevi)

$t > 0$ ve $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun α. mertebeden conformable türevi,

$$D^{\alpha}\big(f(t)\big) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \tag{2.8}$$

şeklindedir [17].

Teorem 2.4 $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere f ve g fonksiyonları bir $t > 0$ noktasında α. mertebeden diferansiyellenebilir olsun.

Bu durumda

i) Her $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$D^{\alpha}(af + bg)(t) = aD^{\alpha}(f)(t) + bD^{\alpha}(g)(t)$$

lineerlik özelliğini sağlar.

ii) Her $p \in \mathbb{R}$ için

$$D^{\alpha}(t^{p}) = pt^{p-\alpha}$$

vardır.

iii) f ve g fonksiyonları için

$$D^{\alpha}(fg)(t) = f(t)D^{\alpha}(g)(t) + g(t)D^{\alpha}(f)(t)$$

dir.

iv) f ve g fonksiyonları için

$$D^{\alpha}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gD^{\alpha}(f) - fD^{\alpha}(g)}{g^{2}}$$

şeklindedir.

v) λ sabit, $f(t) = \lambda$ fonksiyonu için $D^{\alpha}(\lambda) = 0$ dır.

vı) f fonksiyonu α. mertebeden diferansiyellenebilir ise

$$D^{\alpha}(f)(t) = t^{1-\alpha}\frac{df(t)}{dt}$$

sağlanır [17].

Tanım 2.5 (Conformable İntegrali) $\alpha \in (0,1]$ ve kullanılan integral genelleştirilmiş Riemann integrali olmak üzere,

$$I_a^{\alpha}\big(f(t)\big) = \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}}dx \tag{2.9}$$

integraline conformable integral denir [17].

Tanım 2.6 (M-Türevi)

$f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlı olsun. $0 < \alpha \leq 1$ için M-türevi,

$$D_M^{\alpha,\beta}f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0}\frac{f\left(tE_{\beta}(\varepsilon t^{-\alpha})\right) - f(t)}{\varepsilon} \qquad (t > 0, \beta > 0) \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlanır [30].

Eğer $(0,\alpha)$ aralığında α-diferansiyellenebilir ise limiti vardır ve

$$D_M^{\alpha,\beta}f(0) = \lim_{t \to 0}\left(D_M^{\alpha,\beta}f(t)\right)$$

şeklinde olur [30].

Tanım 2.7 (M- İntegrali) f sürekli bir fonksiyon, $0 < \alpha \leq 1$ ve $a \geq 0$ olsun. f fonksiyonunun α. mertebeden M-integrali,

$$I_M^{\alpha,\beta}f(t) \;=\; \Gamma(\beta+1)\int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}}dx \qquad \beta > 0 \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlanır [30].

Tanım 2.8 (Riemann Liouville Kesirli Türevi) p. mertebeden Riemann Liouville kesirli türev tanımı ise $m \leq p \leq m+1$ olmak üzere,

$$D_t^p f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1}\frac{1}{\Gamma(m-p+1)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p}f(\tau)d\tau \tag{2.12}$$

olarak tanımlanmıştır [27].

Tanım 2.9 (Riemann Liouville Kesirli İntegral) Riemann - Liouville integralinin $n-1<a<n$ olmak üzere, α. mertebeden tanımı

$$I^{a}\, f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{X}\frac{f(s)}{(x-s)^{1-a}}\,ds \tag{2.13}$$

olarak verilmiştir [27].

Tanım 2.10 [16] **(Caputo Kesirli Türevi)** Sol ve sağ Caputo kesirli türevi $\alpha\in\mathbb{C},\mathbb{R}(\alpha)>0,n=[\mathbb{R}(\alpha)]+1$ olacak şekilde

$${}_{a}^{C}D^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}(t-x)^{n-\alpha-1}f^{n}(x)dx \tag{2.14}$$

$${}^{C}D_{b}{}^{\alpha}f(t)=\frac{-1^{n}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{t}^{b}(x-t)^{n-\alpha-1}f^{n}(x)dx \tag{2.15}$$

şeklinde tanımlanır.

3. KESİRLİ HESAPLAMALARDA DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde kesirli diferansiyel denklemlerin çözümü için hayati öneme sahip Laplace dönüşümlerini ele alacağız.

Tanım 3.1 [10] Eğer tüm $t > T$ değerleri için,

$$|f(t)| \leq Ke^{-at} \tag{3.1}$$

koşulunu sağlayacak bir K pozitif sabiti bulunabiliyor ise, $f(t)$ fonksiyonuna $0 \leq t < \infty$ aralığında a mertebeden üstel mertebelidir denir ve bu durum,

$$f(t) = O\,(e^{at})\,, \qquad t \to \infty, \tag{3.2}$$

sembolik gösterimi ile ifade edilir.

Teorem 3.2 [10] Eğer bir $f(t)$ fonksiyonu, tüm sonlu $(0, T)$ aralıklarında sürekli veya parçalı sürekli ise ve a mertebesinden üstel mertebeli ise, $\mathbb{R}(s) > a$ olmak üzere tüm s değerleri için $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü tanımlıdır.

İspat.

$$|\bar{f}(s)| = \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt\right| \leq \int_0^\infty e^{-st}|f(t)|\,dt \leq K\int_0^\infty e^{-st}\,e^{at}dt$$

$$= K\int_0^\infty e^{-t(s-a)}\,dt = \frac{K}{s-a}, \qquad \mathbb{R}(s) > a\,. \tag{3.3}$$

Teorem 3.3 [10] $\mathcal{L}\{f(t)\} = \bar{f}(s)$ olmak üzere,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = s\bar{f}(s) - f(0) \tag{3.4}$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) = s^2\bar{f}(s) - sf(0) - f'(0) \tag{3.5}$$

ve daha genel olarak

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{n-1}(0)$$

$$= s^n\bar{f}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{n-1}(0) \tag{3.6}$$

eşitlikleri doğrudur.

İspat $f'(t)$ fonksiyonuna Laplace dönüşüm tanımı uyguladığı zaman,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte kısmi integrasyon yöntemi uygulanır ise,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = e^{-st} f(t)|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f\,(t)\, dt$$

$$= s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = s\bar{f}\,(s) - f(0) \tag{3.7}$$

sonucu elde edilir.

Benzer şekilde, $f''(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümüne ulaşabilmek için (3.7) eşitliği kullanılır ise,

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \mathrm{s}\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0)$$

$$= s[s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)] - f'(0)$$

$$= \mathrm{s}^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

$$= s^2\bar{f}(s) - sf(0) - f'(0) \tag{3.8}$$

sonucuna ulaşılır.

Ayrıca, $f^n(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü tümevarım yöntemi ile de ispatlanabilir.(3.7) ve (3.8) eşitliklerine ek olarak,

$$\mathcal{L}\{f^{(n-1)}(t)\} = s^{n-1}\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-2}f(0) - s^{n-3}f'(0) - \cdots - f^{(n-2)}(0) \tag{3.9}$$

olduğu kabul edilir ise,

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^{\mathrm{n}}\mathcal{L}\{f^{(n-1)}(t)\} - f^{(n-1)}(0)$$

$$= s\left[s^{n-1}\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-2}f(0) - s^{n-3}f'(0) - \cdots - f^{(n-2)}(0)\right] - f^{(n-1)}(0)$$

$$= s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \tag{3.10}$$

eşitliği elde edilir.

Tanım 3.4 [10] $t > 0$ olmak üzere,

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\mathrm{t}-\tau)g(\tau)d\tau \tag{3.11}$$

eşitliği ile tanımlanan işleme konvolüsyon işlemi, $f(t) * g(t)$ fonksiyonuna ise $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının konvolüsyonu denir.

Teorem 3.5 [10] (**Konvolüsyon Teoremi**) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \bar{f}(\mathrm{s})$ ve $\mathcal{L}\{g(t)\} = \bar{g}(\mathrm{s})$ olmak üzere,

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\,\mathcal{L}\{g(t)\} = \bar{f}(s)\,\bar{g}(s), \tag{3.12}$$

eşitliği doğrudur.

Ayrıca, bu eşitliğe denk olarak ,

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\bar{g}(s)\} = f(t) * g(t) \tag{3.13}$$

eşitliği de doğrudur.

İspat.

Laplace dönüşümü ve konvolüsyon işlem tanımları kullanılır ise,

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \int_0^\infty e^{-\mathrm{st}} \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\, dt,$$

eşitliği elde edilir. Gerekli işlemler yapılarak

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \int_0^\infty g(\tau) \int_0^\infty e^{-\mathrm{st}} f(\mathrm{t}-\tau)dtd\tau$$

$$= \int_0^\infty g(\tau) \int_0^\infty e^{-\mathrm{s}(x+\tau)} f(x)dxd\tau$$

$$= \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau) \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx d\tau = \bar{f}\,(s)\; \bar{g}\,(s) \tag{3.14}$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 3.6 $D^{-\alpha} f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü tanımlı olsun. Bu durumda, $\alpha \in \mathbb{C}$ ve $\mathbb{R}(\alpha) > 0$ olmak üzere, $f(t)$ fonksiyonunun Riemann Liouville kesirli integralinin Laplace dönüşümü,

$$\mathcal{L}\{(D^{-\alpha} f(t)\} = s^{-\alpha} \bar{f}(s), \tag{3.15}$$

şeklindedir [23].

İspat.

Riemann Liouville kesirli türevi tanımı kullanılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\mathcal{L}\{(D^{-\alpha} f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right\}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, \mathcal{L}\left\{\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right\} \tag{3.16}$$

Bu eşitlikteki integral açıkça $t^{\alpha-1}$ ve $f(t)$ fonksiyonlarının konvolüsyonudur. Bu durumda konvolüsyon teoreminden ,

$$\mathcal{L}\{(D^{-\alpha} f(t)\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{L}\{t^{\alpha-1}\} \mathcal{L}\{f(t)\} \tag{3.17}$$

eşitliği elde edilir. Öte yandan t^α fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \int_0^\infty e^{-st} t^\alpha d\alpha = \Gamma(\alpha+1) s^{-\alpha-1} \qquad \mathbb{R}(\alpha) > -1 \tag{3.18}$$

eşitliği ile verilmektedir.(3.18) eşitliği, $\alpha \to \alpha - 1$ için (3.17) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\mathcal{L}\{(D^{-\alpha} f(t)\} = s^{-\alpha} \bar{f}(s), \qquad \mathbb{R}(\alpha) > 0, \tag{3.19}$$

sonucu elde edilir.

Teorem 3.7 [23] $\mathcal{L}\{(\mathrm{D}^{\alpha}f(t)\}$ fonksiyonu tanımlı olsun. Bu durumda, $\mathbb{R}(\alpha) > 0, n \in \mathbb{N}$ ve $n-1 < \mathbb{R}(\alpha) \leq n$ olmak üzere bir fonksiyonun Riemann Liouville Kesirli türevinin Laplace dönüşümü ,

$$\mathcal{L}\{(D^{\alpha}f(t)\} = s^{\alpha}\bar{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}D^{k-n+\alpha}f(0) \tag{3.20}$$

şeklindedir.

İspat.

Riemann –Liouville kesirli türev tanımı kullanılarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir;

$$\mathcal{L}\{(D^{\alpha}f(t)\} = \mathcal{L}\{\left(D^{n}[D^{-(n-\alpha)}f(t)\right]\} \tag{3.21}$$

$D^{-(n-\alpha)}f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü hesaplanır ise,

$$\mathcal{L}\{(D^{\alpha}f(t)\} = s^{n}\mathcal{L}\{D^{-(n-\alpha)}f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}D^{k-(n-\alpha)}f(0)$$

$$= s^{n}\mathcal{L}\{\mathrm{s}^{-(\mathrm{n}-\alpha)})\bar{f}\,(s)\} - \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}-1} \mathrm{s}^{\mathrm{n}-\mathrm{k}-1}D^{k-n+\alpha}f(0)$$

$$= s^{\alpha}\bar{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}D^{k-n+\alpha}f(0) \tag{3.22}$$

denklemi elde edilir.

Teorem 3.8 [20-21] ${}^{C}D^{\alpha}f(t)$ Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşümü tanımlı olsun. Bu takdirde,

$\mathbb{R}(\alpha) > 0,\ n \in \mathbb{N}$ ve $n-1 < \mathbb{R}(\alpha) \leq n$ olmak üzere $f(t)$ fonksiyonunun Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşümü,

$$\mathcal{L}\{{}^{C}D^{\alpha}f(t)\} = s^{\alpha}\bar{f}\,(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{\alpha-k}\,f^{(k-1)}(0) \tag{3.23}$$

şeklindedir.

İspat.

Caputo kesirli türevi ve Riemann Liouville kesirli integrali tanımları kullanılır ise ,

$$\mathcal{L}\{({}^{C}D^{\alpha}f(t)\} = \mathcal{L}\{\left(D^{-(n-\alpha)}[\,D^{n}f(t)\right])\}$$

$$= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{0}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}\left(\frac{d^{n}f(t)}{dt^{n}}\right)dt\right\}$$

$$= \int_{0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{0}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}\left(\frac{d^{n}f(t)}{dt^{n}}\right)dt$$

$$= \int_{0}^{\infty}e^{-sx}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{0}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}\,f^{(n)}(t)dt\right]dx \qquad (3.24)$$

denklemi elde edilir.

Gerekli işlemler yapılarak,

$$\mathcal{L}\{{}^{C}D^{\alpha}f(t)\} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{0}^{\infty}\int_{\mathrm{t}}^{\infty}e^{-sx}(x-t)^{\mathrm{n-\alpha-1}}\,f^{(n)}(t)dxdt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{0}^{\infty}\int_{\mathrm{t}}^{\infty}e^{-s(u+t)}u^{n-\alpha-1}\,f^{(n)}(t)dudt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{0}^{\infty}e^{-st}f^{(n)}(t)\int_{0}^{\infty}e^{-su}u^{n-\alpha-1}\,dudt \qquad (3.25)$$

sonucuna ulaşılır.

Buradan, (3.18) eşitliği kullanılır ise,

$$\mathcal{L}\{{}^{C}D^{\alpha}f(t)\} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{0}^{\infty}e^{-st}\;f^{(n)}(t)\frac{\Gamma(n-\alpha)}{s^{n-\alpha}}dt$$

$$= s^{\alpha-n}\int_{0}^{\infty}e^{-st}\;f^{(n)}(t)dt = s^{\alpha-n}\,\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}$$

bağıntısı elde edilir.

Teorem 3.3 kullanılırsa,

$$\mathcal{L}\{{}^{C}D^{\alpha}f(t)\} = s^{\alpha-n}\left[s^{n}\bar{f}\,(s) - s^{n-1}\,f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)\right]$$

$$= s^{\alpha}\bar{f}(s) - s^{\alpha-1}f(0) - s^{\alpha-2}f'(0) - \ldots - s^{\alpha-n}f^{(n-1)}(0)$$

$$= s^{\alpha}\bar{f}(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{\alpha-k}f^{(k-1)}(0) \tag{3.26}$$

sonucu elde edilir.

Tanım 3.9 [9] Caputo anlamında sol ve sağ Caputo Fabrizio kesirli türevi

$${}^{CFC}_{a}D^{\alpha}f(t) = \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)}\int_{a}^{t} f'(x)\exp(\lambda(t-x))\,dx \tag{3.27}$$

ve

$${}^{CFC}D_{b}^{\alpha}\ f(t) = -\frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)}\int_{t}^{b} f'(x)\exp\big(\lambda(x-t)\big)\,dx \tag{3.28}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $0 < \alpha < 1, M(\alpha)$ normalleştirilmiş bir fonksiyon ve $\lambda = -\frac{\alpha}{1-\alpha}$ dır.

Teorem 3.10 [9] CFC kesirli türevinin Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{{}^{CFC}D^{\alpha}\} = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\frac{sF(s)}{s+\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\frac{f(0)}{s+\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{3.29}$$

şeklindedir.

Lemma 3.11 Belirli fonksiyonların Laplace dönüşümleri,

A) $\mathcal{L}\{E_{\alpha}(-at^{\alpha})\} = \frac{S^{\alpha}}{S(S^{\alpha}+a)}$

B) $\mathcal{L}\{1 - E_{\alpha}(-at^{\alpha})\} = \frac{a}{S(S^{\alpha}+a)}$

C) $\mathcal{L}\{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-at^{\alpha})\} = \frac{1}{(S^{\alpha}+a)}$

şeklindedir.

Lemma 3.12 [2] $\alpha, \mu, \gamma, s, \lambda \in \mathbb{C},\ \mathbb{R}(\mu) > 0, \mathbb{R}(s) > 0, |\lambda s^{-\alpha}| < 1$ olsun.

$E^{\gamma}_{\alpha,\mu}(\lambda t^{\alpha})$'nın Laplace dönüşümü,

$$\mathcal{L}\{E^{\gamma}_{\alpha,\mu}(\lambda t^{\alpha})\} = S^{-\mu}(1-\lambda s^{-\alpha})^{-\gamma} \tag{3.30}$$

şeklindedir.

Tanım 3.13 [5] Caputo anlamında sağ ve sol Atangana - Baleanu (ABC) kesirli türevleri

$$ {}^{ABC}_{a}D^{\alpha} f(t) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t f'(x)\, E_\alpha(\lambda(t-x)^\alpha)dx \tag{3.31} $$

$$ {}^{ABC}D^{\alpha}_{b} f(t) = -\frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \int_t^b f'(x)\, E_\alpha(\lambda(x-t)^\alpha)dx \tag{3.32} $$

şeklindedir. Burada $0 < \alpha < 1, B(\alpha)$ normalleştirilmiş bir fonksiyon ve $\lambda = \frac{-\alpha}{1-\alpha}$ dır.

Teorem 3.14 [6] ABC'nin Laplace dönüşümü

$$ \mathcal{L}\{ {}^{ABC}D^{\alpha} f(t)\} = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \frac{s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1} f(0)}{s^\alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{3.33} $$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.15 [3] $\gamma \in \mathbb{R}, \mathbb{R}(\mu) > 0, 0 < \alpha < 1$ ve $\lambda = \frac{-\alpha}{1-\alpha}$ olacak şekilde genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu $E^{\gamma}_{\alpha,\mu,}(\lambda t^\alpha)$ ile sağ ve sol taraf ABC türev operatörü,

$$ {}^{ABC}_{a}D^{\alpha,\mu,\gamma} f(t) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t E^{\gamma}_{\alpha,\mu}\left(\lambda(t-x)^\alpha\right) f'(x)dx \tag{3.34} $$

ve

$$ {}^{ABC}D^{\alpha,\mu,\gamma}_{b} f(t) = \frac{-B(\alpha)}{1-\alpha} \int_t^b E^{\gamma}_{\alpha,\mu}(\lambda(x-t)^\alpha)\, f'(x)dx \tag{3.35} $$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.16 [3] Genelleştirilmiş ABC'nin Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$ \begin{aligned} \mathcal{L}\{ {}^{ABC}D^{\alpha,\mu,\gamma} f(t)\} &= \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\, s^{1-\mu} F(s)(1 - \lambda s^{-\alpha})^{-\gamma} \\ &- \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\, f(0)\, s^{-\mu}(1 \\ &- \lambda s^{-\alpha})^{-\gamma} \end{aligned} \tag{3.36} $$

Lokal Türev ile Lokal olmayan türev arasında farklar

Lokal türevlerin tanımlanması tamamıyla limit içeren ve limit tabanlı tanımlardır. Lokal türevlerin tanımlarını genel olarak klasik türevin daha genel bir versiyonu gibi düşünebiliriz.

Bu türevlere lokal denmesinin sebebi klasik türevde olduğu gibi komşuluk kavramının mevcut olmasıdır. Lokal olmayan türevde ise komşuluk kavramı yerine bölge kavramı mevcuttur.

Lokal türevlere örnek olarak, Conformable Türevi, M- Türevi, Beta Türevi, Katagumpala türevlerini söyleyebiliriz.

Lokal olmayan türevler integral yardımıyla tanımlanır. İntegral yardımıyla tanımlanan non-lokal kesirli türevler olarak adlandırılır. Ayrıca integralin içinde singülerlik içerip içermemesine göre iki sınıfa ayrılır.

1) İntegral singülerlik içeriyorsa " *non- local singular fractional derivative*" diye adlandırılır.

2) İntegral singülerlik içermiyorsa " *non-local non- singular fractional derivative*" olarak adlandırılır.

Singüler kernel içeren türevlere örnek olarak, Caputo, Riemann Liouville türevleri ve bu iki türevden oluşan tüm kesirli türevlerini ele alabiliriz.

Non - singüler türevlere örnek olarak, Atangana - Baleanu ve Caputo Fabrizio türevlerini ele alabiliriz.

4. KLASİK DURUMDA PİYASA DENGESİ ÜZERİNDE EKONOMİK MODELLEME

Her ekonomik model, ticari mallar, şirketler, bireyler vb. gibi kendi birimlerine sahip deneyimli bir ekonomide sınırlandırılmış, fiyat özürlüğü ile satıcılar için maksimum kârı ve alıcılar için maksimum yararı hedefler. Ekonomiler, fiyat ile arz ve talep arasındaki etkileşimi, arz ve talebin fiyat üzerinden bağımlılığını ve denge noktasının arz ve talep eğrisine nasıl ulaştığını belirler.

Rekabetçi bir piyasa, doğrudan rekabetçi bir denge ile ilişkilidir ki, bu alıcılar tarafından talep edilen malların miktarı, satıcılar tarafından arz edilen malların miktarına eşit olduğu anlamına gelir.

Talep edilen miktar q_d ve arz edilen miktar q_s fonksiyonlarıyla şu şekilde tanımlanır.

$$q_d(t) = d_0 - d_1P(t), \quad q_s(t) = -s_0 + s_1P(t). \tag{4.1}$$

P ticari malın fiyatı d_0, s_0, s_1, d_1 ise arz ve talebi etkileyen pozitif sabitlerdir.

$q_d(t) = q_s(t)$ için, arz ve talep edilen miktarların birbirine eşit olduğu zaman, denge fiyatı

$$P^* = \frac{(d_0 + s_0)}{(d_1 + s_1)}$$

elde edilir [1].

Böyle bir durumda fiyat sabit kalma eğilimindedir ve ekonomide kıtlık ve artık mal yoktur. Aşağıdaki fiyat ayarlaması diferansiyel denklemini ele alalım [36].

$$P'(t) = k(q_d - q_s) \ . \tag{4.2}$$

Burada $k > 0$ ayarlamaların hızını gösteren bir orantı sabitidir. (4.1) numaralı eşitlikte q_d ve q_s fonksiyonlarını (4.2) numaralı eşitlikte yerine yazarsak;

$$P'(t) + k(d_1 + s_1)P(t) = k(d_0 + s_0) \tag{4.3}$$

fiyat ayarlama diferensiyel denklemini elde ederiz.

Bu lineer diferansiyel denklemini çözersek ;

$$P(t) = \frac{(d_0 + s_0)}{(d_1 + s_1)} + \left[P(0) - \frac{(d_0 + s_0)}{(d_1 + s_1)}\right].e^{-k(d_1 + s_1)t} \tag{4.4}$$

elde edilir. $t = 0$ anında ki fiyat $P(0)$ dır ve burada piyasadaki acentelerin beklentilerine dikkat etmeliyiz. Acentelerin beklentisini ele alırsak, ek etkenler olan $d_2 \; ve \; s_2$ yi içeren arz ve talep fonksiyonları,

$$q_d(t) = d_0 - \; d_1 P(t) + \; d_2 P'(t), \qquad q_s(t) = -s_0 + \; s_1 P(t) - s_2 P'(t) \tag{4.5}$$

(4.5) numaralı denklemdeki gibi ifade edilir.

$q_d(t)$ ve $q_s(t)$ fonksiyonlarını eşitlersek,

$$P'(t) - \frac{(\, d_1 + s_1)}{(\, d_2 + s_2)} P(t) = \frac{(\, d_0 + s_0)}{(d_2 + s_2)} \tag{4.6}$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

Lineer diferansiyel denklemi çözersek,

$$P(t) = \frac{(\, d_0 + s_0)}{(\, d_1 + s_1)} + \left[P(0) - \frac{(\, d_0 + s_0)}{(\, d_1 + s_1)} \right] . e^{t \frac{(\, d_1 + s_1)}{(d_2 + s_2)}} \tag{4.7}$$

denklemi elde edilir.

Eğer malların fiyatı artarsa, alıcılar fiyatlar artmadan alım yapmak isterler ve satıcılar ilerleyen zamanlarda kazançlarını artırmak için daha az malı piyasaya sürme eğiliminde olurlar. Çalışmadaki model $q_d(t) = q_s(t)$ koşuluna sahiptir.

Dahası, her $t > 0$ durumunda $P'(t) = 0$ dır ve piyasa değişen ekonomi durumundadır, yani dinamik denge durumundadır.

Bu bölümün amacı, üç parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu dahil genelleştirilmiş ABC, ABC, CFC ve Caputo vasıtasıyla ekonomik modeller için çözümler sunmaktır. Çözümlere ek olarak, daha önce sözü edilen bölgesel olmayan özelliklere sahip modellerin çözümünü elde etmek için biz ayrıca CFC ve ABC çevresindeki başlangıç koşullarına sahip sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemi çözerken şart koşulması gerektiğini vurguluyoruz. Aksi taktirde çözümün varlığı ve tekliği hakkında sorunlarla karşılaşırız. Ancak, sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemin çözümünü Caputo ve genelleştirilmiş ABC kesirli türevi ile herhangi bir koşul olmadan elde edebiliriz.

4.1. Caputo Kesirli Türevli Ekonomik Model

Acentelerin beklentilerini dikkate almadan Caputo kesirli türevi ile fiyat ayarlama denklemi

$${}_a^C D^{\alpha} P(t) + k(\, d_1 + s_1) P(t) = k(\, d_0 + s_0), \qquad \alpha \in (0,1) \tag{4.8}$$

şeklindedir.

Bu denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygularsak;

$$\mathcal{L}\{{}_a^C D^\alpha P(t)\} + k(\,d_1 + s_1)\mathcal{L}\{P(t)\} = \mathcal{L}\{k(\,d_0 + s_0)\} \tag{4.9}$$

şeklinde yazılır.

(3.23) denkleminde $a = 0$ alınırsa,

$$s^\alpha \mathcal{L}\{P(t)\} - s^{\alpha-1}P(0) + k(\,d_1 + s_1)\mathcal{L}\{P(t)\} = \frac{1}{s}k(\,d_0 + s_0) \tag{4.10}$$

denklemi elde edilir. Buradan $\mathcal{L}\{P(t)\}$' yi yalnız bırakırsak,

$$\mathcal{L}\{P(t)\} = \frac{s^{\alpha-1}}{\left(s^\alpha + k(\,d_1 + s_1)\right)}P(0) + \frac{k(\,d_0 + s_0)}{s(\,s^\alpha + k(\,d_1 + s_1))} \tag{4.11}$$

elde edilir. Son eşitlikte ters Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$P(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^\alpha}{\mathrm{s}\left(s^\alpha + k(\,d_1 + s_1)\right)}\right\}P(0) + \frac{(\,d_0 + s_0)}{(\,d_1 + s_1)}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k(\,d_1 + s_1)}{s(\,s^\alpha + k(\,d_1 + s_1))}\right\} \tag{4.12}$$

elde edilir. Lemma 3.11 deki $\mathcal{L}\{E_\alpha(-at^\alpha)\} = \frac{s^\alpha}{S(S^\alpha + a)}$ ve $\mathcal{L}\{1 - E_\alpha(-at^\alpha)\} = \frac{a}{S(S^\alpha + a)}$

Laplace dönüşüm özelliklerini kullanırsak;

$$P(t) = E_\alpha(-k(\,d_1 + s_1)t^\alpha)\,P(0) + \frac{(\,d_0 + s_0)}{(\,d_1 + s_1)}[1 - E_\alpha(-k(\,d_1 + s_1)t^\alpha) \tag{4.13}$$

denklemi elde edilir. Buradaki E_α, (2.2) deki Mittag-Leffler fonksiyonudur.

Öte yandan, acentelerin beklentilerini dikkate alırsak, Caputo kesirli türevi ile fiyat ayarlama denkleminin Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{{}_a^C D^\alpha P(t)\} - \frac{(\,d_1 + s_1)}{(\,d_2 + s_2)}\mathcal{L}\{P(t)\} = -\mathcal{L}\left\{\frac{(\,d_0 + s_0)}{(\,d_2 + s_2)}\right\} \tag{4.14}$$

şeklinde ifade edilir.

(3.23) denkleminde $a = 0$ alırsak, (4.14) denklemini aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$s^{\alpha}\mathcal{L}\{P(t)\} - s^{\alpha-1}P(0) - \frac{(d_1+s_1)}{(d_2+s_2)}\mathcal{L}\{P(t)\} = -\frac{1}{s}\frac{(d_0+s_0)}{(d_2+s_2)} \tag{4.15}$$

Bu denklemi düzenlersek,

$$\mathcal{L}\{P(t)\}\left[s^{\alpha} - \frac{(d_1+s_1)}{(d_2+s_2)}\right] = \frac{s^{\alpha}P(0)}{s} - \frac{1}{s}\frac{(d_0+s_0)}{(d_2+s_2)}$$

$$\mathcal{L}\{P(t)\} = \frac{s^{\alpha}}{s(s^{\alpha} - \frac{(d_1+s_1)}{(d_2+s_2)})}P(0) - \frac{(d_0+s_0)}{(d_2+s_2)}\frac{1}{s\left(s^{\alpha} - \frac{(d_1+s_1)}{(d_2+s_2)}\right)} \tag{4.16}$$

elde edilir.

(4.16) denklemine ters Laplace dönüşümü uygularsak;

$$P(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha}}{s\left(s^{\alpha} - \frac{(d_1+s_1)}{(d_2+s_2)}\right)}\right\}P(0) - \frac{(d_0+s_0)}{(d_2+s_2)}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s^{\alpha} - \frac{(d_1+s_1)}{(d_2+s_2)}\right)}\right\} \tag{4.17}$$

Bu denklemin ikinci kısmını $\frac{(d_1+s_1)}{(d_2+s_2)}$ ile çarpıp bölersek;

$$P(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha}}{s(s^{\alpha} - \frac{(d_1+s_1)}{(d_2+s_2)})}\right\}P(0) - \frac{(d_0+s_0)}{(d_2+s_2)}\frac{(d_2+s_2)}{(d_1+s_1)}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{(d_1+s_1)}{(d_2+s_2)}}{s(s^{\alpha} - \frac{(d_1+s_1)}{(d_2+s_2)})}\right\}$$

Bu denklemde $\frac{(d_1+s_1)}{(d_2+s_2)}$ yerine '$-a$' yazarsak

$$P(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha}}{s(s^{\alpha}+a)}\right\}P(0) - \frac{(d_0+s_0)}{(d_1+s_1)}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s(s^{\alpha}+a)}\right\}$$

.

Elde edilir ki, buradan Lemma (3.11) deki Laplace dönüşüm formüllerini kullanırsak,

$$\mathcal{L}\{E_{\alpha}(-at^{\alpha})\} = \frac{s^{\alpha}}{S(s^{\alpha}+a)} \quad \text{ve} \quad \mathcal{L}\{1 - E_{\alpha}(-at^{\alpha})\} = \frac{a}{S(s^{\alpha}+a)}.$$

Buradan

$$P(t) = \left\{E_\alpha\left(\frac{(d_1+s_1)}{(d_2+s_2)}t^\alpha\right)\right\}P(0) + \frac{(d_0+s_0)}{(d_1+s_1)}\left\{1 - E_\alpha\left(\frac{(d_1+s_1)}{(d_2+s_2)}t^\alpha\right)\right\} \tag{4.18}$$

denklemi elde edilir.

4.2. CFC Kesirli Türevli Ekonomik Model

Acentelerin beklentileri dikkate alınmaksızın CFC ile fiyat ayarlama denklemi,

$${}_a^{CFC}D^\alpha P(t) + k(d_1+s_1)P(t) = k(d_0+s_0) \tag{4.19}$$

şeklindedir. Laplace dönüşümünü denklemin her iki tarafına uygularsak,

$$\mathcal{L}\{{}_a^{CFC}D^\alpha P(t)\} + k(d_1+s_1)\mathcal{L}\{P(t)\} = \mathcal{L}\{k(d_0+s_0)\} \tag{4.20}$$

(3.29) denklemi $a = 0$ için ele alınırsa,

$$\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\frac{s\mathcal{L}\{P(t)\}}{s+\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\frac{P(0)}{s+\frac{\alpha}{1-\alpha}} + k(d_1+s_1)\mathcal{L}\{P(t)\} = \frac{k(d_0+s_0)}{s} \tag{4.21}$$

denklemi elde edilir.

Buradan,

$$\mathcal{L}\{P(t)\} = \frac{\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\frac{1}{s+\frac{\alpha}{1-\alpha}}P(0)}{\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\frac{s}{s+\frac{\alpha}{1-\alpha}} + k(d_1+s_1)} + \frac{\frac{k(d_0+s_0)}{s}}{\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\frac{s}{s+\frac{\alpha}{1-\alpha}} + k(d_1+s_1)} \tag{4.22}$$

denklemine ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$P(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\frac{1}{s+\frac{\alpha}{1-\alpha}}P(0)}{\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\frac{s}{s+\frac{\alpha}{1-\alpha}} + k(d_1+s_1)}\right\}$$

$$+ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{k(d_0+s_0)}{s}}{\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\frac{s}{s+\frac{\alpha}{1-\alpha}} + k(d_1+s_1)}\right\} \tag{4.23}$$

elde edilir.

Burada $P(0) = \frac{(d_0 + s_0)}{(d_1 + s_1)}$ olmak üzere çözümü

$$P(t) = \frac{P(0)M(\alpha)e^{\frac{\alpha k(d_1 + s_1)t}{-M(\alpha)+(\alpha-1)k(d_1 + s_1)}}}{M(\alpha) - (\alpha - 1)k(d_1 + s_1)}$$

$$- \frac{(d_0 + s_0)(M(\alpha)\left(-1 + e^{\frac{\alpha k(d_1 + s_1)t}{-M(\alpha)+(\alpha-1)k(d_1 + s_1)}}\right) + (\alpha - 1)k(d_1 + s_1))}{(d_1 + s_1)\left(-M(\alpha) + (\alpha - 1)k(d_1 + s_1)\right)} \tag{4.24}$$

şeklinde bulunur.

Ayrıca, acentelerin beklentilerini de göz önüne alırsak, CFC ile fiyat ayarlama denklemi şu şekilde elde edilebilir.

$${}_a^{CFC}D^{\alpha}P(t) - \frac{(d_1 + s_1)}{(d_2 + s_2)}P(t) = -\frac{(d_0 + s_0)}{(d_2 + s_2)} \tag{4.25}$$

benzer işlemler burada da tekrar edilirse

$$\mathcal{L}\{{}_a^{CFC}D^{\alpha}P(t)\} - \frac{(d_1 + s_1)}{(d_2 + s_2)}\mathcal{L}\{P(t)\} = -\mathcal{L}\left\{\frac{(d_0 + s_0)}{(d_2 + s_2)}\right\} \tag{4.26}$$

$a = 0$ olduğu durumda (3.29) eşitliğini uygularsak, aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz.

$$\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\frac{s\mathcal{L}\{P(t)\}}{s + \frac{\alpha}{1-\alpha}} - \frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\frac{P(0)}{s + \frac{\alpha}{1-\alpha}} - \frac{(d_1 + s_1)}{(d_2 + s_2)}\mathcal{L}\{P(t)\} = \mathcal{L}\left\{-\frac{(d_0 + s_0)}{(d_2 + s_2)}\right\}. \tag{4.27}$$

Buradan

$$\mathcal{L}\{P(t)\} = \frac{\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\frac{1}{s + \frac{\alpha}{1-\alpha}}P(0)}{\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\frac{s}{s + \frac{\alpha}{1-\alpha}} - \frac{(d_1 + s_1)}{(d_2 + s_2)}} + \frac{-\frac{(d_0 + s_0)}{s(d_2 + s_2)}}{\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\frac{s}{s + \frac{\alpha}{1-\alpha}} - \frac{(d_1 + s_1)}{(d_2 + s_2)}} \tag{4.28}$$

elde ederiz ve (4.28) denklemine ters Laplace dönüşümü uygularsak,

$$P(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\frac{1}{s+\frac{\alpha}{1-\alpha}}P(0)}{\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\frac{s}{s+\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \frac{(d_1+s_1)}{(d_2+s_2)}}\right\}$$

$$+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{(d_0+s_0)}{s(d_2+s_2)}}{\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\frac{s}{s+\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \frac{(d_1+s_1)}{(d_2+s_2)}}\right\}. \tag{4.29}$$

Buradan $P(0) = \frac{(d_0+s_0)}{(d_1+s_1)}$ olmak üzere,

$$P(t) = \frac{P(0)M(\alpha)e^{\frac{\alpha(d_1+s_1)t}{M(\alpha)(d_2+s_2)+(\alpha-1)(d_1+s_1)}}(d_2+s_2)}{M(\alpha)(d_2+s_2)+(\alpha-1)(d_1+s_1)}$$

$$+\frac{(d_0+s_0)\left((\alpha-1)(d_1+s_1) - M(\alpha)\left(-1+e^{\frac{\alpha(d_1+s_1)t}{M(\alpha)(d_2+s_2)+(\alpha-1)(d_1+s_1)}}(d_2+s_2)\right)\right)}{(d_1+s_1)\left(M(\alpha)(d_2+s_2)+(\alpha-1)(d_1+s_1)\right)} \tag{4.30}$$

çözümüne ulaşırız.

4.3. ABC Kesirli Türevli Ekonomik Model

Acentelerin beklentilerini dikkate almadan ABC aracılığıyla fiyat ayarlama denklemi,

$${}^{ABC}_{a}D^{\alpha}P(t) + k(d_1+s_1)P(t) = k(d_0+s_0) \tag{4.31}$$

Bu denkleme Laplace dönüşümü uygularsak,

$$\mathcal{L}\{{}^{ABC}_{a}D^{\alpha}P(t)\} + k(d_1+s_1)\mathcal{L}\{P(t)\} = \mathcal{L}\{k(d_0+s_0)\} \tag{4.32}$$

elde edilir. $a = 0$ olduğu durumda (3.33) denklemi kullanılarak

$$\frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\frac{s^{\alpha}\mathcal{L}\{P(t)\} - s^{\alpha-1}P(0)}{s^{\alpha}+\frac{\alpha}{1-\alpha}} + k(d_1+s_1)\mathcal{L}\{P(t)\} = \frac{k(d_0+s_0)}{s} \tag{4.33}$$

elde edilir. Buradan,

$$\mathcal{L}\{P(t)\} = \frac{\frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\frac{s^{\alpha-1}P(0)}{s^{\alpha}+\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{\frac{s^{\alpha}\left(\frac{B(\alpha)}{1-\alpha}k(\,d_1+s_1)\right)+k(\,d_1+s_1)\frac{\alpha}{1-\alpha}}{s^{\alpha}+\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$$

$$+\frac{\frac{k(\,d_0+s_0)}{s}}{\frac{s^{\alpha}\left(\frac{B(\alpha)}{1-\alpha}k(\,d_1+s_1)\right)+k(\,d_1+s_1)\frac{\alpha}{1-\alpha}}{s^{\alpha}+\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$$

$$= \frac{P(0)B(\alpha)}{B(\alpha)\ +k(\,d_1+s_1)(1-\alpha)}\frac{s^{\alpha}}{s\left(s^{\alpha}+\frac{k(\,d_1+s_1)\alpha}{B(\alpha)\ +k(\,d_1+s_1)(1-\alpha)}\right)}$$

$$+ \quad \frac{k(\,d_0+s_0)(1-\alpha)}{B(\alpha)\ +k(\,d_1+s_1)(1-\alpha)}\frac{s^{\alpha}}{s\left(s^{\alpha}+\frac{k(\,d_1+s_1)\alpha}{B(\alpha)\ +k(\,d_1+s_1)(1-\alpha)}\right)}$$

$$+ \quad \frac{k(\,d_0+s_0)\alpha}{B(\alpha)\ +k(\,d_1+s_1)(1-\alpha)}\frac{1}{s\left(s^{\alpha}+\frac{k(\,d_1+s_1)\alpha}{B(\alpha)\ +k(\,d_1+s_1)(1-\alpha)}\right)} \qquad (4.34)$$

elde edilir.

Bu denkleme ters Laplace dönüşümü uygularsak,

$$P(t)$$

$$= \frac{P(0)B(\alpha)}{B(\alpha)\ +k(\,d_1+s_1)(1-\alpha)}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha}}{s\left(s^{\alpha}+\frac{k(\,d_1+s_1)\alpha}{B(\alpha)\ +k(\,d_1+s_1)(1-\alpha)}\right)}\right\}$$

$$+ \quad \frac{k(\,d_0+s_0)(1-\alpha)}{B(\alpha)\ +k(\,d_1+s_1)(1-\alpha)}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha}}{s\left(s^{\alpha}+\frac{k(\,d_1+s_1)\alpha}{B(\alpha)\ +k(\,d_1+s_1)(1-\alpha)}\right)}\right\}$$

$$+ \frac{(\,d_0+s_0)}{(\,d_1+s_1)}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{k(\,d_1+s_1)\alpha}{B(\alpha)\ +k(\,d_1+s_1)(1-\alpha)}}{s\left(s^{\alpha}+\frac{k(\,d_1+s_1)\alpha}{B(\alpha)\ +k(\,d_1+s_1)(1-\alpha)}\right)}\right\} \qquad (4.35)$$

Lemma 3.11 deki denklemleri kullanırsak, $P(0) = \frac{(d_0 + s_0)}{(d_1 + s_1)}$ olmak üzere;

$$P(t) = \frac{P(0)B(\alpha)}{B(\alpha) + k(d_1 + s_1)(1-\alpha)} E_\alpha \left\{ -\frac{k(d_1 + s_1)\alpha}{B(\alpha) + k(d_1 + s_1)(1-\alpha)} t^\alpha \right\}$$

$$+ \frac{k(d_0 + s_0)(1-\alpha)}{B(\alpha) + k(d_1 + s_1)(1-\alpha)} E_\alpha \left\{ -\frac{k(d_1 + s_1)\alpha}{B(\alpha) + k(d_1 + s_1)(1-\alpha)} t^\alpha \right\}$$

$$+ \frac{(d_0 + s_0)}{(d_1 + s_1)} \left[1 - E_\alpha \left(-\frac{k(d_1 + s_1)\alpha}{B(\alpha) + k(d_1 + s_1)(1-\alpha)} t^\alpha \right) \right] \tag{4.36}$$

denklemi elde edilir.

Öte yandan acentelerin beklentileri göz önünde bulundurulduğunda ABC türevli fiyat ayarlama denklemi;

$${}^{ABC}_{a}D^\alpha P(t) + \frac{(d_1 + s_1)}{(d_2 + s_2)} P(t) = -\frac{(d_0 + s_0)}{(d_2 + s_2)} \tag{4.37}$$

şeklinde yazılır.

(4.37) denklemine Laplace dönüşümü uygularsak,

$$\mathcal{L}\{{}^{ABC}_{a}D^\alpha P(t)\} + \frac{(d_1 + s_1)}{(d_2 + s_2)} \mathcal{L}\{P(t)\} = -\mathcal{L}\left\{ \frac{(d_0 + s_0)}{(d_2 + s_2)} \right\} \tag{4.38}$$

şeklinde yazabiliriz. (3.33) denklemini $a = 0$ için kullanırsak,

$$\frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \frac{s^\alpha \mathcal{L}\{P(t)\} - s^{\alpha-1}P(0)}{s^\alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha}} - \frac{(d_1 + s_1)}{(d_2 + s_2)} \mathcal{L}\{P(t)\} = -\frac{(d_0 + s_0)}{s(d_2 + s_2)} \tag{4.39}$$

denklemi elde edilir. Buradan;

$$\mathcal{L}\{P(t)\} = \frac{B(\alpha)P(0)}{1-\alpha} \frac{s^\alpha}{s\left(s^\alpha \left(\frac{B(\alpha)}{1-\alpha} - \frac{(d_1 + s_1)}{(d_2 + s_2)} \right) - \frac{(d_1 + s_1)}{(d_2 + s_2)} \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)}$$

$$-\frac{(d_0+s_0)}{(d_2+s_2)}\frac{s^\alpha}{s\left(s^\alpha\left(\frac{B(\alpha)}{1-\alpha}-\frac{(d_1+s_1)}{(d_2+s_2)}\right)-\frac{(d_1+s_1)}{(d_2+s_2)}\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)}$$

$$-\frac{(d_0+s_0)}{(d_2+s_2)}\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{s\left(s^\alpha\left(\frac{B(\alpha)}{1-\alpha}-\frac{(d_1+s_1)}{(d_2+s_2)}\right)-\frac{(d_1+s_1)}{(d_2+s_2)}\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)} \tag{4.40}$$

şeklinde yazabiliriz ve bu denkleme ters Laplace dönüşümü uygularsak,

$$P(t)$$

$$=\frac{P(0)B(\alpha)(d_2+s_2)}{B(\alpha)(d_2+s_2)+(d_1+s_1)(\alpha-1)}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^\alpha}{s\left(s^\alpha-\frac{(d_1+s_1)\alpha}{B(\alpha)(d_2+s_2)+(d_1+s_1)(\alpha-1)}\right)}\right\}$$

$$-\frac{(d_0+s_0)(\alpha-1)}{B(\alpha)(d_2+s_2)+(d_1+s_1)(\alpha-1)}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^\alpha}{s\left(s^\alpha-\frac{(d_1+s_1)\alpha}{B(\alpha)(d_2+s_2)+(d_1+s_1)(\alpha-1)}\right)}\right\}$$

$$+\frac{(\alpha-1)(d_0+s_0)}{\alpha(d_1+s_1)}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{(d_1+s_1)\alpha}{B(\alpha)(d_2+s_2)+(d_1+s_1)(\alpha-1)}}{s\left(s^\alpha-\frac{(d_1+s_1)\alpha}{B(\alpha)(d_2+s_2)+(d_1+s_1)(\alpha-1)}\right)}\right\} \tag{4.41}$$

denklemi elde edilir.

Lemma 3.11 deki denklemleri kullanırsak, $P(0)=\frac{(d_0+s_0)}{(d_1+s_1)}$ olmak üzere

$$P(t)=\frac{P(0)B(\alpha)(d_2+s_2)}{B(\alpha)(d_2+s_2)+(d_1+s_1)(\alpha-1)}E_\alpha\left\{\frac{(d_1+s_1)\alpha}{B(\alpha)(d_2+s_2)+(d_1+s_1)(\alpha-1)}t^\alpha\right\}$$

$$-\frac{(d_0+s_0)(\alpha-1)}{B(\alpha)(d_2+s_2)+(d_1+s_1)(\alpha-1)}E_\alpha\left\{\frac{(d_1+s_1)\alpha}{B(\alpha)(d_2+s_2)+(d_1+s_1)(\alpha-1)}t^\alpha\right\}$$

$$+\frac{(\alpha-1)(d_0+s_0)}{\alpha(d_1+s_1)}\left[1-E_\alpha\left(-\frac{(d_1+s_1)\alpha}{B(\alpha)(d_2+s_2)+(d_1+s_1)(\alpha-1)}t^\alpha\right)\right]. \tag{4.42}$$

denklemi elde edilir.

4.4. Genelleştirilmiş Mittag-Leffler Fonksiyonu ile ABC Türevli Ekonomik Model

Acentelerin beklentileri dikkate alınmadan genelleştirilmiş Mittag-Leffler parametreleri ile ABC türeviyle tanımlı fiyat ayarlama denklemi

$$ {}^{ABC}_{a}D^{\alpha,\mu,\gamma}P(t) + k(\,d_1 + s_1)P(t) = k(\,d_0 + s_0) \tag{4.43} $$

şeklindedir. Bu denkleme Laplace dönüşümü uygularsak, $a = 0$ olduğunda

$$ \mathcal{L}\{{}^{ABC}_{a}D^{\alpha,\mu,\gamma}P(t)\} + k(\,d_1 + s_1)\mathcal{L}\{P(t)\} = \mathcal{L}\{k(\,d_0 + s_0)\} \tag{4.44} $$

$$ \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\, s^{1-\mu}\mathcal{L}\{P(t)\}(1 - \lambda s^{-\alpha})^{-\gamma} - \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}P(0)\, s^{-\mu}(1 - \lambda s^{-\alpha})^{-\gamma} + k(\,d_1 + s_1)\mathcal{L}\{P(t)\} $$

$$ = \frac{k(\,d_0 + s_0)}{s} \tag{4.45} $$

$$ \mathcal{L}\{P(t)\} = \frac{P(0)}{s + \dfrac{k(\,d_1 + s_1)(1-\alpha)}{B(\alpha)\, s^{-\mu}(1 - \lambda s^{-\alpha})^{-\gamma}}} + \frac{\dfrac{k(\,d_0 + s_0)}{s}}{\dfrac{B(\alpha)}{1-\alpha}\, s^{1-\mu}(1 - \lambda s^{-\alpha})^{-\gamma} + k(\,d_1 + s_1)} \tag{4.46} $$

[2] de bahsedildiği gibi (4.46) denkleminin ters Laplace dönüşümünü elde etmek için şu şekilde genişletmemiz gerekir;

$$ \mathcal{L}\{P(t)\} = \frac{P(0)}{s}\sum_{j=0}^{\infty}[-k(\,d_1 + s_1)]^j \left(\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}\right)^j s^{(\mu-1)j}(1 - \lambda s^{-\alpha})^{\gamma j} $$

$$ +\mathcal{L}\{k(\,d_0 + s_0)\}\left(\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}\right) s^{(\mu-1)}(1 - \lambda s^{-\alpha})^{\gamma} \sum_{j=0}^{\infty} [-k(\,d_1 + s_1)]^j \left(\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}\right)^j s^{(\mu-1)j}\ (1 $$

$$ - \lambda s^{-\alpha})^{\gamma j} $$

$$ = \frac{P(0)}{s}\sum_{j=0}^{\infty}[-k(\,d_1 + s_1)]^j \left(\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}\right)^j s^{(\mu-1)j}(1 - \lambda s^{-\alpha})^{\gamma j} $$

$$ + k(\,d_0 + s_0)\frac{1}{s}\sum_{j=0}^{\infty} [-k(\,d_1 + s_1)]^j \left(\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}\right)^{j+1} s^{(\mu-1)(j+1)}(1 $$

$$ - \lambda s^{-\alpha})^{\gamma(j+1)} \tag{4.47} $$

Bu nedenle ters Laplace dönüşümünü (4.47)' nin her iki tarafına da uygularsak ve (3.30) denkleminden yararlanırsak,

$$P(t) = P(0)\sum_{j=0}^{\infty}[-k(d_1+s_1)]^j\left(\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}\right)^j E^{-\gamma j}_{\alpha,(1-\mu)j+1}(\lambda,t)$$

$$+k(d_0+s_0)\sum_{j=0}^{\infty}[-k(d_1+s_1)]^j\left(\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}\right)^{j+1} E^{-\gamma(j+1)}_{\alpha,(1-\mu)(j+1)+1}(\lambda,t) \quad (4.48)$$

denklemini elde ederiz.

Ayrıca acentelerin beklentilerini de dikkate alırsak, genelleştirilmiş ABC açısından fiyat ayarlama denklemi

$${}^{ABC}_{a}D^{\alpha,\mu,\gamma}P(t)+\frac{(d_1+s_1)}{(d_2+s_2)}P(t)=-\frac{(d_0+s_0)}{(d_2+s_2)} \quad (4.49)$$

şeklinde yazılır.(4.49)eşitliğinin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygularsak;

$$\mathcal{L}\{{}^{ABC}_{a}D^{\alpha,\mu,\gamma}P(t)\}+\frac{(d_1+s_1)}{(d_2+s_2)}\mathcal{L}\{P(t)\}=\mathcal{L}\left\{-\frac{(d_0+s_0)}{(d_2+s_2)}\right\} \quad (4.50)$$

şeklinde yazabiliriz. $a=0$ olduğu durumda (3.36) denklemini uygularsak;

$$\frac{B(\alpha)}{(1-\alpha)}S^{1-\mu}\,\mathcal{L}\{P(t)\}(1-\lambda s^{-\alpha})^{-\gamma}$$

$$-\frac{B(\alpha)}{(1-\alpha)}S^{-\mu}\,P(0)(1-\lambda s^{-\alpha})^{-\gamma}$$

$$+\frac{(d_1+s_1)}{(d_2+s_2)}\mathcal{L}\{P(t)\}=-\frac{(d_0+s_0)}{s(d_2+s_2)} \quad (4.51)$$

denklemini elde ederiz. Buradan,

$$\mathcal{L}\{P(t)\}=\frac{P(0)B(\alpha)S^{-\mu}(1-\lambda s^{-\alpha})^{-\gamma}}{B(\alpha)\,s^{1-\mu}(1-\lambda s^{-\alpha})^{-\gamma}+\frac{(d_1+s_1)}{(d_2+s_2)}(1-\alpha)}$$

$$-\frac{(d_0+s_0)}{s(d_2+s_2)}\frac{1}{\frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\,s^{1-\mu}(1-\lambda s^{-\alpha})^{-\gamma}+\frac{(d_1+s_1)}{(d_2+s_2)}} \quad (4.52)$$

elde edilir. (4.52) denklemini genişletirsek;

$$\mathcal{L}\{P(t)\}$$
$$= \frac{P(0)}{s}\sum_{j=0}^{\infty}\left[-\frac{(d_1+s_1)}{(d_2+s_2)}\right]^j\left(\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}\right)^j s^{(\mu-1)j}(1-\lambda s^{-\alpha})^{\gamma j}$$
$$-\frac{(d_0+s_0)}{s(d_2+s_2)}\sum_{j=0}^{\infty}\left[-\frac{(d_1+s_1)}{(d_2+s_2)}\right]^j\left(\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}\right)^{j+1} s^{(\mu-1)j+1}(1$$
$$-\lambda s^{-\alpha})^{\gamma(j+1)} \tag{4.53}$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme ters Laplace dönüşümü uygularsak,

$$P(t)$$
$$= P(0)\sum_{j=0}^{\infty}\left[-\frac{(d_1+s_1)}{(d_2+s_2)}\right]^j\left(\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}\right)^j E^{-\gamma j}_{\alpha,(1-\mu)j+1}(\lambda,t)$$
$$+\frac{(d_0+s_0)}{(d_2+s_2)}\sum_{j=0}^{\infty}\left[-\frac{(d_1+s_1)}{(d_2+s_2)}\right]^j\left(\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}\right)^{j+1} E^{-\gamma(j+1)}_{\alpha,(1-\mu)(j+1)+1}(\lambda,t)\,. \tag{4.54}$$

denklemini elde ederiz.

4.5. Karşılaştırma, Analiz ve Tartışma

Bu kısımda Caputo. CFC, ABC ve Genelleştirilmiş ABC' yi içeren dört önemli lokal olmayan kesirli türevin analizi görsel olarak ifade edilmiştir. Bu kesirli türevler klasik türevle karşılaştırılır ve α'nın çeşitli değerleri için örneklerle gösterilir. Ayrıca genelleştirilmiş ABC için $\gamma = 1$ olduğu zaman μ'nün farklı değerlerini kullanıyoruz. Bunun yanı sıra piyasa dengesini etkileyen $d_0, s_0, s_1, d_1, s_2, d_2$ sabitlerine bazı değerler atayarak temsilcilerin beklentileri de dikkate alınır.

Her grafikte $d_0 = 10, s_0 = 100, s_1 = 97, d_1 = 14, s_2 = 94, d_2 = 18$ ve bu şekilde kullanılan keyfi sabitler değiştirilerek eğrilerin hareketleri derinlemesine gözlemlenir.

Şekil 5.1 ve Şekil 5.2 de acentelerin beklentisi göz önüne alındığındaki fiyat ayarlama eşitliği çözüm eğrileri, α'nın burada sırayla yazan değerleri için Caputo ve CFC için gösterilmektedir.

Şekil 5.3 ve Şekil 5.4 de sırasıyla $\alpha = 0.8$ ve $\alpha = 0.95$ olduğunda klasik türev ile CFC ve Caputo kesirli türevleri karşılaştırılır.

Bu şekillerden, tamsayı olmayan mertebeden α, 1'e doğru yaklaştıkça, Caputo ve CFC tarafından oluşturulan çözüm eğrilerinin klasik olana daha yakın olma eğilimin de olduğu gözlemlenebilir. Şekil 5.3 ve Şekil 5.4 de belirttiğimiz benzer durum, ABC ve CFC kesirli türevleri Şekil 5.5 ve Şekil 5.6 da $\alpha = 0.8$ ve $\alpha = 0.95$ olduğunda klasik durumla karşılaştırılarak gözlemlenmektedir. Ayrıca, Caputo, ABC ve klasik türev $\alpha = 0.8$ ve $\alpha = 0.97$ değerleri için Şekil 5.7 ve Şekil 5.8 de karşılaştırılır. Şekil 5.9 da $\alpha = 0.93, \mu = 0{,}91$ değeri için ve Şekil 5.10 da . $\alpha = 0.97, \mu = 0{,}95$ değeri için genelleştirilmiş ABC , ABC ve klasik durum karşılaştırılmıştır.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmadan çıkarılabilecek bilimsel sonuçlar aşağıda şekilde ifade edilir.

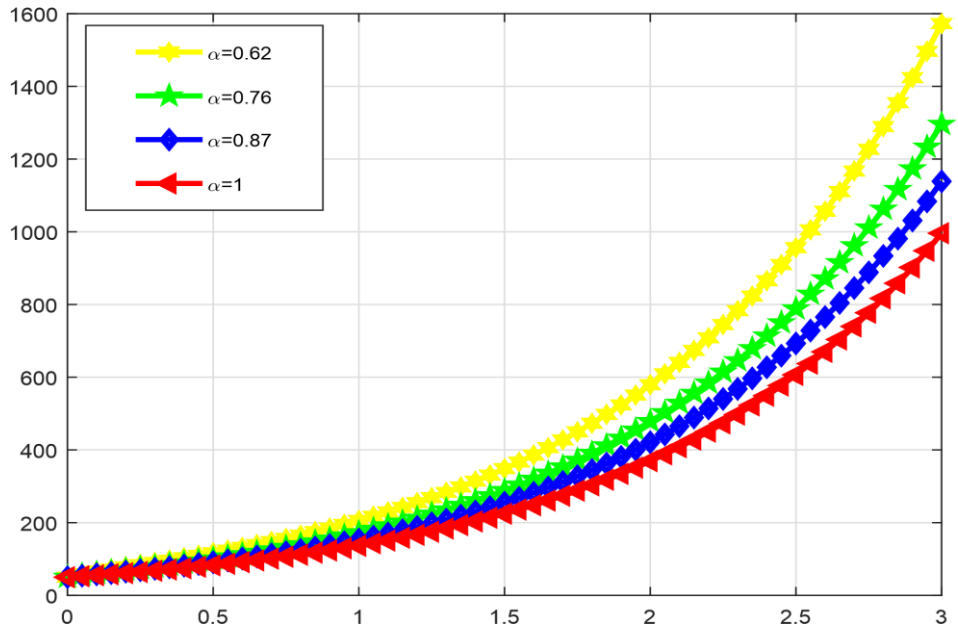
1. Üç parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu dahil olmak üzere Caputo, ABC, CFC ve genelleştirilmiş ABC gibi bölgesel olmayan kesirli operatörler çerçevesinde ekonomik modeller analiz edilmiştir.

2. Piyasa dengesini sağlamada önemli yeri olan fiyat ayarlama denklemi, acentelerin beklentileri göz önüne alındığı ve alınmadığı durumlar için temel kesirli türevler kullanılarak çözülmüştür. Böylece, her kesirli türev için iki ayrı çözüm elde edilmiş ve bu çözümler karşılaştırılmıştır.

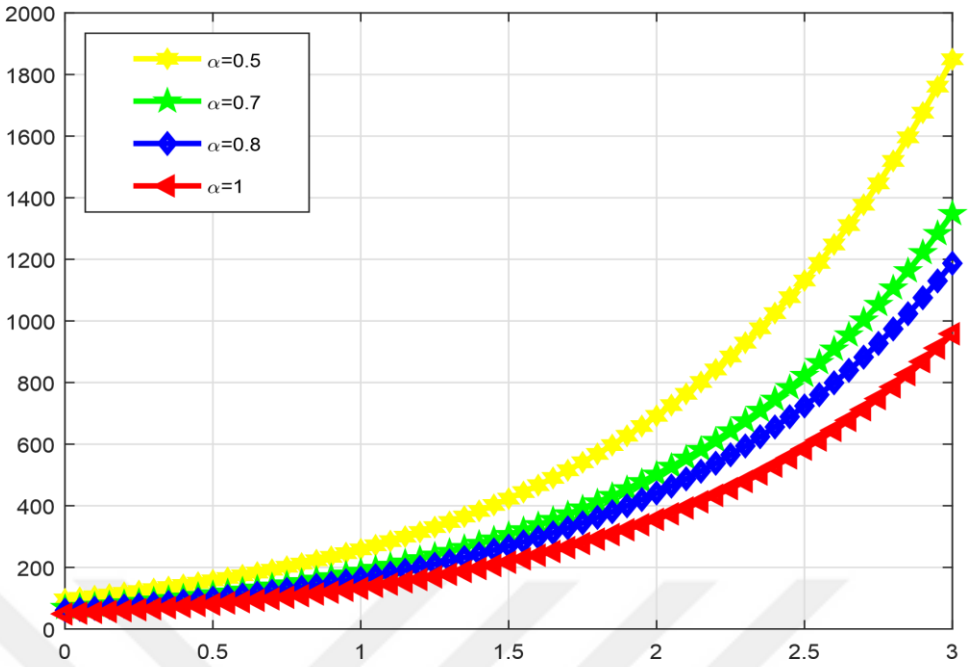
3. Geçmişteki dalgalanmaları yakalayan bölgesel olmayan kesirli türevlerden yararlanan piyasa dengesi üzerinde güçlü etkilere sahip faktörler arasındaki etkileşim çok daha fazla ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

4. $t = 0$ anındaki malların fiyatı $P(0)$, $P(0) = \frac{(d_0+s_0)}{(d_1+s_1)}$ şeklinde ve d_0, s_0, s_1, d_1 piyasayı etkileyen bazı faktörler olmak üzere CFC ve ABC kesirli türevini kullanırken başlangıç koşulunu sağlayan doğru çözümler elde edilir.

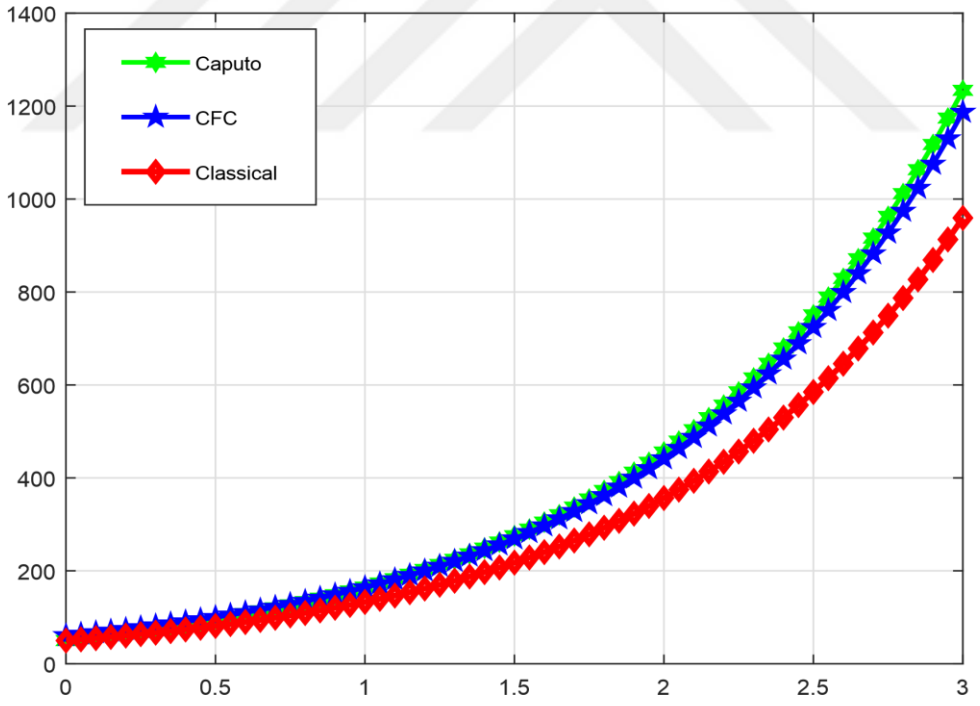
5. Ayrıca, Caputo ve genelleştirilmiş ABC açısından temel modeli çözdüğümüz zaman, koşul koyma gerekliliğinin olmadığı vurgulanmalıdır. Böylece, doğrudan çözüme ulaşılabileceği vurgulanmalıdır.



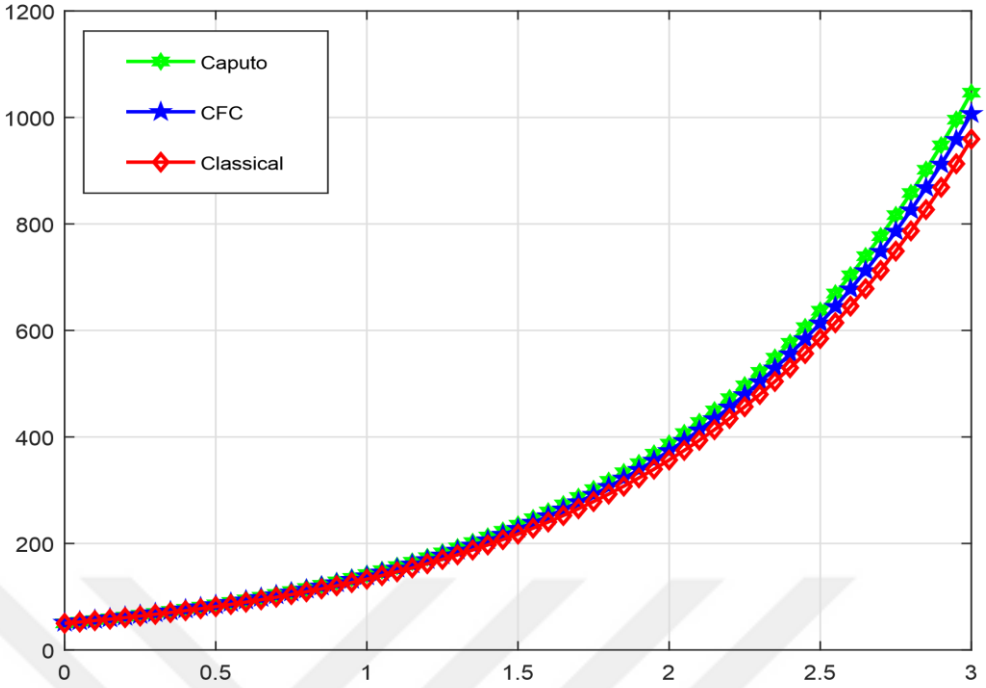
Şekil 5.1. Caputo Kesirli Türevi için



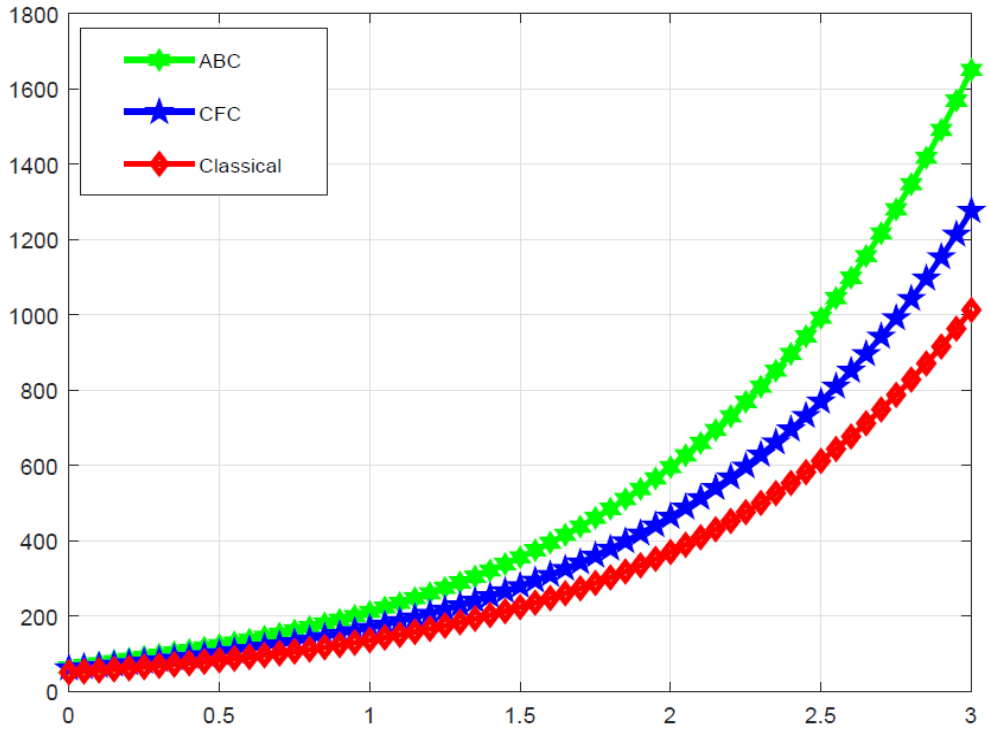
Şekil 5.2. CFC Kesirli Türevi için



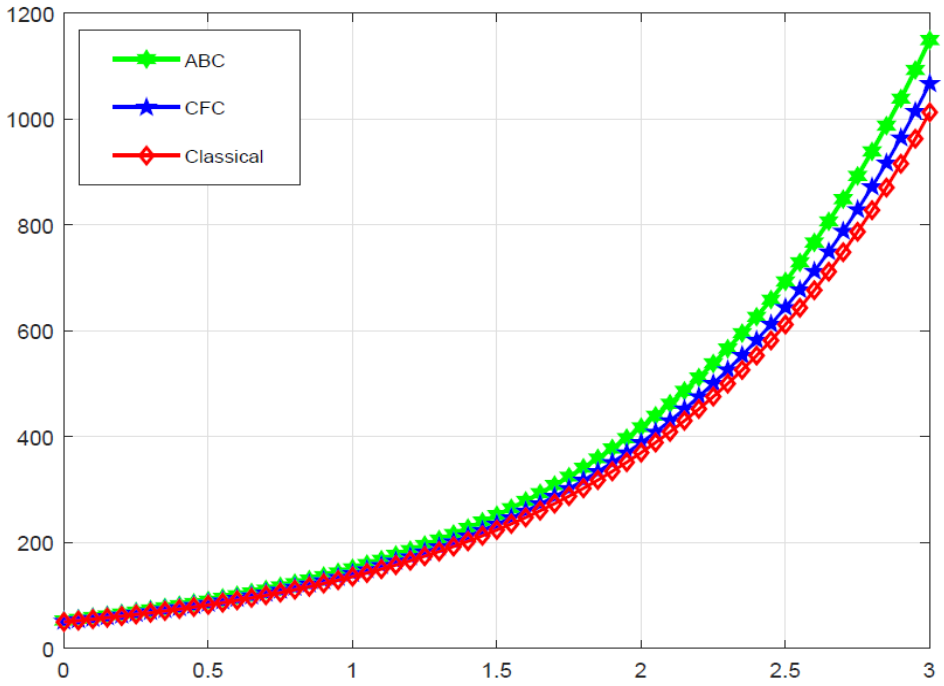
Şekil 5.3. $\boldsymbol{\alpha = 0.8}$ değeri için,



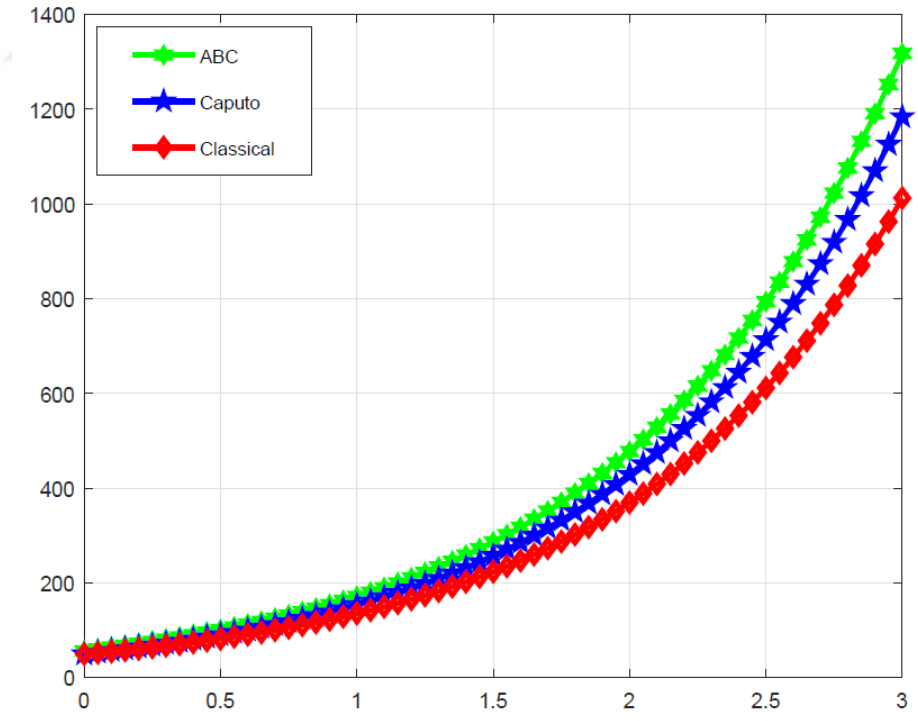
Şekil 5.4. $\alpha = 0.95$ değeri için,



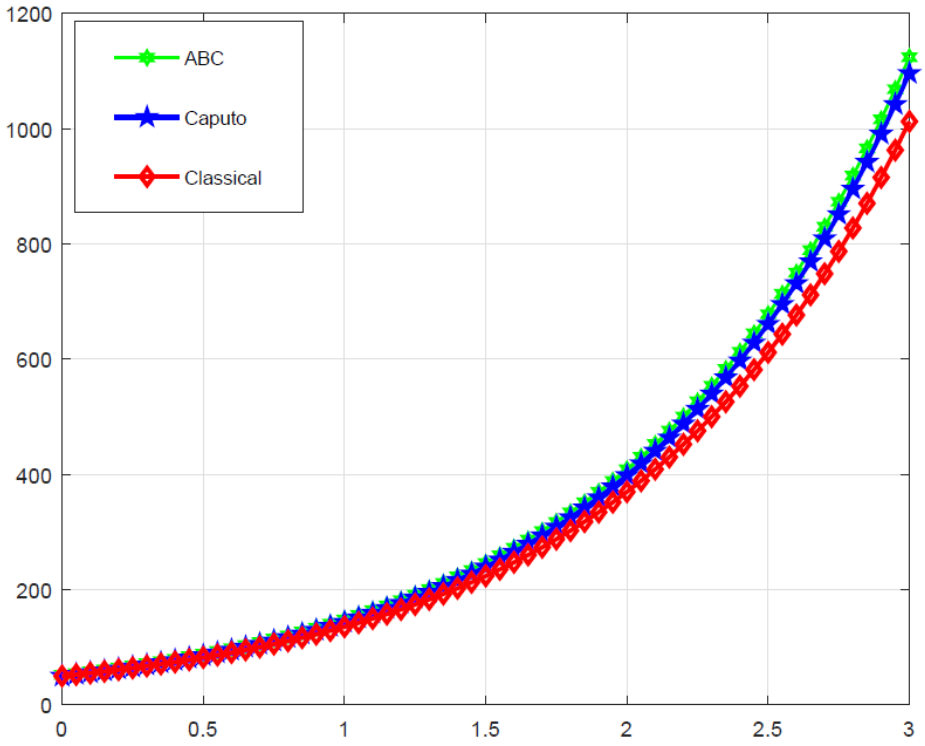
Şekil 5.5. $\alpha = 0.8$ değeri için karşılaştırdığımızda



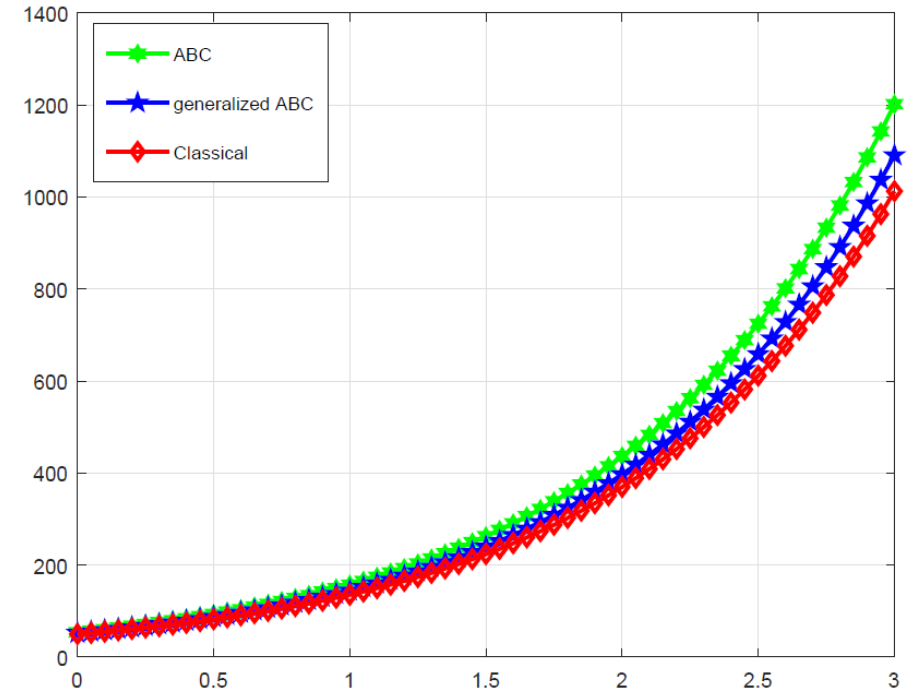
Şekil 5.6. $\alpha = 0.95$ değeri için karşılaştırdığımızda



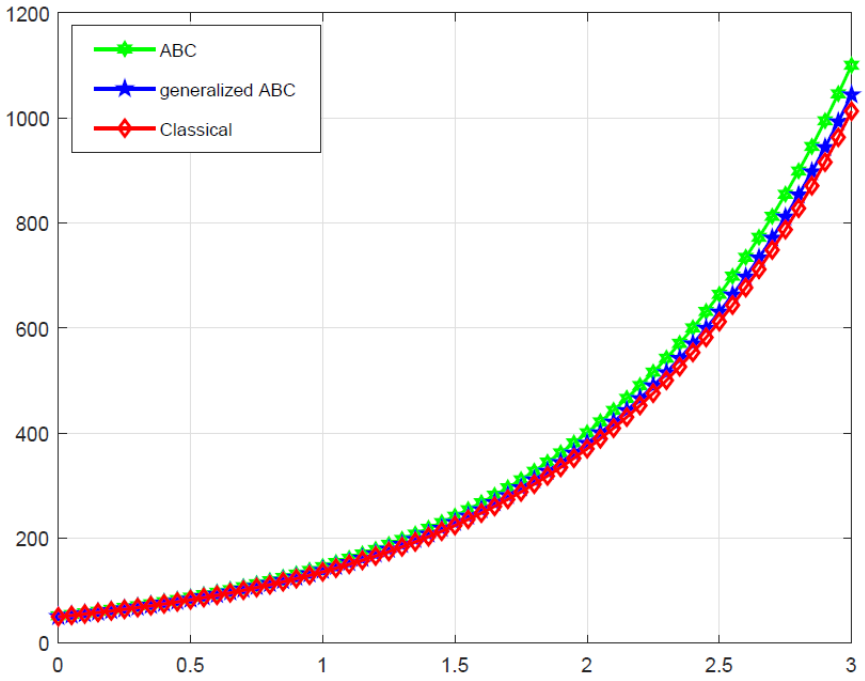
Şekil 5.7. $\alpha = 0.85$ değeri için karşılaştırdığımızda



Şekil 5.8. $\alpha = 0.95$ değeri için karşılaştırdığımızda



Şekil 5.9. $\alpha = 0.93$, $\mu = 0,91$ değeri için



Şekil 5.10. $\boldsymbol{\alpha = 0.97, \mu = 0,95}$ değeri için

KAYNAKLAR

[1] Acay, B., Bas, E., & Abdeljawad, T. (2020). Fractional economic models based on market equilibrium in the frame of different type kernels. *Chaos, Solitons & Fractals*, *130*, 109438.

[2] Abdeljawad, T. (2019). Fractional difference operators with discrete generalized Mittag–Leffler kernels. *Chaos, Solitons & Fractals*, *126*, 315-324.

[3] Abdeljawad, T. (2019). Fractional operators with generalized Mittag-Leffler kernels and their iterated differintegrals. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, *29*(2), 023102.

[4] Atangana, A., Baleanu, D., & Alsaedi, A. (2015). New properties of conformable derivative. *Open Mathematics*, *13*(1).

[5] Atangana, A., & Baleanu, D. (2016). New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: theory and application to heat transfer model. *arXiv preprint arXiv:1602.03408*.

[6] Atangana, A., & Baleanu, D. (2017). Caputo-Fabrizio derivative applied to groundwater flow within confined aquifer. *Journal of Engineering Mechanics*, *143*(5), D4016005.

[7] Bas, E., Turk, F. M., Ozarslan, R., & Ercan, A. (2021). Spectral data of conformable Sturm–Liouville direct problems. *Analysis and Mathematical Physics*, *11*(1), 1-18.

[8] Caputo, M., Carcione, J. M., & Cavallini, F. (2011). Wave simulation in biologic media basedon the Kelvin-Voigt fractional-derivative stress-strain relation. *Ultrasound in medicine & biology*, *37*(6), 996-1004.

[9] Caputo, M., & Fabrizio, M. (2015). A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progr. Fract. Differ. Appl*, *1*(2), 1-13.

[10] Debnath, L., & Bhatta, D. (2014). *Integral transforms and their applications*. CRC press.

[11] Eslami, M., & Rezazadeh, H. (2016). The first integral method for Wu–Zhang system with conformable time-fractional derivative. *Calcolo*, *53*(3), 475-485.

[12] Chung, W. S. (2015). Fractional Newton mechanics with conformable fractional derivative. *Journal of computational and applied mathematics*, *290*, 150-158.

[13] Hammad, M. A., & Khalil, R. (2014). Conformable fractional heat differential equation. *Int. J. Pure Appl. Math*, *94*(2), 215-221.

[14] Henry, B. I., Langlands, T. A. M., & Wearne, S. L. (2008). Fractional cable models for spiny neuronal dendrites. *Physical review letters*, *100*(12), 128103.

[15] H. T. Kaptanoglu, Dış bukey Fonksiyonlar, Matematik Dunyası, 6, sayı 1, 11-18 (1996).

[16] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). Theory and applications of fractional differential equations (Vol. 204). elsevier.

[17] Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., & Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *264*, 65-70.

[18] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations* (Vol. 204). elsevier.

[19] Kurt, A. (2018). *Conformable Laplace dönüşümleri ve uygulamaları* (Doctoral dissertation, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü).

[20] Liang, S., Wu, R., & Chen, L. (2015). Laplace transform of fractional order differential equations. *Electron. J. Differ. Equ*, *139*, 1-15.

[21] Lin, S. D., & Lu, C. H. (2013). Laplace transform for solving some families of fractional differential equations and its applications. *Advances in Difference Equations*, *2013*(1), 1-9.

[22] M. A. Kocatepe, *L'H^opital Kuralı Ustune*, *Matematik Dunyas*, 4, sayı 2, 15-17 (1994).

[23] Miller, K. S., & Ross, B. (1993). *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. Wiley.

[24] Magin, R., Feng, X., & Baleanu, D. (2009). Solving the fractional order Bloch equation. *Concepts in Magnetic Resonance Part A: An Educational Journal*, *34*(1), 16-23.

[25] M. Al-Refai, M., & Abdeljawad, T. (2017). Fundamental results of conformable Sturm-Liouville eigenvalue problems. *Complexity*, *2017*.

[26] Magin, R., Feng, X., & Baleanu, D. (2009). Solving the fractional order Bloch equation. *Concepts in Magnetic Resonance Part A: An Educational Journal*, *34*(1), 16-23.

[27] Podlubny, I., (1999). "Fractional Differential Equations." Academic Press.

[28] Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. *Journal of computational and Applied Mathematics*, *279*, 57-66.

[29] Takayama, A. (1985). *Matematiksel iktisat* . Cambridge üniversite basını.

[30] Sousa, J. V. D. C., & de Oliveira, E. C. (2017). A new truncated $ M $-fractional derivative type unifying some fractional derivative types with classical properties. *arXiv preprint arXiv:1704.08187*.

[31] Weilbeer, M. (2006). *Efficient numerical methods for fractional differential equations and their analytical background*. Clausthal-Zellerfeld, Germany: Papierflieger.

[32] Bas E, Ozarslan R. Real World applications of fractional models by atan-gana-baleanu fractional derivative. Chaos, Solotions Fract 2018:116:121-5.

[33] Bas E, Ozarslan R, Beleanu D, Ercan A. Comparative simulations for solutions of fractional strum-lioville problems with non-singular operators. Adv Diff Equ 2018;2018(1):350

[34] Bas E, Acay B, Ozarslan R. Franctional models with singular and non-singular kernels for energy efficient buildings. Cahos: Interdiscip J Nonlinear Sci 2019;29(2):023110y.

[35] Ozarslan, R, & Bas E. (2020) Kinetic Model for Drying in Frame of Generalized Fractional Derivatives. Fractal and Fractional, 4(2). 17.

[36] Nagle RK, Staff EB, Snider AD. Fundamentals differential equaltions. Pearson; 2008.

ÖZGEÇMİŞ

Serpil YILDIRIM