ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ BASKAKOV DURRMEYER OPERATÖRLERİ İÇİN ASİMTOTİK FORMÜLLER

Esma ŞÖHRET

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇANKIRI
2021

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Esma ŞÖHRET tarafından hazırlanan "**Genelleştirilmiş Baskakov Durrmeyer Operatörleri için Asimtotik Formüller**" adlı tez çalışması 08/10/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Doç. Dr. Gülsüm ULUSOY ADA

Jüri Üyeleri **:**

Başkan **:** Doç. Dr. Gülsüm ULUSOY ADA
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Üye **:** Doç. Dr. Gonca DURMAZ GÜNGÖR
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Üye **:** Dr. Öğr. Üyesi İbrahim ERDAL
Matematik Anabilim Dalı
Ankara Üniversitesi

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. İbrahim ÇİFTÇİ

Enstitü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum "**Genelleştirilmiş Baskakov Durrmeyer Operatörleri için Asimtotik Formüller**" konulu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, tezin Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nden başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve bu çalışmanın Çankırı Karatekin Üniversitesi tarafından kullanılan "Bilimsel İntihal Tespit Programı"yla tarandığını,"intihal içermediğini" beyan ederim. Çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması halinde ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm. Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim (08/09/2021).

Esma ŞÖHRET

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ BASKAKOV DURRMEYER OPERATÖRLERİ İÇİN ASİMTOTİK FORMÜLLER

Esma ŞÖHRET

Çankırı Karatekin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Gülsüm ULUSOY ADA

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde tezde gerekli olan tanımlar ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde Baskakov ve Baskakov Durrmeyer operatörlerinin yakınsaklık özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde Genelleştirilmiş Baskakov Durrmeyer operatörleri tanımlanmış ve yakınsaklık özellikleri incelenmiştir.

2021, 53 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Lineer pozitif operatör, Süreklilik modülü, Baskakov operatör, Bernstein operatör

ABSTRACT

Master of Science Thesis

ASYMPTOTIC FOR GENERALIZED BASKAKOV DURRMEYER OPERATORS

Esma ŞÖHRET

Çankırı Karatekin University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Advisor: Asst. Prof. Dr. Gülsüm ULUSOY ADA

The first chapter is devoted to the introduction. The second chapter contains concepts and definitions which are needed throughout the thesis. The third part consists of convergence properties of Baskakov and Baskakov Durrmeyer Operators. Fourth part consists of convergence properties of Generalized Baskakov Durrmeyer Operators.

2021, 53 pages

Keywords: Linear positive operators, Modulus of Continuity, Baskakov Operators, Bernstein operators

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında, sunulmasında, başında ve sonunda; tez konusunu bana veren, çalışmalar esnasında beni yönlendiren ve manevi emek veren, ilgi alakalarını hiç eksik etmeyen, değerli zamanlarını ayıran saygı değer hocam, Doç. Dr. Gülsüm ULUSOY ADA'ya sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Ayrıca, eğitim ve öğretim hayatımın her kademesinde beni destekleyen, şevklendiren, bana güven veren ve yol gösteren fedakar annem Dudu DEMİRKIRAN, babam Remzi DEMİRKIRAN, kardeşim Necibe DEMİRKIRAN ve kızım Gökçe Nisa ŞÖHRET'e bana kattıkları her şey için çok teşekkür ederim.

Esma ŞÖHRET

Çankırı, Ekim 2021

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **i**

ABSTRACT ..... **ii**

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR ..... **iii**

1.GİRİŞ **1**

2. TEMEL KAVRAMLAR **7**

2.1 Lineer Pozitif Operatörler **13**

2.2 Süreklilik Modülü ve Özellikleri **15**

2.3 Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Koşulları **18**

2.4 Ağırlıklı Uzaylarda Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Koşulları **22**

2.5 Ağırlıklı Uzaylarda Süreklilik Modülü **24**

3. DURRMEYER TİPLİ BASKAKOV OPERATÖRÜ VE ÖZELLİKLERİ **28**

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ BASKAKOV DURRMEYER OPERATÖRLERİ İÇİN ASİMTOTİK FORMÜLLER **32**

KAYNAKLAR **51**

ÖZGEÇMİŞ **53**

1.GİRİŞ

Analiz ve fonksiyonlar teorisinin önemli alanlarından biri de yaklaşımlar teorisidir. Bu teoride amaç, fonksiyonların daha basit ve kolay hesaplanabilen fonksiyonlar cinsinden bir gösterimini elde etmektir. Bu fonksiyonlar ise genellikle trigonometrik fonksiyonlar, tam fonksiyonlar, cebirsel polinomlar ve rasyonel fonksiyonlardır. Örneğin kuvvet serisine açılacak bir fonksiyonla işlem yaparken, onun kuvvet serisi ile çalışmak yerine serinin kısmi toplamı ile yani polinom gösterimi ile çalışmak daha kolay olacaktır. Bu da fonksiyon hakkında pek çok bilgiye kolayca ulaşmamıza olanak sağlayacaktır. Bilgisayarlar sayesinde bazı bilgilere ulaşmamız mümkün olsa da sonuca nasıl ulaşıldığının adımlarını görememek ya da sonuca daha iyi yaklaşımla ulaşabilir miyiz düşüncesi bizi polinom ile yaklaşma düşüncesine yönlendirir.

17. yüzyıla kadar yaklaşım konusunda incelenen tek kavram sayıların yaklaşık değerlerinin hesaplanmasıydı. Mesela buna π sayısı örnek gösterilebilir. Sonraki zamanlarda matematikçilerin yaptığı çalışmalarla fonksiyonların, sayıların, operatörlerin ve denklemlerin çözümlerinin yaklaşık hesabının yapılabilmesi için geliştirdikleri yöntemlerle yaklaşım kavramının da ilk adımları atılmaya başlanmıştır.

Tüm bu gelişmeler ile cebirsel polinomlar ile sürekli fonksiyonlara yaklaşım teorisi ilk olarak 1854 yılında, P. L. Chebyshev'in buhar makinesi ile ilgili ortaya koyduğu aşağıdaki problemi ifade etmesi ile başlamıştır; "Bir $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı sürekli bir f fonksiyonu ve pozitif bir n sayısı verilsin. Acaba f fonksiyonunun, $[a,b]$ aralığında herhangi bir noktada maksimum hatasını kontrol edebilecek şekilde, derecesi n'yi geçmeyen bir p polinomu ile gösterebilir miyiz?" (Şimşek 2019).

1885 yılında Alman matematikçi Karl Weierstrass tarafından verilen teoremle birlikte sürekli fonksiyonlara yaklaşım probleminin temeli atılmıştır. Bu teoremde, [a,b] sonlu aralığında sürekli olan bir f fonksiyonu için, f'ye bu aralık üzerinde düzgün yakınsak olacak şekilde bir polinom dizisinin var olduğu ispat edilmiştir (Weierstrass *et al.* 1885).

Ancak bu ispatın biraz karmaşık ve uzun olması sebebiyle birçok matematikçi daha kullanışlı ve anlaşılır bir ispat bulmaya çalışmıştır.Bu uğurda yapılan çalışmalarda kullanılan yöntemler sayesinde de olasılık teorisi, lineer pozitif operatörlerle yaklaşım teorisi gibi yeni çalışma alanları ortaya çıkmıştır.

1912 yılında S. N. Bernstein, kendi adı ile anılan f, [0,1] aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere;

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}\ ,\ x\in[0,1]$$

polinomlarını tanımlayarak [0,1] aralığında sürekli bir f fonksiyonuna düzgün yakınsadığını Bernstein ispatlamıştır. Bu sayede Weierstrass teoreminin kolay ve anlaşılır olan bir ispatını elde etmiştir (Bernstein *at al.* 1912)

Burada Bernstein, Weierstrass Teoremi'ndeki polinomlar dizisine bir örnek olarak Bernstein polinomlarını vermiştir. Bu polinomlar matematik dışında uygulamalı bilimlerde de pek çok kullanım alanına sahiptir. Casteljau algoritmaları bu polinomların özelliklerine dayalı olup geometrik tasarımın en önemli unsurlarındandır. Bu algoritmalar araba dizaynı, gemi dizaynı, tıp ve jeoloji bilimi ve uçak endüstrisinde yoğun bir şekilde kullanılmaktadır. Bu algoritmalara ilk Paul de Faget'in Citroën firmasının ve Pierre Bézier'in Renault firmasının endüstriyel dizaynlarında kullanmasıyla birçok matematikçinin çalışma alanı olmuştur. Ayrıca Bernstein polinomları lineer pozitif operatörlerdendir.

1950'lerde H. Bohman ve P. P. Korovkin birbirinden bağımsız olarak Bernstein'nın ispat yönteminin daha genel bir halini elde ederek, genel bir lineer pozitif operatörler dizisi için basit ve kolayca uygulanabilen bir yöntem geliştirdiler. Böylece yaklaşım teorisinde lineer pozitif operatörlerin kullanılmasına çok büyük katkı sağlamış oldular.

Korovkin teoremine göre lineer pozitif operatörlerin (A_s), s $\in \mathbb{N}$ dizisinin reel düzlemde sınırlı olan $f \in \mathbb{C}[a,b]$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart $e_r(x) = x^r$, $r = 0,1,2$ için $\{A_s(e_r)\}$ dizisinin e_r fonksiyonuna düzgün yakınsak olmasıdır. Böylece teoremde ifade edilen üç ana koşulu sağlayan pek çok lineer pozitif operatörler dizisi tanımlanmış ve bunların yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Yaklaşım teorisinde büyük önem taşıyan bu teori reel analiz, fonksiyonel analiz, harmonik analiz, ölçü teorisi, istatistik teorisi, toplanabilme ve uygulamalı matematik ile doğrudan bağlantılıdır. Buna ek olarak yaklaşım teorisi fizikte ve mühendislikte veri gösterimi, sinyal işleme, termografik görüntüleme, dalgacık analizi gibi birçok farklı konuda da kullanılmaktadır.

Yukarıda bahsi geçen Bernstein operatörlerinde çalışılan aralıklar sınırlıdır. Ancak çalışmak istediğimiz aralıklar her zaman sınırlı olmayabileceğinden, sınırsız aralıklarda da çalışabilmek için yeni operatörlere ihtiyaç duyulmuştur. Örneğin kapalı ve sınırlı aralıklar yerine sınırsız aralık olduğunda, yaklaşılan fonksiyonun sürekli olmayıp Riemann integrallenebilir ya da Lebesgue integrallenebilir olduğunda yaklaşım metodlarının nasıl olacağı üzerine çalışmalar yapılmıştır.

Ancak sınırsız aralıklarda klasik Korovkin teoremi geçerli olmadığından bu tarz operatörlerin düzgün yakınsaklığı sınırlı ve sürekli fonksiyonlar sınıfının bir alt sınıfındaki fonksiyonlar için incelenmiştir. 1974 yılında Gadzhiev, sınırsız aralıkta sürekli fonksiyonlar için Korovkin-tipli bir teoremi, pozitif ve sürekli bir ağırlık fonksiyonu ile tanımladığı ağırlıklı uzayda ispat etmiştir.

$$\text{“ } B_p(\mathbb{R}) = \{ f : |f(x)| \le M_f\, p(x);\ \mathrm{M}_f,\ f \text{ fonksiyonuna bağlı pozitif bir sabit} \}$$

$$C_p(\mathbb{R}) = \{ f : f \in B_P(\mathbb{R}),\ f \text{ sürekli} \}$$

$$C_p^k(\mathbb{R}) = \left\{ f : f \in C_P(\mathbb{R}),\ \lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{p(x)} = k_f < \infty,\ k_f \in \mathbb{R} \right\}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon uzayları, reel eksende tanımlı sürekli, monoton artan φ fonksiyonu ve $p(x)=1+(\varphi(x))^2$ ağırlık fonksiyonu için, $C_p(\mathbb{R})$ uzayından $B_p(\mathbb{R})$ uzayına tanımlı $\{A_m\}$ lineer pozitif operatörler dizisi eğer

$$\lim_{m\to\infty}\left\|A_m(\varphi^v)-\varphi^v\right\|_p=0,\ v=0,1,2$$

koşullarını sağlıyor ise, her $f\in C_p^k$ için

$$\lim_{m\to\infty}\left\|A_m(f)-f\right\|_p=0$$

dır" (Gadjiev *et al* 1974, Gadjiev *et al* 1976).

Sınırsız aralıklarda sürekli ve $|f(x)|\le M_f(1+x^2)$ koşulunu sağlayan f fonksiyonuna yakınsayan operatör dizilerine örnek olarak 1941 yılında Mirakyan (Mirakyan *et al* 1941) ve sonrasında 1950 yılında Szász (Szász *et al* 1950) tarafından $x\in[0,\infty)$ için incelenen Szász-Mirakyan operatörleri verilebilir. Ayrıca 1957 yılında Baskakov (Baskakov *et al* 1957)

$$L_n(f;x)=\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}f\left(\frac{k}{n}\right),\ k\in\mathbb{N}^+,\ x\in[0,\infty)$$

Baskakov operatörlerini tanımlamıştır. Sonra bu operatörler baz alınarak Baskakov-Kantorovich operatörü, Baskakov-Durrmeyer operatörleri tanımlanmış ve bu operatörlerin çeşitli özellikleri incelenmiş ve halen incelemeler devam etmektedir.

Yaklaşım teorisinde düzgün yakınsama probleminden sonra en önemli problemlerden biri de operatörün yakınsama hızıdır. Bu yakınsama hızını artırmak ve hata miktarını azaltmak çok önemlidir. Bu hız ne kadar hızlı olursa yakınsamanın o kadar iyi olduğu

anlaşılır. Bu sebeple operatörlerin modifiyeleri elde edilerek daha iyi ve hızlı yaklaşım sonuçları bulmak amaçlanmıştır.

Yaklaşım teorisinde en önemli problemlerden biri de yaklaşım hızının bulunması problemidir:

$$\|g(y)-\varphi_n(y)\|_y = \alpha_n,\ \lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$$

ise bu $\varphi_n(y)$'in $g(y)$'ye yaklaşım hızını belirtir. Bu hızı bulmak için α_n'in sıfıra giden bir başka dizi ile karşılaştırılması yeterlidir. $0 \le \alpha_n \le \beta_n$ ve β_n'de sıfıra gidiyorsa $(\lim_{n\to\infty}\beta_n = 0)$ yukarıdaki eşitsizlik α_n'in β_n'den daha hızlı sıfıra yaklaştığını belirtir. Fonksiyon uzayında β_n'i süreklilik modülü ile de ifade edebiliriz. Çünkü f'in süreklilik modülü olan $w(f,\delta)$ sıfıra yakınsayan bir fonksiyondur. Yakınsaklık hızı içinde V. Totik'in tanımladığı süreklilik modülü ve K-fonksiyoneli kullanılmaktadır. (Ditzian *et al.* 1987, Totik *et al.* 1987) Ayrıca yakınsama hızı ve hata miktarının azaltılması için bir yöntem de; Voronovskaya (1932) tarafından ispatlanan, [0,1] aralığındaki bir x noktasında ikinci basamaktan sürekli diferensiyellenebilen fonksiyonlar için Bernstein polinomlarının asimptotik davranışıdır. Bir örnek olarak 1935 yılında T. Popoviciu (Popoviciu *et al.* 1935) [0,1] aralığında sürekli bir f fonksiyonu için süreklilik modülü yardımı ile Bernstein polinomlarının yaklaşım hızını

$$\left|B_n(g;x)-g(x)\right| \le \frac{5}{4}w(g;\frac{1}{\sqrt{n}})$$

olarak belirtmiştir.

Biz de bu tezde öncelikle yaklaşım teorisinde çok kullanılan operatörlerden Baskakov operatörleri ve bu operatörlerin integral modifikasyonlarını inceledik. Daha sonra Korovkin setindeki $\{1,e_1,e_2\}$ şartları yerine daha genel olan $\{1,\tau,\tau^2\}$ fonksiyonlarını

kullanarak Genelleştirilmiş Baskakov Durrmeyer operatörlerini ve yaklaşım özelliklerini inceledik. Bu genelleştirme sayesinde operatörün daha kullanışlı ve yaklaşımın da daha iyi olduğunu gördük. Bunun için Voronovskaya tipli teoremleri kullanarak hem yaklaşım hızını hem de yaklaşımın hatasını elde ettik. Bu sonuçları elde ederken operatörümüz sınırsız aralıklarda tanımlı olduğundan ağırlıklı uzaylarda çalıştık. Yaklaşım hızını verirken de ağırlıklı süreklilik modülünden faydalandık. Son olarak da bu genelleştirilmiş operatörün özel seçimlerle iyi bilinen klasik operatörlere dönüştüğünü gösterdik.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Burada lineer pozitif operatörler ile ilgili temel kavramlar ve özellikler verilecektir. Verilen tanımlar ve özellikler (Stancu *et al.* 2001) ve (Hacıyev ve Hacısalihoglu 1995) kaynaklarında bulunabilir.

Tanım 2.1

$V^{\sim} \neq \varnothing$ bir küme ve F bir cisim olsun.

$$\oplus : V^{\sim} \times V^{\sim} \to V^{\sim}$$

$$(t, z) \to \oplus(t, z) = t \oplus z$$

olarak tanımlanan iç işlem,

G1) $\forall t, z, w \in V^{\sim}$ için $(t \oplus z) \oplus w = t \oplus (z \oplus w)$

G2) $\forall t \in V^{\sim}$ için $\theta \oplus t = t \oplus \theta = t$ olacak biçimde $\theta \in V^{\sim}$ mevcuttur.

G3) Her bir $\forall t \in V^{\sim}$ için $t \oplus t^{-1} = t^{-1} \oplus t = \theta$ olacak biçimde $t^{-1} \in V^{\sim}$ mevcuttur.

G4) $t, z \in V^{\sim}$ için $t \oplus z = z \oplus t$, eşitliği sağlanırsa $(V^{\sim}, \oplus)$ değişmeli (abelyan) gruptur. Ayrıca $V^{\sim}$ grubu üzerinde

$$\odot : F \times V^{\sim} \to V^{\sim}$$

$$(\lambda, u) \to \odot(\lambda, u) = \lambda \odot u$$

tanımlanan dış işlem,

V1) $\forall \lambda, \psi \in F$ ve $\forall t \in V^{\sim}$ için $(\lambda \odot \psi) \odot t = \lambda \odot (\psi \odot t)$,

V2) $\forall \lambda \in F$ ve $\forall t, z \in V^{\sim}$ için $\lambda \odot (t \odot z) = (\lambda \odot t) \oplus (\lambda \odot z)$,

V3) $\forall \lambda, \psi \in F$ ve $\forall t \in V^{\sim}$ için $(\lambda \oplus \psi) \odot t = (\lambda \odot t) \oplus (\lambda \odot t)$,

V4) $\forall t \in V^{\sim}$ için $1_F \odot t = t$ olacak biçimde $1_F \in F$ olup, yukarıdaki özellikleri de sağlarsa $V^{\sim}$ kümesi yukarıda verilen iç ve dış işlemlerle birlikte vektör uzayı belirtir ve $(V^{\sim}, \oplus, \odot)$ biçiminde ifade edilir. $(V^{\sim}, \oplus, \odot)$ kümesine lineer uzay veya vektör uzayı denir. (Bayraktar 2017)

Örnek 2.1. $a^{\sim}, b^{\sim} \in \mathbb{R}$ olmak üzere $C\left[a^{\sim}, b^{\sim}\right]$kümesi, $\left[a^{\sim}, b^{\sim}\right]$ üzerinde tanımlı ve bu aralığın tüm noktalarında sürekli fonksiyonların kümesidir.

$$C\left[a^{\sim}, b^{\sim}\right] = \left\{h / h : \left[a^{\sim}, b^{\sim}\right] \to \mathbb{R} \text{ sürekli fonksiyon}\right\}$$

eşitliği ile gösterilir. $C\left[a^{\sim}, b^{\sim}\right]$, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde aşağıdaki işlemlerle bir vektör uzayı belirtir.

$$+ : C\left[a^{\sim}, b^{\sim}\right] \times C\left[a^{\sim}, b^{\sim}\right] \to C\left[a^{\sim}, b^{\sim}\right]$$

$$(h,t)(x) \to +(h,t)(x) = (h+t)(x) = h(x) + t(x)$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times C\left[a^{\sim}, b^{\sim}\right] \to C\left[a^{\sim}, b^{\sim}\right]$$

$$(\phi, h)(x) \to \cdot\ (\phi, h)(x) = (\phi \cdot h)(x) = \phi \cdot h(x)$$

olarak tanımlanır.

S1) $\forall h, t, z \in C\left[a^{\sim}, b^{\sim}\right]$ için $(h+t)+z = h+(t+z)$ sağlanır,

S2) $\forall\ h \in C\left[a^{\sim}, b^{\sim}\right]$ için $0+h = h+0 = h$ olacak şekilde $0 \in C\left[a^{\sim}, b^{\sim}\right]$ vardır,

S3) Her bir $h \in C\left[a^{\sim}, b^{\sim}\right]$ için $h+(-h) = (-h)+h = 0$ olan $(-h) \in C\left[a^{\sim}, b^{\sim}\right]$ vardır,

S4) $\forall h, t \in C\left[a^{\sim}, b^{\sim}\right]$ için $t+h = h+t$,

V1) $\forall \phi, \mu \in \mathbb{R}$ ve $\forall h \in C\left[a^{\sim}, b^{\sim}\right]$ için $(\phi\mu) \cdot h = \phi \cdot (\mu h)$ sağlanır.

V2) $\forall \phi \in \mathbb{R}$ ve $\forall h, t \in C\left[a^{\sim}, b^{\sim}\right]$ için $\phi \cdot (h+t) = (\phi \cdot h)+(\phi \cdot t)$ sağlanır.

V3) $\forall \phi, \mu \in \mathbb{R}$ ve $\forall h \in C\left[a^{\sim}, b^{\sim}\right]$ için $(\phi+\mu) \cdot h = (\phi \cdot h)+(\mu \cdot h)$ sağlanır.

V4) $\forall h \in C\left[a^{\sim}, b^{\sim}\right]$ için $1 \cdot h = h$ olacak şekilde $1 \in \mathbb{R}$ mevcuttur. Yani $(C\left[a^{\sim}, b^{\sim}\right], +, \cdot)$ $\mathbb{R}$ üzerinde bir lineer uzaydır (Maddox *et al.* 1970).

Tanım 2.2

Y bir lineer uzay olmak üzere $\|\cdot\| : Y \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanan fonksiyonunun Y deki değerini $\|y\|$ olarak ifade edelim. Aşağıda verilen şartlar sağlanırsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna Y üzerinde bir norm ve Y 'ye de bir normlu uzay denir.

i) $\|y\| = 0 \Leftrightarrow y = 0$

ii) $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\|\lambda y\| = |\lambda| \|y\|$

iii) $x, y \in Y$ olmak üzere $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Maddox *et al.* 1970).

Tanım 2.3. Y boş olmayan bir küme ve $d : Y \times Y \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlansın. Her $m, n, k \in Y$ için

i) $d(m,n) = 0 \Leftrightarrow m = n$

ii) $d(m,n) = d(n,m)$

iii) $d(m,n) \leq d(m,k) + d(k,n)$ koşullarını sağlıyora d'ye Y üzerinde bir metrik, (Y,d) ikilisine de bir metrik uzay denir (Kocak 2011).

Tanım 2.4 $A \subseteq \mathbb{R}$, $(h_n)(h_n : E \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$ dizisi A üzerinde h fonksiyonuna noktasal yakınsaktır. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in A$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n \geq n_0$ için $|h_n(x) - h(x)| < \varepsilon$ 'dır.

Tanım 2.5 $E \subseteq \mathbb{R}$, $f_n : E \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ve bir $f : E \to \mathbb{R}$ olsun. Keyfi bir $\varepsilon > 0$, $\forall n \geq n_0$ *ve* $\forall x \in E$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak biçimde sadece ε'a bağlı bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna E üzerinde düzgün yakınsaktır denir.

Tanım 2.6

$d_\infty(x,y) = maks\left\{\left|x^{\sim}(t) - y^{\sim}(t)\right|, t \in [a,b]\right\}$ olsun. $(C[a,b], d_\infty)$ metrik uzay olmak üzere

i. Her $t \in [a, b]$ için $\mathbb{R}$' de $(f_n(t))$ dizisi $f(t)$'ye yakınsıyorsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna noktasal yakınsıyor denir.

ii. $(C[a,b], d_\infty)$ metrik uzayında (f_n) dizisi f fonksiyonuna yakınsıyorsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsıyor denir.

Tanım 2.7

f_n ve f fonksiyonları $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli olmak üzere, (f_n) dizisinin $C[a,b]$ üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart $c_n = maksx \in [a,b] \left| f_n(x) - f(x) \right|$ biçiminde gösterilen (c_n) reel sayı dizisinin sıfır dizisi olmasıdır.

Teorem 2.1

f fonksiyonu a noktası yakınlarında $m.$ mertebeden sürekli türevlere sahip bir fonksiyon olsun. O zaman $k_m(a) = \dfrac{(x-a)^m}{m!} f^{(m)}(s)$ olmak üzere;

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + r_m(s)$$

olacak şekilde $s \in [a, x]$ reel sayısı vardır.

Tanım 2.8

(X,U,μ) bir ölçü uzayı ve $f \in M(X,U)$ olsun. f^+ ve f^- fonksiyonlarının her ikisi de sonlu integrallenebilirdir denir ve bu integral

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

reel sayısıdır. Eğer integrallenebilirlik kuralında ölçü uzayını $X = \mathbb{R}^n$, $U = B(\mathbb{R}^n)$ seçilip ve $\mu = \lambda$ Lebesgue ölçüsü alınırsa $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda$ integraline Lebesgue integrali denilir.

Tanım 2.9

Gama fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad \mathrm{Re}(z) > 0$$

eşitliği ile verilen genelleştirilmiş integral ile tanımlanır ve $a,b \in \mathbb{Z}^+$ ve $t \in [0,1]$ aralığı olmak üzere Gamma fonksiyonu;

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

rekürans bağıntısını sağlar.

$a,b \in \mathbb{Z}^+$ ve $t \in [0,1]$ aralığı olmak üzere Beta fonksiyonu;

$$\beta(a,b)=\int_0^{\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,du$$

(Re(x)>0, Re(y)>0) ile tanımlanır. Ayrıca,

$$\Gamma(a)=(a-1)!\ a_1,...,a_n$$

dir ve bu iki fonksiyon arasında

$$\beta(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

ilişkisi vardır.

2.1 Lineer Pozitif Operatörler

Tanım 2.1.1

A ve B lineer normlu iki fonksiyon uzayı olsun. A uzayındaki bir h fonksiyonuna B fonksiyon uzayından bir t fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı mevcutsa böylece A uzayında bir operatör tanımlanmış olur. $t(x)=L(h,x)$ şeklinde gösterilir. L operatörünün tanım bölgesi A uzayı olmak üzere $A=D(L)$ eşitliği ile gösterilir. Bu durumda,

$$t(x)=L(h,x)$$

B uzayının elemanıdır ve böyle tanımlı t fonksiyonları kümesine L operatörünün değer kümesi denir. Bu kümenin ifadesi $\mathbb{R}(L)$ şeklinde ifade edilir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 2.1.2

$L: A \to B$ bir operatör olsun. Her $f_1, f_2 \in \mathrm{X}$ *ve* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$L(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2; x) = \alpha_1 L(f_1; x) + \alpha_2 L(f_2; x)$$

şeklinde tanımlı operatöre lineer operatör denir.

Tanım 2.1.3

$L: A \to B$ bir operatör , L'nin tanım kümesi $D(L) \subset A$ olmak üzere $\forall \square \in D(L)$ için;

$$\|L(\square; x)\|_B \leq M\|f\|_A$$

eşitsizliğini sağlanacak şekilde $M \in \mathbb{R}^+$ varsa L 'ye $D(L)$ 'de sınırlı operatör denir.

Tanım 2.1.4

$A^+ = \{ f \in A : f(t) \geq 0 \}$, $B^+ = \{ z \in Y : z(t) \geq 0 \}$ fonksiyon sınıfları verilsin. A'da tanımlanan L lineer operatörü A'daki her f fonksiyonunu B^+ kümesindeki bir fonksiyona karşılık getiriyorsa L operatörüne lineer pozitif operatör denir. L lineer pozitif operatör ise $L(A^+) \subset B^+$ olur. Yani; $f(t) \geq 0$ için $L(f; x) \geq 0$ olmaktadır.

Tanım 2.1.5

A ve B normlu uzaylar ve $L: A \to B$ bir lineer operatör olsun. Keyfi $\varepsilon > 0$ için bir $\delta(\varepsilon, f_0)$ sayısı vardır ki $\|f - f_0\|_X < \delta$ olduğunda $\|L(f) - L(f_0)\|_Y < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanıyorsa L operatörü $f_0 \in X$ için süreklidir denir.

2.2 Süreklilik Modülü ve Özellikleri

Lineer pozitif operatörlerle yaklaşım teorisinde önemli çalışmalardan biri de yaklaşımın hızını belirlemek ve bu yaklaşımın hatası için bir üst sınır bulmaktır. Bunu yaparken süreklilik modülü ve K-fonksiyonelini kullanmak en yaygın metodlardan birisidir. Aşağıdaki tanım ve teoremler (Anastassiou *et al.* ve Gal *et al.* 2000) ve (Ditzian *et al.* Totik *et al.*1987) kaynaklarda bulunabilir.

Tanım 2.2.1

$z,t\in[a,b]$ olmak üzere $|z-t|\le\varphi$ şartını sağlayan $\varphi>0$ için $|g(z)-g(t)|$'nin en küçük üst sınırına $g(z)$' nin süreklilik modülü denir.

$$w(g;\varphi)=\sup_{|z-t|\le\varphi}|g(z)-g(t)|$$

veya

$$w(g;\varphi)=\sup_{|\square|\le\varphi}|g(z+\square)-g(z)|$$

şeklinde ifade edilir.

Süreklilik modülünün bazı özelliklerini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

1) w fonksiyonu monoton artan olup,

$$\varphi_1\le\varphi_2\Rightarrow w(g,\varphi_1)\le w(g,\varphi_2)$$

eşitsizliği sağlanır.

2) $n \in \mathbb{N}$ ise;

$$w(g:n\varphi) \leq nw(g:\varphi)$$

olduğunu görelim.

$$w(g:n\varphi) = \sup_{|\square| \leq n\varphi} |g(z+\square) - g(z)|$$

$$= \sup_{|n\square| \leq n\varphi} |g(z+n\square) - g(z)|$$

$$= \sup_{|k\square| \leq \varphi} \left| \sum_{k=1}^{n} [g(z+k\square) - g(z+(k-1)\square] \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \sup_{|\square| \leq \varphi} |g(z+k\square) - g(z+(k-1)\square|$$

$$= nw(g:\varphi)$$

dir.

3) $\lambda > 0$ için,

$$w(g:\lambda\varphi) \leq (1+\lambda)w(g:\varphi)$$

olduğunu görelim.

$$w(g:\lambda\varphi) \leq w(g:([\![\lambda]\!]+1)\varphi)$$

$$\leq (1+[\![\lambda]\!])w(g:\varphi)$$

$$\leq (1+\lambda)w(g:\varphi)$$

dir.

4) $g, [a,b]$de sürekli ise;

$$\left|g(k)-g(z)\right| \leq w(g:\left|k-z\right|)$$

sağlanır. Şimdi bunu gösterelim:

$$w(g:|k-z|) = sup|g(k)-g(z)|$$

$$= \sup_{k,z\in[a,b]} |g(k)-g(z)|$$

$$\geq |g(k)-g(z)|$$

dir.

5) Süreklilik modülünün tanımını kullanarak;

$$|g(z)-g(t)| \leq w(g:|z-t|)$$

$$\leq w(g:\frac{\varphi|z-t|}{\varphi})$$

$$\leq (1+\frac{|z-t|}{\varphi})w(g:\varphi)$$

yazabiliriz.

2.3 Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Koşulları

[a,b] kompakt aralığında sürekli fonksiyonlara lineer pozitif operatörler dizisi ile yaklaşım için gerek ve yeter koşullar birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Her ne kadar uzun bir süre bilinmese de, Popoviciu aşağıdaki teoremi ifade ve ispat etmiştir (Popoviciu *et al.* 1950)

Teorem 2.3.1 $L_n : \mathbb{C}[a,b] \to \mathbb{C}[a,b]$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. Eğer $i = 0,1,2$ için $e_i = t^i$ olmak üzere [a,b] aralığı üzerinde $\lim_{n\to\infty} L_n e_i = e_i$ düzgün olarak mevcut ise, bu durumda [a,b] aralığı üzerinde her $f \in \mathbb{C}[a,b]$ için $\lim_{n\to\infty} L_n f = f$ yakınsaması düzgündür.

Ayrıca Teorem 2.3.1 Bohmann ve Korovkin tarafından da incelenmiş ve aşağıdaki genel formu elde edilmiştir (Bohman *et al.* 1952, Korovkin *et al.* 1953)

Teorem 2.3.2

$\{L_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi olmak üzere $\alpha_n(x^{\sim})$, $\beta_n(x^{\sim})$ ve $\gamma_n(x^{\sim}), [a,b]$ de düzgün olarak sıfıra yakınsayan diziler olmak üzere $\forall x^{\sim} \in [a,b]$ için,

$$L_n(1;x^{\sim}) = 1 + \alpha_n(x^{\sim}) \tag{2.1}$$

$$L_n(t;x^{\sim}) = x^{\sim} + \beta_n(x^{\sim}) \tag{2.2}$$

$$L_n(t^2;x^{\sim}) = (x^{\sim})^2 + \gamma_n(x^{\sim}) \tag{2.3}$$

şartları sağlanırsa $[a,b]$ aralığında $L_n(g,x^{\sim})$, $g(x^{\sim})$'e düzgün olarak yakınsar. Burada g, $\mathbb{R}$ 'de sınırlı ve $[a,b]$ sürekli, *a*'da sağdan, *b*'de soldan sürekli bir fonksiyondur.

İspat: f fonksiyonu sınırlı olduğundan her x için

$$\left|g(x^{\tilde{}})\leq T\right| \tag{2.4}$$

olacak biçimde $T>0$ sayısı vardır. $g\in\mathbb{C}[a,b]$ olduğu için $\forall\varepsilon>0$ için öyle bir $\delta>0$ sayısı bulunabilir ki $t\in\mathbb{R}$ ve $x^{\tilde{}}\in[a,b]$ için $\left|t-x^{\tilde{}}\right|<\delta$ olduğunda

$$\left|g(t)-g(x^{\tilde{}})\right|<\varepsilon \tag{2.5}$$

yazılabilir.

$x^{\tilde{}},t\in[a,b]$ aralığında alındığında (2.5) eşitsizliği, g fonksiyonu bu aralıkta düzgün sürekli olduğundan sağlanır. $x^{\tilde{}}\in[a,b]$, $t\notin[a,b]$ seçildiğinde ise (2.5) eşitsizliği g fonksiyonuna a noktasında soldan ve b noktasında sağdan sürekli bir fonksiyon olduğundan sağlanır. (2.4) ve (2.5) göz önüne alındığında her $t\in\mathbb{R}$ ve $x^{\tilde{}}\in[a,b]$ için

$$\left|g(t)-g(x^{\tilde{}})\right|<\varepsilon+\frac{T}{\delta^2}(t-x^{\tilde{}}) \tag{2.6}$$

sağlanır. Çünkü $\left|t-x^{\tilde{}}\right|<\delta$ ise $\left|g(t)-g(x^{\tilde{}})\right|<\varepsilon$ olur ve $\frac{T}{\delta^2}(t-x^{\tilde{}})^2$ sağlanır. $\left|t-x^{\tilde{}}\right|\geq\delta$ olduğunda ise $\frac{(t-x^{\tilde{}})^2}{\delta^2}\geq 1$ olacağından $\frac{2T}{\delta^2}(t-X^{\tilde{}})\geq 2T$ olur. Böylece $\varepsilon>0$ için (2.4) göz önüne alınırsa

$$\left|g(t)-g(x^{\tilde{}})\leq\left|g(t)\right|+\left|g(x^{\tilde{}})\right|\right|$$

$$\leq 2T$$

$$\leq \frac{2T}{\delta^2 (t-\tilde{x})^2} + \varepsilon \qquad (2.7)$$

eşitsizliği gerçeklenir. Buradan

$$\left\| L_n(g;\tilde{x}) - g(\tilde{x}) \right\|_{\mathbb{C}[a,b]} = \left\| L_n(g(t) - g(\tilde{x});\tilde{x}) + g(\tilde{x}) L_n(1;\tilde{x}) - g(\tilde{x}) \right\|_{\mathbb{C}[a,b]}$$

$$\leq \left\| L_n(g(t) - g(\tilde{x});\tilde{x}) \right\|_{\mathbb{C}[a,b]} + \|g\|_{\mathbb{C}[a,b]} \left\| L_n(1;\tilde{x}) - 1 \right\|_{\mathbb{C}[a,b]}$$

$$\leq \left\| L_n\left(\left| g(t) - g(\tilde{x}) \right|;\tilde{x} \right) \right\|_{\mathbb{C}[a,b]} + \|g\|_{\mathbb{C}[a,b]} \left\| L_n(1;\tilde{x}) - 1 \right\|_{\mathbb{C}[a,b]}$$

olur. Son satırdaki ikinci terim (2.1) göz önüne alınırsa sıfıra yakınsadığı görülür. Dolayısıyla; $n \to \infty,\ \varepsilon_n \to 0$ için

$$\|g\|_{\mathbb{C}[a,b]} \left\| L_n(1;\tilde{x}) - 1 \right\|_{\mathbb{C}[a,b]} \leq \varepsilon_n$$

eşitsizliğini sağlayan ε_n dizisi vardır. O halde,

$$\left\| L_n(g(t) - g(\tilde{x});\tilde{x} \right\|_{\mathbb{C}[a,b]} \leq \left\| L_n(\left| g(t) - g(\tilde{x}) \right|;\tilde{x}) \right\|_{\mathbb{C}[a,b]} + \varepsilon_n \qquad (2.8)$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi (2.1) ile verilen kısmı bulalım. (2.7) eşitsizliği ve lineer pozitif operatörlerin sağladığı özellikler göz önüne alınırsa $\left\| L_n(g(t) - g(\tilde{x});\tilde{x} \right\|_{\mathbb{C}[a,b]} \leq L_n((\varepsilon + \frac{2T}{\delta^2}(t-\tilde{x})^2;\tilde{x})$

$$= \varepsilon L_n(1:\tilde{x}) + \frac{2T}{\delta^2} L_n((t-\tilde{x})^2;\tilde{x})$$

$$= \varepsilon L_n(1:\tilde{x}) + \frac{2T}{\delta^2}\left[L_n(t^2;\tilde{x}) - 2\tilde{x} L_n(1:\tilde{x}) + (\tilde{x})^2 L_n(1;\tilde{x}) \right]$$

$$= \varepsilon\left[L_n(1;\tilde{x}) - 1 \right] + \varepsilon$$
$$+ \frac{2T}{\delta^2}\left\{ \left[L_n(t^2;\tilde{x}) - (\tilde{x})^2 \right] - 2\tilde{x}\left[L_n(t;\tilde{x}) - \tilde{x} \right] + (\tilde{x})^2\left[L_n(1;\tilde{x}) - 1 \right] \right\}$$

$$= \varepsilon + (\varepsilon + \frac{2T}{\delta^2}(\tilde{x})^2)\left[L_n(1;\tilde{x}) - 1 \right] + \frac{2T}{\delta^2}\left[L_n(t^2;\tilde{x}) - (\tilde{x})^2 \right] - \frac{4T}{\delta^2}\tilde{x}\left[L_n(t;\tilde{x}) - \tilde{x} \right]$$

elde edilir. $\tilde{x} \in [a,b]$ olduğundan

$$\left(\varepsilon + \frac{2T}{\delta^2}(\tilde{x})^2 \right) \le \varepsilon + \frac{2T}{\delta^2} b^2, \left(\frac{4T}{\delta^2}\tilde{x} \le \frac{4T}{\delta^2} b \right)$$

dir. O halde;

$$c_1 = \frac{2T}{\delta^2} b^2,\ c_2 = 2bc_1,\ c_3 = \varepsilon + c_1 b^2$$

eşitliklerini kabul edersek;

$$\left\| L_n(\left| g(t) - g(\tilde{x}) \right|;\tilde{x} \right\|$$
$$\le \varepsilon + c_1 \left\| L_n(t^2;\tilde{x}) - (\tilde{x})^2 \right\| + c_2 \left\| L_n(t;\tilde{x}) - \tilde{x} \right\| + c_3 \left\| L_n(1;\tilde{x}) - 1 \right\|$$

bulunur. (2.1), (2.2) ve (2.3) göz önüne alınırsa $n \to \infty$ için

$$\left\| L_n(\left| g(t) - g(\tilde{x}) \right|;\tilde{x} \right\| \to 0$$

dir. Son elde edilen sonuç ve (2.6) eşitsizliğinden

$$\left\| L_n(g;x^{\sim}) - g(x^{\sim}) \right\| \to 0$$

sağlanır.

2.4 Ağırlıklı Uzaylarda Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Koşulları

Kapalı aralıklarda tanımlanan Korovkin teoreminin sınırsız aralıklardaki operatörler için geçerli olmadığını biliyoruz. Bu nedenle Gadjiev 1974 ve 1976 yılllarında reel eksenin tamamında veya sınırsız alt aralıklarında geçerli olan Korovkin tipli teoremleri vermiştir.

Tanım 2.4.1 $C_B[0,\infty)$, $\mathbb{R}^+$ üzerinde sürekli ve f sınırlı fonksiyonların uzayı olmak üzere $\psi(x)=1+\gamma^2(x)$ şeklinde γ fonksiyonunu tanımlayalım. M_g pozitif bir sabit olmak üzere $|g(x)| \le M_g \psi(x)$ eşitsizliği sağlayan reel değişkenli, reel fonksiyonların kümesini

$$B_\psi[0,\infty) = \{g : |g(x)| \le M_g \psi(x)\},$$

bu uzaydaki sürekli fonksiyonların kümesini

$$C_\psi[0,\infty) = \{g : g \in B_\psi[0,\infty),\ \text{g sürekli}\}$$

ile gösterelim. Bu uzaylar $\|g\|_\psi = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |g(x)|/\psi(x)$ normuna göre birer normlu uzaydır. ψ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu, $C_\psi[0,\infty)$ ve $B_\psi[0,\infty)$ uzaylarına ağırlıklı uzaylar denir. Ayrıca $k_f \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$C_{\psi}^{k}[0,\infty)=\left\{g: g\in C_{\psi}[0,\infty), \frac{\lim_{x\to\infty}|g(x)|}{\psi(x)}=k_f\right\}$$

olarak tanımlanan fonksiyon uzayı $C_{\psi}[0,\infty)$ uzayının bir alt uzayıdır. Ayrıca

$$U_{\psi}[0,\infty)=\{g\in C_{\psi}[0,\infty), g(x)/\psi(x) \text{ üzerinde düzgün süreklidir.}\}$$

Teorem 2.4.1

φ reel eksende tanımlı, monoton artan, sürekli bir fonksiyon ve $p(x)=1+(\varphi(x))^2$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere

i) $C_p(\mathbb{R})$ uzayından $B_p(\mathbb{R})$ uzayına öyle bir $\{A_m\}$ lineer pozitif operatörler dizisi tanımlanabilir ki, bu operatörler dizisi için,

$$\lim_{m\to\infty}\left\|A_m(\varphi^{\nu})-\varphi^{\nu}\right\|_p=0,\ \nu=0,1,2 \tag{2.9}$$

şartları gerçeklenmesine rağmen öyle bir $f^*\in C_p(\mathbb{R})$ fonksiyonu vardır ki,

$$\lim_{m\to\infty}\left\|A_m(f^*)-f^*(x)\right\|_p\geq 1$$

sağlanır.

ii) $C_p(\mathbb{R})$ uzayından $B_p(\mathbb{R})$ uzayına (2.9) koşullarını sağlayan öyle bir $\{A_m\}$ lineer pozitif operatörler dizisi bulunabilir ki, her $f\in C_p^k$ için

$$\lim_{m\to\infty}\left\|A_m(f)-f\right\|_p=0$$

dır (Gadjiev *et al.* 1974,1976).

2.5 Ağırlıklı Uzaylarda Süreklilik Modülü

x $\in [0;\infty)$ ve $g \in C_{\psi}^{k}[0,\infty)$ olmak üzere $\sigma > 0$ için $\psi(x) = 1 + Y^{2}(x)$ olmak üzere

$$\omega_{\psi}(g;\sigma) = \sup_{\substack{x,u\in\mathbb{R}^{+} \\ |\psi(u)-\psi(x)|\le\sigma}} \frac{|g(u)-g(x)|}{\psi(u)+\psi(x)} \qquad g \in C_{\psi}(\mathbb{R}^{+}),\ \sigma > 0$$

şeklinde tanımlanan $\omega_{\psi}(g;\sigma)$ fonksiyonuna $C_{\psi}[0,\infty)$ uzayında g fonksiyonunun süreklilik modülü denir (Holhos *et al.* 2008).

Lemma 2.5.1 Her $g \in U_{\psi}(\mathbb{R}^{+})$ için $\lim_{\sigma\to 0}\omega_{\gamma}(g;\sigma) = 0$ ve

$$|g(y)-g(x)| \le \psi(y)+\psi(x)\left(2+\frac{|\psi(y)-\psi(x)|}{\sigma}\right)\omega_{\psi}(f,\sigma) \tag{2.10}$$

şeklindedir.

2.6 Baskakov Operatörü ve Özellikleri

x $\in [0;\infty)$; f $\in \mathbb{C}\ [0;\infty)$; s$\in \mathbb{N}$ olmak üzere, reel değişkenli Baskakov operatörü

$$K_{s}(f;x) = \frac{1}{(1+x)^{s}}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{x^{l}}{(1+x)^{l}}\, f\left(\frac{l}{s}\right)$$

şeklinde tanımlanır (Baskakov *et al.* 1957).

Şimdi Baskakov operatörünün Korovkin şartlarını sağladığını gösterelim.

$$K_s(f;x)=\frac{1}{(1+x)^s}\sum_{l=0}^{\infty} f\left(\frac{l}{s}\right)\binom{s+l-1}{l}\frac{x^l}{(1+x)^l}$$

olup

$$(1+x)^s=\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{x^l}{(1+x)^l}$$

olduğundan

$$K_s(1;x)=\frac{1}{(1+x)^s}\sum_{l=0}^{\infty}1\binom{s+l-1}{l}\frac{x^l}{(1+x)^l}=1$$

elde edilir.

$$K_s(t;x)=\frac{1}{(1+x)^s}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{l}{s}\right)\binom{s+l-1}{l}\frac{x^l}{(1+x)^l}$$
$$=\frac{1}{(1+x)^s}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{l}{s}\right)\frac{(s+l-1)!}{(s-1)!l!}\frac{x^l}{(1+x)^l}$$

$$=\frac{x}{1+x}\frac{1}{(1+x)^s}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(s+l-1)!}{s!(l-1)!}\frac{x^{l-1}}{(1+x)^{l-1}}$$
$$=\frac{x}{1+x}\frac{1}{(1+x)^s}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s+l}{l}\frac{x^l}{(1+x)^l}$$

$$=\frac{x}{1+x}\frac{1}{(1+x)^s}(1+x)^{s+1}=x$$

bulunur.

$$K_s(t^2;x)=\frac{1}{(1+x)^s}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{l^2}{s^2}\right)\binom{s+l-1}{l}\frac{x^l}{(1+x)^l}$$

$$=\frac{1}{(1+x)^s}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l(l-1)}{s^2}\frac{(s+l-1)!}{(s-1)!l!}\frac{x^l}{(1+x)^l}+\frac{1}{s}\frac{1}{(1+x)^s}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l}{s}\frac{(s+l-1)!}{(s-1)!l!}\frac{x^l}{(1+x)^l}$$

$$=\frac{1}{s}\frac{x^2}{(1+x)^2}\frac{1}{(1+x)^s}\sum_{l=2}^{\infty}\frac{(s+l-1)!}{s!(l-2)!}\frac{x^{l-2}}{(1+x)^{l-2}}+\frac{1}{l}K_s(t;x)$$

$$=\frac{1}{s}\frac{x^2}{(1+x)^2}\frac{1}{(1+x)^s}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(s+l+1)!}{s!l!}\frac{x^l}{(1+x)^l}+\frac{x}{s}$$

$$=\frac{s+1}{s}\frac{x^2}{(1+x)^2}\frac{1}{(1+x)^s}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(s+l+1)!}{(s+1)!l!}\frac{x^l}{(1+x)^l}+\frac{x}{s}$$

$$=\frac{s+1}{s}\frac{x^2}{(1+x)^2}\frac{1}{(1+x)^s}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s+l+1}{l}\frac{x^l}{(1+x)^l}+\frac{x}{s}$$

$$=\frac{s+1}{s}\frac{x^2}{(1+x)^2}\frac{1}{(1+x)^s}(1+x)^{s+2}+\frac{x}{s}=x^2+\frac{x(1+x)}{s}$$

eşitliği elde edilir. Burada $K_s(x)=\frac{x(1+x)}{s}$ sonlu aralıkta sıfıra yakınsar.

Baskakov operatörünün taban fonksiyonu olan $P_{s,l}(x)$ aşağıdaki özellikleri sağlar.

Lemma 2.6.1

Her $s \in \mathbb{N}, \quad s > c \quad l \in \mathbb{N}_0, \ x \in [0,\infty]$ için $P_{s,l}(x) = \binom{s+l-1}{l} \frac{x^l}{(1+x)^{s+l}}$

olmak üzere

1. $\sum_{l=0}^{\infty} P_{s,l}(x) = 1$

2. $\lim_{s\to\infty} x^l \phi_s^{(l-1)}(x) = \lim_{s\to\infty} x^{l-1} \phi_s^{(l-2)}(x) = \ldots = \lim_{s\to\infty} \phi_s(x) = 0$ için,

$$\int_0^{\infty} P_{s,l}(t)dt = \frac{1}{s-c}$$

3. $\frac{l}{s} P_{s,l}(x) = x P_{s+c,l-1}(x)$

4. $\varphi^2(x) \frac{d}{dx} P_{s,l}(x) = (l - sx) P_{s,l}(x)$

5. $s\left[P_{s+c,l-1}(x) - P_{s+c}(x) \right] = \frac{d}{dx} P_{s,l}(x)$ 'dir.

Eğer $l < 0$ ise $P_{s,l}(x) = 0$ 'dır. (Ulusoy 2012)

3. DURRMEYER TİPLİ BASKAKOV OPERATÖRÜ VE ÖZELLİKLERİ

Agrawal ve Thamer, $[0;\infty)$ aralığında Lebesque integrallenebilir fonksiyonlara yaklaşmak için Baskakov operatörlerinin integral modifikasyonunu $x \in [0;\infty)$ ve

$$P_{s,l}(u)=\binom{s+l-1}{l}\frac{x^l}{(1+x)^{s+l}} \text{ olmak üzere}$$

$$G_s(g:x)=(s-1)\sum_{l=0}^{\infty}P_{s,l}(x)\int_0^{\infty}(g)(u)P_{s,l}(u)du$$

biçiminde tanımlanmıştır. Bu operatöre Baskakov Durrmeyer operatörü denir (Agrawal *et al.* 1998, Thamer *et al.* 1998).

Lemma 3.1

Yukarıda tanımlanan Baskakov Durrmeyer operatörleri

$$G_s(1;x)=1,\ G_s(t;x)=\frac{1+sx}{s-2} \tag{3.1}$$

$$G_s(t^2;x)=\frac{(s+1)sx^2+4sx+2}{(s-2)(s-3)} \tag{3.2}$$

$$G_s(t^3;x)=\frac{6+x(17s-3)+x^2(9s^2+8s-3)}{(s-2)(s-3)(s-4)}+\frac{x^3(s^3+3s^2+2s)}{(s-2)(s-3)(s-4)} \tag{3.3}$$

eşitliklerini sağlar.

Şimdi Baskakov Durrmeyer operatörünün merkezi momentlerini bulmak için aşağıdaki Lemma'yı verelim. Bu Lemma ile bir rekürans bağıntısı elde edilip bu sayede merkezi momentlerin daha kolay bulunması sağlanacaktır.

Lemma 3.2 Baskakov Durrmeyer operatörünün $l.$ dereceden merkezi momentleri

$$\vartheta_{s,l}(x) = G_s(x)(u-x)^l; x)$$

şeklinde tanımlarsak;

$$\left[s-(l+2)\right]\vartheta_{s,l+1}(x) = x(1+x)\left[(D\vartheta_{s,l}(x) + 2lx\vartheta_{s,l-1}(x)\right] + (l+1)(1+2x)\vartheta_{s,l}(x)$$

olur.

İspat

$$\varphi^2(x)(G_s(x))' = \varphi^2(x)\left[(s-1)\sum_{l=0}^{\infty} P'_{s,l}(x)\int_0^{\infty} P_{s,l}(t)(t-x)^l dt - (s-1)\sum_{l=0}^{\infty} P_{s,l}(x)\int_0^{\infty} P_{s,l}(t)l(t-x)^{l-1}dt\right]$$

$$= (s-1)\sum_{l=0}^{\infty}\varphi^2(x)P'_{s,l}(x)\int_0^{\infty} P_{s,l}(t)(t-x)^l dt - \varphi^2(x)G_{s,l-1}(x).$$

Şimdi $\varphi^2(x)\dfrac{d}{dx}P_{s,l}(x) = (l-sx)P_{s,l}(x)$ yazalım.

$$\varphi^2(x)(G_s(x))' = (s-1)\sum_{l=0}^{\infty}(l-sx)P_{s,l}(x)\int_0^{\infty} P_{s,l}(t)(t-x)^l dt - \varphi^2(x)lG_{s,l-1}(x)$$

olup buradan $(l-sx) = l-sx-st+st = (l-sx)+s(t-x)$ yazılırsa

$$\varphi^2(x)(G_s(x))' = (s-1)\sum_{l=0}^{\infty}\left[(l-sx)+s(t-x)\right]P_{s,l}(x)\int_0^{\infty} P_{s,l}(t)(t-x)^l dt - \varphi^2(x)G_{s,l-1}(x)$$

$$= (s-1)\sum_{l=0}^{\infty} P_{s,l}(x)\int_0^{\infty}(l-st)P_{s,l}(t)(t-x)^l\,dt + (s-1)s\sum_{l=0}^{\infty} P_{s,l}(x)\int_0^{\infty} P_{s,l}(t)(t-x)^{l+1}dt$$

$$-\varphi^2(x)G_{s,l-1}(x)$$

$$= (s-1)\sum_{l=0}^{\infty} P_{s,l}(x)\int_0^{\infty}(l-st)P_{s,l}(t)(t-x)^l\,dt + sG_{s,l+1}(x) - \varphi^2(x)G_{s,l-1}(x)$$

olur. Burada

$P'_{s,l}(t)dt = dv,\ \varphi^2(t)(t-x)^l = u$ için kısmi integrasyon uygularsak

$$\varphi^2(x)(G_s(x))' = \varphi^2(t)(t-x)^l\,P_{c,l}(t)\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} P_{s,l}(t)\Big[(1+2t)(t-x)^l + \varphi^2(t)l(t-x)^{l-1}\Big]dt$$

$$+sG_{s,l+1}(x) - \varphi^2(x)lG_{s,l-1}(x)$$

bulunur.

$$\varphi^2(t)(G_{s,l}(x))' = (s-1)\sum_{l=0}^{\infty} P_{s,l}(x)\int_0^{\infty}(l-st)P_{s,l}(t)(t-x)^l dt + sG_{s,l+1}(x) - \varphi^2(x)lG_{s,l-1}(x)$$

$$(s-1)\sum_{l=0}^{\infty} P_{s,l}(x) = \varphi^2(t)(t-x)^l\,P_{s,l}(t)\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} P_{s,l}(t)\Big[(1+2t)(t-x)^l + \varphi^2(t)l(t-x)^{l-1}\Big]dt$$

$$+sG_{s,l+1}(x) - \varphi^2(x)lG_{s,l-1}(x)$$

olup, buradan

$$-\Big[(1+2t)(t-x) + l\varphi^2(t)\Big] = -\Big[l\varphi^2(x) + (l+1)(1+2x)(t-x) + (l+2)(t-x)^2\Big]$$

$-\left[t-x+2t^2-2xt+lt+lt^2\right]$ eşitliği kullanılırsa

$$=-\left[lx+lx^2+(lt+2lxt+t+2xt-xl-2lx^2-x-2x^2+(lt^2-2lxt+lx^2+2t^2-4xt+2x^2\right]$$

yazılabilir. Böylece

$$\varphi^2(x)(G_{s,l}(x))^{'}=-l\varphi^2(x)G_{s,l-1}(x)-(l+1(l+2x)G_{s,l}(x)-(l+2)G_{s,l+1}(x)$$
$$+sG_{s,l+1}(x)-\varphi^2(x)G_{s,l-1}(x)$$
$$(s-(l+2))G_{s,l+1}(x)=\varphi^2(x)\left[G_{s,l}^{'}(x)+2lG_{s,l-1}(x)\right]+(l+1)(1+2x)G_{s,l}(x)$$

elde edilir.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ BASKAKOV DURRMEYER OPERATÖRLERİ İÇİN ASİMTOTİK FORMÜLLER

Cardenes Morales (Cárdenas-Morales D, Garrancho P, Ra¸sa I.; 2011) $f \in C[0,1]$ aralığında ve $p_{s,l}^{\tau}(x^{\sim}) = \binom{s}{l}(\tau(x^{\sim}))^{l}(1-\tau(x^{\sim}))^{s-l}$ olmak üzere $\tau(0)=0,\ \tau(1)=1$ ve $\tau^{'}(x^{\sim})>0$, şartlarını sağlayan

$$B_s^{\tau}(f;x^{\sim}) = \sum_{l=0}^{s}(f\circ\tau^{-1})\left(\frac{l}{s}\right)p_{s,l}^{\tau}(x^{\sim})$$

operatörünü tanımlamıştır. Bu operatörler Korovkin teoremindeki $\{1,e_1,e_2\}$ şartları yerine daha genel olan $\{1,\tau,\tau^2\}$ şartlarını sağlar. Böylece τ ya bağlı bu operatörler daha iyi yaklaşım sonuçları sunar. Bu fikirden esinlenerek Gülsüm ULUSOY ADA tarafından τ ya bağlı Baskakov Durrmeyer Operatörleri için de bir genelleştirme elde edilmiştir (Ulusoy 2012).

Bu genelleştirme $\tau(x^{\sim})$'in özel seçimleri ile iyi bilinen klasik Baskakov Durrmeyer operatörlerine dönüşmektedir.

$$G_s^{\lambda}(g;x^{\sim}) = (s-1)\sum_{i=1}^{\infty}P_{s,\lambda,l}(x^{\sim})\int_0^{\infty}(g\circ\lambda^{-1})(u)\sum_{i=1}^{\infty}P_{s,l}(u)du \qquad (4.1)$$

$$s\in\mathbb{N},\ P_{s,l}(u) = \binom{s+l-1}{l}\frac{\lambda(x^{\sim})^{l}}{(1+\lambda(x^{\sim}))^{s+l}}$$

ile tanımlanır.

(4.1) İle tanımlanan operatörler aşağıdaki özellikleri sağlar.

(p1): $\lambda, [0,\infty)$ 'da sürekli türevlenebilir bir fonksiyondur.

(p2): $\lambda(0)=0$ ve $\inf_{\tilde{x}\in[0,\infty)} \lambda'(\tilde{x}) \geq 1$ şeklindedir.

Şimdi bu yeni tanımlanan genelleştirilmiş Baskakov Durrmeyer operatörünün momentlerini verelim.

Lemma 4.1

$$G_s^{\lambda}(1;\tilde{x}) = 1,\ G_s^{\lambda}(\lambda;\tilde{x}) = \frac{1+s\lambda(\tilde{x})}{s-2} \tag{4.1}$$

$$G_s^{\gamma}(\lambda^2;\tilde{x}) = \frac{(s+1)s\lambda^2(\tilde{x})+4s\lambda(\tilde{x})+2}{(s-2)(s-3)} \tag{4.2}$$

$$G_s^{\gamma}(\lambda^3;\tilde{x}) = \frac{6+\lambda(\tilde{x})(17s-3)+\lambda^2(\tilde{x})(9s^2+8s-3)}{(s-2)(s-3)(s-4)} + \frac{\lambda^3(\tilde{x})(s^3+3s^2+2s)}{(s-2)(s-3)(s-4)} \tag{4.3}$$

İspat:

$G_s^{\lambda}(g;\tilde{x}) = (s-1)\sum_{l=0}^{\infty} P_{s,\lambda,l}(\tilde{x}) \int_0^{\infty} (g\circ\lambda^{-1})(u)\, p_{s,l}(u)du$ olmak üzere

$$G_s^{\lambda}(g;\tilde{x}) = (s-1)\sum_{l=0}^{\infty} \binom{s+l-1}{l} \frac{\lambda(\tilde{x})^l}{(1+\lambda(\tilde{x}))^{s+l}} \int_0^{\infty} \binom{s+l-1}{l} \frac{u^l}{(1+u)^{s+l}} du$$

şeklinde yazalım.

$$G_s^{\lambda}(1;x^{\tilde{}}) = (s-1)\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{\lambda(x^{\tilde{}})^l}{(1+\lambda(x^{\tilde{}}))^{s+l}}\int_0^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{u^l}{(1+u)^{l+1+s-1}}du$$

$$= (s-1)\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{\lambda(x^{\tilde{}})^l}{(1+\lambda(x^{\tilde{}}))^{s+l}}\frac{(s+l-1)!}{(s-1)!l!}\frac{l!(s-2)!}{(s+l-1)!}$$

olup Gama fonksiyonunun özelliğinden

$$G_s^{\lambda}(1;x^{\tilde{}}) = (s-1)\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{\lambda(x^{\tilde{}})^l}{(1+\lambda(x^{\tilde{}}))^{s+l}}\int_0^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{u^l}{(1+u)^{s+l+1-1}}du$$

$$= (s-1)\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{\lambda(x^{\tilde{}})^l}{(1+\lambda(x^{\tilde{}}))^{s+l}}\frac{1}{(s-1)} = \frac{1}{(1+\lambda(x^{\tilde{}}))^{s}}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{\lambda(x^{\tilde{}})^l}{(1+\lambda(x^{\tilde{}}))^{l}}$$

$$G_s^{\lambda}(1;x^{\tilde{}}) = \frac{1}{(1+\lambda(x^{\tilde{}}))^{s}}(1+\lambda(x^{\tilde{}}))^{s} \quad =1$$

elde edilir.

$$G_s^{\lambda}(u;x^{\tilde{}}) = (s-1)\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{\lambda(x^{\tilde{}})^l}{(1+\lambda(x^{\tilde{}}))^{s+l}}\int_0^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{u^{l+1}}{(1+u)^{s+l}}du$$

olup

$$G_s^{\gamma}(u;x^{\tilde{}}) = (s-1)\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{\lambda(x^{\tilde{}})^l}{(1+\lambda(x^{\tilde{}}))^{s+l}}\int_0^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{u^{l+1}}{(1+u)^{s+l+2-2}}du$$

yazılırsa

$$G_s^{\lambda}(u;\tilde{x}) = (s-1)\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{\lambda(\tilde{x})^l}{(1+\lambda(\tilde{x}))^{s+l}}\int_0^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{u^{l+1}}{(1+u)^{s-2+l+2}}du$$

elde edilir. Gama fonksiyonunun özelliklerinden

$$G_s^{\lambda}(u;\tilde{x}) = (s-1)\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{\lambda(\tilde{x})^l}{(1+\lambda(\tilde{x}))^{s+l}}\frac{(s+l-1)!}{(s-1)!l!}\frac{(l+1)!(s-3)!}{(s+l-1)!}$$

$$= (s-1)\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{\lambda(\tilde{x})^l}{(1+\lambda(\tilde{x}))^{s+l}}\frac{(l+1)l!(s-3)!}{(s-1)(s-2)(s-3)!l!}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{\lambda(\tilde{x})^l}{(1+\lambda(\tilde{x}))^{s+l}}\frac{(l+1)}{(s-2)}$$

$$= \frac{1}{(s-2)}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{\lambda(\tilde{x})^l}{(1+\lambda(\tilde{x}))^{s+l}}l + \frac{1}{(s-2)}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{\lambda(\tilde{x})^l}{(1+\lambda(\tilde{x}))^{s+l}}$$

$$= \frac{1}{(s-2)}\frac{1}{(1+\lambda(\tilde{x}))^s}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\binom{s}{s}\frac{\lambda(\tilde{x})^l}{(1+\lambda(\tilde{x}))^l}l$$
$$+ \frac{1}{(s-2)}\frac{1}{(1+\lambda(\tilde{x}))^s}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{\lambda(\tilde{x})^l}{(1+\lambda(\tilde{x}))^l}$$

$$= \frac{\lambda(\tilde{x})s}{s-2} + \frac{1}{s-2}\frac{1}{(1+\lambda(\tilde{x}))^s}(1+\lambda(\tilde{x}))^s$$

$$= \frac{\lambda(\tilde{x})s}{s-2} + \frac{1}{s-2}$$

$$G_s^{\lambda}(u;\tilde{x}) = \lambda(\tilde{x})$$

elde edilir.

$$G_s^{\lambda}(u^2;\tilde{x}) = (s-1)\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{\lambda(\tilde{x})^l}{(1+\lambda(\tilde{x}))^{s+l}}\int_0^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{u^l u^2}{(1+u)^{s+l}}du$$

olup

$$G_s^{\lambda}(u^2;\tilde{x}) = (s-1)\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{\lambda(\tilde{x})^l}{(1+\lambda(\tilde{x}))^{s+l}}\int_0^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{u^{l+2}}{(1+u)^{s-3+l+3}}du$$

$$= (s-1)\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{\lambda(\tilde{x})^l}{(1+\lambda(\tilde{x}))^{s+l}}\frac{(s+l-1)!}{(s-1)!l!}\frac{(l+2)!(s-4)!}{(s+l-1)!}$$

$$= (s-1)\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{\lambda(\tilde{x})^l}{(1+\lambda(\tilde{x}))^{s+l}}\frac{(l+2)(l+1)l!(s-4)!}{(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)!l!}$$

$$= \frac{1}{(s-2)(s-3)}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{\lambda(\tilde{x})^l}{(1+\lambda(\tilde{x}))^{s+l}}(l^2+3l+2)$$

$$= \frac{1}{(s-2)(s-3)}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{\lambda(\tilde{x})^l}{(1+\lambda(\tilde{x}))^{s+l}}\left[l(l-1)+4l+2\right]$$

$$= \frac{1}{(s-2)(s-3)}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{\lambda(\tilde{x})^l}{(1+\lambda(\tilde{x}))^{s+l}}\left[l(l-1)\frac{s^2}{s^2}+4l+2\right]$$

olup

$$G_s^{\gamma}(u^2;x^{\tilde{}}) = \frac{s^2}{(s-2)(s-3)}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{\lambda(x^{\tilde{}})^l}{(1+\lambda(x^{\tilde{}}))^{s+l}}l(l-1)\sqrt{2}$$
$$+\frac{4s}{(s-2)(s-3)}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{\lambda(x^{\tilde{}})^l}{(1+\lambda(x^{\tilde{}}))^{s+l}}l$$
$$+\frac{2}{(s-2)(s-3)}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{\lambda(x^{\tilde{}})^l}{(1+\lambda(x^{\tilde{}}))^{s+l}}$$

$$G_s^{\lambda}(u^2;x) = \frac{s^2}{(s-2)(s-3)}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{\lambda(x^{\tilde{}})^l}{(1+\lambda(x^{\tilde{}}))^{s+l}}l(l-1)\frac{s+1}{s}$$
$$+\frac{4s}{(s-2)(s-3)}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{\lambda(x^{\tilde{}})^l}{(1+\lambda(x^{\tilde{}}))^{s+l}}l\frac{s}{s}$$
$$+\frac{2}{(s-2)(s-3)}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l}\frac{\lambda(x^{\tilde{}})^l}{(1+\lambda(x^{\tilde{}}))^{s+l}}$$

$$=\frac{s^2}{(s-2)(s-3)}G_s^{\lambda}(u^2;x^{\tilde{}})+\frac{4G_s^{\lambda}(u;x^{\tilde{}})}{(s-2)(s-3)}+\frac{2}{(s-2)(s-3)}$$

$$=\lambda^2(x^{\tilde{}})$$

bulunur.

Lemma 4.2 Genelleştirilmiş Baskakov Durrmeyer operatörünün l. dereceden merkezi momentleri

$$\vartheta_{s,l}^{\lambda}(x^{\tilde{}}) = G_s^{\lambda}(x^{\tilde{}})((\lambda(u)-\lambda(x^{\tilde{}}))^l;x^{\tilde{}})$$

şeklinde tanımlarsak;

$$\left[s-(l+2)\right]\vartheta_{s,l+1}^{\lambda}(x^{\tilde{}}) = \lambda(x^{\tilde{}})(1+\lambda(x^{\tilde{}}))\left[(D\vartheta_{s,l}^{\gamma}(x^{\tilde{}})+2l\lambda(x^{\tilde{}})\vartheta_{s,l-1}^{\lambda}(x^{\tilde{}})\right]$$
$$+(l+1)(1+2\lambda(x^{\tilde{}}))\vartheta_{s,l}^{\lambda}(x^{\tilde{}})$$

rekürans bağıntısı elde edilir. Elde edilen rekürans bağıntısı kullanılarak aşağıdaki eşitlikleri verebiliriz.

$$\vartheta_{s,1}^{\lambda} = \frac{2\lambda(x^{\sim})+1}{s-2} \tag{4.4}$$

$$\vartheta_{s,2}^{\lambda}(x^{\sim}) = \frac{2\left[1+(\lambda^2(x^{\sim})+\lambda(x^{\sim}))(s+3)\right]}{(s-2)(s-3)} \tag{4.5}$$

$$\vartheta_{s,3}^{\lambda}(x^{\sim}) = \frac{\lambda^3(x^{\sim})(24s+24)+\lambda^2(x^{\sim})(35s+33)}{(s-2)(s-3)(s-4)} + \frac{\lambda(x^{\sim})(11s+21)+6}{(s-2)(s-3)(s-4)}$$

$$\vartheta_{s,4}^{\lambda}(x^{\sim}) = \frac{\lambda^4(x^{\sim})(12s^2+252s+120)+\lambda^3(x^{\sim})(24s^2+494s+210)}{(s-2)(s-3)(s-4)(s-5)}$$
$$+\frac{\lambda^2(x^{\sim})(12s^2+309s+195)+\lambda(x^{\sim})(67s+105)+24}{(s-2)(s-3)(s-4)(s-5)}$$

$$\vartheta_{s,6}^{\lambda}(x^{\sim}) = \frac{1}{(s-2)(s-3)(s-4)(s-5)(s-6)(s-7)}\lambda^6(x^{\sim})(120s^3+7920s^2+33000s+5040)$$
$$+\lambda^5(x^{\sim})(360s^3+23532s^2+97476s+12600)$$
$$+\lambda^4(x^{\sim})(360s^3+25350s^2+18900)$$
$$+\lambda^3(x^{\sim})(120s^3+5704s^2+74172s+18900)$$
$$+\lambda^2(x^{\sim})(2046s^2+24312s+13266)$$
$$+\lambda(x^{\sim})(3174s+5706)+720$$

Aşağıdaki teoremde 6. dereceden merkezi momentler ve ağırlıklı süreklilik modülü kullanılarak quantitative Voronovskaya teoremi ispat edilmiştir. Bu teorem, genelleştirilmiş Baskakov Durrmeyer operatörleri için aynı anda hem yakınsaklık oranı hem de yaklaşımın hatası için bir üst sınır elde etmemizi sağlamaktadır.

Teorem 4.1 λ fonksiyonu (p_1), (p_2) koşullarını sağlasın. Bu durumda $g''/(\lambda')^2$, $g'.\lambda''/(\lambda')^3 \in C_{\psi}(\mathbb{R}^+)$ olmak üzere $x^{\sim} \in \mathbb{R}^+$ için;

$$\left|s\left[G_s^{\lambda}(g;x)-g(x)\right]-(2\gamma(x)+1D(g\circ\lambda^{-1})(\lambda(x)-(\lambda^2(x)+\lambda(x)D^2(g\circ\lambda^{-1})(\lambda(x))\right|$$

$$\leq \left|a_s(x^{\sim})\right| D(g\circ\lambda^{-1})(\lambda(x^{\sim}))+\left|b_s(x^{\sim})\right|\frac{D^2(g\circ\lambda^{-1})(\lambda(x^{\sim}))}{2}$$
$$+12s(2+\lambda(x^{\sim})+\lambda^2(x^{\sim}))\frac{\left[(s+3)(\lambda^2(x^{\sim})+\lambda(x^{\sim}))+1\right]}{(s-2)(s-3)}$$
$$\times\left\{\omega_{\lambda}(\frac{g''}{(\lambda')^2},\sigma_s^{\lambda}(x^{\sim}))+\omega_{\lambda}(\frac{g'\lambda''}{(\lambda')^3},\sigma_s^{\lambda}(x^{\sim}))\right\}$$

bulunur. Burada

$$a_s(x^{\sim}) := \vartheta_{s,1}^{\lambda}(x^{\sim})s-(2\lambda(x^{\sim})+1)$$

$$b_s(x^{\sim}) := \vartheta_{s,2}^{\lambda}(x^{\sim})s-(2\lambda^2(x^{\sim})+\lambda(x^{\sim}))$$

$$\sigma_s^{\lambda}(x^{\sim})=\left(163\frac{(s+3)(1+\lambda(x^{\sim}))^4}{(s-7)^4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

şeklindedir.

İspat $g\circ\lambda^{-1}$ 'nin Taylor açılımı ile

$$(g\circ\lambda^{-1})(\lambda(u))=g\circ\lambda^{-1})(\lambda(x^{\sim})+D(g\circ\lambda^{-1})(\lambda(x^{\sim}))(\lambda(u)-\lambda(x^{\sim})) \qquad (4.6)$$

$$+\frac{D^2 g\circ\lambda^{-1})(\lambda(x^{\tilde{}})(\lambda(x^{\tilde{}}))(\lambda(u)-\lambda(x^{\tilde{}}))^2}{2}+h(u,x^{\tilde{}})(\lambda(u)-\lambda(x^{\tilde{}}))^2 \text{ yazılabilir.}$$

Ayrıca $h(u,x^{\tilde{}})=\frac{D^2 g\circ\lambda^{-1})(\lambda(\varepsilon))-D^2 g\circ\lambda^{-1})(\lambda(x^{\tilde{}}))}{2}$, dir.

$$\left|s\left[G_s^{\lambda}(g;x^{\tilde{}})-g(x^{\tilde{}})\right]-(2\lambda(x^{\tilde{}})+1)D(g\circ\lambda^{-1})(\lambda(x^{\tilde{}})-2(\lambda^2(x^{\tilde{}})\right\rangle$$

$$\left\langle+\lambda(x^{\tilde{}})\frac{D^2(g\circ\lambda^{-1})(\lambda(x^{\tilde{}}))}{2}\right|$$

$$\leq\left|sD(g\circ\lambda^{-1})(\lambda(x^{\tilde{}}))\vartheta_{s,1}^{\lambda}(x)-(2\lambda(x^{\tilde{}})+1D(g\circ\lambda^{-1})(\lambda(x^{\tilde{}})\right|$$

$$+\left|\frac{D^2(g\circ\lambda^{-1})(\lambda(x^{\tilde{}})}{2}\vartheta_{s,2}^{\lambda}(x^{\tilde{}})-2(\lambda^2(x^{\tilde{}})-\lambda(x^{\tilde{}}))\frac{D^2 g\circ\lambda^{-1})(\lambda(x^{\tilde{}}))}{2}\right|$$

$+sG_s^{\lambda}\left(\left|h(u,x^{\tilde{}})\right|(\lambda(u)-\lambda(x^{\tilde{}}))^2;x^{\tilde{}}\right)$ olur.

Şimdi $\left|h(u,x^{\tilde{}})\right|$'i hesaplayalım. (4.4)'i kullanarak

$$\left|h(u,x^{\tilde{}})\right|=\frac{1}{2}\left\{\frac{g^{"}(\varepsilon)}{\left(\lambda^{'}(\varepsilon)\right)^2}-\frac{g^{"}(x^{\tilde{}})}{\left(\lambda^{'}(x^{\tilde{}})\right)^2}+g^{'}(x)\frac{\lambda^{"}(x^{\tilde{}})}{\left(\lambda^{'}(x^{\tilde{}})\right)^3}-g^{'}(\varepsilon)\frac{\lambda^{"}(\varepsilon)}{\left(\lambda^{'}(\varepsilon)\right)^3}\right\}$$

$$\leq\frac{1}{2}(\psi(u)+\psi(x^{\tilde{}}))\left(2+\frac{\left|\lambda(u)-\lambda(x^{\tilde{}})\right|}{\sigma}\right)\times\left\{\omega_{\lambda}(\frac{g^{"}}{(\lambda^{'})^2},\sigma)+\omega_{\lambda}(\frac{g^{'}\lambda^{"}}{(\lambda^{'})^3},\sigma)\right\} \text{ bulunur.}$$

Ayrıca $\psi(u)+\psi(x^{\tilde{}})\leq\sigma^2+2\lambda^2(x^{\tilde{}})+2\lambda(x^{\tilde{}})\sigma+2$ ifadesinden $\left|\lambda(u)-\lambda(x^{\tilde{}})\right|\leq\sigma$

$$\left|h(u,x)\right| \le \frac{3}{2}\left(\sigma^2 + 2\lambda^2(x) + 2\lambda(x)\sigma + 2\right) \times \left\{ \omega_\lambda(\frac{g^{''}}{(\lambda^{'})^2}, \sigma) + \omega_\lambda(\frac{g^{'}\lambda^{''}}{(\lambda^{'})^3}, \sigma) \right\}$$

ve

$$\psi(u) + \psi(x^{\sim}) \le \left(\frac{\lambda(u) - \lambda(x^{\sim})}{\sigma} \right)^2 \left(\sigma^2 + 2\lambda^2(x^{\sim}) + 2\lambda(x^{\sim})\sigma + 2\right)$$

olduğunda $\left|\lambda(u) - \lambda(x^{\sim})\right| \le \sigma$

$$\left|h(u,x^{\sim})\right| \le \frac{3}{2}\left(\sigma^2 + 2\lambda^2(x^{\sim}) + 2\lambda(x^{\sim})\sigma + 2\right) \frac{\left|\lambda(u) - \lambda(x^{\sim})\right|^3}{\sigma^3}$$

$$\times \left\{ \omega_\lambda(\frac{g^{''}}{(\lambda^{'})^2}, \sigma) + \omega_\lambda(\frac{g^{'}\lambda^{''}}{(\lambda^{'})^3}, \sigma) \right\}$$

elde edilir.

$\sigma < 1$ için

$$\left|h(u,x^{\sim})\right| \le 3\left(\lambda^2(x^{\sim}) + \lambda(x^{\sim}) + 2\right) \left(\frac{\left|\lambda(u) - \lambda(x^{\sim})\right|^3}{\sigma^3} + 1 \right) \times \left\{ \omega_\lambda(\frac{g^{''}}{(\lambda^{'})^2}, \sigma) + \omega_\lambda(\frac{g^{'}\lambda^{''}}{(\lambda^{'})^3}, \sigma) \right\}$$

olur. Buradan Lemma (4.2)‘yi kullanırsak

$$\left| s\left[G_s^\lambda(g; x^{\sim}) - g(x^{\sim}) \right] - (2\lambda(x) + 1) D(g \circ \lambda^{-1})(\lambda(x^{\sim}) - 2(\lambda^2(x^{\sim}) + \lambda(x^{\sim}) \frac{D^2(g \circ \lambda^{-1})(\lambda(x^{\sim}))}{2} \right|$$

$$\leq \left| s\vartheta_{s,1}^{\lambda}(x^{\sim}) - (2\lambda(x^{\sim})+1) \right| D(g\circ\lambda^{-1})(\lambda(x^{\sim}))$$

$$+\left| s\vartheta_{s,2}^{\lambda}(x^{\sim}) - 2\lambda^{2}(x^{\sim}) + \lambda(x^{\sim}) \right| \frac{D^{2}(g\circ\lambda^{-1})(\lambda(x^{\sim}))}{2}$$

$$+3s(2+\lambda(x^{\sim})+\lambda^{2}(x^{\sim}) \left\{ \omega_{\lambda}(\frac{g^{''}}{(\lambda^{'})^{2}},\sigma) + \omega_{\lambda}(\frac{g^{'}\lambda^{''}}{(\lambda^{'})^{3}},\sigma) \right\} \times \vartheta_{s,2}^{\gamma} \left(1+\frac{1}{\sigma^{3}} \sqrt{\frac{\vartheta_{s,4}^{\gamma}(x^{\sim})\vartheta_{s,6}^{\gamma}(x^{\sim})}{\vartheta_{s,2}^{\gamma}(x^{\sim})}} \right)$$

ve $\sigma = \left(\sqrt{\frac{\vartheta_{s,4}^{\lambda}(x^{\sim})\vartheta_{s,6}^{\lambda}(x^{\sim})}{\vartheta_{s,2}^{\lambda}(x^{\sim})}} \right)^{\frac{1}{3}}$ alırsak,

$$\left| s\left[G_{s}^{\lambda}(g;x^{\sim}) - g(x^{\sim}) \right] - (2\lambda(x)+1D(g\circ\lambda^{-1})(\lambda(x^{\sim}) - (\lambda^{2}(x^{\sim}) \right.$$
$$\left. +\lambda(x^{\sim})D^{2}(g\circ\lambda^{-1})(\lambda(x^{\sim})) \right|$$

$$\leq \left| s\vartheta_{s,1}^{\lambda}(x^{\sim}) - (2\lambda(x^{\sim})+1) \right| D(g\circ\lambda^{-1})(\lambda(x^{\sim}))$$

$$+\left| s\vartheta_{s,2}^{\lambda}(x^{\sim}) - 2\lambda^{2}(x^{\sim}) + \lambda(x^{\sim}) \right| \frac{D^{2}(g\circ\lambda^{-1})(\lambda(x^{\sim}))}{2} + 6s(\lambda^{2}(x^{\sim})+\lambda(x^{\sim})+2)\vartheta_{s,2}^{\lambda}$$

(4.7)

$$\times \left\{ \omega_{\lambda}(\frac{g^{''}}{(\lambda^{'})^{2}}, \left(\sqrt{\frac{\vartheta_{s,4}^{\lambda}(x^{\sim})\vartheta_{s,6}^{\lambda}(x^{\sim})}{\vartheta_{s,2}^{\lambda}(x^{\sim})}} \right)^{\frac{1}{3}}) + \omega_{\lambda} \left((\frac{g^{'}\lambda^{''}}{(\lambda^{'})^{3}}, \left(\sqrt{\frac{\vartheta_{s,4}^{\lambda}(x^{\sim})\vartheta_{s,6}^{\lambda}(x^{\sim})}{\vartheta_{s,2}^{\lambda}(x^{\sim})}} \right)^{\frac{1}{3}}) \right) \right\}$$

elde edilir. Böylelikle

$$\vartheta_{s,2}^{\lambda}(x^{\sim}) \leq 2\frac{(s+3)(\lambda(x^{\sim})+1)^{2}}{(s-7)^{2}},$$

$$\vartheta_{s,4}^{\lambda}(x^{\sim}) \leq 42\frac{(s+3)^2(\lambda(x^{\sim})+1)^4}{(s-7)^4},$$

$$\vartheta_{s,6}^{\lambda}(x^{\sim}) \leq 1260\frac{(s+3)^3(\lambda(x^{\sim})+1)^6}{(s-7)^6}$$

olduğu görülebilir. Dolayısıyla

$$\left(\sqrt{\frac{\vartheta_{s,4}^{\lambda}(x^{\sim})\vartheta_{s,6}^{\lambda}(x^{\sim})}{\vartheta_{s,2}^{\lambda}(x^{\sim})}}\right) \leq 163\frac{(s+3)^2(1+\lambda(x^{\sim}))^4}{(s-7)^4} = \sigma_c^{\lambda}(x^{\sim}) \text{ elde edilir.}$$

Yukarıdaki ifadeleri (4.7)'de kullanırsak istenen sonucu buluruz.

Sonuç 4.1

(1) $g^{''} \in C_{\psi}(\mathbb{R}^+)$ için, (Teorem 4.1)'de $\lambda(x^{\sim}) = x^{\sim}$ seçersek klasik Baskakov Durrmeyer operatörleri için quantitative Voronovskaya teoremini şu şekilde elde ederiz:

$$\left|s\left[G_s^{\lambda}(g;x^{\sim}) - g(x^{\sim})\right] - (2(x^{\sim})+1)g^{'}(x^{\sim}) - ((x^{\sim})^2 + x^{\sim})g^{''}(x^{\sim})\right|$$

$$\leq \left|a_s(x^{\sim})\right| g'(x^{\sim}) + \left|b_s(x^{\sim})\right|\frac{g^{''}}{2}$$

$$+12s((x^{\sim})^2 + x^{\sim} + 2)\frac{\left[(s+3)((x^{\sim})^2 + x^{\sim}) + 1\right]}{(s-2)(s-3)}\Omega_2(g^{''};\sigma_s(x^{\sim})),$$

$$a_s(x^{\sim}) := s\frac{2x^{\sim}+1}{s-2} - (2x^{\sim}+1).$$

$$b_s(x^{\sim}) := 2s\frac{(s+3)((x^{\sim})^2+x^{\sim})+1}{(s-2)(s-3)} - 2((x^{\sim})^2+x^{\sim})$$

$$\sigma_s(x^{\sim}) = \left(163\frac{(s+3)^2(1+x^{\sim})^4}{(s-7)^4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

şeklindedir.

(2) $g^{''}/(\lambda^{'})^2, g^{'}\lambda^{''}/(\lambda^{'})^3 \in U_{\psi}(\mathbb{R}^+)$ olmak üzere Voronoskaya teoremini

$\lim_{s\to\infty} s\left[G_s^{\lambda}(g;x^{\sim}) - g(x^{\sim})\right]$

$= (2\lambda(x^{\sim})+1)D(g\circ\lambda^{-1})(\lambda(x^{\sim}) + (\lambda^2(x^{\sim})+\lambda(x^{\sim}))D^2(g\circ\lambda^{-1})(\lambda(x^{\sim}))$.

elde ederiz.

(3) $g^{''}/(\lambda^{'})^2, g^{'}\lambda^{''}/(\lambda^{'})^3 \in U_{\psi}(\mathbb{R}^+)$ olmak üzere (Teorem 4. 1)'de $\lambda(x^{\sim}) = x^{\sim}$ seçersek klasik Baskakov Durrmeyer operatörleri için Voronovskaya teoremini şu şekilde elde ederiz:

$$\lim_{s\to\infty} s\left[G_s^{\lambda}(g;x^{\sim}) - g(x^{\sim})\right] = (2x^{\sim}+1)g^{'}(x^{\sim}) + ((x^{\sim})^2+x^{\sim})g^{''}(x^{\sim})$$

Teorem 4.3 $g, h, \frac{g^{'}\lambda^{''}}{(\lambda^{'})^3}, \frac{h^{'}\lambda^{''}}{(\lambda^{'})^3}, \frac{g^{''}}{(\lambda^{'})^2}, \frac{h^{''}}{(\lambda^{'})^2} \in C_{\psi}(\mathbb{R}^+)$ ve $\frac{(gh)^{'}\lambda^{''}}{(\lambda^{'})^3}, \frac{(gh)^{''}\lambda^{''}}{(\lambda^{'})^2} \in C_{\psi}(\mathbb{R}^+)$ olmak üzere $x^{\sim} \in \mathbb{R}^+$ için

$$s\left|G_s^{\lambda}(gh;x^{\sim}) - G_s^{\lambda}(g;x^{\sim})G_s^{\lambda}(h;x^{\sim}) - \frac{\vartheta_{s,2}^{\lambda}(x^{\sim})}{(\lambda^{'}(x^{\sim}))^2}\left\{g^{'}(x^{\sim})h^{'}(x^{\sim}) - \frac{\lambda^{''}(x^{\sim})(gh)^{'}(x^{\sim})}{\lambda^{'}(x^{\sim})}\right\}\right|$$

$$\leq \left|a_s(x^{\sim})\right| D(g\circ\lambda^{-1})(\lambda(x^{\sim})) + \left|b_s(x^{\sim})\right| \frac{D^2(g\circ\lambda^{-1})(\lambda(x^{\sim}))}{2}$$

$$+12s(2+\lambda(x^{\sim})+\lambda^{2}(x^{\sim}))\frac{\left[(s+3)(\lambda^{2}(x^{\sim})+\lambda(x^{\sim}))+1\right]}{(s-2)(s-3)}$$

$$\times\left\{\omega_{\lambda}\left(\frac{(g)^{''}}{(\lambda^{'})^{2}},\sigma_{s}^{\lambda}(x^{\sim})\right)+\omega_{\lambda}\left(\frac{(g)^{'}}{(\lambda^{'})^{3}},\sigma_{s}^{\lambda}(x^{\sim})\right)\right\}$$

$$+\|g\|_{\psi}\left\{\left|a_{s}(x^{\sim})\right|D(g\circ\lambda^{-1})(\lambda(x^{\sim}))+\left|b_{s}(x^{\sim})\right|\frac{D^{2}(g\circ\lambda^{-1})(\lambda(x^{\sim}))}{2}\right\}$$

$$+12s(\lambda^{2}(x^{\sim})+\lambda(x^{\sim})+2)\frac{\left[(s+3)(\lambda^{2}(x^{\sim})+\lambda(x^{\sim}))+1\right]}{(s-2)(s-3)}$$

$$\times\left\{\omega_{\lambda}\left(\frac{(gh)^{''}}{(\lambda^{'})^{2}},\sigma_{s}^{\lambda}(x^{\sim})\right)+\omega_{\lambda}\left(\frac{(gh)^{'}}{(\lambda^{'})^{3}},\sigma_{s}^{\lambda}(x^{\sim})\right)\right\}$$

$$+\|h\|_{\psi}\left\{\left|a_{s}(x^{\sim})\right|D(g\circ\lambda^{-1})(\lambda(x^{\sim}))+\left|b_{s}(x^{\sim})\right|\frac{D^{2}(g\circ\lambda^{-1})(\lambda(x^{\sim}))}{2}\right\}$$

$$+12s(\lambda^{2}(x^{\sim})+\lambda(x^{\sim})+2)\frac{\left[(s+3)(\lambda^{2}(x^{\sim})+\lambda(x^{\sim}))+1\right]}{(s-2)(s-3)}$$

$$\times\left\{\omega_{\lambda}\left(\frac{(h)^{''}}{(\lambda^{'})^{2}},\sigma_{s}^{\lambda}(x^{\sim})\right)+\omega_{\lambda}\left(\frac{(h)^{'}}{(\lambda^{'})^{3}},\sigma_{s}^{\lambda}(x^{\sim})\right)\right\}\ +sI_{s}(g)I_{s}(g)$$

bulunur. Burada

$$I_{s}(g)=\frac{\psi(x)\left\|(g\circ\lambda^{-1})^{''}\right\|_{\psi}}{2}\left(2\vartheta_{s,2}^{\lambda}(x^{\sim})+\frac{2\lambda(x^{\sim})}{\psi(x^{\sim})}2\vartheta_{s,3}^{\lambda}(x^{\sim})+\frac{1}{\psi(x^{\sim})}\vartheta_{s,4}^{\lambda}(x^{\sim})\right)\text{ ve }\quad I_{s}(h)$$

şeklindedir.

İspat $x^{\sim} \in \mathbb{R}^{+}$ ve $c \in \mathbb{N}$ için,

$$G_s^{\lambda}(gh;x^{\sim}) - G_s^{\lambda}(g;x^{\sim})G_s^{\lambda}(h;x^{\sim}) - \vartheta_{s,2}^{\lambda}(x^{\sim})\frac{g^{'}(x^{\sim})h^{'}(x^{\sim})}{(\lambda^{'}(x^{\sim}))^2}$$

$$-\vartheta_{s,2}^{\lambda}(x^{\sim})\frac{h(x)g^{'}(x^{\sim})\lambda^{''}(x^{\sim})}{(\lambda^{'}(x^{\sim}))^3} - \vartheta_{s,2}^{\gamma}(x^{\sim})\frac{h^{'}(x^{\sim})g(x^{\sim})\lambda^{''}(x^{\sim})}{(\lambda^{'}(x^{\sim}))^3}$$

$$= G_s^{\lambda}(gh;x^{\sim}) - g(x^{\sim})h(x^{\sim}) - \frac{\vartheta_{s,2}^{\lambda}(x^{\sim})}{2}(gh\circ\lambda^{-1})^{''}(\lambda(x^{\sim}))$$

$$-g(x^{\sim})\left[G_s^{\lambda}(h;x^{\sim}) - h(x^{\sim}) - \frac{\vartheta_{s,2}^{\lambda}(x^{\sim})}{2}(h\circ\lambda^{-1})^{''}(\lambda(x^{\sim}))\right]$$

$$-h(x^{\sim})\left[G_s^{\lambda}(g;x^{\sim}) - g(x^{\sim}) - \frac{\vartheta_{s,2}^{\lambda}(x^{\sim})}{2}(g\circ\lambda^{-1})^{''}(\lambda(x^{\sim}))\right]$$

$$+(h(x^{\sim}) - G_s^{\lambda}(h;x^{\sim}))(G_s^{\lambda}(g;x^{\sim}) - g(x^{\sim}))$$

yazılabilir. Burada (4.2.2)'den ;

$$\left|G_s^{\lambda}(gh;x^{\sim}) - G_s^{\lambda}(g;x^{\sim})G_s^{\lambda}(h;x^{\sim}) - \frac{\vartheta_{s,2}^{\lambda}(x^{\sim})}{(\lambda^{'}(x^{\sim}))^2}\left\{h^{'}(x^{\sim})g^{'}(x^{\sim}) - \frac{\lambda^{''}(x^{\sim})(gh)(x^{\sim})}{(\lambda^{'}(x^{\sim}))}\right\}\right|$$

$$\leq |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|$$

ifadesi elde edilir. Burada Teorem (4.1) göz önüne alınırsa

$$|A_1| \leq \left|a_s(\tilde{x})\right| D(g \circ \lambda^{-1})(\lambda(\tilde{x})) + \left|b_s(\tilde{x})\right| \frac{D^2(g \circ \lambda^{-1})(\lambda(\tilde{x}))}{2}$$

$$+12s(2+\lambda(\tilde{x})+\lambda^2(\tilde{x}))\frac{\left[(s+3)(\lambda^2(\tilde{x})+\lambda(\tilde{x}))+1\right]}{(s-2)(s-3)}$$

$$\times\left\{\omega_\lambda\left(\frac{(gh)^{''}}{(\lambda^{'})^2},\sigma_s^\lambda(\tilde{x})\right)+\left(\varpi_\lambda\frac{(gh)^{'}\lambda^{''}}{(\lambda^{'})^3},\sigma_s^\lambda(\tilde{x})\right)\right\}$$

$$|A_2| \leq \|g\|_\psi \left\{\left|a_s(\tilde{x})\right| D(g \circ \lambda^{-1})(\lambda(\tilde{x})) + \left|b_s(\tilde{x})\right| \frac{D^2(g \circ \lambda^{-1})(\lambda(\tilde{x}))}{2}\right.$$

$$+12s(2+\lambda(\tilde{x})+\lambda^2(\tilde{x}))\frac{\left[(s+3)(\lambda^2(\tilde{x})+\lambda(\tilde{x}))+1\right]}{(s-2)(s-3)}$$

$$\left.\times\left\{\omega_\lambda\left(\frac{(h)^{''}}{(\lambda^{'})^2},\sigma_s^\lambda(\tilde{x})\right)+\omega_\lambda\left(\frac{(h)^{'}\lambda^{''}}{(\lambda^{'})^3},\sigma_s^\lambda(\tilde{x})\right)\right\}\right\}$$

$$|A_3| \leq \|h\|_\psi \left\{\left|a_s(\tilde{x})\right| D(g \circ \lambda^{-1})(\lambda(\tilde{x})) + \left|b_s(\tilde{x})\right| \frac{D^2(g \circ \lambda^{-1})(\lambda(\tilde{x}))}{2}\right.$$

$$+12s(2+\lambda(\tilde{x})+\lambda^2(\tilde{x}))\frac{\left[(s+3)(\lambda^2(\tilde{x})+\lambda(\tilde{x}))+1\right]}{(s-2)(s-3)}$$

$$\left.\times\left\{\omega_\lambda\left(\frac{(g)^{''}}{(\lambda^{'})^2},\sigma_s^\lambda(\tilde{x})\right)+\omega_\lambda\left(\frac{(g)^{'}\lambda^{''}}{(\lambda^{'})^3},\sigma_s^\lambda(\tilde{x})\right)\right\}\right\}$$

olur. Ayrıca;

$$G_s^{\lambda}(g;x^{\sim})-g(x^{\sim})=(g\circ\lambda^{-1})(\lambda(x^{\sim})\vartheta_{s,1}^{\lambda}(x^{\sim})+\frac{1}{2}G_s^{\lambda}\left((g\circ\lambda^{-1})^{"}(\lambda(\varepsilon))(\lambda(u)-\lambda(x^{\sim}))^2;x^{\sim}\right)$$

olur.

Eğer; $u<\varepsilon<x^{\sim}$ için $1+\lambda^2(\varepsilon)\leq 1+\lambda^2(x^{\sim})$ ise

$$\left|G_s^{\lambda}(g;x^{\sim})-g(x^{\sim})\right|\leq\frac{1}{2}G_s^{\lambda}\left(\left|(g\circ\lambda^{-1})^{"}(\varepsilon)\right|(\lambda(u)-\lambda(x^{\sim}))^2;x^{\sim}\right)$$

$$\leq\left\|(g\circ\lambda^{-1})^{"}\right\|_{\psi}\frac{1}{2}G_s^{\lambda}\left((1+\lambda^2(\varepsilon))(\lambda(u)-\lambda(x^{\sim}))^2;x^{\sim}\right)$$

olur. Buradan

$$\left|G_s^{\lambda}(g;x^{\sim})-g(x^{\sim})\right|\leq\frac{\left\|(g\circ\lambda^{-1})^{"}\right\|_{\psi}\psi(x^{\sim})}{2}\vartheta_{s,2}^{\lambda}(x^{\sim})$$

yazılır.

Eğer $x^{\sim}<\varepsilon<u$ için $1+\lambda^2(\varepsilon)\leq 1+\lambda^2(u)$ ise

$$\left|G_s^{\lambda}(g;x^{\sim})-g(x^{\sim})\right|\leq\frac{\left\|(g\circ\lambda^{-1})^{"}\right\|_{\psi}}{2}G_s^{\lambda}\left((1+\lambda^2(u))(\lambda(u)-\lambda(x^{\sim}))^2;x^{\sim}\right)$$

$$=\frac{\left\|(g\circ\lambda^{-1})^{"}\right\|_{\psi}}{2}\left((1+\lambda^2(u))\vartheta_{s,2}^{\lambda}(x^{\sim})+2\lambda(x^{\sim})\vartheta_{s,3}^{\lambda}(x^{\sim})+\vartheta_{s,4}^{\lambda}(x^{\sim})\right)$$

yazılır. Böylece yukarıdaki iki durum için de

$$\left|G_s^{\lambda}(g;x^{\tilde{}})-g(x^{\tilde{}})\right|\leq\frac{\left\|(g\circ\lambda^{-1})^{"}\right\|_{\psi}\psi(x^{\tilde{}})}{2}\left\{2\vartheta_{s,2}^{\lambda}(x^{\tilde{}})+\frac{2\lambda(x^{\tilde{}})}{\psi(x^{\tilde{}})}\vartheta_{s,3}^{\lambda}(x^{\tilde{}})+\frac{1}{\psi(x^{\tilde{}})}\vartheta_{s,4}^{\lambda}(x^{\tilde{}})\right\}$$

elde edilir.

Sonuç 4.2

(1) $(gh)^{"}\in C_{\psi}(\mathbb{R}^{+})$ için $g,h,g^{"},h^{"}\in C_{\psi}(\mathbb{R}^{+})$ olmak üzere eğer Teorem 4.2'de $\lambda(x^{\tilde{}})=x^{\tilde{}}$ seçersek, klasik Baskakov Durrmeyer operatörleri için Grüss tipli Voronovskaya teoremini

$$s\left|G_s^{\lambda}(gh;x^{\tilde{}})-G_s^{\lambda}(g;x^{\tilde{}})G_s^{\lambda}(h;x^{\tilde{}})-2\frac{(s+3)((x^{\tilde{}})^2+x^{\tilde{}}+1)}{(s-2)(s-3)}g^{'}(x^{\tilde{}})h^{'}(x^{\tilde{}})\right|$$

$$\leq\left|a_s(x^{\tilde{}})\right|g^{'}(x^{\tilde{}})+\left|b_s(x^{\tilde{}})\right|\frac{g^{"}(x^{\tilde{}})}{2}$$

$$+12s((x^{\tilde{}})^2+x^{\tilde{}}+2)\frac{\left[(s+3)((x^{\tilde{}})^2+x^{\tilde{}}+1)\right]}{(s-2)(s-3)}\Omega_2((gh)^{"};\sigma_s(x^{\tilde{}}))$$

$$+\left\|g\right\|_{\psi}\left\{\left|a_s(x^{\tilde{}})\right|g^{'}(x^{\tilde{}})+\left|b_s(x^{\tilde{}})\right|g^{"}(x^{\tilde{}})\right\}$$

$$+12s((x^{\tilde{}})^2+x^{\tilde{}}+2)\frac{\left[(s+3)((x^{\tilde{}})^2+x^{\tilde{}}+1)\right]}{(s-2)(s-3)}\Omega_2(h^{"};\sigma_s(x^{\tilde{}}))$$

$$+\left\|h\right\|_{\psi}\left\{\left|a_s(x^{\tilde{}})\right|g^{'}(x^{\tilde{}})+\left|b_s(x^{\tilde{}})\right|g^{"}(x^{\tilde{}})\right\}$$

$$+12s((x^{\sim})^2+x^{\sim}+2)\frac{\left[(s+3)((x^{\sim})^2+x^{\sim}+1)\right]}{(s-2)(s-3)}\Omega_2(g^{''};\sigma_s(x^{\sim}))$$

$$+sI_s(g)I_s(h),$$

elde ederiz. Burada

$$\sigma_s(x^{\sim})=\left(163\frac{(s+3)^2(1+x^{\sim})^4}{(s-7)^4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

şeklindedir.

(2) $(gh)^{''}\in U_{\psi}(\mathbb{R}^+)$ için $g,h,g^{''},h^{''}\in U_{\psi}(\mathbb{R}^+)$ olmak üzere G_s^{λ} için Grüss tipli Voronovskaya teoremini

$$\lim_{s\to\infty}s\left[G_s^{\lambda}(gh;x^{\sim})-G_s^{\lambda}(g;x^{\sim})G_s^{\lambda}(h;x^{\sim})\right]$$

$$=\frac{2(\lambda^2(x^{\sim})+\lambda(x^{\sim}))}{\left(\lambda^{'}(x^{\sim})\right)^2}\left\{g^{'}(x^{\sim})h^{'}(x^{\sim})-\frac{\lambda^{''}(x^{\sim})(gh)^{'}(x^{\sim})}{\lambda^{'}(x^{\sim})}\right\}$$

elde ederiz.

(3) $(gh)^{''}\in U_{\psi}(\mathbb{R}^+)$ için $g,h,g^{''},h^{''}\in U_{\psi}(\mathbb{R}^+)$ olmak üzere eğer Teorem 4.2'de $\lambda(x^{\sim})=x^{\sim}$ seçersek, klasik Baskakov Durrmeyer operatörleri için Grüss tipli Voronovskaya teoremini

$\lim_{s\to\infty}s\left[G_s^{\lambda}(gh;x^{\sim})-G_s^{\lambda}(g;x^{\sim})G_s^{\lambda}(h;x^{\sim})\right]=2((x^{\sim})^2+x^{\sim})g^{'}(x^{\sim})h^{'}(x^{\sim})$ buluruz.

KAYNAKLAR

Agrawal, P. N. and Thamer, K. J. 1998. Approximation of unbounded functions by a new sequence of linear positive operators. Journal of mathematical analysis and applications., 225: 660-672.

Anastassiou, G. A. and Gal, S.G. 2000. Approximation Theory, Moduli of Continuity and Global Smoothness Preservation, Birkhäuser, Boston.

Baskakov, V. A. 1957. An instance of a sequence of linear positive operators in the space of continuous functions. Doklady Akademii Nauk SSSR., 113: 249-251.

Bayraktar, M. 2017. Fonksiyonel Analiz, Korza Yayıncılık, Ankara.

Bernstein, S. N. 1912. Démonstration du théorem de Weierstrass fondée sur le calculu des probabilités. Communications of the Kharkov Mathematical Society, 13: 1-2.

Bohman, H. 1952. On approximation of continuous and of analytic functions, Ark. Mat., 2, 43-56.

Cárdenas-Morales, D. Garrancho P 2011. Ra¸sa I. Bernstein-type operators which preserve polynomials. Comput Math Appl. 62(1):158-163.

Ditzian, Z. and Totik, V. 1987. Moduli of Smoothness, Springer-Verlag, New York.

Gadjiev, A.D. 1974. A problem on the convergence of a sequence of positive line-ar operators on unbounded sets and theorems that are analogous to P. P. Korovkins theorem (Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR 218:1001-1004.

Gadjiev, A. D. 1976. Theorems of the type of P. P. Korovkins theorems Mat Zametki, 20:5, 781-786.

Hacısalihoğlu, H. H. ve Hacıyev, A. D. 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı, A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara

Hacıyev, A. ve Hacısalihoglu, H. H. 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı, 1-71 p. Ankara.

Holhos, A. 2008. Quantitative estimates for positive linear operators in weighted space. General Math.. 16-4:99-110.

Korovkin, P. P. 1953. O convergence of linear positive operators in the space of continuous functions, Dokl. Akad. Nauk SSSR 90, 961-964.

Lorentz, G. G. 1953. Bernstein Polynomials, University of Toronto Press, Toronto.

Maddox, I. J. 1970. Elements of Functional Analysis, Cambridge University press, Cambridge

Mirakyan, G. M. 1941. Approximation of continuous functions with the aid of polynomials (Russian). Doklady Akademii Nauk SSSR, 31, 201-205.

Popoviciu, T. 1998. Asupra demonstra¸tiei teoremei lui Weierstrass cu ajutorul polinoamelor de interpolare, Lucrarile Ses. Gen. ¸St. Acad. Romane din 1-4, 1950, translated into English by D. Kacsó, On the proof of Weierstrass' theorem using interpolation polynomials, East J. Approx., 4:107-110.

Popoviciu, T. 1935. Sur I'approximation des funcionsconvexes D'ordre superiour Mathematica (Cluj) , 10: 49-54.

Stancu, D. and D. Agratini, O. Gh. Coman and R. Trâmbi¸ta¸s, 2001. Analiza Numericaşi Teoria Aproximarii, vol. I, Cluj-Napoca: Presa Universitara Clujeana,

Szász, O. 1950. Generalization of S. Bernstein's polynomials to the in_nite interval. Journal of Research of the National Bureau of Standards, 4: 239-245.

Ulusoy Ada, G. 2012. Durrmeyer Tipli Operatörlerin Yakınsaklık Özellikleri. Yüksek Lisans Tezi, Kırıkkale Üniversitesi. 84 sayfa, Kırıkkale.

Weierstrass, K. 1885. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen. Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 2: 633-639.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı ve Soyadı : Esma ŞÖHRET

Eğitim

Yüksek Lisans	Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı	2019-Halen
Lisans	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü	2010-2014

İş Deneyimi

Yıl	**Kurum**	**Görev**
2018-2021	Çankırı Bahçeşehir Koleji	Matematik öğretmeni