T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SCHRÖDINGER PSEUDO-PARABOLİK KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SONLU FARK ŞEMASI METODUYLA YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

Sevgi KUŞULAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2022

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
ŞEKİLLER DİZİNİ iv
ÇİZELGELER DİZİNİ v
1. GİRİŞ 1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR 7
3. MATERYAL ve YÖNTEM 10
3.1. Çift Laplace dönüşümü İle ilgili ön hazırlıklar 10
3.1.1. Modifiye çift Laplace ayrışma metodu 11
3.1.2. Schrödinger diferansiyel denklemi ve kararlılığı 17
3.1.3. Schrödinger problemi için fark şeması 20
3.1.4. Fark şeması için kararlılık 21
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA 24
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER 32
KAYNAKLAR 33
ÖZGEÇMİŞ 35

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SCHRÖDINGER PSEUDO-PARABOLİK KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SONLU FARK ŞEMASI METODUYLA YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

Sevgi KUŞULAY

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Mahmut MODANLI
Yıl: 2022, sayfa: 35

Bu çalışmada, Schrödınger pseudo-parabolik kısmi diferansiyel denkleminin tam ve yaklaşık çözümü için problemler incelenmiştir. Schrödınger pseudo-parabolik kismi diferansiyel denkleminin abstract formu için kararlılık kestirimleri gösterilmiştir. Schrödınger probleminin birinci mertebeden doğruluk fark şemaları oluşturulmuştur. Oluşturulan bu fark şemaları için kararlılık kestirimleri verilmiştir. Modifiye Çift Laplace ayrışma metodu kullanılarak Schrödinger pseudo-parabolik kısmi diferansiyel denklem problemlerinin tam çözümüne ulaşılmıştır. Hata sonlu fark şeması metodu uygulanarak Schrödınger denklemlerin nümerik çözümleri için örnek problemler test edilmiştir. Matlab programı kullanılarak başlangıç değer problemleri için nümerik çözümler elde edildi. Elde edilen tam çözümler ile yaklaşık çözümler karşılaştırılarak hata analizi yapılmıştır. Hata analizi tablosundaki nümerik sonuçlar verilen bu metodun doğruluğu ve etkisi açısından uygun sonuçlar verdiğini göstermiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Schrödinger pseudo-parabolik denklem, Kararlılık, Sonlu fark şeması, Modifiye çift laplace ayrışma metodu, Von- Neumann analiz metodu

ABSTRACT

MSc Thesis

SCHRÖDINGER PSEUDO-PARABOLİK KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SONLU FARK ŞEMASI METODUYLA YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

Sevgi KUŞULAY

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Mahmut MODANLI
Year: 2022, page: 35

In this work, the initial-baundary value problems for one-dimensional linear time- dependent Schrödinger parabolic and pseudo-parabolic partial differantial equations are studied. The modified double Laplace decomposition method is applied to get the semi-analytic solutions and explicit finite difference method to get the approximate solutions of the problems.The firstst accurate difference schemes are constructed for the Schrödinger problem. Numerical solutions were obtained using the Matlab program for examples of the initial boundry value problems. The Von-Neumann stability analysis of the presented problems is also investigated.

KEYWORDS: Schrödinger partial differential equation, modified double Laplace decomposition method, explicit finite difference scheme, stability, Von-Neumann analysis stability

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımız boyunca desteklerini esirgemeyen, engin bilgileriyle beni bilgilendiren çok kıymetli ve saygıdeğer hocam Doç. Dr. Mahmut MODANLI'ya teşekkür ederim.

Son olarak bana her koşulda ve her durumda destek olan aileme de çok teşekkür ederim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 4.1. Örnek 3.1. in tam çözüm grafiğini verir. 29
Şekil 4.2. Örnek 3.1. in $N = 100, M = 100, \lambda = 5$ noktasındaki yaklaşık çözüm grafiğini verir. 30
Şekil 4.3. Örnek 3.2. için $N = 70$ and $M = 90$ noktasındaki yaklaşık çözüm grafiğini verir. 30
Şekil 4.4. Örnek 3.2. in tam çözüm grafiğini verir. 30
Şekil 4.5. Örnek 3.3. için $N = 120$ ve $M = 108$ noktasındaki yaklaşık çözüm grafiğini verir.....31
Şekil 4.6. Örnek 3.3. in tam çözüm grafiğini verir. 31

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

Çizelge 4.1. $0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1$ değerleri için hesaplanmıştır. 28
Çizelge 4.2. $0 \leq t \leq \pi$ değerleri için hesaplanmıştır. 29
Çizelge 4.3. $0 \leq x \leq 1$ değerleri için hesaplanmıştır. 29

1. GİRİŞ

Matematik, fizik, mühendislik, astronomi, ekonomi ve istatikteki en önemli konulardan biri doğrusal ve doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler konusudur. Kısmi diferansiyel denklemler doğa bilimleri ve mühendislik, ekonomi problemlerinin matematiksel modellemelerinde kullanılır. Bu tür denklemlerin araştırılması kısmi diferansiyel denklemler alanına girer (Upton, 2004). Bununla birlikte bu tür denklemleri çözmek için genel bir yöntem yoktur. Bu denklemleri çözmek için çeşitli analtik ve sayısal yöntemler sunulmuştur. Örneğin; bunlarla sınırlı olmamak üzere, pertürbasyon yöntemi, homotopi pertürbasyon yöntemi, Adomian ayrışma yöntemi, modifiye ayrışma yöntemi, çift Laplace ayrışma yöntemi ve diğerleri. Bu yöntemler arasında Modifiye Çift Laplace ayrışma metodu (MDLDM), çift Laplace dönüşümü ve Adomian ayrışma yöntemini birleştiren ayrışma yöntemi bu çalışmada kullanılacaktır.

Parabolik kısmi diferansiyel denklemler (PKDD'ler) uygulamalı matematiğin çeşitli alanlarında, örneğin; ısı difüzyon denkleminde ve akışkanlar mekaniğinde yer alır (Eltayeb,Hassan ve ark.,2021). Pseudo parabolik kısmi diferansiyel denklemler (PPPDE'ler), difüzyon, ısı iletimi, termoelektrik, kimya mühendisliği, yeraltı su akışı, popülasyon dinamiği ve plazma fiziği gibi çeşitli fenomenlerin modellenmesinde ortaya çıkar (Huntul,M.J.,2021). Schrödınger kısmi diferansiyel denklemi sadece oldukça basit modeller için analitik olarak çözülebilir.

"Kuantum fiziğinde ünlü zamana bağlı tek boyutlu lineer Schrödinger kısmi diferansiyel denklemi (SPDE) olarak bilinir,

$$i\zeta u_t(t,x) = -\frac{\zeta}{2m} u_{xx}(t,x) + f(t,x)\, u(t,x),$$

burada $i = \sqrt{-1}$ imajiner sayı, ζ Planck's sabiti, $u(t,x)$ ve $f(t,x)$ sırasıyla dalga fonksiyonunu ve potansiyel fonksiyonu temsil eder.Feynman ve Hıbbs tarafından Gauss olasılık dağılımı dikkate alınarak yol integrali yaklaşımı kullanılarak yeniden formüle edilmiştir "(Feynman ve ark.,2010).

Bu tezde kullanılan bazı yöntem, özellik ve kümeleri tanımlayalım. Bir denklemin

diferansiyel denklem olabilmesi için bilinmeyen fonksiyonu ve bu fonksiyonun türevlerini içermesi gerektiği bilinmektedir. Dİferansiyel denklem tek bağımsız değişken bulunduruyorsa adi diferansiyel denklem (ADD) iki veya daha fazla bağımsız değişken bulunduruyorsa kısmi diferansiyel denklem (KDD) olduğu bilinmektedir. Diferansiyel denklemler genel ve özel olak üzere iki çözüme sahiptir. Bu şekildeki bir diferansiyel denklemin bütün çözümlerini içeren çözüm genel çözüm olarak adlandırılır, özel çözüm ise bir diferansiyel denkeleminin herhangi bir çözümdür. t ve s bağımsız değişkenlerinin fonksiyonu olan bir u değişkeni için ikinci mertebeden bir lineer kısmi diferansiyel denklem genel olarak aşağıdaki formda tanımlanır.

$$Au_{tt}(t,s)+Bu_{ts}(t,s)+Cu_{ss}(t,s)+Du_t(t,s)+Eu_s(t,s)+Fu(t,s)=a(t,s), \quad (1.1)$$

bu denklemde $a(t,s) = 0$ ise, (1.1) denklemi homojen kısmi diferansiyel denklem, $a(t,s) \neq 0$ ise, homojen olmayan kısmi diferansiyel denklemi olarak adlandırılır.
$K = B^2 - 4AC$
formülü kullanılarak, bu (1.1) kısmi diferansiyel denklemi aşağıdaki şekillde sınıflanabilir:

• $K > 0$ ise Hiperbolik,
• $K = 0$ ise Parabolik,
• $K < 0$ ise Eliptik.

Diferansiyel denklemlerde sınır şartları(sınır değer problemi) ile başlangıç koşulları(başlangıç değer problemi) olarak adlandırılan şartlarımız vardır. “Bağımsız değişkenin aynı değerinde verilen bilinmeyen fonksiyon ve türevleri üzerindeki bağlı koşulları ile bir diferansiyel denklem, başlangıç problemidir ve bu matematiksel denklemlerin verilen kümesi veya fiziksel sistem kapsayan birtakım başlangıç koşullarıdır”(Eriksson et al. 1996). “Eğer bağlı koşulları bağımsız değişkenin birden fazla değerinde verilmiş ise,problem bir sınır değer problemidir ve şartlar sınır şartlarıdır”(Morse ve ark.,1953).

Kısmi diferansiyel denklemler çeşitli tipte verilen sınır şartlarıyla birlikte verilir. Genel olarak bilinen üç tip sınır şartı vardır ve bunlar Dirichlet sınır şartları, Neumann sınır şartları ve Cauchy sınır şartlarıdır. Sınır ve başlangıç şartlarını açıklayan ikinci dereceden hiperbolik türden olan kısmi diferansiyel denklem aşağıdaki gibi verilen

dalga denklemine bakalım.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 2\sin(x)e^{-t}, 0 < t < 1, 0 < x < \pi, \\ u(x,0) = \sin(x), u_t(x,0) = -\sin(x), 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, 0 \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{1.2}$$

Yukarıdaki problemde $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, sınır değer şartları olarak adlandırılır ve $u(x,0) = \sin(x)$ ve $u_t(x,0) = -\sin(x)$, başlangıç değer koşullarıdır ve yukarıdaki problem başlangıç değer problemidir.

Tanım 1.1. "*Sonlu Fark Yöntemi: Sonlu farklar, diferansiyel denklemleri türev yardımıyla fark denklemlerine dönüştürerek yaklaşık olarak çözmek için kullanılan sayısal yöntemlerdir. Sonlu farklar* $f(x-b) - f(x-a)$*'nın bir matematiksel ifadesidir. Bir sonlu fark* $b-a$ *ile bölündüğünde fark katsayısı bulunur. Türevlerin sonlu farklar ile yakınlaştırılması diferansiyel denklemlerin özellikle de sınır-değer problemlerinin sayısal çözümü için sonlu fark yönteminde önemli bir rol oynamaktadır. Black Taylor tarafından 1715'te sonlu farklılıklar ortaya çıkmış ve George Boole (1860), LM Milne-Thomson (1933) ve Károly Jordan (1939) tarafından yapılan çalışmalarda soyut kendi kendine duran matematiksel nesneler olarak incelenmiştir . Sonlu farklılıkların biçimsel hesabı, sonsuz küçüklerin hesabına bir alternatif olarak görülebilir (Thomson ve Melville, 2000). İleri, geri ve merkezi sonlu farklar olmak üzere yaygın olarak üç tür sonlu fark yaklaşımı vardır. h bir değişken veya sabit olmak üzere;* • *İleri fark formu şu şekilde gösterilir:*

$$\Delta_h[f](x) = f(x+h) - f(x)$$

• *Geri yönde farkta, fonksiyon değerleri olarak x + h yerine x, x yerine ise x - h kullanılır:*

$$\nabla_h[f](x) = f(x) - f(x-h)$$

• *Merkezi fark ise*

$$\delta_h[f](x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

şeklindedir "(Thomson ve Melville, 2000).

Tanım 1.2. "*(Von-Neumann Analizi Metodu) Von-Neumann analizi sonlu fark şemalarının kararlılığını doğrulamak için kullanılır. Von Neumann stabilite analizi,*

sayısal yaklaşımların sayısal hatalarının Fourier serilerine ayrışmasına dayanır.

$$Un^k = r^k e^{in\theta}$$

şeklinde gösterilebilir"(Balsara, 1995).

Tanım 1.3. *"Eğer $\|\cdot\|$ bir X vektör uzayında norm ise*

- $\|x\| = 0$ *ise* $x = 0$,
- $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$, a *skalerler için,*
- $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$, $\forall a, b$ *ve* $c \in X$ *(üçgen eşitsizliği)*

şartları sağlanır. Norm uzaklık fonksiyonunu

$$d(a, b) = \|a - b\|$$

olarak tanımlarsa X metrik uzay normlu bir vektör uzayıdır"(Yanovsky,2005).

Tanım 1.4. *"Bir karmaşık değerli $f(x)$ fonksiyonu eğer*

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx < \infty$$

sınırlı L^2 normuna sahipse $[-\pi, \pi]$ aralığı üzerinde kare integrallenebilirdir denir"(Olver,2014).

Tanım 1.5. *"Bir problem eğer, bir çözüme sahip ve bu çözüm tek (varlık ve teklik) ve verilen kararlığın sınır veya başlangıç koşullarına bağlı çözümü sürekli ise bu probleme iyi tanımlı bir problem, bu kriterlere uymayan problemler ise iyi tanımlı olmayan bir problemlerdir denir"(Sizinov,2011).*

Tanım1.6. *"$t \geq 0$, $\forall t \in R$ için bir $f(t)$ fonksiyonun Laplace dönüşümü*

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \, e^{-st} dt$$

olarak tanımlanır.$L\{f(t)\}$ veya $F(t)$ ile gösterilir. Burada $a, b \in R$ için $s = a + bi$ dır. Laplace dönüşümü bir lineerlik özelliğe sahiptir"(Abramowitz ve Stegun,1965).

Tanım 1.7. *"Gauss eliminasyonu, $AX = B$ formunun matrisini çözen bir metottur. Eğer A ters çevrilebilen bir matris ise, o zaman Gauss eliminasyon yöntemi uygulanabilir, aksi halde uygulanamaz"(Grcar,2011).*

Tanım 1.8. " *Değişkenlerin ayrılması kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için her bir değişkeni $x, t, ...$ gibi bir değişkenli bir fonksiyona ayıran ve onları $f(x, t, ...)$ gibi temel diferansiyel denklemin içine sokan bir yöntemdir. Değişkenlerin ayrıklaştırılması, her bir değişkeni, mevcut yöntemleri kullanarak çözüm elde edebilen $f(x, t, ...) = X(x)T(t)$ ....*, gibi bir değişken fonksiyona ayırmak suretiyle uygulanabilir" (Haberman, 1983).

Tanım 1.9. "Eğer bir kompleks değerli $\langle ., . \rangle : H \times H \to C$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, H kompleks lineer uzayı bir iç çarpım uzayı olarak adlandırılır.

$i)$ $\langle x, x \rangle \geq 0$ ve $\langle x, x \rangle > 0 \Longleftrightarrow x = 0$,

$ii)$ Her $x, y \in H$ için $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,

$iii)$ Her $x, y \in H$ ve $\alpha \in C$ için $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

$iv)$ Her $x, y, z \in H$ $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

$\langle x, y \rangle$ fonksiyonuna x ve y. değerlerinin iç çarpımı denir. Bir tam iç çarpım uzayına bir Hilbert uzayı denir. H üzerinde bir iç çarpım uzayı H Hilbert uzayı üzerinde $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ formülüyle bir norm tanımlar. İç çarpım uzayları bir normlu uzay olmakla beraber Hilbert uzayları da Banach uzaylarıdır." (GERÇEK,2006).
Bu tezin içeriği ile ilgili kısa bir açıklama yapalım.Aşağıdaki şekilde oluşturulmuş beş bölüm vardır. Birinci bölümde, bazı yöntem, özellik ve tanımlar verilmektedir. İkinci bölüm, Schrödinger pseudo parabolik kısmi diferansiyel denklemlerlerle ilgili yapılan çalışmalara ve özelliklere yer verilmektedir. Üçüncü bölüm, iki bölümden oluşmakta olup, tam çözümü bulmak için çift Laplaca metodu verilip, fark şemalarının çözümü için kararlılık gösterimleri elde edilir. Dördüncü bölüm bu çalışmanın sonucudur.Schrödinger pseudo parabolik kısmi diferansiyel denklemleri için fark şemaları oluşturulmuştur.Sayısal çözümler ile elde ettiğimiz tam çözümler karşalaştırılmıştır.Sonuçların bulunduğu hata analizi tablosundan karşılaştırma

yapılmıştır. Son bölüm ise tezin tartışma ve sonuç kısmıdır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Pseudo parabolik denklemler çeşitli fiziksel süreçleri modeller. Birleştirilmiş pseudo parabolik denklemleri çözmek için değiştirilmiş bir çift Laplace ayrışma yöntemi kullandı. Pseudo parabolik kısmi diferansiyel denklemleri varlığı ve benzersizliği birçok araştırmacı tarafından araştırılmıştır. Bu tür problemleri çözmek için çeşitli analtik yaklaşım yöntemleri yapılandırılmıştır. Örneğin; Modifiye çift Laplace ayrışma metodu tek boyutlu Pseudo parabolik kısmi diferansiyel denklemini başlangıç koşullarıyla çözmek için Gadain tarafından kullanılmıştır (Gadain ve ark. 2018). İlhan ve diğ. değiştirilmiş üstel fonksiyon yöntemini kullanarak doğrusal olmayan Pseudo parabolik kısmi diferansiyel denklemlere bir gezici dalga çözümleri ailesi oluşturdu (İhan ve ark., 2019). Birleştirilmiş bir Pseudo parabolik kısmi diferansiyel denklemi çözmek için He polinomları ile varyasyonel yineleme yöntemi kullanılmıştır (Nadeema ve ark.,2019). Gecikmeli doğrusal Pseudo parabolik kısmi diferansiyel denklemlerin üç katmanlı sonlu fark şeması Amirali ve Gbil tarafından ele alınmıştır (Amirali ve ark.,2021). Yang,üç uzamsal boyutta Pseudo parabolik kısmi diferansiyel denklemlerin sonlu hacim alanı yaklaşımını incelemiştir. Uzayda spektral ayrıklıştarma kullanarak başlangıç ve Dirichlet sınır koşullarına sahip doğrusal olmayan bir Pseudo parabolik kısmi diferansiyel denklem üzerinde çalışmışlardır (Abreu ve ark.,2020). Üçüncü dereceden bir Pseudo parabolik kısmi diferansiyel denklemi için ters başlangıç Neumann sınır değer problemi, CB-spline sıralama yöntemi kullanılarak çözüldü (Huntul ve ark.,2021).Fark şemasının kısmi diferansiyel denklemler için önemi oldukça büyüktür.“Kararlılığı analiz etmek için uygun bir modele benzer şekilde, sınırsız bir operatörle herhangi bir koşula bağlı olmayan mutlak değerce kararlı ve tutarlı bir fark şeması sağlanır”(Ashyralyev ve ark., 2013). Karışık sınır değer koşuluyla pseudo -parabolik başlangıç sınır değer probleminin bilinen açık bir çözümü çalışıldı.Bununla beraber, Difüzyon denkleminin nümerik çözümü için sonlu fark şeması yöntemi kullanılarak analitik çözüm ile karşılaştırıldı (Khader, 2011). Son zamanlarda, pseudo-parabolik diferansiyel denklemlerin sonlu fark yöntemiyle yaklaşık çözümleri hakkında pek çok çalışma yapılmıştır (Okçu ve Amiraliyev, 2013 ;Amirali ve ark., 2014;Leonaviciene ve ark., 2016). Diğer bir çalışmada, eliptik bir operatörün sınır değer probleminin çözünü elde etmek için pseudo-parabolik bir

denklem uygulandı . (Bangan ve ark.,2019) da

$$\begin{cases} D_t^a u - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}(x\frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{1}{x}\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}(x\frac{\partial u}{\partial x}) = f(x,t), \\ D_t^a u - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}(x\frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{1}{x}\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}(x\frac{\partial u}{\partial x}) = f(x,t), \end{cases}$$

probleminin analitik çözümü Modifiye Çift Laplace Ayırıştırma Metodunu kullanarak bulundu. (Jachimavičienė,J., ve ark.,2014) de

$$\begin{cases} u_t = \eta u_{txx} + u_{xx} + f(t,x), x \in (0,X), 0 < t \leq T, \\ u(0,t) = \gamma_0 \int_0^x u(t,x)dx + \upsilon_1(t), 0 \leq t \leq T \\ u(X,t) = \gamma_1 \int_0^x u(t,x)dx + \upsilon_\tau(t), 0 \leq t \leq T \\ u(x,0) = \upsilon_0(x), x \in [0,X] \end{cases}$$

lokal olmayan integral koşulları ile beraber verilen üçüncü mertebeden lineer pseudo-parabolik denklemin $\eta \geq 0$ için ileri sonlu fark şeması ve kararlığını araştırdı.
Schrödınger kısmi diferansiyel denklemi sadece oldukça basit modeller için analitik olarak çözülebilir. Abdalla ve Eleuch, bazı değiştirilmiş q-deforme olmuş potansiyeller için Schrödınger kısmi diferansiyel denklemlerin kesin analitik çözümlerini sunmuşlardır (Abdalla ve Eleuch, 2014). Sayısal çözümler için, iki boyutlu Schrödınger kısmi diferansiyel denkleminin sayısal çözümü için Subaşı üç farklı sonlu fark şeması (FDSS) önerdiği gibi, Schrödınger kısmi diferansiyel denklemlerinin çeşitli kaba biçimlerinin çözümlerini sunan birçok araştırmacı vardır (Subaşı ve Murat,2002). Fairweather ve Khebchareon, bir ve çeşitli uzay değişkenlerinde doğrusal ve doğrusal olmayan Schrödınger kısmi diferansiyel denklemlerini çözmek için sayısal yöntemler sunmuşlardır (Fairweather ve ark., 2002). Lehtovaara, Toivanen ve Eloranta, doğrusal ve doğrusal olmayan Schrödınger kısmi diferansiyel denklemlerinin ayrıklaştırılmasından kaynaklanan büyük matrislerin özdeğerlerini ve özvektörlerini elde etmek için hayali zaman yayılım yöntemini kullanmışlardır ve Bader, Sergio ve Casas, Schrödinger özdeğer denklemini, karmaşık katsayılara sahip bölme yöntemlerini kullanarak hayali zaman yayılım tekniği ile çözmüşlerdir (Bader ve ark.,2013). Bu çalışmada, $[0,T] \times [0,L]$ alanındaki tek boyutlu zamana bağlı doğrusal Schrödinger parabolik / psodo-parabolik kısmi diferansiyel denklem için başlangıç-sınır değer

problemi aşağıdaki gibi ele alınmıştır,

$$\begin{cases} iu_t(t,x) = \lambda u_{txx}(t,x) + u_{xx}(t,x) + f(t,x), \ \ 0 < x < L, \ 0 < t < T, \\ u(0,x) = \varphi(x), \ 0 \leq x \leq L, \ 0 \leq t \leq T, \\ u(t,0) = u(t,L) = 0, \ \ 0 \leq t \leq T, \ \lambda > 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Schrödinger pseudo-parabolik diferansiyel denkleminin analitik ve sonlu fark şeması çözümü incelenecektir. Burada φ, f bilinen fonksiyonlar ve u bilinmeyen fonksiyon olarak bilinir. Gelecek bölümde pseudo-parabolik diferansiyel denkleminin çözümünü hesaplamak için Modifiye Çift Laplace Ayrıştırma Yöntemini kullanacağız.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Çift Laplace dönüşümü İle ilgili ön hazırlıklar

Bu bölümde, bu çalışmada daha fazla kullanılan Çift Laplace dönüşümünün önemli tanım ve teoremleri verilmiştir.

Tanım3.1. İki değişken t ve x'in bir fonksiyonu olan u (t; x) varsayalım.U (t; x) 'in çift Laplace dönüşümü, aşağıdaki çift yanlış integral ile tanımlanır.

$$L_t L_x \left[u(t,x)\right] := U(s,p) := \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(st+px)} dt dx := \lim_{n,m\to\infty} \int_0^n \int_0^m e^{-(st+px)} dx dt$$

Burada s ve p karmaşık sayılar ve $Re\,(s) > 0$ ve $Re\,(p) > 0$.

Tanım3.2. $U(s,p)$ 'nin ters çift Laplace dönüşümü şu şekilde tanımlanır,

$$u(t,x) := L_t^{-1} L_x^{-1} \left[U(s,p)\right] := \frac{1}{2i\pi} \int e^{st} dt \;\; \frac{1}{2i\pi} \int e^{px} U(s,p) dp$$

Burada σ ve δ yeterince büyük olduğu durumlarda $U\,(s,p)$ de $s \leq \sigma$ ve $p \leq \delta$ dır.

Tanım3.3. $U(t,x)$ fonksiyonunun, $u\,(t,x) \leq Me^{at+\beta x}$ olacak şekilde negatif olmayan bir M sabiti varsa $a > 0$ ve $\beta > 0$ üzerinde $0 \leq t$, $x < \infty$ dır.

Teorem 3.1. $U\,(t,x)$ üstel bir fonksiyon , $(0,T)$ ve $(0,X)$ parçalı sürekli ise çit Laplace dömüşümü için $Re\,(s) > a$ ve $Re(p) > \beta$ dır.

Teorem 3.2. $u \in C^+\left(R^+ \times R^+\right)$ ve $j = \max\{k,n\}$ için $M, a, \beta > 0$ öyle ki ,

$$\left|\frac{\partial^{j+i} u(t,x)}{\partial t^j \partial x^i}\right| \leq Me^{at+\beta x}, \;\; j = 0,1,....,k \;\; , k = 0,1,....,n$$

Ardından aşağıdaki formüller verilir,

$$
\begin{aligned}
L_t L_x\left[\frac{\partial^n u(t,x)}{\partial x^n}\right] &= p^n U(s,p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-1-i} L_t\left[\frac{\partial^i u(0,t)}{\partial x^i}\right], \\
L_t L_x\left[\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial t^k}\right] &= s^k U(s,p) - \sum_{j=0}^{k-1} s^{k-1-j} L_x\left[\frac{\partial^j (x,0)}{\partial t^j}\right], \\
L_t L_x\left[\frac{\partial^{k+n} u(t,x)}{\partial t^k \partial x^n}\right] &= s^k p^n \left[U(s,p) - \sum_{j=0}^{k-1} s^{-1-j} L_x\left[\frac{\partial^j u(x,0)}{\partial t^j}\right]\right. \\
&\quad - \sum_{i=0}^{n-1} p^{-1-i} L_t\left[\frac{\partial^i u(0,t)}{\partial x^i}\right] \\
&\quad \left. + \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{n-1} s^{-1-j} p^{-1-i} \frac{\partial^{j+i} u(0,0)}{\partial t^j \partial x^i}\right].
\end{aligned}
$$

3.1.1. Modifiye çift Laplace ayrışma metodu

Kabul edelim ki $t \geq 0$ için $f(t)$ önceden verilen fonksiyon olsun. Bu durumda f nin Laplace dönüşümü $L[f(t)]$ veya $F(s)$ ile gösterilir ve

$$
L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \tag{3.1}
$$

denklemiyle tanımlanır. (3.1) denkleminden

$$
L\left[f'(t)\right] = sF(s) - f(0) \tag{3.2}
$$

olarak tanımlanır. $u(t,x)$ fonksiyonunun t ve x e göre çift Laplace dönüşümü;

$$
\begin{aligned}
L_x L_t[u(t,x)] &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-pt} e^{-sx} u(t,x) dt dx \\
&= \int_0^\infty e^{-sx}\left[\int_0^\infty e^{-pt} u(t,x) dt\right] dx \\
&= \int_0^\infty e^{-sx}\left[s^a \int_0^\infty e^{-pt} u(t,x) dt - u(t,0)\right] dx \\
&= sU(s,p) - U(s,0)
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

olarak elde edilir. Bu bölümde Schrödınger tek boyutlu pseudo-parabolik kısmi denklemi çözmek için modifiye çift Laplace ayrıştırma yöntemini kullanılmıştır.

Verilen başlangıç değer koşulları ile beraber tek boyutlu pseudo-parabolik kısmi denklemin çözümü için

$$\begin{cases} iu_t(t,x) = \lambda u_{txx}(t,x) + u_{xx}(t,x) + f(t,x) \\ u(0,x) = \psi(x) \end{cases} \tag{3.4}$$

bir formül elde edelim. Çift boyutlu Laplace dönüşümünden

$$L_t L_x \left[f(t,x)\right] = F(s,p), L_t L_x \left[\varphi(x)\right] = G(p) \tag{3.5}$$

olduğu biliniyor. Schrödınger türevinin çift Laplace dönüşümü

$$L_t L_x \left[iu_t(t,x)\right] = i\left(sU(s,p) - U(0,p)\right) \tag{3.6}$$

şeklindedir. (3.5) ve (3.6) formülleri kullanılıp (3.4) probleminin çift Laplace dönüşümü alınırsa,

$$L_t L_x \left[\lambda u_{txx}(t,x) + u_{xx}(t,x)\right] + L_t L_x \left[f(t,x)\right] = isU(s,p) - iU(0,p)$$

olup buradan da

$$isU(s.p) = U(0,p) + L_t L_x \left[\lambda u_{txx}(t,x) + u_{xx}(t,x)\right] + L_t L_x \left[f(t,x)\right]$$

formülü elde edilir.Bu son formülden de

$$U(s,p) = \frac{1}{is}G(p) + \frac{1}{is}\, F(s,p) + \frac{1}{is}\, L_t L_x \left[\lambda u_{txx}(t,x) + u_{xx}(t,x)\right]$$

yazılır. Probleminin çözümü için

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t,x) \tag{3.7}$$

olarak alınırsa;

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t,x) &= \varphi(x) + L_s^{-1} L_p^{-1}\left[\frac{1}{Is} F(s,p)\right] \\ &+ L_s^{-1} L_p^{-1}\left[\frac{1}{is}\pounds_t \pounds_x \left[\lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t,x)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t,x)\right] \end{aligned} \tag{3.8}$$

bulunur.Özel olarak;

$$u_0 = \varphi(x) + L_s^{-1} L_p^{-1}\left[\frac{1}{is} F(s,p)\right] \tag{3.9}$$

alalım.Bu durumda geri kalan terimler;olarak yazılabilir.

$$u_{n+1}(t,x) = L_s^{-1} L_p^{-1}\left[\frac{1}{is} L_t L_x \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t,x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t,x)\right]\right] \tag{3.10}$$

Burada $\pounds_s^{-1}\pounds_p^{-1}$ sırasıyla s ve p nin çift katlı ters Laplace dönüşümü denir. (3.9) ve (3.10) formüllerine Modifiye Çift Laplace ayrışma yöntemi denir.

Şimdi Schrödinger pseudo-parabolik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için çift Laplace ayrışma yöntemi kullanarak aşağdaki örnek problemleri verelim.

Örnek 3.1.

$$\begin{cases} iu_t(t,x) = \lambda u_{txx}(t,x) + u_{xx}(t,x) + f(t,x),\ 0 < x < L,\ 0 < t < T, \\ f(t,x) = 3it^2(x-x^2) + 2t^3 + 6t^2 - 2 \\ u(0,x) = x^2 - x,\ 0 \le x \le 1,\ \lambda = 1 \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \end{cases} \tag{3.11}$$

probleminin çözümü için Modifiye Çift Laplace ayrışma yöntemini kullanalım.

Çözüm: Problemin çöözümü için (3.11) formülünün çift Laplace dönüşümü alınırsa

$$\begin{aligned} L_tL_x\left[f(t,x)\right] &= L_tL_x\left[3it^2(x-x^2) + 2t^3 + 6t^2 - 2\right] \\ &= (\frac{6i}{s^3}(\frac{1}{p} - \frac{2}{p^3}) + \frac{12}{s^4} + \frac{12}{s^3} - \frac{2}{s}) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.5) forrmülünden

$$\varphi(x) = x^2 - x$$

olduğu görülür. (3.9) formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} u_0 &= x^2 - x + L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{is}(\frac{6i}{s^3}(\frac{1}{p} - \frac{2}{p^3}) + \frac{12}{s^4} + \frac{12}{s^3} - \frac{2}{s})\right] \\ &= x^2 - x + L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{6}{s^4}(\frac{1}{p} - \frac{2}{p^3}) + \frac{12}{is^5} + \frac{12}{is^4} - \frac{2}{is^2}\right] \\ &= x^2 - x + t^3(x-x^2) + \frac{t^4}{2i} + \frac{2t^3}{i} - \frac{2t}{i} \\ &= x^2 - x(1-t^3) + \frac{t^4}{2i} + \frac{2t^3}{i} - \frac{2t}{i} \end{aligned}$$

olarak bulunur. (3.10) formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} u_1 &= L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{is}L_tL_x\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial t}(u_0(t,x)) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_0(t,x))\right]\right] \\ u_1 &= L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{is}L_tL_x\left[-6t^2 + 2(1-t^3)\right]\right] \\ &= L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{is}(\frac{-12}{s^3} + \frac{2}{s} - \frac{12}{s^4}\right] \\ &= L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{-12}{is^4} + \frac{2}{is^2} - \frac{12}{is^5}\right] \\ &= \frac{-2t^3}{i} + \frac{2t}{i} - \frac{t^4}{2i} \end{aligned}$$

elde edilir.Benzerde şekilde devam edilip (3.10) formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} u_2 &= L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{is}L_tL_x\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial t}(u_1(t,x)+\frac{\partial}{\partial x^2}(u_0(t,x))\right]\right] \\ &= L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{is}L_tL_x\left[0+0\right]\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.u_0 ile u_1 den $\frac{t^4}{2i}, \frac{2t^3}{i}, \frac{2t}{i}$ terimleri sadeleşir. (3.11) probleminin tam çözümü (3.7) formülü kullanılarak

$$u(t,x) = (t^3-1)(x-x^2)$$

sonucunu elde ederiz.

Örnek 3.2. Aşağıdaki Schrödınger pseudo-parabolik kısmi diferansiyel denkleminin

$$\begin{cases} iu_t(t,x) = au_{txx}(t,x) + u_{xx}(t,x) + f(t,x), \;\; a>0, \\ f(t,x) = [(i+a)\cos t + \sin t]\sin x, \;\; 0<t,x<\pi, \\ u(0,x) = 0, \; 0 \le x \le \pi, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, 0 \le t \le \pi \; . \end{cases} \tag{3.12}$$

tam çözümünü bulunuz.

Çözüm: (3.12) denklemine çift Laplace dönüşümünü uygularsak, t ve x ile ilgili olarak aşağıdakiler elde edilir:

$$L_tL_x\left[u\left(t,x\right)\right] = -i\left[\frac{(i+a)}{s^2+1}+\frac{1}{s(s^2+1)}\right]\frac{1}{p^2+1} - \frac{i}{s}L_tL_x\left[au_{txx}\left(t,x\right)+u_{xx}\left(t,x\right)\right].$$

denklemin her iki tarafına ters çift Laplace dönüşümü uyglanırsa,

$$\begin{aligned} u(t,x) = {} & [(-ai+1)\sin t - i(1-\cos t)]\sin x \\ & - iL_t^{-1}L_x^{-1}\left[\frac{1}{s}L_tL_x\left[au_{txx}\left(t,x\right)+u_{xx}\left(t,x\right)\right]\right]. \end{aligned}$$

elde edilir.Bu denkleme (3.7) formülü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}u_n(t,x) = {} & [(-ai+1)\sin t - i(1-\cos t)]\sin x \\ & - iL_t^{-1}L_x^{-1}\left[\frac{1}{s}L_tL_x\left[a\frac{\partial^3}{\partial t\partial x^2}u_n\left(t,x\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\right]. \end{aligned}$$

elde edilir. (3.5) forrmülünden

$$\varphi(x) = 0$$

olduğu görülür. (3.9) formülü kullanılırsa

$$u_0(t,x) = [(-ai+1)\sin t - i(1-\cos t)]\sin x,$$

elde edilir.

$$u_{n+1}(t,x) = -iL_t^{-1}L_x^{-1}\left[\frac{1}{s}L_tL_x\left[a\frac{\partial^3}{\partial t\partial x^2}u_n(t,x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}u_n(t,x)\right]\right],\ n \geq 0.$$

yukarıdaki formül kullanılarak

$$\begin{aligned}
u_0(t,x) &= [(-ai+1)\sin t - i(1-\cos t)]\sin x,\\
u_1(t,x) &= [(ai-1+a)\sin t + (2a+i)\,(1-\cos t+t)]\sin x,\\
u_2(t,x) &= \Big[(1-a^2+a(a-3)i)\sin t + ((2a^2+a-1)i-2a)(1-\cos t)\\
&\quad + (3a-1)t + i\frac{t^2}{2!}\Big]\sin x\\
u_3(t,x) &= \Bigg[(-a^3i-a^3+a^2+a+1)\sin t + (-5a^2-3ai-a+1)t - \frac{t^3}{3!}\\
&\quad (-3a^3-3a^2i-2a^2+4a+i)(1-\cos t) - (4a+i)\frac{t^2}{2!}\Bigg]\sin x
\end{aligned} \tag{3.13}$$

elde edilir.Gerekli sadeleşmeler yapılarak

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t,x) = \sin t \sin x.$$

sonucunu elde ederiz.

Örnek 3.3.

Aşağıdaki Schrödınger pseudo-parabolik kısmi diferansiyel denkleminin

$$\begin{cases}
iu_t(t,x) = au_{txx}(t,x) + u_{xx}(t,x) + f(t,x),\ \ a>0,\\
f(t,x) = 2it(x^2-x) - 4at - 2\left(t^2-1\right),\ 0<x,t<1,\\
u(0,x) = x - x^2, 0 \leq x \leq 1,\\
u\left(t,0\right) = u\left(t,1\right) = 0, 0 \leq t \leq 1,
\end{cases} \tag{3.14}$$

tam çözümünü bulunuz.

Çözüm: Problemin çöözümü için (3.14) formülünün çift Laplace dönüşümü alınırsa

$$\begin{aligned}
L_tL_x\left[f(t,x)\right] &= L_tL_x\left[2it(x^2-x) - 4at - 2\left(t^2-1\right)\right]\\
&= \left(\frac{2i}{s^2}\left(\frac{2}{p^3} - \frac{1}{p}\right) - \frac{4a}{s^2} - \frac{4}{s^3} + \frac{2}{s}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.5) forrmülünden

$$\varphi(x) = x - x^2$$

olduğu görülür. (3.9) formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} u_0 &= x - x^2 + L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{is}\left(\frac{2i}{s^2}\left(\frac{2}{p^3} - \frac{1}{p}\right) - \frac{4a}{s^2} - \frac{4}{s^3} + \frac{2}{s}\right)\right] \\ &= x - x^2 + L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{2}{s^3}\left(\frac{2}{p^3} - \frac{1}{p}\right) - \frac{4a}{is^3} - \frac{4}{is^4} + \frac{2}{is^2}\right] \\ &= x - x^2 + t^2\left(x^2 - x\right) - \frac{2at^2}{i} - \frac{2t^3}{3i} + \frac{2t}{i} \\ &= \left(x^2 - x\right)\left(t^2 - 1\right) + \frac{2at^2}{i} + \frac{2t^3}{3i} - \frac{2t}{i} \end{aligned}$$

elde edilir. (3.10) formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} u_1 &= L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{is}L_tL_x\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial t}(u_0(t,x)) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_0(t,x))\right]\right] \\ &= L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{is}L_tL_x\left[4at + 2\left(t^2 - 1\right)\right]\right] \\ &= L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{is}\left(\frac{4a}{s^2} + \frac{4}{s^3} - \frac{2}{s}\right)\right] \\ &= L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{4a}{is^3} + \frac{4}{is^4} - \frac{2}{is^2}\right] \\ &= \frac{2at^2}{i} + \frac{2t^3}{3i} - \frac{2t}{i} \end{aligned}$$

elde edilir.Benzerde şekilde devam edilip (3.10) formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} u_2 &= L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{is}L_tL_x\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial t}(u_1(t,x) + \frac{\partial}{\partial x^2}(u_0(t,x))\right]\right] \\ &= L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{is}L_tL_x\left[0 + 0\right]\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.Gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned} u_0(t,x) &= \left(x^2-x\right)\left(t^2-1\right)+\frac{2}{3}it\left(t^2+3at-3\right), \\ u_1(t,x) &= -\frac{2}{3}it\left(t^2+3at-3\right), \\ u_2(t,x) &= u_3(t,x)=....=0. \end{aligned}$$

elde edilir.Buradan da gerekli sadeleşmler yapılarak,,problemin tam çözümü (3.7) formülü kullanılarak

$$u(t,x)=\left(x^2-x\right)\left(t^2-1\right).$$

sonucunu elde ederiz. Bu bölümde, Schrödinger pseudo parabolik probleminin yaklaşık çözümü için doğruluk fark şemaları oluşturulmuştur.Bu fark şemalarının çözümü için kararlılık kestirimleri yapılacaktır.

3.1.2. Schrödinger diferansiyel denklemi ve kararlılığı

Başlangıç değer koşullarına bağlı Schrödinger diferansiyel denklemi

$$\begin{cases} iu_t+\lambda Au_t(t)+Au(t)=f(t),\ (0\le t\le T), \\ \\ u(0)=\varphi \end{cases} \tag{3.15}$$

bir H Hilbert uzayında bir özeşlenik pozitif A operatörü ve $A\ge\delta I$ olarak tanınlanır. Burada, $\delta>0$, $\lambda>0$ ve

$$A\ge\delta I, \delta\ge\frac{1}{\lambda}. \tag{3.16}$$

dır. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa,bir $u(t)$ fonksiyonu (3.15) probleminin birçözümü olarak adlandırılır.

(i) $u(t)$ fonksiyonu $[0,T]$ aralığı üzerinde sürekli türevlenebilirdir. Aralığın bitim noktalarındaki türevler uygun tek yönlü türevlerlerdir.

(ii) Bütün $t\in[0,T]$ için $u(t)$ fonksiyonu $D(A)$ bölgesinin elemanlarıdır ve $Au(t)$, $[0,T]$.aralığında süreklidir.

(iii) $u(t)$, (3.15) probleminin başlangıç değer problemini sağlar.

Bir Schrödinger diferansiyel denklemi için (3.15) problemi aşağdaki formül ile verilen bir tek mild çözüme

$$u(t) = e^{-\frac{A}{i+\lambda A}t}\varphi + + \int_0^t e^{e^{-\frac{A}{i+\lambda A}t}(t-s)} f(s)ds. \tag{3.17}$$

sahip olduğunu gösterelim. Gerçekten, açık olarak (3.15) problemi

$$\begin{aligned} &u_t + \tfrac{A}{(i+\lambda A)}u(t) = f(t)\ (0 \le t \le T), \\ &u(0) = \varphi \end{aligned} \tag{3.18}$$

olarak yeniden yazılabilir. (3.18) probleminin integral çarpanı

$$p(t) = e^{-\frac{A}{(i+\lambda A)}t}$$

olup (3.18) denkleminin her tarafı bu integral çarpanı ile çarpılır 0 dan t ye integrali alınırsa,

$$u(t) = e^{-\frac{A}{(i+\lambda A)}t}u(0) + \int_0^t e^{-e^{-\frac{A}{(i+\lambda A)}(t-s)}} f(s)ds$$

denklemi elde edilir. $u(0) = \varphi$ başlangıç değer koşulu uygulanırsa, (3.17) çözümü elde edilir.

Lemma 3.1 $A \ge \delta I > 0$ *koşulu altında*

$$\left| e^{-\frac{A}{(i+\lambda A)}t} \right| \le 1 \tag{3.19}$$

dır.

İspat: $\left| e^{\frac{iA}{\lambda^2 A^2+1}t} \right| = \left| \cos(\frac{A}{\lambda^2 A^2+1}t) + i\sin(\frac{A}{\lambda^2 A^2+1}t) \right| \le 1$ *olduğu gözönüne alınır ve (3.19) ifadesinin eşleniği alınırsa*

$$\left| e^{-\frac{A}{(i+\lambda A)}t} \right| = \left| e^{-\frac{\lambda^2 A}{\lambda^2 A^2+1}t} e^{\frac{iA}{\lambda^2 A^2+1}t} \right| \le \left| e^{\frac{iA}{\lambda^2 A^2+1}t} \right| \le 1$$

olduğu görülür.

Bu durumda verilen koşullara gözönüne alınarak çözümün sürekliliğine bağlı aşağıdaki temel teoremi ve ispatını vereceğiz.

Teorem 3.3. $\varphi \in D(A)$ ve $f(t)$de $[0,T]$ aralığı üzerinde sürekli türevlenebilir sahip bir fonksiyon ve (3.16) formülündeki koşulun sağlandığını varsayalım. O halde, (3.15) probleminin bir tek çözümü vardır ve kararlılık kestirimleri

$$\max_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_H \leq M\left[\|\varphi\|_H + \max_{0\leq t\leq T}\|f(t)\|_H\right] \tag{3.20}$$

sağlanır. Burada M on φ ve $f(t)$ *değerlerine bağlı değildir.*

İspat (3.17) formülü ve (3.19) eşitsizliği kullanılırsa

$$\|u(t)\|_H \leq \left|e^{-\frac{A}{(i+\lambda A)}t}\right|\|\varphi\|_H + \int_0^t \left|e^{-\frac{A}{(i+\lambda A)}(t-s)}\right|\|f(s)\|_H\, ds$$

$$\leq M\left[\|\varphi\|_H + \max_{0\leq t\leq T}\|\, f(t)\,\|_H\right]$$

herhangi bir $t\in[0,T]$ eşitsizliği elde edilir.

Şimdi, (3.3) Abstract Teoriminin uygulamasını verelim. İlk önce, Schrödinger diferansiyel denkleminin sınır değer problemini ele alalım.

$$\begin{cases} iu_t(t,x) - (u_x)_x(t,x) - \lambda(u_t)_{xx} + \sigma u(t,x) = f(t,x), \\ \\ 0<t<T, 0<x<l, \\ \\ u(0,x) = \varphi(x), 0\leq x\leq l, \\ \\ u(t,0) = u(t,l) = 0, 0\leq t\leq T. \end{cases} \tag{3.21}$$

$\varphi(x)$, $(x\in[0,l])$ and $f(t,x)$ $(t\in(0,T), x\in(0,l))$ fonksiyonları için (3.21) problemi bir tek $u(t,x)$ çözümüne sahiptir. Bu da bize (3.21) kısmi diferansiyel denkleminin (3.15) probleminin başlangıç koşulları ile bir $H = L_2[0,l]$ Hilbert uzayında A özeşlenik pozitif operatörüyle (3.21) problemini verir. Burada, $L_2[0,l]$ bir Hilbert uzayında $[0,l]$ aralığında bütün kare integrallenebilir fonksiyonlar A özeşlenik pozitif operatörü

$$Au(x) = -(u_x)_x + \sigma u(x) \tag{3.22}$$

formülüyle

$$D(A) = \{u(x) : u, (u_x)_x \in L_2[0,l], u(0) = u(l)\}.$$

bölgesinde tanımlanır. Burada, $f(t) = f(t,x)$ ve $u(t) = u(t,x)$ sırasıyla bilinen ve bilinmeyen abstract fonksiyonları $[0,l]$ aralığı üzerinde $H = L_2[0,l]$ Hilbert uzayındaki değerleri ile tanımıdır.

3.1.3. Schrödinger problemi için fark şeması

Bu bölümde, Schrödinger pseudo parabolik problemlerinin yaklaşık çözümü için fark şemaları oluşturulmuştur.Bu fark şemalarının çözümü için karalılık kestirimleri yapılacaktır. Bu çalışmada,

$$\begin{cases} iu_t(t,x) = \lambda u_{txx}(t,x) + u_{xx}(t,x) + f(t,x), \ \ 0 < x < L, \ 0 < t < T, \\ u(0,x) = \varphi(x), \ 0 \le x \le L, \ 0 \le t \le T, \\ u(t,0) = u(t,L) = 0, \ 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{3.23}$$

Schrödinger pseudo-parabolik kısmi diferansiyel denkleminin tam ve yaklaşık çözümü verilecektir.Burada φ, f bilinen fonksiyonlar ve u bilinmeyen fonksiyondur. Yaklaşık çözümü için sonlu fark şeması kullanılacaktır. $\Omega = (0,T)\times(0,L)$.Bazı negatif olmayan tamsayılar M ve N için, düzgün ızgara adımları şu şekilde tanıtılır,

$$\Omega^\tau := \{t_k : t_k = k\tau, \ k = 1, ..., N-1\}, \ \tau = \frac{T}{N},$$

$$\Omega^h := \{x_n : x_n = nh, \ n = 1, ..., M-1\}, \ h = \frac{L}{M}.$$

Taylor açılımı kullanılıp $x = x_n = nh$ ve $t = t_k = k\tau$ alınılırsa,

$$u_{xx}(t_k, x_n) = \frac{u^k_{n+1} - 2u^k_n + u^k_{n-1}}{h^2} + O(h^3) \tag{3.24}$$

elde edilir.(Jachimavičiene ve ark., 2014) çalışmasından

$$u_{txx}(t_k, x_n) = \frac{\lambda}{\tau}\left(\frac{u^k_{n+1} - 2u^{k+1}_n + u^k_{n-1}}{h^2} - \frac{u^{k-1}_{n+1} - 2u^k_n + u^{k-1}_{n-1}}{h^2}\right) + O(h^3) \tag{3.25}$$

olduğu biliniyor.(Karatay ve ark., 2013) çalışmalarından

$$u_t(t_k, x_n) = \frac{u^{k+1}_n - u^k_n}{\tau} + O(\tau^2) \tag{3.26}$$

yazılabilir. Sonlu fark şemasının tanımını kullanarak, (3.24),(3.25) ve (3.26) formülleri kullanılarak (3.11) problemine karşılık gelen sonlu fark şeması denklemi

$$\begin{cases} i\left(\frac{u_n^{k+1}-u_n^k}{\tau}\right) = \frac{\lambda}{\tau}\left(\frac{u_{n+1}^k-2u_n^{k+1}+u_{n-1}^k}{h^2} - \frac{u_{n+1}^{k-1}-2u_n^k+u_{n-1}^{k-1}}{h^2}\right) + \frac{u_{n+1}^k-2u_n^k+u_{n-1}^k}{h^2} \\ \\ +f_n^k\ ,\ 1 \le k \le N-1,\ 1 \le n \le M-1, \\ u_n^0 = \varphi(x_n),\ 0 \le n \le M, \\ u_0^k = u_M^k\ = 0,\ 0 \le k \le N, \end{cases} \tag{3.27}$$

olarak elde edilir.

3.1.4. Fark şeması için kararlılık

Bu bölümde, bir önceki bölümde elde ettiğimiz sonlu fark denklemlerinin kararlılığını araştıracağız. (3.23) ve Schrödinger problemlerinin fark şeması denklemlerini bulunduktan sonra bir sonraki aşamada bu sonlu fark denklemlerinin kararlılığını göstermeye çalışıcaz.Böylece Schrödinger pseudo parabolik kismi diferansiyel denklemleri için yaklaşık çözümü bulabiliriz. Şimdi (3.27) sonlu fark şemasının kararlılığını inceleyelim.Bunun için Von-Neumann analiz metodundundan $\lambda = 1$ alınıp

$$u_n^k = r^k e^{in\theta} k = 1,\ n = 0 \tag{3.28}$$

formülünü kullanalım. (3.28) formülü (3.27) fark şemasında yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} i\left(\frac{r^2-r}{\tau}\right) &= \frac{1}{\tau}\left(\frac{re^{i\theta}-2r^2+re^{-i\theta}}{h^2} - \frac{e^{i\theta}-2r+e^{-i\theta}}{h^2}\right) \\ &\quad + \frac{re^{i\theta}-2r+re^{-i\theta}}{h^2} \\ &= \frac{1}{\tau}\left(\frac{r(e^{i\theta}+e^{-i\theta})-2r^2}{h^2} - \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}-2r}{h^2}\right) \\ &\quad + r\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}-2}{h^2}\right) \end{aligned} \tag{3.29}$$

bulunur.

$$\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right) = \cos\theta$$

formülü olduğu göz önüne alınıp (3.29) denkleminde yazılırsa,

$$\begin{aligned} i\left(\frac{r^2-r}{\tau}\right) &= \frac{1}{\tau}\left(\frac{2\cos\theta r-2r^2}{h^2} - \frac{2\cos\theta-2r}{h^2}\right) + r\left(\frac{2\cos\theta-2}{h^2}\right) \\ &= \left(\frac{2\cos\theta r-2r^2}{\tau h^2} - \frac{2\cos\theta-2r}{\tau h^2}\right) + r\left(\frac{2\cos\theta-2}{h^2}\right) \end{aligned}$$

elde edilir.Buradan da

$$\begin{aligned} i(\frac{r^2-r}{\tau}) - (\frac{2\cos\theta r - 2r^2}{\tau h^2}) + (\frac{2\cos\theta - 2r}{\tau h^2}) - r(\frac{2\cos\theta - 2}{h^2}) &= 0 \\ (\frac{i}{\tau} + \frac{2}{\tau h^2})r^2 + (\frac{-i}{\tau} - \frac{2\cos\theta}{\tau h^2} - \frac{2}{\tau h^2} + \frac{4\sin^2\frac{\theta}{2}}{h^2})r + \frac{2\cos\theta}{\tau h^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

olur. (3.30) denklemi ikinci dereceden bir bilinmiyenli denklemdir. Bu denklemin kökleri r_1 ve r_2 olmak üzere,

$$r_1 r_2 = \frac{\frac{2\cos\theta}{\tau h^2}}{(\frac{i}{\tau} + \frac{2}{\tau h^2})} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= -\frac{(\frac{-i}{\tau} - \frac{2\cos\theta}{\tau h^2} - \frac{2}{\tau h^2} + \frac{4\sin^2\frac{\theta}{2}}{h^2})}{(\frac{i}{\tau} + \frac{2}{\tau h^2})} \\ &= \frac{\frac{i}{\tau} - \frac{4\sin^2\frac{\theta}{2}}{h^2} + \frac{4\cos^2\frac{\theta}{2}}{\tau h^2}}{(\frac{i}{\tau} + \frac{2}{\tau h^2})} \end{aligned} \quad (3.32)$$

olarak yazılabilir. (3.27) denklemin kararlı olduğunu göstermek için

$$\|A\| = \|A\|_\infty = \max_{1\le k\le N-1}\left\{\sum_{i=1}^{N-1}|a_{ki}|\right\}$$

normunu kullanalım. (3.31) denkleminden

$$\begin{aligned} \|r_1 r_2\| &= \frac{\left|\frac{2\cos\theta}{\tau h^2}\right|}{\left|(\frac{i}{\tau} + \frac{2}{\tau h^2})\right|} = \frac{\frac{2\cos\theta}{\tau h^2}}{(\frac{1}{\tau^2} + \frac{4}{\tau^2 h^4})^{\frac{1}{2}}} \\ &\le \frac{\frac{2}{\tau h^2}}{(\frac{1}{\tau^2} + \frac{4}{\tau^2 h^4})^{\frac{1}{2}}} < 1 \end{aligned} \quad (3.33)$$

elde edilir. (3.32) denkleminden

$$\begin{aligned} \|r_1 + r_2\| &= \frac{\left|\frac{i}{\tau} - \frac{4\sin^2\frac{\theta}{2}}{h^2} + \frac{4\cos^2\frac{\theta}{2}}{\tau h^2}\right|}{\left|(\frac{i}{\tau} + \frac{2}{\tau h^2})\right|} \\ &= \frac{\left|\frac{i}{\tau} - \frac{4\tau\sin^2\frac{\theta}{2}}{\tau h^2} + \frac{4\cos^2\frac{\theta}{2}}{\tau h^2}\right|}{\left|(\frac{i}{\tau} + \frac{2}{\tau h^2})\right|} \le \frac{\left|\frac{i}{\tau} - \frac{4\tau\sin^2\frac{\theta}{2}}{\tau h^2} + \frac{4\tau\cos^2\frac{\theta}{2}}{\tau h^2}\right|}{\left|(\frac{i}{\tau} + \frac{2}{\tau h^2})\right|} \\ &= \frac{\left|\frac{i}{\tau} + \frac{4}{h^2}(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2})\right|}{\left|(\frac{i}{\tau} + \frac{2}{\tau h^2})\right|} \le \frac{\left|\frac{i}{\tau} + \frac{4}{h^2}\right|}{\left|(\frac{i}{\tau} + \frac{2}{\tau h^2})\right|} \\ &= \frac{\left|(\frac{1}{\tau^2} + \frac{16}{h^4})^{\frac{1}{2}}\right|}{(\frac{1}{\tau^2} + \frac{4}{\tau^2 h^4})^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{\frac{1}{\tau^2} + \frac{16}{h^4}}{\frac{1}{\tau^2} + \frac{4}{\tau^2 h^4}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{h^4 + 16\tau^2}{h^4 + 4}\right)^{\frac{1}{2}} \le 1. \end{aligned} \quad (3.34)$$

bulunur. Son denklemde $\tau < 1$ ve $\max \tau = \frac{1}{2}$ olduğu gözönüne alındığından son denklem elde edildi. (3.33) ve (3.34) denklemlerinden $r_1 \leq 1$ ve $r_2 \leq 1$ olduğu görülür. Böylece

$$\left\| u_n^k \right\| = \left| r^k e^{in\theta} \right| \leq \left| r^k \right| \leq 1$$

olur. Bu da (3.27) denklemi ile verilen sonlu fark şemasının kararlı olduğunu gösterir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Schrödinger pseudo parabolik kısmi denklemlerin

$$\begin{cases} iu_t(t,x) = \lambda u_{txx}(t,x) + u_{xx}(t,x) + f(t,x), \ \ 0 < x < L, \ 0 < t < T, \\ u(0,x) = \varphi(x), \ 0 \le x \le L, \ 0 \le t \le T, \\ u(t,0) = u(t,L) = 0, \ 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{4.1}$$

başlangıç sınır değer problemini inceleyelim.Bunun için birinci mertebeden doğruluk fark şeması denklemini oluşturacağız.Daha sonra bu fark şemasını örneklere uygulayıp, (4.1) denkleminin yaklaşık çözümü için maksimun hatayı bulacağız.Küçük parametrelere bağlı olan h ve τ için $\omega_{\tau,h} = [0,1]_\tau \times [0,\pi]_h$ bir ızgara noktası ailesini düşünelim.(4.1) problemi için

$$\omega_{\tau,h} = \{(t_k, x_n) : t_k = k\tau, 0 \le k \le N, N\tau = 1, x_n = nh, 0 \le n \le M; Mh = \pi\}$$

grid noktaları uygulanabilir.(t_{k-1}, t_k, t_{k+1}) ve (x_{n-1}, x_n, x_{n+1}) için

$$\frac{u(t_{k+1}, x_n) - u(t_k, x_n)}{\tau} - u_t(t_k, x_n) = O(\tau), \tag{4.2}$$

$$\frac{u(t_{k+1}, x_{n+1}) - 2u(t_{k+1}, x_n) + u(t_{k+1}, x_{n-1})}{h^2} - u_{xx}(t_{k+1}, x_n) = O\left(h^2\right) \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda}{\tau}\left(\frac{u(t_k, x_{n+1}) - 2u(t_{k+1}, x_n) + u(t_k, x_{n-1})}{h^2}\right. \\ &\left. - \frac{u(t_{k-1}, x_{n+1}) - 2u(t_k, x_n) + (t_{k-1}, x_{n-1})}{h^2}\right) \\ &- u_{txx}(t_k, x_n) = O\left(\tau h^2\right) \end{aligned} \tag{4.4}$$

fark denklemleri yazılabilir.Başlangıç değerleri için fark şemasını

$$u_0^k = u_M^k = 0, \quad u_n^0 = \varphi(x_n), \frac{u_n^1 - u_n^0}{\tau} = \varphi(x_n) \tag{4.5}$$

olarak yazabiliriz.(4.2),(4.3),..., (4.5) denklemlerini (4.5) denkleminde yerine yazıp, küçük terimler ihmal edilirse,

$$\begin{cases} i\frac{u_n^{k+1} - u_n^k}{\tau} - \lambda\left(\frac{u_{n+1}^k - 2u_n^{k+1} + u_{n-1}^k}{\tau h^2} - \frac{u_{n+1}^{k-1} - 2u_n^k + u_{n-1}^{k-1}}{\tau h^2}\right) \\ - \frac{u_{n+1}^{k-1} - 2u_n^{k+1} + u_{n-1}^{k+1}}{h^2} = f_n^{k+1}, x_n = nh, t_{k+1} = (k+1)\tau \\ 1 < k < N-1, 1 < n < M-1, \\ u_0^k = u_M^k = 0, u_n^0 = \varphi(x_n), \frac{u_n^1 - u_n^0}{\tau} = \psi(x_n), \\ 0 \le k \le N, 0 \le n \le M \end{cases} \tag{4.6}$$

birinci mertebeden fark şeması denklemi elde edilir.(4.7) denkleminde birinci mertebeden fark şeması denklemini

$$\left(\frac{i}{\tau}+\frac{2\lambda}{\tau h^2}+\frac{2}{h^2}\right)u_n^{k+1}+\left(-\frac{2\lambda}{\tau h^2}-\frac{i}{\tau}\right)u_n^k+\left(\frac{-\lambda}{\tau h^2}\right)u_{n+1}^k \tag{4.7}$$

$$+\left(\frac{\lambda}{\tau h^2}-\frac{1}{h^2}\right)u_{n+1}^{k-1}+\left(\frac{-1}{h^2}\right)u_{n-1}^{k+1}+\left(\frac{\lambda}{\tau h^2}\right)u_{n-1}^{k-1}=f_n^{k+1}$$

olarak yeniden yazabiliriz.Buradan da

$$au_{n+1}^{k-1}+bu_{n+1}^k+cu_n^k+du_n^{k+1}+eu_{n-1}^{k-1}+gu_{n-1}^{k+1}=f_n^{k+1} \tag{4.8}$$

formülü yazılabilir.Burada

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{\lambda}{\tau h^2}-\frac{1}{h^2}\right), b=\left(\frac{-\lambda}{\tau h^2}\right), c=\left(-\frac{2\lambda}{\tau h^2}-\frac{i}{\tau}\right) \\ d &= \left(\frac{i}{\tau}+\frac{2\lambda}{\tau h^2}+\frac{2}{h^2}\right), e=\left(\frac{\lambda}{\tau h^2}\right), g=\left(\frac{-1}{h^2}\right) \end{aligned}$$

dir.Buaradan A, B ve C birer kare matris olmak üzere,$(N+1)\times(N+1)$

$$Au_{n+1}+Bu_n+Cu_{n-1}=F_n, \tag{4.9}$$

yazılabilir.Burada

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1\times N+1)}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & d & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{N+1\times N+1}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & g & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & g & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & g & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{N+1\times N+1}$$

$$U_{n-1} = \begin{bmatrix} u_{n-1}^0 \\ u_{n-1}^1 \\ u_{n-1}^2 \\ \vdots \\ u_{n-1}^{N-1} \\ u_{n-1}^N \end{bmatrix}_{(N+1)\times 1} , U_n = \begin{bmatrix} u_n^0 \\ u_n^1 \\ u_n^2 \\ \vdots \\ u_n^{N-1} \\ u_n^N \end{bmatrix}_{(N+1)\times 1} , U_{n+1} = \begin{bmatrix} u_{n+1}^0 \\ u_{n+1}^1 \\ u_{n+1}^2 \\ \vdots \\ u_{n+1}^{N-1} \\ u_{n+1}^N \end{bmatrix}_{(N+1)\times 1}$$

dır.“Bu fark enklemlerini çözmek için, modifiye Gauss eliminasyon yönteminin bir işlemi uygulanır.Bundan sonra ,

$$u_j = \alpha_{j+1} u_{j+1} + \beta_{j+1}; u_M = 0;\ j = M-1, ..., 2, 1,$$

olarak tanımlanan matrislerin çözümü aranır. α_j ise $(N+1) \times (N+1)$ skaler matrislerdir, ve β_j $(N+1) \times 1$ sırayla tanımlanan sütun vektörleridir.Burada

$$\alpha_{j+1} = -\left(B + C\alpha_j\right)^{-1} A$$

ve

$$\beta_{j+1} = \left(B + C\alpha_j\right)^{-1} \left(D\phi - C\beta_j\right), j = 1, 2, ..., M-1$$

olur. Burada $j = 1, 2, ..., M-1$ olmak üzere $\alpha_1, (N+1) \times (N+1)$ sıfır kare matrisi ve β_1 ise $(N+1) \times 1$ sıfır sütun vektörüdür”(Ashyraleyv and Modanli 2012). Sayısal sonuçlar Matlab programı kullanılarak hesaplanmıştır, M ve N’nin farklı sayısal değerleri için tam ve nümerik çözümleri karşılaştırılarak hata analizleri elde edilmiştir. Şimdi, Schrödinger pseudo parabolik kısmi diferansiyel denklemini

$$\begin{cases} iu_t(t,x) = \lambda u_{txx}(t,x) + u_{xx}(t,x) + f(t,x),\ 0 < x < L,\ 0 < t < T, \\ f(t,x) = 3it^2(x - x^2) + 2t^3 + 6t^2 - 2 \\ u(0,x) = x^2 - x,\ 0 \le x \le 1,\ \lambda = 1 \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \end{cases}$$

inceleyelim. Bu problemin tam çözümünün $u(t,x) = (t^3-1)(x-x^2)$ olduğu biliniyor. Bu problemin birinci dereceden fark şeması denklemi

$$\begin{cases} i\left(\frac{u_n^{k+1} - u_n^k}{\tau}\right) = \frac{\lambda}{\tau}\left(\frac{u_{n+1}^k - 2u_n^{k+1} + u_{n-1}^k}{h^2} - \frac{u_{n+1}^{k-1} - 2u_n^k + u_{n-1}^{k-1}}{h^2}\right) + \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} \\ + f_n^k\ ,\ 1 \le k \le N-1,\ 1 \le n \le M-1, \\ u_n^0 = \varphi(x_n),\ 0 \le n \le M, \\ u_0^k = u_M^k\ = 0,\ 0 \le k \le N, \end{cases}$$

şeklindedir.Benzer şekilde

$$\begin{cases} iu_t(t,x) = au_{txx}(t,x) + u_{xx}(t,x) + f(t,x),\ \ a > 0, \\ f(t,x) = 2it(x^2 - x) - 4at - 2\left(t^2 - 1\right),\ 0 < x, t < 1, \\ u(0,x) = x - x^2, \qquad 0 \le x \le 1, \\ u\left(t,0\right) = u\left(t,1\right) = 0, \qquad 0 \le t \le 1, \end{cases}$$

denkleminin tam çözümü $u\left(t,x\right)=\left(x^2-x\right)\left(t^2-1\right)$ olup birici mertebeden sonlu fark şeması denklemi

$$\begin{cases} -\frac{1}{h^2}u_{n+1}^k+\left(\frac{2}{h^2}-\frac{i}{\tau}\right)u_n^k+\frac{i}{\tau}u_n^{k+1}-\frac{1}{h^2}u_{n-1}^k\approx f_n^k, \\ f_n^k=f\left(t_k,x_n\right),\left(t_k,x_n\right)\in\Omega, \\ u_n^0=\Psi\left(x_n\right),x_n\in\overline{\Omega}^h, \\ u_0^k=u_M^k=0,t_k\in\overline{\Omega}^\tau. \end{cases}$$

şeklindedir. Şimdi bulduğumuz denklemlerin nümerik sonuçlarını görmek için sonlu fark şeması formülünü kullanacağız. Bu problemi çözmek için Modifiye Gauss Eliminasyon metodu uygulandı.Birinci mertebeden doğruluk fark şeması uygulanarak $N=M=5,25,100,400$ için Tablo 1. elde edildi. $u(t,x)$ tam çözüm ve $u_n^k=u(t_k,x_n)$ yaklaşık çözüm olmak üzere,

$$E_n^k=\max_{\substack{1\leq k\leq N-1\\1\leq n\leq M-1}}\left|u(t,x)-u_n^k\right|$$

formüllü kullanılarak hata analizi yapıldı. Bulunan bu nümerik sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Çizelge 4.1. $0\leq x\leq 1$, $0\leq t\leq 1$ değerleri için hesaplanmıştır.

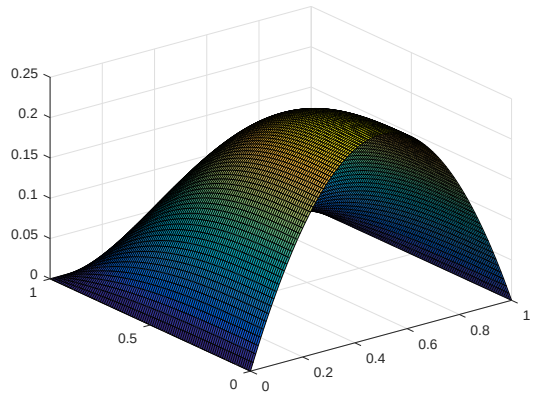
$\tau=\frac{1}{N},h=\frac{1}{M}$	λ	$Hata\ Analizi$
$N=M=5$	0.5	0.2694
	1	0.1600
	5	0.1600
$N=M=25$	0.5	0.0993
	1	0.0983
	5	0.0974
$N=M=100$	0.5	0.0971
	1	0.0967
	5	0.0964
$N=M=400$	0.5	0.0964
	1	0.0963
	5	0.0963

Çizelge 4.2. $0 \leq t \leq \pi$ değerleri için hesaplanmıştır.

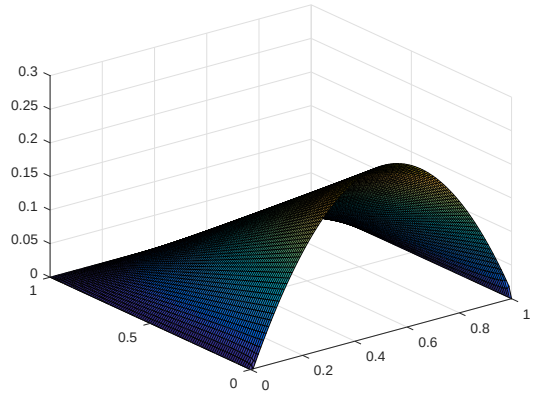
$\tau = \frac{1}{N}, h = \frac{1}{M}$	λ	$Hata\ Analizi$
$40, 50$	0	0.1365
	0.00001	0.1362
	0.001	0.1147
$65, 65$	0	0.0857
	0.00001	0.0853
	0.001	0.0678
$70, 90$	0	0.0795
	0.00001	0.0789
	0.001	0.0900
$150, 100$	0	0.0386
	0.00001	0.0382
	0.001	0.0655

Çizelge 4.3. $0 \leq x \leq 1$ değerleri için hesaplanmıştır.

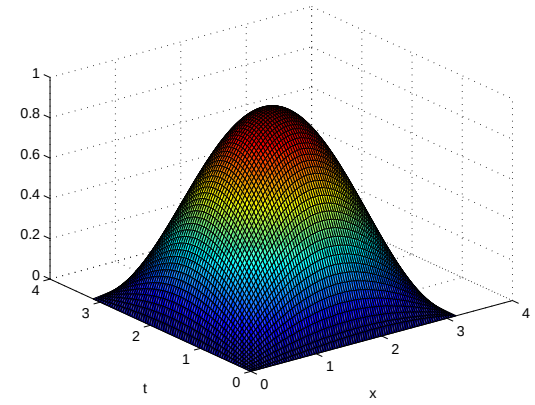
$\tau = \frac{1}{N}, h = \frac{1}{M}$	λ	$Hata\ Analizi$
$50, 50$	0	0.0231
	0.00002	0.0231
	0.00005	0.0230
$70, 70$	0	0.0173
	0.00002	0.0171
	0.00005	0.0169
$120, 108$	0	0.0106
	0.00002	0.0103
	0.00005	0.0098
$250, 230$	0	0.0053
	0.00002	0.0052
	0.00005	0.0063



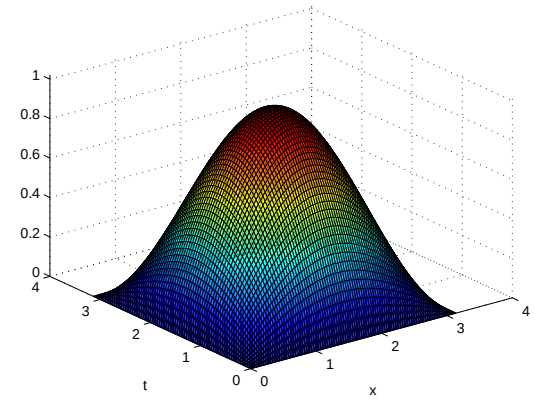
Şekil 4.1. Örnek 3.1. in tam çözüm grafiğini verir.



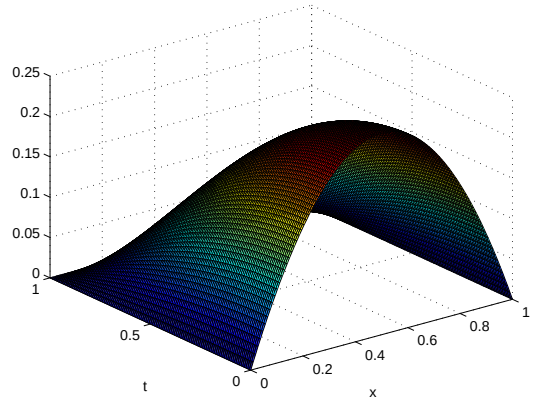
Şekil 4.2. Örnek 3.1. in $N = 100, M = 100, \lambda = 5$ noktasındaki yaklaşık çözüm grafiğini verir.



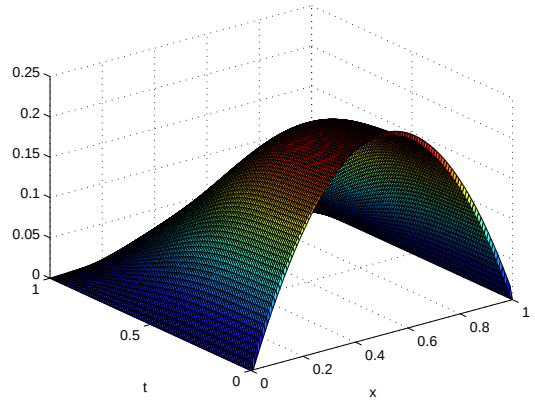
Şekil 4.3. Örnek 3.2. için $N = 70$ and $M = 90$ noktasındaki yaklaşık çözüm grafiğini verir.



Şekil 4.4. Örnek 3.2. in tam çözüm grafiğini verir.



Şekil 4.5. Örnek 3.3. için $N = 120$ ve $M = 108$ noktasındaki yaklaşık çözüm grafiğini verir.



Şekil 4.6. Örnek 3.3. in tam çözüm grafiğini verir.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada, Schrödinger pseudo-parabolik kısmi diferansiyel denkleminin tam çözümü ve sonlu fark şeması metodu kullanılarak yaklaşık çözümü ele alındı. Tam çözümü için Çift Laplace Modifiye metodu kullanıldı. Bu denklemi için sonlu fark şemaları oluşturuldu. Schrödınger problemi için bulunan bu fark şemaları için kararlılık kestirimleri yapıldı. Matlab programı yardımıyla bulunan bu nümerik sonuçlar tam çözümle karşılaştırılarak hata analizi yapıldı. Tam ve yaklaşık çözümler için grafikler verildi.Yaklaşık sonuçlar hata analizi tablolarında gösterildi.

Sonlu fark şeması metodu lineer ve lineer olmayan problemlerin yaklaşık çözümlerini hesaplamak için uygulanabilir. Bu metod schrodinger hiperbolik denklemlerede uygulanabilir.

KAYNAKLAR

[1] ALEMRANINEJAD S.M.A. and SOLAIMANI M., 2021. Electronic spectrum of linear schrodinger equations by sinc-galerkin and sinc-collocation methods. Mathematical Sciences, pp. 1-10.

[2] AMINIKHAH, H., 2013. An analytical approximation for coupled viscous Burgers equation. Applied Mathematical Modelling, 37(8), 5979-5983

[3] AMIRALI I. and GABIL M. , 2012. Three layer difference method for linear pseudo-parabolic equation with delay. Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 401, Article ID113786.

[4] ASHYRALYEV, ALLABEREN, GERCEK O., 2008. Nonlocal boundary value problems for elliptic-parabolic differential and difference equations. Master's Thesis. Fen Bilimleri Enstitüsü.

[5] BADER P., BLANES S. and CASAS F., 2013. Solving the Schrodinger eigenvalue problem by the imaginary time propagation technique using splitting methods with complex coefficients. Journal of Chemical Physics, vol. 139, no. 12, Article ID124117.

[Balsara,1995] ALSARA, D. S. 1995. Von Neumann stability analysis of smoothed particle hydrodynamics?Suggestions for optimal algorithms. Journal of Computational Physics, 121(2), 357-372.

[7] DEHGHAN, M., HAMIDI, A., and SHAKOURIFA, 1998. The solution of coupled Burgers equations using Adomian Pade technique. Applied Mathematics and Computation, 189(2), 1034-1047.

[8] DEHGHAN, M. and SHOKRI, A. 2007. A numerical method for two-dimensional Schrodinger equation using collocation and radial basis functions.Computers and Mathematics with Applications, 54(1), 136-146.

[9] ELTAYEB, H., 2021. Three-dimensional Laplace adomian decomposition method and singular pseudoparabolic equations. Journal of Function Spaces.

[10] FAIRWEATHER, G., and KHEBCHAREON, 2002. Numerical methods for Schrodinger-type problems. Trends in Industrial and Applied Mathematics, 219-250.

[11] FEYNMAN R. P., HIBBS A. R., and STYER D. F., 2010. Quantum Mechanics and Path Integrals. Courier Corporation, Chelmsford, MA, USA

[12] GADAIN, H. E. , 2018. Solving coupled pseudo-parabolic equation using a modified double Laplace decomposition method. Acta Mathematica Scientia, 38(1), 333-346.

[13] GUNDOGDU H. and G.O., 2019. Double Laplace decomposition method and exact solutions of Hirota, Schrodinger and complex mKdV equations. Konuralp Journal of Mathematics (KJM), vol. 7, no. 1, pp. 7-15,.

[14] HUNTUL, M. J., 2021. Identifying an unknown heat source term in the third-order pseudo-parabolic equation from nonlocal integral observation. International Communications in Heat and Mass Transfer, 128, 105550.

[15] ILHAN, O. A., ESEN, A., BULUT, H., and BASKONUS, H. M., 2019. Singular solitons in the pseudo-parabolic model arising in nonlinear surface waves. Results in Physics, 12, 1712-1715

[16] JARADAT E.K., OMAR A., ABUDAYAH M. and AL-FAQIH, 2018. Anapproximate analytical solution of the nonlinear Schrodinger equation with harmonic oscillator using homotopy perturbation method and Laplace-Adomian decomposition method. Advances in Mathematical Physics.
[17] KAYA, DOGAN, 2001. An explicit solution of coupled viscous Burgers' equation by the decomposition method. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 27(11), 675-680.
[18] LI H., APPELO D. and ZHANG X., 2021. Accuracy of spectral element method for wave, parabolic and Schrodinger equations.SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 60, no. 1, pp. 614□627, 2021, arXiv preprint arXiv:2103.00400.
[19] MESLOUB, SAID, 2006. A nonlinear nonlocal mixed problem for a second order pseudoparabolic equation. Journal of mathematical analysis and applications, 316(1), 189-209.
[20] MODANLI M., BAJJAH, B., and KUSULAY S., 2021. Two Numerical Methods for Solving the Schrodinger Parabolic and Pseudoparabolic Partial Differential Equations. Advances in Mathematical Physics, 2022.
[21] NADEEM M. and YAO S.M., 2019. Solving system of partial differential equations using variational iteration method with He polynomials. Journal of Mathematics and Computer Science, vol. 19, no. 03, pp. 203-211.
[22] PERVAIZ and I. AZIZ, 2020. Haar wavelet approximation for the solution of cubic nonlinear Schrodinger equations.Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, vol. 545, Article ID 123738.
[23] UPTON, SUSAN, 2004. Students' solution strategies to differential equations problems in mathematical and non-mathematical contexts.Boston University.
[24] YANG M., 2008. Analysis of second order finite volume element methods for pseudo-parabolic equations in three spatial dimensions . Applied Mathematics and Computation, vol. 196,no. 1, pp. 94-104.