İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELASTİK ZEMİN ÜZERİNE OTURAN TIMOSHENKO KİRİŞİNDE TİTREŞİM PROBLEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Ayben Gülseli DEVELİ

Anabilim Dalı : İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

Programı : YAPI MÜHENDİSLİĞİ

EYLÜL 2007

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELASTİK ZEMİN ÜZERİNE OTURAN TIMOSHENKO KİRİŞİNDE TİTREŞİM PROBLEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. Ayben Gülseli DEVELİ
501031120

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 14 Eylül 2007
Tezin Savunulduğu Tarih : 19 Eylül 2007

Tez Danışmanı :	**Prof.Dr. Hasan ENGİN**
Diğer Jüri Üyeleri	**Prof.Dr. Mehmet BAKİOĞLU**
	Doç.Dr. İrfan COŞKUN (Y.T.Ü.)

EYLÜL 2007

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim süresince derin bilgisi, hoşgörüsü ve sonsuz desteği ile bana her konuda yardımcı olan, değerli hocam Prof. Dr. Hasan ENGİN ' e teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Tüm öğrenim hayatım boyunca her zaman yanımda olan, maddi manevi desteklerini esirgemeyen, sevgili babam Mehmet DEVELİ' ye, annem Hatice DEVELİ' ye ve bütün aileme teşekkür ederim.

Eylül 2007 Ayben Gülseli Develi

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ v
ŞEKİL LİSTESİ vi
SEMBOL LİSTESİ viii
ÖZET x
SUMMARY xii

1. GİRİŞ 1

1.1. Genel Bilgiler 1

1.2. Konu İle İlgili Diğer Çalışmalar 5

1.3. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı 10

2. ÖZEL PROBLEMİN TANIMI, TEMEL DENKLEMLER VE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ 12

2.1. Özel Problemin Tanımı 12

2.2. Kayma ve Dönel Ataletin Etkileri 12
2.2.1. Yönetici Denklemler (The Governing Equations) 13

2.3. Winkler Elastik Zeminine Oturan Kirişlerin Diferansiyel Denklemleri 16

2.3.1. Çözüm Sırasında Karşılaşılabilecek Durumlar 18
2.3.1.1. Durum I: $\theta > \beta$ Olması Hali 18
2.3.1.2. Durum II: $\theta = \beta$ Olması Hali 19
2.3.1.3. Durum III: $\theta < \beta$ Olması Hali 20

2.4. Vlasov Elastik Zeminine Oturan Kirişlerin Diferansiyel Denklemleri 28

2.4.1. Çözüm Sırasında Karşılaşılabilecek Durumlar 31
2.4.1.1. Durum I: $\beta_2{}^2 - \beta_3\beta_1 > 0$ Olması Hali 31
2.4.1.2. Durum II: $\beta_2{}^2 - \beta_3\beta_1 < 0$ Olması Hali 32
2.4.1.3. Durum III: $\beta_2{}^2 - \beta_3\beta_1 = 0$ Olması Hali 33

2.5. Winkler Elastik Zeminine Oturan Euler Kirişinin Denklemleri 41

2.6. Winkler Zeminine Oturan Çekme Gerilmesi Almayan Timoshenko Kirişi 44

3. SAYISAL SONUÇLAR 50

3.1. Sayısal Değerler 50

3.2. Sonuçlar 50

KAYNAKLAR **59**

EKLER **63**

ÖZGEÇMİŞ **70**

TABLO LİSTESİ

		Sayfa No
Tablo 1.1	Çeşitli Zemin Türleri İçin Ortalama “k” Değerleri	6
Tablo 2.1	Diferansiyel Denklemin Çözüm Denkleminin Kök Fonksiyonları	26

ŞEKİL LİSTESİ

		Sayfa No
Şekil 1.1	: Winkler Zemin Modeli	2
Şekil 1.2	: Winkler zemin modelini temsil eden yayların üzerine farklı bir yaklaşım olarak getirilen elastik membran tabaka	3
Şekil 1.3	: Vlasov Zemin Modeli	5
Şekil 2.1	: Kesme kuvveti nedeniyle bir kiriş kesitinin deformasyonu	12
Şekil 2.2	: (a) Yüke maruz kalan kirişin diferansiyel elemanı ve (b) ilave kayma deformasyonun kinematiksel detayları	14
Şekil 2.3	: Winkler elastik zeminine oturan Timoshenko Kirişinin bölgeleri	21
Şekil 2.4	: Vlasov elastik zeminine oturan Timoshenko Kirişinin bölgeleri	33
Şekil 2.5	: Winkler zemininde çekme almayan kiriş modeli	47
Şekil 3.1	: Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde, yük ξ=1/3 'te, Ω/ω_0 oranına göre yerdeğiştirme değişim grafiği	51
Şekil 3.2	: Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde, yük ξ=1/3 'te, Ω/ω_0 oranına göre kesme kuvveti değişim grafiği	51
Şekil 3.3	: Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde, yük ξ=1/3 'te, Ω/ω_0 oranına göre eğilme momenti değişim grafiği	51
Şekil 3.4	: Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde, yük ξ=1/2 'de, Ω/ω_0 oranına göre yerdeğiştirme değişim grafiği	52
Şekil 3.5	: Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde, yük ξ=1/2 'de, Ω/ω_0 oranına göre kesme kuvveti değişim grafiği	52
Şekil 3.6	: Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde, yük ξ=1/2 'de, Ω/ω_0 oranına göre eğilme momenti değişim grafiği	52
Şekil 3.7	: t'nin değişimi durumunda Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde yerdeğiştirme grafiği	53
Şekil 3.8	: t'nin değişimi durumunda Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde kesme kuvveti grafiği	53
Şekil 3.9	: t'nin değişimi durumunda Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde eğilme momenti grafiği	54
Şekil 3.10	: Ω/ω_0 = 1 durumunda Winkler ve Vlasov zeminlerine oturan Timoshenko kirişinde yerdeğiştirme grafiği	54
Şekil 3.11	: Ω/ω_0 = 1 durumunda Winkler ve Vlasov zeminlerine oturan Timoshenko kirişinde kesme kuvveti grafiği	55
Şekil 3.12	: Ω/ω_0 = 1 durumunda Winkler ve Vlasov zeminlerine oturan Timoshenko kirişinde eğilme momenti grafiği	55
Şekil 3.13	: Ω/ω_0=3,5 durumunda Winkler ve Vlasov zeminlerine oturan Timoshenko kirişinde yerdeğiştirme grafiği	55
Şekil 3.14	: Ω/ω_0=3,5 durumunda Winkler ve Vlasov zeminlerine oturan Timoshenko kirişinde kesme kuvveti grafiği	56
Şekil 3.15	: Ω/ω_0=3,5 durumunda Winkler ve Vlasov zeminlerine oturan Timoshenko kirişinde eğilme momenti grafiği	56
Şekil 3.16	: Ω/ω_0 = 1 durumunda Winkler zemininde Euler kirişi ile Timoshenko kirişinin karşılaştırmalı yerdeğiştirme grafiği	57
Şekil 3.17	: Ω/ω_0 = 1 durumunda Winkler zemininde Euler kirişi ile Timoshenko kirişinin karşılaştırmalı kesme kuvveti grafiği	57

Şekil 3.18 : $\Omega/\omega_0 = 1$ durumunda Winkler zemininde Euler kirişi ile Timoshenko kirişinin karşılaştırmalı eğilme momenti grafiği 58
Şekil B.1 : $\Omega/\omega_0 = 1$ durumunda ve yük ξ=1/3 'te Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde yerdeğiştirme grafiği 64
Şekil B.2 : $\Omega/\omega_0 = 1$ durumunda ve yük ξ=1/3 'te Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde kesme kuvveti grafiği 64
Şekil B.3 : $\Omega/\omega_0 = 1$ durumunda ve yük ξ=1/3 'te Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde eğilme momenti grafiği 64
Şekil B.4 : $\Omega/\omega_0 = 2$ durumunda ve yük ξ=1/3 'te Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde yerdeğiştirme grafiği 65
Şekil B.5 : $\Omega/\omega_0 = 2$ durumunda ve yük ξ=1/3 'te Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde kesme kuvveti grafiği 65
Şekil B.6 : $\Omega/\omega_0 = 2$ durumunda ve yük ξ=1/3 'te Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde eğilme momenti grafiği 65
Şekil B.7 : $\Omega/\omega_0 = 3$ durumunda ve yük ξ=1/3 'te Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde yerdeğiştirme grafiği 66
Şekil B.8 : $\Omega/\omega_0 = 3$ durumunda ve yük ξ=1/3 'te Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde kesme kuvveti grafiği 66
Şekil B.9 : $\Omega/\omega_0 = 3$ durumunda ve yük ξ=1/3 'te Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde eğilme momenti grafiği 66
Şekil B.10 : Ω/ω_0=3,5 durumunda ve yük ξ=1/3 'te Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde yerdeğiştirme grafiği 67
Şekil B.11 : $\Omega/\omega_0 = 3,5$ durumunda ve yük ξ=1/3 'te Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde kesme kuvveti grafiği 67
Şekil B.12 : $\Omega/\omega_0 = 3,5$ durumunda ve yük ξ=1/3 'te Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde eğilme momenti grafiği 67
Şekil B.13 : $\Omega/\omega_0 = 2$ durumunda Winkler ve Vlasov zeminlerine oturan Timoshenko kirişinde yerdeğiştirme grafiği 68
Şekil B.14 : $\Omega/\omega_0 = 2$ durumunda Winkler ve Vlasov zeminlerine oturan Timoshenko kirişinde kesme kuvveti grafiği 68
Şekil B.15 : $\Omega/\omega_0 = 2$ durumunda Winkler ve Vlasov zeminlerine oturan Timoshenko kirişinde eğilme momenti grafiği 68
Şekil B.16 : $\Omega/\omega_0 = 3$ durumunda Winkler ve Vlasov zeminlerine oturan Timoshenko kirişinde yerdeğiştirme grafiği 69
Şekil B.17 : $\Omega/\omega_0 = 3$ durumunda Winkler ve Vlasov zeminlerine oturan Timoshenko kirişinde kesme kuvveti grafiği 69
Şekil B.18 : $\Omega/\omega_0 = 3$ durumunda Winkler ve Vlasov zeminlerine oturan Timoshenko kirişinde eğilme momenti grafiği 69

SEMBOL LİSTESİ

E	: Kiriş elastisite modülü
G	: Kayma modülü
A	: Kiriş kesit alanı
κ	: Kesit şekline bağlı uyum katsayısı
J	: Kutupsal atalet
I	: Eylemsizlik momenti
dx	: Kiriş elemanının uzunluğu
l	: Kiriş boyu
L	: Kiriş karekteristik boyu
m_1	: Kiriş kütlesi
ρ	: Kiriş kütle yoğunluğu
E_0	: Zemin elastisite modülü
ν_0	: Zemin poisson oranı
m_0	: Zemin kütlesi
H	: Kiriş altındaki zemin tabakası derinliği
k	: Zemin yatak katsayısı
t	: Zeminden gelen tepki kuvveti
γ	: Zemin karekterine bağlı boyutsuz sabit
δ	: Zemin tabakası genişliği
Y	: Çökme
M	: Eğilme momenti
T	: Kesme kuvveti
P	: Tekil kuvvet
q(x)	: Zemin tepkisi
ψ	: Kesit eğimini ölçen bir koordinat
ϕ	: Zemin parametrelerinin hesabında kullanılan şekil fonksiyonu
ζ	: Kirişin herhangi bir noktasının koordinatının kiriş uzunluğuna oranını gösteren boyutsuz bir büyüklük
Ω	: Zorlanma frekansı

A,B,C,D : Diferansiyel denklemin bilinmeyen katsayıları

$\mathbf{A_1,A_2,A_3,A_4}$: Diferansiyel denklemin bilinmeyen katsayıları

$\mathbf{B_1,B_2,B_3,B_4}$: Diferansiyel denklemin bilinmeyen katsayıları

$\mathbf{C_1,C_2,C_3,C_4}$: Diferansiyel denklemin bilinmeyen katsayıları

ELASTİK ZEMİNE OTURAN TIMOSHENKO KİRİŞİNDE TİTREŞİM PROBLEMİ

ÖZET

Ayben Gülseli DEVELİ

Elastik zemine oturan kirişler uygulamada çok sık rastlanan yapı elemanları olduğundan bu konuda yapılan çalışmalar oldukça fazladır. Bu tür sistemlerde zemin-yapı etkileşimini gerçekçi bir modelle ortaya koyarak yapının analizini yapmak gerekmektedir. Bu çalışmanın amacı, kiriş uzunluğu, zemin derinliği ve zeminin düşey deformasyon parametresi gibi farklı değişkenlerin, Winkler zemin modeli ve Vlasov zemin modelini kullanarak elastik zemine oturan her iki ucu serbest kirişlerin dinamik davranışları üzerindeki etkilerini incelemektir.

Bu tez çalışmasında, Winkler elastik zemini ve Vlasov elastik zemini üzerine oturan sonlu uzunluktaki bir Timoshenko kirişinin titreşim problemi incelenmektedir. Kirişin diferansiyel denklemlerinden elastik eğri fonksiyonu elde edilmektedir.

Bu amaç doğrultusunda çalışmanın birinci bölümünde zemin modelleri incelendikten sonra elastik zemine oturan kirişler hakkında daha önce gerçekleştirilen bazı çalışmalar sunulmakta, diğer modeller hakkında kısa bilgiler verilmektedir. Elastik zeminin değişken karakterinden bahsedilmekte ve problemin çözümü için yapılabilecek idealleştirmeler düşünülmektedir. Elastik zemin üzerine yapılmış ilk çalışma olan Winkler zemini ve Vlasov zemini anlatılmaktadır.

İkinci bölümde ise dikkate alınan özel problemlerin tanımı yapılmaktadır. Zemin durumunun Winkler veya Vlasov zemini olması durumunda kirişin denge denklemleri kullanılarak yönetici denklemler kurulmaktadır. Bu yönetici denklemlerden elastik eğri fonksiyonları elde edilmektedir. Her iki durum için çözüm yöntemleri ve sınır koşulları tanımlanmaktadır. Bu bölümde dikkate alınan özel problemler;

- Winkler elastik zeminine oturan Timoshenko kirişi
- Vlasov elastik zeminine oturan Timoshenko kirişi

- Winkler zeminine oturan çekme gerilmesi almayan Timoshenko kirişi
- Winkler elastik zeminine oturan Euler kirişi

Üçüncü bölümde sayısal örneklerde kullanılan parametreler tanımlanmakta ve yönetici denklemlerden elde edilen elastik eğri fonksiyonları kullanılarak örnekler analiz edilmektedir. Kiriş boyunca yerdeğiştirme, eğilme momenti ve kesme kuvvetini gösteren grafikler, çeşitli zorlanma frekanslarına bağlı olarak elde edilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Winkler Zemin Modeli, Vlasov Zemin Modeli, Timoshenko Kirişi

VIBRATION PROBLEM OF THE TIMOSHENKO BEAM ON AN ELASTIC FOUNDATION

SUMMARY

Ayben Gülseli DEVELİ

There have been many works about beams on the elastic foundations in the literature because beams on the elastic foundations are frequently encountered structural element in practice. It is necessary to analyze the structure by clarifying foundation-structure interaction with a realistic model in this kind of systems. The aim of this study is to investigate the effects of the various variables such as beam length, foundation depth and vertical deformation parameter of the foundation on the dynamic behaviors of the beams with the ends free on the elastic foundations by using Winkler and Vlasov foundation models.

In this thesis study, vibration problem of a Timoshenko beam with finite length on the Winkler elastic foundation and the Vlasov elastic foundation is investigated. Elastic curve functions are obtained from differential equations of the beam.

In the first chapter, after analyzing the foundation models, some previous researches related with beams on the elastic foundations are presented and brief information about the other models is given. Variable character of the elastic foundation is mentioned and possible idealizations for the solution of the problem are considered. Winkler foundation which is the first study on the elastic foundation, and Vlasov foundation are described.

In the following chapter, the considered special problems are defined. Under the assumption of Winkler or Vlasov foundation models, the governing equations are established by using equilibrium equations of the beam. Elastic curve functions are obtained from these governing equations. For both models, solution methods and boundary conditions are defined. Some special problems which will be considered in this chapter are as follows;

- Timoshenko beam on the Winkler elastic foundation
- Timoshenko beam on the Vlasov elastic foundation
- Euler beam on the Winkler elastic foundation
- Timoshenko beam without tension on the Winkler elastic foundation

In the third chapter, the parameters used in the numerical examples are defined, and then these examples are analyzed by using elastic curve functions which are obtained from governing equations. The graphs illustrating the variation of displacement, bending moment and shearing force along the beam are obtained.

Keywords: Winkler foundation model, Vlasov foundation model, Timoshenko beam

1. GİRİŞ

1.1. Genel Bilgiler

Elastik zemine oturan kirişler, mühendislik uygulamalarında çok kullanılan yapı elemanlarıdır. Elastik zemine oturan betonarme binalar, havaalanı yapılarında yumuşak filamentlerin kullanımının artması, soğuk bölgelerde yapılan bina çalışmaları, yatay yük etkisindeki düşey kazık ve palplanş kullanımının artması ile elastik ve viskoelastik zemine oturan kiriş, plak ve kabuk problemi gibi uygulama alanlarının çokluğu, elastik zemin üzerine oturan betonarme elemanlarının detaylı bir biçimde incelenmesi durumunu ortaya çıkarmıştır. Bu incelemelerde zeminin, karmaşık elastik veya plastik deformasyonlar yapabilme özelliği bir takım zorluklar oluşturmuştur. Zeminin bu deformasyonları nedeniyle, elastik zemine oturan yapıları incelerken, zeminin etkisi her zaman dikkate alınması gereken önemli bir unsurdur. Yapının bünye denklemleri gibi, zeminin bünye denklemlerini de bilmek ve yapı ile zemin arasındaki ilişkiyi ortaya koymak gerekir.

Zeminin elastik ve plastik deformasyon yapabilme özelliklerinden dolayı, elastik zemine oturan betonarme yapı elemanlarını analiz etmeden önce zeminle ilgili bir takım idealleştirmeler yapılması gerekmektedir. Ancak zemin parametrelerinin idealleştirilmesi, matematik analizin doğru sonuca ulaşmasını, gerçeğe yakınlığını sınırlayan bir durumdur. Elastik zemin üzerine çalışmış araştırmacılar zeminin fiziksel ve mekanik özelliklerini çeşitli şekillerde analiz etmiş ve modellemişlerdir.

Elastik zemin üzerine oturan kirişlerin analizi üç aşamadan oluşur. Bu aşamalardan ilki ve en önemlisi, yapının davranışı ve zemin tipiyle ilgili temel kabullerin yapılmasıdır. İkinci aşama zemin katsayısı, kiriş boyutu ve kiriş malzemesi gibi gerekli büyüklüklerin seçilmesidir. Üçüncü aşama ise, birinci ve ikinci aşamalardan elde edilen bilgiler ele alınarak problemin matematiksel olarak kesin veya yaklaşık bir biçimde çözülmesidir.

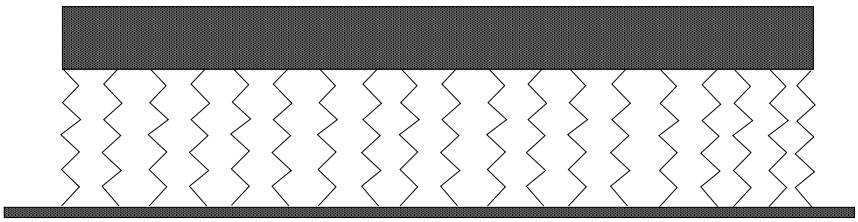
Elastik zemin üzerine oturan yapıların davranış şekli ile ilgili ilk önemli çalışma 1867 yılında Winkler [1] tarafından yapılmış ve kendi ismiyle anılan Winkler zemini hipotezini ortaya koymuştur. Bu hipotez, zemine son derece basit ve kolay bir yaklaşım kazandırdığından, kiriş ve plak problemlerinde oldukça geniş bir uygulama

alanına ulaşmıştır. Winkler, hipotezinde zeminin birbirine sonsuz yakın, elastik ve lineer yaylardan oluştuğunu kabul etmiştir. Hipoteze göre, elastik zeminin üzerinde bulunan, çeşitli yüklerin etkisi altındaki elastik ve prizmatik kirişin herhangi bir noktasındaki zemin tepkisi (taban basıncı), kirişin aynı noktadaki çökme değeri ile doğru orantılıdır. Başka bir ifadeyle, yatak ortamının elastik olduğunu yani zemin malzemesinin Hooke kanunlarına uygunluk gösterdiğini belirtir. Zemin basınç deneyleri, yük, belli bir değeri aşmadıkça, deformasyonların yükle orantılı olduğunu gösterir. q(x) elastik zeminin tepkisi ve V(x) kirişin düşey doğrultudaki çökme değeri olarak ele alınırsa, zemin yatak katsayısı k (1.1) denklemi ile elde edilebilir.

$$q(x) = kV(x) \tag{1.1}$$

Burada k elastik yay katsayısı olup, uygulamada yatak katsayısı veya zemin parametresi olarak adlandırılır. Bu parametre, düşey yerdeğiştirme bir birim olduğunda, birim genişlikteki birim alana gelen tepki kuvvetini ifade eder. Winkler zemin hipotezi küçük yerdeğiştirmeler için kullanılır. Winkler zemin hipotezine göre, zeminin homojen olmamasından dolayı yatak katsayısı noktadan noktaya farklılık gösterir. Bu nedenle yatak katsayısı, yatay bir düzlemin çeşitli noktalarında, birbirinden farklı değerler alabileceği gibi, derinliğin artması ile de değişebilir. Ancak zemin yatak katsayısı k, zemin tepkisinden ve taban basıncından bağımsız bir değerdir ve bütün temel yüzeyi boyunca sabit kaldığı varsayılır. Bu hipotez problemin matematiksel çözümünü oldukça basitleştirir.

Winkler hipotezinin bir diğer kabulü de, zemine etki eden bir kuvvetin sadece etki ettiği noktada şekil değiştirmeye neden olması durumudur. Yani Winkler, Şekil 1.1‘ de görüldüğü gibi, elastik zemini birbirinden bağımsız, birbirine sonsuz yakınlıkta ve sıkışarak serbetçe hareket edebilen düşey yaylardan oluşan mekanik bir sistem olarak kabul etmektedir.



Şekil 1.1 : Winkler Zemin Modeli

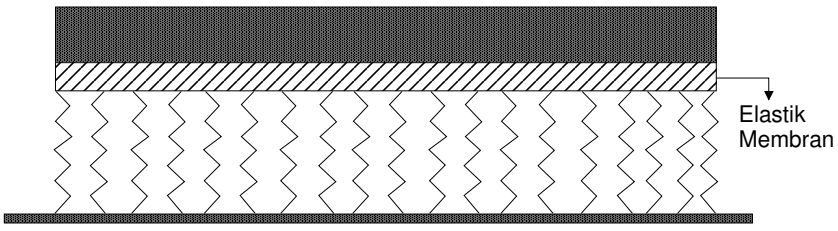
Winkler hipotezini basit hale getiren özellik, her bir yayın yalnız doğrudan doğruya yüklendiklerinde çöküp hareket etmesidir. Ancak her bir yayın komşu yayların yüklenme, sıkışma ve çökmesinden etkilenmediği öngörülmektedir. Başka bir ifadeyle, herhangi bir noktanın çökmesinin, diğer noktalardaki yüklerden ayrı bir şekilde gerçekleştiği düşünülmüştür. Bunun sonucu olarak, zeminin tamamen süreksiz bir ortam olarak davrandığı gözönüne alınmış olunur.

Mühendislikte, Winkler hipotezi, bina döşemeleri ve köprü tabliyelerinin karakteristik konstrüksiyonu olan ızgara sistemlerin çözümünde, bir veya iki doğrultuda sürekli temellerin, gemi kaburgalarının, dönel kabukların, su tankları ve betonarme silo temellerinin ve yatay yük etkisinde düşey kazıkların ve palplanşların hesabında kullanılır. Özellikle temel sistemlerinde Winkler hipotezini doğrulayan bazı önemli durumlar görülmüştür. Bu düşüncelerden hareketle, basitliğine karşın Winkler hipotezinin, gerçek temel zemin durumunu, bazı karmaşık bağıntılarla veren hipotezlere göre daha yakın bir şekilde ifade ettiği sonucuna varılabilir [2].

Winkler'in zemin modelinde, zemin karakterini ifade eden bir tek k zemin yatak katsayısı parametresi vardır. Zeminin fiziksel ve mekanik özellikleri, Winkler'in basit matematiksel bağıntısıyla ortaya konulmaktan çok daha karmaşık bir durum teşkil eder. Yalnız belirli durumlarda bu hipotezin gerçeğe yakın sonuçlar verdiği bulunmuştur. Bu nedenle elastik zemini daha gerçekçi bir şekilde modelleyebilmek için, kayma gerilmelerini de içeren iki parametreli modeller geliştirilmiştir [3]. Bunlardan bazıları şöyledir.

1. Vlasov
2. Hetenyi
3. Pasternak
4. Filonenko-Borodich

Filonenko-Borodich modelinde, ortaya konulan yeni yaklaşım, Şekil 1.2' de görüldüğü gibi, Winkler zeminini oluşturan yayların üzerinde yayların birbiriyle etkileşimini sağlayan elastik bir membran tabakasının olduğu kabulüdür.



Şekil 1.2 : Winkler zemin modelini temsil eden yayların üzerine farklı bir yaklaşım olarak getirilen elastik membran tabaka

Bu modelde sisteme yükleme yapıldığında yüzeyde gerilme meydana gelmektedir. Bu durumda zemin tepkisi aşağıdaki gibidir.

$$p(x,y) = kw(x,y) - T\nabla^2 w(x,y) \tag{1.2}$$

Burada T, membran kuvveti ve,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{1.3}$$

kartezyen koordinatlarda, Laplace operatörüdür.

Hetenyi modelinde, Winkler yaylarının üzerinde iki boyutlu problemler için bir plak ve tek boyutlu problemler için bir kiriş olduğu kabul edilir. Bu modelde zemin tepkisi şu şekildedir:

$$p(x,y) = kw(x,y) + D\nabla^2\nabla^2 w(x,y) \tag{1.4}$$

Burada D plağın eğilme rijitliğidir ve,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{1.5}$$

olarak ifade edilir. Bu ifadede,

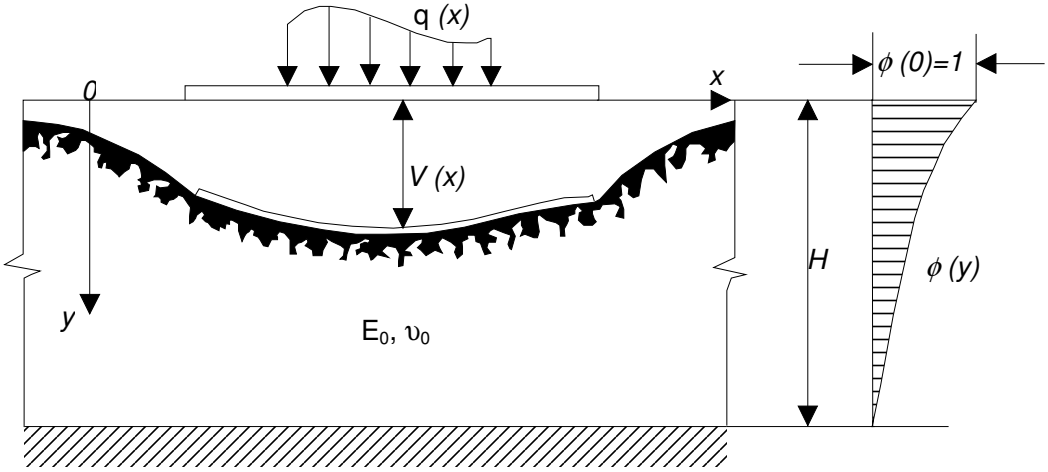
E= Elastisite modülü
h= plak kalınlığı
ν= Poisson oranı ' dır.

Pasternak modelinde, yaylar arasındaki kesme kuvveti, yaylar üzerinde bulunan, sadece düşey deplasman yapabilen ve sıkışmayan elemanlardan oluşan elastik bir kayma tabakası ile alınır. Kayma tabakası, (x,y) düzleminde izotropik olarak kabul edilmiştir.

Vlasov [4] modelinde, zemin yarı sonsuz bir ortam olarak kabul edilir ve zemin parametresini elde etmek için zeminin elastisite modülü, Poisson oranı, derinliği ile genişliğinden yararlanılmaktadır. Bu modelde, diğerlerinden farklı olarak elastik zemin parametrelerinin hesabı için yaklaşım metodu temel alınmış ve virtüel iş prensibi kullanılmıştır. Vlasov zemin modelinde tek katmanlı zemin için denge denklemi ;

$$2tV''+kV = q(x)\phi(0) \qquad (1.6)$$

olarak ifade edilir. Bu denge denkleminde q(x) zemin tepkisi, k zemin yatak katsayısı, 2t ise Winkler modelinde gözönünde bulundurulmayan, yaylar arasındaki kesme deformasyonunu ifade eden zemin parametresini göstermektedir. Bir başka deyişle 2t sıfır olarak alındığında Winkler zemin modeline ait denklem elde edilmektedir. Bu iki zemin parametresini hesaplayabilmek için Vlasov ve Leontev elastik zemin derinliğince düşey deplasman profilini temsil eden diğer bir parametre olan γ ' yı tanımlamışlardır. Bu yaklaşımın getirdiği avantaj, zemin modülü k ile yaylar arasındaki etkileşimi ifade eden 2t 'nin zemin ile kirişin veya plağın geometrisi ve malzeme özelliklerine bağlı olarak hesaplanabilmesidir.



Şekil 1.3 : Vlasov Zemin Modeli

1.2. Konu İle İlgili Diğer Çalışmalar

Uygulamalı mekanikte ilk kez Winkler tarafından geliştirilen, özellikle zeminin elastik karakteristikleri ve yüklü alanın boyutları başta olmak üzere birçok etkene bağlı olan yatak katsayısının değeri ile ilgili detaylı çalışmalar yapılmıştır.

Zimmermann [5] k yatak katsayısını, tüm uzunlukları boyunca balast üzerine oturan demiryolu traverslerinin hesabında kullanarak, kendi özel uygulamalarında çeşitli zemin türleri için bulduğu ve kullandığı k değerlerini vermiştir. Fakat yatak katsayısı, zemin sınıfının davranış şeklini tam anlamıyla belirleyen bir ifade değildir. Yatak katsayısı sadece zemin özelliklerine bağlı olmayıp aynı zamanda yükün şiddetine ve yükün etkidiği doğrultu ve etkime noktasına göre de değişebildiğinden Elastisite modülü veya Poisson oranı gibi zemine ait karakteristik bir özellik de değildir. Bu

nedenle, herhangi bir zemin için genelleme yapmak mümkün değildir. Hatta belirli bir arazi parçası üzerinde üniform homojen bir zeminde dahi yapılacak yükleme deneylerinden farklı yatak katsayısı değerleri bulunabilir. Fakat bir kiriş veya plakta oluşan moment ve gerilmelerin yatak katsayısı değerinden çok fazla etkilenmemesi nedeni ile büyük hatalar yapmaksızın seçilebilecek yatak katsayısı değeri çok geniş bir aralıkta yer almaktadır [6].

Bowles [7] temel yapısının, zeminden on kat ve hatta daha fazla rijit olması nedeniyle, yatak katsayısının değerinin (1.7) eşitliği kullanılarak zeminin maksimum taşıma kapasitesine göre saptanmasının çok yanıltıcı bir sonuç vermeyeceğini ve yaklaşık bir hesap için kullanılabileceğini ifade etmiştir.

$$k_s \cong 40 q_a \quad \text{KN/m}^3 \qquad (1.7)$$

Bu eşitlikte q_a ifadesi, zeminde 0,0254 m derinliğinde bir oturmaya yol açacak zemin kapasitesinin, bir emniyet sayısına (GS) bölünmesiyle elde edilen emniyetli taşıma kapasitesidir.

Tablo1.1: Çeşitli Zemin Türleri İçin Ortalama "k" Değerleri

Zemin Türü	K (KN / m^3)
Balçık ; turba	<2.000
Kil ; plastik	5.000 - 10.000
Kil ; yarı sert	10.000 - 15.000
Kil ; sert	15.000 - 30.000
Dolma Torak	10.000 - 20.000
Kum , gevşek	10.000 - 20.000
Kum , orta sıkı	20.000 - 50.000
Kum , sıkı	50.000 - 100.000
Kum-Çakıl ; sıkı	100.000 - 150.000
Sağlam Şist	>500.000
Kaya	>2.000.000

Mühendislik problemlerinin çözümü için gerekli olan k yatak katsayısının sayısal değerleri, yayınlanmış gözlemlere dayanılarak yaklaşık benzeşimle ve yapının inşa edileceği zeminde yapılacak arazi deneyleri sonuçlarından elde edilebilir. Daha sonra yapılan araştırmalarda, bir noktadaki çökme değerinin belirlenmesinde bütün noktalardaki yüklerin etkisi dikkate alınmıştır. Bu durumda çökme değeri bilinmeyen taban basıncına bağlı olarak bir entegral formunda belirtilmektedir. Entegral ifadesinin çekirdek fonksiyonu, elastik ortam olarak varsayılan zemin modellemesine göre değişmektedir.

Heteyni [8] 1946'da Winkler zemin tipi üzerinde araştırma yapmıştır. Kitabında yatak katsayısının sayısal değerleri ile ilgili hiçbir bilgi vermemiş, daha ziyade kesin çözümler üzerinde durmuştur. Ancak kesin çözümler zaman kaybına yol açtığı için, birçok araştırmacı bu zaman kaybını yok etmek amacıyla daha hızlı sonuç veren çeşitli idealleştirmeler ve daha genel olan başka metodlar geliştirerek problemleri çözmeye çalışmışlardır.

Dodge [9] elastik zemin üzerine oturan sonlu ve yarı sonsuz uzunluktaki kirişlerin davranış biçimleri ile ilgili tesir fonksiyonlarını oluşturmuş ve bu fonksiyonlara ait eğrileri hazırlamıştır.

Donalt [10] elastik zemin üzerine oturan kirişlerin, orta noktalarından tekil yük ve eğilme momenti ile yüklenmeleri durumunda gösterdikleri davranış biçimlerini incelemiştir.

Miranda ve Nair [11] sonlu uzunluktaki elastik zemin üzerine oturan kirişlerin diferansiyel denkleminin özel fonksiyonlarla çözümünü yapmış ve bu çözümlerle ilgili sayısal örnekler sunmuştur.

Özgen [12] çalışmasında, elastik zemine oturan sonsuz uzun plastik kirişi rijit ve tam plastik alarak, etkiyen dış yükün limit değerlerini araştırmıştır.

Terzaghi [13] şerit yük etkisindeki esnek radye temeller için yatak katsayısı k değerlerini belirleyen bir çalışma yapmıştır. Basit ve sık karşılaşılan yükleme şekillerindeki kohezyonsuz kum ve sert kil için yatak katsayısı değerlerini belirleyen unsurları incelemiş, yatak katsayısı olarak, zeminin elastik özelliklerine ve yüklü alanın boyutlarına bağlı uygun değerler seçmek amacıyla kurallar getirmiştir.

Durelli ve Parks [14] elastik zemine oturan sonlu ve sonsuz uzunlukta olan kirişlerin fotoelastik çalışmasını yapmıştır. Kirişler bir ve iki noktadan yüklenerek davranışları incelenerek bulunan sonuçlar teorik çözümlerle karşılaştırılmıştır.

Munther [15] sonlu ve sonsuz uzunluktaki kirişlerin davranış şekillerini sonlu elemanlar yöntemi ile incelemiş ve elde edilen sonuçları, Durelli ve Parks'ın yaptığı fotoelastik çalışmadan elde edilen sonuçlarla birlikte çizilen eğrilerin üzerinde göstermiştir.

Severn [16] elastik çözümler yerine plastik çözümleri de gözönüne alarak, hem zemini, hem de kirişi plastik, zemini plastik, kirişi elastik veya bu durumun tam tersini ele alarak çalışmalar yapmıştır.

Krasheninikova [17,18] rijit taban üzerine oturan sıkışabilir tabanın çökmelerini elastisite teorisinden yola çıkarak, temel çözümü, Zemochlin'in rijit çubuk çalışmalarından yaralanarak hesaplamıştır.

Terzaghi ve Peck [19] yaptıkları deneysel çalışmalar sonucu aynı P taban basıncı değerleri için çökmelerin kiriş genişliğine bağlı olarak değişimini gösteren bir bağıntı hesaplamışlardır. Bu bağıntıdan yaralanarak yatak katsayısının kiriş genişliği ile değişimini gösteren bir bağıntı vermişlerdir.

Weistman [20] çekme gerilmesi almayan, yalnızca basınca çalışan Winkler ve Reissner modelini ele alarak, elastik zemin üzerine oturan, tekil yük altındaki kiriş ve plaklarda çökme ve kesit tesirlerine ait grafikler sunmuşlardır. Weistman [21], çekme gerilmesi almayan zemine oturan, hareketli yük etkisi altındaki kirişler için de ilk araştırmaları yapmış, ancak çalışmaları, ayrılmaların oluştuğu durumları saptamakla sınırlandırmıştır.

Ding [22] kiriş boyunca değişen Winkler zeminine oturan kirişlerin titreşimini analiz ederek, çözüm için zemin tepkilerini, kirişin yer değiştirmesini içeren bir integral denklem biçiminde dış yük olarak almış ve sayısal çözüm yaparak frekans parametrelerine ulaşmıştır.

Bakioğlu ve Özkan [23] gerçekleştirdikleri çalışmada temellerin çökmeleri ile eğilme momentleri arasındaki diferansiyel denklemi, sonlu farklar denklemleri şeklinde oluşturup, taban basıncının bu noktalar arasında parabolik olarak değiştiğini kabul etmişlerdir. Ayrıca bu çalışmada taban basınçları cinsinden belirtilen moment bağıntılarından yola çıkarak, çökmeler ile taban basınçları arasında lineer denklem takımları oluşturmuşlardır.

Karamanlidis ve Prakash [24] iki parametreli elastik yarı düzleme oturan kirişlerin burkulma ve titreşimini analitik ve sonlu elemanlar yöntemlerinden yaralanarak incelemiş ve birtakım mesnetlenme şekilleri için öz frekansları bulmuşlardır.

Lai, Ting, Lee [25] elastik zemine oturan kirişlerin dinamik analizini, kütle ve rijitlik matrislerinin hesap edilmesi amacıyla yeni bir formülasyon geliştirerek, sonlu elemanlar metoduyla yapmış ve kiriş doğal frekansını elde etmişlerdir.

Ting ve Mockry [26] düzlem çerçeve analizi için, tekil yük, tekil moment ve lineer yayılı kuvvetlere bağlı olarak elastik zemin üzerindeki bir kiriş için yük eleman vektörleri ve sonlu eleman rijitlik matrisi geliştirmiş ve bu rijitlik matrisinin elemanlarının bilinen deplasman metoduna kolayca uygulanabileceğini göstermiştir.

Ting [27] Winkler zemini üzerindeki elastik mesnetli sonlu kirişin diferansiyel denkleminin bir çözümünü ortaya koymuştur. Bu çözüm, farklı sınır şartlarına sahip elastik temeller üzerindeki kirişlere benzetilerek kullanılabilir.

Elmas [28] elastik zemine oturan sonlu uzunluktaki ahşap ve betonarme kirişlerin davranış şekillerini incelemiş ve orta noktadan etkiyen tekil yükün limit değerini artırarak, kirişlerin davranışını farklı malzeme ve boyutların etkisi altında ele almıştır.

Lin ve Adams [29] çekme gerilmesi almayan Winkler zeminine oturan, ağırlıklı, üzerinde bir çift yük etkisindeki sonsuz uzunluktaki bir kirişin davranışını incelemiştir. Tekil yüklerin aralıklarına, hızlarına ve zeminden ayrılma noktalarına bağlı sonuçlar ortaya koymuştur. Demiryolu sistemlerindeki ilgili parametreler için örnek hesaplar ayrılma etkisinin önemli olduğunu göstermektedir.

Celep [30] Winkler zemini üzerinde dikdörtgensel elastik plakların davranışını analiz etmiştir. Galerkin metodunu kullanarak problem cebirsel denklem sisteminin çözümüne indirgenmiştir.

Biot [31] tam elastik bir ortama oturan yüklü kirişler için k yatak katsayısının sadece kiriş genişliğine bağlı değil, bir noktaya kadar kirişin eğilme rijitliğine de bağlı olduğunu göstermiş ve bu ilişkinin dikkate alınabilmesini sağlayan bağıntılar ortaya koymuştur.

Kögler-Sheidig [32] sonsuz yüzey, dairesel ve kare plaklar, sonsuz uzunluktaki şerit temeller için çeşitli parametrelere bağlı olarak, yatak katsayısını bulmayı sağlayan çeşitli amprik formüller vermişlerdir.

Katsikadelis ve Armenakas [33] çalışmalarında sınır entegral deklemlerinin nümerik değerlendirilmesi ile sınır entegral deklem metodunu, elastik zemine oturan herhangi bir şekildeki basit destekli plakların analizinde uygulamışlardır. Elde edilen sayısal sonuçlar, analitik çözümlerden elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldığında, sınır entegral denklem metodunun daha avantajlı olduğu ortaya konmuştur.

Zhaohua ve Cook [34] araştırmalarında sonlu elemanların iki türünü bir veya iki parametreli kirişleri analiz edebilmek için formülize etmişlerdir. Modeller, Winkler, Filonenko-Borodich, Pasternak ve Vlasov zeminlerini kapsamaktadır. İki elemandan biri mutlak yer değiştirme fonksiyonuna, diğeri kübik yer değiştirme fonksiyonuna dayanmaktadır. Sonuçlar, mutlak yer değiştirme fonksiyonuna dayanan elemanların mutlak numerik sonuçlar verdiğini göstermektedir.

Celep, Mlaika ve Hussein [35] çekmeye çalışmayan Winkler zeminine oturan sonlu kirişin zorlanmış titreşimlerini Galerkin metodunu kullanarak incelemişlerdir. Çeşitli

yükleme durumları ve parametreler için ayrılma noktasının değişimi ile çeşitli yer değiştirmelerin zamanla değişimini ele almışlardır.

Özdoğan [36] sadece basınç aktaran iki parametreli elastik bir Pasternak zeminine oturan, ağırlıksız dairesel bir plağın tekil, yayılı ve şerit düşey yükler altındaki davranış şekillerini incelemiştir. Yükleme durumlarına bağlı olarak ortaya çıkan bölgeler gözönünde bulundurularak yönetici denklemler bulunmuş ve çözümler karmaşık argümanlı Bessel fonksiyonlarından yaralanarak, plağın yarıçapına göre tam batma ve batmama durumları için incelenmiştir.

Rosa [37] Winkler zeminine oturan kirişlerin çeşitli mesnetlenme durumları altında, eksenel kuvvetlerin de etkisini gözönüne alarak Hamilton ilkesinden faydalanarak titreşimini ve stabilitesini incelemiştir. Bütün bu araştırmalarda zeminin iki yönlü olarak çekme ve basınca çalıştığı varsayılmıştır.

Prolovic ve Bonic [38] elastik zemine oturan iki konsollu basit temel kirişlerinin, zemin elastisite modülü, zemin tabakalarının dağılımı, yükleme tipi ve büyüklüğü, zemin tabakası kalınlığı gibi elastik eşdeğer sabitlere dayanarak hesabını incelemişlerdir.

Engin [39] elastik-plastik zemine oturan ağırlıksız kiriş ve ince dairesel plakların tekil yük altında davranış şeklini incelemiştir. Zeminin sadece basınç gerilmesi aktardığı ve belirli bir yer değiştirmede plastikleştiği varsayılmıştır. Çözümün sonunda plastik-elastik ve yapının zeminden ayrıldığı sınırın, tekil yükün şiddeti ve plağın yarıçapı ile değişimi gözlenmiştir.

Hayashi [40] elastik zemine oturan kirişler konusundaki ayrıntılı araştırmasında k yatak katsayısının yükleme deneyleri sonuçlarının yüklü alanın büyüklüğüne bağlı olduğu gerçeğini dikkate almamıştır.

1.3. Çalışmanın Amaç ve Kapsamı

Bu tez çalışmasında, elastik zemin üzerine oturan Timoshenko kirişinde titreşim problemleri incelenmiştir. Çalışmada Winkler zemin modeli ve Vlasov zemin modeli kullanılarak özel problemlerin çözümünde hesap kolaylığı sağlanmıştır. Ele alınan problemlerdeki temel denklemlerden elastik eğri fonksiyonları elde edilmiş ve bilinmeyen sabitler sınır koşulları yardımıyla belirlenmiştir. Hesaplanan sabitler çözüm denklemlerinde yerlerine konarak elastik eğri fonksiyonları oluşturulmuş ve bu denklemlerin sonuçlarından yararlanılarak yer değiştirme, kesme kuvveti ve moment eğrileri, sayısal ve grafiksel olarak verilmiştir. Hesaplamalarda Excel ve Matlab paket programları kullanılmıştır. Özel durum olarak Winkler zeminine oturan,

çekme gerilmesi almayan Timoshenko kirişi ve kayma etkisi göz önüne alınmaksızın Winkler zeminine oturan Euler kirişinin durumları incelenmiştir. Son olarak sayısal örnekler verilmiş ve Winkler zemini ile Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişlerinin, diferansiyel denklemlerinin çözümünden elde edilen yer değiştirme, kesme kuvveti ve eğilme momenti grafiklerinin çeşitli durumlar gözönüne alınarak karşılaştırmaları yapılmıştır.

2. ÖZEL PROBLEMİN TANIMI, TEMEL DENKLEMLER VE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

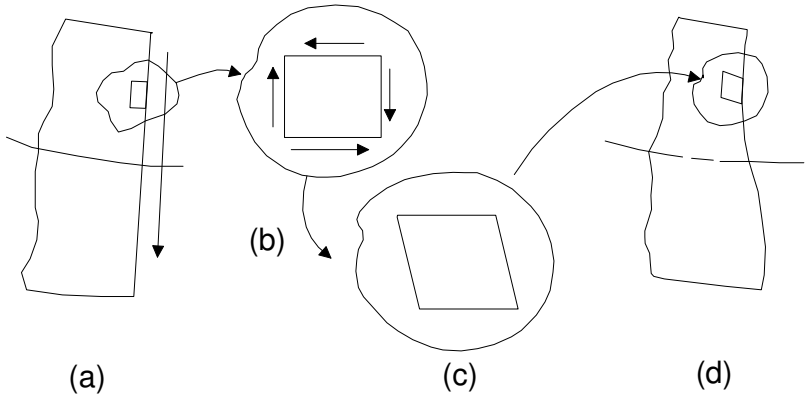
2.1. Özel Problemin Tanımı

Bu tez çalışmasında, elastik bir zemin üzerine oturan sonlu uzunluktaki bir Timoshenko kirişinin diferansiyel denklemlerinin, zemin hakkında yapılan çeşitli kabullere göre kurulması ve sınır koşulları yardımıyla bu diferansiyel denklemlerin çözülmesiyle elde edilen yer değiştime, kesme kuvveti ve eğilme momenti eğrileri incelenmiştir.

Özel problemlerin çözümünde Winkler ve Vlasov zemin modelleri göz önüne alınmıştır. Winkler zemininde elastik, sonlu uzunluktaki bir kirişin, elastik bir yatak üzerinde olduğu ve herhangi bir noktasındaki taban basıncının, yük belirli bir değeri aşmadıkça, aynı noktadaki çökme ile orantılı olduğu yani zeminin malzemesinin Hooke kanunlarına uyum gösterdiği kabul edilmiştir. Bu özel problemlerde kullanılan kiriş malzemesi betonarme olarak ele alınmıştır.

2.2. Kayma ve Dönme Eylemsizlik Etkileri (Timoshenko Kirişi)

İnce kirişler için yönetici denklemin gelişiminde, iki ana varsayımın yapıldığı belirtilmiştir. Bunlardan ilki dönme eylemsizlik etkilerinin, ikincisi ise kayma deformasyonlarının ihmal edildiğidir [41]. İkinci varsayım aslında, düzlem kesitlerin düzlem kaldığı Bernoulli-Euler hipotezi formunda ifade edilmiştir. Bunun kayma deformasyonunun ihmal edilmesine karşılık geldiği gerçeği Şekil 2.1 'deki örneklerde görülmektedir.



Şekil 2.1 : Kesme kuvveti nedeniyle bir kiriş kesitinin deformasyonu

Şekil 2.1 (a)' da kesme kuvvetine maruz kalan tipik bir eleman kesiti görülmektedir. Bu eleman üzerindeki kayma gerilmeleri Şekil 2.1 (b)' de, yine bu eleman üzerinde oluşan kayma deformasyonu ise Şekil 2.1 (c)' de gösterilmektedir. Bu kesit boyunca kayma gerilmesindeki değişimler nedeniyle, farklı elemanlar farklı miktarlarda deforme olacaktır.

2.2.1. Yönetici Denklemler

Şekil 2.2 (a) 'da görüldüğü gibi kesme kuvveti, eğilme momenti ve yayılı yüke maruz kalan bir kiriş elemanını gözönüne alalım. Kirişin kütle merkezinin yerdeğiştirmesi "y" ile ölçülmekte ve kütle merkezi ekseninin eğimi de $\partial y/\partial x$ ile verilmektedir. Eğilme nedeniyle oluşan kesit eğimini ölçmek için yeni bir koordinat ψ tanımlanmaktadır. Bernoulli-Euler gelişiminde, bu aynı zamanda kütle merkezi ekseninin eğimi $\partial y/\partial x$ ile aynıdır, dolayısıyla özel bir koordinat gereksinilmemektedir. Kayma deformasyonu gelişiminin temel özellikleri Şekil 2.1 (b) 'de görülmektedir. Kütle merkezi eksenin eğimi $\partial y/\partial x$ ile gösterilmektedir. Bunun iki bileşeninin olduğu gözönünde tutulmaktadır. İlki, bahsedildiği gibi eğilme etkisinden kaynaklanan ψ 'dır. İkincisi ise, kayma etkisinden kaynaklanan $\bar{\gamma}_0$'dır. Böylece;

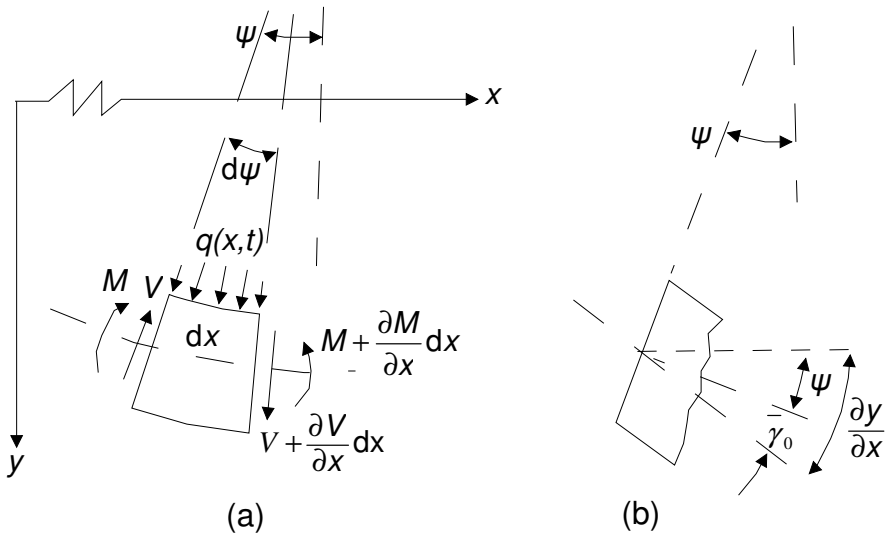
$$\partial y/\partial x = \psi + \bar{\gamma}_0 \tag{2.1}$$

yazılır. Bu gelişmede düzlem kesitlerin yine düzlem kaldığının farzedildiğini fakat kütle merkezi düzlemine dik olmadığını belirtmek gerekir. Böylece, Şekil 2.1(d) ' de görüleceği üzere kesitteki eğilmeye kinematik açıdan izin verilmez.

Şimdi problem, yukarıdaki kinematik ifadeleri yükler ile ilişkilendirmektir. Eğilme momenti ve eğrilik arasında ilişki;

$$M/EI = -\partial\psi/\partial x \tag{2.2}$$

ile ifade edilir. Bu ifade, $Rd\psi=dx$ ifadesinden türetilmektedir. Burada R eğrilik yarıçapıdır. Bununla birlikte $1/R=d\psi/dx$ 'dir. (2.2) ifadesi Bernoulli-Euler için (2.1) ifadesinin benzeridir.



Şekil 2.2 : (a) Yüke maruz kalan kirişin diferansiyel elemanı ve (b) ilave kayma deformasyonun kinematiksel detayları

$\bar{\gamma}_0$'ı tanımlamak için, Timoshenko tezinin esası şu şekildedir. Kesitteki kesme kuvveti, aşağıdaki ifadede görüldüğü gibi, kayma deformasyonu cinsinden verilmektedir.

$$V = \int_A \tau dA = G\int_A \bar{\gamma} dA \tag{2.3}$$

Eğer $\bar{\gamma}_0$ kütle merkezi eksenindeki kayma deformasyonu ise, $G\bar{\gamma}_0 A$ kesme kuvvetini verecektir. Bununla birlikte, bu değer kesit boyunca değişken gerilme dağılımı integrasyonu ile elde edilen değere (2.3) eşit olmayacaktır. Bu değeri dengeye getirmek için, bir uyum katsayısı κ tanımlanmaktadır.

$$V = G\int_A \bar{\gamma} dA = (G\bar{\gamma}_0 A)\kappa \tag{2.4}$$

κ' nın değeri kesitin şekline bağlı olacaktır ve her kesit için genellikle gerilme analizi yoluyla tanımlanmalıdır. Bu parametre genellikle (Timoshenko) kayma katsayısı olarak tanımlanmaktadır. $\bar{\gamma}_0$ için (2.1) eşitliğinden elde edilen ifadenin (2.4)' de yerine konulması;

$$V = AG\kappa\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi\right) \tag{2.5}$$

eşitliğini verir.

Elde edilen önceki sonuç ile hareket denklemlerinin geliştirilmesi oldukça basittir. Şekil 3.11(a) 'daki eleman için hareket denklemi düşey doğrultuda yazıldığında;

$$-V + \left(V + \frac{\partial V}{\partial x}dx\right) + qdx = \rho A dx \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \tag{2.6}$$

ya da

$$\frac{\partial V}{\partial x} + q = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{2.7}$$

elde edilir.

Elemanda dönme ile ilgili Newton yasası yazılırsa;

$$M - \left(M + \frac{\partial M}{\partial x}dx\right) + \frac{1}{2}Vdx + \frac{1}{2}\left(V + \frac{\partial V}{\partial x}dx\right)dx = j\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{2.8}$$

elde edilir.Burada J, elemanın kutupsal ataletidir. Elemanın kütle yoğunluğu ρ, uzunluğu dx ve moment ekseni üzerindeki kesit alanı, eylemsizlik momenti I olan bir eleman için;

$$J = \rho \mathrm{I} dx \tag{2.9}$$

yazılır.

Böylece (2.8) denklemi;

$$V - \frac{\partial M}{\partial x} = \rho \mathrm{I} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{2.10}$$

bağıntısına indirgenir.

Eğilme momenti için (2.2) ifadesinin ve kesme kuvvetinin (2.5), (2.7) ve (2.10) ' da yerine konulması ile ;

$$GA\kappa\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q(x,t) \tag{2.11}$$

$$GA\kappa\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\psi\right)+EI\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\rho I\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{2.12}$$

eşitlikleri elde edilir.

Yukarıdaki sonuçlar Timoshenko kirişi teorisi için yönetici denklemlerdir. Bu teoride, deformasyonun iki modunun var olduğu görülür ve bu eşleşen yönetici denklemler, kendi aralarında ortaya çıkan fiziksel eşleşmeyi temsil eder.

2.3. Winkler Elastik Zeminine Oturan Timoshenko Kirişinin Diferansiyel Denklemleri

Kesme kuvveti, eğilme momenti ve yayılı yüke maruz kalan, kayma etkisindeki bir kiriş elemanının diferansiyel denklemini şu yolu takip ederek elde edebiliriz. (2.11) eşitliği $\partial\psi/\partial x$ için çözülürse;

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{\rho}{G\kappa}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{ky}{GA\kappa} \tag{2.13}$$

$$q(x,t)=-ky \tag{2.14}$$

olarak alınmıştır.

(2.12) denkleminin bir kez x'e göre türevi alınırsa;

$$GA\kappa\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+EI\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=\rho I\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \tag{2.15}$$

elde edilir.

(2.13) ifadesi, (2.15) denkleminde yerine konursa

$$GA\kappa\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-GA\kappa\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+ky+\frac{EI}{GA\kappa}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(GA\kappa\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-ky\right)= \tag{2.16}$$

$$\frac{\rho I}{GA\kappa}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(GA\kappa\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-ky\right)$$

eşitliği elde edilir.

(2.16) eşitliğinde gerekli sadeleştirmeler ve düzenlemeler yapılırsa;

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}-\left(\frac{EI\rho}{G\kappa}+\rho I\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2}+\left(\rho A+\frac{\rho Ik}{GA\kappa}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{EIk}{GA\kappa}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$
$$+ky+\frac{\rho^2 I}{G\kappa}\frac{\partial^4 y}{\partial t^4}=0 \qquad (2.17)$$

(2.17) eşitliğinin bütün terimleri ρA 'ya bölünürse;

$$\frac{EI}{\rho A}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}-\frac{I}{A}\left(1+\frac{E}{G\kappa}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2}+\left(1+\frac{Ik}{GA^2\kappa}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{EIk}{GA^2\kappa\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$
$$+\frac{k}{\rho A}y+\frac{\rho I}{GA\kappa}\frac{\partial^4 y}{\partial t^4}=0 \qquad (2.18)$$

diferansiyel denklemi elde edilir.Burada y;

$$y(x,t)=Y(x)\cos\Omega t \qquad (2.19)$$

olarak alınır ve y değeri yerine konulursa (2.18) denklemi şu hali alır;

$$\frac{EI}{\rho A}Y^{IV}+\frac{I\Omega^2}{A}\left(1+\frac{E}{G\kappa}\right)Y^{II}-\Omega^2\left(1+\frac{Ik}{GA^2\kappa}\right)Y-\frac{EIk}{GA^2\kappa\rho}Y^{II}$$
$$+\frac{k}{\rho A}Y+\frac{\rho I\Omega^4}{GA\kappa}Y=0 \qquad (2.20)$$

(2.20) denklemi tekrar düzenlenirse;

$$\frac{EI}{\rho A}Y^{IV}+\left[\frac{I\Omega^2}{A}\left(1+\frac{E}{G\kappa}\right)-\frac{EIk}{GA^2\kappa\rho}\right]Y^{II}+\left[\frac{I\rho\Omega^4}{GA\kappa}+\frac{k}{\rho A}-\Omega^2\left(1+\frac{Ik}{GA^2\kappa}\right)\right]Y=0 \qquad (2.21)$$

diferansiyel denklemi bulunur.

(2.21) denkleminde, terim karmaşasını önleyebilmek için $\zeta=x/L$ boyutsuzlaştırması yapılırsa;

$$\frac{EI}{\rho AL^4}Y^{IV}+\left[\frac{I\Omega^2}{AL^2}\left(1+\frac{E}{G\kappa}\right)-\frac{EIk}{GA^2L^2\rho\kappa}\right]Y^{II}+\left[\frac{I\rho\Omega^4}{G\kappa A}+\frac{k}{\rho A}-\Omega^2\left(1+\frac{Ik}{GA^2\kappa}\right)\right]Y=0 \qquad (2.22)$$

ve denklemin her terimi $EI/\rho AL^4$ ' e bölünürse;

$$Y^{IV} + \left[\frac{\rho\Omega^2 L^2}{E}\left(1+\frac{E}{G\kappa}\right) - \frac{kL^2}{GA\kappa}\right]Y^{II} + \left[\frac{\rho^2\Omega^4 L^4}{GE\kappa} + \frac{kL^4}{EI} - \frac{\Omega^2\rho AL^4}{EI}\left(1+\frac{Ik}{GA^2\kappa}\right)\right]Y = 0 \tag{2.23}$$

diferansiyel denklemine ulaşılır.

$$\left[\frac{\rho\Omega^2 L^2}{E}\left(1+\frac{E}{G\kappa}\right) - \frac{kL^2}{GA\kappa}\right] = 2\theta^2 \quad \text{ve} \tag{2.24}$$

$$\left[\frac{\rho^2\Omega^4 L^4}{GE\kappa} + \frac{kL^4}{EI} - \frac{\Omega^2\rho AL^4}{EI}\left(1+\frac{Ik}{GA^2\kappa}\right)\right] = \beta^4 \tag{2.25}$$

denilirse, (2.23) denklemi şu formu alır;

$$Y^{IV} - 2\theta^2 Y^{II} + \beta^4 Y = 0 \tag{2.26}$$

Dördüncü dereceli diferansiyel denklemin çözümü için $Y = e^{\alpha\zeta}$ alınarak (2.26) denkleminde türevleri de alınıp yerine yazılırsa;

$$e^{\alpha\zeta}(\alpha^4 - 2\theta^2\alpha^2 + \beta^4) = 0 \tag{2.27}$$

elde edilir. (2.27) denkleminin sıfır olabilmesi için ($(e^{\alpha\zeta} \neq 0)$ olduğu için) parantez içindeki terimin sıfır olması gerekir.

$$\alpha^4 - 2\theta^2\alpha^2 + \beta^4 = 0 \tag{2.28}$$

$$\alpha^2{}_{1,3} = \theta^2 \mp \sqrt{\theta^4 - \beta^4} \tag{2.29}$$

(2.29) ifadesinde, karekök içerisinde bulunan terim denklemin ve problemin karakterini belirler.

2.3.1. Çözüm Sırasında Karşılaşılabilecek Özel Durumlar

2.3.1.1. Durum I: θ > β Olması Hali

θ > β olması halinde $\rightarrow \sqrt{\theta^4 - \beta^4} > 0$ ve $\sqrt{\theta^4 - \beta^4} < \theta^2$ (2.30)

"α" ifadesi (2.28) denkleminin köklerini ifade ederse, denklem köklerinin gerçel olduğu görülür.

$$\alpha^2{}_1 = \theta^2 + \sqrt{\theta^4 - \beta^4} \quad > 0 \qquad \rightarrow \quad \lambda_1 = \alpha_1 = -\alpha_2 = \sqrt{\theta^2 + \sqrt{\theta^4 - \beta^4}} \tag{2.31}$$

$$\alpha^2{}_2 = \theta^2 - \sqrt{\theta^4 - \beta^4} \quad > 0 \qquad \rightarrow \quad \lambda_2 = \alpha_3 = -\alpha_4 = \sqrt{\theta^2 - \sqrt{\theta^4 - \beta^4}} \tag{2.32}$$

Bulunan denklem köklerine göre çözüm denklemi yazılırsa;

$$Y = A_1 e^{\alpha_1 \zeta} + A_2 e^{\alpha_2 \zeta} + A_3 e^{\alpha_3 \zeta} + A_4 e^{\alpha_4 \zeta} \tag{2.33}$$

$$Y = A_1 e^{\lambda_1 \zeta} + A_2 e^{-\lambda_1 \zeta} + A_3 e^{\lambda_2 \zeta} + A_4 e^{-\lambda_2 \zeta} \tag{2.34}$$

(2.34) denklemindeki ifadeler hiperbolik ve trigonometrik fonksiyonlar cinsinden aşağıdaki şekilde yazılır;

$$Y = A \sinh \lambda_1 \zeta + B \cosh \lambda_1 \zeta + C \sinh \lambda_2 \zeta + D \cosh \lambda_2 \zeta \tag{2.35}$$

elde edilir. Bu denklemin bilinmeyenleri " A, B, C, D " katsayıları olup, bu katsayılar sınır koşulları yardımıyla bulunur.

2.3.1.2. Durum II: θ = β Olması Hali

θ = β olması halinde $\rightarrow \sqrt{\theta^4 - \beta^4}$ =0 (2.36)

"α" ifadesi (2.29) denkleminin köklerini ifade ederse denklem kökleri katlı gerçel olur.

$$\alpha^2{}_{1,3} = \theta^2 \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \theta \qquad \alpha_3 = \alpha_4 = -\theta \tag{2.37}$$

Denklem kökleri çözüm denkleminde yerine konulursa aşağıdaki ifadeye ulaşılır;

$$Y = A_1 e^{\alpha_1 \zeta} + A_2 \zeta e^{\alpha_3 \zeta} + A_3 e^{\alpha_4 \zeta} + A_4 \zeta e^{\alpha_2 \zeta} \tag{2.38}$$

$$Y = A e^{\theta \zeta} + B e^{-\theta \zeta} + C \zeta e^{-\theta \zeta} + D \zeta e^{\theta \zeta} \tag{2.39}$$

(2.39) denklemindeki ifadeler hiperbolik ve trigonometrik fonksiyonlar cinsinden aşağıdaki şekilde yazılır;

$$Y = A \sinh \theta \zeta + B \cosh \theta \zeta + C \zeta \cosh \theta \zeta + D \zeta \sinh \theta \zeta \tag{2.40}$$

Bu denklemin bilinmeyenleri " A, B, C, D " katsayıları olup bu katsayılar sınır koşulları yardımıyla bulunur.

2.3.1.3. Durum III: θ < β Olması Hali

θ < β olması durumu problem için geçerli olan ve diğerleri arasında tek katmanlı elastik zemine oturan kiriş problemi analizinde en önemli durumdur.

θ < β olması halinde $\rightarrow \sqrt{\theta^4 - \beta^4} < 0$ (2.41)

ve bu durumda $\alpha^2_{1,3} = \theta^2 \mp \sqrt{\theta^4 - \beta^4}$ denklemindeki kökler gerçel ve sanal sayılardan oluşur.

$$\alpha_1 = \mp\sqrt{\theta^2 + \sqrt{\theta^4 - \beta^4}} \quad , \quad \alpha_3 = \mp\sqrt{\theta^2 - \sqrt{\theta^4 - \beta^4}}$$

$$\alpha = \pm\gamma + \varphi i \tag{2.42}$$

γ ve φ sayıları reel ve pozitif sayılardır. Denklem köklerinden biri alınarak (2.42) deki γ ve φ cinsinden yazılmış köke eşitlenirse ve gerekli işlemler aşağıdaki sırayla yapılırsa denklem kökleri bulunur.

$$\alpha = \sqrt{\theta^2 - \sqrt{\theta^4 - \beta^4}} = \gamma - \varphi i \tag{2.43}$$

$$\alpha^2 = \theta^2 - i\sqrt{\beta^4 - \theta^4} = (\gamma - \varphi i)^2 \tag{2.44}$$

$$\alpha^2 = \gamma^2 - \varphi^2 - 2\gamma\varphi i = \theta^2 - i\sqrt{\beta^4 - \theta^4} \tag{2.45}$$

$$\gamma^2 - \varphi^2 = \theta^2 \qquad 4\gamma^2\varphi^2 = \beta^4 - \theta^4 \tag{2.46}$$

$$4(\theta^2 + \varphi^2)\varphi^2 = \beta^4 - \theta^4 \tag{2.47}$$

$$4\varphi^4 + 4\theta^2\varphi^2 - \beta^4 - \theta^4 = 0 \tag{2.48}$$

$$\varphi = \pm\sqrt{\frac{\beta^2 - \theta^2}{2}} \tag{2.49}$$

(2.48) denkleminin kökü bulunarak φ katsayısı (2.49) deki gibi bulunur. γ ve φ reel ve pozitif sayılar olduğundan φ için eksi olan ifade kullanılamaz. Bu nedenle φ;

$$\varphi = \sqrt{\frac{\beta^2 - \theta^2}{2}} \tag{2.50}$$

olarak bulunur. Bu ifade (2.46) eşitliğinde yerine konulursa γ;

$$\gamma = \sqrt{\frac{\beta^2 + \theta^2}{2}} \tag{2.51}$$

olarak bulunur.

γ ve φ katsayıları (2.55) ve (2.56) denklemlerindeki a ve b katsayılarına denk gelmektedir. γ ve φ katsayıları β ve θ cinsinden belirlendikten sonra genel çözüm ifadesi (2.42), bulunan kökler gözönüne alınarak yazılır.

$$Y = A_1 e^{\alpha_1 \zeta} + A_2 e^{\alpha_2 \zeta} + A_3 e^{\alpha_3 \zeta} + A_4 e^{\alpha_4 \zeta} \tag{2.52}$$

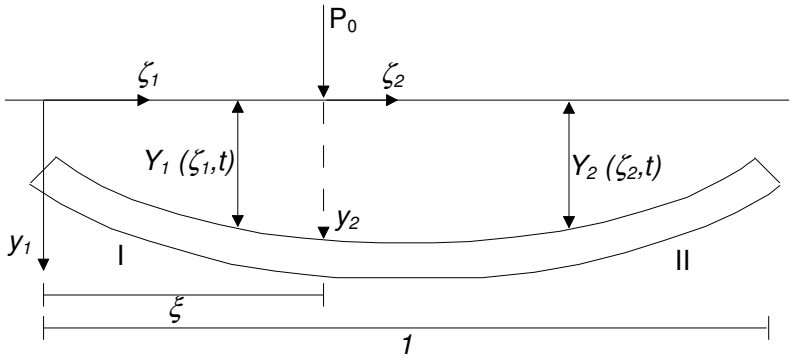
$$Y = A_1 e^{(\gamma - \varphi i)} + A_2 e^{-(\gamma + \varphi i)} + A_3 e^{(-\gamma + \varphi i)} + A_4 e^{(\gamma + \varphi i)} \tag{2.53}$$

(2.53) denklemindeki ifadeler hiperbolik ve trigonometrik fonksiyonlar cinsinden aşağıdaki şekilde yazılır;

$$Y = A_1 \sinh \gamma\zeta \cos \varphi\zeta + A_2 \cosh \gamma\zeta \cos \varphi\zeta + A_3 \cosh \gamma\zeta \sin \varphi\zeta + A_4 \sinh \gamma\zeta \sin \varphi\zeta \tag{2.54}$$

ve elastik eğri fonksiyonu elde edilir.

Bu denklemin bilinmeyenleri " A_1 , A_2 , A_3 , A_4 " katsayıları olup bu katsayılar sınır koşulları yardımıyla bulunur.



Şekil 2.3 : Winkler Elastik Zeminine Oturan Timoshenko Kirişinin Bölgeleri

Kirişin I. ve II bölgelerinde elastik eğri denklemleri;

I. bölgede, $0 < \zeta_1 < \xi$ arasında;

$$Y_1 = A_1 \cosh a\zeta \cos b\zeta + A_2 \sinh a\zeta \cos b\zeta + A_3 \cosh a\zeta \sin b\zeta + A_4 \sinh a\zeta \sin b\zeta \quad (2.55)$$

II. bölgede, $\xi < \zeta_2 < 1-\xi$ arasında;

$$Y_2 = B_1 \cosh a\zeta \cos b\zeta + B_2 \sinh a\zeta \cos b\zeta + B_3 \cosh a\zeta \sin b\zeta + B_4 \sinh a\zeta \sin b\zeta \quad (2.56)$$

olarak hesaplanır.

Sınır Koşulları:

Sınır Koşulu 1:

Kirişin başlangıç noktasında eğilme momenti sıfırdır.

$$\zeta_1 = 0 \rightarrow M_1 = 0 \qquad \frac{M_1}{EI} = -\frac{d\psi_1}{Ld\zeta} \mid \zeta_{1=0} = 0 \quad (2.57)$$

$$-\frac{d\psi_1}{Ld\zeta} \mid \zeta_{1=0} = -\left(\frac{d^2 Y_1}{L^2 d\zeta^2} + \frac{\rho\Omega^2}{G\kappa} Y_1 - \frac{k}{GA\kappa} Y_1 \right) \mid \zeta_{1=0} = 0 \quad (2.58)$$

Serbest kirişin yanal titreşimi için 1. doğal frekans modu denklemi;

$$\omega_0{}^2 = \frac{\gamma\pi EI}{\rho AL^4} \qquad (\gamma\pi = 4{,}73) \quad (2.59)$$

olarak alınırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa (2.58) denklemi şu hali alır;

$$-\frac{d\psi_1}{Ld\zeta} \mid \zeta_{1=0} = -\left(\frac{d^2 Y_1}{L^2 d\zeta^2} + \frac{2{,}5\gamma\pi I}{A\kappa L^4} \left(\frac{\Omega}{\omega_0} \right)^2 Y_1 - \frac{k}{GA\kappa} Y_1 \right) \mid \zeta_{1=0} = 0 \quad (2.60)$$

Sınır Koşulu 2:

Kirişin başlangıç noktasında kesme kuvveti sıfırdır.

$$\zeta_1 = 0 \rightarrow V_1 = 0 \qquad V_1 = GA\kappa \left(\frac{dY_1}{Ld\zeta} - \psi_1 \right) \mid_{\zeta 1=0} = 0 \quad (2.61)$$

ψ ifadesi (2.12) denkleminden elde edilmektedir.

$$\frac{dY_1}{Ld\zeta}-\left[\frac{1}{\left(\frac{\gamma\pi EI^2}{AL^4}\right)\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2-GA\kappa}\left(-GA\kappa\frac{dY_1}{Ld\zeta}-EI\frac{d}{Ld\zeta}\left(\frac{d^2Y_1}{L^2d\zeta^2}-\frac{2{,}5\gamma\pi I}{A\kappa L^4}\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2Y_1-\frac{k}{GA\kappa}Y_1\right)\right)\right]$$
$$\Big|_{\zeta 1=0}=0 \qquad (2.62)$$

Sınır Koşulu 3:

Kirişin bitiş noktasında eğilme momenti sıfırdır.

$$\zeta=1-\xi \;\rightarrow M_2=0 \quad \frac{M_2}{EI}=-\frac{d\psi_2}{Ld\zeta}\Big|_{\zeta 2=1-\xi}=0 \qquad (2.63)$$

$$-\frac{d\psi_2}{Ld\zeta}\Big|_{\zeta 2=1-\xi}=-\left(\frac{d^2Y_2}{L^2d\zeta^2}+\frac{\rho\Omega^2}{G\kappa}Y_2-\frac{k}{GA\kappa}Y_2\right)\Big|_{\zeta 2=1-\xi}=0 \qquad (2.64)$$

$$-\frac{d\psi_2}{Ld\zeta}\Big|_{\zeta 2=1-\xi}=-\left(\frac{d^2Y_2}{L^2d\zeta^2}+\frac{2{,}5\gamma\pi I}{A\kappa L^4}\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2Y_2-\frac{k}{GA\kappa}Y_2\right)\Big|_{\zeta 2=1-\xi}=0 \qquad (2.65)$$

Sınır Koşulu 4:

Kirişin bitiş noktasında kesme kuvveti sıfırdır.

$$\zeta=1-\xi\rightarrow \quad V_2=0 \qquad V_2=GA\kappa\left(\frac{dY_2}{Ld\zeta}-\psi_2\right)\Big|_{\zeta 2=1-\xi} \qquad (2.66)$$

$$\frac{dY_2}{Ld\zeta}-\left[\frac{1}{\left(\frac{\gamma\pi EI^2}{AL^4}\right)\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2-GA\kappa}\left(-GA\kappa\frac{dY_2}{Ld\zeta}-EI\frac{d}{Ld\zeta}\left(\frac{d^2Y_2}{L^2d\zeta^2}-\frac{2{,}5\gamma\pi I}{A\kappa L^4}\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2Y_2-\frac{k}{GA\kappa}Y_2\right)\right)\right]$$
$$\Big|_{\zeta 2=1-\xi}=0 \qquad (2.67)$$

Sınır Koşulu 5:

Eksenlerin birleşim noktasında birinci ve ikinci bölge için çökme değerleri birbirine eşittir.

$$Y_1(\zeta_1)\Big|_{\zeta 1=\xi}=Y_2(\zeta_2)\Big|_{\zeta 2=0} \qquad (2.68)$$

$$A_1\sinh\gamma\zeta\cos\varphi\zeta+A_2\cosh\gamma\zeta\cos\varphi\zeta+A_3\cosh\gamma\zeta\sin\varphi\zeta+A_4\sinh\gamma\zeta\sin\varphi\zeta\Big|_{\zeta 1=\xi}=$$
$$B_1\sinh\gamma\zeta\cos\varphi\zeta+B_2\cosh\gamma\zeta\cos\varphi\zeta+B_3\cosh\gamma\zeta\sin\varphi\zeta+B_4\sinh\gamma\zeta\sin\varphi\zeta\Big|_{\zeta 2=0} \qquad (2.69)$$

Sınır Koşulu 6:

Eksenlerin birleşim noktasında, birinci ve ikinci bölge için eğilme momenti değerleri birbirine eşittir.

$$M_1(\zeta_1)\,|_{\zeta_1=\xi} = M_2(\zeta_2)\,|_{\zeta_2=0} \tag{2.70}$$

$$-\left(\frac{d^2Y_1}{L^2d\zeta^2}+\frac{2{,}5\gamma\pi I}{A\kappa L^4}\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 Y_1-\frac{k}{GA\kappa}Y_1\right)|_{\zeta_1=\xi} =$$

$$-\left(\frac{d^2Y_2}{L^2d\zeta^2}+\frac{2{,}5\gamma\pi I}{A\kappa L^4}\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 Y_2-\frac{k}{GA\kappa}Y_2\right)|_{\zeta_2=0} \tag{2.71}$$

Sınır Koşulu 7:

Eksenlerin birleşim noktasında, ikinci bölgenin kesme kuvveti değeri ve birinci bölgenin kesme kuvveti değerinin farkı, -P kuvvetine eşittir.

$$V_2(\zeta_2)\,|_{\zeta_2=0} - V_1(\zeta_1)\,|_{\zeta_1=\xi} = -P \quad GA\kappa\left(\frac{dy_2}{Ld\zeta}-\psi_2\right)|_{\zeta_2=0} - GA\kappa\left(\frac{dy_1}{Ld\zeta}-\psi_1\right)|_{\zeta_1=\xi} = -P \tag{2.72}$$

$$\frac{dY_2}{Ld\zeta}-\left[\frac{1}{\left(\frac{\gamma\pi EI^2}{AL^4}\right)\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2-GA\kappa}\left(-GA\kappa\frac{dY_2}{Ld\zeta}-EI\frac{d}{Ld\zeta}\left(\frac{d^2Y_2}{L^2d\zeta^2}-\frac{2{,}5\gamma\pi I}{A\kappa L^4}\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 Y_2-\frac{k}{GA\kappa}Y_2\right)\right)\right]$$

-

$$\frac{dY_1}{Ld\zeta}-\left[\frac{1}{\left(\frac{\gamma\pi EI^2}{AL^4}\right)\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2-GA\kappa}\left(-GA\kappa\frac{dY_1}{Ld\zeta}-EI\frac{d}{Ld\zeta}\left(\frac{d^2Y_1}{L^2d\zeta^2}-\frac{2{,}5\gamma\pi I}{A\kappa L^4}\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 Y_1-\frac{k}{GA\kappa}Y_1\right)\right)\right]$$

$$=-\frac{P}{GA\kappa} \tag{2.73}$$

Sınır Koşulu 8:

Eksenlerin birleşim noktasında, 1. ve 2.bölge için dönme değerleri birbirine eşittir.

$$\psi_1\,|_{\zeta=\xi} = \psi_2\,|_{\zeta=0} \tag{2.74}$$

$$\left[\frac{1}{\left(\frac{\gamma^2 EI^2}{AL^4}\right)\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 - GA\kappa}\left(-GA\kappa\frac{dY_1}{Ld\zeta} - EI\frac{d}{Ld\zeta}\left(\frac{d^2Y_1}{L^2d\zeta^2} - \frac{2{,}5\gamma^2 I}{A\kappa L^4}\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 Y_1 - \frac{k}{GA\kappa}Y_1\right)\right)\right]\Big|_{\zeta=\xi=}$$

$$\left[\frac{1}{\left(\frac{\gamma^2 EI^2}{AL^4}\right)\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 - GA\kappa}\left(-GA\kappa\frac{dY_2}{Ld\zeta} - EI\frac{d}{Ld\zeta}\left(\frac{d^2Y_2}{L^2d\zeta^2} - \frac{2{,}5\gamma^2 I}{A\kappa L^4}\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 Y_2 - \frac{k}{GA\kappa}Y_2\right)\right)\right]\Big|_{\zeta=0}$$

(2.75)

Genel denge denkleminin çözümü için homojen diferansiyel denklemin genel integralinin bulunması gerekir. Bu integralin genel formu;

$$Y = C_1\phi_1 + C_2\phi_2 + C_3\phi_3 + C_4\phi_4 \tag{2.76}$$

şeklindedir. C_1, C_2, C_3, C_4 integral sabitleri ve ϕ_1 ,ϕ_2 ,ϕ_3 ,ϕ_4 , θ ve β'nın birbirine göre durumları için bulduğumuz (2.35), (2.40), (2.54) yardımcı denklemlerin içerdikleri fonksiyonlardır.

Tablo 2.1 'de $\theta>\beta$, $\theta=\beta$ ve $\theta<\beta$ durumları için ϕ fonksiyonunun kendisi ve sırasıyla ilk üç türevine karşı gelen ϕ', ϕ'', ϕ''' değerleri ve ϕ fonksiyonunun ilk integraline karşılık gelen $\phi^{(l)}$ değerleri listelenmiştir.

(2.35), (2.40), (2.54) yardımcı denklemlerinin formu (2.76) ile uyuşmaktadır ve Tablo 2.1'de her durum için başta verilmiş olan ϕ fonksiyonu yardımcı denklemlerdeki A_1 , A_2 , A_3 , A_4 katsayılarına ait fonksiyonlardır. Tablo 2.1'deki diğer değerler (ϕ', ϕ'', ϕ''',$\phi^{(l)}$) başta verilen ϕ fonksiyonu ile yapılan türev ve integral işlemleri sonucunda bulunmuştur.

Örneğin; $\theta<\beta$ durumu için verilen ϕ_1 fonksiyonu, bu durum için bulduğumuz (2.54) denkleminde A katsayısının yanındaki fonksiyondur ve ϕ'_1 değeri;

$$\phi_1 = \sinh\gamma\zeta\cos\varphi\zeta \tag{2.77}$$

$$\phi_1' = \gamma\cosh\gamma\zeta\cos\varphi\zeta + (-\varphi\sin\varphi\zeta\sinh\gamma\zeta) \tag{2.78}$$

$\cosh\gamma\zeta\cos\varphi\zeta$ ifadesi Tablo 2.1 'den bakıldığında ϕ_2 ve $\sinh\gamma\zeta\sin\varphi\zeta$ ifadesi ise ϕ_4 'e eşittir. Bu durumda ϕ'_1 için aşağıdaki ifade yazılabilir;

$$\phi_1' = \gamma\phi_2 - \varphi\phi_4 \tag{2.79}$$

Tablo 2.1: Diferansiyel Denklemin Çözüm Denkleminin Kök Fonksiyonları

s ve r nin durumu	Fonksiyonlar ve Türevleri	Φ_1 (TEK)	Φ_2 (ÇİFT)	Φ_3 (TEK)	Φ_4 (ÇİFT)
s>r	Φ	$\mathrm{sh}\alpha\zeta\cos\beta\zeta$	$\mathrm{ch}\alpha\zeta\cos\beta\zeta$	$\mathrm{ch}\alpha\zeta\sin\beta\zeta$	$\mathrm{sh}\alpha\zeta\sin\beta\zeta$
	Φ'	$\alpha\Phi_2-\beta\Phi_4$	$\alpha\Phi_1-\beta\Phi_3$	$\alpha\Phi_4+\beta\Phi_2$	$\alpha\Phi_3+\beta\Phi_1$
	Φ''	$(\alpha^2-\beta^2)\Phi_1-2\alpha\beta\Phi_3$	$(\alpha^2-\beta^2)\Phi_2-2\alpha\beta\Phi_4$	$(\alpha^2-\beta^2)\Phi_3+2\alpha\beta\Phi_1$	$(\alpha^2-\beta^2)\Phi_4+2\alpha\beta\Phi_2$
	Φ'''	$\alpha(\alpha^2-3\beta^2)\Phi_2+\beta(\beta^2-3\alpha^2)\Phi_4$	$\alpha(\alpha^2-3\beta^2)\Phi_1+\beta(\beta^2-3\alpha^2)\Phi_3$	$(\alpha^2-3\beta^2)\Phi_4-\beta(\beta^2-3\alpha^2)\Phi_2$	$(\alpha^2-3\beta^2)\Phi_3-\beta(\beta^2-3\alpha^2)\Phi_1$
s=r	Φ	$\sinh r\zeta$	$\cosh r\zeta$	$\zeta\sinh r\zeta$	$\zeta\cosh r\zeta$
	Φ'	$r\Phi_2$	$r\Phi_1$	$\Phi_2+r\Phi_4$	$\Phi_1+r\Phi_3$
	Φ''	$r^2\Phi_1$	$r^2\Phi_2$	$2r\Phi_1+r^2\Phi_3$	$2r\Phi_2+r^2\Phi_4$
	Φ'''	$r^3\Phi_2$	$r^3\Phi_1$	$3r^2\Phi_2+r^3\Phi_4$	$3r^2\Phi_1+r^3\Phi_3$
s<r	Φ	$\sinh\lambda_1\zeta$	$\cosh\lambda_1\zeta$	$\sinh\lambda_2\zeta$	$\cosh\lambda_2\zeta$
	Φ'	$\lambda_1\Phi_2$	$\lambda_1\Phi_1$	$\lambda_2\Phi_4$	$\lambda_2\Phi_3$
	Φ''	$\lambda_1^2\Phi_1$	$\lambda_1^2\Phi_2$	$\lambda_2^2\Phi_3$	$\lambda_2^2\Phi_4$
	Φ'''	$\lambda_1^3\Phi_2$	$\lambda_1^3\Phi_1$	$\lambda_2^3\Phi_4$	$\lambda_2^3\Phi_3$
s=0	Φ	η	1	$\sinh r_1\zeta$	$\cosh r_1\zeta$
	Φ'	$\Phi_2=1$	0	$r_1\Phi_4$	$r_1\Phi_3$
	Φ''	0	0	$r_1^2\Phi_3$	$r_1^2\Phi_4$
	Φ'''	0	0	$r_1^3\Phi_4$	$r_1^3\Phi_3$
s>r	$\Phi^{(I)}$	$\frac{\alpha\Phi_2+\beta\Phi_4}{\alpha^2+\beta^2}$	$\frac{\alpha\Phi_1+\beta\Phi_3}{\alpha^2+\beta^2}$	$\frac{\alpha\Phi_4+\beta\Phi_2}{\alpha^2+\beta^2}$	$\frac{\alpha\Phi_3+\beta\Phi_1}{\alpha^2+\beta^2}$
s=r	$\Phi^{(I)}$	$(1/r)\Phi_2$	$(1/r)\Phi_1$	$(1/r)\Phi_4-(1/r^2)\Phi_2$	$(1/r)\Phi_3-(1/r^2)\Phi_1$
s<r	$\Phi^{(I)}$	$(1/\lambda_1)\Phi_2$	$(1/\lambda_1)\Phi_1$	$(1/\lambda_2)\Phi_4$	$(1/\lambda_2)\Phi_3$
s=0	$\Phi^{(I)}$	$(1/2)\Phi_1^2=(\eta^2/2)$	Φ_1	$(1/r_1)\Phi_4$	$(1/r_1)\Phi_3$

Bu durumda elastik eğri fonksiyonunun 1.ci , 2.ci ve 3.cü türevleri şu formda yazılır;

$$Y' = A_1[a(\cosh a\zeta \cos b\zeta) - b(\sinh a\zeta \sin b\zeta)] + A_2[a(\sinh a\zeta \cos b\zeta) - b(\cosh a\zeta \sin b\zeta)] +$$

$$A_3[a(\sinh a\zeta \sin b\zeta) + b(\cosh a\zeta \cos b\zeta)] + A_4[a(\cosh a\zeta \sin b\zeta) + b(\sinh a\zeta \cos b\zeta)] \tag{2.80}$$

$$\begin{aligned} Y'' = {} & A_1[(a^2 - b^2)(\sinh a\zeta \cos b\zeta) - 2ab(\cosh a\zeta \sin b\zeta)] + \\ & A_2[(a^2 - b^2)(\cosh a\zeta \cos b\zeta) - 2ab(\sinh a\zeta \sin b\zeta)] + \\ & A_3[(a^2 - b^2)(\cosh a\zeta \sin b\zeta) + 2ab(\sinh a\zeta \cos b\zeta)] + \\ & A_4[(a^2 - b^2)(\sinh a\zeta \sin b\zeta) + 2ab(\cosh a\zeta \cos b\zeta)] \end{aligned} \tag{2.81}$$

$$\begin{aligned} Y''' = {} & A_1[a(a^2 - 3b^2)(\cosh a\zeta \cos b\zeta) + b(b^2 - 3a^2)(\sinh a\zeta \sin b\zeta)] + \\ & A_2[a(a^2 - 3b^2)(\sinh a\zeta \cos b\zeta) + b(b^2 - 3a^2)(\cosh a\zeta \sin b\zeta)] + \\ & A_3[a(a^2 - 3b^2)(\sinh a\zeta \sin b\zeta) - b(b^2 - 3a^2)(\cosh a\zeta \cos b\zeta)] + \\ & A_4[a(a^2 - 3b^2)(\cosh a\zeta \sin b\zeta) - b(b^2 - 3a^2)(\sinh a\zeta \cos b\zeta)] \end{aligned} \tag{2.82}$$

2.4. Vlasov Elastik Zeminine Oturan Timoshenko Kirişinin Diferansiyel Denklemleri

Vlasov zemininde, kesme kuvveti, eğilme momenti ve yayılı yüke maruz kalan, kayma etkisindeki bir kiriş elemanında, Winkler zemininden farklı olarak zeminden gelen tepki kuvveti t ve zemin ile kirişin kütleleri (m_1 ve m_0) hesaba katılır. Bu durumda;

$\frac{\partial V}{\partial x} + q = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ olarak tanımladığımız (2.7) denkleminde,

$$q(x,t) = -ky + 2t\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \text{ ve} \tag{2.83}$$

$$\rho A = m_1 + m_o \tag{2.84}$$

alınır.

$$t = \frac{E_0 \delta H}{12(1+\nu_0)}\phi_T \tag{2.85}$$

olarak hesaplanır. Burada ϕ_T;

$$\phi_T = \frac{3}{2}\frac{L}{\gamma H}\frac{sh\frac{\gamma H}{L}ch\frac{\gamma H}{L} - \frac{\gamma H}{L}}{sh^2\frac{\gamma H}{L}} \tag{2.86}$$

formülüyle hesaplanır.

H=L olduğundan;

$$\phi_T = \frac{3}{2}\frac{1}{\gamma}\frac{sh\gamma ch\gamma - \gamma}{sh^2\gamma} \tag{2.87}$$

alınır.

Böylece yönetici denklemler;

$$GA\kappa\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) + (m_1 + m_0)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -ky + 2t\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{2.88}$$

$$GA\kappa\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\psi\right)+EI\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\rho I\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{2.89}$$

halini alır.

(2.88) eşitliği $\partial\psi/\partial x$ için çözülürse;

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{(m_1+m_0)}{GA\kappa}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{ky}{GA\kappa}+\frac{2t}{GA\kappa}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{2.90}$$

olur. (2.89) denkleminin bir kez x'e göre türevi alınırsa;

$$GA\kappa\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+EI\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=\rho I\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \tag{2.91}$$

elde edilir.

(2.90) ifadesi, (2.91) denkleminde yerine konursa;

$$GA\kappa\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-GA\kappa\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{(m_1+m_0)}{GA\kappa}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{ky}{GA\kappa}+\frac{2t}{GA\kappa}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]+$$

$$EI\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{(m_1+m_0)}{GA\kappa}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{ky}{GA\kappa}+\frac{2t}{GA\kappa}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]= \tag{2.92}$$

$$\rho I\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{(m_1+m_0)}{GA\kappa}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{ky}{GA\kappa}+\frac{2t}{GA\kappa}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]$$

eşitliği elde edilir. (2.92) eşitliğinde gerekli sadeleştirmeler ve düzenlemeler yapılırsa;

$$(m_1+m_0)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+ky-2t\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}-\frac{EI(m_1+m_0)}{GA\kappa}\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2}-\frac{kEI}{GA\kappa}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{2tEI}{GA\kappa}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=$$

$$\rho I\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2}-\frac{\rho I(m_1+m_0)}{GA\kappa}\frac{\partial^4 y}{\partial t^4}-\frac{k\rho I}{GA\kappa}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{2t\rho I}{GA\kappa}\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2} \tag{2.93}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Burada y;

$$y(x,t)=Y(x)\cos\Omega t \tag{2.94}$$

olarak alınırsa (2.93) denklemi şu hali alır;

$$-(m_1+m_0)\Omega^2 Y + kY - 2tY^{II} + EIY^{IV} + \frac{EI(m_1+m_0)}{GA\kappa}\Omega^2 Y^{II} - \frac{kEI}{GA\kappa}Y^{II} + \frac{2tEI}{GA\kappa}Y^{IV} =$$

$$-\rho I\Omega^2 Y^{II} - \frac{\rho I(m_1+m_0)}{GA\kappa}\Omega^4 Y\text{^} + \frac{k\rho I}{GA\kappa}\Omega^2 Y - \frac{2t\rho I}{GA\kappa}\Omega^2 Y^{II} \tag{2.95}$$

(2.95) denklemi tekrar düzenlenirse;

$$\left(EI + \frac{2tEI}{GA\kappa}\right)Y^{IV} + \left[\frac{EI(m_1+m_0)}{GA\kappa}\Omega^2 + \rho I\Omega^2 + \frac{2t\rho I}{GA\kappa}\Omega^2 - \frac{kEI}{GA\kappa} - 2t\right]Y^{II} + \tag{2.96}$$

$$\left[-(m_1+m_0)\Omega^2 + k + \frac{\rho I(m_1+m_0)}{GA\kappa}\Omega^4 - \frac{k\rho I}{GA\kappa}\Omega^2\right]Y = 0$$

(2.96) denkleminde, terim karmaşasını önleyebilmek için $\zeta = x/L$ boyutsuzlaştırması yapılırsa;

$$\left(\frac{EI}{L^4} + \frac{2tEI}{GA\kappa L^4}\right)Y^{IV} + \left[\frac{EI(m_1+m_0)}{GA\kappa L^2}\Omega^2 + \frac{\rho I\Omega^2}{L^2} + \frac{2t\rho I}{GA\kappa L^2}\Omega^2 - \frac{kEI}{GA\kappa L^2} - \frac{2t}{L^2}\right]Y^{II} + \tag{2.97}$$

$$\left[-(m_1+m_0)\Omega^2 + k + \frac{\rho I(m_1+m_0)}{GA\kappa}\Omega^4 - \frac{k\rho I}{GA\kappa}\Omega^2\right]Y = 0$$

diferansiyel denklemine ulaşılır.

$$\left(\frac{EI}{L^4} + \frac{2tEI}{GA\kappa L^4}\right) = \beta_1, \tag{2.98}$$

$$\left[\frac{EI(m_1+m_0)}{GA\kappa L^2}\Omega^2 + \frac{\rho I\Omega^2}{L^2} + \frac{2t\rho I}{GA\kappa L^2}\Omega^2 - \frac{kEI}{GA\kappa L^2} - \frac{2t}{L^2}\right] = \beta_2 \text{ ve} \tag{2.99}$$

$$\left[-(m_1+m_0)\Omega^2 + k + \frac{\rho I(m_1+m_0)}{GA\kappa}\Omega^4 - \frac{k\rho I}{GA\kappa}\Omega^2\right] = \beta_3 \tag{2.100}$$

denilirse ve (2.97) denkleminde yerine konulursa, (2.97) denklemi şu formu alır;

$$\beta_1 Y^{iv} + 2\beta_2 Y^{ii} + \beta_3 Y = 0 \tag{2.101}$$

Dördüncü dereceli diferansiyel denklemin çözümü için $Y = e^{\alpha\zeta}$ alınarak (2.101) denkleminde türevleri de alınıp yerine yazılırsa;

$$e^{\alpha\zeta}\left(\beta_1\alpha^4 + 2\beta_2\alpha^2 + \beta_3\right) = 0 \tag{2.102}$$

elde edilir. (2.102) denkleminin sıfır olabilmesi için ($(e^{\alpha\zeta} \neq 0)$ olduğu için) parantez içindeki terimin sıfır olması gerekir.

$$\beta_1\alpha^4 + 2\beta_2\alpha^2 + \beta_3 = 0 \tag{2.103}$$

$$\alpha^2{}_{1,3} = -\frac{\beta_2}{\beta_1} \mp \left(\sqrt{\beta_2{}^2 - \beta_3\beta_1}\right)\frac{1}{\beta_1} \tag{2.104}$$

(2.104) ifadesinde, karekök içerisinde bulunan terim denklemin ve problemin karakterini belirler.

2.4.1. Çözüm Sırasında Karşılaşılabilecek Durumlar

2.4.1.1. Durum I: $\beta_2{}^2 - \beta_3\beta_1 > 0$ Olması Hali (2.105)

β_3<0 olması halinde, "α" ifadesi (2.104) denkleminin köklerini ifade ederse, denklem köklerinin ikisinin sanal, ikisinin reel olduğu görülür.

$$\alpha_1 = +\sqrt{-\frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_1}\sqrt{\beta_2{}^2 - \beta_3\beta_1}}$$

$$\alpha_2 = -\sqrt{-\frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_1}\sqrt{\beta_2{}^2 - \beta_3\beta_1}} \tag{2.106}$$

$$\alpha_3 = +i\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_1}\sqrt{\beta_2{}^2 - \beta_3\beta_1}}$$

$$\alpha_4 = -i\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_1}\sqrt{\beta_2{}^2 - \beta_3\beta_1}}$$

Denklem kökleri çözüm denkleminde yerine yazılırsa;

$$Y(x) = B_1\cos\alpha_3\zeta + B_2\sin\alpha_3\zeta + B_3\cosh\alpha_1\zeta + B_4\sinh\alpha_1\zeta \tag{2.107}$$

elde edilir. Bu denklemin bilinmeyenleri " B_1, B_2, B_3, B_4" katsayıları olup, bu katsayılar sınır koşulları yardımıyla bulunur.

Eğer β_3>0 ise denklemin bütün kökleri sanal olur. Bu durumda çözüm denklemi;

$$Y(x) = B_1 \cos\alpha_1\zeta + B_2 \sin\alpha_1\zeta + B_3 \cos\alpha_3\zeta + B_4 \sin\alpha_3\zeta \tag{2.108}$$

şeklinde olur.

2.4.1.2. Durum II: $\beta_2{}^2 - \beta_3\beta_1 < 0$ **Olması Hali** (2.109)

$$\alpha_{1,2,3,4} = \mp a \mp ib \tag{2.110}$$

$$Y(\zeta) = B_1 \cosh a\zeta \cos b\zeta + B_2 \sinh a\zeta \cos b\zeta + B_3 \cosh a\zeta \sin b\zeta + B_4 \sinh a\zeta \sin b\zeta \tag{2.111}$$

elastik eğri fonksiyonu elde edilir. Bu denklemin bilinmeyenleri " B_1, B_2, B_3, B_4" katsayıları olup, bu katsayılar sınır koşulları yardımıyla bulunur. a ve b katsayılarını bulmak için aşağıdaki çözüm şekli kullanılırsa;

$$\alpha^2{}_{1,2} = -\frac{\beta_2}{\beta_1} \mp i\alpha = -\overline{\beta} \mp i\alpha = Ae^{i\theta} \tag{2.112}$$

$$-\overline{\beta} + i\alpha = Ae^{i\theta} = A\cos\theta + iA\sin\theta \tag{2.113}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{-\beta^2{}_2 + \beta_3\beta_1}}{\beta_1} \tag{2.114}$$

$$A\cos\theta = -\overline{\beta} \qquad A = \sqrt{\alpha^2 + \overline{\beta}^2} \qquad \tan\theta = -\frac{\alpha}{\beta} \tag{2.115}$$

$$A\sin\theta = \alpha$$

$$\sqrt{-\overline{\beta} + i\alpha} = \sqrt{A}e^{i\theta/2} = \sqrt{A}\cos\frac{\theta}{2} + i\sqrt{A}\sin\frac{\theta}{2} = a + ib \tag{2.116}$$

$$a = \sqrt{A}\cos\frac{\theta}{2} \qquad \text{ve} \qquad b = \sqrt{A}\sin\frac{\theta}{2} \tag{2.117}$$

elde edilir.

2.4.1.3. Durum III: $\beta_2^{\,2} - \beta_3\beta_1 = 0$ **Olması Hali** (2.118)

β_2<0 ise; $\alpha_{1,2,3,4} = \mp\sqrt{-\dfrac{\beta_2}{\beta_1}}$ (2.119)

$$Y(\zeta) = B_1 \cosh \alpha_1\zeta + B_2\zeta \cosh \alpha_1\zeta + B_3 \sinh \alpha_1\zeta + B_4\zeta \sinh \alpha_1\zeta \quad (2.120)$$

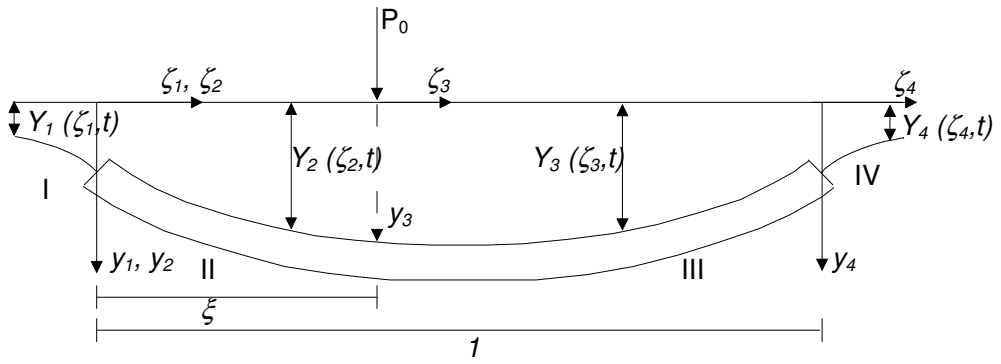
elde edilir. Bu denklemin bilinmeyenleri " B_1, B_2, B_3, B_4" katsayıları olup, bu katsayılar sınır koşulları yardımıyla bulunur.

β_2>0 ise; $\alpha_{1,2,3,4} = \mp\sqrt{\dfrac{\beta_2}{\beta_1}}\sqrt{i} = \mp\sqrt{\dfrac{\beta_2}{\beta_1}}\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ (2.121)

olacağından çözüm denklemi;

$$Y(\zeta) = B_1 e^{\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}\frac{1+i}{\sqrt{2}}\zeta} + B_2 e^{-\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}\frac{1+i}{\sqrt{2}}\zeta} + \beta_3\zeta e^{\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}\frac{1+i}{\sqrt{2}}\zeta} + \beta_4\zeta e^{-\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}\frac{1+i}{\sqrt{2}}\zeta} \quad (2.122)$$

halini alır.



Şekil 2.4 : Vlasov Elastik Zeminine Oturan Timoshenko Kirişinin Bölgeleri

Kirişin II. ve III. bölgelerinde II. durum geçerlidir ve bu durumda elastik eğri denklemleri;

II. bölgede, $0 < \zeta_2 < \xi$ arasında;

$$Y_2(\zeta) = B_1 \cosh a\zeta \cos b\zeta + B_2 \sinh a\zeta \cos b\zeta + B_3 \cosh a\zeta \sin b\zeta + B_4 \sinh a\zeta \sin b\zeta$$

(2.123)

III. bölgede, $\xi < \zeta_3 < 1-\xi$ arasında;

$$Y_3(\zeta) = C_1 \cosh a\zeta \cos b\zeta + C_2 \sinh a\zeta \cos b\zeta + C_3 \cosh a\zeta \sin b\zeta + C_4 \sinh a\zeta \sin b\zeta \tag{2.124}$$

olarak hesaplanır.

I. ve IV. bölgelerde ise;

$$2t \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - kV - m_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \tag{2.125}$$

$$V(x,t) = \overline{V}(x)\cos \Omega t \tag{2.126}$$

olduğu göz önüne alınırsa;

$$2t \frac{d^2 \overline{V}}{dx^2} - k\overline{V} + m_0 \Omega^2 \overline{V} = 0 \tag{2.127}$$

her terim 2t'ye bölünürse;

$$\frac{d^2 \overline{V}}{dx^2} - \frac{k - m_0 \Omega^2}{2t} \overline{V} = 0 \tag{2.128}$$

$\zeta = x/L$ boyutsuzlaştırması yapılırsa;

$$\frac{d^2 \overline{V}}{L^2 d\zeta^2} - \frac{k - m_0 \Omega^2}{2t} \overline{V} = 0 \tag{2.129}$$

$$L^2 \frac{k - m_0 \Omega^2}{2t} = \alpha^2 \tag{2.130}$$

denilirse;

$$\frac{d^2 \overline{V_1}}{dx^2} - \alpha^2 \overline{V_1} = 0 \tag{2.131}$$

bulunur.

$$\overline{V}_1 = A_1 e^{\alpha x} + A_2 e^{-\alpha x} \tag{2.132}$$

denklemi elde edilir. Denklem kökleri incelenecek olursa;

1) $k > m_0\Omega^2$, $\alpha > 0$ durumunda;

$x \rightarrow -\infty$ ' a giderken $V_1 = 0$ olması için $A_2 = 0$ olması gerekir. Böylece;

$$\overline{V_1} = A_1 e^{\alpha x} \tag{2.133}$$

denklemi kullanılır.

$$\overline{V}_4 = D_1 e^{\alpha x} + D_2 e^{-\alpha x} \tag{2.134}$$

olarak tanımlanır ve

$x \rightarrow +\infty$ ' a giderken $V_4 = 0$ olması için $D_1 = 0$ olması gerekir. Böylece;

$$\overline{V_4} = D_2 e^{-\alpha x} \tag{2.135}$$

denklemi kullanılır.

2) $k < m_0\Omega^2$ ise;

$$\frac{d^2\overline{V_1}}{dx^2} + \frac{m_0\Omega^2 - k}{2t}\overline{V_1} = 0 \tag{2.136}$$

$$\frac{m_0\Omega^2 - k}{2t} = \beta^2 \tag{2.137}$$

denilirse;

$$\frac{d^2\overline{V_1}}{dx^2} + \beta^2\overline{V_1} = 0 \tag{2.138}$$

bulunur.

$$\overline{V_1} = A_1 e^{i\beta x} + A_2 e^{-i\beta x} \tag{2.139}$$

$$\overline{V_1} = A_1 \cos\beta x + A_2 \sin\beta x \tag{2.140}$$

denklemi kullanılır.

Sınır Koşulları

Sınır Koşulu 1:

Eksenlerin birleşim noktasında, yani kirişin başlangıç noktasında, birinci ve ikinci bölge için çökme değerleri birbirine eşittir.

$\zeta = 0 \rightarrow Y_1(\zeta_1=0) = Y_2(\zeta_2=0)$ (2.141)

$$A_1 e^{\alpha\zeta} \mid_{\zeta 1=0} = B_1 \cosh a\zeta \cos b\zeta + B_2 \sinh a\zeta \cos b\zeta + B_3 \cosh a\zeta \sin b\zeta + B_4 \sinh a\zeta \sin b\zeta \mid_{\zeta 2} \quad (2.142)$$

Sınır Koşulu 2:

Kirişin başlangıç noktasında eğilme momenti sıfırdır.

$\zeta = 0 \rightarrow M_2 = 0$ $\qquad \frac{M_2}{EI} = -\frac{d\psi_2}{Ld\zeta} \mid \zeta_{2=0} = 0$ (2.143)

$$\frac{d\psi_2}{Ld\zeta} \mid \zeta_{2=0} = \frac{d^2Y_2}{L^2 d\zeta^2} - \frac{(m_1+m_0)\Omega^2}{GA\kappa} Y_2 - \frac{kY_2}{GA\kappa} + \frac{2t}{GA\kappa}\frac{d^2Y_2}{L^2 d\zeta^2} \mid \zeta_{2=0} \quad (2.144)$$

$$\frac{d\psi_2}{Ld\zeta} \mid \zeta_{2=0} = \frac{d^2Y_2}{L^2 d\zeta^2} + \frac{(m_1+m_0)\gamma\pi EI}{GA^2\kappa L^4\rho}\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 Y_2 - \frac{kY_2}{GA\kappa} + \frac{2t}{GA\kappa}\frac{d^2Y_2}{L^2 d\zeta^2} \mid \zeta_{2=0} \quad (2.145)$$

Sınır Koşulu 3:

Kirişin başlangıç noktasındaki kesme kuvveti eşitliği;

$SV_1' - T_2 - SV_2' = 0$ $\qquad GA\kappa\left(\frac{dV_2}{Ld\zeta} - \psi_2\right) = 2tV_1' - 2tV_2'$ (2.146)

ψ ifadesi (2.89) denkleminden elde edilmektedir.

$$\left[\frac{dY_2}{Ld\zeta}-\left[\frac{1}{\left(\frac{\gamma\pi EI^2}{AL^4}\right)\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2-GA\kappa}\left(-GA\kappa\frac{dY_2}{Ld\zeta}-EI\frac{d}{Ld\zeta}\left(\frac{d^2Y_2}{L^2d\zeta^2}+\frac{(m_1+m_0)\gamma\pi EI}{GA^2\kappa L^4\rho}\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2Y_2\right)\right)\right]\right]$$

$$+$$

$$\left[\frac{dY_2}{Ld\zeta}-\left[\frac{1}{\left(\frac{\gamma\pi EI^2}{AL^4}\right)\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2-GA\kappa}\left(-GA\kappa\frac{dY_2}{Ld\zeta}-EI\frac{d}{Ld\zeta}\left(-\frac{kY_2}{GA\kappa}+\frac{2t}{GA\kappa}\frac{d^2Y_2}{L^2d\zeta^2}\right)\right)\right]\right]$$

$$=\frac{2tV_1'-2tV_2'}{GA\kappa} \tag{2.147}$$

Sınır Koşulu 4:

Eksenlerin birleşim noktasında, ikinci ve üçüncü bölge için çökme değerleri birbirine eşittir.

$$\zeta=\xi \rightarrow Y_2|_{\zeta 2=\xi}= Y_3|_{\zeta 3=0} \tag{2.148}$$

$$B_1\cosh a\zeta\cos b\zeta+B_2\sinh a\zeta\cos b\zeta+B_3\cosh a\zeta\sin b\zeta+B_4\sinh a\zeta\sin b\zeta\ |_{\zeta 2=1/2}=$$

$$C_1\cosh a\zeta\cos b\zeta+C_2\sinh a\zeta\cos b\zeta+C_3\cosh a\zeta\sin b\zeta+C_4\sinh a\zeta\sin b\zeta\ |_{\zeta 3=0}$$

(2.149)

Sınır Koşulu 5:

Eksenlerin birleşim noktasında, ikinci ve üçüncü bölge için dönme değerleri birbirine eşittir.

$$\zeta=\xi \rightarrow \psi_2|_{\zeta 2=\xi}=\psi_3|_{\zeta 3=0} \tag{2.150}$$

$$\left[\frac{1}{\left(\frac{\gamma\pi EI^2}{AL^4}\right)\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2-GA\kappa}\left(-GA\kappa\frac{dY_2}{Ld\zeta}-EI\frac{d}{Ld\zeta}\left(\frac{d^2Y_2}{L^2d\zeta^2}+\frac{(m_1+m_0)\gamma\pi EI}{GA^2\kappa L^4\rho}\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2Y_2\right)\right)\right]+$$

$$\left[\frac{1}{\left(\frac{\gamma\pi EI^2}{AL^4}\right)\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2-GA\kappa}\left(-GA\kappa\frac{dY_2}{Ld\zeta}-EI\frac{d}{Ld\zeta}\left(-\frac{kY_2}{GA\kappa}+\frac{2t}{GA\kappa}\frac{d^2Y_2}{L^2d\zeta^2}\right)\right)\right]$$

=

$$\left[\frac{1}{\left(\frac{\gamma\pi EI^2}{AL^4}\right)\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2-GA\kappa}\left(-GA\kappa\frac{dY_3}{Ld\zeta}-EI\frac{d}{Ld\zeta}\left(\frac{d^2Y_3}{L^2d\zeta^2}+\frac{(m_1+m_0)\gamma\pi EI}{GA^2\kappa L^4\rho}\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2Y_3\right)\right)\right]+$$

$$\left[\frac{1}{\left(\frac{\gamma\pi EI^2}{AL^4}\right)\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2-GA\kappa}\left(-GA\kappa\frac{dY_3}{Ld\zeta}-EI\frac{d}{Ld\zeta}\left(-\frac{kY_3}{GA\kappa}+\frac{2t}{GA\kappa}\frac{d^2Y_3}{L^2d\zeta^2}\right)\right)\right] \quad (2.151)$$

Sınır Koşulu 6:

Eksenlerin birleşim noktasında, ikinci ve üçüncü bölge için eğilme momenti değerleri birbirine eşittir.

$$\zeta=\xi \rightarrow M_2\big|_{\zeta 2=\xi}= M_3\big|_{\zeta 3=0} \qquad -\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\big|_{\zeta 2=\xi}=-\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\big|_{\zeta 3=0} \quad (2.152)$$

$$\frac{d^2y_2}{L^2d\zeta^2}+\frac{(m_1+m_0)\gamma\pi EI}{GA^2\kappa L^4\rho}\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2Y_2-\frac{kY_2}{GA\kappa}+\frac{2t}{GA\kappa}\frac{d^2Y_2}{L^2d\zeta^2}\big|\zeta_{2=\xi} \quad (2.153)$$

$$\frac{d^2Y_3}{L^2d\zeta^2}+\frac{(m_1+m_0)\gamma\pi EI}{GA^2\kappa L^4\rho}\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2Y_3-\frac{kY_3}{GA\kappa}+\frac{2t}{GA\kappa}\frac{d^2Y_3}{L^2d\zeta^2}\big|\zeta_{3=0} \quad (2.154)$$

Sınır Koşulu 7:

Eksenlerin birleşim noktasında, üçüncü bölgenin kesme kuvveti değeri ve ikinci bölgenin kesme kuvveti değerinin farkı, -P kuvvetine eşittir.

$T_3(\zeta_3) - T_2(\zeta_2) = -P \qquad GA\kappa\left(\frac{dY_3}{Ld\zeta} - \psi_3\right)\Big|_{\zeta 3=0} - GA\kappa\left(\frac{dY_2}{Ld\zeta} - \psi_2\right)\Big|_{\zeta 2=\xi} = -P$ (2.155)

$$\frac{dY_3}{Ld\zeta} - \left[\frac{1}{\left(\frac{\gamma\pi EI^2}{AL^4}\right)\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 - GA\kappa}\left(-GA\kappa\frac{dY_3}{Ld\zeta} - EI\frac{d}{Ld\zeta}\left(\frac{d^2Y_3}{L^2d\zeta^2} + \frac{(m_1+m_0)\gamma\pi EI}{GA^2\kappa L^4\rho}\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 Y_3\right)\right)\right] +$$

$$\left[\frac{1}{\left(\frac{\gamma\pi EI^2}{AL^4}\right)\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 - GA\kappa}\left(-GA\kappa\frac{dY_3}{Ld\zeta} - EI\frac{d}{Ld\zeta}\left(-\frac{kY_3}{GA\kappa} + \frac{2t}{GA\kappa}\frac{d^2Y_3}{L^2d\zeta^2}\right)\right)\right]\Big|_{\zeta 3=0^-}$$

$$\frac{dY_2}{Ld\zeta} - \left[\frac{1}{\left(\frac{\gamma\pi EI^2}{AL^4}\right)\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 - GA\kappa}\left(-GA\kappa\frac{dY_2}{Ld\zeta} - EI\frac{d}{Ld\zeta}\left(\frac{d^2Y_2}{L^2d\zeta^2} + \frac{(m_1+m_0)\gamma\pi EI}{GA^2\kappa L^4\rho}\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 Y_2\right)\right)\right] +$$

$$\left[\frac{1}{\left(\frac{\gamma\pi EI^2}{AL^4}\right)\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 - GA\kappa}\left(-GA\kappa\frac{dY_2}{Ld\zeta} - EI\frac{d}{Ld\zeta}\left(-\frac{kY_2}{GA\kappa} + \frac{2t}{GA\kappa}\frac{d^2Y_2}{L^2d\zeta^2}\right)\right)\right]\Big|_{\zeta 2=\xi} = -\frac{P}{GA\kappa}$$ (2.156)

Sınır Koşulu 8:

Eksenlerin birleşim noktasında, ikinci ve üçüncü bölge için çökme değerleri birbirine eşittir.

$\zeta = 1 - \xi \rightarrow \; Y_3\big|_{\zeta 3=1-\xi} = Y_4\big|_{\zeta 4=0}$ (2.157)

$$C_1\cosh a\zeta\cos b\zeta + C_2\sinh a\zeta\cos b\zeta + C_3\cosh a\zeta\sin b\zeta + C_4\sinh a\zeta\sin b\zeta\Big|_{\zeta 3=1-\xi}$$

$$= D_2 e^{-\alpha\zeta}\Big|_{\zeta 4=0}$$ (2.158)

Sınır Koşulu 9:

Kirişin bitiş noktasında eğilme momenti sıfırdır.

$$\zeta = 1-\xi \rightarrow \mathrm{M_3}=0 \qquad \frac{M_3}{EI} = -\frac{d\psi_3}{Ld\zeta} \mid \zeta_{3=1-\xi} = 0 \tag{2.159}$$

$$-\frac{d\psi_3}{Ld\zeta} \mid \zeta_{3=1-\xi} = -\left(\frac{d^2Y_3}{L^2 d\zeta^2} - \frac{(m_1+m_0)\Omega^2}{GA\kappa} Y_3 - \frac{kY_3}{GA\kappa} + \frac{2t}{GA\kappa} \frac{d^2Y_3}{L^2 d\zeta^2} \right) \mid \zeta_{3=1-\xi}=0 \tag{2.160}$$

$$\frac{d\psi_3}{Ld\zeta} \mid \zeta_{3=1-\xi} = \frac{d^2Y_3}{L^2 d\zeta^2} + \frac{(m_1+m_0)\gamma\pi EI}{GA^2\kappa L^4\rho} \left(\frac{\Omega}{\omega_0} \right)^2 Y_3 - \frac{kY_3}{GA\kappa} + \frac{2t}{GA\kappa} \frac{d^2Y_3}{L^2 d\zeta^2} \mid \zeta_{3=1-\xi=0} \tag{2.161}$$

Sınır Koşulu 10:

Kirişin bitiş noktasındaki kesme kuvveti eşitliği;

$$\zeta = 1-\xi \rightarrow \mathrm{T_3 + SV_3' - SV_4' = 0} \qquad GA\kappa \left(\frac{dV_3}{Ld\zeta} - \psi_3 \right) = 2tV_4' - 2tV_3' \tag{2.162}$$

$$\left[\frac{dY_3}{Ld\zeta} - \left[\frac{1}{\left(\frac{\gamma\pi EI^2}{AL^4} \right) \left(\frac{\Omega}{\omega_0} \right)^2 - GA\kappa} \left(-GA\kappa \frac{dY_3}{Ld\zeta} - EI \frac{d}{Ld\zeta} \left(\frac{d^2Y_3}{L^2 d\zeta^2} + \frac{(m_1+m_0)\gamma\pi EI}{GA^2\kappa L^4\rho} \left(\frac{\Omega}{\omega_0} \right)^2 Y_3 \right) \right) \right] \right]$$
$$+$$
$$\left[\frac{dY_3}{Ld\zeta} - \left[\frac{1}{\left(\frac{\gamma\pi EI^2}{AL^4} \right) \left(\frac{\Omega}{\omega_0} \right)^2 - GA\kappa} \left(-GA\kappa \frac{dY_3}{Ld\zeta} - EI \frac{d}{Ld\zeta} \left(-\frac{kY_3}{GA\kappa} + \frac{2t}{GA\kappa} \frac{d^2Y_3}{L^2 d\zeta^2} \right) \right) \right] \right]$$
$$= \frac{2tV_4' - 2tV_3'}{GA\kappa} \tag{2.163}$$

2.5. Winkler Elastik Zeminine Oturan Euler Kirişinin Denklemleri

Hareket denklemi düşey doğrultuda yazıldığında;

$$-V+V+\frac{\partial V}{\partial x}dx+qdx-F=0 \tag{2.164}$$

$$q(x,t)=-ky \qquad y(x,t)=Y(x)\cos\Omega t \tag{2.165}$$

$$F=ma=\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}dx \tag{2.166}$$

şeklinde ifade edilir.

$$\frac{\partial V}{\partial x}dx-kydx-\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}dx=0 \tag{2.167}$$

V kesme kuvveti ifadesi yerine konulursa;

$$-EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}-ky-\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0 \tag{2.168}$$

denklemine ulaşılır. Gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\frac{d^4Y}{dx^4}+\frac{kY}{EI}-\frac{\rho A\Omega^2 Y}{EI}=0 \tag{2.169}$$

$$\frac{d^4Y}{dx^4}+Y\left(\frac{k}{EI}-\frac{\rho A\Omega^2}{EI}\right)=0 \tag{2.170}$$

$\zeta=\frac{x}{L}$ boyutsuzlaştırması yapılırsa;

$$\frac{d^4Y}{d\zeta^4L^4}+\left(\frac{k}{EI}-\frac{\rho A\Omega^2}{EI}\right)Y=0 \tag{2.171}$$

$$\frac{d^4Y}{d\zeta^4}+\frac{kL^4}{EI}\left(1-\frac{\rho A\Omega^2}{k}\right)Y=0 \tag{2.172}$$

$\frac{kL^4}{EI}=4\beta^4$ ve (2.173)

$$\beta^4\left(1-\frac{\rho A\Omega^2}{k}\right)=\theta^4 \text{ dersek;} \tag{2.174}$$

$$\frac{d^4Y}{d\gamma^4}+4\theta^4Y=0 \tag{2.175}$$

elde edilir.

Dördüncü dereceli diferansiyel denklemin çözümü için $Y=e^{\alpha\zeta}$ alınarak (2.175) denkleminde türevleri de alınıp yerine yazılırsa;

$$\alpha^4e^{\alpha\xi}+4\theta^4e\alpha\xi=0 \quad \rightarrow \quad e^{\alpha\xi}\left(\alpha^4+4\theta^4\right)=0 \tag{2.176}$$

Çözüm için parantez içindeki terimin sıfır olması gerekir;

$$\alpha^4=-4\theta^4 \quad \rightarrow \quad \alpha^4=i^2\,4\theta^4 \tag{2.177}$$

$$\alpha^2=\mp 2i\theta^2 \quad \rightarrow \quad \alpha_{1,2}=\mp\sqrt{2i}\theta$$

$$\alpha_{3,4}=\mp\sqrt{-2i}\theta \tag{2.178}$$

kökleri bulunur ve diferansiyel denklemde yerine yazılırsa;

$$Y=e^{\theta\zeta}\left(A\sin\theta\zeta+B\cos\theta\zeta\right)+e^{-\theta\zeta}\left(C\sin\theta\zeta+D\cos\theta\zeta\right) \tag{2.179}$$

denklemi elde edilir.

Sınır Koşulları:

Sınır Koşulu 1)

Kirişin başlangıç noktasında eğilme momenti sıfırdır.

$\zeta = 0 \quad \rightarrow \quad Y_1'' = 0$ (2.180)

Sınır Koşulu 2)

Kirişin başlangıç noktasında kesme kuvveti sıfırdır.

$\zeta = 0 \quad \rightarrow \quad Y_1''' = 0$ (2.181)

Sınır Koşulu 3)

Kirişin bitiş noktasında eğilme momenti sıfırdır.

$$\zeta = 0 \quad \rightarrow \quad Y_2'' = 0 \tag{2.182}$$

Sınır Koşulu 4)

Kirişin bitiş noktasında kesme kuvveti sıfırdır.

$$\zeta = 0 \quad \rightarrow \quad Y_2''' = 0 \tag{2.183}$$

Sınır Koşulu 5)

Eksenlerin birleşim noktasında, birinci ve ikinci bölge için çökme değerleri birbirine eşittir.

$$\zeta = \xi \quad \rightarrow \quad Y_1|_{\xi} = Y_2|_{\xi} \tag{2.184}$$

Sınır Koşulu 6)

Eksenlerin birleşim noktasında, 1. ve 2. bölge için dönme değerleri birbirine eşittir.

$$\zeta = \xi \rightarrow \quad Y_1'|_{\xi} = Y_2'|_{\xi} \tag{2.185}$$

Sınır Koşulu 7)

Eksenlerin birleşim noktasında, birinci ve ikinci bölge için eğilme momenti değerleri birbirine eşittir.

$$\zeta = \xi \rightarrow \quad Y_1''|_{\xi} = Y_2''|_{\xi} \tag{2.186}$$

Sınır Koşulu 8)

Eksenlerin birleşim noktasında, ikinci bölgenin kesme kuvveti değeri ile birinci bölgenin kesme kuvveti değerinin farkı, -P kuvvetine eşittir.

$$\zeta = \xi \rightarrow \quad EI(Y_2'''|_{\xi} - Y_1'''|_{\xi}) = -P \tag{2.187}$$

2.6. Winkler Zeminine Oturan Çekme Gerilmesi Almayan Timoshenko Kirişi

Kesme kuvveti, eğilme momenti ve yayılı yüke maruz kalan kayma etkisi altındaki Winkler zeminine oturan bir Timoshenko kirişinin çekme gerilmesi almadığı düşünülecek olursa diferansiyel denklem şu yol takip edilerek bulunur:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \psi + \gamma_0 \tag{2.1}$$

$$V = AG\kappa\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi\right) \tag{2.5}$$

$$M = -EI\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} + q = 0 \tag{2.188}$$

(2.188) denklemine, (2.5) ifadesinin x' e göre bir kez türevi alınarak ve q ifadesi yerine yazılarak;

$$GA\kappa\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) - ky = 0 \tag{2.189}$$

elde edilir.

Her iki taraf GAκ' ya bölünürse ve yeniden düzenlenirse;

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{k}{GA\kappa}y \tag{2.190}$$

sağlanır. (2.190) denkleminden $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ çekilirse;

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{k}{GA\kappa}y \tag{2.191}$$

bulunur.

$$\frac{\partial M}{\partial x} = V \tag{2.192}$$

olduğuna göre (2.2) ve (2.5), (2.192) denkleminde yerine yazılırsa

$$-EI\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=GA\kappa\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\psi\right) \tag{2.193}$$

elde edilir ve bu ifadenin x'e göre bir kez türevi alınırsa;

$$-EI\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=GA\kappa\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \tag{2.194}$$

denklemine ulaşılır. Bu ifadede $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ yerine konulursa;

$$-EI\left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}-\frac{k}{GA\kappa}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)=GA\kappa\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{k}{GA\kappa}y\right) \tag{2.195}$$

elde edilir ve yeniden düzenlenirse;

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}-\frac{k}{GA\kappa}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{k}{EI}y=0 \tag{2.196}$$

denklemi bulunur.

$$y^{iv}-\frac{k}{GA\kappa}y^{u}+\frac{k}{EI}y=0 \tag{2.197}$$

(2.197) denkleminde, terim karmaşasını önleyebilmek için $\xi=x/L$ boyutsuzlaştırması yapılırsa;

$$y^{iv}-\frac{kL^2}{GA\kappa}y^{u}+\frac{kL^4}{EI}y=0 \tag{2.198}$$

elde edilir.

$$\frac{kL^2}{GA\kappa}=2\gamma^2 \quad \text{ve} \tag{2.199}$$

$$\frac{kL^4}{EI}=\beta^4 \tag{2.200}$$

denilirse ve (2.199) ve (2.200) denklemleri, (2.198) denkleminde yerine konulursa;

$$\alpha^4 - 2\gamma^2\alpha^2 + \beta^4 = 0 \tag{2.201}$$

elde edilir. (2.201) denkleminin kökleri;

$$\alpha^2{}_{1,3} = \gamma^2 \mp \sqrt{\gamma^4 - \beta^4} = \gamma^2 \mp i\sqrt{\beta^4 - \gamma^4} \tag{2.202}$$

olarak hesaplanır. Çözüm için aşağıdaki yol takip edilir;

$$\alpha^2{}_1 = \gamma^2 + i\theta \qquad \theta = \sqrt{\beta^4 - \gamma^4} \tag{2.203}$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\gamma^2 + i\theta} = a + ib = \sqrt{a^2 + b^2}\, e^{i\xi} \tag{2.204}$$

$$\cos\xi = a \ , \ \sin\xi = b \ , \ \tan\xi = \frac{b}{a} \tag{2.205}$$

$$\alpha^2 = \gamma^2 + i\theta = Ae^{i\xi} \tag{2.206}$$

$$Ae^{i\xi} = A\cos\xi + iA\sin\xi \tag{2.207}$$

olduğu gözönüne alınırsa;

$$A\cos\xi = \gamma^2 \tag{2.208}$$

$$A\sin\xi = \theta \tag{2.209}$$

$$A^2 = \gamma^4 + \theta^2 \Rightarrow A = \sqrt{\gamma^4 + \theta^2} \tag{2.210}$$

$$\tan\xi = \frac{\theta}{\gamma^2} \tag{2.211}$$

$$\alpha_1 = \sqrt{A}e^{i\xi/2} = \sqrt{A}\left(\cos\frac{\xi}{2} + i\sin\frac{\xi}{2}\right) = a + ib \tag{2.212}$$

$$a = \sqrt{A}\cos\frac{\xi}{2} \qquad b = \sqrt{A}\sin\frac{\xi}{2} \tag{2.213}$$

a ve b ifadeleri bulunur ve (2.210) denklemi, (2.213) denklem takımında yerine yazılırsa;

$$a = \sqrt[4]{\gamma^4 + \beta^4 - \gamma^4}\cos\frac{\xi}{2} = \beta\cos\frac{\xi}{2} \tag{2.214}$$

$$b = \sqrt[4]{\gamma^4 + \beta^4 - \gamma^4}\sin\frac{\xi}{2} = \beta\sin\frac{\xi}{2} \tag{2.215}$$

elde edilmiş olur.

$$Y = e^{\mp a\zeta}e^{\pm ib\zeta} \tag{2.216}$$

(2.216) denklemindeki ifadeler hiperbolik ve trigonometrik fonksiyonlar cinsinden aşağıdaki şekilde yazılır;

$$Y = A_1\sinh a\zeta\cos b\zeta + A_2\cosh a\zeta\cos b\zeta + A_3\cosh a\zeta\sin b\zeta + A_4\sinh a\zeta\sin b\zeta \tag{2.217}$$

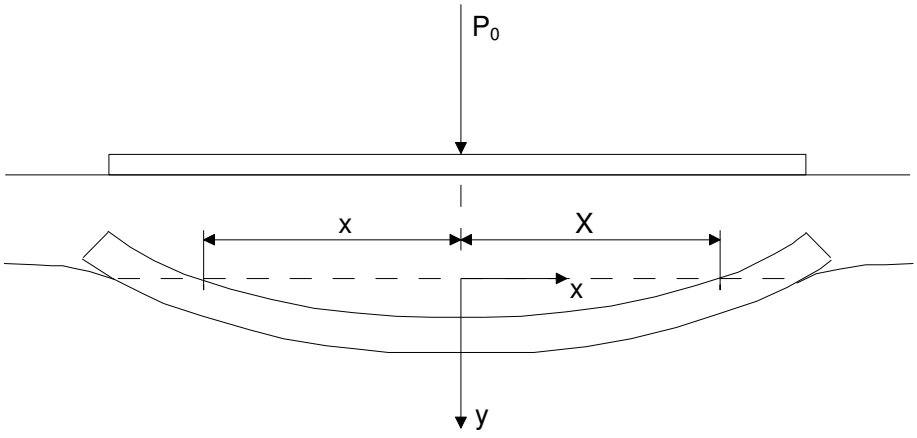
Sonuç olarak;

$$M = -EI\frac{d\psi}{Ld\zeta} = -EI\left(\frac{d^2y}{L^2d\xi^2} - \frac{k}{GA\kappa}y\right) \tag{2.218}$$

$$V = \frac{dM}{d\zeta} = -EI\left(\frac{d^3y}{L^3d\zeta^3} - \frac{k}{GA\kappa}\frac{dy}{Ld\zeta}\right) = GA\kappa\left(\frac{dy}{Ld\zeta} - \psi\right) \tag{2.219}$$

$$\psi = \frac{dy}{Ld\zeta} + \frac{EI}{GA\kappa}\left(\frac{d^3y}{L^3d\zeta^3} - \frac{k}{GA\kappa}\frac{dy}{Ld\zeta}\right) \tag{2.220}$$

denklemleri elde edilir.



Şekil 2.5 : Winkler Elastik Zemininde Çekme Almayan Kiriş Modeli

Sınır Koşulları:

Sınır Koşulu 1)

$$\zeta = 0 \;\rightarrow \psi \,|_{\zeta=0} \;=\; 0 \tag{2.221}$$

$$\psi = \frac{dY}{Ld\zeta} + \frac{EI}{GA\kappa}\frac{d^3Y}{L^3 d\zeta^3} - \frac{kEI}{(GA\kappa)^2}\frac{dY}{Ld\zeta} \tag{2.222}$$

$$\frac{dY}{d\zeta}L^2\left(1 - \frac{kEI}{(GA\kappa)^2}\right) + \frac{EI}{GA\kappa}\frac{d^3Y}{d\zeta^3}\,|_{\zeta=0} = 0 \tag{2.223}$$

Sınır Koşulu 2)

$$\zeta=0 \;\rightarrow\; V\,|_{\zeta=0} = -\,P_0 / 2 \tag{2.224}$$

$$-EI\left(\frac{d^3Y}{L^3 d\zeta^3} - \frac{k}{GA\kappa}\frac{dY}{Ld\zeta}\right)|_{\zeta=0} = 0 \tag{2.225}$$

$$-EI\left(\frac{d^3Y}{d\zeta^3} - \frac{kL^2}{GA\kappa}\frac{dY}{d\zeta}\right)|_{\zeta=0} = 0 \tag{2.226}$$

Sınır Koşulu 3)

$$\zeta = X \;\rightarrow\; Y_1 = 0 \tag{2.227}$$

$$A_1 \sinh a\zeta \cos b\zeta + A_2 \cosh a\zeta \cos b\zeta + A_3 \cosh a\zeta \sin b\zeta + A_4 \sinh a\zeta \sin b\zeta \;|_{\zeta=X}=0$$

(2.228)

Sınır Koşulu 4)

$$\zeta = X \;\rightarrow\; M\,|_{\zeta=X} = 0 \tag{2.229}$$

$$M = -EI\left(\frac{d^2Y}{L^2 d\zeta^2} - \frac{k}{GA\kappa}Y\right)|_{\zeta=1/2} = 0 \tag{2.230}$$

$$M = -EI\left(\frac{d^2Y}{d\zeta^2} - \frac{kL^2}{GA\kappa}Y\right)|_{\zeta=1/2} = 0 \tag{2.231}$$

Sınır Koşulu 5)

$$\zeta = X \;\rightarrow\; \mathrm{V}\,|_{\zeta=0} = 0 \tag{2.232}$$

$$EI\left(\frac{d^3Y}{L^3 d\zeta^3} - \frac{k}{GA\kappa}\frac{dY}{Ld\zeta}\right)|_{\zeta=0} = 0 \tag{2.233}$$

$$EI\left(\frac{d^3Y}{d\zeta^3} - \frac{kL^2}{GA\kappa}\frac{dY}{d\zeta}\right)|_{\zeta=0} = 0 \tag{2.234}$$

3. SAYISAL SONUÇLAR

3.1. Sayısal Değerler

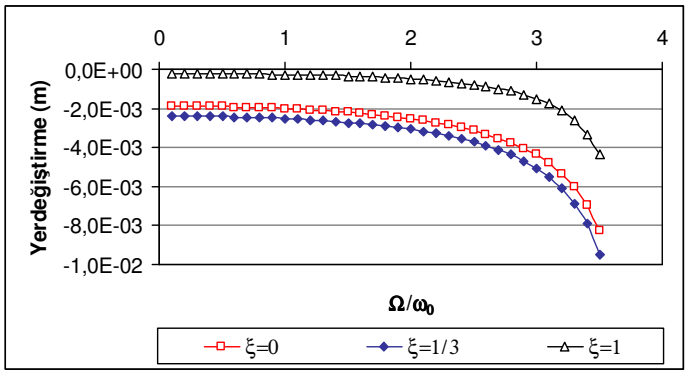
Bu bölümde 2. bölümde elde edilen elastik eğri fonksiyonlarının, sınır koşullarından yararlanılarak sayısal çözümü yapılmış ve sonuçlar grafiklerle verilmiştir.

Bölüm 2' de (2.23) ve (2.97) denklemleri ile ifade edilen elastik eğri fonksiyonlarında, E kiriş elastisite modülünü, I kirişin eylemsizlik momentini, G kayma modülünü, k zemin yatak katsayısını, ρ kiriş kütle yoğunluğunu, L kiriş boyunu, A kiriş kesit alanını, κ kesit şekline bağlı uyum katsayısını, Ω zorlanma frekansını, t zeminden gelen tepki kuvvetini, m_1 kiriş kütlesini, m_0 zemin kütlesini ifade etmektedir. t kuvvetinin hesabında kullanılan E_0 zemin elastisite modülünü, ν_0 zemin Poisson oranını, δ kirişin oturduğu zemin tabakası genişliğini, γ zemin karakterine bağlı boyutsuz sabit, H kiriş altındaki zemin tabakası derinliğini ifade etmektedir. Bu büyüklüklerin sayısal değerleri aşağıdaki gibidir:

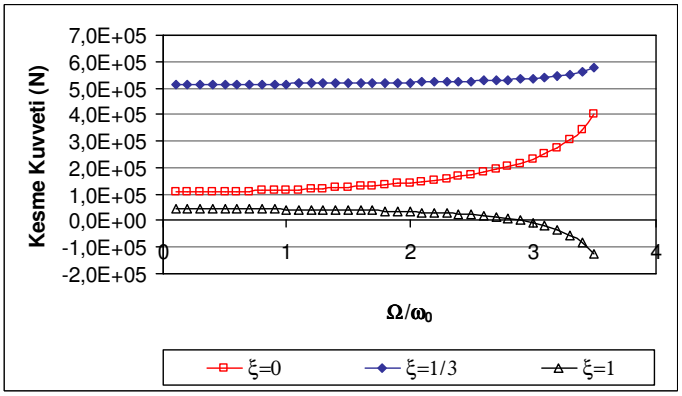
$E = 2 \times 10^{10}$ N/m^2, $I = 0{,}2$ m^4, $G = 0{,}8 \times 10^{10}$ N/m^2, $k = 5 \times 10^7$ N/m^2, $\rho = 2500$ kg/m^3, $m_1 = 2500$ kg/m, $L = 10$ m, $A = 1$ m^2, $\kappa = 1$, $E_0 = 10^8$ N/m^2, $\delta = 1$, $\gamma = 1$, $H = 10$ m, $m_0 = 2500$ kg/m, $\nu_0 = 0{,}25$, P=1000000 N

3.2. Sonuçlar

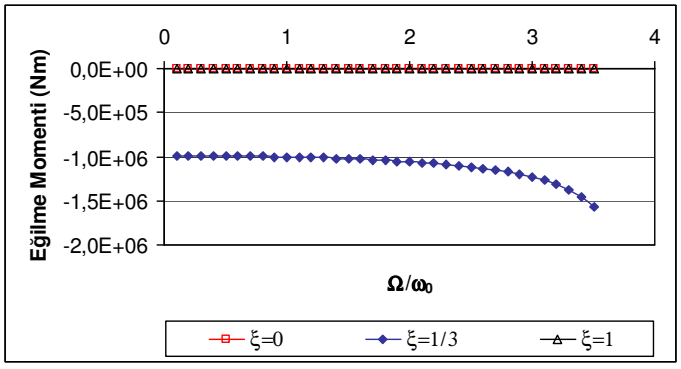
Bu çalışmada Winkler zeminine oturan Timoshenko kirişi, Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişi ve kayma etkisinde olmayan Winkler zeminine oturan Euler kirişi problemleri ayrı ayrı çözülmüştür. Sayısal hesaplar, Winkler ve Vlasov zemini için, Ω/ω_0 zorlanma frekansı, 1 ile 3,5 arasında değişen değerler dikkate alınarak yapılmıştır. Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde yükün, kiriş boyunun 1/3' ünde ve 1/2'sinde olması durumları ayrı ayrı incelenmiştir. Yerdeğiştirme grafiği Ω/ω_0 zorlanma frekansı oranına göre değişmektedir. Şekil (3.1) ve Şekil (3.4)' de görüldüğü gibi, Ω/ω_0 oranı arttıkça yerdeğiştirme de artmaktadır. Kiriş, oran arttıkça zemine biraz daha batmaktadır. Zorlanma frekansı kesme kuvvetini de değiştirmektedir. Kesme kuvvetinin, Ω/ω_0 oranındaki büyümeye bağlı olarak arttığı görülmüştür. Eğilme momenti grafikleri ise beklendiği gibi kirişin başlangıç ve bitiş noktasında sıfır olmak üzere, orta noktalarda biraz artmaktadır.



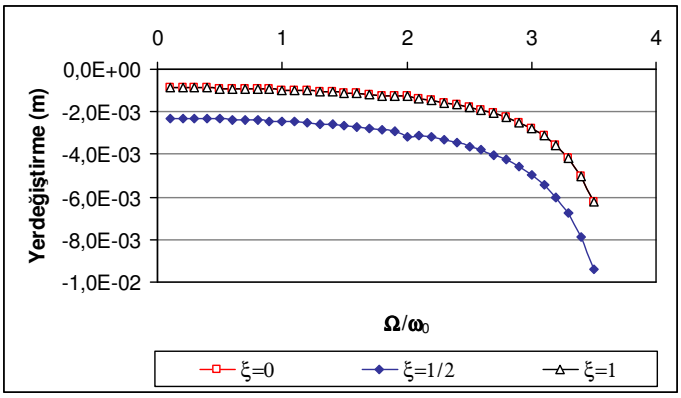
Şekil 3.1 : Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde, yük ξ=1/3 'te, Ω/ω_0 oranına göre yerdeğiştirme değişim grafiği



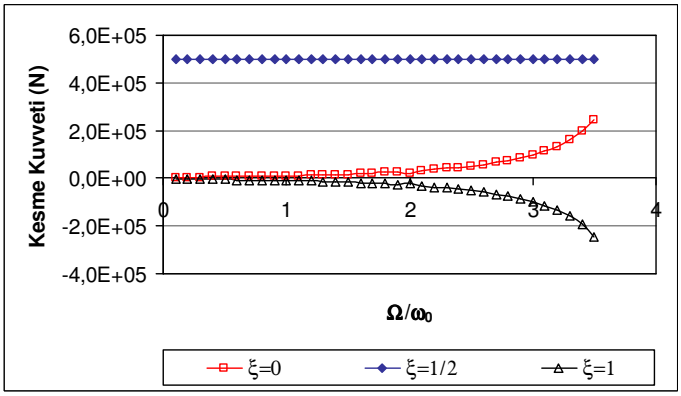
Şekil 3.2 : Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde, yük ξ=1/3 'te, Ω/ω_0 oranına göre kesme kuvveti değişim grafiği



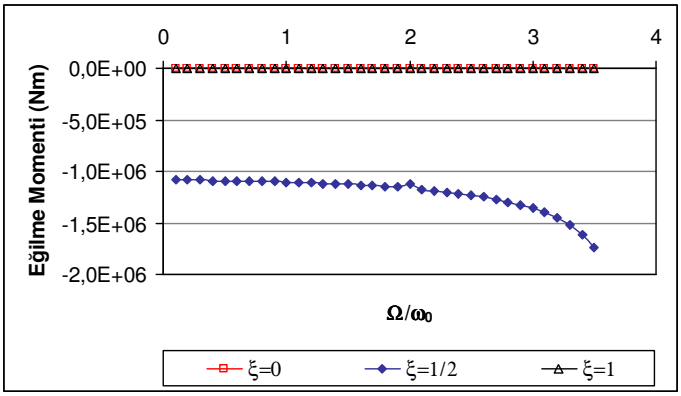
Şekil 3.3 : Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde, yük ξ=1/3 'te, Ω/ω_0 oranına göre eğilme momenti değişim grafiği



Şekil 3.4 : Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde, yük ξ=1/2 'de, Ω/ω_0 oranına göre yerdeğiştirme değişim grafiği

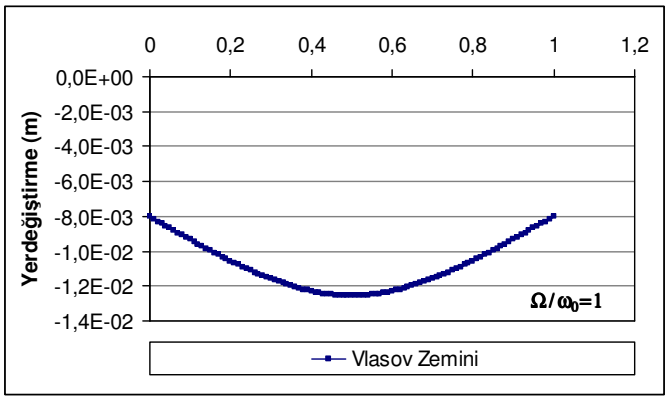


Şekil 3.5 : Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde, yük ξ=1/2 'de, Ω/ω_0 oranına göre kesme kuvveti değişim grafiği

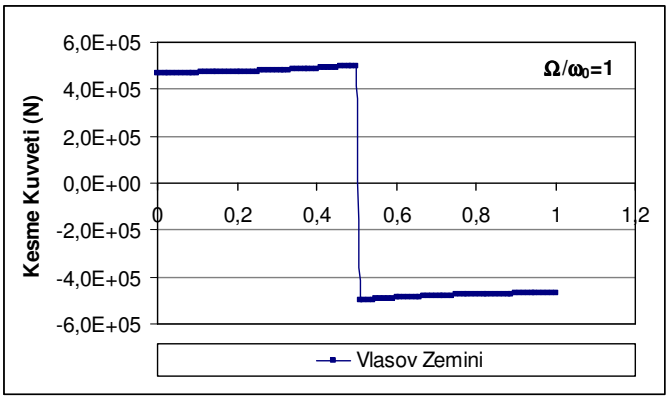


Şekil 3.6 : Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde, yük ξ=1/2 'de, Ω/ω_0 oranına göre eğilme momenti değişim grafiği

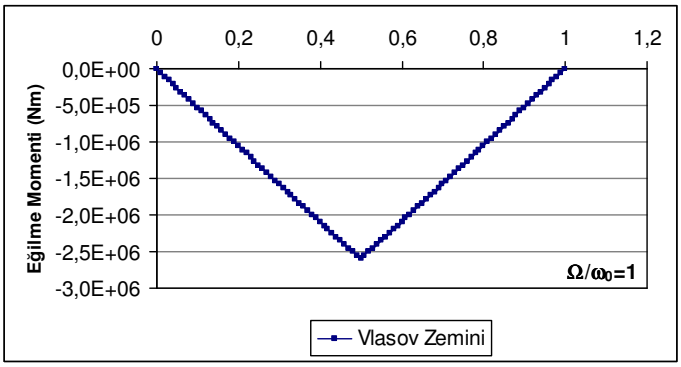
Vlasov elastik zemininde, Ω/ω_0 =1 durumunda zeminden gelen tepki kuvveti olan t'nin artması halinde ise Timoshenko kirişi, Şekil (3.7), Şekil (3.8), Şekil (3.9)' da görüldüğü gibi Euler kirişi gibi davranmaktadır. Sert zeminde daha rijit bir kiriş elde edilmektedir. Kesme kuvveti, Şekil (3.11)'deki grafikle karşılaştırılırsa açık bir şekilde artmaktadır.



Şekil 3.7 : t'nin değişimi durumunda Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde yerdeğiştirme grafiği

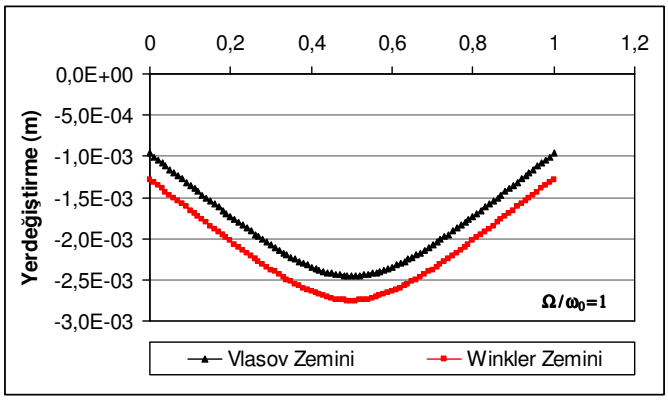


Şekil 3.8 : t'nin değişimi durumunda Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde kesme kuvveti grafiği

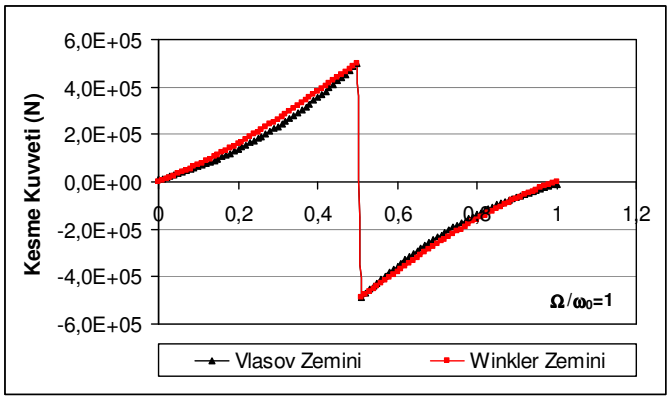


Şekil 3.9 : t'nin değişimi durumunda Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde eğilme momenti grafiği

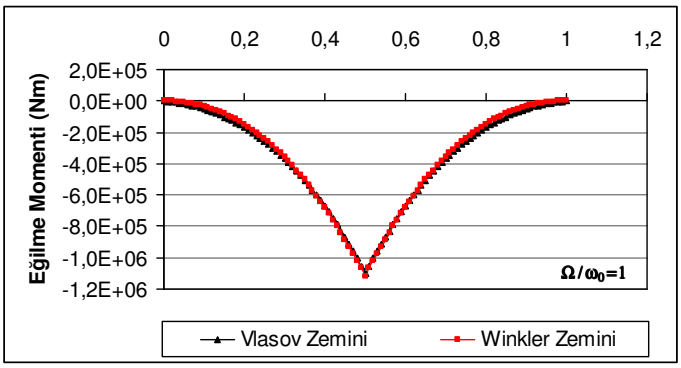
Timoshenko kirişi, Winkler ve Vlasov elastik zeminlerinde ayrı ayrı hesaplanmış ve iki zemin arasındaki farklılıklar grafiklerle ortaya konmuştur. Ω/ω_0=1 durumunda Winkler zeminine oturan kirişteki yerdeğiştirme Şekil (3.10)' daki gibi daha fazla olduğu halde, Ω/ω_0 oranı arttıkça Vlasov zeminine oturan kirişteki yerdeğiştirme Şekil(3.13)' deki gibi çok daha fazla artmaktadır. Kesme kuvveti ve eğilme momenti ise, Ω/ω_0 ile orantılı olarak değişmektedir. Ω/ω_0=1 durumunda Vlasov zemininde kayma etkisinin gözönüne alındığı düşünülecek olursa, Winkler zeminiyle yaklaşık olarak aynı sonuçların elde edildiği grafiklerde görülmektedir. Ancak Ω/ω_0=3,5 durumunda yani frekans titreşimleri arttıkça iki zemin arasındaki fark açık şekilde artmaktadır. Çeşitli Ω/ω_0 zorlanma frekansı oranına göre elde edilen grafikler Ekler'de verilmiştir.



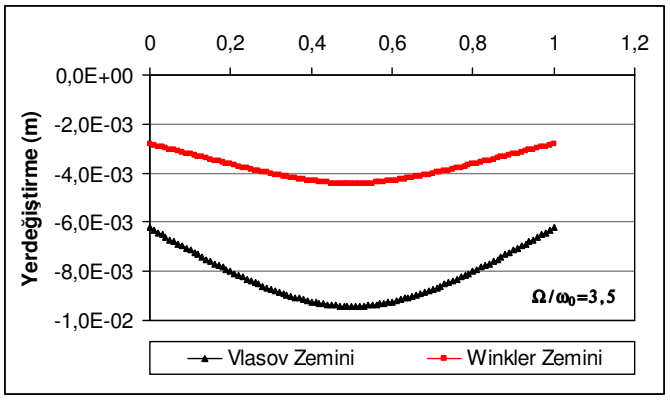
Şekil 3.10 : Ω/ω_0 = 1 durumunda Winkler ve Vlasov zeminlerine oturan Timoshenko kirişinde yerdeğiştirme grafiği



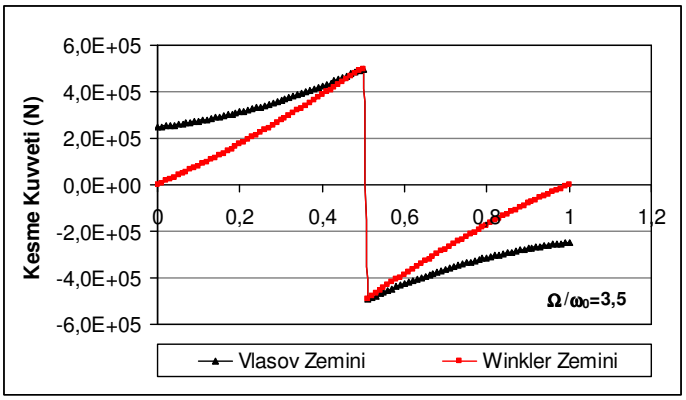
Şekil 3.11 : $\Omega/\omega_0 = 1$ durumunda Winkler ve Vlasov zeminlerine oturan Timoshenko kirişinde kesme kuvveti grafiği



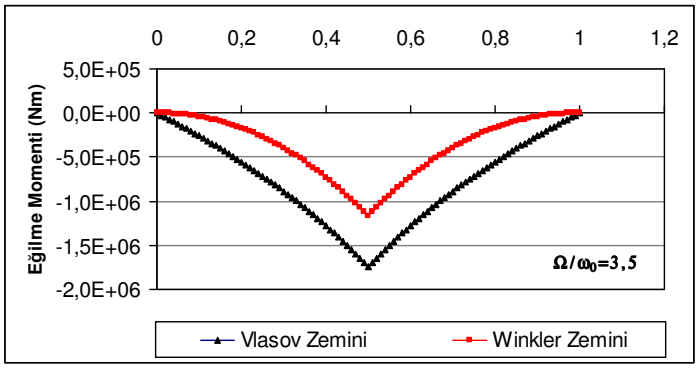
Şekil 3.12 : $\Omega/\omega_0 = 1$ durumunda Winkler ve Vlasov zeminlerine oturan Timoshenko kirişinde eğilme momenti grafiği



Şekil 3.13 : Ω/ω_0=3,5 durumunda Winkler ve Vlasov zeminlerine oturan Timoshenko kirişinde yerdeğiştirme grafiği

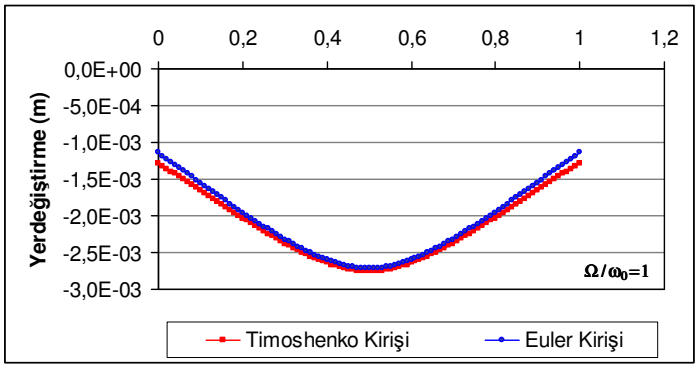


Şekil 3.14 : Ω/ω_0=3,5 durumunda Winkler ve Vlasov zeminlerine oturan Timoshenko kirişinde kesme kuvveti grafiği

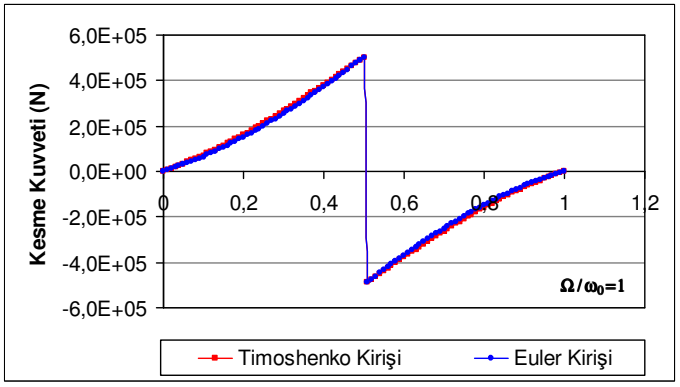


Şekil 3.15 : Ω/ω_0=3,5 durumunda Winkler ve Vlasov zeminlerine oturan Timoshenko kirişinde eğilme momenti grafiği

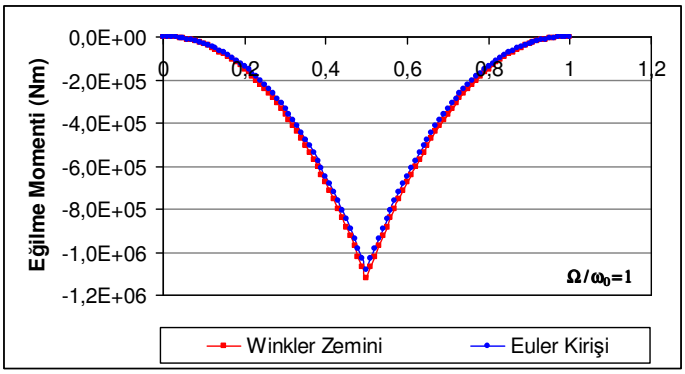
Winkler elastik zemininde ise kayma etkisinin dikkate alındığı Timoshenko kirişi ve kayma etkisinin dikkate alınmadığı Euler kirşinin durumları ayrı ayrı incelenmiş ve grafiklerde karşılaştırılmıştır. Yerdeğiştirme, kesme kuvveti ve eğilme momenti grafikleri her iki kirişte birbirine paralel olarak elde edilmiştir. Ancak kayma etkisi hesaba katıldığında değerlerin önemli ölçüde değişmediği saptanmıştır.



Şekil 3.16 : $\Omega/\omega_0 = 1$ durumunda Winkler zemininde Euler kirişi ile Timoshenko kirişinin karşılaştırmalı yerdeğiştirme grafiği



Şekil 3.17 : $\Omega/\omega_0 = 1$ durumunda Winkler zemininde Euler kirişi ile Timoshenko kirişinin karşılaştırmalı kesme kuvveti grafiği



Şekil 3.18 : $\Omega/\omega_0 = 1$ durumunda Winkler zemininde Euler kirişi ile Timoshenko kirişinin karşılaştırmalı eğilme momenti grafiği

KAYNAKLAR

[1] Winkler, E., 1867. Die Lehre von der Elastızıtat und Festiigkeit, Prague.

[2] Keskinel, F., Kumbasar, N., 1970. Elastik Zemine Oturan Sonlu Kiriş Tesir Çizgileri ve Sürekli Temellerin Çözümüne Uygulanması, İstanbul.

[3] Kerr, A.D., 1964. Elastic and Viscoelastic Foundation Models, Journal of Applied Mech., Vol. 31, pp. 491-498.

[4] Vlasov, V.Z. and Leontev, U.N., 1966. Beams, Plates and Shells on Elastic Foundations, Jerusalem.

[5] Zimmerman, K., 1942. Die Berechnung der Soldruckverteilung unter Grundungskörpern, Der Bauingeneuer.

[6] Develioğlu, İ.N., 1996. Yatak Katsayısı ve Temel Yapılarında Uygulanması, *Yüksek Lisans Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[7] Bowles, J. E., 1988. Foundation Analysis adn Design, Mc-Graw Hill International Editions.

[8] Heteyni, M., 1946. Beams on Elastic Foundation, The University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan.

[9] Dodge, A., 1964. Influence Functions for Beams on Elastic Foundations, J. Struc. Div. Proceedings ASCE, Agust, pp. 63-101.

[10] Donalt, D., Ely, F.J., Sergev, S., Barberito, B., 1965. Ifluence Functions for Beams on elastic Foundation, Diss. ASCE, April, pp. 187-194.

[11] Miranda, C.K., Nair, K., 1946. Finite Beams on Elastic Foundations, J. Struc. Div. Proceedings ASCE, Vol.92, No.ST2, April, pp. 131-142.

[12] Özgen, K., 1982. Elastik Zemine Oturan Betonarme Kirişlerin Limit Analizi, Doğa Bilim Dergisi Müh./Çevre. Cilt 6, 13-19.

[13] Terzaghi, K., 1955. Evaluation of Coefficients of Subgrade Reaction, Geotechnique, Volume V, pp. 297-326, I.C.E., London.

[14] Durelli, A.J., Parks, V.J., Mok, C.K.C., 1966. Photoelastic Beams on Elastic Foundations, J. Struc. Div. Proceedings ASCE, Agust 1966 pp. 1713-1725.

[15] Munther, J. H., 1970. Photoelastic Study of Beams on Elastic Foundations, Discussions ASCE, Vol.96, April, pp. 864-870.

[16] Severn, R.T., 1966. The Solution of Foundation Mat. Problems by Finite Elements Methods, Struc. Eng. London, June.

[17] Krasheninnikova, G.V., 1973. Limits of Influence of an Elastic Layer Upon the Results of Beam Analysis. Taking into Account the Cohesion of Soil with an Undeformable Underlying Layer, Osnovania, Fundamenty, Mekhanika Gruntov, 2:25-28.

[18] Krasheninnikova, G.V., 1964. Analysis of Beams on Elastic Foundations of Finite Depth, Energiye.

[19] Terzaghi, K., Peck, R.B., 1948. Soil Mechanics in Engineering Practice, J. Wiley, New York.

[20] Weistman, Y., 1970. On Foundation That React in Compression Only, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol.37, pp. 1019-1030.

[21] Weistman, Y., 1971. On set of Separation Between a Beam and a Tensionless Foundation, International Journal Of Mechanical Science, Vol.13, No.8, Agust, pp. 707-711.

[22] Ding, Z.A., 1993. A General Solution to Vibrations of Beams on Variable Winkler Elastic Foundation, Computers and Structures, Vol.47, No:1, pp. 83-90.

[23] Bakioğlu, M., Özkan, T., 1980. Sonlu Kalınlıkta Zemin Üzerine Oturan Yüzeysel Temellerin Hesabı Hakkında Bir Yöntem, Tubitak, VII. Bil. Kong.

[24] Karamanlidis, D., Prakash, V., 1988. Buckling and Vibration Analysis of Flexible Beams Resting on an Elastic Half-Space, Earthquake Eng. And Structural Dynamics, Vol.16, pp. 1103-1114.

[25] Lai, C.L., Ting, B.Y., Lee, W.S., Becker, B.R., 1992. Dynamic Response of Beams on Elastic Foundation, Journal of Struct. Engineering, Vol.118, No:3, pp. 853-858.

[26] Ting, B.V., Mockry, E.F., 1984. Beam on Elastic Foundation Finite Element, Journal of Struc. Eng., Vol.110, No:10, October, pp. 2324-2339.

[27] Ting, B.Y., 1982. Finite Beams on Elastic Foundation With Restrains, J. Struc. Div. Proceedings of ASCE, Vol.108, No:ST3, March, pp. 611-621.

[28] Elmas, M., 1988. Elastopşastik Zemine Oturan Sonlu Kirişlerin Deneysel İncelenmesi*, Doktora Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[29] Lin, L., Adams, G.G., 1987. Beam on Tensionless Elastic Foundation, Journal of Eng. Mech., Vol.113, No:4, April, pp. 542-553.

[30] Celep, Z., 1988. Rectangular Plates Resting on Tensionless Elastic Foundation, Journal of Eng. Mech., Vol.114, No:12, December.

[31] Biot, A. M., 1937. Bending of an Infinite Beam on an Elastic Foundation, Journal of Applied Mechanics.

[32] Kögler – Scheiding, 1941. Baugrund und Bauwerk, Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin. (Çeviri: Acun, N., 1953 Temel Zemini ve Yapı, İ.T.Ü., İstanbul.)

[33] Katsikadelis, J.T., Armenakas, A.E., 1984. Plates On Elastic Foundations by BIE Method, Journal of Eng. Mech., Vol.110, No:7 July.

[34] Zhaohua, F., Cook, R.D., 1983. Beam Elements On Two-Parameter Elastics Foundations, Journal of Eng. Mech., Vol.109, No:6, December.

[35] Celep, Z., Malaika, A., Abu-Hussein, M., 1988. Forced Vibrations of a Beam on a Tensionless Foundation, J. Sound and Vibration, pp. 235-246, 128/2.

[36] Özdoğan, G.M., 1995. İki Parametreli Elastik Zemine Oturan Dairesel Plak Problemleri, *Yüksek Lisans Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[37] De Rosa, M.A., 1989. Stability and Dynamics of Beams on Winkler Foundations, Earth. Eng. Struct. Dyn, Vol.18, pp. 377-388.

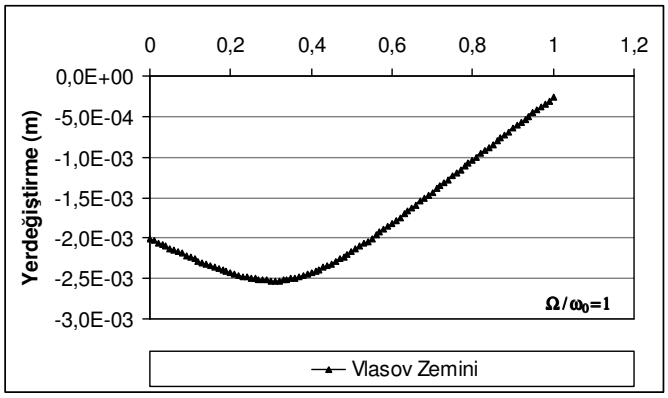
[38] Prolovic, V., Bonic, Z., 1999. The Calculation of Foundation Girders in Equivalent Elastic Semispace, Architecture and Civil Engineering Vol.2, pp.61-66.

[39] Engin, H., 1992. Elastoplastik Zemine Oturan Kiriş ve Plaklar, İ.T.Ü. İnşaat Fak., İnşaat Mühendisliğinde Bilgisayar Kullanımı. III. Sempozyum, İstanbul, syf. 15-18, Haziran.

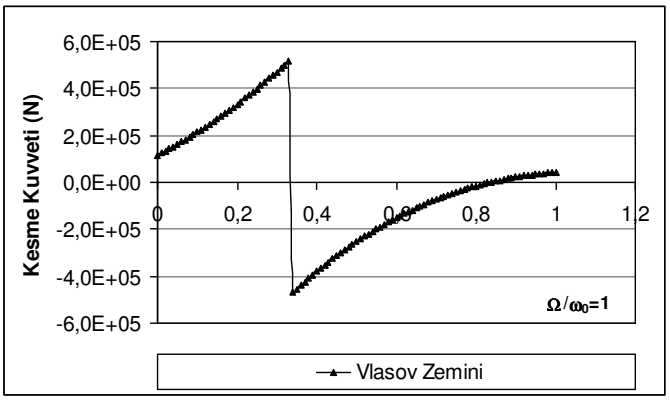
[40] Hayashi, K., 1921. Theorie des Tragers ouf Elastischer Unterlage, J. Springer, Berlin.

[41] Graff, K.F., 1975. Wave Motion in Elastic Solids, Ohio State University Press, pp. 180-183.

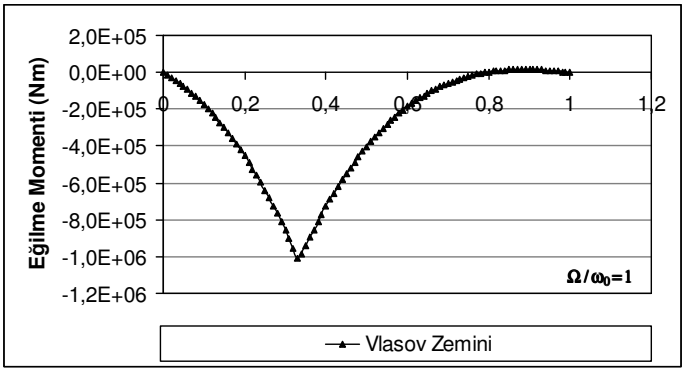
EKLER



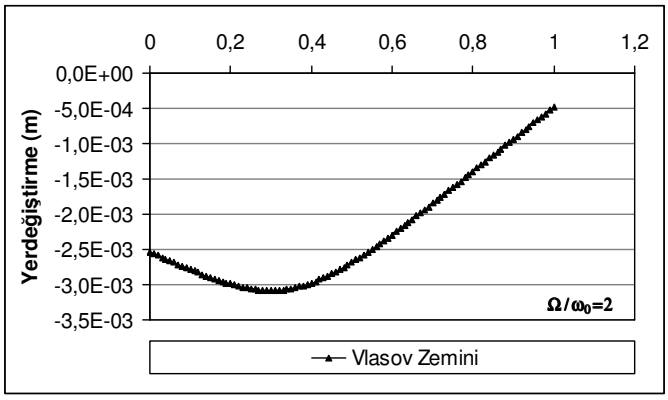
Şekil B.1 : $\Omega/\omega_0 = 1$ durumunda ve yük ξ=1/3 'te Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde yerdeğiştirme grafiği



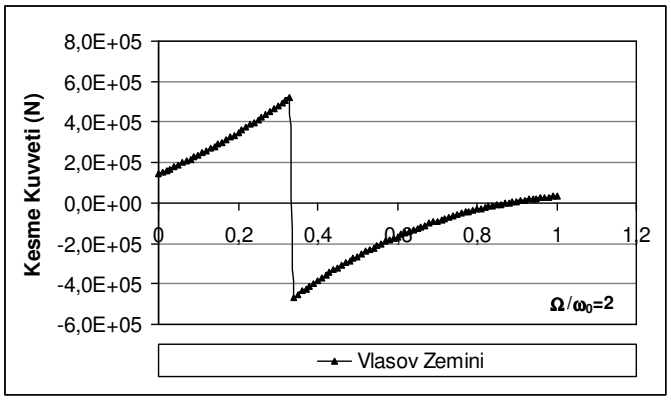
Şekil B.2 : $\Omega/\omega_0 = 1$ durumunda ve yük ξ=1/3 'te Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde kesme kuvveti grafiği



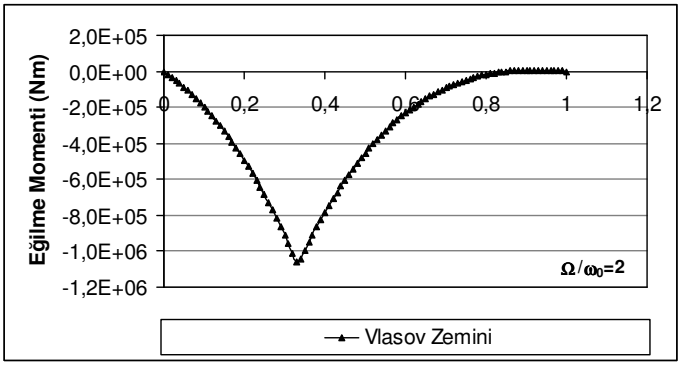
Şekil B.3 : $\Omega/\omega_0 = 1$ durumunda ve yük ξ=1/3 'te Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde eğilme momenti grafiği



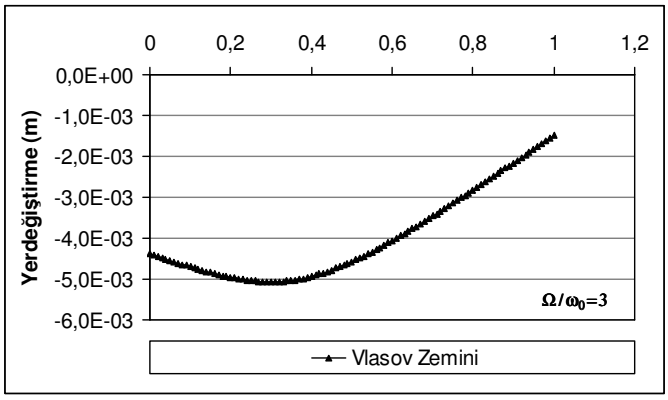
Şekil B.4 : $\Omega/\omega_0 = 2$ durumunda ve yük ξ=1/3 'te Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde yerdeğiştirme grafiği



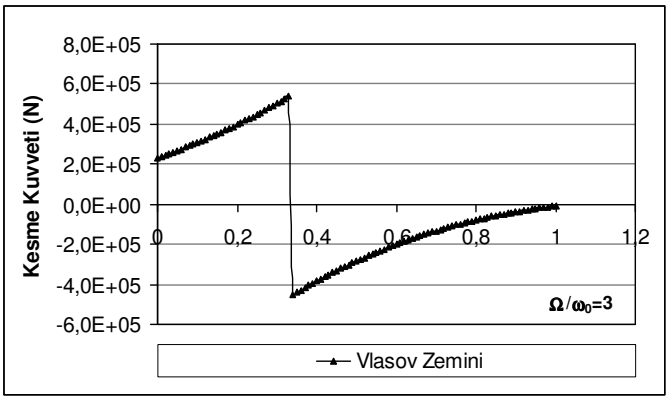
Şekil B.5 : $\Omega/\omega_0 = 2$ durumunda ve yük ξ=1/3 'te Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde kesme kuvveti grafiği



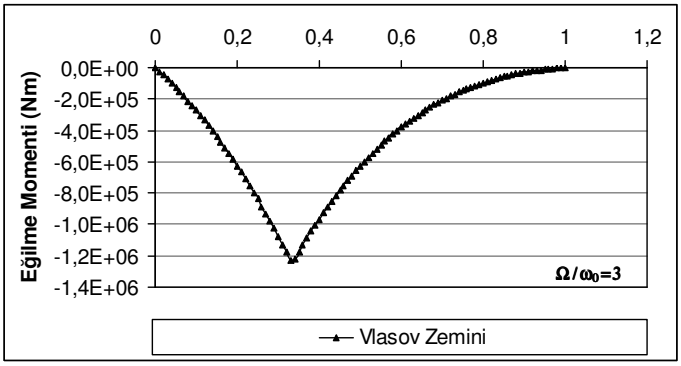
Şekil B.6 : $\Omega/\omega_0 = 2$ durumunda ve yük ξ=1/3 'te Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde eğilme momenti grafiği



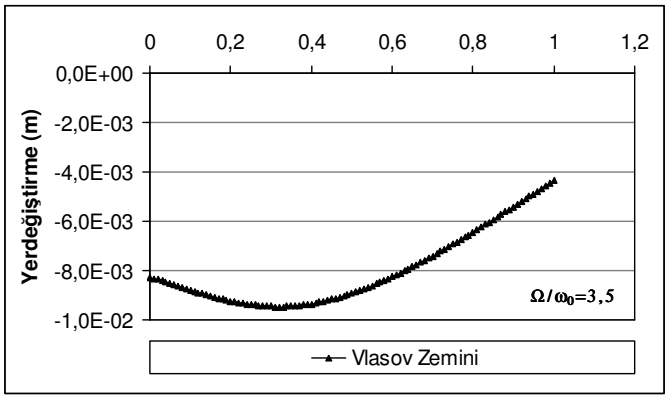
Şekil B.7 : $\Omega/\omega_0 = 3$ durumunda ve yük ξ=1/3 'te Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde yerdeğiştirme grafiği



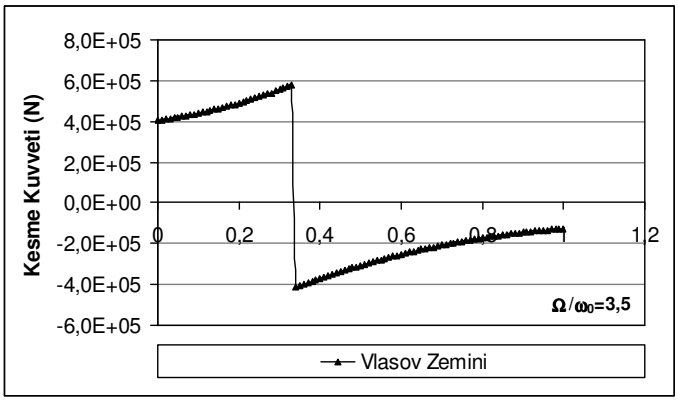
Şekil B.8 : $\Omega/\omega_0 = 3$ durumunda ve yük ξ=1/3 'te Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde kesme kuvveti grafiği



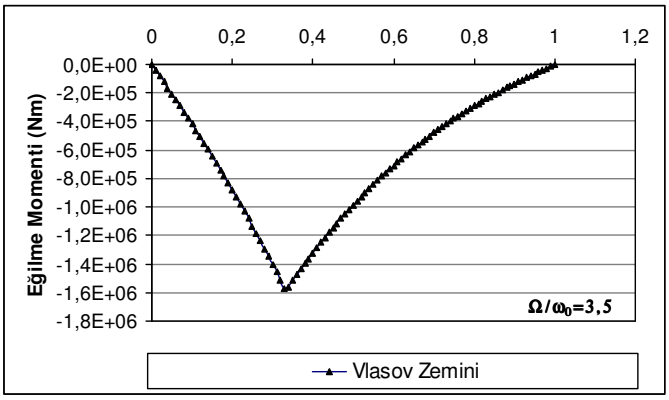
Şekil B.9 : $\Omega/\omega_0 = 3$ durumunda ve yük ξ=1/3 'te Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde eğilme momenti grafiği



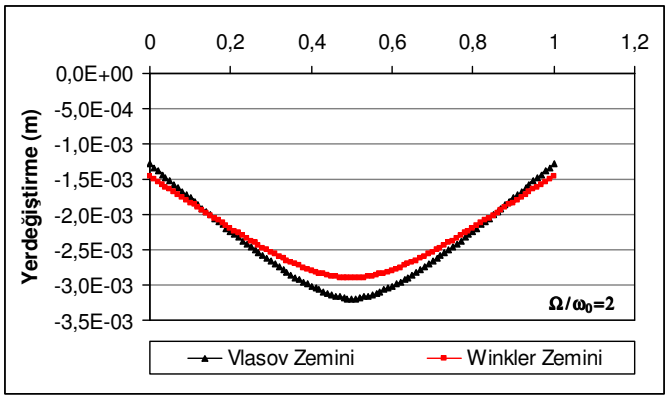
Şekil B.10 : Ω/ω_0=3,5 durumunda ve yük ξ=1/3 'te Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde yerdeğiştirme grafiği



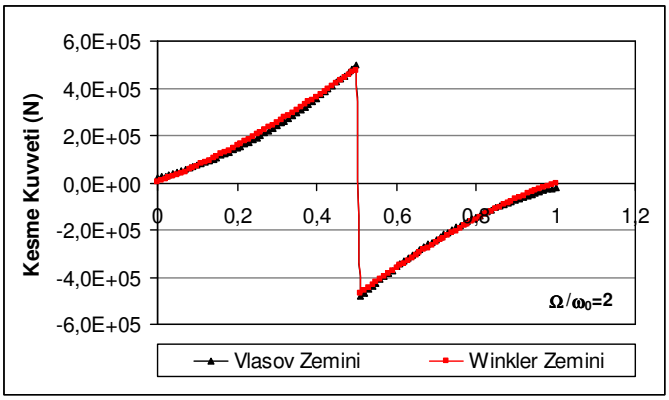
Şekil B.11 : Ω/ω_0 = 3,5 durumunda ve yük ξ=1/3 'te Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde kesme kuvveti grafiği



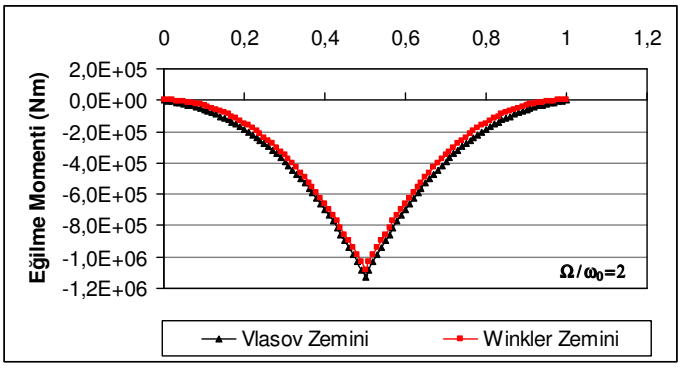
Şekil B.12 : Ω/ω_0 = 3,5 durumunda ve yük ξ=1/3 'te Vlasov zeminine oturan Timoshenko kirişinde eğilme momenti grafiği



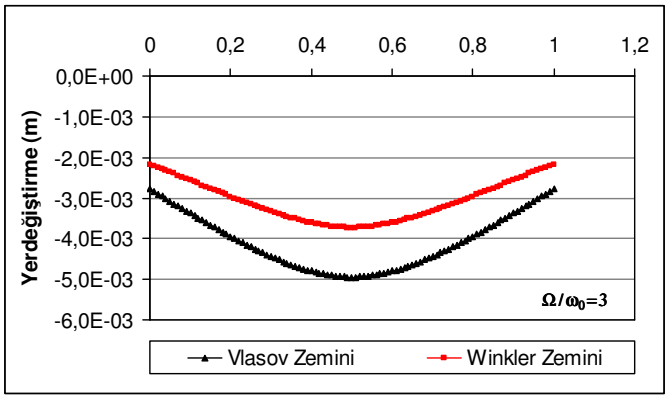
Şekil B.13 : $\Omega/\omega_0 = 2$ durumunda Winkler ve Vlasov zeminlerine oturan Timoshenko kirişinde yerdeğiştirme grafiği



Şekil B.14 : $\Omega/\omega_0 = 2$ durumunda Winkler ve Vlasov zeminlerine oturan Timoshenko kirişinde kesme kuvveti grafiği



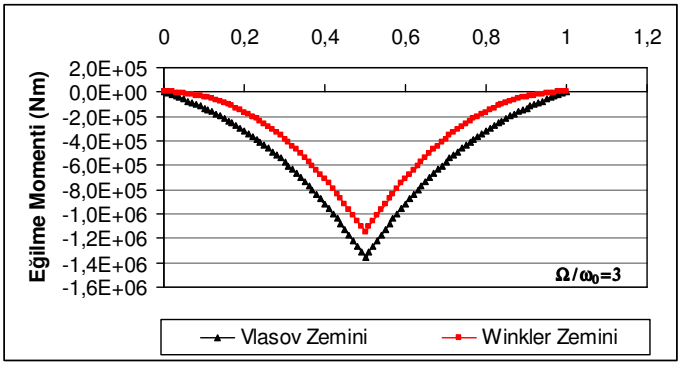
Şekil B.15 : $\Omega/\omega_0 = 2$ durumunda Winkler ve Vlasov zeminlerine oturan Timoshenko kirişinde eğilme momenti grafiği



Şekil B.16 : $\Omega/\omega_0 = 3$ durumunda Winkler ve Vlasov zeminlerine oturan Timoshenko kirişinde yerdeğiştirme grafiği



Şekil B.17 : $\Omega/\omega_0 = 3$ durumunda Winkler ve Vlasov zeminlerine oturan Timoshenko kirişinde kesme kuvveti grafiği



Şekil B.18 : $\Omega/\omega_0 = 3$ durumunda Winkler ve Vlasov zeminlerine oturan Timoshenko kirişinde eğilme momenti grafi

ÖZGEÇMİŞ

Ayben Gülseli Develi, 1981 yılında Gaziantep'te doğdu. İlk öğrenimini Gaziantep Akyol İlkokulunda, ortaokul ve liseyi Gaziantep Tekerekoğlu Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 1999 yılında Celal Bayar Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği bölümüne girmeye hak kazandı ve 2003 yılında lisans programından mezun oldu. Aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Anabilim Dalı Yapı Mühendisliği Programı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı.