TÜBİTAK

İki ve Üç Boyutta Deforme Parçacık Sistemlerinin İstatistik Mekaniksel Özellikleri ve Fiziksel Uygulamaları

Program Kodu: 1001

Proje No: 113F226

Proje Yürütücüsü:
Prof. Dr. Abdullah ALĞIN

Araştırmacı:
Prof. Dr. Metin ARIK

Bursiyerler:
Mustafa ŞENAY
Gözde TOPÇU
Ali OLKUN

ŞUBAT 2017
ESKİŞEHİR

ÖNSÖZ

Geçtiğimiz yıllarda, Bose ve Fermi sistemlerinin gerek kuantumsal gerekse istatistiksel termodinamik yönlerden özellikleri, kozmolojiden malzeme bilimine kadar çok geniş bir araştırma spektrumundaki önemli gelişmelerde rol oynamışlardır. Bu sistemlerin doğrusal olmayan davranışlarının incelenmesi, standart kuantum istatistiksel formalizmin ötesinde yeni yaklaşımlar gerektirir. Bunun için etkin ve verimli yollardan birisi, deforme kuantum istatistiğinin kullanılmasıdır. Bu projede; (3+1) ve (2+1) uzay-zaman boyutlarında deforme parçacık sistemlerinin hem düşük hem yüksek sıcaklıklarda istatistiksel mekanik özellikleri incelenerek, literatüre yeni kuramsal katkılar bağlamında, fermiyonik ve bozonik kuantum deformasyonlarına ait model, yaklaşım ve formülasyonlar geliştirilmiştir. Bu çerçevede kuantum deformasyonlarının; interpolasyon istatistiği, parçacık etkileşmeleri ve özel olarak anyon sistemlerinin özellikleri ile olası ilişkileri araştırıldı. Elde edilen deforme kuantum istatistiksel model ve formülasyonların fiziksel uygulamalardaki etkilerini bulabilmek için katıların ısıl ve elektriksel özelliklerine, Bose-Einstein yoğunlaşmasına, kuantum optiğine bazı uygulamalar yapıldı. Bulunan sonuçların, hem deforme kuantum termodinamiğinin gelişiminde hem de nanoteknoloji ve diğer pek çok alanda karşılaşılan kuazi-parçacık davranışlarının modellenmesinde yeni ufuklar açabileceği umulmaktadır.

15.02.2014-15.02.2017 tarihlerinde yürütülen proje süresince yapılan araştırmalardan elde edilen sonuçlarla; SCI-kapsamında taranan dergilerde dokuz adet bilimsel makale, bir adet yüksek lisans ve iki adet doktora tezi, altı adet ulusal ve uluslararası kongre, sempozyum bildirisi yapılmıştır. Yine bazı proje sonuçlarının paylaşımı amacıyla, bir adet geniş katılımlı kuantum bilimi ve disiplinlerarası uygulamaları üzerine, 25-27 Mayıs 2016 tarihlerinde Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Kongre ve Kültür Merkezi'nde "International Conference on Quantum Science and Applications (ICQSA-2016)" konulu uluslararası çalıştay organizasyonu gerçekleştirilmiştir. Tüm proje çalışmalarına, TÜBİTAK–1001 Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Projelerini Destekleme Programı (Proje No: 113F226) çerçevesinde destekleyen TÜBİTAK'a en içten teşekkürlerimizi sunarız. TÜBİTAK'ın proje kapsamında verdiği burslar sayesinde çalışkan, yetenekli yüksek lisans ve doktora öğrencileri bilimsel araştırma ekseninde istihdam edilebilmiştir. Proje, zamanında ve öngörüldüğü şekilde tamamlanmıştır.

TÜBİTAK'a vermiş olduğu tüm desteklerden ötürü tekrar çok teşekkür ederiz.

TÜBİTAK

İÇİNDEKİLER

Önsöz……ii
Özet ……vi
Abstract ……vii
Şekil Listesi ……iv
Tablo Listesi ……v

1. GİRİŞ

1.1 Giriş ve Amaç ……1
1.2 Literatür Özeti ……4

2. YÖNTEM

2.1 Deforme Parçacık Cebirleri ……7
2.2 *q*-Analizi ve Fibonacci Analizi …… 10
2.3 Deforme Kuantum İstatistiği ……12

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1 Fermiyonik *q*-analizi ve Fibonacci Analizi ile ilgili bulgular ve tartışma ……14
3.2 Üç ve iki boyutlu uzaylarda deforme istatistiksel mekanik özelliklerle ilgili bulgular ve tartışma ……15
3.3 Kuantum deformasyonuyla parçacıklar arası etkileşmelere yaklaşımla ilgili bulgular ve tartışma ……22
3.4 Deforme kuantum istatistiğinin bazı fiziksel uygulamalarıyla ilgili bulgular ve tartışma ……24

4. SONUÇ

4.1 Sonuç ve Öneriler ……26

KAYNAKLAR ……30
EKLER ……35

TÜBİTAK

Şekil Listesi

Sayfa

Şekil 1. Fe için, deforme elektronik ısı kapasitesinin sıcaklığa göre değişimi ($q<1$, EK-3) ……..……..18

Şekil 2. İki-boyutlu uzayda, deforme entropi fonksiyonunun *z* ve *q*'ya göre değişimleri ($q<1$, EK-10)..…….19

Şekil 3. Ni için deformasyon parametreleri *p* ve *q*'nun fonksiyonu olarak deforme Sommerfeld parametresi $\gamma^{(p,q)}$ nun değişimi ($(p,q)<1$, EK-11)..……...21

Tablo Listesi

Sayfa

Tablo 1. Nb, Fe, Pb metallerinin serbest-elektron teorisi yolu, deneysel yol ve deforme ısı kapasitesi yollarıyla elde edilen Sommerfeld parametreleri (Keesom ve Kurrelmeyer, 1939; Van Der Hoeven ve Keesom, 1964; Van Der Hoeven ve Keesom, 1965; Ashcroft ve Mermin, 1976; Kittel, 1976; EK-3)……..….19

ÖZET

Kompozit (ya da kuazi) parçacıkları ve kollektif davranışları içeren kuantum sistemlerinin incelenmesinde kullanılabilecek etkin yaklaşımlardan biri, deforme bozon ve deforme fermiyon kuantum cebirleri ile modellemeler yapmaktır. Bu deforme yapılar; hem standart olmayan kuantum istatistiğinin olası formlarının tanımlanmasında, hem de kompozit parçacık etkileşmelerinin çalışılmasında verimli bir alt yapı sunarlar. Proje kuramsal olup, temel olarak; (3+1) ve (2+1) uzay-zaman boyutlarına sınırlandırılmış deforme bozon ve fermiyon parçacık sistemlerinin istatistiksel mekanik özelliklerini ortaya koymak amaçlanmıştır. Bu yolla, hem deforme kuantum istatistiğine ait yeni yaklaşım ve formülasyonlar geliştirilmiş hem de parçacık alanlarının deformasyonuyla bulunan sonuçların uygulamadaki etkilerini gözlemlemek için katıların ısıl özellikleri, Bose-Einstein yoğunlaşması ve kuantum optiğine bazı fiziksel uygulamalar yapılmıştır.

Üç ve iki boyutlu uzaylarda, düşük ve yüksek sıcaklıklar limitlerinde deforme bozon ve fermiyon gaz sistemlerinin istatistiksel mekanik özellikleri kapsamlıca incelenmiştir. Buradan; deforme bozon ve fermiyon gaz modelleri ile i) Bose-Einstein ve Fermi-Dirac istatistikleri arasında sürekli bir interpolasyon işlevi gören interpolasyon istatistiği'nin tanımlanabileceğine dair yeni bulguları, ii) iki boyutta kesirli istatistikli anyon sistemlerinin özellikleri ile bazı yeni ilişkileri, iii) kuantum deformasyonlarının incelenen sistemin hem parçacıkları arasındaki etkin etkileşmelerle hem de parçacıkların iç (kompozit) yapıları ile ilgili bazı fiziksel etkilerle ilişkileri, iv) düşük boyutlarda bozonik Fibonacci salınımcıları gazının Bose-Einstein yoğunlaşmasını sergileyebileceği, vi) fermiyonik kuantum deformasyonun kuazi-parçacıkların ısıl etkin kütleleriyle ilişkilendirilebileceği şeklinde, literatüre yeni katkılar bağlamında farklı sonuçlar elde edilmiştir.

Bu proje çalışmalarıyla, bozon ve fermiyon sistemlerinin deforme kuantum istatistiksel özellikleriyle ilgili olarak ortaya konan yeni model, yaklaşım ve formülasyonların, kısa zaman içinde olmasa da uzun zaman içerisinde hem bu tür fiziksel sistemlerle çalışan bilim insanlarına ışık tutması hem de nanoyapılar, topolojik materyeller, kuantum hesaplama gibi pek çok teknolojik uygulama potansiyeli yüksek araştırma alanlarında az veya çok katkısı olacağı umulmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Bose ve Fermi sistemleri; deforme Bose gaz modeli; deforme Fermi gaz modeli; deforme salınımcılar; kuantum cebirleri; kuantum istatistiği; *q*-analizi; virial açılımı; kuazi-parçacıklar; anyonlar; Bose-Einstein yoğunlaşması; istatistiksel termodinamik.

ABSTRACT

One of the effective methods for investigating quantum systems containing composite (or quasi) particles and collective behavior is to make some modeling with deformed boson and fermion algebras. These deformed structures provide efficiently possible means for studies of interactions among composite particles, and they can also be used to define possible forms of non-standard quantum statistics. This project is a theoretical one, and its main objective is to obtain the quantum statistical mechanical properties of deformed boson and fermion particle systems confined into (3+1) and (2+1) space-time dimensions. In this way, it is aimed at both developing new approaches and formulations for deformed quantum statistics and showing possible effects of deformed boson and fermion particle models for constructing some physical applications covering several areas of research such as thermal properties of solids, Bose-Einstein condensation and quantum optics.

In three and two spatial dimensions, high and low temperature statistical mechanical properties of deformed boson and fermion gas systems have been extensively investigated. These studies have been led to the new results covering i) a description of interpolating statistics, which serves as a continuous interpolation between Bose-Einstein and Fermi-Dirac statistics, ii) some physical relations with anyonic systems in two dimensions, iii) some implications about both the effective interparticle interactions and their internal (composite) structures, iv) exhibiting the Bose-Einstein condensation phenomenon by low dimensional systems with bosonic Fibonacci oscillators, vi) constructing a relation between fermionic deformation and the thermal effective mass of a quasi-particle.

The findings of this project including new model, approach and formulations of quantum deformations could shed light into researches on interacting theories of bosons and fermions. It is also hoped that the results obtained from deformed quantum statistics could contribute more or less to some potential application areas of research such as nanostructures, topological materials, and quantum computing.

Key words: Bose and Fermi systems; deformed Bose gas model; deformed Fermi gas model; deformed oscillators; quantum algebras; quantum statistics; *q*-calculus; virial expansion; quasiparticles; anyons; Bose-Einstein condensation; statistical thermodynamics.

1. GİRİŞ

1.1 Giriş ve Amaç

Doğadaki kuantum sistemleri, birbirleriyle güçlü şekilde etkileşen çok parçacık içerirler ve doğrusal olmayan davranışlar sergilerler. Bu tür sistemlerin davranışlarının incelenmesi, yerleşik formalizmin ötesinde yeni yaklaşımlar gerektirir. Örneğin; güçlü bir dik manyetik alana yerleştirilmiş iki boyutta elektronların sergilediği kesirli kuantum Hall etkisi (Wilczek, 1990), iki boyutta anyon sistemlerinin sergiledikleri istatistiksel özellikler (Lerda, 1992), eksitonlar gibi bazı kuazi-parçacık hallerinin gelişimi bu örneklerdendir (Harouni vd., 2009). (3+1) ve (2+1) uzay-zaman boyutlarında, özellikle düşük sıcaklıklardaki kuantum etkilerini çalışmak, standart kuantum istatistiklerinin ötesinde yeni ve genel istatistiksel mekanik formalizmi ile mümkün olabilir. Bu tür kuantum sistemleri için geliştirilebilecek olası yeni bir formalizmin özellikleri, nanoteknolojiden kuantum bilgi teorisi temelli uygulamalara kadar pek çok alanda faydaları olabilir.

Geçtiğimiz yıllarda, yukarıda bazı örnekleri bahsedilen karmaşık ve kollektif davranışları içeren sistemlerin özelliklerinin çalışılmasında kullanılabilecek etkin yöntemlerden biri olarak, deforme bozon ve deforme fermiyon kuantum sistemleri dikkate değer bir ilgi görmüştür (Arık ve Coon, 1976; Biedenharn, 1989; Macfarlane, 1989). Bu yol aynı zamanda, istatistiksel mekaniğin genelleştirilmiş bir formalizminin oluşturulmasına yol açacak gerekli alt yapıyı da sunmaktadır. Zira bu sistemler; deforme bozon ve fermiyon salınımcı cebirleri aracılığıyla tanımlanırlar ve standart Bose-Einstein (BE) ile Fermi-Dirac (FD) istatistikleri arasında “interpolasyon istatistiği” şeklinde bir kuantum istatistiği formu sergilerler. Öyle ki, bu deforme sistemlerin istatistiksel davranışı deformasyon parametreleri (reel veya karmaşık) aracılığıyla kontrol edilebilir. Örneğin deforme bozonik ve fermiyonik kuantum cebirleri; kara delik istatistiği (Strominger, 1993), kuarklar tarafından oluşturulan dinamik kütle gibi hadronik özelliklerin çalışılması (Timoteo ve Lima, 2006), çekirdeklerdeki çok parçacık etkileşmelerinin yüksek mertebeden etkileşme terimlerinin anlaşılması (Sviratcheva vd., 2004), kompozit bozon sistemlerinin gerek bireysel gerekse kollektif davranışlarının modellenmesi (Gavrilik vd., 2011) gibi konularda doğrudan uygulama alanı bulmuşlardır. Standart olmayan kuantum istatistiğinin literatürdeki ilk öncüleri arasında Gentile ve Green tarafından önerilen çalışmalar verilebilir ((Gentile, 1940; Green, 1953). *q*-Fermiyon operatörlerine benzer olan “Quon” lar yardımıyla Pauli dışarılama ilkesini zorlayacak olası kuantum durumları da literatürde incelenmiştir (Greenberg, 1991). Ancak bahsedilen bu çalışmalar ve literatürdeki diğer uygulamalar, çoğunlukla (3+1) uzay-zaman boyutlarında, tek parametre ile deforme bozon ve fermiyon sistemleri üzerinden yapılmıştır (Lee ve Yu, 1990; Song vd., 1993; Chaichian vd. 1993; Tuszynski vd., 1993; Viswanathan vd., 1992; Chakrabarti ve Jagannathan, 1991; Su ve Ge, 1993; Gong, 1995; Daoud ve Kibler, 1995; Ubriaco, 1997, 1998; Bonatsos ve Daskaloyannis, 1999; Lavagno ve Narayana

Swamy, 2000, 2002, 2010; Adamska ve Gavrilik, 2004; Dai ve Xie, 2013; Rovenchak, 2014). Ne yazık ki, bu deforme cebirlerin üç ve iki uzay boyutlarına sınırlandırıldıklarında oluşabilecek yeni kuantum istatistiksel sonuçlar ve muhtemel uygulamalar, literatürde tam olarak çalışılmamıştır. Hatta, gerek kompozit bozon ve kompozit fermiyon sistemlerinin davranışlarının gerekse standart olmayan kuantum istatistiğinin çalışılması bağlamında, bu cebirlerden örneğin Arık ve arkadaşları (Arık vd., 1992) tarafından geliştirilen bozonik Fibonacci salınımcıları cebiri, yine Algin ve arkadaşları (Algin vd., 2002b) tarafından geliştirilen fermiyonik Fibonacci salınımcıları cebiri, ne derinlemesine çalışılmışlar ne de örneğin yoğun madde sistemlerinin davranışlarının modellenmesi için uygulanmışlardır. Yine interpolasyon istatistiği'nin özelliklerinin çalışılmasında; bozonik tipte olanlar için bozonik Fibonacci salınımcıları cebiri (Arık vd., 1992), fermiyonik tipli olanlar için ise fermiyonik Fibonacci salınımcıları cebiri, Viswanathan-Parthasarathy-Jagannathan-Chaichian (VPJC) tarafından önerilen *q*-fermiyon cebiri, Parthasarathy-Viswanathan-Chaichian (PVC) tarafından önerilen *q*-fermiyon cebirleri henüz hiç ele alınmamışlardır (Viswanathan vd., 1992; Chaichian vd., 1993; Algin vd., 2002b; Narayana Swamy, 2006; Algin, 2011). Hatta, bozonik Fibonacci salınımcıları sisteminin iki boyutta BE yoğunlaşmasını hangi koşullarda sergileyip/sergileyemeyeceği de literatürde hiç çalışılmamış başka bir konudur. Bu araştırma projesi kapsamına giren, literatürde bahsedilen bu ve ilgili diğer açık boşlukları dolduracak nitelikte çalışmalar yapılmıştır.

Bugüne kadar, iki ve üç uzay boyutlarında deforme sistemlerin kuantum istatistiksel özellikleri bağlamında henüz çözülemeyen pek çok açık problemi de barındırdıkları görülmektedir. Bunlardan bazıları: 1-Deforme bozon ve fermiyon gaz sistemlerinin genelleştirilmiş istatistiksel mekanik özelliklerinin kapsamlıca incelenmesi. Örneğin, iki-parametre ile deforme bozonik Fibonacci salınımcıları gazı modelinin iki boyutta BE yoğunlaşmasını hangi koşullarda sergileyebileceğinin araştırılması, 2-Ne BE ne de FD istatistiklerinden birine uyan sistemler için standart olmayan kuantum istatistiği bağlamında "interpolasyon istatistiği" nin özelliklerinin incelenmesi. Örneğin deforme bozon ve fermiyon parçacık sistemleri ile interpolasyon istatistiği tanımlanabilir mi? Ancak belirli limit durumlarda standart kuantum istatistiklerine indirgenebilen bu interpolasyon istatistiğinin dağılım fonksiyonunun tam formu nedir? 3-İnterpolasyon istatistiği anyon sistemlerinin istatistiğinden farklı olabilir mi? 4-Tek veya iki parametreli kuantum deformasyonlarının incelenen sistemin parçacıkları arasındaki etkileşmelerden kaynaklandığı ispatlanabilir mi? 5-İç yapılarında kuazi-parçacıkları içeren sistemler, deforme bozon ve fermiyonlarla nasıl modellenebilirler? Özellikle iki ve üç uzay boyutlarında, kuantum grup simetrisi olsun ya da olmasın deforme parçacık modelleri kullanılarak, yukarıdaki problemlerin çözümleri bağlamında genelleştirilmiş teoriler geliştirmek bu alana önemli katkılar sağlar.

Bu projede temel olarak; iki ve üç uzay boyutlarına sınırlandırılmış deforme bozon ve fermiyon parçacık sistemlerinin istatistiksel mekanik özelliklerini kapsamlıca ortaya koymak amaçlanmıştır. Böylece, hem deforme kuantum istatistiğine ait yeni model, yaklaşım ve formülasyonları geliştirmek hem de elde edilecek sonuçların geçerliliklerini gösterebilmek için bazı fiziksel uygulamalarını yapmak amaçlanmıştır. Bu çerçevede yapılan proje çalışmalarıyla; yukarıda bahsedilen açık problemlere de bir takım çözümler geliştirilmiş, literatüre farklı katkılar sunulmuştur. Yine projede, karmaşık sistemlerin istatistiksel davranışlarını tanımlamada kullanılabilecek yaklaşımlardan biri olarak, BE ve FD istatistikleri arasında sürekli bir interpolasyon işlevi gören interpolasyon istatistiği çalışılmıştır. Böylece, deforme bozon ve fermiyon yapıları kullanılarak da interpolasyon istatistiği tanımlanabildiği ve kesirli istatistikli anyon sistemlerinin bazı fiziksel özellikleri ile ilişkilendirilebileceği bulunmuştur. Özellikle yoğun madde fiziği (BE yoğunlaşmasına, katıların ısıl özelliklerine) ve kuantum optiği alanlarında bazı yeni uygulamalar geliştirilmiştir. Böylece fiziksel uygulamalarda, kuantum deformasyonlarının fiziksel etkileri, sistemdeki parçacık etkileşmeleri ile deformasyonun bağlantısı gibi konularda da yeni ve ilginç sonuçlar bulunmuştur.

Projede çalışılan deforme kuantum istatistiğinin özellikleri gelecekte; iki ve üç uzay boyutlarında örneğin kuazi-parçacık içeren sistemler, güçlü şekilde etkileşen elektron sistemleri gibi fiziksel sistemlerin düşük ve yüksek sıcaklıklarda istatistiksel mekanik davranışlarıyla ilgili problemlerinin incelenmesinde, modellenmesinde, yeni ve zengin ipuçları verebileceği umulmaktadır.

Bu proje kapsamında, yukarıda bahsedilen fiziksel problemler için, iki ve üç uzay boyutlarına sınırlandırılmış deforme bozon ve fermiyon parçacık modellerinin istatistiksel mekanik özellikleri kapsamlıca araştırılmış, hem deforme kuantum istatistiğine ait yeni model, yaklaşım ve formülasyonlar elde edilmiş hem de bulunan sonuçlarla bazı fiziksel uygulamalar yapılmıştır.

Projede çalışılan bozonik ve fermiyonik kuantum cebirleri yardımıyla, iki ve üç boyutta bozonik olanların BE yoğunlaşmasını hangi koşullar altında sergileyebileceği, interpolasyon istatistiğinin özellikleri, deformasyonun incelenen sistemin parçacıkları arasındaki etkileşmelerle ilişkilendirilip/ilişkilendirilemeyeceği araştırılmıştır. Yine kuazi-parçacık sistemlerinin deforme salınımcılarla modellenerek, fiziksel yapıları hakkında temel bilgilere ulaşılıp/ulaşılamayacağını bulabilmek, diğer amaçlarımız arasındadır. Bu araştırmalarla ulaşılan sonuçlar; deforme kuantum termodinamiği formalizminin gelişimine, anyonik kuantum sistemlerinin istatistiksel özelliklerine farklı yönlerden yaklaşılmasına, kesirli kuantum Hall etkisi, yüksek sıcaklık süper iletkenler gibi çeşitli fiziksel olaylarla ilgili problemlerin araştırılmasına yeni bakış açıları katabilecek nitelikte olup, bu güne kadar ki

standart kuantum istatistiği çerçevesinin ötesinde, bu sistemlerin incelenmesine yeni yaklaşımlar ortaya koymaktadır.

Proje kapsamında, en iyi bilgilerimiz dahilinde literatürde daha önce hiç çalışılmamış yönleri kapsayan, ikinci bölümde de ayrıntıları verilecek olan; TD q-bozon, VPJC q-fermiyon, PVC q-fermiyon, iki parametre ile deforme bozonik ve fermiyonik Fibonacci salınımcı modellerinin üç ve iki uzay boyutlarına sınırlandırıldıklarında deforme istatistiksel mekanik özellikleri incelenmiştir. Ayrıca detayları yine ikinci bölümde sunulan, fiziksel uygulama çalışmalarıyla da deforme kuazi-parçacıklı sistemlerin kuantum istatistiksel yönleri, parçacıklar arası etkileşmelerin doğası için etkin bir yaklaşım, iki-boyutta anyon gazının davranışları ile ilgili bazı ilişkiler, katıların ısıl özelliklerine deformasyonun etkilerine dair, yeni ve ilginç sonuçlar ortaya konmuştur.

1.2 Literatür özeti

2013 yılına kadar literatürde, deforme bozon ve fermiyon cebirleri üzerinden çalışılan genelleştirilmiş termo-istatistiksel sonuçlar ve uygulamaları, çoğunlukla (3+1) uzay-zaman boyutlu fiziksel sistemler üzerinden yapılmışlardır (Lee and Yu, 1990; Song vd., 1993; Chaichian vd. 1993; Tuszynski vd., 1993; Viswanathan vd., 1992; Chakrabarti ve Jagannathan, 1991; Su ve Ge, 1993; Acharya ve Narayana Swamy, 1994; Narayana Swamy, 2006a, 2006b, 2006c; Gong, 1995; Daoud ve Kibler, 1995; Avancini ve Krein, 1995; Ubriaco, 1997, 1998; Odaka vd., 1991; Bonatsos ve Daskaloyannis, 1999; Lavagno ve Narayana Swamy, 2000, 2002; 2010; Algin vd., 2002a; Algin ve Deviren, 2005; Algin, 2008; Timoteo ve Lima, 2006; Sviratcheva vd., 2004; Scarfone ve Narayana Swamy, 2009; Zeng vd., 2011; Marinho vd., 2012; Brito ve Marinho, 2011; Gavrilik vd., 2011; Gavrilik ve Rebesh, 2012; Dai ve Xie, 2013; Algin, 2011; Rovenchak, 2014). Genellikle tek parametre ile deforme bozon ve fermiyon alanlarını içeren bu çalışmaların bazı istatistiksel özellikleri, kesirli kuantum Hall etkisinden (Wilczek, 1990) kara deliklere (Strominger, 1993) kadar geniş bir araştırma spektrumunda, yoğun olarak da Arık-Coon q-bozon ve Biedenharn-Macfarlane q-bozon salınımcıları baz alınarak icra edilmişlerdir.

Proje kapsamında, proje çalışmaları devam ederken literatürde başka araştırmacılar tarafından çalışmalar da yayınlanmıştır. Örneğin; iki parametre ile deforme bozonik Fibonacci salınımcıları sistemi, hem Landau diyamanyetizmasına hem de katıların bazı ısıl ve elektriksel özelliklerine uygulanmıştır (Marinho vd., 2014a, 2014b, 2016). Bu çalışmalar; Fibonacci salınımcılarının deformasyon parametreleri (q,p)'nin kristal yapılardaki safsızlık ve düzensizlik faktörleri şeklinde davrandıklarını ortaya koymuştur. Tek parametre ile deforme fermiyon cebiri de metallerin bazı elektriksel özelliklerine uygulanmış (Tristant ve Brito, 2014), deformasyon parametresi q'nun safsızlık faktörü olarak davrandığı ileri sürülmüştür.

Yine 2014 yılında, iki parametreli ($\tilde{\mu}$,q)-deforme bozonik salınımcı modeli yardımıyla, inceleme altındaki sistemin parçacıkları arasındaki etkileşmeler ve parçacıkların iç (kompozit) yapıları ile ilişkili bazı fiziksel özelliklerle ilgili bağlantılar ileri sürülmüştür (Gavrilik ve Mishchenko, 2013; Gavrilik ve Mischenko, 2014). Zira aynı deforme bozon modeli, RHIC ve LHC deneylerinde gözlenen iki-pion momentum korelasyon fonksiyonu kesişiminin sergilediği Bose-tipi benzeri olmayan davranışın etkin tanımı için kullanılmış, sonuçlar deneysel verilerle uyum göstermiştir (Gavrilik ve Mischenko, 2015). Komposit (yada kuazi) bozonlar, deforme bozonlarla inşa edilebilirler (Avancini ve Krein, 1995; Gavrilik vd., 2011). Böylece kuantum bilgi teorisine bir uygulama olarak, deforme salınımcılarla gerçekleştirilen kompozit bozonların iç dolanıklık karekteristikleri, tamamıyla deformasyon parametreleri cinsinden belirlenmiştir (Gavrilik ve Mischenko, 2012). Öte yandan, 2015 ve 2016 yıllarında, bir ve iki parametre ile deforme kuantum grup simetrili bozon ve fermiyon modelleri kara deliklerin kuantum istatistiksel özelliklerinin araştırılmasına da uygulanmışlardır (Dil, 2015; Dil ve Kolay, 2016).

Ancak bu proje çalışmalarından önceki zamana kadar literatürde, iki uzay boyutlarında deforme bozon ve fermiyon cebirlerinin istatistiksel mekanik özellikleri ve bunların olası diğer fiziksel uygulamaları üzerine çalışmalar çok azdı (Ubriaco, 1998; Lavagno ve Narayana Swamy, 2009; Algin ve Senay, 2012). Hatta adı geçen bu üç çalışma, tek parametreli ve tek tip bir deforme bozon ve deforme fermiyon cebiri üzerinden yürütülmüştü. Bu proje çalışmalarından önceki literatürde, proje kapsamında incelenen modellerden olan VPJC *q*-fermiyon, bozonik ve fermiyonik Fibonacci salınımcı modellerinin kuantum istatistiksel özellikleri, örneğin yoğun madde fiziği alanındaki sistemlerde hiç uygulama bulmamışlardı.

Projede; iki ve üç boyutta, bir ve iki parametre ile deforme bozon ve fermiyon parçacık modellerinin gerek istatistiksel mekanik özellikleri yönünden gerekse yoğun madde fiziği ve kuantum optiği alanlarındaki bazı fiziksel uygulamaları yönünden literatürde var olan yukarıda bahsedilen açık boşlukları dolduracak nitelikte çalışmalar yapılmıştır (Bkz. EK-1,3,4,5,6,7,10,11,12). Daha detaylı bilgiler, proje kapsamında yapılan bu yayınlarda mevcuttur.

Dört ana bölümden oluşan bu proje sonuç raporunun ikinci bölümü yöntem kısmı olup, deforme bozon ve deforme fermiyon salınımcı modellerinin kuantum cebirsel özellikleri, *q*-analizi ve Fibonacci analizi, deforme kuantum istatistiğine dair genel özellikleri içermektedir. Üçüncü bölümde ise üç ve iki boyutlu uzaylarda deforme istatistiksel mekanik özelliklerle ilgili, kuantum deformasyonuyla parçacıklar arası etkileşmelere yaklaşımla ilgili, deforme kuantum istatistiğinin yoğun madde fiziği ve kuantum optiği alanlarındaki bazı fiziksel uygulamalarıyla ilgili, bulgular ve tartışma kısımları verilecektir. Son bölümde ise maddeler halinde, sonuç ve öneriler verilecektir. Zira üçüncü bölümde verilen her kısımdaki

çalışmalarla ilişkili bulgular ve tartışma kapsamlı olarak verileceğinden, gereksiz tekrarlamalardan kaçınılmak istenmiştir.

2. YÖNTEM

2.1 Deforme Parçacık Cebirleri

Proje kapsamında yapılan araştırmalarda yöntemsel olarak, bir ve iki parametre ile deforme bozon ve deforme fermiyon parçacık sistemleri kullanılmıştır. Ele alınan bozon ve fermiyon kuantum cebirlerinin genel kuantum mekaniksel özellikleri aşağıda özetlenmiştir.

a) Deforme bozonik kuantum cebirleri:

i) Arik-Coon (AC) *q*-bozon salınımcıları: Bu cebir, aşağıdaki deforme komütasyon ilişkileriyle tanımlanır (Arik ve Coon, 1976):

$$bb^* - qb^*b = 1, \qquad 0 < q < 1$$
$$[b, \hat{N}] = b, \qquad [b^*, \hat{N}] = -b^* \tag{1}$$

Sistemin deforme sayı operatörü spektrumu,

$$[n] = \frac{1-q^n}{1-q} \tag{2}$$

ile verilen *q*-temel sayıları cinsinden belirlidir.

ii) Biedernharn-Macfarlane (BM) *q*-bozon salınımcıları: Bu cebir, aşağıdaki deforme komütasyon ilişkileriyle tanımlıdır (Biedenharn, 1989; Macfarlane, 1989):

$$bb^* - qb^*b = q^{-\hat{N}}, \qquad q \in R^+$$
$$[\hat{N}, b] = -b \qquad [\hat{N}, b^*] = b^* \tag{3}$$

olup, sistemin deforme sayı operatörünün spektrumu,

$$[n] = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} \tag{4}$$

ile verilen *q*-temel sayısıdır.

iii) Tamm-Dancoff (TD) tipli deforme bozon salınımcıları: Bu cebir, aşağıdaki deforme komütasyon ilişkileriyle tanımlıdır (Odaka vd., 1991):

$$bb^* - q^{-1}b^*b = q^{-\hat{N}}\hat{\mathcal{H}}$$
$$[\hat{N}, b] = -b, \quad [\hat{N}, b^*] = b^*, \qquad [\hat{\mathcal{H}}, \cdot] = 0 \tag{5}$$

olup, sistemin deforme sayı operatörünün spektrumu,

$$[n] = n\,h\,q^{-(n-1)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad h \in R^+ \tag{6}$$

ile belirlidir ($q \in R^+$).

.

iv) İki parametre ile deforme bozon cebiri (Bozonik Fibonacci salınımcıları): Bu sistem aynı zamanda kuantum grup $SU_{p/q}(d)$-değişmezliği sergiler. Bu bozon modeli aşağıdaki deforme komütasyon ilişkileriyle tanımlıdır (Arik vd., 1992):

$$
\begin{aligned}
b_i b_k &= \frac{q}{p} b_k b_i , \qquad i < k , \\
b_i b_k^* &= qp b_k^* b_i , \qquad i \neq k , \\
b_1 b_1^* - q^2 b_1^* b_1 &= p^{2\hat{N}} , \\
b_k b_k^* - q^2 b_k^* b_k &= b_{k-1} b_{k-1}^* - p^2 b_{k-1}^* b_{k-1} , \quad k = 2,...,d, \\
b_d b_d^* - p^2 b_d^* b_d &= q^{2\hat{N}} ,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

şeklinde olup, sistemin toplam deforme sayı operatörü $\sum_{i=1}^{d} b_i^* b_i = [\hat{N}_1 + \hat{N}_2 + ...+ \hat{N}_d] = [\hat{N}]$'nin spektrumu,

$$
[n] \equiv [n]_{p,q} = \frac{q^{2n} - p^{2n}}{q^2 - p^2}, \tag{8}
$$

ile verilen genelleştirilmiş Fibonacci temel tamsayıları cinsinden tanımlıdır ($q \neq p, \quad (q,p) \in R^+$). Bozonik Fibonacci salınımcıları sistemi, literatürdeki diğer tüm bir ve iki parametre ile deforme bozon cebirlerini özel limit durumlarında bünyesinde barındırır. Örneğin $q = p$ limit durumunda (7) ve (8) denklemleri, *SU(d)*-invaryant bozonik Newton salınımcıları sistemine indirgenir (Arik vd., 1999). Yine bozonik Fibonacci salınımcıları sistemi, literatürdeki diğer tüm bozonik deformasyonları hem çok-boyutlu hale hem de en genel kuantum grup simetrili hale genelleştirilmesi bakımlarından önemli bir bozonik kuantum cebir yapısıdır.

b) Deforme fermiyonik kuantum cebirleri:

i) Viswanathan-Parthasarathy-Jagannathan-Chaichian (VPJC)-fermiyon salınımcıları: Bu model, aşağıdaki deforme anti-kömütasyon ve komütasyon bağıntılarıyla tanımlanır (Viswanathan vd., 1992, Chaichian vd. 1993; Algin, 2011):

$$
\begin{aligned}
f f^* + q f^* f &= 1, \qquad 0 < q < 1 \\
[\hat{N}, f] &= -f , \qquad [\hat{N}, f^*] = f^* ,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

olup, bu fermiyon sisteminin deforme sayı operatörünün spektrumu,

$$
[n] = \frac{1 - (-1)^n q^n}{1 + q}, \tag{10}
$$

ile verilen *q*-fermiyonik temel sayılarıdır.

ii) Parthasarathy-Viswanathan-Chaichian (PVC)-fermiyon salınımcıları: Bu model, aşağıdaki bağıntılarla tanımlanır (Parthasarathy ve Viswanathan,1991; Chaichian vd., 1993; Narayana Swamy, 2006b):

$$f\, f^{*} + q\, f^{*} f = q^{-\hat{N}}, \qquad q \in R^{+}$$
$$[\hat{N}, f] = -f, \quad [\hat{N}, f^{*}] = f^{*}, \qquad f^{2} \neq 0 \tag{11}$$

şeklinde tanımlı olup, sistemin deforme sayı operatörünün spektrumu,

$$[n] = \frac{q^{-n} - (-1)^{n} q^{n}}{q + q^{-1}} \tag{12}$$

ile verilen *q*-fermiyonik temel sayısıdır.

iii) Chaichian-Kulish-Ng (CKN)-fermiyon salınımcıları: Bu model, aşağıdaki bağıntılarla tanımlanır (Chaichian ve Kulish, 1990; Narayana Swamy, 2006c; Algin, 2011):

$$f\, f^{*} + q^{-1} f^{*} f = q^{-\hat{N}}, \qquad q \in R^{+},$$
$$[\hat{N}, f] = -f, \quad [\hat{N}, f^{*}] = f^{*}, \tag{13}$$

ile tanımlı olup, Pauli dışarılama ilkesini sağlar. Bu *q*-fermiyon cebirinin sayı operatörü spektrumu ise

$$[n] = \left(\frac{1 - (-1)^{n}}{2} \right) q^{-n+1} = \left\{ 0,1,0,\, q^{-2},0,\, q^{-4},\ldots \right\}, \tag{14}$$

şeklindedir. Bu cebirle bağlantılı bir *q*-fermiyon temel sayısı yoktur.

iv) İki-parametre ile deforme fermiyon cebiri (Fermiyonik Fibonacci salınımcıları): Bu sistem aynı zamanda kuantum grup $SU_{p/q}(d)$-değişmezliği sergiler. Bu fermiyon modeli aşağıdaki deforme anti-komütasyon ilişkileri ile tanımlanır (Algin vd., 2002b):

$$f_i f_j = -\frac{q}{p} f_j f_i, \qquad i < j,$$
$$f_i f_j^{*} = -qp f_j^{*} f_i, \qquad i \neq j,$$
$$f_i^{2} = 0, \qquad f_1 f_1^{*} + p^{2} f_1^{*} f_1 = p^{2\hat{N}},$$
$$f_i\, f_i^{*} + q^{2} f_i^{*} f_i = f_{i+1} f_{i+1}^{*} + p^{2} f_{i+1}^{*} f_{i+1}, \qquad i = 2,\ldots,d-1, \tag{15}$$
$$f_d\, f_d^{*} + q^{2} f_d^{*} f_d = q^{2\hat{N}},$$

şeklinde tanımlı olup, modelin toplam deforme sayı operatörü $\sum_{i=1}^{d} f_i^{*} f_i = [\hat{N}_1 + \hat{N}_2 + \ldots\ldots + \hat{N}_d] = [\hat{N}]$'nin spektrumu,

$$[n] = [n]_{p,q} = \frac{q^{2n} - p^{2n}}{q^{2} - p^{2}} \tag{16}$$

ile tanımlıdır. Ancak burada her bir n_i, sadece *0* veya *1* öz değerlerini alabilir. Burada $p \neq q$, $(p,q) \in R^+$ dir. Bu model, hem çok-boyutlu fermiyon salınımcılarını hem de en genel kuantum grup değişmezliğini sergilemesi ve de literatürdeki diğer tüm fermiyon cebirlerini özel limit durumlarda bünyesinde barındırması bakımlarından önemlidir. Örneğin $p = q$ limit durumunda (15) ve (16) bağıntıları, *SU(d)*-invaryant fermiyonik Newton salınımcıları sistemine indirgenir (Arik ve Peker-Dobie, 2001).

Proje çalışmalarında, yukarıdaki deforme bozon ve deforme fermiyon cebirlerinden literatürde çok daha az çalışılan; bozonik ve fermiyonik Fibonacci salınımcıları, TD *q*-bozon, VPJC *q*-fermiyon, PVC *q*-fermiyon modelleri üzerinden gerek kuantum mekaniksel gerekse termodinamik ve istatistiksel özelliklere yoğunlaşılmıştır. Bu çerçevede proje içerisinde yapılan fiziksel uygulamalar da yine bu deforme salınımcı cebirleri üzerinden yürütülmüştür.

2.2 Q-Analizi ve Fibonacci Analizi

Proje kapsamında çalışılan, yukarıdaki bazı deforme bozon ve fermiyon cebirleriyle bağlantılı olarak, *q*-analizi çerçevesinde bazı önemli türev ve integral temsilleri de fiziksel uygulamalarda belirli roller üstlenirler. Bozonik *q*-analizi kapsamında; (1) ve (2) bağıntılarıyla verilen AC *q*-bozon cebiri ile bağlantılı Jackson türev (JD) operatörü (Jackson, 1910; Arik ve Coon, 1976; Kac ve Cheung, 2002),

$$\hat{D}_x^{(q)} f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x} \tag{17}$$

şeklindedir. Oysa, BM *q*-bozon cebiri için (3) ve (4) bağıntılarıyla bağlantılı olan JD operatörü ise

$$\hat{D}_x^{(q)} f(x) = \frac{f(qx) - f(q^{-1}x)}{(q-q^{-1})x} \tag{18}$$

Ile verilir (Lavagno ve Narayana Swamy, 2002). Örneğin (17)'deki *q*-türev operatörü ile $f(x)$ ve $g(x)$ şeklindeki iki analitik fonksiyon için Leibnitz kuralı,

$$\begin{aligned} \hat{D}_x^{(q)}[f(x)g(x)] &= f(qx)[\hat{D}_x^{(q)} g(x)] + g(q^{-1}x)[\hat{D}_x^{(q)} f(x)] \\ &= g(qx)[\hat{D}_x^{(p,q)} f(x)] + f(q^{-1}x)[\hat{D}_x^{(q)} g(x)] \end{aligned} \tag{19}$$

şeklindedir (Lavagno ve Narayana Swamy, 2010). Yine bozonik *q*-analizi çerçevesinde bir $f(x)$ fonksiyonun belirli ve belirsiz *q*-integral formları, sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlıdırlar (Lavagno ve Narayana Swamy, 2010):

$$\int_0^a f(x) d_q x = a\,(q^{-1} - q) \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n+1} f(q^{2n+1} a) \tag{20}$$

$$\int f(x) d_q x = (q^{-1} - q) \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n+1}\, x\, f\left(q^{2n+1} x\right) + Sabit \tag{21}$$

Öte yandan, fermiyonik *q*-analizi kapsamında; (9) ve (10) bağıntılarıyla verilen VPJC *q*-fermiyon cebiri ile bağlantılı fermiyonik *q*-türev operatörü,

$$\hat{D}_x^{(q)} f(x) = \frac{1}{x}\left[\frac{f(x) - f(-qx)}{1+q}\right] \tag{22}$$

şeklindedir (Algin, 2011). Oysa, (11) ve (12) bağıntılarıyla verilen PVC *q*-fermiyon cebiriyle bağlantılı olan fermiyonik *q*-türev operatörü ise

$$\hat{D}_x^{(q)} f(x) = \frac{1}{x}\left[\frac{f(q^{-1}x) - f(-qx)}{q+q^{-1}}\right] \tag{23}$$

ile verilir (Narayana Swamy, 2006b). 2013 yılına kadar ilgili literatürde, *q*-analizi çerçevesinde bozon sistemlerine nazaran fermiyonik *q*-analizi çok az çalışılmıştı. Proje çalışmalarında özellikle (9), (11) eşitliklerindeki cebirler için fermiyonik *q*-analizine de yoğunlaşıp, fermiyonik *q*-türev ve *q*-integral formları için yeni özellikler elde edilmiştir (Bkz. EK-1,2,3,9). Bunlarla ilgili detaylı bilgiler EK-1,2,3,9 çalışmalarında bulunduğundan üçüncü bölümde bu konuda genel bazı özellikler verilecektir.

Fibonacci analizi ise bozonik ve fermiyonik *q*-analizini genelleştiren bir matematiksel yapıya sahiptir. Projede (7) ve (15) bağıntılarıyla verilen bozonik ve fermiyonik Fibonacci salınımcı modelleri ile bağlantılı olarak Fibonacci analizine dair çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalara dair elde eilen bulgular üçüncü bölümde verilecek olup, burada sadece temel (*p*,*q*)-türev bağıntısına değinilecektir. (7) ve (15) ile verilen kuantum operator cebirlerinin Fock uzayı temsillerinden konfigürasyon uzayına dönüşüm, aşağıda verilen modifiye edilmiş Fibonacci fark operatörü (ya da modifiye edilmiş (*p*,*q*)-türev operatörü) $\hat{D}_x^{(p,q)}$ yardımıyla yapılabilir (Algin, 2008):

$$\hat{D}_x^{(p,q)} f(x) = \left\{\frac{(q^2 - p^2)}{[\ln(q^2/p^2)]}\right\} \hat{\partial}_x^{(p,q)} f(x) \tag{24}$$

şeklinde olup, burada $f(x)$ analitik bir fonksiyon ve Fibonacci fark operatörü $\hat{\partial}_x^{(p,q)} f(x)$ ise

$$\hat{\partial}_x^{(p,q)} f(x) = \frac{f(q^2 x) - f(p^2 x)}{(q^2 - p^2)x} \tag{25}$$

ile tanımlıdır (Arik vd., 1992). (24) eşitliğindeki modifiye edilmiş Fibonacci fark operatörü, JD operatörünün iki parametre ile genelleştirilmiş halidir. (24) eşitliğinde operatörler yeniden ölçeklendirilip, $p=1$ limiti uygulandığında (17)'deki JD operatörüne ulaşılır. Üçüncü bölümde özetleneceği üzere; (24) eşitliğindeki modifiye edilmiş Fibonacci fark operatörü hem Fibonacci analizinin (*p*,*q*)-türev ve (*p*,*q*)-integral formlarının geliştirilmesinde hem de deforme istatistiksel termodinamik ilişkilerin çıkarılmasında önemli bir rol oynar (Bkz. EK-4).

2.3 Deforme Kuantum İstatistiği

Yukarıda (1)-(16) bağıntılarında verilen bir ve iki parametre ile deforme bozon ve deforme fermiyon cebirlerinin termodinamik ve istatistiksel özellikleri; tek parametreli olanlarda *q*-analizi, iki parametreli olanlarda ise Fibonacci analizi yardımıyla incelenebilir. Bu deforme salınımcıların oluşturdukları bozonik ve fermiyonik kuantum gazlarının istatistiksel mekanik özelliklerinden gözlemlenebilirlerin ısıl ortalamaları ve ortalama işgal sayıları (1)-(16)'da verilen kuantum deformasyonları nedeniyle, deformasyon parametreleri cinsinden ortaya çıkacaktır. Herhangi bir $\hat{A}$ operatörünün ısıl ortalaması,

$$< \hat{A} >= Tr(\rho \hat{A}), \qquad \rho = \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{Z}, \qquad Z = Tr(e^{-\beta \hat{H}}), \tag{26}$$

şeklinde, yoğunluk operatörü $\hat{\rho}$ ve büyük kanonik bölüşüm fonksiyonu Z yardımıyla bulunabilir (Huang, 1987; Pathria ve Beale, 2011; Greiner vd. 1994). Burada $\beta = 1/kT$ olup, k Boltzmann sabiti ve T de sistemin sıcaklığıdır. Etkileşmeyen deforme bozon ve deforme fermiyon salınımcılarının istatistiksel mekanik yönlerini çalışmak için bir ve iki parametre ile deforme Hamiltoniyenler sırasıyla,

$$\hat{H}_q = \sum_i (\varepsilon_i - \mu)\hat{N}_i, \qquad \hat{H}_{p,q} = \sum_i (\varepsilon_i - \mu)\hat{N}_i \tag{27}$$

şeklindedir. Burada μ sistemin kimyasal potansiyeli, $\hat{N}_i$ bozon/fermiyon sayı operatörü, ε_i, i. kuantum durumundaki parçacığın kinetik enerjisidir. Dikkat edilirse bu Hamiltoniyenler ilk bakışta standart formda görünmekle birlikte, yukarıda (1)-(16) eşitliklerinde bulunan deforme sayı operatörlerinin (modelden modele de değişkenlik gösteren) formları nedeniyle, (27)'de verilen Hamiltoniyenler, dolaylı olarak deforme Hamiltoniyenlerdir. Deforme bozon ve deforme fermiyon modellerinin ortalama işgal sayıları (n_i) sırasıyla,

$$[n_i] = \frac{1}{Z} Tr(e^{-\beta \hat{H}} b_i^* b_i), \qquad [n_i] = \frac{1}{Z} Tr(e^{-\beta \hat{H}} f_i^* f_i) \tag{28}$$

bağıntılarından hesaplanabilir (Lee ve Yu, 1990; Tuszynski vd. 1993). (28) bağıntısından elde edilecek ortalama işgal sayıları, incelenen modele göre bir veya iki deformasyon parametresine bağlı olarak ortaya çıkacaktır. Buradan istenirse, sistemlerin büyük bölüşüm fonksiyonlarının formları da deformasyonun etkilerini görmek için çıkartılabilir. (28) bağıntısı aracılığıyla elde edilen deforme bozon ve deforme fermiyon sistemleri için genelleştirilmiş istatistiksel dağılım fonksiyonlarından yararlanarak, üç ve iki boyutlu uzay halleri için örneğin parçacık yoğunluğu, basınç, iç enerji, özgül ısı, entropi gibi pek çok deforme termo-istatistiksel fonksiyonlar incelenebilir. Fakat bu fonksiyonlar hesaplanırken yukarıdaki deforme salınımcı cebirlerine özel olarak verilen, JD operatörü ve modifiye edilmiş Fibonacci fark operatörü kullanılmalıdır (Bkz. EK-1,4,11). Bu yolla bulunacak tüm termo-istatistiksel fonksiyonlar, bir veya iki parametere ile deforme BE ve FD fonksiyonları cinsinden ortaya

çıkacaklardır. Yine bu deforme termo-istatistiksel fonksiyonlardan yararlanarak, incelenen sistemlerin iki ve üç uzay boyutlarında, yüksek sıcaklıklar limitinde hal denklemlerinin virial açılımları yapılabilir. Bu açılımlardaki virial katsayıları, deforme bozon ve fermiyon modellerinin deformasyon parametrelerine bağlı olarak ortaya çıkmaktadır (Bkz. EK-4,7,8).

Ayrıca yukarıda detayları sunulan, deforme bozon ve fermiyon sistemlerinin (28) bağıntısı yardımıyla bulunacak dağılım fonksiyonları, interpolasyon istatistiğini sağlarlar. Bu bakımdan deforme salınımcı sistemlerinin iki uzay boyutuna hapsedilmeleriyle bulunacak olan istatistiksel mekanik özellikler ile anyon sistemlerinin özellikleri arasında olası ilişkiler proje çalışmaları kapsamında ele alınmıştır (Bkz. EK-1,7,12). Daha sonra, deforme bozon ve fermiyon gaz modellerinin iki boyutlu uzay hali için diğer deforme termo-istatistiksel fonksiyonları, hem yüksek hem de düşük sıcaklıklar limitlerinde incelenmiştir (Bkz. EK-4,7,10). Yine literatürde ilk kez, özel olarak bozonik Fibonacci salınımcıları gazı modelinin iki boyutta BE yoğunlaşmasını sergileyebilme koşulları da çalışılmıştır (Bkz. EK-12).

Proje çalışmalarıyla; (1)-(16) bağıntılarında verilen deforme salınımcıların oluşturdukları bozon ve fermiyon gaz modellerinin istatistiksel mekanik özelliklerine kuantum deformasyonlarının etkileri kapsamlıca çalışılmıştır. Deforme kuantum istatistiği çerçevesinde yapılan tüm çalışmalarla, deforme istatistiksel mekanik fonksiyonların, bilgisayar benzetimlerinden de yararlanarak nümerik analizleri yapılmış, bulunan veri ve grafikler, deneysel sonuçlarla da kıyaslanıp, yeniden yorumlanmışlardır. Elde edilen bulgular ve sonuçlar, bundan sonraki rapor bölümlerinde sunulacaktır.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1 Fermiyonik *q*-analizi ve Fibonacci Analizi ile ilgili bulgular ve tartışma

Proje çalışmaları içerisinde, literatürde çok az çalışılan fermiyon cebirlerinden sırasıyla (9) ve (11)'de verilen, gerek VPJC *q*-fermiyon gerekse PVC *q*-fermiyon salınımcı cebirleriyle bağlantılı olarak fermiyonik *q*-analizi çerçevesinde yeni formülasyonlar bulunmuştur. Burada fermiyonik *q*-türev ve *q*-integral formlarıyla ilgili bir kaç özelliğe yer verilecektir. Zira kapsamlı bilgiler, EK-1,2,3 çalışmalarında mevcuttur. PVC *q*-fermiyon cebiri için (23) eşitliğindeki fermiyonik JD operatörü, iki analitik fonksiyon $f(x)$ ve $g(x)$ için aşağıdaki Leibnitz kuralını sağlar (Bkz. EK-1):

$$\begin{aligned}\hat{D}_x^{(q)}(f(x)g(x)) &= g(-qx)\ (\hat{D}_x^{(q)} f(x)) + f(q^{-1}x)\ (\hat{D}_x^{(q)} g(x)) \\ &= g(q^{-1}x)\ (\hat{D}_x^{(q)} f(x)) + f(-qx)\ (\hat{D}_x^{(q)} g(x))\end{aligned} \tag{29}$$

(11),(12),(23) bağıntılarındaki PVC-tipli *q*-fermiyon cebirinin bazı matematiksel fonksiyonlar üzerindeki etkisi de incelenmiştir (Bkz. EK-1,2). Örneğin *q*-deforme üstel fonksiyon $\exp_q(x)$,

$$\exp_q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{[k]!} \tag{30}$$

şeklindedir. Burada $[k]$, *q*-fermiyonik temel sayısı olup (12) bağıntısı ile belirlidir. Yine fermiyonik *q*-analizi çerçevesinde bir $f(x)$ fonksiyonun belirsiz ve belirli *q*-integral formları, PVC-tipli fermiyonlar için sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilmişlerdir (Bkz. EK-2):

$$\int f(x) d_q x = (q + q^{-1}) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j q^{2j+1} x\, f((-1)^j q^{2j+1} x) \tag{31}$$

$$\int_0^{\alpha} f(x) d_q x = (q + q^{-1}) \alpha \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j q^{2j+1} f((-1)^j q^{2j+1} \alpha), \quad \alpha \text{ sabit} \tag{32}$$

Fibonacci analizi kapsamında; (7) ve (15) bağıntılarındaki bozonik ve fermiyonik Fibonacci salınımcı cebirleri ve Fock uzayı temsillerinden yaralanarak, (*p*,*q*)-türev ve (*p*,*q*)-integral formları da çalışılmıştır. Örneğin (24) eşitliğindeki modifiye edilmiş Fibonacci fark operatörü, aşağıdaki Leipnitz kuralını sağlar (Bkz. EK-4):

$$\begin{aligned}\hat{D}_x^{(p,q)}[f(x)g(x)] &= f(q^2 x)[\hat{D}_x^{(p,q)} g(x)] + g(p^2 x)[\hat{D}_x^{(p,q)} f(x)] \\ &= g(q^2 x)[\hat{D}_x^{(p,q)} f(x)] + f(p^2 x)[\hat{D}_x^{(p,q)} g(x)]\end{aligned} \tag{33}$$

Bir $f(x)$ fonksiyonunun belirli *p*,*q*-integral formu,

$$\int_0^{\alpha} f(x) d_{(p,q)} x = \alpha[\ln(q^2/p^2)] \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{p^{2j}}{q^{2j+2}}\right) f\left(\frac{p^{2j}}{q^{2j+2}}\alpha\right), \quad p < q \tag{34}$$

$$= \alpha[\ln(p^2/q^2)] \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{q^{2j}}{p^{2j+2}}\right) f\left(\frac{q^{2j}}{p^{2j+2}}\alpha\right), \quad q < p \tag{35}$$

şeklindedir. Belirsiz *p*,*q*-integral formu ise

$$\int f(x)d_{(p,q)}x = [\ln(q^2/p^2)]\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{p^{2j}}{q^{2j+2}}\right)x\, f\left(\frac{p^{2j}}{q^{2j+2}}x\right), \quad p<q \tag{36}$$

$$= [\ln(p^2/q^2)]\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{q^{2j}}{p^{2j+2}}\right)x\, f\left(\frac{q^{2j}}{p^{2j+2}}x\right), \quad q<p \tag{37}$$

olarak bulunmuştur. Fibonacci analizi çerçevesinde çalışılan diğer diferansiyel ve integral özelliklerle ilgili detaylar EK-4'te verilmiştir.

Yukarıda bazıları verilen hem Fibonacci analizine ait hem de fermiyonik *q*-analizine ait özellikler, deforme bozon ve fermiyon gazlarının yüksek ve düşük sıcaklıklardaki istatistiksel mekanik davranışlarının çalışılmasında merkezsel rol oynarlar. Zira, bir veya iki parametre ile deforme termo-istatistiksel fonksiyonlar, Fibonacci analizinin ve fermiyonik *q*-analizinin bazı elemanları yardımıyla hesaplanabilirler (Bkz. EK-1,4).

3.2 Üç ve iki boyutlu uzaylarda deforme istatistiksel mekanik özelliklerle ilgili bulgular ve tartışma

Bu kapsamda ilk olarak; (5), (6) bağıntılarında sunulan ve bozon sistemlerinin özel bir *q*-deformasyonunu oluşturan, *q*-deforme Tamm-Dancoff (TD) salınımcıları cebirinin gerek kuantumsal gerekse istatistiksel yönleri detaylıca incelenmiştir. TD-deforme bozon sistemi; hem standart bozonlardan hem de literatürdeki diğer deforme yapılardan Arık-Coon (AC) *q*-bozon, Biedenharn-Macfarlane (BM) *q*-bozon cebirlerinden oldukça farklı kuantum istatistiksel özelliklere sahiptir. İşte bu bakış açısı altında, öncelikle TD-deforme bozon modelinin kuantum cebirsel özellikleri ele alınmıştır. Örneğin deformasyon parametresinin çok büyük değerler aldığı limit durumda, modelin fermiyon-benzeri bir davranış sergileyebildiği gösterilmiştir (Bkz. EK-5). Daha sonra, TD-bozon salınımcıları gazının yüksek sıcaklıklardaki termo-istatistiksel davranışı incelenmiştir. Bu kapsamda sistemin termodinamik fonksiyonlarından iç enerji, entropi, özgül ısı gibi özelliklerine deformasyon parametresinin etkileri araştırılmıştır. Proje çalışmalarında, TD-bozon salınımcı cebirinin başka, literatürde henüz çalışılmamış yönleri üzerine incelemelere devam edilmiş, modelin Fock uzayı temsilleri ve genelleştirilmeleri araştırılmıştır. Bu çerçevede; TD-tipli *q*-femiyon cebiri de araştırılmış ve bulunan sistemin Fock uzayı temsilleri, enerji spektrumu incelenmiştir. Daha sonra, TD-tipli *q*-fermiyon gazı modelinin genelleştirilmiş fermiyon dağılım fonksiyonundan başlayarak, yüksek sıcaklıklardaki diğer istatistiksel mekanik özellikleri çalışılmıştır. Hem TD-tipli bozonik hem de TD-tipli fermiyonik salınımcı gazlarının deforme istatistiksel dağılım fonksiyonları sırasıyla,

$$n_{i,q} = \frac{q^{-1}}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)} - q^{-1}}, \qquad n_{i,q} = \frac{q}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)} + q} \tag{38}$$

şeklinde bulunmuştur (Bkz. EK-5,6). Burada *q*, reel pozitif deformasyon parametresidir. Üç boyutlu uzayda, hem TD *q*-bozon hem de TD *q*-fermiyon gaz modellerinin diğer termo-istatistiksel özellikleri için yapılan çalışmaların detaylı bilgileri EK-5,6'da verilmiştir.

Fermiyonik sistemlerinin bir ve iki parametreli deformasyonları çok ilginçtir. Zira bu yapılar, bozonlara kıyasla daha farklı kuantum istatistiksel özellikler ortaya koyabilmektedirler. Bu bağlamda projede; hem üç hem de iki uzay boyutlarına sınırlandırılmış deforme Fermi gaz modellerinin istatistiksel mekanik yönleriyle ilgili araştırmalar da yapılmıştır. Bu kapsamda ilk olarak; (15) ve (16) bağıntılarında da sunulan fermiyonik Fibonacci salınımcıları sisteminin yüksek sıcaklıklardaki istatistiksel mekanik özellikleri incelenmiştir. Modelin deforme fermiyon dağılım fonksiyonu elde edildikten sonra sistemin basıncı, iç enerjisi, entropisi, (*p,q*)-deforme FD fonksiyonları cinsinden elde edilmiştir. Ayrıca, modelin yüksek sıcaklıklar limitinde hal denkleminin virial açılımı, hem üç hem de iki uzay boyutlarında ayrı ayrı bulunarak, ilk beş deforme virial katsayısı hesaplanmıştır. Bulunan tüm deforme fonksiyonların hem ilgili termodinamik değişkenlere hem de (*p,q*) deformasyon parametrelerine göre değişimlerini incelemek için nümerik analizleri yapılmış ve grafikleri elde edilmiştir. Bu çalışmalarla; modelin deformasyon parametrelerinin farklı değişim aralıklarında, orijinalinde bir fermiyon sistemi olmasına rağmen, bozon gazı benzeri davranışlar sergileyebildiği şeklinde farklı ve yeni sonuçlar tespit edilmiştir (Bkz. EK-7). Daha kapsamlı bilgiler, EK-7,8'deki çalışmalardan elde edilebilir. Bunlara ilaveten; (7) ve (8) bağıntılarında sunulan bozonik Fibonacci salınımcıları da göz önüne alınarak, iki-parametre ile deforme bozon ve fermiyon salınımcılarıyla oluşturulan "Fibonacci-tipli (*p*,*q*)-deforme Bose ve Fermi gaz modelleri" nin üç ve iki boyutlu uzaylarda ayrı ayrı, literatürde henüz çalışılmamış istatistiksel mekanik özellikleri de çalışılmıştır. Bu çerçevede Fibonacci analizi formalizmi içerisinde, (*p*,*q*)-türev ve (*p*,*q*)-integral operatör formalarına ait bazı önemli diferansiyel özellikler incelenmiştir (Bkz. EK-4). Ayrıca bu çalışmalarla; Fibonacci-tipli (*p*,*q*)-deforme Bose ve Fermi gaz modellerinin yüksek sıcaklıklarda termo-istatistiksel davranışları bir arada incelenmiştir. Bu çalışmada elde edilen *p*,*q*-deforme BE ve *p*,*q*-deforme FD dağılım fonksiyonları,

$$n_{k,p,q}^{\kappa} = \frac{1}{\left|\ln(q^2/p^2)\right|}\left|\ln\left(\frac{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)}-\kappa p^2}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)}-\kappa q^2}\right)\right|, \qquad (39)$$

şeklinde olup, burada $\kappa=(+1)$ deforme bozonları, $\kappa=(-1)$ ise deforme fermiyonları temsil etmektedir (Bkz. EK-4). Burada $p\neq q$, $(p,q)\in R^+$ şeklindedir. Ayrıca bu çalışma literatürde ilk kez, bozonik ve fermiyonik Fibonacci salınımcıları için birleşik bir kuantum gaz modeli ileri sürmektedir. (39) ile verilen deforme dağılım fonksiyonunun ayrıca, sonsuz sürekli kesir formları da çalışılmıştır (Bkz. EK-4). Daha sonra diğer termo-istatistiksel özellikler, yüksek sıcaklıklar limitinde incelenmiştir. Elde edilen termo-istatistiksel fonksiyonlara; reel, pozitif ve

birbirinden bağımsız deformasyon parametreleri (*p*,*q*)'nun etkileri gözlenmiştir. Örneğin Fibonacci-tipli (*p*,*q*)-deforme Bose ve Fermi gaz modellerinin entropi fonksiyonları, $(p,q)<1$ ve $(p,q)>1$ için deformasyon parametresi *p* arttıkça artmaktadırlar. Fakat bunlar; ideal Bose ve ideal Fermi gazlarının entropi fonksiyonları ile kıyaslandıklarında, aynı fugasite değerleri için $(p,q)<1$ durumunda ideal karşılıklarından daha küçük değerler almaktalar, $(p,q)>1$'de ise daha büyük değerler almaktadırlar. Daha detaylı bilgiler EK-4'teki çalışmadan elde edilebilir.

Genel olarak bakıldığında literatürde yer alan bir-boyutlu fermiyonik parçacık cebirlerinin *q*-deformasyonları, standart fermiyon cebirine eşdeğer özellikler verirlerken, bunlardan ayrıcalıklı iki model; (9) ve (11) bağıntılarındaki VPJC *q*-fermiyon ile PVC *q*-fermiyon salınımcıları, hem standart fermiyon cebirinden farklı hem de Pauli dışarılama ilkesine uymayan yapıdadırlar (Parthasarathy ve Viswanathan, 1991; Viswanathan vd., 1992; Chaichian vd., 1993; Algin, 2011). Dolayısıyla, salt bu yönleri bile anılan modellere olan ilgiyi bir bakıma göstermektedir. Bunlardan "PVC-tipli *q*-deforme fermiyon gazı" başlığı altında; sistemin hem kuantum cebirsel özellikleri hem de fermiyonik *q*-analizi çerçevesinde fermiyonik türev ve integral formlarıyla ilgili diferansiyel özellikler çalışılmıştır (Bkz. EK-2). Daha sonra, interpolasyon istatistiğini sağlayan bu deforme fermiyon gazı modelinin istatistiksel mekanik özelliklerine deformasyonun etkileri incelenmiş, sistemin anyonik davranışı hangi koşullar altında sergileyebileceği araştırılmıştır (Bkz. EK-1). Ayrıca modelin yüksek sıcaklıklarda; üç ve iki boyutlu uzaylarda ayrı ayrı hal denkleminin virial açılımları yapılmış, fermiyonik deformasyonun etkileri çalışılmıştır. Bu çalışmalardan elde edilen sonuçların detaylı bilgileri EK-1,2 bulunmaktadır.

Projede diğer bir *q*-deforme fermiyon cebiri olan (9) ve (10) bağıntılarında verilen VPJC-tipli *q*-salınımcılarının oluşturduğu gaz modeli de çalışılmıştır. VPJC-fermiyon gaz modelinin istatistiksel mekanik özellikleri ele alınmış, özel olarak düşük sıcaklıklarda sistemin termo-istatistiksel davranışına yoğunlaşılmıştır. Modelin düşük sıcaklıklarda kimyasal potansiyeli, deforme fermiyonik ısı kapasitesi, entropisi, deforme (yâda kuazi) fermiyonların ısıl etkin kütlesi gibi farklı fiziksel fonksiyonlarına deformasyonun etkileri incelenmiştir. Elde edilen deforme termo-istatistiksel fonksiyonların farklı fiziksel parametrelere göre değişimlerini incelemek için nümerik analizleri temelinde bilgisayar program ve grafik çalışmaları da yapılmıştır. Bahsedilen bu çalışmalarla elde edilen sonuçlar; hem gerçek fermiyon gazlarıyla ilgili literatürde mevcut bazı deneysel verilerle hem de serbest-elektron Fermi teorisi sonuçları ile ayrı ayrı kıyaslanmışlardır (Bkz. EK-3,9).

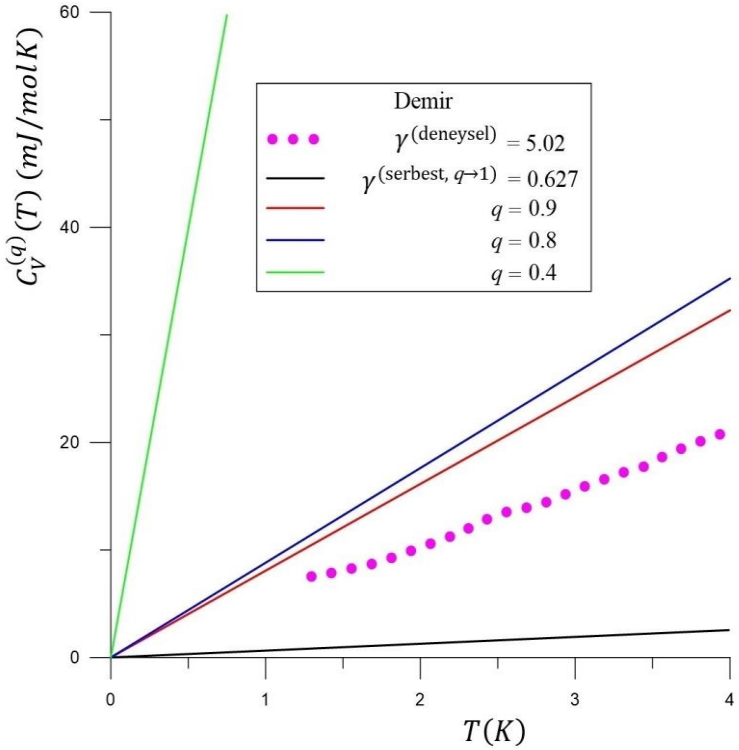
Düşük sıcaklıklarda, VPJC-tipli *q*-deforme fermiyon gaz modeli yardımıyla elde edilen deforme elektronik ısı kapasitesi,

$$C_V^{(q)}(T)=\gamma^{(q)}T \tag{40}$$

formundadır. Burada $\gamma^{(q)}$, *q*-deforme Sommerfeld parametresi olarak adlandırılmıştır ve

$$\gamma^{(q)} = -\frac{3}{2}\frac{k^2 N^{(q)}(0)}{\varepsilon_F} I^{VPJC}(q) \tag{41}$$

bağıntısı ile verilmiştir (Bkz. EK-3). Buradaki $I^{VPJC}(q)$ fonksiyonu, $q<1$ için daima negatif değerler almaktadır. VPJC-fermiyon gaz modelinin düşük sıcaklıklardaki deforme fermiyonik ısı kapasitesi fonksiyonu; Niobyum (Nb), Kurşun (Pb) ve Demir (Fe) gibi farklı malzemelere uygulanmıştır. Bahsedilen bu çalışmalarla elde edilen sonuçlar, hem bu metallerin deneysel elektronik ısı kapasiteleri verileriyle hem de serbest-elektron Fermi teorisi sonuçları ile ayrı ayrı kıyaslanmışlardır (Bkz. EK-3). Bunlardan Fe için elektronik ısı kapasitesinin sıcaklıkla değişimi çeşitli *q* değerlerinde Şekil 1'de gösterilmiştir.



Şekil 1. Fe için, deforme elektronik ısı kapasitesinin sıcaklığa göre değişimi ($q<1$) (Serbest-elektron teorisi değeri Ashcroft ve Mermin, 1976'dan; deneysel veriler ise Keesom ve Kurrelmeyer, 1939'den alınmıştır, EK-3).

(40) bağıntısı yoluyla elde edilen *q*-deforme Sommerfeld parametreleri ile birlikte Nb, Fe ve Pb için deneysel $\gamma^{(\text{deneysel})}$ değerleri, serbest-elektron teorisi yoluyla bulunan $\gamma^{(\text{serbest})}$ değerleri, topluca Tablo 1'de gösterilmiştir.

Tablo 1. Nb, Fe, Pb metallerinin serbest-elektron teorisi yolu, deneysel yol ve deforme ısı kapasitesi yollarıyla elde edilen Sommerfeld parametreleri (Keesom ve Kurrelmeyer, 1939; Van Der Hoeven ve Keesom, 1964; Van Der Hoeven ve Keesom, 1965; Ashcroft ve Mermin, 1976; Kittel, 1976; EK-3).

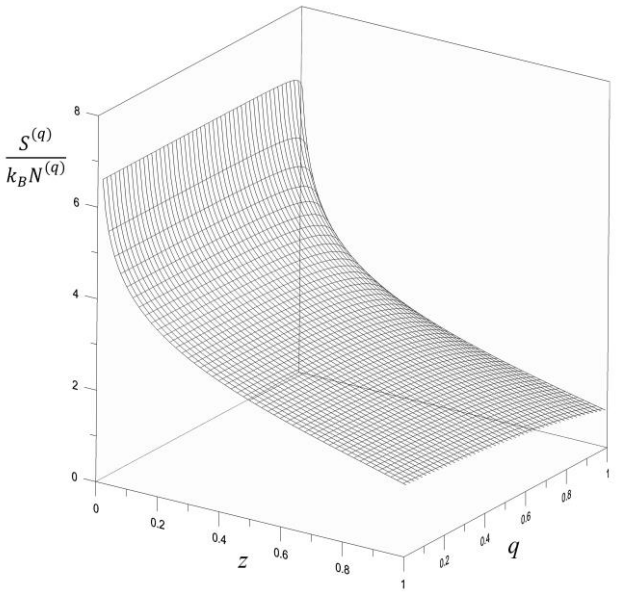
Metal	$\gamma^{(serbest)}$ *(mJ / mol K²)*	$\gamma^{(deneysel)}$ *(mJ / mol K²)*	$\gamma^{(q)}$ *(mJ / mol K²)*
Nb	0.669	7.79	7.96 (q = 0.79)
Fe	0.627	5.02	5.02 (q = 0.84)
Pb	1.509	3.00	3.00 (q = 0.67)

Şu da belirtilmelidir ki; (40) bağıntısı yardımıyla Nb, Fe ve Pb için bulunan $C_V^{(q)}(T)$ sonuçları, daha güncel deneysel çalışmaların sonuçlarıyla da kıyaslanmıştır (Marklund vd., 1971; Kuentzler, 1984; Tagliati vd., 2012). Buradan da VPJC-fermiyon gaz modelinden elde edilen $\gamma^{(q)}$ sonuçlarının deneysel sonuçlara, serbest-elektron teorisinden daha çok uyum sağladığı görülmüştür. Daha kapsamlı bilgiler EK-3,9'den elde edilebilir.

Öte yandan, VPJC q-fermiyon gaz modelinin iki boyutlu uzayda yüksek ve düşük sıcaklıklarda genel termodinamik ve istatistiksel özellikleri de incelenmiştir (Bkz. EK-10). Modelin çalışılan diğer deforme termo-istatistiksel fonksiyonlarının yanı sıra, özel olarak entropi fonksiyonu üzerine de yoğunlaşılmıştır. Bu çerçevede iki-boyutta modele ait q-deforme entropi fonksiyonu,

$$\frac{S^{(q)}}{k_B N^{(q)}} = \left[2\left(\frac{f_2(z,q)}{f_1(z,q)} \right) - \ln z \right] \tag{42}$$

şeklinde elde edilmiştir. Bu deforme entropi fonksiyonun fugasite (z) ve q'ya göre değişimleri Şekil 2'de verilmiştir.



Şekil 2. İki-boyutlu uzay hali için, deforme entropi fonksiyonunun z ve q'ya göre değişimleri ($q<1$, EK-10).

VPJC-fermiyon gazının entropisi, q değerleri arttıkça azalmaktadır. Ayrıca, elde edilen deforme entropi fonksiyonu değerleri, iki boyutlu halde ideal Fermi gazı entropi fonksiyonu değerleri ile de kıyaslanmıştır. Buradan aynı fugasite değerlerinde, deforme entropi fonksiyonu ideal Fermi gazı entropisinden daha düşük değerlere sahip olduğu görülmüştür. Daha kapsamlı bilgiler EK-10'daki çalışmada bulunduğundan burada tekrar verilmemiştir.

Bundan başka proje çalışmaları içerisinde, fermiyonik Fibonacci salınımcıları gazı modelinin de düşük sıcaklıklardaki istatistiksel mekanik özellikleri kapsamlıca incelenmiştir. Sistemin düşük sıcaklıklarda, (p,q)-deforme toplam parçacık sayısı ve (p,q)-deforme toplam enerji ifadeleriyle ilgili hesaplamalar, modifiye Sommerfeld açılımı metodu ile yapılmıştır. Bu sistemin düşük sıcaklıklarda diğer önemli termo-istatistiksel fonksiyonlarına fermiyonik p,q-deformasyonunun etkileri çalışılmıştır (Bkz. EK-11). Düşük sıcaklıklarda (p,q)-deforme termo-istatistiksel fonksiyonlardan kimyasal potansiyel, entropi ve elektronik ısı kapasitesi sabitesinin ayrı ayrı nümerik analizleri, bilgisayar program ve grafik çalışmaları yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar, hem serbest-elektron Fermi teorisi sonuçlarıyla hem de bazı metallerin deneysel elektronik ısı kapasitesi sabiteleriyle ayrı ayrı kıyaslanmışlardır. Bulunan sonuçların deneysel sonuçlarla literatürdeki diğer modellerin sonuçlarından daha uyumlu olduğu gösterilmiştir. Dahası bu çalışmada bulunan sonuçlar, düşük sıcaklıklarda fermiyonik Fibonacci salınımcılarının kuantum istatistiksel özelliklerinin kuazi-parçacık sistemlerinin doğrusal olmayan davranışlarının modellenmesinde ve fermiyonik deformasyonunun da incelenen sistemin parçacıkları arasındaki etkileşmelerle ilişkilendirilebileceğini ortaya koymaktadır (Bkz. EK-11). Şu da eklenmelidir ki, (15) ve (16) bağıntılarında verilen iki parametre ile deforme fermiyonik Fibonacci salınımcıları cebiri esasen bir kuazi-fermiyon cebiridir. Öte yandan tek parametre ile deforme bozon salınımcıları kullanarak kompozit (ya da kuazi) parçacık sistemleri modellenebilmektedirler. Bu konuda Avancini ve Krein tarafından tek parametre ile deforme bozon salınımcıları üzerinden inşa edilen çalışma, örnek verilebilir (Avancini ve Krein, 1995). Böylece fermiyonik Fibonacci salınımcılarının oluşturduğu p,q-deforme fermiyon gaz modelinin kuantum istatistiksel özellikleri yardımıyla kauzi-parçacık sistemlerinin gerek parçacıkları arasındaki etkin etkileşmeleri gerekse kuazi-parçacıkların iç yapılarıyla ilgili fiziksel karekteristikleri daha iyi anlamaya dair etkin bir yaklaşım geliştirilebilir (Bkz. EK-11). Çalışılan diğer deforme termo-istatistiksel fonksiyonların yanı sıra örneğin toplam p,q-deforme kuazi-parçacık ısı kapasitesi,

$$C_{toplam}^{(p,q)}(T) = C_{\substack{kuazi \\ fermiyonik}}^{(p,q)}(T) + C_{\substack{kuazi \\ bozonik}}^{(p,q)}(T) = \gamma^{(p,q)}\, T + A^{(p,q)}\, T^3 \qquad (43)$$

şeklindedir. Burada sağdan ilk terim, p,q-deforme kuazi-elektronik ısı kapasitesini, ikinci terim ise deforme bir örgü modeli için p,q-deforme fononların oluşturduğu katkıyı göstermektedir. p,q-deforme Debye modeli, bozonik Fibonacci salınımcıları yardımıyla 2016

yılında Marinho vd. tarafından çalışılmış ve düşük sıcaklıklarda örgü titreşimlerine dair ısı kapasitesine olan katkının,

$$C_{\substack{kuazi\\bozonik}}^{(p,q)}(T)=\frac{12\pi^4 k}{5}\left(\frac{T}{\Theta_{D_{p,q}}}\right)^3 \tag{44}$$

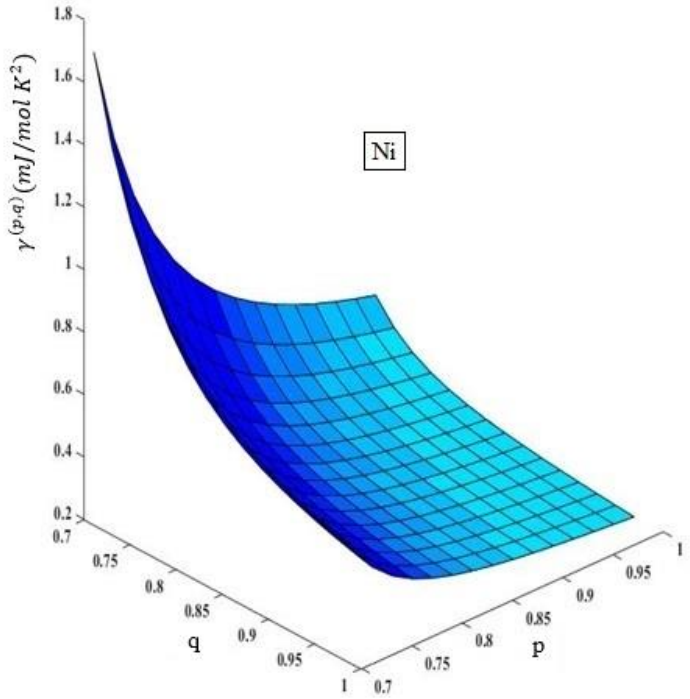
olduğu bulunmuştur (Marinho vd., 2016). Burada $\Theta_{D_{p,q}}$, p,q-deforme Debye sıcaklığıdır. Dolayısıyla (43)'ten yararlanarak, bir malzemenin p,q-deforme toplam kuazi-parçacık ısı kapasitesi,

$$C_{toplam}^{(p,q)}(T)=\gamma^{(p,q)}\,T+\frac{12\pi^4 k}{5}\left(\frac{T}{\Theta_{D_{p,q}}}\right)^3 \tag{45}$$

şeklindedir (Bkz. EK-11). Burada sağdan ilk terimde bulunan p,q-deforme Sommerfeld parametresi $\gamma^{(p,q)}$ ise

$$\gamma^{(p,q)}=\left[-\frac{3}{2}\frac{k^2 N^{(p,q)}(0)}{\varepsilon_F}\right]I^{FFO}(p,q) \tag{46}$$

şeklindedir. Buradaki $I^{FFO}(p,q)$ fonksiyonu, $(p,q)<1$ durumu için daima negatif değerler almaktadır. Bulunan sonuçlar, bazı malzemelere uygulanmışlardır (Bkz. EK-11). Bunlardan Nikel (Ni) için p,q-deforme Sommerfeld parametresi $\gamma^{(p,q)}$ nun deformasyon parametreleri p ve q ile değişimleri Şekil 3'te gösterilmiştir.



Şekil 3. Ni için deformasyon parametreleri p ve q'nun fonksiyonu olarak deforme Sommerfeld parametresi $\gamma^{(p,q)}$ nun değişimi ($(p,q)<1$, EK-11).

Ayrıca Ni için, deneysel yoldan bulunan Sommerfeld parametresi $\gamma^{(deneysel)} = 7.02$ *mJ/mol.K²* (Tritt, 2004) iken, serbest-elektron Fermi teorisi sonucu ise $\gamma^{(1,1)} = 0.61$ *mJ/mol.K²* şeklindedir (Tritt, 2004). Oysa *p*,*q*-deforme fermiyon gaz modelinin kuazi-fermiyonik ısı kapasitesi (45), (46) yoluyla elde edilen *p*,*q*-deforme Sommerfeld parametresi $\gamma^{(deneysel)} = 7.02$ *mJ/mol.K²* deneysel değerini *p* = 0.8934 ve *q* = 0.5768 değerlerinde ulaşmaktadır (Bkz. EK-11). İncelenen diğer malzemeler için de serbest-elektron Fermi teorisiyle kıyaslandığında, *p*,*q*-deforme kuazi-fermiyon gaz modelinin ısıl ve elektronik özelliklerinin deneysel sonuçlarla daha uyumlu olduğu gözlenmiştir (Bkz. EK-11). Daha kapsamlı bilgiler EK-11'deki çalışmada bulunduğundan burada tekrar verilmemiştir. Bu çalışmanın bir başka önemi de; özellikle bu tür iki-parametre ile deforme fermiyon gazlarının düşük sıcaklıklardaki termo-istatistiğine ait literatürde yer alan boşluğu belli ölçüde doldurabilecek nitelikte olmasıdır. Zira bu güne kadar literatürde bu alanda yoğun olarak, bozonik deforme sistemlerin düşük sıcaklıklardaki termodinamik özellikleri çalışılmıştır. İki-parametre ile deforme fermiyonik sistemlerin düşük sıcaklıklardaki davranışı ile ilgili kapsamlı çalışmalar literatürde neredeyse yok denecek kadar azdır. Yine EK-11'deki çalışma, hem parçacık fiziği hem de yoğun madde fiziği alanlarına hitap eden Fermi sistemleri ve uygulamalarıyla ilgili bazı temel konuları da içerdiğinden bir bakıma disiplinlerarası bir nitelik de taşımaktadır.

Bunlardan başka proje çalışmaları içerisinde; düşük uzay boyutlarında deforme bir kuazi-bozon gaz modelinin yüksek ve düşük sıcaklıklardaki termo-istatistiksel özellikleri de çalışılmıştır (Bkz. EK-12). Bu çalışma, (7) ve (8) bağıntılarında verilen bozonik Fibonacci salınımcılarının proje içerisinde çalışılan kuantum istatistiksel yönlerine dayanmaktadır. Bu çalışmada $p \neq 1$ ve $q \neq 1$ için BE ve FD istatistikleri arasında sürekli bir interpolasyon sergileyen *p*,*q*-deforme bozonlar tarafından oluşturulan kuazi-bozon gaz modelinin düşük sıcaklıklarda, iki boyutta deforme kritik sıcaklığı, entropisi ve özgül ısısı bulunmuştur. Yine yüksek sıcaklıklarda deforme kuazi-bozon gaz modelinin iki ve bir uzay boyutlarında, anyonik davranış sergileyebilme koşulları ayrı ayrı hal denklemlerinin deforme virial açılımları yoluyla incelenmiştir (Bkz. EK-12). Daha detaylı bilgiler EK-12'deki çalışmada bulunduğundan burada tekrar verilmemiştir.

3.3 Kuantum deformasyonuyla parçacıklar arası etkileşmelere yaklaşımla ilgili bulgular ve tartışma

Proje kapsamında deforme kuantum istatistiksel fonksiyonlar üzerine yapılan çalışmalardan yararlanarak, aynı zamanda bozonik ve fermiyonik kuantum deformasyonlarının gerek kuazi-parçacıklar arasındaki etkileşmelerle gerekse parçacıkların iç (ya da kompozit) yapılarının fiziksel özellikleriyle ilişkilendirilip/ilişkilendirilemeyeceğine dair incelemeler de yapılmıştır. Bu amaca yönelik çalışmalardan özet olarak şunlar vurgulanabilir:

Fermiyonik Fibonacci salınımcılarının oluşturduğu *p*,*q*-deforme Fermi gaz modelinin düşük sıcaklıklardaki ısıl ve elektronik özelliklerinin çalışılması yardımıyla, bir kuazi-parçacığın ısıl etkin kütlesi,

$$\frac{m^*(p,q)}{m} = \frac{[\gamma^{(deneysel)} / \gamma^{(1,1)}]}{[(-3\pi^{-2})\, I^{FFO}(p,q)]} \tag{47}$$

şeklinde elde edilmiştir (Bkz. EK-11). Burada m, serbest deforme bir kuazi-fermiyonik parçacığın kütlesidir. $m^*(p,q)$ ise etkileşme etkilerinin tümünü barındıran deforme kuazi-fermiyon parçacığının ısıl etkin kütlesidir. Dolayısıyla buradan, deformasyon parametreleri aracılığıyla; ısıl etkin kütlenin değişimi dahil, belirli bir örgü potansiyeli içersinde haraket eden tüm deforme kuazi-fermiyonların etkin etkileşmeleri ile ilgili bazı dolaylı yoldan bilgilere ulaşılabilir. Böylece fermiyonik *p*,*q*-deformasyonu da bir bakıma, inceleme altındaki sistemde etkileşme detaylarına ulaşabilmek için ekstra ödenmesi gereken bir fatura gibi düşünülebilir. Öte yandan, kuazi-parçacıkların iç (ya da kompozit) yapılarıyla ilgili olarak da (46) bağıntısı göz önüne alınarak,

$$\gamma^{(p,q)} = (-3\pi^{-2})\left[(0.169)\, Z\left(\frac{r_s}{a_0}\right)^2 \times 10^{-4}\right] I^{FFO}(p,q) \tag{48}$$

ifadesi, yararlanılacak yollardan birisidir. Burada r_s ile verilen herhangi iki kuazi-fermiyon arasındaki (örneğin özelde iki iletim elektronu arasında) etkin erim (ya da menzil) yada muhtemelen küresel hacimli olduğu varsayılan bir kuazi-parçacık hacminin yarıçapını işaret etmektedir (Bkz. EK-11). Yapılan çalışmalar, deformasyon parametreleri *p* ve *q*'nun inceleme altındaki sistemde kuazi-parçacıklar arasındaki etkin etkileşmelerin gücünü (şiddetini) kontrol eden bir rol oynadığını ortaya koymuştur. Yapılan tüm çalışmalardan elde edilen sonuçlar bu parametrelerin,

$$p = p(T, m^*, r_s)\,, \qquad q = q(T, m^*, r_s) \tag{49}$$

şeklinde sistemin sıcaklığı *T*, ısıl etkin kütle $m*$, etkin menzil r_s değişkenleriyle orantılı değişimlere sebeb olduklarını ortaya koymuştur (Bkz. EK-11,3). Daha detaylı bilgiler EK-11,3' teki makalelerden elde edilebilir.

Öte yandan parçacıklar arası etkileşmelere bir başka yaklaşım da incelenen deforme bozon yada fermiyon gaz modelinin yüsek sıcaklıklar limitinde hal denkleminin deforme virial açılımını ve virial katsayılarını elde etmektir. Zira virial katsayıları; iki-parçacık, üç-parçacık, vb. arasındaki etkileşmelerle ilgili bilgileri yansıtırlar (Pathria ve Beale, 2011). Bu çerçevede PVC-tipli *q*-deforme fermiyon gaz modelinin hem iki hem de üç boyutlu uzayda ayrı ayrı hal denklemlerinin virial açılımları yapılmış ve ilk beş deforme virial katsayıları bulunmuştur (Bkz. EK-1). Buradan *q* deformasyon parametresinin sistemin itici ve çekici etkileşmeleri arasında bir interpolasyon objesi olarak görev yaptığı sonucuna ulaşılmıştır. Dolayısıyla sistem, $q<1$

değerleri için orijinal fermiyonik davranışını bozon gazı benzeri bir davranışa doğru değiştirebilmektedir. Aynı çalışma çerçevesinde deforme virial katsayılarından ikincisinin ideal Fermi gazı virial katsayısından olan farkı (ya da değişimi) bulunmuş ve bu farkın iki-parçacık etkileşmelerine dair bilgiler içerebilen, sistemin ideallikten sapmasının bir ölçüsü olarak değerlendirilmiştir (Bkz. EK-1). Dolayısıyla PVC-tipli *q*-deforme fermiyon gazının termodinamik ve istatistiksel özellikleri yardımıyla elde edilen ikinci deforme virial katsayısının ideal karşılığından olan farkı, iki-parçacık etkileşme potansiyeli ile de ilişkilendirilebilir. Buradan deformasyon parametresi *q*, incelenen sistemdeki ideallikten sapma faktörü yada doğrusallıktan ayrılma faktörü şeklinde de yorumlanabilir. Daha detaylı bilgiler EK-1' den elde edilebilir.

3.4 Deforme kuantum istatistiğinin bazı fiziksel uygulamalarıyla ilgili bulgular ve tartışma

Projede; deforme bozon ve deforme fermiyon sistemlerinin istatistiksel mekanik özellikleriyle ilgili elde edilen yaklaşım, formülasyon ve sonuçların uygulamadaki muhtemel etkilerini gözlemlemek amacıyla, fiziksel uygulama çalışmaları da yapılmıştır. Bu çerçevede bir not olarak belirtilmelidir ki; proje önerisinde projenin son safhasında yapılmak üzere, yoğun madde fiziği alanında bazı uygulamalar yer almıştı. Bunlar: Deforme bozonlarla BE yoğunlaşmasına bir uygulama, bozonik eksiton gazını deforme bozonlarla modelleme uygulaması, katıların ısıl özelliklerine deforme yapılarla bir uygulama, Landau diyamanyetizmasına bir uygulama şeklinde planlanmıştı. Proje süresince; BE yoğunlaşmasına bir uygulama, katıların ısıl özelliklerine bir uygulama, anyon sistemlerinin bazı termo-istatistiksel özelliklerine uygulama ve de kuantum optiği alanında da iki ayrı özel uygulama yapılmıştır (Bkz. EK-12,11,3,7,1,5,6,4). Bu arada, Landau diyamanyetizması konusunda herhangi bir uygulama yapılmamıştır. Çünkü projenin başladığı ilk yıl olan 2014 içerisinde; (7) ve (8) bağıntılarında verilen bozonik Fibonacci salınımcıları modeli, Landau diyamanyetizması konusuna, farklı bir *p*,*q*-deforme istatistiksel dağılım fonksiyonu altında uygulanmıştır (Marinho vd., 2014a). Öte yandan, bozonik eksiton gazının termo-istatistiksel özelliklerini bozonik Fibonacci salınımcıları aracılığıyla modelleme çalışması da halen devam etmektedir. Bu *p*,*q*-deforme bozonik eksiton gazının yüksek ve düşük sıcaklıklardaki termo-istatistiksel davranışını inceleme çalışmasının bir an evvel tamamlanması için çaba sarf edilmektedir.

Bozonik Fibonacci salınımcılarının oluşturduğu *p*,*q*-deforme Bose gazı modelinin, düşük uzay boyutlarında BE yoğunlaşmasını hangi koşullar altında sergileyebileceği ile ilgili çalışmalar da yapılmıştır (Bkz. EK-12). Bu kapsamda bulunan deforme termo-istatistiksel fonksiyonların davranışları için bilgisayar benzetimlerinden de yararlanarak veri ve grafik analizleri yapılmıştır. Bu çalışmadan elde edilen kuantum istatistiksel sonuçlar, hem ideal

Bose gazı sonuçları hem de literatürde bugüne kadar yayınlanmış diğer tek-parametre ile deforme bozon gazı sonuçları ile kıyaslanmış ve yeniden yorumlanmışlardır. Bu çalışmada düşük boyutlarda, deforme kuazi-bozonların düşük ve yüksek sıcaklıklardaki termodinamik özellikleri (iç enerjisi, entropisi, özgül ısısı vd.) incelenmiştir. BE yoğunlaşması için faz geçişini temsil eden kritik sıcaklık, deformasyon parametreleri *p* ve *q*'nun bir fonksiyonu olarak bulunmuştur. Yapılan kuramsal hesaplamalardan, deforme kuazi-bozonların $(p,q)>1$ için BE yoğunlaşmasını düşük boyutlarda sergileyebileceği görülmüştür (Bkz. EK-12). Daha detaylı bilgiler EK-12' den elde edilebilir.

Katıların ısıl özellikleriyle ilgili çalışmalarla ilgili bulgu ve sonuçlar, yukarıda 3.2 kesiminde özetlenmiştir. Bu çerçevede, özellikle düşük sıcaklıklarda bir ve iki-parametre ile deforme fermiyon gaz modellerinden yola çıkarak, katıların bazı ısıl ve elektronik özellikleriyle ilgili farklı sonuçlara ulaşılmıştır (Bkz. EK-3,11). Daha detaylı bilgiler EK-3,11'deki çalışmalarda olduğundan burada tekrar verilmemiştir.

Başka bir uygulama çalışması olarak da kuantum optiğine iki ayrı uygulama yapılmıştır. İlki, TD-deforme bozon cebiri için koherent hallerin oluşumu ve kuantum mekaniksel özelliklerinin çalışılmasıdır (Bkz. EK-5). İkincisi ise tek-modlu hareketli ışık alanıyla etkileşen bir TD-deforme salınımcı tuzağı ile tuzaklanmış, iki-seviyeli atomun zaman içindeki evriminin incelenmesidir. Böyle bir sistemin TD-deforme salınımcı tuzağı altında deformasyonun, Hamiltoniyenin matris elemanlarına ve oradan da farklı titreşim halleri arasındaki eşleşmeye etkileri çalışılmıştır (Bkz. EK-6). Daha kapsamlı bilgiler EK-5,6' daki yayınlardan elde edilebilir.

Bundan başka, BE ve FD istatistikleri arasında sürekli bir interpolasyon sağlayan "ara yada orta istatistikli" özel bir *q*-deforme fermiyon modelinin anyonik davranışı çalışılmıştır (Bkz. EK-1). Yine bir kuazi-parçacık modeli olarak, bozonik Fibonacci salınımcılarının oluşturduğu *p*,*q*-deforme Bose gazının iki uzay boyutunda termodinamik ve istatistiksel özelliklerinden yararlanarak, bir anyon gazının hal denkleminin virial açılımındaki ikinci virial katsayısı ile bağlantı kurulmuştur (Bkz. EK-12). Buradan anyonik istatistik parametresi α ile kıyaslandığında (Khare, 2005), bozonik *p*,*q*-deformasyonun çok daha geniş bir aralıkta sistemlerin interpolasyonunu sağladığı gösterilmiştir. Daha detaylı bilgiler EK-12' deki çalışmadan elde edilebilir.

4. SONUÇ

4.1 Sonuç ve Öneriler

Deforme bozon ve deforme fermiyon sistemlerinin istatistiksel mekanik yönleri ve bazı fiziksel uygulamaları üzerine proje çerçevesinde yapılan tüm çalışmalardan elde edilen sonuçlar ve hatta her bir çalışmaya özel olarak sunulan öneriler, yapılan yayınların sonuç ve tartışma bölümlerinde kapsamlıca verildiğinden; burada sonuç ve öneriler, özet olarak maddeler halinde verilecektir.

Bulunan sonuçlar:

1- Proje de çalışılan deforme bozon ve deforme fermiyon sistemlerinin düşük ve yüksek sıcaklıklarda istatistiksel mekanik özellikleri ve yapılan fiziksel uygulamaları; hem bu alandaki literatürden farklı hem de standart formalizmin ötesinde yeni model, yaklaşım ve formülasyonlar ortaya koymuştur. İki ve üç uzay boyutlarında deforme salınımcı sistemlerinin ideal Bose ve ideal Fermi salınımcılarından çok daha farklı ve zengin fiziksel yapılara sahip oldukları gözlemlenmiştir.

2- Proje çalışmaları aracılığıyla elde edilen sonuçlar, deforme kuantum termodinamiği formalizminin gelişimine hizmet edecek niteliktedir.

3- Proje çerçevesinde yapılan çalışmalar, hem fermiyonik *q*-analizinin hem de Fibonacci analizinin bu güne kadar çalışılmamış yeni özelliklerini ortaya koymuştur. Böylece bunların istatistiksel mekanik fonksiyonların davranışı üzerine etkileri bulunmaya çalışılmıştır (Bkz. EK-1,2,4).

4- EK-4'te de sunulan çalışma literatürde ilk kez, bozonik ve fermiyonik Fibonacci salınımcıları yardımıyla, hem Bose ve Fermi tipli kuantum deformasyonlarının birleşik bir tanımlamasını hem de istatistiksel mekanik özelliklerini bir arada incelemeye olanak veren "birleşik bir *p*,*q*-deforme kuantum gaz modeli" sunmaktadır (Bkz. EK-4). Ayrıca bu çalışmada sunulan *p*,*q*-deforme istatistiksel dağılım fonksiyonu, hem standart BE ve FD istatistiklerini hem de tek-parametre ile deforme bozon ve fermiyon sistemleri aracılığıyla elde edilen literatürdeki diğer tüm istatistiksel dağılım fonksiyonlarını genelleştirmektedir. Zira bu genelleştirilmiş istatistiksel dağılım fonksiyonu; $p=q=1$ limitinde standart olanlara, $p=1$ limitinde de tek-parametre ile deforme bozonik ve fermiyonik dağılım fonksiyonlarına indirgenmektedir.

5- Farklı deforme bozon ve fermiyon cebirleriyle de interpolasyon istatistiğinin tanımlanabileceği ve bu tanımlamaların anyon sistemlerinin istatistiğinden daha farklı ve zengin istatistiksel sonuçlara yol açtığı görülmüştür (Bkz. EK-1,7,12).

6- Kuazi-parçacık sistemlerinin deforme bozon ve deforme fermiyon salınımcıları ile modellenebileceği gözlemlenmiştir (Bkz. EK-11,12).

7- Çalışılan ister *p*,*q*-deforme Bose gaz modeli isterse *p*,*q*-deforme deforme Fermi gaz modeli olsun, bunların etkin olarak etkileşmeli bir parçacık sistemine yol açtıkları görülmüştür. Dolayısıyla yapılan istatistiksel mekanik çalışmalardan, deformasyon parametreleri *p* ve *q*'nun incelenen sistemin kuazi-parçacıklarının istatistiğini kontrol eden, parçacıklar arasındaki etkin etkileşmelerle ilgili bilgi sağlayabilen, kuazi-parçacıkların iç (ya da kompozitlik) yapıları ile ililişkilendirilebilen objeler oldukları gözlemlenmiştir (Bkz. EK-3,7,11,12).

8- Yapılan çalışmalar, literatürde hala çok ilgi gören bir problem olan "Acaba kuantum deformasyonları parçacık etkileşmelerine eşdeğer midir?" sorusuna da deformasyonun parçacık etkileşmeleriyle ilişkilendirilebilen ve hatta onların üstüne bulaşmış/karışmış bir yapı olduğuna dair kuvvetli deliller sunmuştur. Buradan deformasyon parametreleri *p* ve *q*'nun hem sistemin sıcaklığı hem de bir kuazi-parçacığın ısıl etkin kütlesi ile birlikte parçacıkların bir iç (kompozitlik) özelliğiyle de ilişkilendirilebildiklerini öne süren EK-11,3 çalışmaları önemli dayanaklardandır.

9- Projede yapılan çalışmalar; etkileşmeli bir parçacık sisteminin ideallikten uzak veya doğrusallıktan uzak herhangi bir kuantum istatistiksel davranışının, deforme bozon ve/veya deforme fermiyon sistemi kullanarak modellenebileceği sonucuna dair kanıtlar ortaya koymuştur.

10- Deforme kuazi-bozonların düşük uzay boyutlarında BE yoğunlaşmasını sergileyebildikleri ve kritik sıcaklığın da model deformasyon parametreleri *p* ve *q* ile ilişkilendirilebildiği ortaya konmuştur (Bkz. EK-12).

11- Çalışılan *p*,*q*-deforme bozon ve fermiyon gazlarının termodinamik ve istatistiksel özellikleri; yapılan fiziksel uygulamalarda deneysel ve teorik sonuçlara uyum bakımından, hem ideal Bose gazı hem de serbest-elektron Fermi gazının yetersizliklerini bertaraf edecek nitelikte olduğunu otaya koymuştur (Bkz. EK-3,11). Dolayısıyla, standart kuramların deneylerle uyuşmadığı ya da yetersiz kaldığı durumlarda, deforme bozon ve deforme fermiyonların kuantum istatistiksel özellikleri; örneğin geçiş metalleri, alaşımlar, ağır fermiyon malzemeler gibi uygulamalarda etkin ve verimli araçlar olarak kullanılabilirler.

12- Deformasyon parametrelerinin incelenen sistemin entropisini doğrudan etkileyebilen birer araç oldukları ve hatta EK-4 çalışmasında olduğu gibi, $(p,q)<1$ değerlerinde sistemin entropisini azaltan bir role sahip oldukları görülmüştür. Bu yolla; incelenen deforme sistemin parçacıkları arasındaki etkileşmelerin öyle farklı cereyan ettiği, bunun da sistemde daha az kaotik bir duruma yol açtığı değerlendirilebilir. Yapılan çalışmalardan, deformasyon parametreleri *p* ve *q*'nun incelenen sistemdeki bozonik veya fermiyonik davranışın kalitesini belirlemede kullanılabilecekleri ortaya çıkmaktadır.

13- Yapılan fiziksel uygulamalardan, iki-parametreli kuantum deformasyonlarının daha farklı sonuçlara neden olduğu gözlemlenmiştir. Buradan bozonik ve fermiyonik *p*,*q*-deformasyonlarının tek-parametreli olanlardan çok daha zengin ve farklı sonuçlar ortaya koyduğu, bu tür sistemlerin termo-istatistiksel özelliklerinin de Fibonacci analizi ile inşa edilebileceği gösterilmiştir.

14- Hem proje çalışmalarından elde edilen bir kısım sonuçların paylaşımı amacıyla hem de kuantum biliminin disiplinlerarası uygulamalarının önemi konusunda farkındalığı arttırmak amacıyla düzenlenen “International Conference on Quantum Science and Applications (ICQSA-2016)” etkinliği özellikle yüksek lisans ve doktora öğrencilerimiz açısından çok faydalı olmuştur (Bkz. EK-13). Bu projenin vesile olduğu böyle bir etkinliğin düzenlemesinde de TÜBİTAK’ın vermiş olduğu destekten ötürü bir kez daha çok teşekkür ederiz. Etkinliğe 16 farklı ülkeden, toplam 143 aktif katılımcı olmuştur ve ikincisinin düzenlenmesi hususunda halen talepler gelmektedir. Etkinlikte sunulan sözlü bildirilerin tam metin hallerinden hakem değerlendirme sürecinden geçip kabul edilen toplam 36 adet makale, ISI-Web of Science tarafından taranan "*Journal of Physics: Conference Series, 766, 011001-012036 (2016)"* olarak yayınlanmıştır (Bkz. EK-14). Bu etkinlik; genç araştırmacıların kuantum analizi, kuantum istatistiği, kuantum hesaplama ve diğer alanlarda güncel uygulama ve gelişmelerinden haberdar olmalarını sağlamış, yoğun ilgiyle yeni proje ve bilimsel işbirliklerinin gelişmesi için bir platform oluşturmuştur.

15- Projede çalışılan deforme kuantum istatistiği ve fiziksel uygulamaları bağlamında ortaya konan standart kuantum istatistiklerinden farklı ve ilginç yönler, ileride yeni proje önerilerinin de doğmasına zemin hazırlayacak niteliktedir. Zira bu proje sonuçlarıyla kazanılan bilgi ve deneyim; örneğin nanoyapılar, yüksek sıcaklık süper-iletkenlik teorisi gibi konularda da deforme kuantum istatistiğinin yeni kuramsal ve uygulamalı katkılarının kovalanabileceği yeni proje önerilerinin hazırlanmasına da yol açabilecektir.

16- Proje çalışmaları içerisindeki alt-araştırma konularından birisi TD-deforme bozon modeli özelindeki çalışmalardır. Bu özel model üzerindeki çalışmaların diğer bir sonucu da, yeni uluslararası araştırma işbirliklerinin doğmasına vesile olmuş olmasıdır. Zira bu model üzerine olan EK-5,6 çalışmaları, Güney Kore Gyeonsang Ulusal Üniversitesi Fizik Bölümü'nden bir araştırmacı ile bilimsel işbirliği içerisinde gerçekleştirilmiştir. Dolayısıyla proje sonuçları, gelecekte farklı konularda da ulusal/uluslararası düzeyde yeni araştırma işbirliklerinin geliştirilmesine dair bilimsel bir alt yapı oluşturmaktadır.

17- Proje çerçevesinde çalışılan deforme bozon ve deforme fermiyon sistemlerinin istatistiksel mekanik yönleri ile ilgili bazı sonuçları içeren toplam altı adet sözlü bildiri,

ulusal ve uluslararası kongre ve sempozyumlarda proje ekibi tarafından sunulmuştur (Bkz. EK-16,17,18,19,20,21).

18- Son olarak bu araştırma projesi vesilesiyle; 2015 yılında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fahri Ünvan, Üstün Hizmet ve Takdir, Bilimsel Çalışma ve Faaliyetleri Ödüllendirme Programı çerçevesinde, Fen Bilimleri alanında dış kaynaklı proje dalında üçüncülük ödülü tevdi edilmiştir (Bkz. Ek-15).

Öneriler:

1- Proje çalışmalarıyla ortaya konan deforme kuantum istatistiksel özellikler aracılığıyla, deformasyon parametrelerinin sistemin entropisi ile olan ilişkisinden yararlanarak, kuazi-parçacık sistemlerindeki dolanık kuantum durumlarının karekteristikleri çalışılabilir. Böylece sistemin dolanıklık entropisi üzerine de kuantum bilgi teorisi temelli yeni uygulamalar gerçekleştirilebilir.

2- Projenin yukarıda belirtilen sonuç ve çıktılarından yararlanarak; kollektif uyarılmaları, doğrusal olmayan davranışları içeren gerçek fiziksel sistemlerin davranışlarına, tek veya iki parametre ile deforme Bose ve Fermi gaz modelleri ile yaklaşılabilir.

3- Proje çalışmalarıyla ortaya konan deforme kuantum istatistiksel model, yaklaşım ve formülasyonlar; kozmoloji'de kara delik termodinamiğinin çalışılmasından, düşük boyutlarda egzotik kuantum halleri sergileyebilen nanomalzemelere kadar pek çok uygulama alanında katkılar sağlayabilir. Standart bozon ve standart fermiyon yöntemlerin ötesinde, deforme salınımcı yapıları; kesirli kuantum Hall etkisi, yarı-iletken kuantum kuyuları, Kondo etkisi gibi farklı yoğun madde sistemlerinin kuantum istatistiksel yönlerinin çalışılmasına dair de yeni ufuk ve yorumlar katabilir. Böylece ileride kuantum biliminin disiplinlerarası teknolojik uygulama potansiyeli yüksek araştırma alanlarındaki gelişmelere de az yâda çok faydalar sağlayabilir.

KAYNAKLAR

Acharya, R., Narayana Swamy P. 1994. "Statistical mechanics of anyons", J. Phys. A: Math. Gen., 27, 7247-7263.

Adamska, L.V., Gavralik A.M. 2004. "Multi-particle correlations in *qp*-Bose gas model", J. Phys. A: Math. Gen., 37, 4787-4795.

Algin, A., Arik M., Arikan A. S. 2002a. "High-temperature behavior of a two-parameter deformed quantum group fermion gas", Phys. Rev. E, 65, 026140-1-026140-5.

Algin, A., Arik M., Arikan A.S. 2002b. "Multi-parameter deformed fermionic oscillators", Eur. Phys. J. C, 25, 487–491.

Algin, A., Deviren B. 2005. "Bose-Einstein condensation of a two-parameter deformed quantum group boson gas", J. Phys. A: Math. Gen., 38, 5945-5956.

Algin, A. 2008. “Bose-Einstein condensation in a gas of Fibonacci oscillators”, J. Stat. Mech.: Theor. Exp., P10009-1-P10009-23.

Algin, A. 2011. "A comparative study on *q*-deformed fermion oscillators", Int. J. Theor. Phys., 50, 1554-1568.

Algin, A., Senay M. 2012. "High-temperature behavior of a deformed Fermi gas obeying interpolating statistics", Phys. Rev. E, 85, 041123-1-041123-10.

Arik, M., Coon, D.D. 1976. "Hilbert spaces of analytic functions and generalized coherent states", J. Math. Phys., 17, 524-527.

Arik, M., Demircan E., Turgut T., Ekinci L., Mungan M. 1992. "Fibonacci oscillators", Z. Phys. C, 55, 89-95.

Arik, M., Atakishiyev N. M., Wolf K. B. 1999. "Quantum algebraic structures compatible with the harmonic oscillator Newton equation", J. Phys. A: Math. Gen., 32, L371-L376.

Arik, M., Peker-Dobie A. 2001. "Particle-antiparticle symmetry of the multi-dimensional fermionic Newton oscillator", J. Phys. A: Math. Gen., 34, 725-730.

Ashcroft, N. W., Mermin, N. D. 1976. Solid State Physics. New York: Saunders College Publishing.

Avancini, S.S., Krein G. 1995. "Many body problems with composite particles and *q*-Heisenberg algebras", J. Phys. A: Math. Gen., 28, 685-691.

Biedenharn, L.C. 1989. "The quantum group $SU_q(2)$ and a *q*-analogue of the boson operators", J. Phys. A: Math. Gen., 22, L873-L878.

Bonatsos, D., Daskaloyannis C. 1999. "Quantum groups and their applications in nuclear physics", Prog. Part. Nucl. Phys., 43, 537-618.

Brito, F.A., Marinho A.A. 2011. "*q*-deformed Landau diamagnetism problem embedded in D-dimensions", Physica A, 390, 2497-2503.

Chaichian M., Kulish P. 1990. "Quantum Lie superalgebras and *q*-oscillators", Phys. Lett. B, 234, 72-80.

Chaichian, M., Felipe, R.G., Montonen, C. 1993. "Statistics of *q*-oscillators, quons, and relations to fractional statistics", J. Phys. A: Math. Gen., 26, 4017-4034.

Chakrabarti, R., Jagannathan R. 1991. "A (*p*,q)-oscillator realization of two parameter quantum algebras", J. Phys. A: Math. Gen., 24, L711-L718.

Daoud, M., Kibler M. 1995. "Statistical mechanics of qp-bosons in *D*-dimensions", Phys. Lett. A, 206, 13-17.

Dai, W.S., Xie M. 2013. "Calculating statistical distributions from operator relations: The statistical distributions of various intermediate statistics", Ann. Phys. (NY), 332, 166-179.

Dil, E. 2015. " *q*-Deformed Einstein equations", Can. J. Phys., 93, 1274-1278.

Dil, E., Kolay E. 2016. "Solution of deformed Einstein equations and quantum black holes", Advances in High Energy Phys., Article ID 3973706, 1-7.

Gavrilik, A.M., Kachurik, I.I., Mishchenko, Yu.A. 2011. "Quasibosons composed of two *q*-fermions:Realization by deformed oscillators", J. Phys. A: Math. Theor., 44, 475303-1-475303-23.

Gavrilik A M, Rebesh A.P. 2012. “Deformed gas of *p*,*q*-bosons: Virial expansion and virial coefficients”, Mod. Phys. Lett. B, 26, 1150030-1-1150030-13.

Gavrilik A M, Mishchenko Yu.A. 2012. "Entanglement in composite bosons realized by deformed oscillators", Phys. Lett. A, 376, 1596-1600.

Gavrilik, A. M., Mishchenko Yu.A. 2013. "Deformed Bose gas models aimed at taking into account both compositeness of particles and their interation", Ukr. J. Phys., 58, 1171-1177.

Gavrilik, A.M., Mishchenko Yu.A. 2014. "Virial coeeficients in the ($\tilde{\mu},q$)-deformed Bose gas model related to compositeness of particles and their interaction: Temperature-dependence problem", Phys. Rev. E, 90, 052147-1-052147-8.

Gavrilik A M, Mishchenko Yu.A. 2015. "Correlation function intercepts for $\tilde{\mu},q$-deformed Bose gas model implying effective accounting for interaction and compositeness of particles", Nucl. Phys. B, 891, 466-481.

Gentile, G. 1940. "Observazioni sopra le statistiche intermedie", IL Nuovo Cimento, 17, 493-497.

Gong, R.S. 1995. "Thermodynamic characteristics of the (*p*,*q*)-deformed ideal Bose gas", Phys. Lett. A 199, 81-85.

Green, H.S. 1953. "A generalized method of field quantization", Phys. Rev., 90, 270-273.

Greenberg, O.W. 1991. "Particles with small violations of Fermi or Bose statistics", Phys. Rev. D, 43, 4111–4120.

Greiner, W., Neise, L., Stöcker, H. 1994. Thermodynamics and Statistical Mechanics. New York: Springer Verlag.

Harouni, M.B., Roknizadeh R., Naderi M.H. 2009. "Q-deformed description of excitons and associated physical results", J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., 42, 095501-1-095501-8.

Huang, K. 1987. Statistical Mechanics. New York: John Wiley and Sons.

Jackson, F.H. 1910. "*q*-Difference equations", American J. Math., 32, 305.

Kac, V., Cheung, P. 2002. Quantum Calculus. Berlin: Springer.

Keesom, W. H., Kurrelmeyer, B. 1939. "The atomic heat of Iron from 1.1 to 20.4 K", Physica, 6, 633-647.

Khare, A. 2005. Fractional Statistics and Quantum Theory (2. Basım), Singapore: World Scientific.

Kittel, C. 1976. Introduction to Solid State Physics. New York: John Wiley and Sons.

Kuentzler, R. 1984. "Effect of plastic deformation of V, Nb And Ta on the superconducting transition temperature and the specific heat coefficients", Phys. Lett., 104A, 221-224.

Lavagno, A., Narayana Swamy P. 2000. "Thermostatistics of a *q*-deformed boson gas", Phys. Rev. E, 61, 1218-1226.

Lavagno, A., Narayana Swamy P. 2002. "Generalized thermodynamics of *q*-deformed bosons and fermions", Phys. Rev. E, 65, 036101-1-036101-5.

Lavagno, A., Narayana Swamy P. 2010. "Thermostatistics of deformed bosons and fermions", Found. Phys., 40, 814-828.

Lavagno, A., Narayana Swamy P. 2009. "Deformed quantum statistics in two dimensions", Int. J. Mod. Phys. B, 23, 235-250.

Lerda, A. 1992. Anyons. Berlin: Springer-Verlag.

Lee, C.R., Yu J.P. 1990. "On *q*-analogues of the statistical distribution", Phys. Lett. A, 150, 63-66.

Macfarlane, A.J. 1989. "On *q*-analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group $SU(2)_q$", J. Phys. A: Math. Gen., 22, 4581-4588.

Marinho, A.A., Brito F.A., Chesman C. 2012. "Thermal properties of a solid through *q*-deformed algebra", Physica A, 391, 3424-3434.

Marinho, A.A., Brito F.A., Chesman C. 2014a. "Fibonacci oscillators in the Landau diamagnetism problem", Physica A, 411, 74-79.

Marinho, A.A., Brito F.A., Chesman C. 2014b. "Application of Fibonacci oscillators in the Debye model", J. Phys.:Conf. Ser., 568, 012009-1-012009-5.

Marinho, A.A., Brito F.A., Chesman C. 2016. "Thermal and electrical properties of a solid through Fibonacci oscillators", Physica A, 443, 324-332.

Marklund, K., Hoel, L., Spahr, K., Lindqvist, T. 1971. "Electronic and Magnon specific heat of Iron-based Tungsten Alloys", J. Low Temp. Phys., 5, 227-236.

Narayana Swamy, P. 2006a. "Interpolating statistics and *q*-deformed oscillator algebras", Int. J. Mod. Phys. B, 20, 697-713.

Narayana Swamy, P. 2006b. "*q*-Deformed fermions: Algebra, Fock space and thermodynamics", Int. J. Mod. Phys. B, 20, 2537-2550.

Narayana Swamy, P. 2006c, "*q*-Deformed fermions", Eur. Phys. J. B, 50, 291-294.

Odaka, K., Kishi T., Kamefuchi S. 1991. "On quantization of simple harmonic oscillators", J. Phys. A: Math. Gen., 24, L591-L596.

Parthasarathy, R., Viswanathan K.S. 1991. "A *q*-analogue of the supersymmetric oscillator and its *q*-superalgebra", J. Phys. A: Math. Gen., 24, 613-617.

Pathria, R.K., Beale, P.D. 2011. Statistical Mechanics (3. Basım), New York: Betterworth-Heinemann.

Rovenchak, A. 2014. "Two-parametric fractional statistics models for anyons", Eur. Phys. J. B, 87, 175-181.

Scarfone, A.M., Narayana Swamy P. 2009. "An interacting ensemble of particles in the context of quantum algebra", J. Stat. Mech.: Theor. Exp., P02055.

Song, H., Ding, S., An, I. 1993. "Statistical mechanical properties of the *q*-oscillator system", J. Phys. A: Math. Gen., 26, 5197-5205.

Strominger, A. 1993. "Black hole statistics", Phys. Rev. Lett., 71, 3397-3400.

Sviratcheva K.D., Bahri C., Georgieva A.I., Draayer J.P. 2004. "Physical significance of *q* deformation and many-body interactions in nuclei, Phys. Rev. Lett., 93, 152501-1-152501-4.

Su, G., Ge M.L. 1993. "Thermodynamic characteristics of the q-deformed ideal Bose gas", Phys. Lett. A, 173, 17-20.

Tagliati, S., Krasnov, V. M., Rydh, A. 2012. "Differential membrane-based nanocalorimeter for high-resolution measurements of low-temperature specific heat", Review of Scientific Instruments", 83, 055107-1-055107-11.

Timoteo, V. S., Lima C.L. 2006. "Effective interactions from *q*-deformed inspired transformations", Phys. Lett. B, 635, 168-171.

Tritt, M.T. 2004. Physics of Solids and Liquids, Thermal Conductivity, Theory, Properties, and Applications. New York : Kluwer Academic.

Tristant, D., Brito, F.A. 2014. Some electronic properties of metals through *q*-deformed algebras, Physica A, 407, 276-286.

Tuszynski, J.A., Rubin, J.L., Meyer, J., Kibler, M. 1993. "Statistical mechanics of a *q*-deformed boson gas, Phys. Lett. A, 175, 173-177.

Ubriaco, M.R. 1997. "Anyonic behavior of quantum group gases", Phys. Rev. E, 55, 291-296.

Ubriaco, M.R. 1998. "λ-transition in low dimensional systems with $SU_q(2)$ symmetry", Phys. Lett. A, 241, 1-6.

Van Der Hoeven, Jr., B.J.C., Keesom, P.H. 1964. "Specific heat of Niobium between 0.4 and 4.2 K", Phys. Rev., 134, A1320-A1321.

Van Der Hoeven, Jr., B.J.C. and Keesom, P.H. 1965. "Specific heat of Lead and Lead alloys between 0.4 and 4.2 K", Phys. Rev., 137, A103-A107.

Viswanathan, K.S., Parthasarathy, R., Jagannathan, R. 1992. "Generalized *q*-fermion oscillators and *q*-coherent states, J. Phys. A: Math. Gen., 25, L335-L339.

Wilczek, F. 1990. Fractional statistics and anyon superconductivity. Singapore: World Scientific.

Zeng, Q.J., Cheng Z., Yuan J.H. 2011. "Thermostatistical properties of a *q*-deformed bosonic exciton gas", Eur. Phys. J. B, 81, 275-281.

EKLER

EK-1. Algin, A., Irk D., Topcu G. 2015. "Anyonic behavior of an intermediate-statistics fermion gas model", Physical Review E, 91, 062131-1-062131-12.

EK-2. Topçu, G. 2015. "Özel bir *q*-deforme fermiyonik kuantum gaz modelinin matematiksel ve termo-istatistiksel özellikleri", Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

EK-3. Algin, A., Senay M. 2016a. "Fermionic *q*-deformation and its conection to thermal effective mass of a quasiparticle", Physica A, 447, 232-246.

EK-4. Algin, A., Arik M., Senay M., Topcu G. 2017. "Thermostatistics of bosonic and fermionic Fibonacci oscillators", International Journal of Modern Physics B, 31, 1650247-1-1650247-20.

EK-5. Chung, W.S., Algin A. 2014. "*q*-Deformed Tamm-Dancoff oscillators: Coherent state and thermostatistics", International Journal of Modern Physics B, 28, 1450130-1-1450130-11.

EK-6. Chung, W.S., Algin A. 2015. "*q*-Deformed Tamm-Dancoff oscillators: Representation, fermionic extension and physical application", International Journal of Modern Physics B, 29, 1550177-1-1550177-21.

EK-7. Algin, A., Arikan A.S., Dil E. 2014. "High temperature thermostatistics of fermionic Fibonacci oscillators with intermediate statistics", Physica A, 416, 499-517.

EK-8. Dil, E. 2014. "Fermiyonik Fibonacci osilatörleri gazı modelinin yüksek sıcaklıklarda istatistik mekaniksel özelliklerinin incelenmesi", Doktora Tezi, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.

EK-9. Şenay, M. 2016. "Düşük sıcaklıklarda *q*-deforme fermiyon gaz modelinin istatistiksel mekanik özelliklerinin incelenmesi ve bir fiziksel uygulaması", Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

EK-10. Algin, A., Senay M. 2016b. "General thermostatistical properties of a q-deformed fermion gas in two dimensions", Journal of Physics: Conference Series, 766, 012008-1-012008-6.

EK-11. Algin, A., Arikan A.S. 2017. "Effective approach for taking into account interactions of quasiparticles from the low-temperature behavior of a deformed fermion-gas model", Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, yayınlanmaya kabul edildi (08 Mart 2017), çalışmanın "proof" u henüz gelmemiştir.

EK-12. Algin, A., Olkun A. 2017. "Bose-Einstein condensation in low dimensional systems with deformed quasibosons", Annals of Physics dergisine yayın incelemesi için 04 Mart 2017'de gönderilmiştir. Halen hakem değerlendirmesindedir.

EK-13. Uluslararası Düzenlenen Çalıştay: 25-27 Mayıs 2016, "International Conference on Quantum Science and Applications (ICQSA-2016)", Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Kongre ve Kültür Merkezi, Eskişehir, Türkiye.
İnternet adresi: http://icqsa2016.ogu.edu.tr

EK-14. Dergi özel bölüm/cilt'inde konuk editörler: Algin, A., Arik M., Gavrilik A.M. 26 Ekim 2016. Cilt adı: International Conference on Quantum Science and Applications (ICQSA-2016), Dergi adı: Journal of Physics: Conference Series (JPCS), Cilt no: 766, Sayfa aralığı: 011001-012036. Londra: IOP Yayınevi.
İnternet adresi: http://iopscience.iop.org/issue/1742-6596/766/1

EK-15. Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fahri Ünvan, Üstün Hizmet ve Takdir, Bilimsel Çalışma ve Faaliyetleri Ödüllendirme Programı: Fen bilimleri alanında dış kaynaklı proje dalında üçüncülük ödülü, 2015, Eskişehir.

EK-16. Algin, A., Arikan A.S., Dil E. 2014. "İki-parametre ile deforme Fermi gazı modelinin yüksek sıcaklıklardaki termo-istatistiksel özellikleri (Sözlü Bildiri)", 21. İstatistiksel Fizik Günleri (İFG-21), 19-21 Haziran, Erciyes Üniversitesi, Kayseri, Türkiye.

EK-17. Algin, A. 2015. "Deformed gas of Tamm-Dancoff type boson oscillators: Algebra and thermodynamics (Sözlü Bildiri)", 23rd International Conference on Integrable Systems and Quantum Symmetries (ISQS-23), 22-28 Haziran, Czech Technical University, Prak, Çek Cumhuriyeti.

EK-18. Algin, A., Irk D., Topcu G. 2016. "Some new properties concerning the fermionic *q*-calculus through a deformed fermion gas model (Sözlü Bildiri)", International Conference on Quantum Science and Applications (ICQSA-2016), 25-27 Mayıs, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir, Türkiye.

EK-19. Algin, A., Senay M., 2016c. "Low-temperature thermostatistical properties of the VPJC-type deformed fermion gas model (Sözlü Bildiri)", International Conference on Quantum Science and Applications (ICQSA-2016), 25-27 Mayıs, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir, Türkiye.

EK-20. Algin, A., Senay M., 2016d. "Some thermostatistical properties of a deformed fermion gas (Sözlü bildiri)", 3rd International Conference on Computational and Experimental Science and Engineering (ICCESEN-2016), 19-24 Ekim, Antalya, Türkiye.

EK-21. Algin, A. 2017. "Deformed gas of bosonic Fibonacci oscillators: Algebra and thermostatistics (Sözlü Bildiri)", 3rd International Conference on Pure and Applied Sciences (ICPAS-2017), 02-06 Şubat, Dubai, Birleşik Arap Emirlikleri.

TÜBİTAK
PROJE ÖZET BİLGİ FORMU

Proje Yürütücüsü:	Prof. Dr. ABDULLAH ALĞIN
Proje No:	113F226
Proje Başlığı:	İki Ve Üç Boyutta Deforme Parçacık Sistemlerinin İstatistik Mekaniksel Özellikleri Ve Fiziksel Uygulamaları
Proje Türü:	1001 - Araştırma
Proje Süresi:	36
Araştırmacılar:	METİN ARIK
Danışmanlar:	
Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi:	ESKİŞEHİR OSMANGAZİ Ü. FEN EDEBİYAT F. FİZİK B.
Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri:	15/02/2014 - 15/02/2017
Onaylanan Bütçe:	223715.0
Harcanan Bütçe:	171096.12
Öz:	Kompozit (ya da kuazi) parçacıkları ve kollektif davranışları içeren kuantum sistemlerinin incelenmesinde kullanılabilecek etkin yaklaşımlardan biri, deforme bozon ve deforme fermiyon kuantum cebirleri ile modellemeler yapmaktır. Bu deforme yapılar; hem standart olmayan kuantum istatistiğinin olası formlarının tanımlanmasında, hem de kompozit parçacık etkileşmelerinin çalışılmasında verimli bir alt yapı sunarlar. Proje kuramsal olup, temel olarak; (3+1) ve (2+1) uzay-zaman boyutlarına sınırlandırılmış deforme bozon ve fermiyon parçacık sistemlerinin istatistiksel mekanik özelliklerini ortaya koymak amaçlanmıştır. Bu yolla, hem deforme kuantum istatistiğine ait yeni yaklaşım ve formülasyonlar geliştirilmiş hem de parçacık alanlarının deformasyonuyla bulunan sonuçların uygulamadaki etkilerini gözlemlemek için katıların ısıl özellikleri, Bose-Einstein yoğunlaşması ve kuantum optiğine bazı fiziksel uygulamalar yapılmıştır. Üç ve iki boyutlu uzaylarda, düşük ve yüksek sıcaklıklar limitlerinde deforme bozon ve fermiyon gaz sistemlerinin istatistiksel mekanik özellikleri kapsamlıca incelenmiştir. Buradan; deforme bozon ve fermiyon gaz modelleri ile i) Bose-Einstein ve Fermi-Dirac istatistikleri arasında sürekli bir interpolasyon işlevi gören interpolasyon istatistiği?nin tanımlanabileceğine dair yeni bulguları, ii) iki boyutta kesirli istatistikli anyon sistemlerinin özellikleri ile bazı yeni ilişkileri, iii) kuantum deformasyonlarının incelenen sistemin hem parçacıkları arasındaki etkin etkileşmelerle hem de parçacıkların iç (kompozit) yapıları ile ilgili bazı fiziksel etkilerle ilişkileri, iv) düşük boyutlarda bozonik Fibonacci salınımcıları gazının Bose-Einstein yoğunlaşmasını sergileyebileceği, vi) fermiyonik kuantum deformasyonun kuazi-parçacıkların ısıl etkin kütleleriyle ilişkilendirilebileceği şeklinde, literatüre yeni katkılar bağlamında farklı sonuçlar elde edilmiştir. Bu proje çalışmalarıyla, bozon ve fermiyon sistemlerinin deforme kuantum istatistiksel özellikleriyle ilgili olarak ortaya konan yeni model, yaklaşım ve formülasyonların, kısa zaman içinde olmasa da uzun zaman içerisinde hem bu tür fiziksel sistemlerle çalışan bilim insanlarına ışık tutması hem de nanoyapılar, topolojik materyeller, kuantum hesaplama gibi pek çok teknolojik uygulama potansiyeli yüksek araştırma alanlarında az veya çok katkısı olacağı umulmaktadır.
Anahtar Kelimeler:	kuantum istatistigi, kuantum cebirleri, deforme bozonlar ve fermiyonlar, istatistiksel termodinamik
Fikri Ürün Bildirim Formu Sunuldu Mu?:	Hayır

TÜBİTAK

Projeden Yapılan Yayınlar:	1- Fermiyonik q-deformation and its connection to thermal effective mass of a quasiparticle (Makale - Diğer Hakemli Makale), 2- q-Deformed Tamm-Dancoff oscillators:Representation, fermionic extension and physical application (Makale - Diğer Hakemli Makale), 3- High temperature thermostatistics of fermionic Fibonacci oscillators with intermediate statistics (Makale - Diğer Hakemli Makale), 4- Anyonic behavior of an intermediate-statistics fermion gas model (Makale - Diğer Hakemli Makale), 5- q-deformed Tamm-Dancoff oscillators:Coherent state and thermostatistics (Makale - Diğer Hakemli Makale), 6- High temperature thermostatistics of fermionic Fibonacci oscillators with intermediate statistics (Makale - Diğer Hakemli Makale), 7- İki-parametre ile deforme Fermi gazı modelinin yüksek sıcaklıklardaki termo-istatistiksel özellikleri (Bildiri - Ulusal Bildiri - Sözlü Sunum), 8- İki-parametre ile deforme Fermi gazı modelinin yüksek sıcaklıklardaki termo-istatistiksel özellikleri (Bildiri - Ulusal Bildiri - Sözlü Sunum), 9- Deformed Gas of Tamm-Dancoff Type Boson Oscillators: Algebra and Thermodynamics (Bildiri - Uluslararası Bildiri - Sözlü Sunum), 10- Fermiyonik Fibonacci Osilatörleri Gazı Modelinin Yüksek Sıcaklıklarda İstatistik Mekaniksel Özelliklerinin İncelenmesi (Tez (Araştırmacı Yetiştirilmesi) - Doktora Tezi), 11- Özel bir q-deforme fermiyonik kuantum gaz modelinin matematiksel ve termo-istatistiksel özellikleri (Tez (Araştırmacı Yetiştirilmesi) - Yüksek Lisans Tezi), 12- General thermostatistical properties of a q-deformed fermion gas in two dimensions (Makale - Diğer Hakemli Makale), 13- Thermostatistics of bosonic and fermionic Fibonacci oscillators (Makale - Diğer Hakemli Makale), 14- Deformed gas of bosonic Fibonacci oscillators:Algebra and Thermostatistics (Bildiri - Uluslararası Bildiri - Sözlü Sunum), 15- Some thermostatistical properties of a deformed fermion gas (Bildiri - Uluslararası Bildiri - Sözlü Sunum), 16- Some new properties concerning the fermionic q-calculus through a deformed fermion gas model (Bildiri - Uluslararası Bildiri - Sözlü Sunum), 17- Low-temperature thermostatistical properties of the VPJC-type deformed fermion gas model (Bildiri - Uluslararası Bildiri - Sözlü Sunum), 18- Journal of Physics:Conference Series (JPCS) (Kitap - Kitapta Bölüm), 19- Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fahri Unvan, Üstün Hizmet ve Takdir, Bilimsel Çalışma ve Faaliyet Ödülleri (Ödül - Ulusal Ödül - Üniversite, Kurum veya Kuruluşların Verdiği Ödüller), 20- International Conference on Quantum Science and Applications (ICQSA-2016) (Yayılım - Uluslararası - Düzenlenen Çalıştay), 21- Düşük Sıcaklıklarda q-Deforme Fermiyon Gaz Modelinin İstatistiksel Mekanik Özelliklerinin İncelenmesi ve Bir Fiziksel Uygulaması (Tez (Araştırmacı Yetiştirilmesi) - Doktora Tezi),

TÜBİTAK