T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ASTRONOMİ VE UZAY BİLİMLERİ ANABİLİM DALI

TAYFSAL AYIRMA YÖNTEMLERİNDE MCMC OPTİMİZASYONUNUN KULLANIMI

Hazırlayan
Emre BARBAROS

Danışman
Doç.Dr. Ahmet DERVİŞOĞLU

Yüksek Lisans Tezi

Temmuz 2022
KAYSERİ

T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ASTRONOMİ VE UZAY BİLİMLERİ ANABİLİM DALI

TAYFSAL AYIRMA YÖNTEMLERİNDE MCMC OPTİMİZASYONUNUN KULLANIMI

(Yüksek Lisans Tezi)

Hazırlayan
Emre BARBAROS

Danışman
Doç.Dr. Ahmet DERVİŞOĞLU

Temmuz 2022
KAYSERİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Emre BARBAROS

“Tayfsal Ayırma yöntemlerinde MCMC Optimizasyonunun Kullanımı” adlı Yüksek Lisans tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi’ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Hazırlayan	**Danışman**
Emre BARBAROS	Doç.Dr. Ahmet DERVİŞOĞLU

Astronomi ve Uzay Bilimleri ABD Başkanı
Doç.Dr. Hasan AK

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında başta danışman hocam Doç. Dr. Ahmet DERVİŞOĞLU (Atatürk Üniversitesi Astronomi ve Uzay Bilimleri Anabilim Dalı), Dr. Cenk KAYHAN ve Vildan DİZDAROĞLU'na yardım ve özverilerinden dolayı teşekkür ederim.

Emre BARBAROS

Temmuz 2022, KAYSERİ

TAYFSAL AYIRMA YÖNTEMLERİNDE MCMC OPTİMİZASYONUNUN KULLANIMI

Emre BARBAROS

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lİsans Tezi, Temmuz 2022
Danışman : Doç.Dr. Ahmet DERVİŞOĞLU

ÖZET

Çift yıldızlar, gelişen teknoloji ile birlikte daha detaylı bir şekilde incelenebilmekte ve analizleri gerçekleştirilebilmektedir. Tayfsal çift yıldızlar ise günümüz teleskopları ile ayrı ayrı gözlenebilmesi mümkün olmayan sistemlerdir. Bu sebeple bu sistemleri oluşturan yıldızların analizlerinin gerçekleştirilebilmesi için, gözlem sonucu elde edilen ve sistemi oluşturan bileşen yıldızların katkılarından oluşan kompozit tayftan gerekli matematiksel yollar kullanılarak sistemin bileşen yıldızlarının tayfları ayrı ayrı elde edilebilir. Bu yöntemlerden başlıcası Tayfsal Ayırma yöntemidir. Tayfsal ayırma yöntemi bu işlem için bazı yörünge parametrelerine ihtiyaç duyar. Bu sebeple bu parametrelerin hassasiyeti sonucu büyük oranda etkiler. Bu tez çalışması kapsamında geliştirilen FDMC kodu, Python programlama dili aracılığı ile FDBinary tayfsal ayırma programına entegre edilmiş, hem tayfsal ayırma hem de parametre optimizasyonu gerçekleştirebilen bir koddur. Literatürde bulunan tayfsal ayırma programlarına nazaran FDMC Markov Chain Monte Carlo (MCMC) optimizasyonuna dayanır. FDMC kodu ile hedeflenen, diğer optimizasyonların gerçekleştiremediği hata analizini gerçekleştirmek ve en standart sonuçları elde etmektir. Bu çalışmada ayrıca literatürde tayfsal ayırması gerçekleştirilmiş tayfsal çift yıldız sistemlerinin FDMC kodu ile analizleri gerçekleştirilmiş ve sonuçlar paylaşılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Tayfsal Ayırma, MCMC, Tayfsal Çift Yıldızlar.

SUSING MCMC OPTIMIZATION IN SPECTRAL DISENTANGLING METHODS

Emre BARBAROS

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
Master Thesis, July 2022
Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Ahmet DERVİŞOĞLU

ABSTRACT

Binary systems can be examined and analyzed in more detail with the developing technology. Spectral binary stars are systems that cannot be observed separately with today's telescopes. For this reason, in order to perform the analysis of the stars forming these systems, the spectra of the component stars of the system can be obtained separately from the composite spectrum obtained as a result of the observation and composed of the contributions of the component stars that make up the system, by using the necessary mathematical ways. The most important of these methods is the Spectra Disentangling method. The spectral disentangling method needs some orbital parameters for this process. For this reason, the sensitivity of these parameters greatly affects the result. The FDMC code developed within the scope of this thesis is a code that is integrated into the FDBinary spectral separation program via the Python programming language and can perform both spectral separation and parameter optimization. Compared to the spectral separation programs in the literature, FDMC is based on Markov Chain Monte Carlo (MCMC) optimization. The aim of the FDMC code is to perform the error analysis that other optimizations cannot achieve and to obtain the most standard results. In this study, spectroscopic binary star systems with spectroscopic disentangling results were also analyzed with the FDMC code and the results were shared.

Keywords: Spectral Disentangling, MCMC, Spectroscopic Binaries

İÇİNDEKİLER

TAYFSAL AYIRMA YÖNTEMLERİNDE MCMC OPTİMİZASYONUNUN KULLANIMI

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK SAYFASI ii

YÖNERGEYE UYGUNLUK SAYFASI iii

KABUL VE ONAY iv

TEŞEKKÜR v

ÖZET vi

ABSTRACT vii

İÇİNDEKİLER viii

KISALTMALAR xi

TABLOLAR LİSTESİ xii

ŞEKİLLER LİSTESİ xiii

GİRİŞ 1

1. BÖLÜM

GENEL BİLGİLER ve LİTERATÜR ÇALIŞMASI

1.1. Çift Yıldızlar 3

1.1.1. Gözlem Yöntemine Göre Sınıflandırma 4

1.1.1.1. Optik Çift Sistemler 4

1.1.1.2. Astrometrik Çift Sistemler 5

1.1.1.3. Görsel Çift Sistemler 5

1.1.1.4. Tayfsal Çift Sistemler 6

1.1.1.5. Örten Çift Sistemler 8

1.1.2. Roche Modeline Göre Sınıflandırma 9

1.1.2.1. Ayrık Çift Yıldızlar 11

1.1.2.2. Yarı-Ayrık Çift Yıldızlar 11

1.1.2.3. Değen Çift Yıldızlar 12

1.1.3. Işık Eğrisine Göre Sınıflandırma **12**
1.1.3.1. Algol Türü Sistemler **12**
1.1.3.2. Beta Lyrae Türü Sistemler **13**
1.1.3.3. W UMa Türü Sistemler **14**
1.2. Tayfsal Ayırma **15**
1.2.1. Dalga Boyu ve Fourier Uzayında Tayfsal Ayırma **20**
1.2.2. Kompozit Tayfın Çözülmesi **23**
1.3. Bayes İstatistiği ve MCMC Yöntemi **24**
1.3.1. Bayes İstatistiği **25**
1.3.2. Markov Chain Monte Carlo (MCMC) Yöntemi **27**

2. BÖLÜM

YÖNTEM VE MATERYAL

2.1. FDBinary **31**
2.2. Spectangular **33**
2.3. FDMC Kodunun İşleyişi **35**
2.4. Yıldızların Belirlenmesi **40**
2.4.1. V453 Cygni **40**
2.4.2. Capella A **41**
2.4.3. HD 5550 . . . . . **42**

3. BÖLÜM

BULGULAR

3.1. Uygulamalar **44**
3.1.1. V453 Cyg **45**
3.1.2. Capella A **48**
3.1.3. HD 5550 . . . . . **52**

4. BÖLÜM

TARTIŞMA ve SONUÇ

4.1. Tartışma **57**

4.2. Sonuç **58**

KAYNAKÇA. **59**

ÖZGEÇMİŞ **63**

KISALTMALAR

SVD	:	Tekil Değer Ayrıştırması
chi^2	:	En küçük kareler uyumu
DFT	:	Ayrık Fourier Dönüşümü
CPU	:	İşlemci
MCMC	:	Markov Chain Monte Carlo
MC	:	Markov Chain
MH	:	Metropolis Hasting
pdf	:	Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 2.1. V453 Cygni tayfsal çift yıldız sisteminin İlicic 2003 [1] çalışmasında elde edilen yörünge parametreleri 41

Tablo 2.2. Capella tayfsal çift yıldız sisteminin Torres ve ark. [2] çalışmasında elde edilen yörünge parametreleri 42

Tablo 2.3. HD 5550 tayfsal çift yıldız sisteminin Alecian ve ark. [3] çalışmasında elde edilen yörünge parametreleri 43

Tablo 3.1. İlicic 2003 [1] çalışması, Spectangular tayfsal ayırma programı ve FDMC kodu ile V453 Cyg sistemi için elde edilen yörünge parametreleri 48

Tablo 3.2. FDBinary tayfsal ayırma programı, Spectangular tayfsal ayırma programı ve FDMC kodu ile Capella A sistemi için elde edilen yörünge parametreleri 52

Tablo 3.3. FDBinary tayfsal ayırma programı, Spectangular tayfsal ayırma programı ve FDMC kodu ile HD 5550 sistemi için elde edilen yörünge parametreleri 56

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1. Bir çift sistemin genel yapısı. M_1 baş ve M_2 yoldaş yıldız olmak üzere, r_A ve r_B baş ve yoldaş yıldızın yarıçap vektörüdür. e yörüngelerin eksantrisitesini (basıklık) temsil eder. V_1 ve V_2 ise baş ve yoldaş yıldızların radyal hızlarıdır. Bileşenler ortak kütle merkezi etrafında yörünge hareketi yapmaktadırlar 4

Şekil 1.2. Astrometrik bir çift sistem olan Sirius'un 80 yıllık doğrusal hareket diyagramı [4] 5

Şekil 1.3. Rigel kent(α Cen) sistemi [5] 6

Şekil 1.4. Çift çizgili(SB2) bir sistemin bileşenlerin yörünge konumuna göre Doppler kayması sebebi ile tayf çizgilerindeki değişim [6] 7

Şekil 1.5. Tayfsal bir çift olan Mizar A sistemi 8

Şekil 1.6. Algol paradoksu [7] 8

Şekil 1.7. Tutulan bir çift olan V453 Cygni sisteminin ölçülen ışık eğrisi [8] . . 9

Şekil 1.8. Bir çift yıldız sisteminin Roche geometrisi 10

Şekil 1.9. Ayrık bir çift yıldız sistemi ve temsili ışık eğrisi 11

Şekil 1.10. Yarı-Ayrık bir çift yıldız sistemi ve temsili ışık eğrisi 11

Şekil 1.11. Değen bir çift yıldız sistemi ve temsili ışık eğrisi 12

Şekil 1.12. Algol türü bir sistem olan β Perseus'un ölçülen ışık eğrisi [9] 13

Şekil 1.13. β Lyrae sisteminin V ve B bandında ölçülen ışık eğrisi [9] 13

Şekil 1.14. W UMa sisteminin B ve Y bandında ölçülen ışık eğrisi [9] 14

Şekil 1.15. Omi Per sistemi için hazırlanmış veri seti ve tayfsal ayırma sonucu . . 16

Şekil 1.16. En küçük kareler uyumunun grafiksel gösterimi Elde edilen doğru, dağılmış noktaların arasındaki en kısa mesafedir. 19

Şekil 1.17. Denklem 1.10'nun yoğunluk grafiği.$\mathbf{A}_{jk}$ matrisinin pikselleri, $\mathbf{x}_k$ ve $\mathbf{y}_j$ vektörleri birbirinde ayrılmıştır. Matris içerisindeki Gri ton, sıfır(beyaz) ve birim (siyah) vektörler dışında tersine vektördür [1]. . 21

Şekil 1.18. Metropolis Hasting'in örnek bir şeması 29

Şekil 2.1. FDBinary programı için örnek veri seti. .obs uzantılı gözlem verisi dosyası sol kısmında logaritmik dalga boyu bulundururken, onun yanına sütünlar şeklinde dizilmiş gözlemlerin akı değerlerinden oluşur. 31

Şekil 2.2. FDBinary programı için örnek parametre dosyası. 32

Şekil 2.3. .mod dosyasının içeriği ve sonuçların çizdirilmesi. Sol görselde, dalga boyu ve o dalga boyuna denk gelen ayrılmış tayfların akıları bulunmaktadır. Sağ görsel ise tayfsal ayırma sonucunun çizilmiş halidir. 33

Şekil 2.4. Spectangular tayfsal ayırma kodunun giriş arayüzü. 33

Şekil 2.5. Spectangular yörünge elemanları arayüzü 35

Şekil 2.6. FDMC kodunun başlangıç ayarları 36

Şekil 2.7. FDMC kodunun yıldız sistemi ve optimizasyon parametreleri ayarları 37

Şekil 3.1. Örnek bir FDMC optimizasyon zincir dağılımı 44

Şekil 3.2. FDBinary tayfsal ayırma programı ile V453 Cygni yıldızı için gerçekleştirilen tayfsal ayırma sonuçları. Görselde alt kısımda bulunan tayf baş bileşene, üst kısımda bulunan tayf ise yoldaş bileşene aittir. Bileşen akı katkıları sabit ve eşit kabul edilmiştir. . . . 45

Şekil 3.3. FDMC kodu ile V453 Cygni yıldızı için gerçekleştirilen tayfsal ayırma sonuçları. Görselde alt kısımda bulunan tayf baş bileşene, üst kısımda bulunan tayf ise yoldaş bileşene aittir. Bileşen akı katkıları sabit ve eşit kabul edilmiştir. 45

Şekil 3.4. Spectangular ile V453 Cygni yıldızı için gerçekleştirilen tayfsal ayırma sonuçları. Görselde alt kısımda bulunan tayf baş bileşene, üst kısımda bulunan tayf ise yoldaş bileşene aittir 46

Şekil 3.5. Tayfsal ayırma sonunda kalıntı sonuçları En üstte FDBinary tayfsal ayırma programı ile ortada FDMC kodu ile ve en altta Spectangular ile gerçekleştirilen tayfsal ayırma sonuçlarının kalıntı sonuçları bulunmaktadır 46

Şekil 3.6. FDMC kodu ile gerçekleştirilen optimizasyon sonucu elde edilen veri seti dağılımları 47

Şekil 3.7. FDBinary programı ile Capella yıldızı için gerçekleştirilen tayfsal ayırma sonuçları. Görselde alt kısımda bulunan tayf baş bileşene, üst kısımda bulunan tayf ise yoldaş bileşene aittir. Bileşen akı katkıları sabit ve eşit kabul edilmiştir 48

Şekil 3.8. FDMC kodu ile Capella yıldızı için gerçekleştirilen tayfsal ayırma sonuçları. Görselde alt kısımda bulunan tayf baş bileşene, üst kısımda bulunan tayf ise yoldaş bileşene aittir. Bileşen akı katkıları sabit ve eşit kabul edilmiştir 49

Şekil 3.9. Spectangular ile Capella yıldızı için gerçekleştirilen tayfsal ayırma sonuçları. Görselde alt kısımda bulunan tayf baş bileşene, üst kısımda bulunan tayf ise yoldaş bileşene aittir. Bileşen akı katkıları sabit ve eşit kabul edilmiştir 49

Şekil 3.10. Tayfsal ayırma sonunda kalıntı sonuçları En üstte FDBinary tayfsal ayırma programı ile ortada FDMC kodu ile ve en altta Spectangular ile gerçekleştirilen tayfsal ayırma sonuçlarının kalıntı sonuçları bulunmaktadır 50

Şekil 3.11. FDMC kodu ile gerçekleştirilen optimizasyon sonucu elde edilen veri seti dağılımları 51

Şekil 3.12. FDBinary tayfsal ayırma programı kullanılarak HD 5550 için gerçekleştirilen tayfsal ayırma sonuçları Görselde alt kısımda bulunan tayf baş bileşene, üst kısımda bulunan tayf ise yoldaş bileşene aittir. Bileşen akı katkıları sabit ve eşit kabul edilmiştir . . . 52

Şekil 3.13. FDMC kodu kullanılarak HD 5550 için gerçekleştirilen tayfsal ayırma sonuçları Görselde alt kısımda bulunan tayf baş bileşene, üst kısımda bulunan tayf ise yoldaş bileşene aittir. Bileşen akı katkıları sabit ve eşit kabul edilmiştir 53

Şekil 3.14. Spectangular kullanılarak HD 5550 için gerçekleştirilen tayfsal ayırma sonuçları Görselde alt kısımda bulunan tayf baş bileşene, üst kısımda bulunan tayf ise yoldaş bileşene aittir. Bileşen akı katkıları sabit ve eşit kabul edilmiştir 53

Şekil 3.15. Tayfsal ayırma sonunda kalıntı sonuçları En üstte FDBinary tayfsal ayırma programı ile ortada FDMC kodu ile ve en altta Spectangular ile gerçekleştirilen tayfsal ayırma sonuçlarının kalıntı sonuçları bulunmaktadır 54

Şekil 3.16. FDMC kodu ile gerçekleştirilen optimizasyon sonucu elde edilen veri seti dağılımları 55

GİRİŞ

Astronomi bilinen en eski bilim dallarından birisidir. İnsanlığın her çağında yıldızlar astronominin temel çalışma konularından birisi olmuş, her zaman gökyüzüne bakılmış ve yıldızların hareketlerinde anlamlar aranmıştır. Kimi gerçekleşen gök olayları kayıt altına alınmış, bu olayların yorumlanmasıyla astronomiye katkılar sağlanmıştır. Galileo'nun teleskobu gözlemsel astronomide kullanmasından bu yana bu katkı ivmelenerek devam etmiştir.

Astronominin gelişimi, gerçekleşen araştırmalar ve gözlemler yıldızların doğasını daha iyi anlamamızı sağladı. Artık sayısız yıldız hakkında bilgi sahibiyiz ve yerden bakıldığında tek gibi görünen yıldızların aslında birden çok yıldız içeren bir yıldız sistemi olabileceğini biliyoruz. Bu durum farklı araştırma konularını da beraberinde getirmektedir. Kimi çift yıldız sistemlerinde bileşen yıldızlar birbirlerine çok yakındırlar. Bu tarz çift yıldız sistemleri tayfsal çift yıldız sistemleri olarak adlandırılır. Günümüzde kullandığımız gelişmiş teleskoplar ile tayfsal çift yıldız sistemlerini oluşturan bileşen yıldızları ayrı ayrı gözlemek pek mümkün değildir. Bu sebeple, böyle bir sistemin bileşen yıldızlarının analizinin gerçekleştirilebilmesi için farklı yöntemlere ihtiyaç duyulur. Tayfsal ayırma yöntemi, teleskoplar ile gerçekleştirilen gözlemler sonucunda elde edilen tayfları kullanarak, gözlenen tayfsal çift yıldız sisteminin bileşen yıldızlarının taylarını ayrı ayrı elde etmeyi sağlayan matematiksel bir yöntemdir. Lakin bu yöntemin doğru bir şekilde kullanılabilmesi için gözlemsel olarak elde edebildiğimiz sistemin periodu, eksantristesi, T0 zamanı, omega açısı ve bileşenlerinin hızları gibi parametrelere ihtiyaç duyulur. Bu parametrelerin doğruluğu sonucu büyük oranda etkileyeceğinden ötürü tutarlı sonuçlar elde edebilmek adına bir parametre optimizasyon rutini gereklidir. Bu optimizasyon rutin için kullanılabilecek bir çok yöntem bulunmaktadır. Günümüzde ise bu yöntemlerden en kabul görenlerinden bir tanesi Markov Chain Monte Carlo(MCMC) yöntemidir. Markov Chain Monte-Carlo, Bayes istatistiğini kullanarak sonsal dağılımları tahmin etmeyi ve bu dağılımlar hakkında bilgi edinmeyi amaçlar.

Bu tez Çalışmasının en büyük amacı, tayfsal ayırma yöntemlerinde farklı optimizasyon rutinlerinin kullanabilirliğini denetlemek ve elde edilen sonuçlar ile en uygun olan yöntemi belirleyebilmektedir. Bu sebeple, Python programlama dili aracılığı ile FDBinary tayfsal ayırma koduna MCMC yöntemi bir optimizasyon rutini olarak entegre edilmiştir. Kod Linux işletim sisteminde çalışmaktadır. Ayrıca çalışmada bir başka tayfsal ayırma kodu olan Spectangular'da kullanılmıştır. Spectangular optimizasyon rutini olarak Downhill-Simplex yöntemini benimser. Çalışma sonucunda Spectangular ile gerçekleştirilen tayfsal ayırma sonuçları, FDBinary ile gerçekleştirilen tayfsal ayırma sonuçları ile kıyaslanmıştır.

1. BÖLÜM

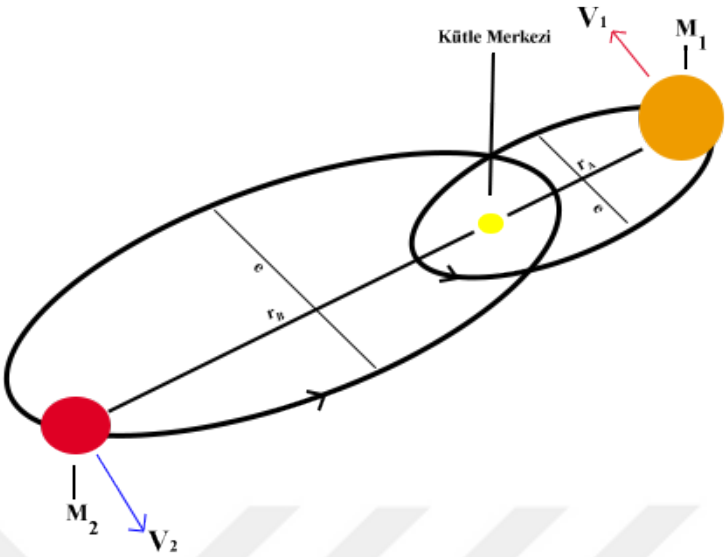
GENEL BİLGİLER ve LİTERATÜR ÇALIŞMASI

1.1. Çift Yıldızlar

Çalışmanın temelini çift yıldızlar oluşturduğundan dolayı öncelikle çift yıldızların ne olduğuna ve türlerine değinilmelidir. Çift yıldız sistemleri, ortak bir kütle merkezi etrafında yörünge hareketi gerçekleştiren, kütleçekimsel kuvvetler ile birbirine bağlı ve iki yıldızdan oluşan sistemlerdir. Çift yıldız kavramı ilk olarak William Herschel tarafından kullanıldı [10] . Çift sistemler yıldız evrimini anlamada çok büyük bir rol oynamaktadırlar. Bir çift sistem en az iki yıldızdan oluşurken, yapılan gözlem ve araştırmalar sonucunda bu sistemlerde üçüncü hatta dördüncü bileşenlerin de bulunabildiği saptanmıştır. Bu bileşenler de çekimsel kuvvetin etkisi ile sisteme bağlıdırlar.

Çift yıldız çalışmaları yıldız kütlesinin belirlenebilmesi açısından önemli bir unsurdur. Kütle yıldızlar için en temel parametre olarak kabul edilir. Bundan dolayı kütlenin belirlenmesi ile bir çok farklı parametre elde edilebilir ve kütlenin hesabı yıldız evrimini anlamakta büyük rol oynar. Çift yıldızların katkısıyla belirlenebilen fiziksel parametreler tek yıldızları anlamak konusunda da yardımcı olur. Şekil 1.1'de iki bileşenli bir çift yıldız sistemin genel yapısı çizilmiştir. Sistem ortak bir kütle merkezi etrafında yörünge hareketi yapmaktadır.

Gelişen teknolojik araçlar sayesinde artık daha hassas veriler elde edilebilmektedir. Bu durum çift yıldız sistemlerinin daha detaylı incelenebilmesine yol açmıştır. Çift yıldızlar, gözlemsel özellikleri ve evrim durumları göz önüne alınarak üç ana başlık altında sınıflandırılır:



Şekil 1.1. Bir çift sistemin genel yapısı.
M_1 baş ve M_2 yoldaş yıldız olmak üzere, r_A ve r_B baş ve yoldaş yıldızın yarıçap vektörüdür. e yörüngelerin eksantrisitesini (basıklık) temsil eder. V_1 ve V_2 ise baş ve yoldaş yıldızların radyal hızlarıdır. Bileşenler ortak kütle merkezi etrafında yörünge hareketi yapmaktadırlar

1.1.1. Gözlem Yöntemine Göre Sınıflandırma

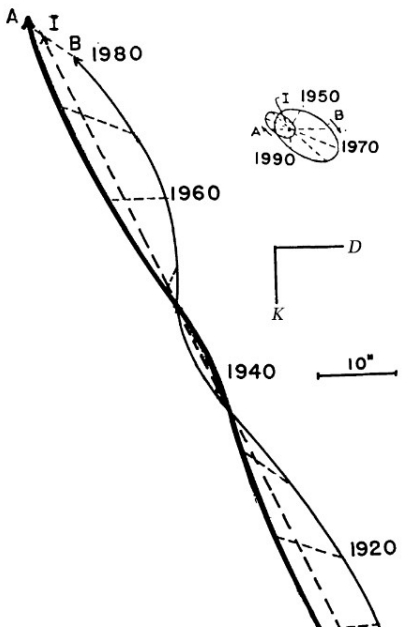
Çift yıldız sistemlerinin gökyüzünde yörünge yapıları, parlaklıkları veya uzaklıkları birbirinden farklı olabilmektedir. Bu sebeple bu sistemler gözlemsel açıdan alt gruplara ayrılmaktadırlar. Çift yıldız sistemlerini temel olarak, optik çift sistemler, astrometrik çift sistemler, görsel çift sistemler, tayfsal çift sistemler ve tutulan çift sistemler olmak üzere beş alt gruptan söz edebiliriz.

1.1.1.1. Optik Çift Sistemler

Optik çift sistemler, gözlemcinin bakış doğrultusundan ötürü aynı doğrultuda bulunan, birbirleri arasında fiziki bir bağ bulundurmayan, ve birbirine yakın görünen sistemlerdir. Bu sistemlerde bulunan bileşen yıldızların öz hareketleri birbirinden farklıdır. Bu da onların fiziksel bir çift sistemin üyeleri olmadığını kanıtlar. Gözlemci bu sistemde bulunan yıldızları göz ile veya bir teleskop yardımı ile ayrı ayrı belirleyebilir.

1.1.1.2. Astrometrik Çift Sistemler

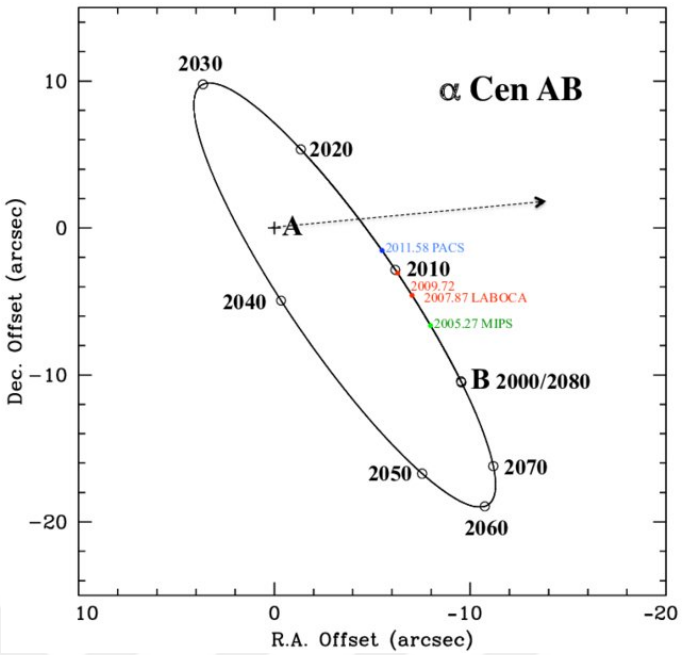
Bazı yıldızların, farklı zamanlarda gerçekleşen gözlemleri sonucunda, uygun hareketlerinde bir bozulma olduğu fark edilir. Bu durumun periyodik bir şekilde gerçekleşmesi durumunda gözlemlenen yıldızın haricinde çok daha sönük bir bileşen yıldızında sistemde mevcut olduğunu anlaşılır. Bu tür sistemlere astrometrik çift sistemler adı verilmektedir. Bu sistemler kapalı bir yörünge hareketine sahiptirler. Astrometrik çift sistemlerin en meşhur olanlarından Sirius'un 80 yıllık bir süreç boyunca gerçekleştirdiği hareketinin diyagramı şekil 1.2'de gösterilmiştir [4] .



Şekil 1.2. Astrometrik bir çift sistem olan Sirius'un 80 yıllık doğrusal hareket diyagramı [4]

1.1.1.3. Görsel Çift Sistemler

Görsel çift sistemler, bir teleskop aracılığı ile sistemde bulunan bileşen yıldızların gözlenebildiği ve çözülebildiği yıldız sistemleridir. Sistemin bileşen yıldızları kütleçekimsel etkiler ile birbirine bağlıdır ama aralarında bir madde aktarımı söz konusu değildir. Sistemin parlak bileşenine genelde A, görece daha sönük olan yıldıza ise B eki eklenerek isimlendirilir. Şekil 1.3'te Güneş'e en yakın yıldız sistemi olan Rigel Kent'in bağıl yörüngesi görülmektedir [5] .

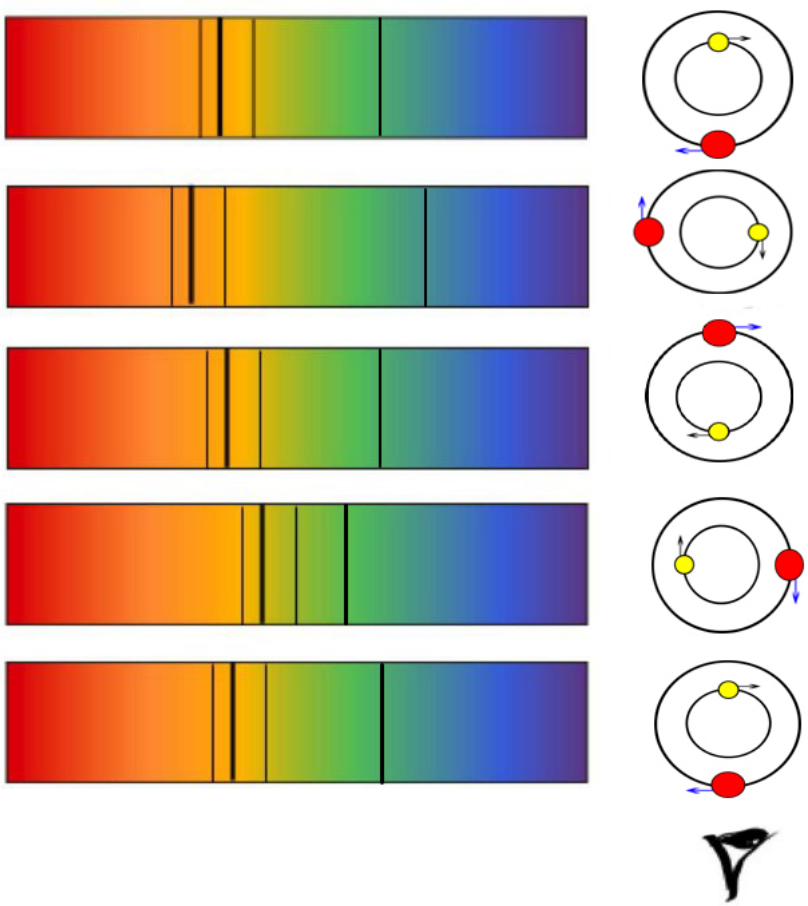


Şekil 1.3. Rigel kent(α Cen) sistemi [5]

1.1.1.4. Tayfsal Çift Sistemler

Tayfsal çift sistemler, görsel çift sistemlerin aksine günümüz teleskopları ile bileşenlerinin ayrı ayrı gözlenmesinin mümkün olamayacağı kadar yakın olduğu sistemlerdirler. Bu sistemler ilk bakışta tek bir yıldızmış gibi görünürler. Ama sistemin tayfsal analizi sonucu tayf çizgilerinde görülen evreye bağlı değişim ve Doppler kaymaları, bu tür sistemlerin bileşen yıldız içerdiğini gösterir. Eğer sistemin yörünge düzlemi gözlemciye dik bir durumda değil ise, sistemin gerçekleştirdiği yörünge hareketi sonucunda bileşenler için radyal hız hesabı yapılabilir.

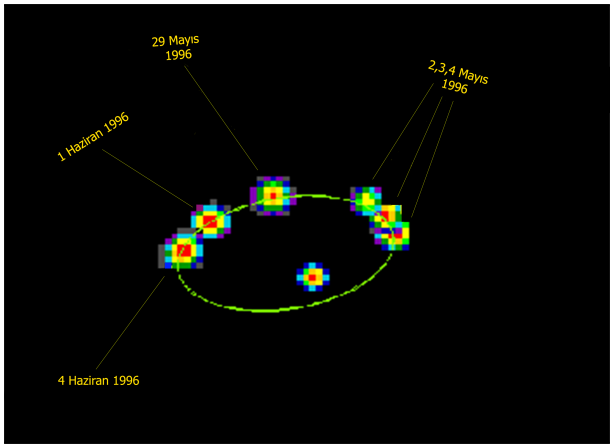
Bu sistemlerin tayfları, sistemde bulunan her bileşen hakkında bilgi içeren kompozit bir tayftır. Bileşen yıldızların yörünge konumu evreye göre bir değişim gösterir. Sistemin baş yıldızı gözlemciye yaklaşırken yoldaş yıldız uzaklaşmakta olacaktır. Böyle bir yörünge hareketi sonucunda baş yıldızın tayfı daha düşük dalga boylarına, yoldaş yıldızın tayfı ise daha yüksek dalga boylarına doğru kayar. Yörünge hareketi devam ettiği sürece zamanla baş bileşenin tayfı daha büyük dalga boylarına kayarken yoldaş yıldızın tayfı daha küçük dalga boylarına doğru kaymaya başlayacaktır. Şekil 1.4'te bir tayfsal çift sistemin yörünge hareketi boyunca tayfındaki değişim görülmektedir [6]. Parlaklığı yüksek olan yıldız, sistemin kompozit tayfında daha baskındır.



Şekil 1.4. Çift çizgili(SB2) bir sistemin bileşenlerin yörünge konumuna göre Doppler kayması sebebi ile tayf çizgilerindeki değişim [6]

Tayfsal çift sistemlerde bileşenlerin birbirine çok yakın olması durumu bileşenler arası madde aktarımına neden olabilir. Bileşenler arası madde aktarımı, sistemde bulunan yıldızların evrimlerini doğrudan etkiler. Bu sistemlerin yörünge dönemleri genel olarak bir kaç saat ile bir kaç ay arasında bir değişim gösterir. Ama yıl mertebesinde yörünge dönemine sahip tayfsal çift yıldız sistemleride vardır. Keşfedilen ilk tayfsal çift sistem 1889 yılında ζ Ursae Majoris veya bilinen adı ile Mizar yıldızıydı [11] . Sistem önceden bir görsel çift sistem olarak bilinmekteydi. Sistemi oluşturan iki bileşen yıldız için gerçekleştirilen tayfsal analizler, iki bileşeninde aslında kendi içlerinde birer çift yıldız sistemleri olduklarını ortaya çıkardı. Bunu gözlemsel olarak belirlemek olanaksızdı. Böylelikle aslında sistemin 4 adet yıldızdan oluştuğu anlaşıldı. Şekil 1.5[1]'te gelişen görüntüleme teknikleri sayesinde Mizar A sisteminin ve bileşen yıldızının elde edilebilen görüntüsüdür.

[1] http://www.astronet.ru/db/xware/msg/1191085

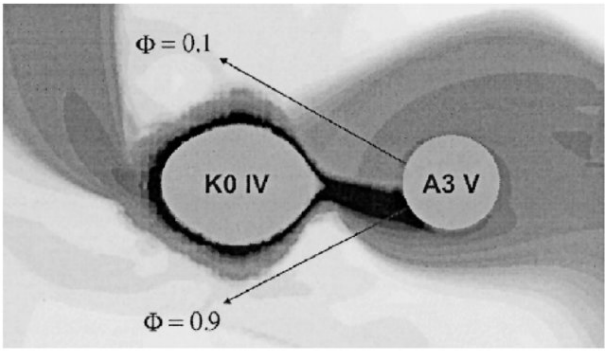


Şekil 1.5. Tayfsal bir çift olan Mizar A sistemi

1.1.1.5. Örten Çift Sistemler

Örten çift sistemler, bileşenlerin gözlemciye belli bir yörünge düzlemi açısı ile durduğu ve bu açı nedeniyle sistemi oluşturan bileşen yıldızların gözlemcinin bakış doğrultusundan dolayı periyodik olarak birbirini gölgelediği sistemlerdir. Bu gölgeleme durumu, sistemin toplam parlaklığında bir azalmaya neden olmaktadır.

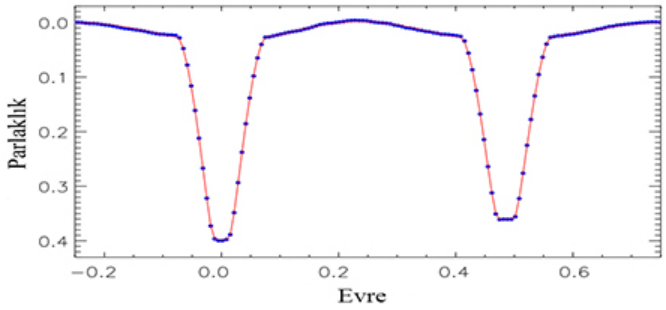
Tespit edilen ilk örten çift sistem β Perseus, yada genellikle kullanılan adı ile Algol'dür [12] . Bu sistemler tayfsal çift sistemlerde olduğu gibi birbirlerine oldukça yakındırlar. Bileşenler arası kütle aktarımı gerçekleşebilmektedir. Aktarım sonucunda kütlesi küçük olan bileşen daha çok evrimleşebilir. Bu duruma "Algol paradoksu" adı verilir. Şekil 1.6'da bu tarz bir sistem görülmektedir [7] . Görselde RZ Cas sisteminin baş bileşeninde bulunan gaz yoldaş bileşen yıldız tarafından çekilmektedir.



Şekil 1.6. Algol paradoksu [7]

Bu sistemde, yoldaş bileşen yıldızda aktarılan madde sonucunda yıldız çevresinde bir yığılma diski oluşacaktır ve dev yıldız yoldaş yıldıza zamanla yaklaşacaktır. Bunun sonucunca dev yıldız daha da ısınacak, hızlanıcak ve artık X-ışın ve gama-ışını üğretmeye başlayacaktır.

Gözlemler sonucu elde edilebilen ışık eğrileri, bir sistemin örten çift sistem olabileceğini belirleyebilmek adına en önemli tekniktir [13] . Işık eğrisi, belli bir zaman aralığında sistemin ölçülen toplam akısının evreye yada zamana göre çizilen parlaklık grafiğidir. Genel olarak bir kaç gün yada saat mertebesindedir. Şekil 1.7'de V453 Cygni tutulan çift sisteminin ölçülen ışık eğrisi grafiği görülmektedir [8] .



Şekil 1.7. Tutulan bir çift olan V453 Cygni sisteminin ölçülen ışık eğrisi [8]

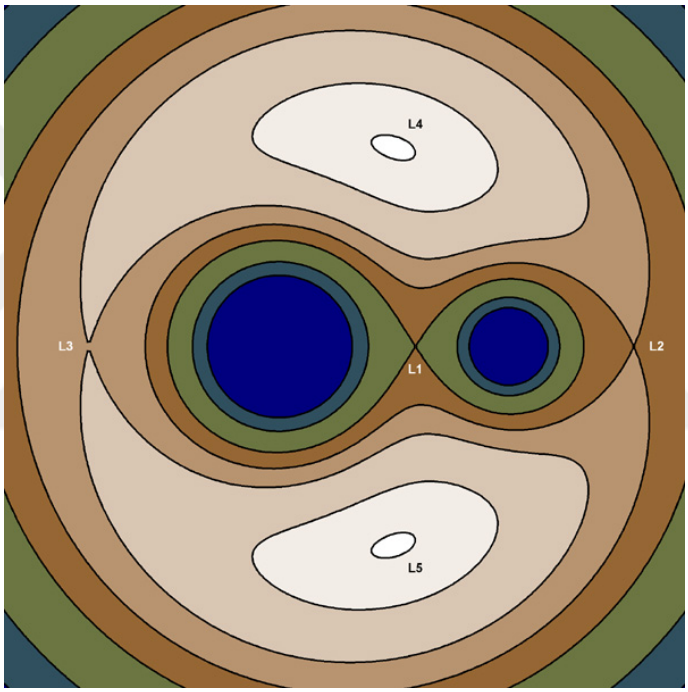
Grafik evreye karşı parlaklıktaki değişimdir. Grafikte iki adet parlaklık düşüşü bulunmaktadır. Burada derin olan birincil tutulma ile isimlendirilirken, diğer tutulma ikincil tutulma olarak adlandırılır. Bunun en temel sebebi birincil tutulmada parlaklığı görece daha düşük olan yıldız parlak olan yıldızı gölgelemektedir. İkincil tutulma bu durumun zıttıdır. Bu sebeple daha az bir düşme görülür. Toplam akının maksimum olduğu noktalar ise iki bileşenin de birbirinden en uzak olduğu noktalardır. Süreklilik olarak adlandırılır.

1.1.2. Roche Modeline Göre Sınıflandırma

Kimi yıldız sistemlerindeki bileşen yıldızların, birbirleri arasında bir etkileşimi olduğunu bir önceki bölümde bahsedilmişti. Bu etkileşim bileşenlerin birbirlerine olan kütle çekim etkisidir ve evrimlerini doğrudan etkiler. Etkileşim sonucunda madde aktarımı gerçekleşeceğinden dolayı bileşenlerin kütlelerinde bir değişim gözlenecektir. Bu değişim sistemin parametrelerinde büyük oranda bir değişime neden olur. Roche modeli bize bir yıldız sisteminde bulunan bileşen yıldızın sahip olabileceği maksimum kütlenin

belirlenebilmesini sağlar. Model 19. yüzyılda yaşamış olan Eduard Roche'nin adı ile anılır.

Yakın çift yıldızların madde aktarımı sonucu elde edebilecekleri kütleleri birbirleri ile ilişkilidir. Bu ilişki sebebiyle bir bileşen yıldızın elde edebileceği maksimum kütlenin bir limiti vardır. Bu limitli hacim, sistemin bileşen yıldızlarının başlangıç kütle oranlarına ve birbirlerine olan uzaklıklarına göre değişim göstermektedir. Kütlece büyük olan bileşen yıldız görece küçük kütleli bileşene göre daha büyük bir Roche hacmine sahip olacaktır. Şekil 1.8[2] bir çift yıldız sistemine ait Roche geometrisini temsil etmektedir.



Şekil 1.8. Bir çift yıldız sisteminin Roche geometrisi

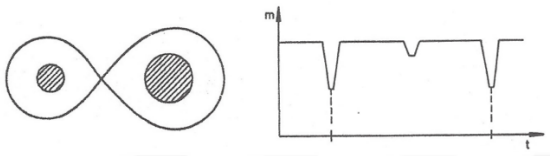
Şekil 1.8'e baktığımızda belli başlı noktaların işaretlendiğini görüyoruz. Bu noktalar Lagrange noktaları olarak adlandırılmaktadır. Bu kritik noktalar sistemin madde aktarımı gerçekleştirdiği yerler olarak bilinir. L_1 noktası bileşen yıldızların ilk etkileşiminin olduğu bölgedir. Bu noktadaki ilk etkileşim sistemdeki bir yıldızın Roche lobunu doldurması ile başlar. L_2 ve L_3 noktalarında bulunan maddeler sistemin kütle çekiminden kurtulabilmiş maddelerdir. L_4 ve L_5 noktaları ise sistemin en uzak noktalarıdır.

Çift yıldız sistemlari, bileşen yıldızlarının Roche loblarının doluluk durumuna göre üç başlık altında gruplandırılmıştır:

[2]http://members.wolfram.com/jeffb/visualization/lagrange.shtml

1.1.2.1. Ayrık Çift Yıldızlar

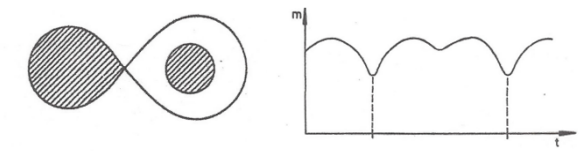
Bu sistemlerde bileşenler arası madde aktarımı gerçekleşmemektedir. Bileşen yıldızlar Roche loblarını daha dolduramamıştırlar. Bu sebeple birbirlerinin evrimlerini etkilemezler. Olağın dışı bir durum pek gerçekleşmediğinden ötürü de ışık eğrilerinde maksimum noktalar oldukça kararlıdır. Şekil 1.9[3]'da ayrık bir çift yıldız sisteminin ve ışık eğrisinin temsili görseli bulunmaktadır.



Şekil 1.9. Ayrık bir çift yıldız sistemi ve temsili ışık eğrisi

1.1.2.2. Yarı-Ayrık Çift Yıldızlar

Bu sistemlerde bileşenlerden birisi evrim süreci sebebiyle Roche lobunu doldurmuştur. Diğer bileşen yıldızın Roche lobu dolu değildir. Roche lobunu doldurmuş olan bileşen yıldız diğer bileşen yıldıza madde aktarmaya hazırdır. Bu aktarma L_1 noktasından gerçekleşir. Aktarılan bu madde, zamanla madde aktarılan yıldızın etrafında bir yığılma diski oluşturur. Roche lobu dolu olan bileşen artık küresel bir yapıya sahip olmadığından dolayı ise sistemin ışık eğsinin maksimum noktalarında değişimler görülür. Şekil 1.10[3]'da yarı-ayrık bir çift yıldız sisteminin ve ışık eğrisinin temsili görseli bulunmaktadır.

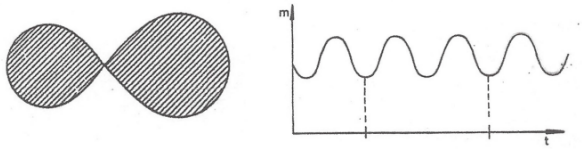


Şekil 1.10. Yarı-Ayrık bir çift yıldız sistemi ve temsili ışık eğrisi

[3]http://www.ifa.hawaii.edu/users/kud/teaching_15/6_DEB.pdf

1.1.2.3. Değen Çift Yıldızlar

Bu sistemlerde her iki bileşen yıldızda Roche lobunu artık doldurmuştur. Sistemde bulunan yıldızlar artık küresel yapılarını kaybetmişlerdir. Bu durum sistemin ışık eğrisinin maksimum noktalarında değişimlere neden olmaktadır. Şekil 1.11[3]'de değen bir çift yıldız sisteminin ve ışık eğrisinin temsili görseli bulunmaktadır.



Şekil 1.11. Değen bir çift yıldız sistemi ve temsili ışık eğrisi

1.1.3. Işık Eğrisine Göre Sınıflandırma

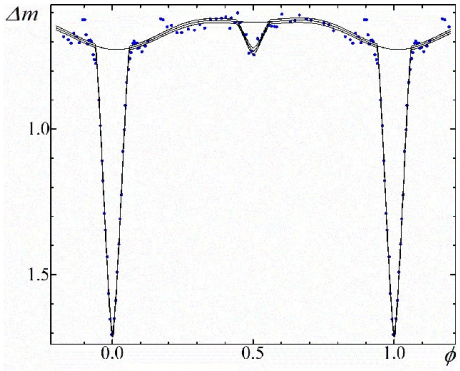
Örten çift sistemler kendi aralarında sınıflara ayrılabilmektedir. Bu ayrımı bileşenlerin birbirine olan uzaklıkları ve sistemin kendine has özellikleri belirler. Bu farklılıklar sistemin ışık eğrisinde de bir değişime neden olur. Bu değişime göre yapılan sınıflandırma ise Işık eğrisine göre (Fotometrik) sınıflandırma olarak adlandırılır. Bu sınıflandırma 3 alt gruptan oluşur:

1.1.3.1. Algol Türü Sistemler

Algol türü sistemlerde periyodik bir ışık değişimi gözlemlenir. Işık eğrilerinde tutulmalar dışında başka bir değişim görülmez. Genellikle maksimum olarak adlandırılan tutulma olmayan yerlerde ışık eğrisi düz ve sabittir. Bu durumun en temel sebebi bileşenlerin birbirine olan uzaklıklarıdır. Bu sebeple bileşen yıldızlar küresel yapılarını korur. Böylelikle de tutulma anı dışında ışık eğrisinde belirgin bir değişim gözlenmez.

Algol türü sistemlerin ışık eğrilerinde bulunan birincil ve ikincil minimumlar arasında oldukça büyük bir fark bulunmaktadır. Bunun en temel sebebi algol türü sistemlerin sıcak bir anakol yıldızı ile soğuk bir dev veya alt devden oluşuyor olmasıdır. Algoller kendi aralarında da gruplara ayrılmaktadırlar. Ayrık sistem olarak tanımlanan kütle aktarımının olmadığı algol sistemler olduğu gibi kütle aktarımının olduğu EA olarak adlandırılan algol sistemler de mevcuttur. Bu sistemleri birbirinden ayıran en önemli fark ise evrimsel

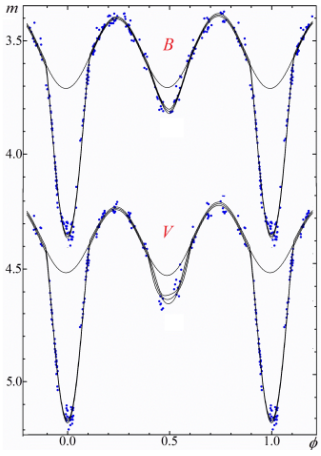
farklılıklardır. Şekil 1.12'de algol türü bir sistem olan β Perseus sisteminin ışık eğrisi görülmektedir [9] .



Şekil 1.12. Algol türü bir sistem olan β Perseus'un ölçülen ışık eğrisi [9]

1.1.3.2. Beta Lyrae Türü Sistemler

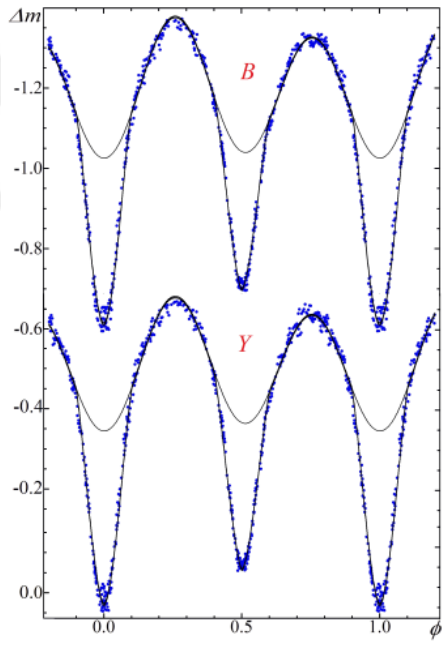
Bu tür sistemlerde bileşenler birbirlerine oldukça yakındırlar. Bu sebeple ışık eğrilerinde belirsiz değişimler görülmektedir. Bileşenler yakınlıklarından ötürü birbirinden etkilenmiştir ve küresel yapılarını kaybetmişlerdir. Bu durum maksimum olarak adlandırılan süreklilik bölgesinde de değişimler görülmesine neden olur. Sistemin ölçülen Işık eğrisindeki birincil ve ikincil minimum arasındaki farkın sebebi bileşenler arası sıcaklık farkının fazla olmasıdır. Oldukça kısa bir yörünge dönemine sahiptirler. Şekil 1.13'te bu tür sistemlere adını veren β Lyrae sisteminin B ve V filtrelerinde ölçülen ışık eğrisi görülmektedir [9] .



Şekil 1.13. β Lyrae sisteminin V ve B bandında ölçülen ışık eğrisi [9]

1.1.3.3. W UMa Türü Sistemler

Bu tür sistemlerde bileşenler birbirine oldukça yakındır. Bu yakınlık durumu iki bileşeninde küresel yapısının bozulmasına neden olmuştur. Bileşenlerin kütleleri her zaman birbirinden farklıdır. Bu duruma göre böyle bir sistemin bileşenlerinin eşit minimumlara sahip olmaması beklenir. Bu sistemlerde ışık eğrisinde bulunan minimumların eşit olmasının sebebi, bileşenlerin birbirine eş yüzey sıcaklıklarına sahip olmaladırıdır. Bu durum ise bu sistemdeki bileşenlerin ortak bir zarfa sahip olduğunu gösterir. Ortak zarf eşit bir sıcaklık dağılımına sahiptir. Bu sebeple ışık eğrisinde bileşenler eş derinliklere sahiptir. Şekil 1.14'te W UMa sisteminin B ve Y filtrelerinde ölçülen ışık eğrisi görülmektedir [9] .



Şekil 1.14. W UMa sisteminin B ve Y bandında ölçülen ışık eğrisi [9]

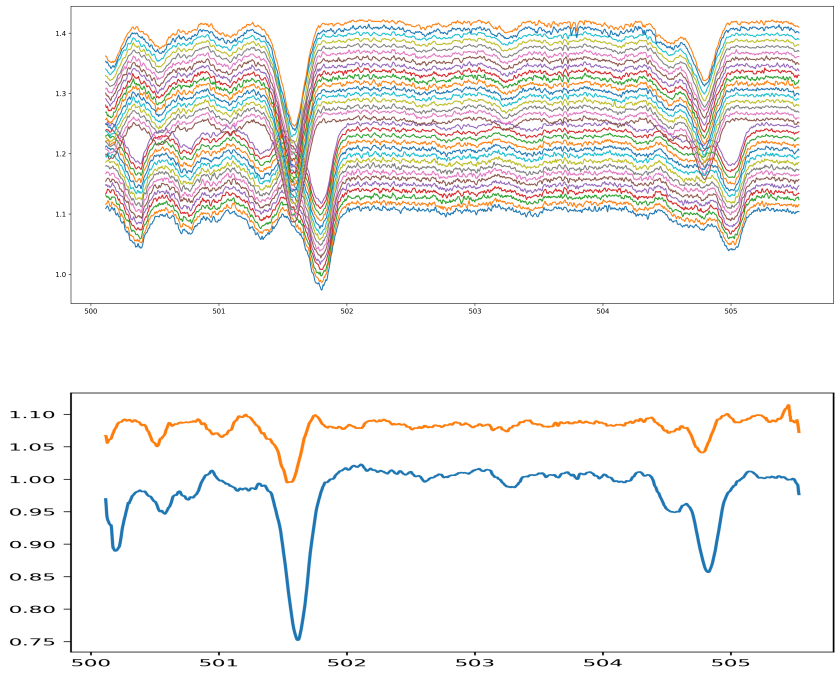
Bu tez çalışmasında seçilmiş tayfsal çift yıldız sistemleri kullanılarak tayfsal ayırma uygulaması gerçekleştirilmesi amaçlanmıştır. Tayfsal ayırma yöntemi sayesinde seçilen tayfsal çift yıldız sistemlerinin gözlenmiş tayfları kullanılarak, sistemi oluşturan bileşen yıldızların tayfları ayrı ayrı elde edilebilecektir. Bu sebeple bir sonraki bölüm, tayfsal ayırma hakkında genel bilgiler ve tayfsal ayırmanın matematiği üzerine olacaktır.

1.2. Tayfsal Ayırma

Çift yıldız sistemlerinin keşfinden bu yana, çift veya çoklu yıldızların sistematik gözlemleri ve yörüngelerinin belirlenmesi, yıldız yapısı ve evrim teorilerinin nicel testlerinde çok önemli bir rol oynamıştır [15]. Bu gözlemler ışığında sistemlerin elde edilen tayfları incelenerek daha detaylı analizler gerçekleştirilmektedir. Tayfsal çift sistemler birbirine oldukça yakın sistemler olması sebebiyle sistemi oluşturan bileşen yıldızlar ayrı ayrı gözlenemezler. Bu sebeple tayfsal çift bir sisteminin tayfı, sistemi oluşturan iki yıldızın ışık katkılarının toplamıdır. Bu tayf kompozit tayf olarak adlandırılır. Kompozit tayfa bakıldığında bileşen yıldızlar hakkında bilgiler elde etmek mümkündür. Sistemin baş bileşeni bu tayfta daha baskın görünür. Gerekli matematiksel yöntemlerle kompozit tayftan sistemi oluşturan bileşen yıldızların ayrı ayrı tayfı elde edilebilir.

Tayfsal ayırma, tayfsal çift ve çoklu bileşenli sistemlerin tayflarını ayırmak için kullanılan bir yöntemdir. Tayfsal ayırma, kaynakların farklı katkılarının gözlenen bir kompozit spektruma şablondan bağımsız olarak ayrılması olarak da tanımlanabilir [16] . Tayfsal ayırma yöntemin ilk uygulaması Bagnuolo & Gies tarafından gerçekleştirildi [17]. Bagnuolo & Gies bu çalışmada AO Cas çift yıldız sisteminin tayflarını ayırdı. Bunun için ise tomografik bir yöntemden yararlandılar. Daha sonrasında Simon & Sturm, tekil değer ayrıştırmasına (SVD) dayalı çözme yöntemini yayınladı [18]. Çalışmada küresel bir optimizasyon olan Downhill-Simplex [19] yönteminden yararlandılar. Bunun sebebi bir çift yıldız sisteminin yörünge parametrelerini elde edebilmekti. Böylelikle tayfsal ayırma yöntemlerinde ilk kez bir optimizasyon uygulaması kullanıldı. Simon & Sturm, yöntemi ilk olarak V453 Cygni çift yıldız sistemine uyguladı. 1995 yılında Hadrava, tayfların Fourier dönüşümü kullanılarak çözülebilmesini amaçlayan KOREL kodunu geliştirdi. Korel kodunun önemli özelliklerinden birisi tayftakı tüm çizgiler net olmasa bile radyal hız tayini için kullanılabiliyor olmasıdır [15] . Ayrıca yöntem en küçük karaler yöntemine dayanan bir optimizasyon aşamasına sahiptir. En küçük kareler yöntemi, oluşturulan bir model ile ölçülen sonuçların kıyasına dayanan bir regresyon yöntemidir . 2003 yılında İlicic, Korel kodu gibi Fourier dönüşümlerini kullanan FDBinary programı kullanıma sundu [1]. FDBinary programı, dalga boyu uzayı yada Fourier uzayında

çalışmanın aslında büyük ölçüde eşdeğer sonuçlar ortaya koyduğunu göstermiştir. Kodun ilk uygulaması Simon & Sturm [18] çalışmasındaki gibi V453 Cygni yıldızına gerçekleştirilmiştir. Kod en küçük kareler yöntemini kullanan bir Downhill-Simplex [19] optimizasyon aşamasına sahiptir ve sistemin yörünge parametrelerini elde edebilir. Unix tabanlı sistemlerde çalışmaktadır. Son olarak Sablowski & Weber Spectangular'ı yayınladı [16]. Spectangular c++ kullanılarak yazılmış arayüzlü bir tayfsal ayırma programıdır. SVD yöntemini kullanarak tayfsal ayırma gerçekleştirir. Ayrıca FDBinary ile benzer bir optimizasyon aşamasına sahiptir. Spectangular'ı güçlü kılan özelliklerden birisi sistemi oluşturan bileşenlerin akı oranlarını hesaplayabiliyor olmasıdır. Bir çift yıldız sistemindeki bileşenlerin akı oranları tayftaki element çizgilerinin derinliklerini etkiler. Spectangular, tayfsal ayırma aşamasında bileşenlerin akı oranlarını hesaplayabilir. Ayrıca tellürik etkileride belirleyebilmektedir. Kodun ilk uygulaması Capella çift yıldız sistemine uygulanmıştır. Şekil 1.15'te Omi Per sistemi için hazırlanmış bir veri seti ve tayfsal ayırma sonuçları görülmektedir. Şekilde üst grafikte sistemin farklı evrelerinde gözlenmiş tayflar bulunurken alt grafikte tayfsal ayırma sonucu bulunmaktadır.



Şekil 1.15. Omi Per sistemi için hazırlanmış veri seti ve tayfsal ayırma sonucu

.

Bileşen yıldızlar sistemin kütle merkezi etrafında yörünge hareketi gerçekleştirir. Yörünge hareketi boyunca bileşenler değişken bir radyal hıza sahiptirler. Zamana

bağlı olarak bileşenlerin radyal hızlarına göre ölçülen tayfta bir Doppler kayması gerçekleşmiştir. Tayfsal ayırma yöntemi bu hızların önceden bilinmemesi durumunda yalnızca gözlem tarihi ve o tarihe ait tayfı kullanarak sistemin yörüngesini simüle eder. Bu şekilde bileşenlerin evrelere göre hızlarının hesabını gerçekleştirebilir. Simülasyon aşaması sistemin yörünge elemanlarına ihtiyaç duyar. Bu durum kullanılan yörünge elemanlarının hassasiyetinin önemini arttırır. Tayfsal ayırma yöntemlerinde kullanılan optimizasyon yöntemlerinin temel amacı bu parametrelerin doğruluğundan emin olabilmektir.

Tayfsal ayırma yöntemini anlayabilmek için öncelikle kompozit tayfın ne olduğunu anlayabilmek gerekmektedir. Bu sebeple öncelikle kompozit tayfın matematiksel tanımı yapılmalıdır. Bu tez çalışması boyunca kompozit tayfların tanımı için *Y* sembolü kullanılırken, bileşenlerin tayfı için *X* sembolü kullanılmıştır. *k* sembolü, bileşen yıldızlar için geçerlidir. *j* sembolü ise gözlenen kompozit tayfın t_j zamanlarını temsil eder. Öyleyse:

$$Y_j(\lambda) = \sum_k \epsilon_{k_j} X((1 - \beta_{k_j})\lambda), \tag{1.1}$$

burada ϵ_{kj} parametresi, *k* yıldızı için t_j zamanındaki tutulma faktörü olarak tanımlanmıştır. Tutulan bir çift sistem olmayan bir yıldız sistemi için için tutulma faktörü bire eşittir. Yıldızların madde aktarımı sonucu küresel yapı bozulmalarından kaynaklanan parlaklık değişikliklerini tanıtmak için tutulma faktörleri kullanılabilir [1] . β_{kj}, *k* yıldızının t_j zamanındaki radyal hız değeridir. Denklem 1.1 şu şekilde genişletilebilir:

$$\bar{Y_j}(\lambda) y_j(\lambda) = \sum_k \epsilon_{k_j} \bar{X}_k((1 - \beta_{k_j})\lambda) x_k((1 - \beta_{k_j})\lambda). \tag{1.2}$$

Denklem 1.2 her bir bileşen tayf için geçerlidir. $x_k(\lambda) = 1$ olması koşulu da bu geçerliliğe dahildir [1] . Bu koşul sebebiyle $y_j(\lambda) = 1$ olması gerekir:

$$\bar{Y_j}(\lambda) = \sum_k \epsilon_{k_j} \bar{X}_k((1 - \beta_{k_j})\lambda). \tag{1.3}$$

Eğer denklem 1.3'ü denklem 1.2'de yerine yazarsak:

$$y_j(\lambda) = \sum_k \ell_{k_j}(\lambda) x_k((1-\beta_{k_j})\lambda), \tag{1.4}$$

burada:

$$\ell_{k_j}(\lambda) = \frac{\epsilon_{k_j}\bar{X}_k((1-\beta_{k_j})\lambda)}{\sum_l \epsilon_{l_j}\bar{X}_l((1-\beta_{l_j})\lambda)} \tag{1.5}$$

şeklinde tanımlanacaktır.

Burada $\ell_{kj}(\lambda)$, k bileşen yıldızının t_j zamanındaki sürekliliğinin, λ dalga boyundaki kompozit tayfın sürekliliğine olan katkısını belirtir. Hesaplanan bileşen yıldızların normalize edilmiş tayfları ile normalize edilmiş gözlenen kompozit tayf arasındaki ilişkiyi denklem 1.4 açıklar.

Bu noktada artık kompozit tayftan ayrılmış bileşen yıldız tayflarını elde edebilir durumdadır. Ayrıca gürültü faktörleride işleme dahil edilebilir. Eğer t_j zamanda gözlenen $y_j(\lambda)$ kompozit tayfının λ_{ji} dalga boyu noktaları N_j ızgarasında örneklenirse, $i = 1, ..., N_j$) olduğu koşulda:

$$y_{ji}(\lambda) = \rho\sigma_{ji} + y_j(\lambda_{ji}) \tag{1.6}$$

burada ρ, birim varyans normal dağılımından çizilen ranstgele bir sayıdır ve σ_{ji}, belirli bir ölçümün belirsizlik katsayısıdır [1] . Denklem 1.6'nın sağ tarafında bulunan $y_j(\lambda_{ji})$ terimi ayrı bir şekilde yazılırsa:

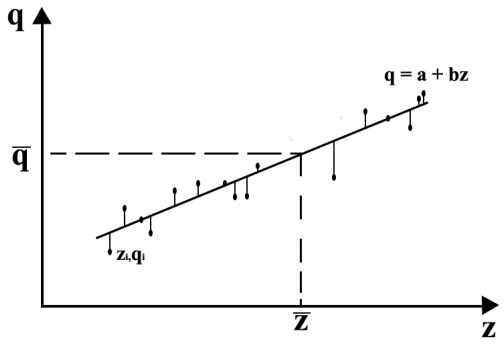
$$y_{ji} = \rho\sigma_{ji} + \sum_k \ell_{kji}\hat{x}_k((1-\beta_{kj})\lambda_{ji}, \{x_{k\alpha}\}), \tag{1.7}$$

burada $\ell_{kji} = \ell_{kj}(\lambda_{ji})$ ve $\hat{x}_k(\lambda_{ji}, \{x_{k\alpha}\})$ fonksiyonu, λ dalga boyunda, $\alpha = 1, ..., M_k$ olduğu, M_k sayıda $x_{k\alpha}$ parametresi içerir. Yani k bileşen yıldızının tayfının genliğini hesaplar. Denklem 1.7, sol kısmında gözlemlerden elde edilen verilere ve sağ kısmında ise oluşturulmuş bir matematiksel modele sahip denilebilir .

Denklem 1.7, $x_{k\alpha}$ parametresi $\sum_{k=1}^{N_*} M_k$'da iken bir dizi $\sum_{j=1}^{N_{obs}} N_j$ denklemini temsil eder [1]. N_{obs} parametresi gözlemlenmiş kompozit tayflardan elde edilen zaman serisidir ve sistemin tüm yörüngesine yayılmıştır. N_* ise sistemin sahip olduğu bileşen yıldız sayısını temsil eder. Bu denklem sistemi $x_{k\alpha}$ için çözülebilmektedir, bu da bileşen yıldızların

normalleştirilmiş tayflarının oluşturulduğu anlamına gelir [1] . Eğer $N_{obs} > N_*$ ve $M_k \simeq N_j$ ise yeterli bir denklem sistemi oluşturulamaz ve yeterli bir koşuldan söz edilemez.

Aşırı belirlenmiş bir lineer denklem sisteminin, özellikle gerçek verilerin modellenmesi sırasında kesin bir çözüme sahip olması beklenmemektedir [1] . Böyle bir durumda, **A** matrisinin satır sayısının sütun sayısından daha fazla olduğu **A . x = y** denklemi için, $r = |$**A . x - y** $|$ değerini en aza indirebilmek adına en küçük kareler methodu kullanılır. En küçük kareler uyumu yada diğer adıyla chi^2 yöntemi, bir $q = a + bz$ doğrusunda bulunan z_i, q noktaları ve verilen z_i, q_i saçılım değerleri arasındaki mesafelerin karelerinin toplamını minimum yapan **a** ve **b** katsayılarını bulmayı hedefler. Yöntem sonucunda bir regresyon doğrusu elde edilir. Şekil 1.16, en küçük kareler uyumunun temsili bir grafiği çizilmiştir.



Şekil 1.16. En küçük kareler uyumunun grafiksel gösterimi
Elde edilen doğru, dağılmış noktaların arasındaki en kısa mesafedir.

.

Böylelikle çözülmesi gereken denklem seti:

$$\frac{y_{ji}}{\sigma_{ji}} = \frac{1}{\sigma_{ji}} \sum_k \ell_{kji} \hat{x}_k((1-\beta_{kj})\lambda_{ji}, \{x_{k\alpha}\}), \tag{1.8}$$

ve böylece minimize edilen miktar:

$$r^2 = \sum_{j=1}^{N_{(obs)}} \sum_{i=1}^{N_j} \frac{1}{\sigma_{ji}^2} \left(y_{ji} - \sum_{k=1}^{N_*} \ell_{kji} \hat{x}_k((1-\beta_{kj})\alpha_{ji}, \{x_{k\alpha}\}) \right)^2. \tag{1.9}$$

Burada $x_{k\alpha}$, denklem 1.7'deki gibi oluşturulmuş bir matematiksel model ile gözlemler sonucu elde edilmiş verilerin en küçük kareler uyumunda serbest olarak kabul edilen parametredir.

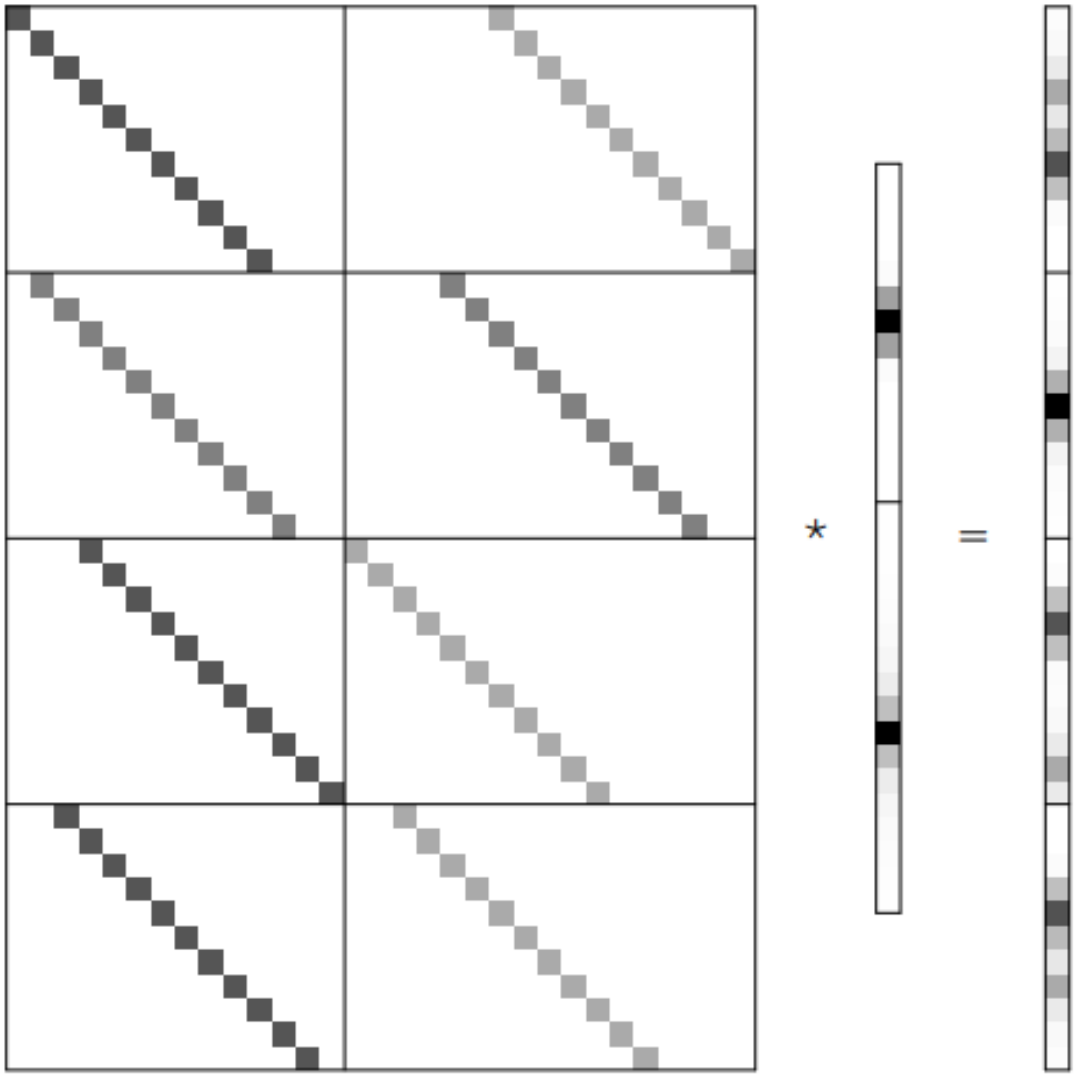
1.2.1. Dalga Boyu ve Fourier Uzayında Tayfsal Ayırma

Bölüm 1.2'de tayfsal ayırma yönteminin genel denklem şemasını ele almıştık. Bu bölümde ise Simon & Sturm [18] *dalga boyu uzayında tayfsal ayırma* ve Hadrava [15] *Fourier uzayında tayfsal ayırma* yaklaşımlarına değinilecektir.

Öncelikle dalga boyu uzayında tayfsal ayırma yöntemine bakalım. Burada problem, bir lineer denklem sistemi olarak formüle edilmiş durumdadır [18]. *N* gözlenmiş kompozit tayf, eşit sayıda nokta içeren ve yapısı y_j, $j = 1, ..., N$ şeklinde olan vökterlerden oluşur. Bu vektörler denklem 1.10'un sağ kısmındaki bir **y** vektöründe birleştirilir. Denklemin sol kısmında, bileşen yıldızların tayfının birleştirilmesi olarak tanımlanan **x** vektörü $(x_k, k = 1, 2)$ ve bir **A** matrisi bulunur. **A** matrisi, sistemdeki her bileşenin tayfının sahip oldukları genliklerini, gözlem sonucu elde edilen kompozit tayflarlarla eşleştirir. Matris $\mathbf{A}_{jk}$ bloklarından oluşur. Matristeki bir blok hem β_{kj}'yi hem de ℓ_{kj}'yi işleme aktarır. Bu durumda denklem 1.8'i şu şekilde yazabiliriz:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{N1} & \mathbf{A}_{N2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_N \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Burada denklemin sağ kısmındaki **y** vektörünü gözlenen veriler (kompozit tayf) oluşturur. **A** matrisi ise β_{kj} ve ℓ_{kj} ile oluşturulur. Denklem 1.10'da **x** çözümünün gerçekleşebilmesi için **A** matrisinin tersine ihtiyaç duyulur. Ancak **A** matrisi bir kare matris değildir. Böyle bir matrisin tersinin hesaplanabilmesi için tekil değer ayrıştırması (SVD) önerilmiştir [18] . SVD yöntemi, **A** matrisini parçalara böler ve kare matrisler oluşturur. Böylelikle matrisin tersi hesaplanabilir. Denklem 1.10'u daha iyi anlayabilmek adına şekil 1.17'de denklem 1.10'un görsel bir uygulamasına yer verilmiştir. Görselde 11 piksel uzunlukta 4 kompozit tayf bulunmaktadır [1] . Bu kompozit tayflar iki model tayf kullanılarak modellenmiştir.



Şekil 1.17. Denklem 1.10'nun yoğunluk grafiği.$\mathbf{A}_{jk}$ matrisinin pikselleri, $\mathbf{x}_k$ ve $\mathbf{y}_j$ vektörleri birbirinde ayrılmıştır. Matris içerisindeki Gri ton, sıfır(beyaz) ve birim (siyah) vektörler dışında tersine vektördür [1].

Dalga boyu uzayında tayfsal ayırma yönteminin ardından artık Fourier uzayında tayfsal ayırma yöntemine değinebiliriz. Bu yöntem verileri ayrık Fourier dönüşümleri (DFT) kullanılarak çözmeyi amaçlar. DFT, kompozit tayfların ayrılması için ilk olarak Hadrava [15] tarafından önerildi.

$a_i,\ i\ =\ 1, ..., N\ -\ 1$ genliklerinden oluşmuş bir dizenin DFT çözümü, burada N parametresinin çift olması koşuluyla:

$$\tilde{a}_n = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}ni} a_i,\ n = -\frac{N}{2}+1, ..., \frac{N}{2} \tag{1.11}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

n'nin -N/2 + 1 ile N/2 arasında seçilmesi bir zorunluluktur ($\tilde{a}_n$ *N* ile periodiktir) [1] . DFT genliği $\tilde{a}_n$, $\omega_n = 2\pi n$ frekansına denktir. $\tilde{a}_0$ sıfır frekansı temsil ederken, $\tilde{a}_i$ ise bu genliklerin ortalaması olarak kabul görür.

Denklem 1.11'in ters dönüşümü:

$$a_i = \sum_{n=-N/2+1}^{N/2} e^{\frac{2\pi i}{N}in} \tilde{a}_n,\ i = 0, ..., N-1. \tag{1.12}$$

Görünen o ki, $\tilde{a}_n$ ve $e^{\frac{2\pi i}{N}\beta_n}$ denklemlerinin çarpımı ile, a_i ve β'nın denklemin sağ tarafına atılması arasında bir fark yoktur:

$$\begin{aligned} a'_i &= \sum_{n=-N/2+1}^{N/2} e^{\frac{2\pi i}{N}in}\left(e^{\frac{2\pi i}{N}\beta_n}\tilde{a}_n\right) \\ &= \sum_{n=-N/2+1}^{N/2} e^{\frac{2\pi i}{N}(i-\beta)n}\tilde{a}_n \\ &= a_{i-\beta}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Bu işlemde tüm genlikler aynı sayıda piksel ile kayar. Bu sebeple, eşit uzaklıktaki tayfların radyal hız kaymaları denklem 1.13 ile ifade edilebilir. Denklem 1.10'a benzer bu denklemi, gözlenen kompozit tayf, $\tilde{y}_{jn},\ j = 1, ..., N_{obs}$, ve bileşen tayflar, $\tilde{x}_{kn},\ k = 1, ..., N_*,\ n = -N_{bin}/2 + 1, ..., N_{bin}$ olmak üzre, DFT cinsinden yazmak mümkündür:

$$\sum_{k=1}^{N_*} \ell_{kj} e^{-\frac{2\pi i}{N_{bin}}\beta_{kj}n}\tilde{x}_{kj} = \tilde{y}_{jn},\ j = 1, ..., N_{obs}\ , \tag{1.14}$$

burada β_{kj}, veri pikselleri sayısındaki kayma ifadesidir. ℓ_{kj} ise önceden tanımlanan ışık faktörüdür. Denklem 1.14 kısaca, N_* bilinmeyenli lineer N_{obs} denklemlerinden oluşmaktadır. Yani denklem 1.14, bağımsız bir şekilde her $n = 0, ..., N_{bin}$ için çözülebilmektedir. Bu durum artık denklem 1.10'un denklem 1.14 gibi bağımsız olduğunu gösterir. Ayrıca İlicic 2004 [20] çalışması matrisin tersini hesaplamak için tekil değer ayrıştırmasının kullanılmasını tavsiye eder [1].

Denklem 1.14, kompozit tayfların ölçüm belirsizliklerini içerecek şekilde düzenlenebilir. Bunun için denklemin her iki tarafını, y_{ji} genliklerine atanan σ_j ortalama ölçüm belirsizliğine bölmek gerekir [1] :

$$r_n{}^2 = \sum_{j=1}^{N_{obs}} \frac{1}{\sigma_j^2} \left(\tilde{y}_{jn} - \sum_{k=1}^{N_*} \ell_{kj} e^{-\frac{2\pi i}{N_{bin}} \beta_{kj} n} \tilde{x}_{kn} \right)^2 . \tag{1.15}$$

Fourier uzayında çalışmak ile dalga boyu uzayında çalışmak arasındaki en önemli farklardan birisi performanstır. Dalga boyu uzayında çalışmak daha meşakkatlidir ve Fourier uzayında çalışmakla kıyaslandığında daha uzun bir CPU zamanına ihtiyaç duyar. Kompozit tayflar için DFT hesabı, denklem 1.14 öncesinde gerçekleşmiş olmalıdır. Sonrasında elde edilen sonuçlara bir ters dönüşüm uygulanır. DFT CPU zamanı, N_{obs} boyutuna oranla değişir.

DFT'nin en büyük dezavantajı, bileşen yıldızların model tayflarını periyodik fonksiyonlar olarak algılamasıdır [20] . Bir genlik dizisi, DFT aşamasını denklem 1.13 gibi üstel bir faktör ile çarpılarak kaydırılırsa bir döngü oluşmasına neden olabilir. Bu durum modelin verileri bir çok kez üğretmesini tetikler. Etki en çok tayfın uç kısımlarında belirgindir.

1.2.2. Kompozit Tayfın Çözülmesi

Kompozit tayfların çözülmesi, yalnızca bileşen yıldızların tayflarının yeniden yapılandırılmasına değil, aynı zamanda çözülen yıldız sisteminin yörünge parametrelerinin belirlenmesine yönelik tayfsal ayırma tekniğidir [1] . Teknik, Simon & Sturm [18] tarafından ilk olarak kullanılmıştır.

Yöntem, ışık faktörü ℓ_{kj} ve bileşenlerin radyal hızları β_{kj} doğru bir şekilde biliniyorsa çalışabilir. Bir sistemin ışık faktörü, çift yıldız sisteminin gözlem sonucu ölçülen ışık eğrisinin incelenmesi ile hesaplanır. Bileşen yıldızların ışık oranlarının bilinmemesi

sistemin tutulan bir çift yıldız sistemi olmaması durumunda çözülme işlemini fazlasıyla etkilememektedir. Ayrıca ayırma sonrasında ışık faktörleri tekrardan düzenlenebilir. Radyal hızlar ise, şablon tayflar kullanılarak iki boyutlu çapraz korelasyon yöntemi ile kompozit tayf üzerinden belirlenebilir. Radyal hızların yanlış belirlenmesi, kompozit bir tayfı çözme işleminde sonucu tamamen değiştirecektir. Bu sebeple bileşlenlerin radyal hızları, tayfsal çözme işleminde gözlenen kompozit tayftan sonra en değerli veridir.

Tayfal Çözülme, "karışıklık" katsayılarının tam bilgisini gerektirmeden, daha ziyade bunları uyumun serbest parametreleri olarak dikkate almayı gerektirmeden, bir ikilinin bileşik spektrumlarına spektral ayırma uygulayan bir prosedürdür [1] . Tayfsal çözülme yöntemi ile elde edilen sonuçlar, radyal hızların doğru olduğu koşulda tayfsal ayırma yöntemine kıyasla oluşturulan modele daha uygundur. Bu uyumun ölçütü ise, oluşturulan model ile hesaplanan verilerin arasındaki farkların sonucunda kalan artıklarının karelerinin toplamı olan chi^2 methodudur. Chi^2 tanımı denklem 1.10'a baktığımızda dalga boyu uzayı için basitçe ||**A.x-y**|| şeklinde tanımlanabilir. Lakin Fourier uzayında ise bu hesap denklem 1.15'e göredir ve şu şekilde şekillenir:

$$r^2 = \sum_{n=1}^{N_{bin}/2} \sum_{j=1}^{N_{obs}} \frac{1}{\sigma_j^2} \left(\tilde{y}_{jn} - \sum_{k=1}^{N_*} \ell_{kj} e^{-\frac{2\pi i}{N_{bin}} \beta_{kj} n} \tilde{x}_{kn} \right)^2 . \tag{1.16}$$

Denklem 1.16'da β_{kj} ve ℓ_{kj} uyumun serbest parametreleridirler. Ama artık doğrusal birer parametre değildirler, lakin $\tilde{x}_{kn}$ modeli hala doğrusaldır. Bu şekilde r^2'yi en aza indirebilmek adına, doğrusal ve doğrusal olmayan iki durum oluşur.

Bölüm 1.3'te anlatılacak olan MarKov Chain Monte Carlo (MCMC) yöntemi tayfal çözülmede parametre optimizasyonu ve chi^2 analizi için oldukça önem taşıyacaktır.

1.3. Bayes İstatistiği ve MCMC Yöntemi

Bayes istatistiği ve Markov Chain Monte Carlo (MCMC) bağımsız iki farklı yöntemdir. Bayes istatistiği, gözlemlenen verilerin yorumlanabilmesini sağlayan bir istatistiktir. MCMC ise, bir dağılımdan örnekler almaya yarar. Bu iki disiplin bir araya getirildiğinde ise neredeyse bilimsel her aktivite için gerçekleştirilen veri analizlerinde devrim yaratmıştır [21] . Kullanım kolaylığı ve esnek yapıda oluşu yöntemlerin popülerliğini büyük oranda arttırır.

Bayes istatistiği ilk olarak, 1763 yılında Thomas Bayes tarafından ortaya atıldı. Yaptığı çalışma [22] Bayes'in ölümünden sonra yayınlanmıştır. Bu çalışmayı sonradan keşfeden Laplace, yöntemin bir çok çeşitli alanda uygulamasını gerçekleştirdi. Lakin yaptığı uygulamalar yeterince bir yankı uyandıramamıştır. 19. yüzyılın ortalarında Harold Jeffreys önderliğinde yöntem tekrardan gün yüzüne çıkmış ve meşhur Theory of Probability [13] çalışması yayınlanmıştır. Yöntemin adının duyulmasındaki en büyük olaylardan birisi ise Alman Enigma kodunun kırılmasında kullanılması olmuştur [21] . Bayes istatistiği günümüzde hala kullanımına devam edilen bir yöntemdir.

Bayes istatistiğinin 19. yüzyıldaki popülerliği sebebiyle ilgili çalışmalarında sayısı artmıştır. Bu gerçekleşen çalışmaların en önemlilerinden bir tanesi MCMC yöntemidir. MCMC yöntemi, istatiksel yöntemlerdeki problemlerin çözümünü amaçlar [21] . Bu çözümü rastgele sayılar kullanarak gerçekleştirir. Yöntemin bağımsız oluşu çok boyutlu problemlerin çözülebilmesini sağlar. Monte Carlo yöntemi ilk olarak Metropolis [23] tarafından icat edildi. Bu çalışmanın ardından Metropolis, 1953 yılında ilk kez bayes istatistiğinde MC methodunu kullanıdı [24]. Daha sonrasında Hasting, 1970 yılında Metropolis'in çalışmalarını genişletti. Bunun sonucunda ise Metropolis Hasting(MH) algoritmasını yayınladı. Algoritma bir dağılımın örneklenebilmesini sağlamaktaydı. MH, Monte Carlo yöntemi ile Markov Zinciri (Markov Chain) yöntemini birleştirir. Mucidi rus matematikçi Andrey Markov olan Markov Zinciri, bir olayın olasılığının yalnızca önceki olayda elde edilen duruma bağlı olduğu olası olaylar dizisini tanımlayan stokastik bir modeldir [25] . 1984 yılında Geman $\&$ Geman [26] çalışması Gibbs Örneklemesi'ni tanıttı. Bu yöntem Bayes istatistiğini baz alan ve MCMC tekniğini doğru kullanan ilk çalışmadır [21] . Zamanla MCMC yönteminin bir çok alanda kullanılmaya başlamasının ardından astronomi alanında da popüler hale geldi. Lewis $\&$ Bridle [27] çalışması, astronomi alanında Bayes istatistiği ve MCMC yönteminin kullanımı konusunda öncü çalışmalardan birisidir.

1.3.1. Bayes İstatistiği

Bayes istatistiği için olasılık kavramı, sıklık dağılımında olduğu gibi sıklıkla ilişkili değil, bir ifadenin kesinlik derecelerini kapsayacak şekilde genişletilmesi durumudur. Bayes istatistiğinde olasılıklar, temel olarak bir olayla ilgili sahip olduğumuz bilgilerimiz ile ilgilidir [28] . Bayes istatistiği bazı temel kavramlara dayanır. x, bir olaydaki rastgele

değişken ve $P(x)$ bu değişkenin olasılık dağılımı olsun:

$$P(x) \geq 0 \,, \tag{1.17}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx P(x) = 1 \,, \tag{1.18}$$

$$P(x_1 \cup x_2) = P(x_1) + P(x_2) \tag{1.19}$$

denklemleri temel kavramlarımızdır. Burada denklem 1.17, bir olayın olasılığının her zaman pozitif olduğunu gösterir. Denklem 1.18, olası sonuçlardan birini elde edeceğimizden emin olduğumuzu söyleyen normalleştirilmiş bir ilişkidir. Denklem 1.19 ise her bir olayın bireysel olasılıklarının toplamı, birbirinden farklı olaylardan gözlem elde edebilme olasılığını verdiğini söyler. Denklem 1.19 daha genel bir ifade ile:

$$P(x_1 \cup x_2) = P(x_1) + P(x_2) - P(x_1 \cap x_2) \tag{1.20}$$

şeklinde tanımlanır ve denklem 1.20 bize bir olay gerçekleştiğinde diğer bir olayında gerçekleşebilmesi durumunda, x_1 ve x_2 olaylarının gerçekleşme olasılılarının, x_1 ve x_2 olaylarının gerçekleşme olasılıklarının çarpımına eşit olduğunu anlatır. Denklem 1.20 ayrıca şu şekilde yazılabilir:

$$P(x_1 \cap x_2) = P(x_1)P(x_2|x_1) \tag{1.21}$$

Bayes teoremi, denklem 1.17 ve denklem 1.21'de gösterilen olasılık denklemlerinin bir sonucudur. Denklem 1.21'de $P(x_1 \cap x_2) = P(x_2 \cup x_1)$ uygulanırsa denklem,

$$P(x_2 \cup x_1) = \frac{P(x_1|x_2)P(x_2)}{P(x1)} \tag{1.22}$$

halini alacaktır. Bayes istatistiğinde, uzay hem veriyi hem de modeli kapsar. Ölçülen büyüklükler X ve parametre θ arasında bir ayrım yoktur [29] . Basitçe bir modelin ögesi P_θ, θ parametre değeri bilinen X durumunun dağılımıdır. Bu sebeple bir H hipotezi verildiğinde x_1, D veri seti ve x_2, θ parametre vektörü olarak kabul edilirse, denklem 1.22 şu hali alır:

$$P(\theta|D,H) = \frac{P(D|\theta,H)P(\theta|H)}{P(D|H)} \, . \tag{1.23}$$

Denklem 1.23, Bayes teoremi olarak adlandırılır ve en önemli Bayes istatistik denklemidir. Denklemde $P(\theta|D,H)$, seçilen hipotezin sonsal (Posterior) olasılığıdır. Posterior, elde edilen yeni, veriler ışığında meydana gelen bir olayın gözden geçirilmiş veya güncellenmiş olasılığıdır. $P(D|\theta,H)$, olabilirlik (Likelihood) olarak adlandırılır. Likelihood fonksiyonu, bir veri setinin ortak olasılığını tanımlar. $P(\theta|H)$, öncül (Prior) değerlerdir. Prior, bir veri elde edilmeden önce model için en başında verilen başlangıç parametreleridir. Son olarak $P(D|H)$ modelin kanıtıdır.

1.3.2. Markov Chain Monte Carlo (MCMC) Yöntemi

Bayes istatistiğinin problem yaklaşımına baktıktan sonra, şimdi çıkarım gerçekleştirme yöntemlerine, yani bir veri setinin olasılık yoğunluk fonksiyonunun (pdf) hesabının nasıl gerçekleştiğine bakmak gerekir. Genel olarak bu iş için Monte Carlo tabanlı yöntemlerden yararlanılmaktadır. Bugün bunu yapmanın en popüler yöntemi ise Markov Chain Monte Carlo (MCMC) yöntemidir.

MCMC algoritmasının en temel amacı, denklem 1.23'te verilen Bayes teoremi denkleminin sonunu değerlendirebilmek adına bir parametre uzayında bir dizi nokta oluşturmaktır [28] . Öncelikle istenilen yoğunluğa bir dizi delta fonksiyonu ile yaklaşılır:

$$P(\theta|D,H) \simeq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta(\theta-\theta_i) \, . \tag{1.24}$$

burada N bir zincirdeki nokta sayısıdır. Sonrasında posterior ortalaması şu şekilde hesaplanır:

$$\langle\theta\rangle = \int d\theta\theta P(\theta,H|D) \simeq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\theta_i \, , \tag{1.25}$$

θ dağılımı belirlendikten sonra θ_i örnekleri posterior tarafından üğretilir ve θ_i fonksiyonu oluşturulur:

$$\langle f(\theta)\rangle \simeq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\theta_i) \tag{1.26}$$

Markov zinciri, θ_i noktasından yeni bir θ_{i+1} noktası oluşturur. Lakin bu noktanın zincire eklenip eklenmeyeceğine karar verecek bir mekanizmaya ihtiyaç duyulur. Hesaplanan yeni adım bir önceki adıma kıyasla daha kötüyse, bu zincire eklenmeyeceği anlamına gelmemektedir. Bunun en temel sebebi, sadece en iyi noktaları kabul etmek sonucu yerel bir maksimum noktaya yakınsar. Bu sebeple bir kısas içerisinde seçilen daha kötü noktalar tüm uzayda çözüm aramayı sağlayacaktır. Bu mekanizmaların en kullanılanı Metropolis Hasting (MH) algoritmasıdır. Algoritma, sonsal bir olasılık $p_i = p(\theta_i|D, H)$ ile rastgele bir başlangıç noktası θ_i'den başlar. Bir θ_c adayı öneri(Propose) dağılımı $q(\theta_i, \theta_c)$ içerisinden seçilir ve teklif(proposal) olarak atanır. Teklif sonrasında noktanın kabul edilme kriteri ise:

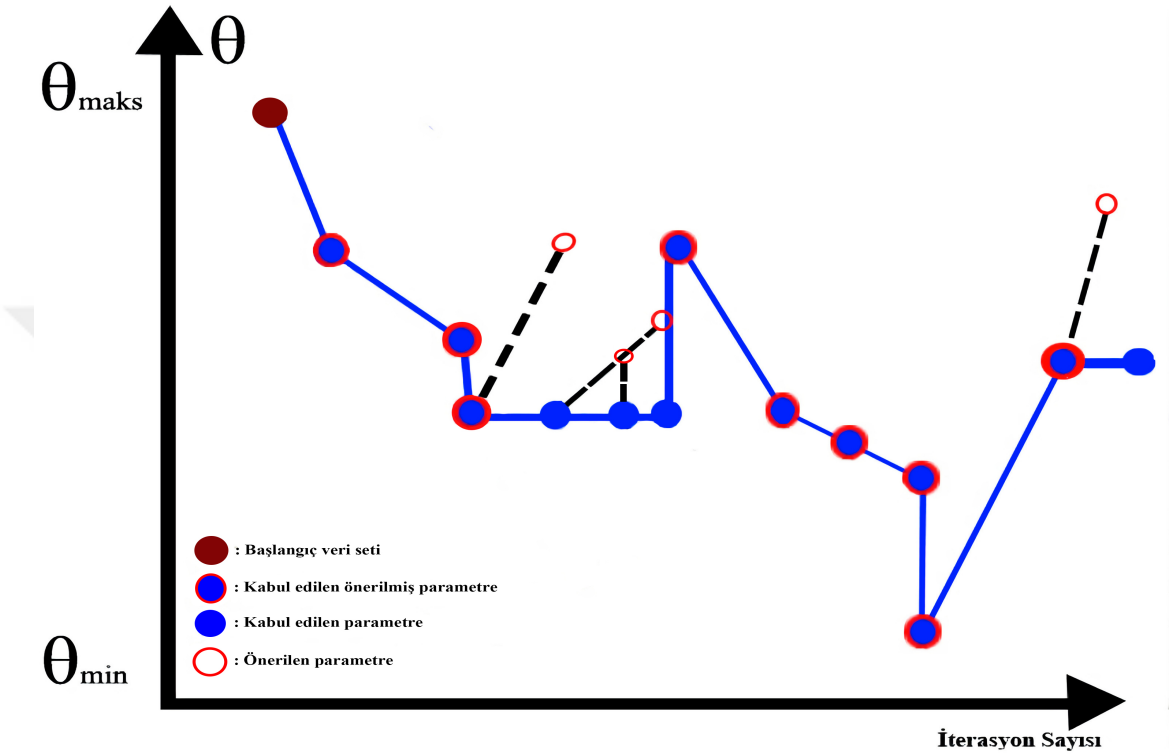
$$p(kabul) = min\left[1, \frac{p_c q(\theta_c, \theta_i)}{p_i q(\theta_i, \theta_c)}\right]. \tag{1.27}$$

Eğer simetrik bir teklif dağılımı varsa algoritma şu şekilde indirgenebilir:

$$p(kabul) = min\left[1, \frac{p_c}{p_i}\right]. \tag{1.28}$$

Sonuç olarak kriteri karşılayan bir parametre zincire eklenir ve algoritma yeni bir kabule kadar o parametre ile çalışmaya devam eder. Şekil 1.18'de Metropolis Hasting'in bir şeması çizdirilmiştir. Grafikte θ parametresinin değişimi görülmektedir. Görselde algoritma öncelikle öncül değerler (Prior) ile başlar. Sonrasında her bir yeni zincir için bir θ teklif (Proposal) parametresi önerilir. Eğer θ parametresi Metropolis Hasting kriterini sağlarsa zincire eklenir ve kriteri karşılıyan yeni bir değere kadar o değer ile algoritmaya devam edilir. Önerilen değer eski parametreden daha kötü ve gerekli kriterleri sağlamadığı durumda ise o parametre es geçilir ve optimizasyon aynı değerler ile devam eder. MCMC optimizasyonu iterasyonların sonunda en iyi değerde bitmez. İterasyonların sonucunda elde edilen parametreler birbirleri ile ilişkili bir şekilde rastgele ilerlediklerinden dolayı en iyi değer herhangi bir iterasyonda elde edilebilir ve sadece en iyi değerler kabul edilmediğinden ötürü her zaman daha iyi bir sonuç için iterasyonlar devam eder. Böylelikle tüm uzayda çözüm aranır ve sonuca olan güven artar.

Bu bölümde anlatılan Tayfsal ayırma yöntemi, Bayes istatistiği ve MCMC optimizasyonun kullanımı bir sonraki bölüm olan Yöntem ve Materyal bölümünde detaylıca anlatılmıştır. Yöntemler FDMC kodu içerisinde ortak bir şekilde çalışır.



Şekil 1.18. Metropolis Hasting'in örnek bir şeması

2. BÖLÜM

YÖNTEM VE MATERYAL

Bu tez çalışmasında FDBinary tayfsal ayırma programına entegre edilmiş bir Metropolis Hasting algoritması yazılmıştır. FDBinary kendi içerisinde bir parametre optimizasyon rutinine sahiptir. FDMC kodu o rutini iptal eder ve MCMC tabanlı bir optimizasyon gerçekleştirir. Kullanılan gözlem verileri Polarbase veri tabanından alınmıştır.

FDMC, Python programlama dili kullanılarak yazılmıştır. Linux tabanlı işletim sistemlerinde çalışmaktadır. Kodun çalışabilmesi için FDBinary tayfsal ayırma programınında da kurulu olması gerekir. FDBinary, c programlama dili ile yazılmış ve oldukça hızlı çalışan bir tayfsal ayırma programıdır.

FDMC kodunun içeriğinde kullanılan paket programlar aşağıda listelenmiştir:

- **NumPy**: NumPy,bilimsel hesaplamalar, çok boyutlu listeler ve matrisler için en yaygın olarak kullanılan Python paketidir [30] .
- **random**: Belli koşullar dahilinde rastgele sayılar oluşturmak için kullanılan Python modülüdür.
- **multiprocessing**: Aynı anda bir çok işlemi gerçekleştirmeye yarar. Sistemin sahip olduğu işlemcilere iş paylaşımı gerçekleştirir. Böylelikle her iş bağımsız olarak çalışan daha küçük rutinlere bölünmüş olur.
- **math**: Bir çok matematiksel sabit ve fonksiyonlara erişim sağlayan bir modüldür [31] .
- **corner**: Dağılım grafiği oluşturmak için kullanılan Python modülüdür. [32]
- **matplotlib**: Python'da grafik, hareketli yada etkileşimli görselleştirmelerr oluşturmak için kullanılan bir kitaplıktır [33] .
- **threading**: Multiprocessing modülü ile ortak çalışan, işlemci yönetimi için kullanılan bir modüldür.-

- **subprocess**: Yeni işlemlerin çalışma döngüsünü sağlayan, multiprocessing modülü ile ortak çalışan Python modülüdür.
- **os**: İşletim sistemi ile etkileşim sağlayan işlevler sunan Python modülüdür.

Bu bölümde öncelikle FDBinary ve Spectangular tayfsal ayırma programlarının detayları verilecek ve sonrasında FDMC kodunun çalışma prensibi anlatılacaktır.

2.1. FDBinary

FDBinary, bölüm 1.2.1'de anlatılan Fourier uzayında tayfsal ayırma yöntemini benimseyerek tayfsal ayırma gerçekleştiren bir programdır. Programın kullanımı oldukça basittir. Logaritmik dalga boyunda çalışır. Arayüzü bulunmamakla birlikte Linux işletim sistemini benimseyerek terminal üzerinden çalışmaktadır. Kod ilk olarak 2003 yılında İlicic [1] tarafından yayınlandı. FDBinary tayfsal ayırma programı, kendi web adresi[1] üzerinden indirilebilmektedir.

FDBinary'yi kullanabilmek için öncelikle .obs uzantılı bir gözlem verisi dosyası oluşturulmalıdır. Bu dosya sol kısmında logaritmik biçimde verilmiş dalga boyu sütunundan ve yanına eklenen gözlemlerin o dalga boyuna denk gelen akılarından oluşur. Her sütun eşit uzunlukta olmak zorundadır. Şekil 2.1'de örnek bir .obs dosyası görünmektedir.

```
#  9  X  1344
 8.36567238E+00    9.95044887E-01    9.96760641E-01    9.95053351E-01    1.00411975E+00
 8.36570574E+00    9.97715927E-01    9.94893536E-01    9.85859195E-01    9.98478050E-01
 8.36573909E+00    1.00180827E+00    9.95093146E-01    9.80682042E-01    9.94312725E-01
 8.36577245E+00    1.00121844E+00    1.00140593E+00    9.86944530E-01    9.99596282E-01
 8.36580580E+00    1.00438523E+00    9.98464030E-01    9.96489663E-01    9.97825420E-01
 8.36583916E+00    1.00362339E+00    9.96178495E-01    1.00047504E+00    9.95564412E-01
 8.36587251E+00    9.95530238E-01    9.96581535E-01    9.96331107E-01    9.94714540E-01
 8.36590586E+00    9.98227061E-01    9.94352261E-01    9.99991239E-01    1.00088479E+00
 8.36593922E+00    1.00004970E+00    9.96051155E-01    1.00294104E+00    1.00364146E+00
 8.36597257E+00    9.99876288E-01    1.00167089E+00    1.00480654E+00    1.00142157E+00
 8.36600593E+00    1.00241276E+00    9.93924231E-01    1.00498456E+00    9.96893552E-01
 8.36603928E+00    1.00261379E+00    9.93320523E-01    1.00451969E+00    9.98604064E-01
 8.36607264E+00    1.00048286E+00    9.97503212E-01    1.00313591E+00    1.00537556E+00
 8.36610599E+00    9.94411189E-01    9.94541871E-01    9.98323608E-01    1.00250091E+00
 8.36613934E+00    9.99325519E-01    9.98907490E-01    9.98088988E-01    1.00133941E+00
 8.36617270E+00    1.00888899E+00    1.00458962E+00    9.99147754E-01    1.00073607E+00
 8.36620605E+00    1.00723932E+00    9.96720147E-01    9.95496026E-01    9.96596845E-01
 8.36623941E+00    9.96496619E-01    9.94762585E-01    9.91587906E-01    9.96848992E-01
 8.36627276E+00    9.84367723E-01    9.92170684E-01    9.87647407E-01    9.98241505E-01
 8.36630612E+00    9.80635397E-01    9.80304755E-01    9.83880862E-01    9.95855981E-01
 8.36633947E+00    9.72170501E-01    9.78598757E-01    9.77651264E-01    9.94301868E-01
 8.36637283E+00    9.69897370E-01    9.78988445E-01    9.76505312E-01    9.93702625E-01
 8.36640618E+00    9.83994923E-01    9.77991245E-01    9.86012893E-01    9.94807638E-01
 8.36643953E+00    9.78452914E-01    9.75461476E-01    9.84717289E-01    9.94498503E-01
 8.36647289E+00    9.74167490E-01    9.74509236E-01    9.89101100E-01    9.97646921E-01
 8.36650624E+00    9.76996637E-01    9.76360388E-01    1.00330098E+00    1.00753613E+00
 8.36653960E+00    9.79228332E-01    9.73631567E-01    9.95116762E-01    1.00909852E+00
 8.36657295E+00    9.77026280E-01    9.72147978E-01    9.86424664E-01    1.00696803E+00
 8.36660631E+00    9.69936764E-01    9.72434428E-01    9.78430728E-01    1.00125697E+00
```

Şekil 2.1. FDBinary programı için örnek veri seti.
.obs uzantılı gözlem verisi dosyası sol kısmında logaritmik dalga boyu bulundururken, onun yanına sütünlar şeklinde dizilmiş gözlemlerin akı değerlerinden oluşur.

[1] http://sail.zpf.fer.hr/fdbinary/

Sonrasında .in uzantılı parametre dosyası oluşturulur. Bu dosyasının ilk satırında .obs uzantılı gözlem verisi dosyasının adı, dalga boyu aralığı ve bileşen yıldız sayısı bilgisi bulunur. Bir sonraki satır gözlemlere ait gözlem tarihleri, radyal hız düzeltme parametresi, veri ağırlığı(baskınlık) ve yıldızların akı katkılarından oluşmaktadır. Gözlem tarihleri Jüliyen Günü cinsinden verilmeldir. Bir alt satır üçlü yıldız sistemi için gerekli yörünge parametreleridir. Sonraki satır ise çift yıldız sistemi için gerekli yörünge parametreleridir. Eğer parametrenin optimizasyona girilmesi isteniyorsa bir yan alana parametre hata payı değeri girilebilir. Sıfır girilmesi durumunda parametre optimizasyonu es geçer. Son satır ise optimizasyon sayısı,her optimizasyon rutininde gerçekleşecek iterasyon sayısı ve tolerans değerinden oluşur. Şekil 2.2'de .in dosyasının örnek bir içeriği görünmektedir.

```
V453_Cyg.master.obs   0 10    V453_Cyg    1 1 0

2.480025   0   0.01   0.727273   0.272727
6.531810   0   0.01   0.727273   0.272727
3.424391   0   0.01   0.727273   0.272727
7.651999   0   0.01   1.000000   0.000000
4.472093   0   0.01   0.727273   0.272727
8.474703   0   0.01   0.727273   0.272727
8.615600   0   0.01   0.727273   0.272727
1.489869   0   0.01   0.727273   0.272727

1 0   0 0   0 0   0 0   0 0   0 0

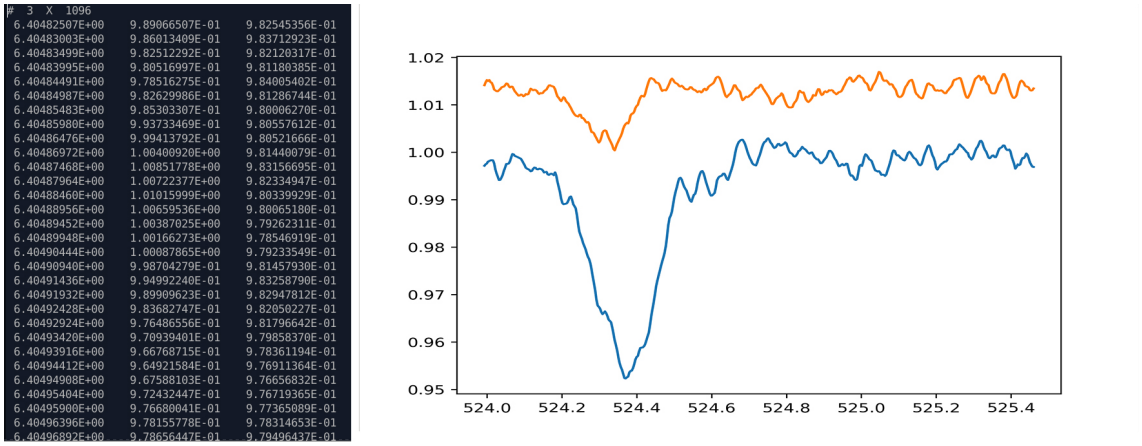
3.8898128 0   0 0   0.1 0   180 0   175 0   225 0   0 0

0  0  0.00001
```

Şekil 2.2. FDBinary programı için örnek parametre dosyası.

Bu noktada artık FDBinary programı çalıştırılmaya hazırdır. Bir Linux terminali içerisinde *./fd3 < *.in > *.out* komutu kullanılarak kod çalıştırılabilir.

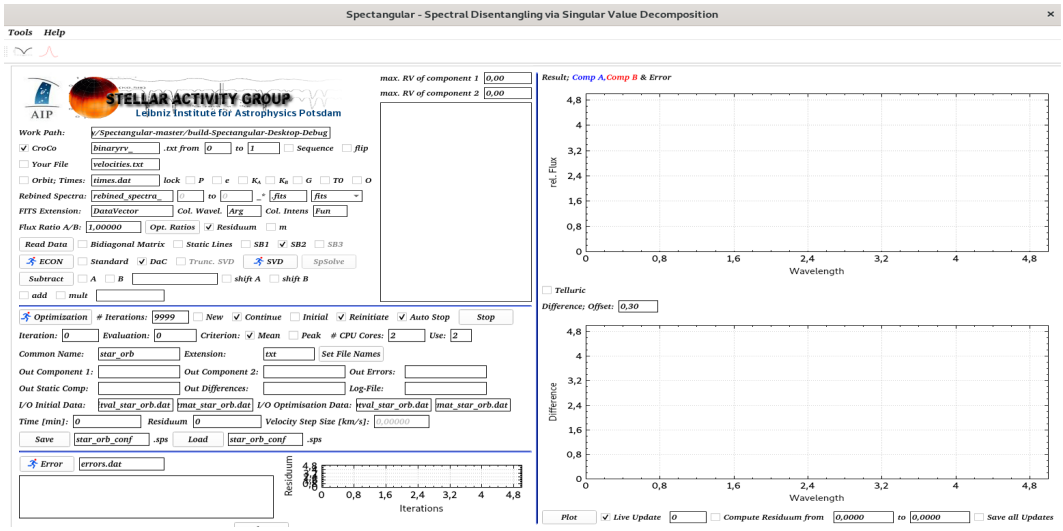
FDBinary işlem sonunda bazi dosyalar oluşturur. .out uzantılı dosya, programın çalışma süreci ve optimizasyon durumlarını içeren dosyadır. Verilen gözlem tarihleri ve yörünge elemanları dikkate alınarak FDBinary programı bileşenlerin hızlarını hesaplar. Bu hesaplanan hızlar .rvs uzantılı bir dosyaya yazılır. İterasyonlar sonucunda elde edilen daha iyi parametre setleri .log dosyasına eklenir. Verilen kompozit tayfların bulunduğu gözlem veri setinin tayfsal ayırma sonucu ise .mod uzantılı dosyadadır. Bu dosya, verilen dalga boyuna karşılık gelen bileşenlerin hesaplanmış yeni akı değerleridir. Her bileşenin akısı farklı bir sütüna yazılır. Şekil 2.3'te örnek bir .mod dosyasının içeriği ve cizdirilmiş hali bulunmaktadır.



Şekil 2.3. .mod dosyasının içeriği ve sonuçların çizdirilmesi.
Sol görselde, dalga boyu ve o dalga boyuna denk gelen ayrılmış tayfların akıları bulunmaktadır. Sağ görsel ise tayfsal ayırma sonucunun çizilmiş halidir.

2.2. Spectangular

Spectangular, tayfsal çözme için tasarlanmış, C yazılım dili ile hazırlanmış arayüzlü bir tayfsal ayırma kodudur [16] . SB1 veya SB2 sistemleri çözmek için kullanılmaktadır. Ayrıca tellürik hatların hesabını da gerçekleştirebilmektedir. Kod ilk olarak Sablowski & Weber [16] tarafından yayınlandı. Program gerekli kütüphanelerin kurulumu sonrası QtCreator aracılığı ile her işletim sisteminde çalışabilmektedir. Şekil 2.4'te Spectangular tayfsal ayırma programının giriş arayüzü görülmektedir. Detaylı bilgi için adresine [2] bakılmalıdır



Şekil 2.4. Spectangular tayfsal ayırma kodunun giriş arayüzü.

[2] https://github.com/DPSablowski/Spectangular

Spectangular, dalga boyu uzayında tayfsal ayırma gerçekleştirmektedir. Kod öncelikle tüm gözlemleri toplar:

$$\vec{o} = (\vec{o}_1, ..., \vec{o}_n)^t \ . \tag{2.1}$$

Sonrasında bir **M** dönüşüm matrisi oluşturulur ve çözülmesi gereken denklem şu hale gelir:

$$\underline{M}.\vec{x} = \vec{o} \tag{2.2}$$

burada $\vec{x}$ vektörü bileşen yıldızların tayfıdır. $\underline{\mathrm{M}}$ dönüşüm matrisi ise, tüm tayfların radyal hız bilgisini içerir. Oldukça büyük bir matris olan $\underline{\mathrm{M}}$ matrisi parçalara ayrılarak işlenebilmektedir. Bunun için Simon $\&$ Sturm [18] çalışmasındaki gibi tekil değer ayrıştırmasına (SVD) başvurulur. Bu ayrılmanın sonucunda bir çok $\underline{\mathbf{N}}$ dönüşüm matrisi elde edilir:

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{1,1} & \cdots & \mathbf{N}_{k,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{N}_{1,n} & \cdots & \mathbf{N}_{k,n} \end{pmatrix} . \tag{2.3}$$

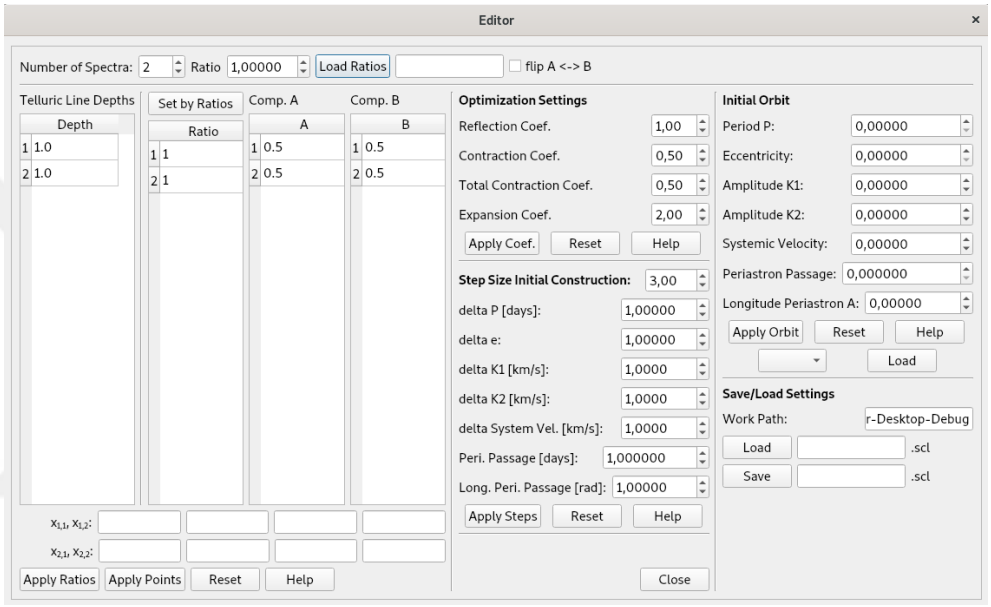
Burada *k*, bileşen yıldızı, *n* ise gözlem sayısını temsil eder. Bu matris içerisinde ki her N_{kj} matrisi, bileşen tayfı ve ona ait radyal hızı verir:

$$\underline{N}_{i,j} = \begin{pmatrix} \overbrace{\mathbf{0} \cdots 1}^{v_{i,j}} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1} \end{pmatrix} . \tag{2.4}$$

$v_{i,j}$, i bileşeninin j gözlemindeki hızını temsil eder. SVD yetersiz veya aşırı belirlenmiş bir sisteme uygulandığı sürece çözüm olarak en küçük kareler uyumu gibi davranır, yani en küçük kareler çözümünü verir [16] . Ayrıca kod optimizasyon yöntemi olarak Downhill-Simplex [19] optimizasyon rutinini benimser.

Spectangular'ı çalıştırabilmek için öncelikle gözlem verisi dosyaları oluşturulmalıdır. Bir klasör içeresinde her gözlem için, o gözleme ait istenilen dalga boyu aralığı ve o dalga boyuna denk gelen akıdan oluşan dosyalar oluşturulur. Oluşturularn dosyaların ortak bir adı ve sıralı bir numarası olması zorunludur. Kod ister gözlem tarihleri ile yada o gözlem için ölçülen radyal hız değerleri ile çalışabilmektedir. Gözlem tarihleri Jülyen Günü cinsinde olmalıdır.

Spectangular arayüz dışında *.sps* uzantılı bir dosya ile terminal üzerinden kullanılabilir. Örnek *.sps* uzantılı dosya Spectangular kurulum dosyası içerisinde mevcuttur. Programın bu şekilde kullanılması durumda yörünge elemanları için ayrı bir dosya oluşturmak gereklidir. Arayüz kullanan kullanıcı $/Tools/Editor$ bölümünden gerekli yörünge elemanlarını girebilir. Şekil 2.5'te yörünge elemanları arayüzü görülmektedir. Görselde sol kısımda her bir gözlem için ölçülen bileşenlerin akı katkıları girilmektedir. En sağ kısımda bulunan $Initial\ Orbit$ bölmesinde gerekli yörünge elemanları verilir.



Şekil 2.5. Spectangular yörünge elemanları arayüzü

Spectangular, tayfsal ayırma sonrası bileşen yıldızların tayfını arayüzde ekrana çizer. İstenirse oluşan $.dat$ uzantılı dosya başka çalışmalar için saklanabilir. Kod gözlem tarihleri ile çalışılması durumunda arayüzün sağ kısmında bulunan alanda her gözlem için hesaplanan radyal hızları yazar. Terminalden çalıştırılması durumunda terminal ekranında bu değerler görünecektir.

2.3. FDMC Kodunun İşleyişi

FDMC kodunun işleyişi ve kullanımı oldukça basittir. Python programlama dili ile yazılmıştır ve bir arayüze sahip değildir. Kodun amacı, bir kompozit tayfın tayfsal ayırma gerçekleştirildikten sonra, MCMC optimizasyon rutinini kullanarak sistemin yörünge parametrelerini en doğru şekilde elde edebilmektir. Elde edilen parametreler sayesinde en hassas tayfsal çözülme işlemi gerçekleştirilebilir.

Optimizasyona başlamadan önce öncelikle bir veri setine ihtiyaç duyulur. Kod FDBinary tayfsal ayırma kodunu kullanarak tayfsal ayırma gerçekleştirir. Bu sebeple gerekli veri seti bölüm 2.1'de anlatılan ile aynıdır (Şekil 2.1). Sonrasında veri setinde bulunan gözlenmiş tayfların gözlem tarihlerinin bulunduğu bir dosya gereklidir. Zamanlar Juliyen günü cinsinden olmalıdır. Dosyanın uzantısı istenilen şekilde kod içerisinde değiştirilebilir. Şekil 2.6'da FDMC kodunun başlangıç ayarları bölümü görülmektedir.

```
#### PREPARATION FOR PROCESS ####

start_directory="/mnt/sda2/ortak/emre/deneme/" # the directiory where you want to start(fd3.1 folder must be there)
folder_name = "FD_MC"
Star_Name = "V453_Cyg" #FOR OBS AND OUTPUT

MP=1 #for multiprocess folders
if MP ==1:
    try:
        jn=ipyparams.notebook_name
        folder_name=folder_name+"_"+jn.split("Copy")[1].split(".")[0]
    except:
        folder_name == folder_name

system = "SB2" #SB2 or SB3
Time= np.loadtxt(Star_Name+"_times.txt") # observation dates file (must be in start_directiory)

#### WAVELENGTH ####
Wl_f=8.3656723837749964start
Wl_l=8.4104672996120464end

if Wl_l > 10: #for log scale
    Wl_f,Wl_l=np.log(Wl_f),np.log(Wl_l)
else:
    Wl_f , Wl_l=Wl_f,Wl_l


#### FLUX ####
F_list=1 # 0 or 1. 1 mean is flux list gived
F_1=0.727300 #flux of primary
F_2=0.272700  #flux of secondary
F_3=0# flux for wide system

if F_list==1:
    if system =="SB2":
        F_list=np.loadtxt(start_directory+"flux.txt") # if system have flux change ,can given flux list.If gived,F_list must be "1" (must be in start_directiory)
        F_1=F_list.T[0] #primary
        F_2=F_list.T[1] #secondary
    elif system =="SB3":
        F_list=np.loadtxt(start_directory+"flux.txt") # if system have flux change,can given flux list.If gived,F_list must be "1" (must be in start_directiory)
        F_1=F_list.T[0] #primary SB2
        F_2=F_list.T[1] #secondary SB2
        F_3=F_list.T[2] #SB3
else:
    F_1=F_1
    F_2=F_2
    F_3=F_3
```

Şekil 2.6. FDMC kodunun başlangıç ayarları

Şekil 2.6'da bulunan koda baktığımızda, $start_directory$ değişkeni kodun çalışırken kullanacağı temel dosya yoludur. Kullanılacak tüm dosyalar bu dosya yolu içerisinde bulunmalıdır. $folder_name$ değişkeni kodun tayfsal ayırma ve optimizasyon rutini gerçekleştireceği klasör adıdır. $system$ değişkeni sistemin türünün belirtileceği yerdir. Kod SB2 ve SB3 sistemler için düzenlenmiştir. $Time$ değişkeni ise oluşturulan gözlem zamanları dosyasının yoludur. Wl_f ve Wl_l başlangıç ve bitiş şeklinde olmak üzere dalga boyu aralığı verilir. Kod logaritmik cinsten dalga boyunda çalışır. Dalga boyu nanometre veya angström cinsinden verildiği taktirde kod verilen değerleri logaritmik cinse dönüştürür. Eğer tutulma gösteren bir çift sistem çalışılıyorsa koda bir bileşen akı listesi verilebilir. Gerek duyulmaz ise koda gerekli değerler girilerek akılar her gözlem ve evrede sabit kabul edilir. Eğer kullanıcı bir akı listesi verecek ise F_list değişkeni 1 verilmelidir. 1 verildiği taktirde, eğer kullanıcı SB2 bir sistem ile veya SB3 bir sistem ile çalışıyorsa akı listesinin bulunduğu dosyanın yolunu düzenleyebilir. Eğer bir akı listesine gerek duyulmuyorsa F_list değişkeni 0 verilir ve F_1 parametresi baş, F_2 parametresi

yoldaş, F_3 parametresi üçüncü bileşen olmak üzre gerekli akı değerleri değişkenlere girilir.

Bu noktada artık gerekli yörünge ve optimizasyon parametreleri girilmelidir. Şekil 2.7'de FDMC kodunun yıldız sistemi ve optimizasyon parametreleri ayarları bölümü görülmektedir.

```
##### For SB2 system ######

SB2=["P_2","T_2","e_2","O_2","K1_2","K2_2"] # parameters for SB2
esti_param_SB2=np.array([104.1,2448127 ,0.0037,310,25.9798,27.0176]) #estimated orbit parameters for SB2 ahd=[104.82128,2448147.6 ,0.00089,342.6,25.9611,26.860]
SB2_mc=[1,1,1,1,1,1] # which parameters need optimization? 0 mean fixed
SB2_sigma=[0.07,1,0.0015,0.7,0.05,0.3]# sigma must be given for all parameters. For no iterations parameters,the value of sigma is not important.

#priors for Inner (min,max)
prior_P2=104,104.2
prior_T0_2=2448126,2448139
prior_e2=0,0.007
prior_w2=309,312
prior_K1_2=25.85,26.10
prior_K2_2=26.5,27.5


#### For SB3 System ######

SB3=["P_3","T_3","e_3","O_3","K1_3","K2_3","P_2","T_2","e_2","O_2","K1_2","K2_2"] #parameters for SB3
esti_param_SB3=np.array([1000,3,0.1,180,175,225,esti_param_SB2[0],esti_param_SB2[1],esti_param_SB2[2],esti_param_SB2[3],esti_param_SB2[4],esti_param_SB2[5]]) #estimated orbit parameters for SB3
SB3_mc=[0,1,1,1,1,1,SB2_mc[0],SB2_mc[1],SB2_mc[2],SB2_mc[3],SB2_mc[4],SB2_mc[5]] # which parameter need optimization? 0 mean fixed
SB3_sigma=[0,1,1,1,1,1,SB2_sigma[0],SB2_sigma[1],SB2_sigma[2],SB2_sigma[3],SB2_sigma[4],SB2_sigma[5]]# sigma must be given for all parameters. For no iterations parameters,the value of sigma is not important.

#priors for Wide (min,max)
prior_P3=0,4
prior_T0_3=0,4
prior_e3=0,0.15
prior_w3=0,360
prior_K1_3=165,185
prior_K2_3=210,240
```

Şekil 2.7. FDMC kodunun yıldız sistemi ve optimizasyon parametreleri ayarları

Şekil 2.7'ye baktığımızda, $esti_param_SB2$ değişkeni, $SB2$ bir çift yıldız sistemi için tahmini başlangıç yörünge parametreleridir. Parametreler sırasıyla; sistemin yörünge denemi P, enberi geçiş zamanı T_0, yörünge dış merkezliliği e, omega açısı ω, baş ve yoldaş bileşenlerin hızları K_1, K_2 şeklinde olmalıdır. $SB2_mc$ parametresi optimizasyona girecek parametreler belirlenir. Burada 1, $esti_param_SB2$ listesinde aynı sıraya denk gelen parametrenin optimizasyona gireceğini gösterir. 0 girilen parametre optimizasyon rutininde sabit kabul edilir. $SB2_sigma$ değişkeni ise $esti_param_SB2$ değişkeninde girilen parametrelerin standart sapma değerleridir. Burada bulunan değerler, optimizasyon esnasında bir parametrenin ne kadarlık bir değişim gösterebileceğini belirler. $prior_$ değişkenleri değişkene atanan parametrenin kabul edilebilecek maksimum ve minimum değer aralığını gösterir.

Görselde $SB3$ parametresinden itibaren, bir önceki paragrafta anlatılan aşamaların SB3 bir sistem için düzenlenmiş hali görülür. SB3 bir sistem için öncelikle SB2 sistem parametreleri girilmelidir. Sonrasında $esti_param_SB3$ değişkeninde düzenleme yapılabilir. $esti_param_SB2$ ile aradaki tek fark $esti_param_SB3$ değişkeni içerisinde SB3 sisteminin yörünge parametrelerini de barındırıyor oluşudur.

Yukarıda belirtilen düzenlemelerden sonra FDMC kodu, tayfsal ayırma aşaması için kod içerisinde çok özel bir durum gerekmedikçe ekstra bir değişime ihtiyaç duymadan çalışır. Artık optimizasyon aşamasına geçilir. Optimizasyon rutini, bölüm 1.3'te anlatılan Bayes istatistiği ve MCMC yöntemi methodunu kullanır. Bu aşamada kullanıcının sadece optimizasyon iterasyon sayısını vermesi yeterli olacaktır.

FDMC kodunun optimizasyon rutini öncelikle hangi parametrelerin optimizasyona gireceğini belirler. Sonrasında kullanıcının vermiş olduğu başlangıç parametreleri ile bir parametre seti(posterior) oluşturur. Her iterasyonda yalnızca bir parametre optimizasyona girer ve bu parametre rastgele bir şekilde kod tarafından seçilir. Seçilen parametre, kullanıcının $SB2_sigma$ değişkeninde o parametre için belirlediği standart sapma değerine ve o parametre için o anda kabul edilen en iyi parametre değeri ile (başlangıç durumunda bu değer, kullanıcının o parametre için girdiği değerdir) rastgele bir şekilde yeniden üğretilir. Üğretilen rastgele yeni değer yeni bir parametre setinde (teklif,proposal) eski değerinin yerine eklenir. Oluşan yeni parametre seti, öncelikle kullanıcının belirlediği parametrelerin alabileceği maksimum ve minimum değer aralığı kontrolünden geçer. Eğer bir parametre o değer aralığından fazla yada az ise iterasyon otomatik olarak 0 değerini döndürür. Eğer değerler uygun ise o veri seti ile tayfsal ayırma aşamasına geçilir. Tayfsal ayırma sonucunda gözlem verileri ile oluşturulan modelin arasındaki farkı olan chi^2 değeri elde edilir.

Bu aşamada oluşturulan yeni parametre setinin, bir önceki kabul edilen parametre setinden (başlangıçta kullanıcının girdiği parametre seti) daha iyi olup olmadığı kıyası gerçekleştirmelidir. Bunun için iki parametre seti içinde tayfsal ayırma sonucunda elde edilen chi^2 değerleri kıyaslanır. Eğer yeni veri seti ile elde edilen chi^2 değeri eskisine göre daha küçükse, yeni veri seti kabul edilir ve iterasyon artık o değerlerle devam eder. Ama burada ekstradan bir kabul kriterine ihtiyaç duyulmaktadır. Bunun en temel sebebi, eğer kıyaslar sonucunda sadece daha küçük chi^2 değerleri kabul edilirse, sonucun yerel

bir minimum noktaya yakınsanmış olabileceğidir. Bu sebeple denklem 1.27 kullanılarak bu kabul daha rastgele bir hal alır. Kriter, öncelikle en son kabul edilen parametre seti ile yeni oluşturulan parametre setinin chi^2 sonuçlarını birbirine böler. Sonrasında elde edilen sonucu 0 ile 1 arasında rastgele atanmış bir sayı ile kıyaslar. Eğer atanan sayı, bölme işlemi sonucundan daha küçük ise parametre seti kabul edilir. Eğer yeni parametre setinin chi^2 sonucu, kabul edilen parametre setinin chi^2 sonucundan daha küçükse sonuç 1'den büyük çıkacaktır ve kesinlikle kabul edilecektir. Eğer yeni parametre setinin chi^2 sonucu daha büyükse, atanan rastgele sayıya bağlı bir şekilde kabulü gerçekleşecektir. Böylelikle tüm uzayda çözüm aranması amaçlanmıştır. Bu işlem kullanıcının belirlediği iterasyon sayısı kadar, bir döngü şeklinde devam eder.

Optimizasyon sonunda FDMC kodu kabul edilen en iyi parametre setini, en iyi chi^2 sonucunu ve iterasyon bilgilerini ekrana yazar. Aşağıda örnek bir FDMC sonuç çıktısı görülmektedir.

```
number of rejected parameters on prior: 5320
P rejected 1680 times.
T0 rejected 1324 times.
e rejected 287 times.
w rejected 666 times.
K1 rejected 1013 times.
K2 rejected 350 times.

 ### Ratio of Changed Parameter ###
P changed 5070(%0.169) times.
T0 changed 4960(%0.16533) times.
e changed 5011(%0.167033) times.
w changed 4925(%0.164166) times.
K1 changed 4893(%0.1631) times.
K2 changed 5141(%0.171366) times.

 ### Iteration Results ###
Total Iteration= 30000
Accept ratio= %37.22

Best Chi2= [3198.03]
Best Orbit Parameters From MCMC(P,T0,e,W,K1,K2): [3.876704939687294, 3.76529182210,
 0.0078377462258526, 269.70641563894105, 173.66967501408988, 218.52131244314097]
```

Yukarda bulunan $accept\ ratio$ parametresi, kabul edilen veri setinin toplam iterasyona oranıdır. Bu oranın %25 ile %40 arasında bir değer olması beklenir. Aksi taktirde sonuca olan güven azalacaktır. FDMC kodu analiz için kabul edilen her chi^2 değerini, önerilen her parametreyi ve bütün iterasyon zincirini saklar. Böylelikle kullanıcı optimizasyon rutini adımlarını izleyebilir ve detaylı analizini gerçekleştirebilir. Ayrıca yeni parametre seti ile elde edilen radyal hız sonuçları evreye göre FDMC kodu ile çizdirilebilir. FDMC, optimizasyon sonucunda parametrelerin dağılımı ve aralarındaki ilişkiyi anlamak adına corner diyagramına başvurur. Örnek sonuçlar bölüm 3'te görülmektedir.

FDMC kodu, gerekli düzenlemelerin ardından en stabil hali ile https://https://github.com/EmreBarbaros/FDMC adresi üzerinden erişilebilir hale gelecektir.

2.4. Yıldızların Belirlenmesi

Bu tez çalışması kapsamında analiz için üç adet yıldız belirlenmiştir. Bu yıldızların seçilmesindeki en önemli etken, literatürde bu yıldızlar hakkında önceden tayfsal ayırma çalışmaları olması ve FDMC kodu kullanılarak elde edilecek yeni verilerin bu çalışmalar ile kıyasının yapılabilmesini sağlamaktır. Bu kıyaslar neticesinde FDMC kodunun, diğer sonuçlara kıyasla ne kadar daha tutarlı olduğu belirlenmiştir. Bu bölümde seçilen yıldızlar hakkında genel bilgiler yer almaktadır.

2.4.1. V453 Cygni

V453 Cygni yada HD 227696, her iki bileşen için de doğru fiziksel özelliklerin ölçüldüğü, yüksek kütleli ve tutulma gösteren bir SB2 tayfsal çift yıldız sistemidir [34] . Bu tarz sistemlerde iki bileşenin içinde doğru fiziksel parametrelerin hesaplanmış olması çok görülen bir durum değildir. Sistemdeki parlaklık değişkenliği ilk olarak 1939 yılında Wachmann [35] tarafından keşfedilmiştir. Sistemin baş yıldızı ömrünün sonuna yaklaşmış erken B türü bir yıldız iken, yoldaş yıldız ömrünün yarısına yakın bir vaktini geçirmiş anakolda bulunan B tür bir yıldızdır. Gerçekleştirilen tayfsal gözlemler sonucunda baş bileşenin kütlesi $M_A = 14.36 \pm 0.20 M_\odot$ iken yoldaş yıldızın kütlesi $M_B = 11.11 \pm 0.13 M_\odot$ hesaplanmıştır [34] . Sistemin ışık eğrisi analizleri sonucunda gözlenen derin tutulmalar sayesinde ise sistemin yarıçapı yüksek bir hassasiyet ile hesaplamıştır; $R_A = 8,55 \pm 0,06 R_\odot$, $R_B = 5,49 \pm 0,06 R_\odot$ [34] . Sistemin yörünge dönemi Cohen 1974 [36] çalışmasında:

$$T_{min.I} = HJD\ 2,439,340.0988 + 3^g.8898128E \tag{2.5}$$

olarak belirlenmiştir.

V453 Cygni çift yıldız sisteminin, ilk olarak Simon & Sturm 1994 çalışmasında tayfsal analizi gerçekleştirilmiştir. Simon & Sturm çalışmada bu çift yıldız sistemini, sistemi oluşturan yıldızların büyük yarıçaplara sahip olması ve tam bir tutulma göstermesi

nedeniyle seçmiştir. Daha sonrasında 2003 yılında İlicic [1] , FDBinary tayfsal ayırma programını kullanarak sistemin tayfsal analizini gerçekleştirmiştir. Bu çalışmanın sonucunda sistemin elde edilen yörünge parametreleri Tablo 2.1'de yer almaktadır.

Tablo 2.1. V453 Cygni tayfsal çift yıldız sisteminin İlicic 2003 [1] çalışmasında elde edilen yörünge parametreleri

Parametre	İlicic 2003 [1]
P	$3^g.8898128$
T_0	1.1650227
e	0.0236509373
ω	$389°.854692$
K_1 (km/s)	174.149809
K_2 (km/s)	217.773225

2.4.2. Capella A

Capella yada diğer adıyla Alf Auriga, kışın gökyüzüne bakıldığında görülebilecek en parlak yıldızlardan bir tanesidir. Bir tayfsal yıldız sistemi olan Capella, parlaklığı sebebi ile çok uzun zamandan beri bilinen yıldızlardandır. Sistem Capella Aa, Capella Ab ve Capella H, Capella L yıldızlarından oluşan dörtlü bir sistemdir. Capella Aa ve Capella Ab kendi aralarında tayfsal bir çift yıldız sistemi iken, Capella H ve Capella L diğer sisteme oldukça uzak bir çift yıldız sistemidir.

Capella A sistemi sistemi iki dev yıldızdan oluşur. Sistemin baş bileşeni Capella Aa $2.5687 \pm 0.0074\ M\odot$ bir kütleye ve $11.98 \pm 0.57\ R\odot$ bir yarıçapa sahipken , yoldaş bileşen Capella Ab ise $2.4828 \pm 0.0067\ M\odot$ bir kütleye ve $8.83 \pm 0.33\ R\odot$ bir yarıçapa sahiptir [2] . Ayrıca Capella A sistemini oluşturan yıldızların sıcaklıkları çok iyi bilinmektedir; Capella Aa 4,970 K, Capella Ab 5730 K. Capella A sistemi, evrimleşmiş yıldızlara kıyasla benzersiz bir yıldız sistemidir. Bunun en büyük sebebi sistemin kimyasal yapısı hakkında bir çok bilgi biliniyor olmasıdır [2] . Sistemin baş bileşeni daha uzun bir ömüre sahip, çekirdeğinde helyum yakma aşamasına geçmiş bir yıldız iken yoldaş bileşen Hetzburg boşluğunda bulunan bir yıldızdır. Capella A sistemi için gerçekleştirilen güncel çalışmalardan Torres ve ark. 2005 [2] çalışmasında sistemin yörünge dönemi:

$$T_{min.I} = HJD\ 2,448,147.6 + 104^g.02128 \tag{2.6}$$

olarak bulunmuştur.

Capella A tayfsal çift yıldzı sistemi, bir çok tayfsal analiz çalışamasına sahiptir. Çok uzak bir yıldız sistemi olmayışı, dev bir yıldız olması ve parlak oluşu Capella A sistemini çalışılabilir kılar. Torres ve ark. [2] çalışması Capella A sistemi için tayfsal ayırmanın ve parametre analizinin gerçekleştirildiği örnek çalışmalardan birisidir. Ayrıca Spectangular tayfsal ayırma programı için seçilen referans yıldız Capella A sistemidir. Sablowski & Weber [16] çalışmasında Spectangular kullanılarak Capella A sistemine tayfsal ayırma gerçekleştirilmiştir. Lakin sistemin yörünge parametrelerine çalışmada yer verilmemiştir. Torres ve ark. [2] çalışması ile Capella A sistemi için hesaplanan yörünge parametrelerine Tablo 2.2'de yer verilmiştir.

Tablo 2.2. Capella tayfsal çift yıldız sisteminin Torres ve ark. [2] çalışmasında elde edilen yörünge parametreleri

Parametre	Torres ve ark. [2]
P	$104^g.02128 \pm 0.00016$
T_0 (HJD$-$2,400,000)	48147.6 ± 2.6
e	0.00089 ± 0.00011
ω	$342^\circ.6 \pm 9$
K_1 (km/s)	25.9611 ± 0.0044
K_2 (km/s)	26.860 ± 0.017

2.4.3. HD 5550

HD 5550 yada diğer adı ile HR 273, Cassiopeia takım yıldızında bulunan ve görsel parlaklığı 5.9 kadir olan bir tayfsal çift yıldız sistemidir. Gözlemler sonucu elde edilen sistemin kompozit tayfının kimyasal yapısının kendisine özgün oluşu HD 5550 yıldızını özel kılar. Sistem Ap SrCrEu tip bir sistem olarak belirlenmiştir [37]. Sistem ilk olarak Carrier ve ark. 2002 [38] çalışmasında gözlenmiş ve SB2 olarak belirlenmiştir.

Sistem baş bileşeni bir Ap yıldızı iken yoldaş bileşen Am yıldızıdır. Ayrıca sistemin 100 Gauss'luk bir manyetik alana sahiptir. Hem bileşenlerinin türleri hem de kendi türündeki yıldızlara nazaran çok daha silik bir manyetik alana sahip oluşu sisteminin özel olduğunu gösterir. Ayrıca bir Ap yıldızı içeren SB2 bir yıldız sistemi oldukça nadir bir durumdur. Baş bileşen 11400 K, yoldaş bileşen 7800 K bir sıcaklığa sahiptir ve baş bileşenin yarıçapı yoldaş yıldızın yarıçapının 1.24 katıdır [3]. Baş bileşen, A0III tipine

bir yıldızdır ve çok güçlü stronsiyum , krom ve öropyum çizgilerine sahiptir [38] . Bu alışla gelmiş durumlardan aykırı bir durumdur. Güncel bir çalışma olan Alecian ve ark. [3] çalışmasında sistemin yörünge dönemi:

$$T_{min.I} = HJD\ 2,450,988.46 + 6^{g}.82054 \tag{2.7}$$

olarak hesaplanmıştır.

HD 5550 sisteminin çok fazla tayfsal analiz çalışması bulunmamaktadır. Sistemin özel oluşu hakkında bir çalışma gerçekleştirmeyi zorlaştırır. Alecian ve ark. [3] çalışması sistemin en güncel çalışmasıdır. Çalışmada ayrıca FDBinary tayfsal ayırma programı kullanılarak tayfsal ayırma gerçekleştirilmiştir. Tayfsal ayırma sonuçları paylaşılmış ve sistemin yörünge parametrelerine yer verilmiştir. Tablo 2.3'te bu parametreler bulunmaktadır.

Tablo 2.3. HD 5550 tayfsal çift yıldız sisteminin Alecian ve ark. [3] çalışmasında elde edilen yörünge parametreleri

Parametre	Alecian ve ark. [3]
P	$6^{g}.82054$
T_0 (HJD$-$2,400,000)	50,988.46 $\pm$ 0.05
e	0.006 $\pm$ 0.001
ω	169.5°.6 $\pm$ 2.3
K_1 (km/s)	24.97 $\pm$ 0.05
K_2 (km/s)	38.58 $\pm$ 0.15

Bir sonraki bölüm olan bulgular bölümünde seçilen tayfsal çift yıldız sistemlerinin FDMC kodu ile elde edilen sonuçlarına ve diğer yöntemler ile elde edilen sonuçlar ile kıyasına yer verilmiştir.

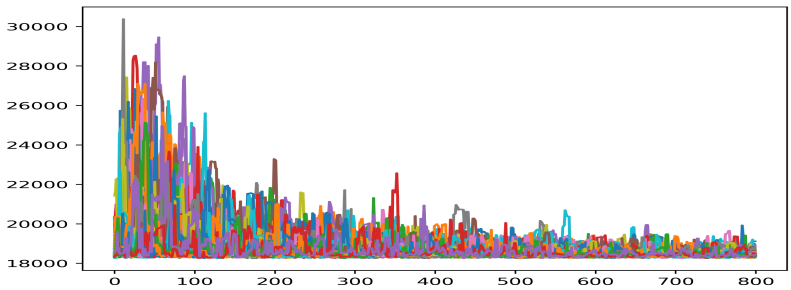
3. BÖLÜM

BULGULAR

Bu bölümde FDMC kodu ile elde edilen sonuçlara yer verilmiştir. Seçilen yıldızlar literatürde çalışmaları bulunan tayfsal çift yıldız sistemleridir. FDMC kodu ile elde edilen sonuçlar bu çalışmalarda elde edilen sonuçlar ile kıyaslanacaktır. Bu şekilde FDMC kodunun verimliliği ve hassasiyeti ölçülecektir.

3.1. Uygulamalar

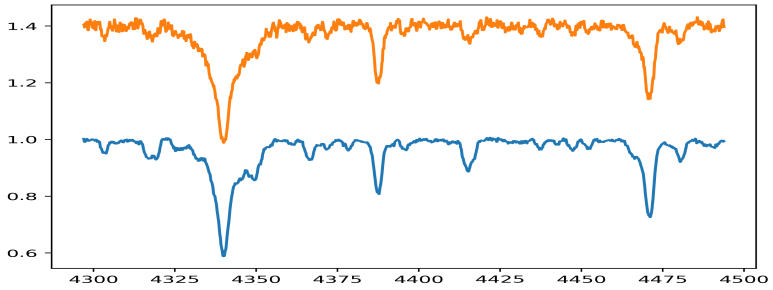
Her bir yıldız sistemi için FDMC kodu çalıştırılırken aynı anda 100 adet optimizasyon başlatılmıştır. Her bir optimizasyon 30000 iterasyon içerir. Her bir optimizasyon kabul edilen veri setlerinden oluşan bir zincir oluşturur ve her zincir diğer optimizasyonlardan bağımsız bir şekilde ilerler. Tüm iterasyonların bitimi sonucunda zincirlerin ortak bir yere doğru yönelmesi beklenir. Şekil 3.1'de örnek bir FDMC zincir dağılımı görülmektedir. Görselde x ekseninde kabul edilen değer sayısı bulunurken, y ekseninde chi^2 değerleri bulunmaktadır. Her bir zincir belirlenen öncül değerler aralığında rastgele değerlerden oluşturulmuş bir veri seti ile başlar. Böylelikle farklı veri setleri ile başlamış zincirlerin ortak bir noktaya doğru kayması doğru yolda olunduğunu gösterir. Bölüm 1.3.2'de anlatıldığı üzre sadece en iyi sonuçlar kabul edilmez. Böylelikle tüm uzayda sonuç aranır.



Şekil 3.1. Örnek bir FDMC optimizasyon zincir dağılımı

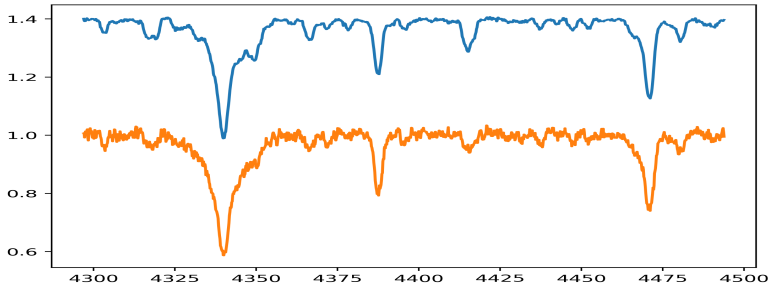
3.1.1. V453 Cyg

Bölüm 2.3.1.1'de V453 Cygni yıldız sistemi hakkında gerekli bilgiler verilmiştir. Yıldız ilk olarak tayfsal çözülmede öncü çalışma olan Simon & Sturm [18] çalışmasında kullanılmıştır. Bu sebeple tayfsal ayırma yöntemlerinden referans yıldızlardan kabul edilir. İlicic 2003 [1] çalışmasında yıldızın tayfsal ayırması gerçekleştirilmiştir. Tablo 2.1'de ayırma sonucunda elde edilen yörünge parametreleri mevcuttur. Şekil 3.2'de bu çalışmanın sonucunda elde edilen ayrılmış tayflar görülmektedir.



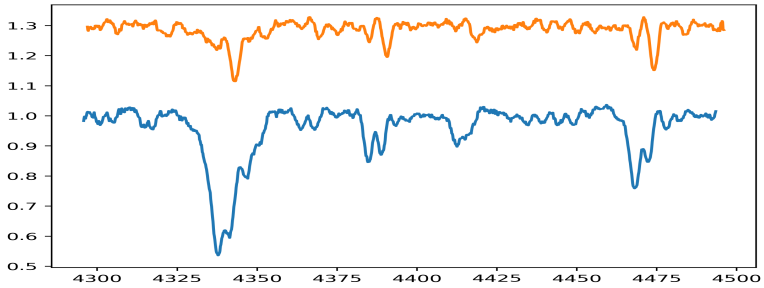
Şekil 3.2. FDBinary tayfsal ayırma programı ile V453 Cygni yıldızı için gerçekleştirilen tayfsal ayırma sonuçları.
Görselde alt kısımda bulunan tayf baş bileşene, üst kısımda bulunan tayf ise yoldaş bileşene aittir. Bileşen akı katkıları sabit ve eşit kabul edilmiştir.

FDMC kodu ile de İlicic 2003 [1] çalışmasında kullanılan tayflar ile ayırma gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlar şekil 3.3'de görülmektedir.



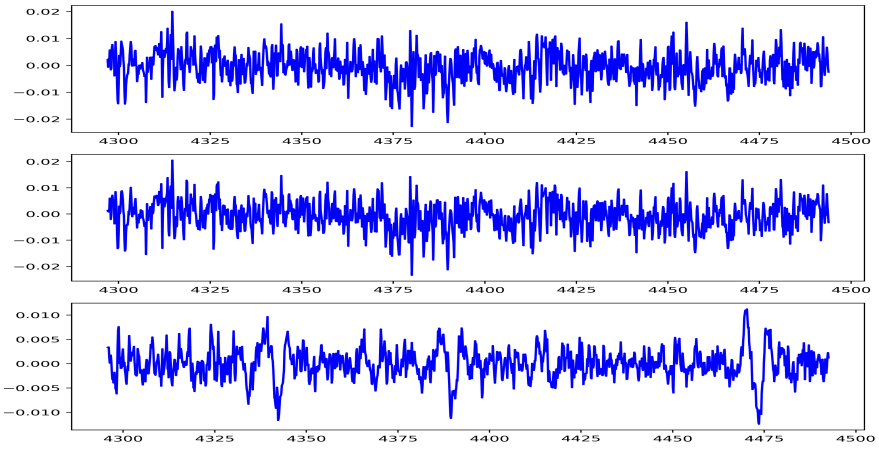
Şekil 3.3. FDMC kodu ile V453 Cygni yıldızı için gerçekleştirilen tayfsal ayırma sonuçları.
Görselde alt kısımda bulunan tayf baş bileşene, üst kısımda bulunan tayf ise yoldaş bileşene aittir. Bileşen akı katkıları sabit ve eşit kabul edilmiştir.

Şekil 3.4'te ise Spectangular tayfsal ayırma programı ile V453 Cyg yıldızı için gerçekleştirilmiş tayfsal ayırma sonucu görülmektedir.



Şekil 3.4. Spectangular ile V453 Cygni yıldızı için gerçekleştirilen tayfsal ayırma sonuçları.
Görselde alt kısımda bulunan tayf baş bileşene, üst kısımda bulunan tayf ise yoldaş bileşene aittir

Tayfsal ayırma sonucunda elde edilen kalıntı sonuçları şekil 3.5'te verilmiştir.



Şekil 3.5. Tayfsal ayırma sonunda kalıntı sonuçları
En üstte FDBinary tayfsal ayırma programı ile ortada FDMC kodu ile ve en altta Spectangular ile gerçekleştirilen tayfsal ayırma sonuçlarının kalıntı sonuçları bulunmaktadır

FDMC kodu ile gerçekleştirilen optimizasyonlar sonucunda, FDBinary tayfsal ayırma programı ve Spectangular tayfsal ayırma programlarının optimizasyon sonuçlarına nazaran daha küçük chi^2 değeri elde edilmiştir. Ayrıca FDBinary ve Spectangular tayfsal ayırma programları optimizasyon sonucunda hata analizi gerçekleştirmez. Şekil 3.6'da FDMC kodu ile V453 Cyg sistemi için gerçekleştirmiş optimizasyon sonucunun corner dağılımı görülmektedir. Bu dağılım sayesinde parametreler arasındaki ilişki anlaşılabilir.

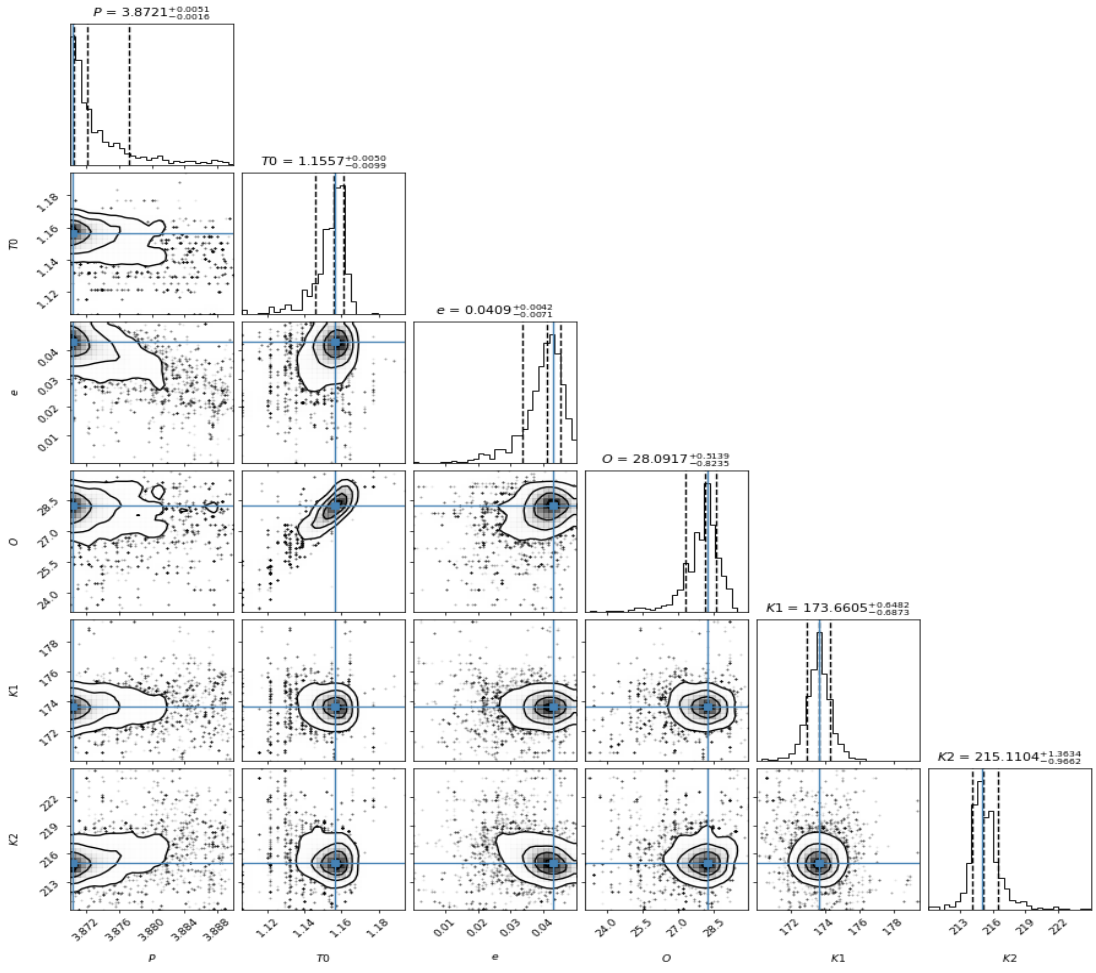
```
number of rejected parameters on prior: 8498
P rejected 2223 times.
T0 rejected 3049 times.
e rejected 955 times.
w rejected 1241 times.
K1 rejected 719 times.
K2 rejected 301 times.

 ### Ratio of Changed Parameter ###
P changed 4979(%0.165999) times.
T0 changed 4967(%0.165555) times.
e changed 5019(%0.1673) times.
w changed 4966(%0.16555) times.
K1 changed 5027(%0.1675566) times.
K2 changed 5042(%0.168066) times.

 ### Iteration Results ###
Total Iteration= 30000
Accept ratio= %24.4333

Best Chi2= [3088.29]
Best Orbit Parameters From MCMC(P,T0,e,W,K1,K2): [3.8701738309476363, 1.1583172359010308,
 0.042819828928181909, 28.196082995447085, 173.79362142415266, 214.775853232922231]
```

FDMC kodu optimizasyon sonucunda tutarlı bir kabul oranı yakalanmıştır.



Şekil 3.6. FDMC kodu ile gerçekleştirilen optimizasyon sonucu elde edilen veri seti dağılımları

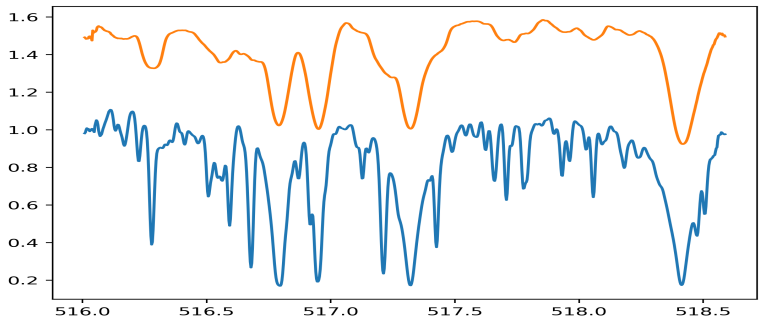
Tablo 3.1'de FDMC kodu ve FDBinary tayfsal ayırma programı ile elde edilen yörünge parametreleri bulunmaktadır. FDMC kodu ile elde edilen parametrelerin hataları da tabloda verilmiştir.

Tablo 3.1. İlicic 2003 [1] çalışması, Spectangular tayfsal ayırma programı ve FDMC kodu ile V453 Cyg sistemi için elde edilen yörünge parametreleri

Parametre	İlicic 2003 [1]	Spectangular	FDMC
P	$3^g.8898128$	$3^g.8898128$	$3^g.870173\ ^{+\ 0.0051}_{-\ 0.0016}$
T_0	1.1650227	1.1624234	$1.158317\ ^{+\ 0.0050}_{-\ 0.0099}$
e	0.0236509373	0.3242	$0.042819\ ^{+\ 0.0042}_{-\ 0.0071}$
ω	$389°.854692$	$179°.9946913$	$28°.196082\ ^{+\ 0.5139}_{-\ 0.8235}$
K_1 (km/s)	174.149809	174.31241	$173.793621\ ^{+\ 0.6482}_{-\ 0.6873}$
K_2 (km/s)	217.773225	294.07597695233	$214.775853\ ^{+\ 1.3634}_{-\ 0.9662}$

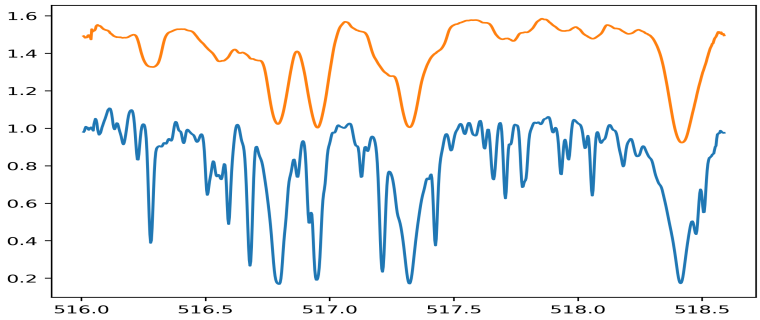
3.1.2. Capella A

Bölüm 2.3.1.2'de Capella A tayfsal çift yıldız sistemi hakkında gerekli bilgiler verilmiştir. Yıldız Spectangular tayfsal ayırma programının referans yıldızıdır. Tablo 2.2'de Capella A yada diğer adı ile alf Aur tayfsal çift yıldız sisteminin Torres ve ark. [2] çalışmasında hesaplanan yörünge parametreleri bulunmaktadır. Çalışmada FDBinary kullanılmıştır. Capella sistemi için PolarBase veri arşivinden seçilmiş yüksek çözünürlüklü 42 tayf kullanılmıştır. Şekil 3.7'de tablo 2.2'de bulunan yörünge parametleri ile Capella yıldızı için gerçekleştirilmiş tayfsal ayırma sonuçları bulunmaktadır.



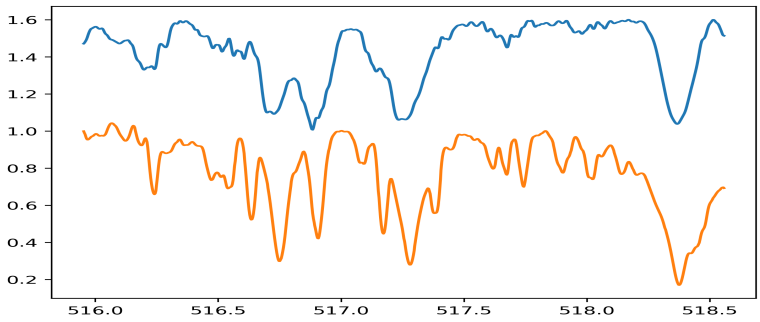
Şekil 3.7. FDBinary programı ile Capella yıldızı için gerçekleştirilen tayfsal ayırma sonuçları.
Görselde alt kısımda bulunan tayf baş bileşene, üst kısımda bulunan tayf ise yoldaş bileşene aittir. Bileşen akı katkıları sabit ve eşit kabul edilmiştir

FDMC kodu ile gerçekleştirilen tayfsal ayırma sonuçları şekil 3.8'de bulunmaktadır.



Şekil 3.8. FDMC kodu ile Capella yıldızı için gerçekleştirilen tayfsal ayırma sonuçları. Görselde alt kısımda bulunan tayf baş bileşene, üst kısımda bulunan tayf ise yoldaş bileşene aittir. Bileşen akı katkıları sabit ve eşit kabul edilmiştir

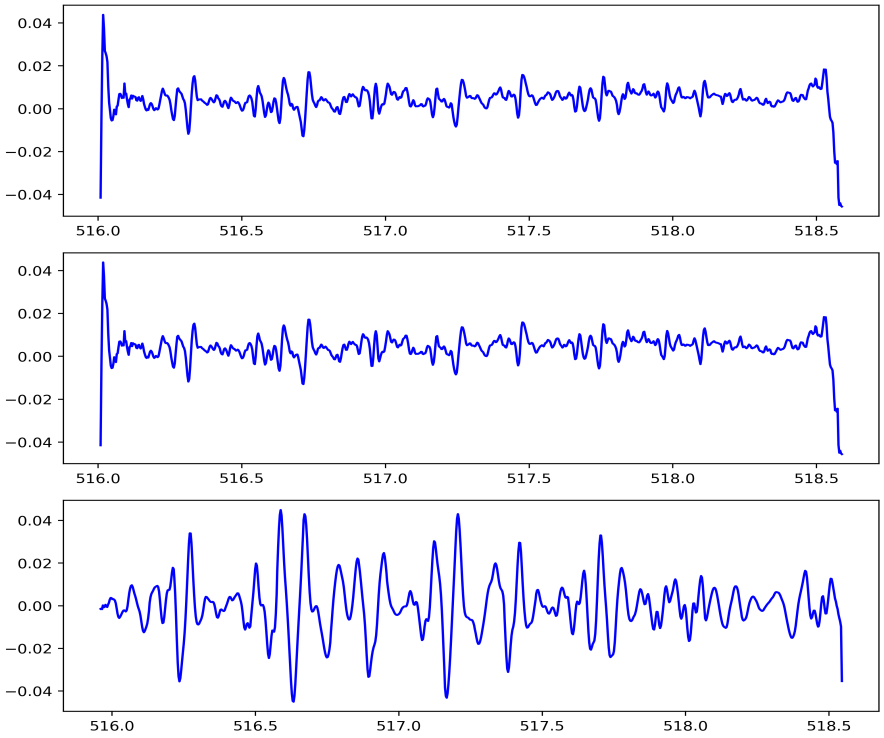
Sablowski & Weber [16] çalışmasında Spectangular kullanılarak Capella yıldızında tayfsal ayırma gerçekleştirilmiştir lakin elde edilen yörünge parametreleri paylaşılmamıştır. Tablo 2.2'de verilen yörünge parametreleri kullanılarak Spectangular ile gerçekleştirilen tayfsal ayırma sonuçları tablo 3.9'de gösterilmiştir.



Şekil 3.9. Spectangular ile Capella yıldızı için gerçekleştirilen tayfsal ayırma sonuçları. Görselde alt kısımda bulunan tayf baş bileşene, üst kısımda bulunan tayf ise yoldaş bileşene aittir. Bileşen akı katkıları sabit ve eşit kabul edilmiştir

Tayfsal ayırma sonucunda elde edilen kalıntı sonuçları şekil 3.10'da verilmiştir.

Capella yıldız sistemi için gerçekleştirilen tayfsal ayırmaların sonucunda FDMC kodunun FDBinary ve Spectangular tayfsal ayırma programlarına nazaran daha küçük bir chi^2 değerine sahip olduğu görülmüştür. Şekil 3.10'a bakıldığında kalıntı değerlerinde FDBinary programı ile FDMC kodu kalıntı değerlerinin benzer olduğu görülür. FDBinary ve FDMC kalıntı sonuçlarındaki baş ve bitiş bölgelerde bulunan düşmeler bölüm 1.2.1'de anlatıldığı gibi DFT'den kaynaklıdır.



Şekil 3.10. Tayfsal ayırma sonunda kalıntı sonuçları
En üstte FDBinary tayfsal ayırma programı ile ortada FDMC kodu ile ve en altta Spectangular ile gerçekleştirilen tayfsal ayırma sonuçlarının kalıntı sonuçları bulunmaktadır

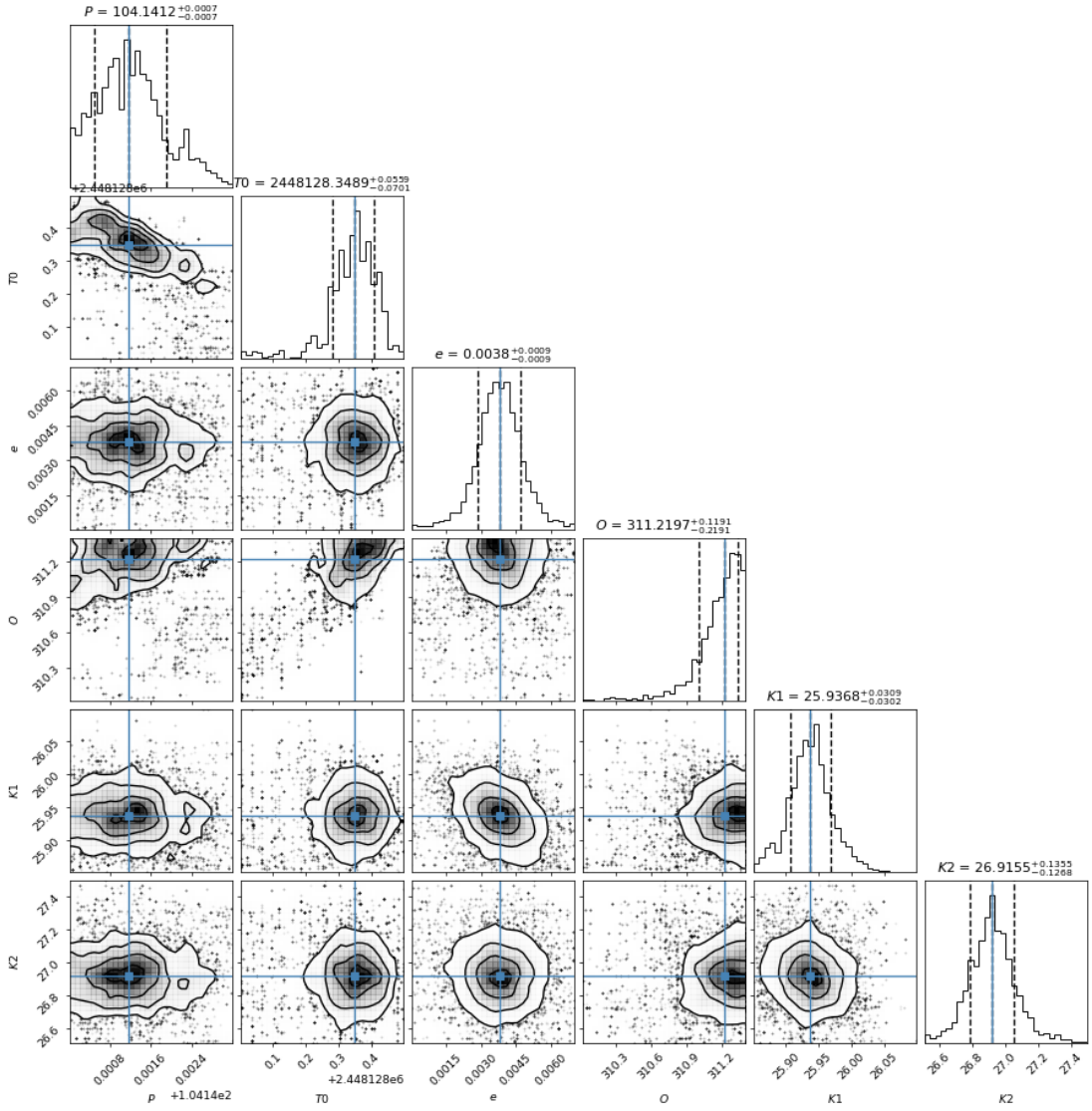
Şekil 3.11'de FDMC kodu ile Capella sistemi için gerçekleştirilen optimizasyon sonuçlarının corner dağılımı görülmektedir. Optimizasyon sonucunda FDMC sonuç çıktısı aşağıda verilmiştir.

```
number of rejected parameters on prior: 5177
P rejected 1491 times.
T0 rejected 1254 times.
e rejected 305 times.
w rejected 1219 times.
K1 rejected 195 times.
K2 rejected 713 times.

 ### Ratio of Changed Parameter ###
P changed 5069(%0.1689666) times.
T0 changed 4907(%0.163566) times.
e changed 4914(%0.1638) times.
w changed 4990(%0.166333) times.
K1 changed 5064(%0.1688) times.
K2 changed 5056(%0.1685333) times.

 ### Iteration Results ###
Total Iteration= 30000
Accept ratio= %36.43

Best Chi2= [17480.2]
Best Orbit Parameters From MCMC(P,T0,e,W,K1,K2): [104.14089847104555, 2448128.418606265,
 0.00375285231837004096, 311.36020173084546, 25.937773395910845, 26.91681933636003]
```



Şekil 3.11. FDMC kodu ile gerçekleştirilen optimizasyon sonucu elde edilen veri seti dağılımları

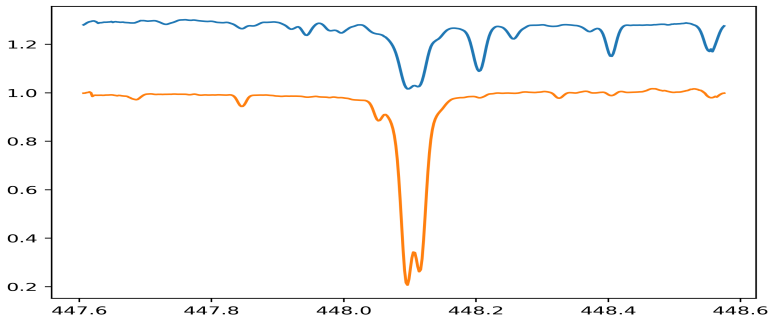
Şekil 3.11'e baktığımızda öncül değerlerin yanlış seçilmesinden dolayı dağılımlar tam anlamıyla görülememektedir. Elde edilen yörünge parametreleri dağılım sonucu elde edilen hataları ile birlikte tablo 3.2'de görülmektedir. Ayrıca FDBinary ve Spectangular sonuçlarıda tabloda yer almaktadır.

Tablo 3.2. FDBinary tayfsal ayırma programı, Spectangular tayfsal ayırma programı ve FDMC kodu ile Capella A sistemi için elde edilen yörünge parametreleri

Parametre	FDBinary	Spectangular	FDMC
P	$104^g.14229$	$104^g.021262$	$104^g.140898\ ^{+\ 0.0007}_{-\ 0.0007}$
T_0	2448128.42	2448147.6	$2448128.418606\ ^{+\ 0.0559}_{-\ 0.0701}$
e	0.00375705154	0.00073	$0.003752\ ^{+\ 0.0009}_{-\ 0.0009}$
ω	$311°.777153$	$342°.53546$	$311°.360201\ ^{+\ 0.1191}_{-\ 0.2191}$
K_1 (km/s)	25.937232	25.9613	$25.937773\ ^{+\ 0.0309}_{-\ 0.0302}$
K_2 (km/s)	26.9125201	38.7577	$26.916819\ ^{+\ 0.1355}_{-\ 0.1268}$

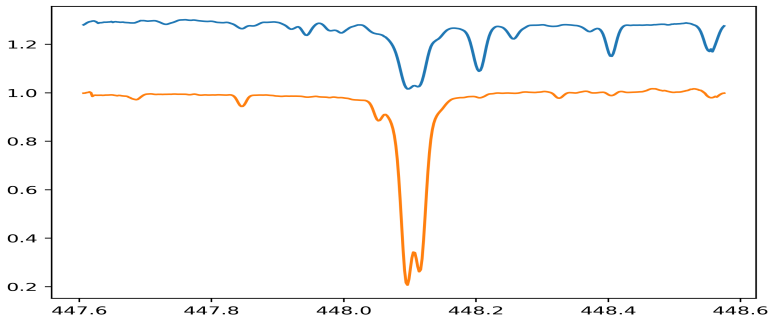
3.1.3. HD 5550

Bölüm 2.3.1.3'de HD 5550 tayfsal çift yıldız sistemi hakkında gerekli bilgiler verilmiştir. Yıldızın tayfsal analizi Alecian ve ark. [3] çalışmasında paylaşılmıştır. Ayırma FDBinary tayfsal ayırma programı kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Tablo 2.3'te çalışmada elde edilen yörünge parametreleri verilmiştir. HD 5550 sistemi için PolarBase veri arşivinden seçilmiş yüksek çözünürlüklü 41 tayf kullanılmıştır. Şekil 2.3'te FDBinary tayfsal ayırma programı kullanılarak HD 5550 için gerçekleştirilen tayfsal ayırma sonucu görülmektedir.



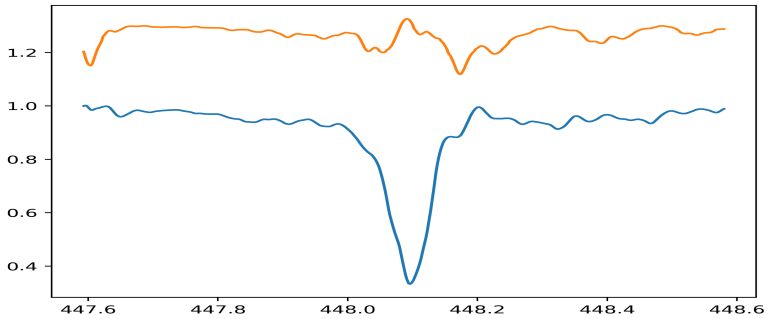
Şekil 3.12. FDBinary tayfsal ayırma programı kullanılarak HD 5550 için gerçekleştirilen tayfsal ayırma sonuçları
Görselde alt kısımda bulunan tayf baş bileşene, üst kısımda bulunan tayf ise yoldaş bileşene aittir. Bileşen akı katkıları sabit ve eşit kabul edilmiştir

FDMC kodu ile gerçekleştirilen tayfsal ayırma sonuçları şekil 3.13'te bulunmaktadır.



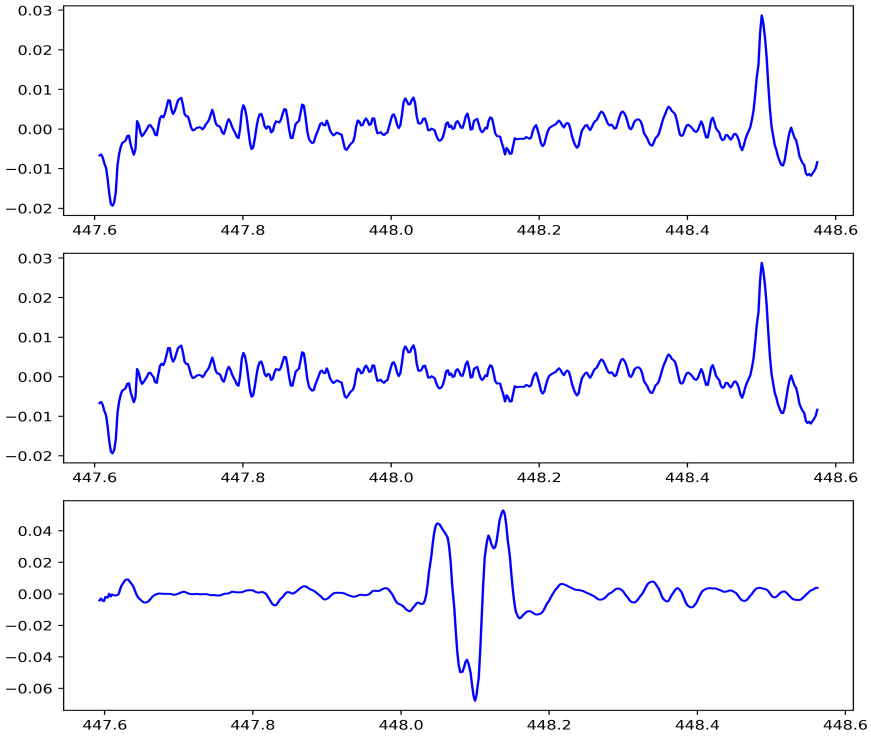
Şekil 3.13. FDMC kodu kullanılarak HD 5550 için gerçekleştirilen tayfsal ayırma sonuçları
Görselde alt kısımda bulunan tayf baş bileşene, üst kısımda bulunan tayf ise yoldaş bileşene aittir. Bileşen akı katkıları sabit ve eşit kabul edilmiştir

Şekil 3.14'te Spectangular programı ile gerçekleştirilmiş tayfsal ayırma sonuçları görülmektedir.



Şekil 3.14. Spectangular kullanılarak HD 5550 için gerçekleştirilen tayfsal ayırma sonuçları
Görselde alt kısımda bulunan tayf baş bileşene, üst kısımda bulunan tayf ise yoldaş bileşene aittir. Bileşen akı katkıları sabit ve eşit kabul edilmiştir

HD 5550 sistemi için gerçekleştirilen tayfsal ayırmalar sonucunda FDMC kodu ile daha küçük chi^2 değerleri elde edilmiştir. FDBinary programı ve FDMC kodu kalıntı sonuçları oldukça yakındır. Şekil 3.15'te tayfsal ayırma sonrasında hesaplanan kalıntılar görülmektedir.



Şekil 3.15. Tayfsal ayırma sonunda kalıntı sonuçları
En üstte FDBinary tayfsal ayırma programı ile ortada FDMC kodu ile ve en altta Spectangular ile gerçekleştirilen tayfsal ayırma sonuçlarının kalıntı sonuçları bulunmaktadır

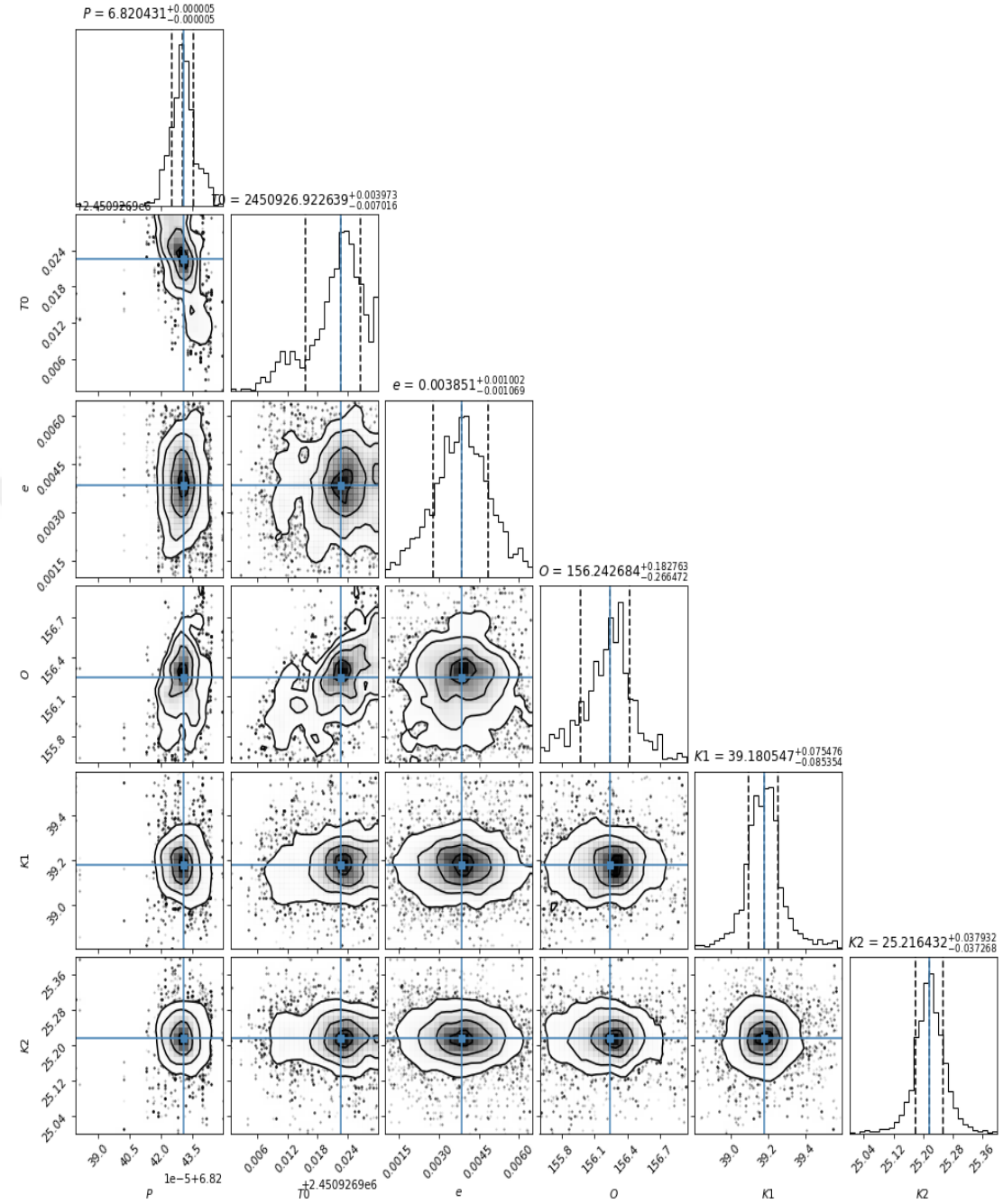
Şekil 3.16'da FDMC kodu ile HD 5550 sistemi için gerçekleştirilen optimizasyon sonuçlarının corner dağılımı görülmektedir. Optimizasyon sonucunda FDMC sonuç çıktısı aşağıda verilmiştir.

```
number of rejected parameters on prior: 5320
P rejected 1680 times.
T0 rejected 1324 times.
e rejected 287 times.
w rejected 666 times.
K1 rejected 1013 times.
K2 rejected 350 times.

 ### Ratio of Changed Parameter ###
P changed 5070(%0.169) times.
T0 changed 4960(%0.165333) times.
e changed 5011(%0.167033) times.
w changed 4925(%0.1641666) times.
K1 changed 4893(%0.1631) times.
K2 changed 5141(%0.1713666) times.

 ### Iteration Results ###
Total Iteration= 30000
Accept ratio= %31.419999

Best Chi2= [5932.52]
Best Orbit Parameters From MCMC(P,T0,e,W,K1,K2): [6.8204297605834965, 2450926.923556523,
 0.003861315783732712, 156.2973891908277, 39.1795250081751, 25.222023032875846]
```



Şekil 3.16. FDMC kodu ile gerçekleştirilen optimizasyon sonucu elde edilen veri seti dağılımları

Tablo 3.3'te HD 5550 sistemi için FDBinary tayfsal ayırma programı, Spectangular programı ve FDMC kodu ile elde edilen yörünge parametreleri verilmiştir. Şekil 3.16'de görüldüğü gibi FDMC kodu ile elde edilen yörünge parametreleri hataları oldukça düşüktür. Ayrıca FDBinary tayfsal ayırma programından kaynaklı olarak baş ve yoldaş bileşenlerin hızları ters hesaplanmıştır.

Tablo 3.3. FDBinary tayfsal ayırma programı, Spectangular tayfsal ayırma programı ve FDMC kodu ile HD 5550 sistemi için elde edilen yörünge parametreleri

Parametre	FDBinary	Spectangular	FDMC
P	$6^g.81981081$	$6^g.82054$	$6^g.820429 \, ^{+\,0.000005}_{-\,0.000005}$
T_0	2450927.56	2450988.46	$2450926.923556 \, ^{+\,0.003973}_{-\,0.007016}$
e	0.00379533718	0.006	$0.003861 \, ^{+\,0.001002}_{-\,0.001069}$
ω	$163°.285622$	$163°.2568$	$156°.297389 \, ^{+\,0.182763}_{-\,0.266472}$
K_1 (km/s)	39.1793485	24.97	$25.222023 \, ^{+\,0.037932}_{-\,0.037268}$
K_2 (km/s)	25.2185919	38.58	$39.179525 \, ^{+\,0.075476}_{-\,0.085354}$

Seçilmiş 3 yıldızın FDBinary tayfsal ayırma programı, Spectangular tayfsal ayırma programı ve FDMC kodu ile elde edilen sonuçları ve gerekli analizleri üst bölümlerde verilmiştir. Bir sonraki bölüm olan Tartışma ve Sonuç bölümünde bu tez çalışmasının genel bir yorumu bulunmaktadır.

4. BÖLÜM

TARTIŞMA ve SONUÇ

4.1. Tartışma

Bu tez çalışmasında, literatürde bulunan FDBinary tayfsal ayırma programına Python programlama dili aracılığı ile Markov Chain Monte Carlo (MCMC) yöntemi bir optimizasyon rutini olarak entegre edilmiş ve FDMC olarak adlandırılmış olan bu kod detaylıca anlatılmıştır. Kodun en önemli özelliği literatürde bulunan diğer tayfsal ayırma programlarının optimizasyon rutinlerine nazaran parametre hata analizi gerçekleştirebiliyor oluşudur. Tayfsal ayırmada parametre optimizasyonu elde edilen sonucun doğrulu açısından oldukça önemlidir. Doğru optimizasyon yöntemi kullanılarak en hassas sonuçların elde edilmesi amaçlanır. FDMC kodu, FDBinary tayfsal ayırma programını kullanarak tayfsal ayırma gerçekleştirir. FDBinary programı kendi içerisinde bir optimizasyon aşamasına sahiptir. FDMC kodu bunu iptal eder ve Bayes istatistiğine dayanan MCMC optimizasyonu ile parametre tahmini gerçekleştirir. Ayrıca gerekli parametre analizlerine izin verir. Çalışmada belirtildiği gibi FDMC kodunun kullanımı oldukça basittir. Bu tez içerisinde verilen sonuçlar kodun ilk versiyon sonuçlarıdır. İlerleyen zamanlarda kod gerekli eklemeler yapılarak daha stabil bir şekilde kullanıma açılacaktır.

Tez çalışması içerinde V453 Cygni, Capella A ve HD 5550 tayfsal çift yıldız sistemlerinin tayfsal ayırmaları gerçekleştirilmiştir. Bu yıldızlar literatürde çalışmaları bulunan yıldızlar olduğu için seçilmiştir. Ayrıca FDMC kodu sonuçları ile kıyas için FDBinary ve Spectangular tayfsal ayırma programları kullanılmış ve sonuçlar paylaşılmıştır. Analizler sonucunda FDMC kodu ile literatürde bulunan çalışmalara kıyasla daha küçük chi^2 değerileri elde edilmiş ve daha küçük hata payları saptanmıştır. Ayrıca FDMC kodunun optimizasyon sonucunda elde edilen veri setlerinin dağılımları ve birbirleri ile ilişkilerini

gösteren corner grafikleride gösterilmiştir.

4.2. Sonuç

Günümüzde yapılan çalışmalar sonucunda sayısız üçlü yıldız sistemi saptanmıştır. Spectangular tayfsal ayırma programı ise yalnızca çift yıldız sistemleri için çalışabilmektedir. Bu durum programın kullanışlılığını büyük oranda azaltır. FDBinary tayfsal ayırma programı ise çoklu yıldız sistemleri için çalışabilmektedir. Ayrıca literatürde bu tür sistemlere ilişkin çalışmalarda FDBinary kullanılmıştır. Bu sebeple çoklu yıldız sistemleri için güvenilirdir. FDMC kodu üçlü sistemler içinde derlenmiştir. Lakin daha bir yıldız sistemi için denemesi gerçekleştirilmemiştir.

FDMC koduna gerekli düzenlemeler gerçekleştirildikten sonra açık kaynak bir şekilde GitHub üzerinden paylaşıma açılacaktır. İlerleyen versiyonlarda farklı yıldız parametreleri ve veri analizleri de koda dahil edilecektir.

KAYNAKÇA

1. Ilijic, S., 2003. Spectral disentangling of close binary stars, Doktora Tezi, University of Zagreb.

2. Torres, G., Claret, A., Pavlovski, K., and Dotter, A., 2015. Capella (α Aurigae) Revisited: New Binary Orbit, Physical Properties, and Evolutionary State, **The Astrophysical Journal**, **807**(1):26.

3. Alecian, E., Tkachenko, A., Neiner, C., Folsom, C.P., and and, B.L., 2016. The magnetic field of the double-lined spectroscopic binary system HD 5550, **Astronomy &amp Astrophysics**, **589**:A47.

4. Lippincott, S.L., 1961. Sirius and its Companion, **Leaflet of the Astronomical Society of the Pacific**, **8**(390):311.

5. Wiegert, J., Liseau, R., Thé bault, P., Olofsson, G., Mora, A., Bryden, G., Marshall, J.P., Eiroa, C., Montesinos, B., Ardila, D., Augereau, J.C., Aran, A.B., Danchi, W.C., del Burgo, C., Ertel, S., Fridlund, M.C.W., Hajigholi, M., Krivov, A.V., Pilbratt, G.L., Roberge, A., White, G.J., and Wolf, S., 2014. How dusty isi/i Centauri?, **Astronomy &amp Astrophysics**, **563**:A102.

6. Haghighipour, N., 2011. Super-Earths: a new class of planetary bodies, **Contemporary Physics**, **52**(5):403–438.

7. Breger, M., 2005. Stellar data from binaries with oscillating components, **333**:299.

8. Southworth, J., Bowman, D.M., Tkachenko, A., and Pavlovski, K., 2020. Discovery of Cep pulsations in the eclipsing binary V453 Cygni, **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters**, **497**(1):L19–L23.

9. Tkachenko, M.G., Andronov, I.L., and Chinarova, L.L., 2016. Phenomenological Parameters of the Prototype Eclipsing Binaries Algol, Lyrae and W UMa.

10. Kamilla, S., Nayak, M., Khamari Sharma, N., Das, R., and Pattnaik, S., 2011. Binary Star System- A Spectral Analysis, **LATIN AMERICAN JOURNAL OF PHYSICS**, **5**.

11. Vogel, H.C., 1901. The spectroscopic binary Mizar., **The Astrophysical Journal**, **13**:324–328.

12. Schwarzschild, K., 1892. Beobachtungen von veranderlichen sternen und der Nova Aurigae., **Astronomische Nachrichten**, **129**:399–404.

13. Jeffreys, H., 1938. Theory of Probability, International series of monographs on physics, Clarendon Press.

14. Kaluzny, J., Krzeminski, W., and Mazur, B., 1995, Variable stars in the field of the old open cluster NGC 2243.

15. Hadrava, P., 1995. Orbital elements of multiple spectroscopic stars., **Astronomy and Astrophysics Supplement Series**, **114**:393.

16. Sablowski, D.P. and Weber, M., 2017. Spectral disentangling with Spectangular, **Astronomy &amp Astrophysics**, **597**:A125.

17. Bagnuolo, William G., J. and Gies, D.R., 1991. Tomographic Separation of Composite Spectra: The Components of the O-Star Spectroscopic Binary AO Cassiopeiae, **The Astrophysical Journal**, **376**:266.

18. Simon, K.P. and Sturm, E., 1994. Disentangling of composite spectra., **Astronomy & Astrophysics**, **281**:286–291.

19. Nelder, J.A. and Mead, R., 1965. A Simplex Method for Function Minimization, **The Computer Journal**, **7**(4):308–313.

20. Ilijic, S., Hensberge, H., and Pavlovski, K., 2001. Fourier Disentangling of Composite Spectra, H.M.J. Boffin, D. Steeghs, and J. Cuypers, Eds:, Astrotomography, Indirect Imaging Methods in Observational Astronomy, volume 573, 269.

21. Sharma, S., 2017. Markov Chain Monte Carlo Methods for Bayesian Data Analysis in Astronomy, **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, **55**(1):213–259.

22. Bayes, M. and Price, M., 1763. An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances. By the Late Rev. Mr. Bayes, F. R. S. Communicated by Mr. Price, in a Letter to John Canton, A. M. F. R. S., **Philosophical Transactions (1683-1775)**, **53**:370–418.

23. Metropolis, N. and Ulam, S., 1949. The Monte Carlo Method, **Journal of the American Statistical Association**, **44**(247):335–341.

24. Metropolis, N., Rosenbluth, A.W., Rosenbluth, M.N., Teller, A.H., and Teller, E., 1953. Equation of State Calculations by Fast Computing Machines, **The journal of chemical physics**, **21**(6):1087–1092.

25. Gagniuc, P., 2017. Markov Chains: From Theory to Implementation and Experimentation, John Wiley & Sons.

26. Geman, S. and Geman, D., 1984. Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restoration of Images, **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, **PAMI-6**(6):721–741.

27. Lewis, A. and Bridle, S., 2002. Cosmological parameters from CMB and other data: A Monte Carlo approach, **Physical Review D**, **66**(10).

28. Padilla, L.E., Tellez, L.O., Escamilla, L.A., and Vazquez, J.A., 2021. Cosmological Parameter Inference with Bayesian Statistics, **Universe**, **7**(7):213.

29. Kleijin, B., 2013. Lecture Notes Bayesian Statistics, spring 2011.

30. Harris, C.R., Millman, K.J., van der Walt, S.J., Gommers, R., Virtanen, P., Cournapeau, D., Wieser, E., Taylor, J., Berg, S., Smith, N.J., Kern, R., Picus, M., Hoyer, S., van Kerkwijk, M.H., Brett, M., Haldane, A., del Río, J.F., Wiebe, M., Peterson, P., Gérard-Marchant, P., Sheppard, K., Reddy, T., Weckesser, W., Abbasi, H., Gohlke, C., and Oliphant, T.E., 2020. Array programming with NumPy, **Nature**, **585**(7825):357–362.

31. Van Rossum, G., 2020. The Python Library Reference, release 3.8.2, Python Software Foundation.

32. Foreman-Mackey, D., 2016. corner.py: Scatterplot matrices in Python, **The Journal of Open Source Software**, **1**(2):24.

33. Hunter, J.D., 2007. Matplotlib: A 2D graphics environment, **Computing in Science & Engineering**, **9**(3):90–95.

34. Pavlovski, K. and Southworth, J., 2009. Chemical evolution of high-mass stars in close binaries – I. The eclipsing binary V453 Cygni, **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, **394**(3):1519–1528.

35. Wachmann, A.A., 1939. Spektral-Durchmusterung von Milchstrassenfeldern., **Spektral-Durchmusterung von Milchstrassenfeldern. Teil 1**, **1**:0.

36. Cohen, H.L., 1974. V453 Cyg, an early type Algol binary., **Astronomy and Astrophysics Supplement Series**, **15**:181–208.

37. Renson, P., Gerbaldi, M., and Catalano, F.A., 1991. General catalogue of AP and AM stars., **Astronomy and Astrophysics Supplement Series**, **89**:429.

38. Carrier, F., North, P., Udry, S., and Babel, J., 2002. Multiplicity among chemically peculiar stars. II. Cool magnetic Ap stars, **Astronomy & Astrophysicsp**, **394**:151–169.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı : Emre BARBAROS
Uyruğu : Türkiye (T.C.)

EĞİTİM

Derece	**Kurum**	**Mez.Yılı**
Yüksek Lisans	Erciyes Üniversitesi, Astronomi ve Uzay Bilimleri	2022
Lisans	Erciyes Üniversitesi, Astronomi ve Uzay Bilimleri	2020
Lise	Ramazan Atıl Anadolu Lisesi, ADANA	2015

YABANCI DİL

İngilizce