İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÜZGÜN YAYILI YÜKLE YÜKLENMİŞ ANKASTRE MESNETLİ ÇUBUĞUN YEREL OLMAYAN ELASTİSİTE YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Bahri Aykan AYKANAT

Anabilim Dalı : İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

Programı : YAPI MÜHENDİSLİĞİ

HAZİRAN 2007

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÜZGÜN YAYILI YÜKLE YÜKLENMİŞ ANKASTRE MESNETLİ ÇUBUĞUN YEREL OLMAYAN ELASTİSİTE YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. Bahri Aykan AYKANAT
(501041017)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 7 Mayıs 2007
Tezin Savunulduğu Tarih : 11 Haziran 2007

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Reha ARTAN
Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Faruk YÜKSELER (Y.T.Ü.)
Doç.Dr. Ünal ALDEMİR (İ.T.Ü.)

HAZİRAN 2007

ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans tezi çalışmamda "Düzgün yayılı yükle yüklenmiş ankastre mesnetli çubuğun yerel olmayan elastisite yöntemiyle incelenmesi" konusunu inceledim. Amacım nanoteknolojinin gelişmesiyle birlikte önem kazanan yerel olmayan elastisite teorisini kullanarak çubuk problemlerine klasik kuramlardan farklı bir çözüm şekliyle yaklaşmaktı.

Bu konuda bana yol gösteren, yardımcı olan ve değerli zamanını benimle paylaşan tez danışmanım Prof. Dr. Reha ARTAN' a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme, her zaman yanımda olduğu için Gülcan Mengeş' e, ayrıca yüksek lisans eğitimim boyunca beni anlayışla karşıladıkları için çalıştığım kurum yöneticilerine ve çalışma arkadaşlarıma teşekkür ederim.

05/05/2007 Bahri Aykan AYKANAT

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ **IV**
SEMBOL LİSTESİ **V**
ÖZET **VI**
SUMMARY **VII**

1. GİRİŞ **1**

2. ERİNGEN DENKLEMİ **3**

3. ÇUBUĞUN UÇLARINDA VE UÇLARINDAN UZAKTA GERİLME VE ŞEKİL DEĞİŞTİRMELERİN BULUNMASI **7**

4. SONUÇLAR **18**

KAYNAKLAR **19**

ÖZGEÇMİŞ **21**

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1 **:** Çubuk ve koordinat ekseni..... 3
Şekil 2.2 **:** Üçgen Çekirdek..... 4
Şekil 3.1 **:** Düzgün yayılı yükle yüklenmiş ankastre mesnetli çubuk..... 7
Şekil 3.2 **:** z = L komşuluğunda şekil değiştirme grafiği (L=2a)..... 15
Şekil 3.3 **:** z = L komşuluğunda şekil değiştirme grafiği (L=5a)..... 15
Şekil 3.4 **:** z = L komşuluğunda şekil değiştirme grafiği (L=10a)..... 16
Şekil 3.5 **:** z = L komşuluğunda şekil değiştirme grafiği(L=100a)..... 16
Şekil 3.6 **:** z = L komşuluğunda şekil değiştirme grafiği(L=1000a)..... 17

SEMBOL LİSTESİ

a	**:** Atomik mesafe
B	**:** Çekirdek katsayısı
E	**:** Elastisite modülü
ε(z)	**:** Şekil değiştirme
$\mathbf{I_x}$	**:** Atalet momenti
K	**:** Kernel fonksiyonu
L	**:** Çubuk uzunluğu
$\mathbf{M_z}$	**:** Eğilme momenti
σ(z)	**:** Gerilme
q	**:** Düzgün yayılı yük
λ, ξ_1, ξ_2,	**:** Çözüm sabitleri

ÖZET

Bu çalışmada yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak, ankastre mesnetlenmiş ve düzgün yayılı yüke maruz bırakılmış çok küçük boyuttaki çubukların, gerilme ve şekil değiştirme davranışları incelenerek, farklı çubuk boyları için elde edilen sonuçlar grafikler üzerinde klasik elastisite teorisinin sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

Yerel olmayan elastisite teorisinin gelişimi Kröner, Kunin, Kuramhansl ve Edelene kadar tarihlendirilebilir. Gelişmiş formüller Edelen, Laws ve Eringen tarafından sunulmuştur. Bu teori elastisitedeki çok küçük etkileri hesaplayabilmek için geliştirimiştir. Bu teorinin temel düşüncesi makroskopik mekanik büyüklüklerle mikroskopik fiziksel büyüklükler arasında bir ilişki kurmaktır. Klasik elastisite teorisinde herhangi bir x noktasındaki gerilme sadece o x noktasındaki şekil değiştirmenin fonksiyonu olarak ele alınır. Yerel olmayan elastisite teorisinde ise referans noktasındaki gerilme, her x noktasındaki şekil değiştirmenin bir fonksiyonu olarak ele alınabilir. Bu özelliği sayesinde bu teori çok küçük boyuttaki elamanları incelemeye elverişlidir. Yerel olmayan elastisite teorisi çok küçük nano elemanlara uygulanabilir olması sebebiyle nanoteknolji komiteleri tarafından büyük ilgi görmüştür.

Bu çalışmada gerilme denklemi olarak Eringen'in esas denklemi kullanılmıştır. Yaklaşık çözüm için üçgen tipi kernel fonksiyonu kullanılmıştır. Eringen denklemi ve üçgen kernel fonksiyonu tanımlandıktan çubuğun z = 0 komşuluğu için şekil değiştirme bağıntısı bulunmuştur. Daha sonra uçlardan uzak herhangi bir nokta için gerilme denklemi bulunarak genel formda yazılmıştır. Son olarak Z = L komşuluğu için genel gerilme denklemi bulunarak farklı uzunluktaki çubuklar için karşılaştırma grafikleri çizilerek sonuçlar klasik elastisite teorisinin sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

SUMMARY

In this study, the deformation and the stress in a cantilevered bar subjected to uniformly distrubuted force is investigated within the framework of nonlocal elasticity. The strain field in a bar subjected to uniformly distrubuted force obtained in this study compared with the classical elasticity solution of the problem.

The concept of nonlocal elasticity was originally proposed by Kröner, Kuramhansl, Kunin, Eringen and some others. The constitutive theory of nonlocal elasticity has been developed by Edelen, Laws and Eringen. Nonlocal theory were introduced to explain the material on the nanoscale. The basic idea of nonlocal elasticity is to build a relationship between macroscopic mechanical quantities and microscopic physical quantities. The nonlocal theory of elasticity proposes that the stress at the reference point depend on not only the strain field at the reference point but also strain field of all points of body. So, nonlocal theories are useful to explain the mareial behaviour on the nanoscale. The application of nonlocal elasticity models to nanomaterials has received attention from nanotechnology community.

The constitutive relation proposed by Eringen is used in this study as stress equation. In order to facilitate evaluations of nonlocal elasticity, the triangular kernel is used in evaluations. Firstly, Eringen equation and triangular kernel is described and strain field function is obtained for the point in the neighbourhood of $z = 0$. Then, general form of strain field far from the ends. Lastly, the strain field in the neighbourhood of $z = L$ is obtained in general form and the change of the strain field is shown on the graphics with respect to length of the bar for the bars in different lengths and the results are compared with the classical elasticity solution of the same problem.

1. GİRİŞ

Bu çalışmada yerel olmayan elastisite çerçevesinde düzgün yayılı yükle yüklenmiş, bir ucu ankastre mesnetli, diğer ucu serbest olan bir çubuk incelenmiştir. Bunun için bir çekirdek fonksiyonuna sahip Eringen' in esas denklemi kullanılmıştır. Sonuçlar klasik elastisite teorisindeki çözüm ile karşılaştırılmıştır.

Günümüzde ülkeler için stratejik bir önem taşımaya başlayan nanoteknolojinin gelişmesiyle birlikte yerel olmayan elastisite teorisi de büyük önem kazanmıştır. Nanoteknoloji yirmi yılı aşkın bir süredir dünya çapında bir çok firma ve kurum tarafından araştırılmaktadır. Birçok bilim dalı nanoteknoloji sayesinde doğanın sırlarını çözmeyi amaçlarken, aynı zamanda tıp, elektronik ve makine yapımında yararlanılan bu teknoloji giderek yaygınlaşıyor. Son beş yıldır birçok ülkenin kalkınma planlarında, araştırma geliştirme faaliyetlerinin öncelikli konuları arasında nanoteknoloji var. Bilim adamlarına göre nanoteknoloji, dünya tarihinin belirleyici teknoloji devrimlerinden birine kapı aralamak üzere. Bu alan nano-transistörlerden uzun ömürlü pillere, adrese teslim ilaçlardan, bakterilere duyarlı ve kurşun geçirmez akıllı elbiselere, kendini temizleyen boyalardan hidrojen enerjisi ile çalışan otomobillere uzanan geniş bir yelpazeyi içine alıyor.

Nanoteknoloji mikroskopik yapılarla ilgili bir bilimdir. Nano parçacıklar pek çok farklı yönde programlanabiliyor ve bununla birlikte en ince katmanlarda tamamen yeni ve çok fonksiyonlu yapılar oluşturulabilmektedir. Yerel olmayan elastisite teorisi, çok küçük nano elemanlara kolaylıkla uygulanabilir olması nedeniyle nanoteknoloji komiteleri tarafından büyük ilgi görmüştür.

Sudak [16], çok küçük karbon nanotüplerinin Van der walls kuvvetleri ve çok küçük etkiler altındaki burkulma davranışını yerel olmayan teori ile incelemiştir. Wang ve Varadane [18], tek ve çift çeperli karbon nano tüplerinin titreşim hareketlerini yerel olmayan teoriyle incelemişlerdir. Wang ve Shindo [17], karbon nanotüplerinin değişik sınır koşulları ve yüklemeler altındaki statik ve burkulma analizlerini yaparak, yerel olmayan teorinin bu küçük yapılar için geçerliliğini araştırmışlardır.

Bütün bu çalışmalar elde edilen sonuçların deneysel raporlarla örtüştüğünü ve yerel olmayan teorinin bu nano elemanlara kolaylıkla uygulanabileceğini göstermiştir.

Klasik fizik teorileri, tüm denge kanunlarının madde gövdesinin her noktasında geçerli olduğuna dayanmaktadır. Halbuki yerel olmayan elastisite teorisinde referans noktasındaki gerilme, her x noktasındaki birim şekil değiştirmenin bir fonksiyonu olarak ele alınır. Klasik elastisite teorisinde ise x noktasındaki gerilme sadece x noktasındaki birim şekil değiştirmeye bağlıdır. Bu çalışmada bu teori kullanılarak, ankastre mesnetli ve düzgün yayılı yükle yüklenmiş çubuğun gerilme ve şekil değiştirme fonksiyonları bulunacaktır.

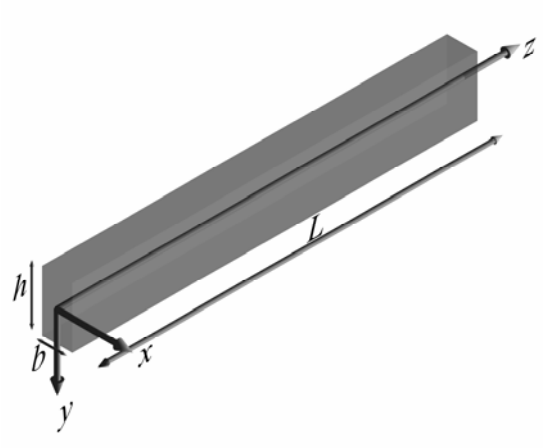
Yerel olmayan elastisite teorisinde yaklaşım yöntemi olarak kullanılan çekirdek fonksiyonları çok çeşitlidir. Çekirdek fonksiyonları benzer (veya benzer olmayan) girdilerin benzer (veya benzer olmayan) sonuçlar oluşturduğu varsayımından yola çıkılarak hazırlanmış yaklaşım fonksiyonlarıdır. Bu çalışmada hesap kolaylığı bakımından üçgen çekirdek fonksiyonu kullanılmıştır.

Yerel olmayan elastisite teorisinin gelişimi Kröner [5], Kunin [6], Krumhansl [7], ve Edelen'e [8] kadar tarihlendirilebilir. Gelişmiş formüller Edelen ve Laws [9] ile Eringen [10, 11, 12] tarafından sunulmuştur. Bu teorinin temel düşüncesi makroskopik mekanik büyüklüklerle mikroskopik fiziksel büyüklükler arasında bir ilişki kurmaktır.

Tüm fiziksel teoriler, fiziksel fenomenine bağlı uygun doğruluk payı ile sınırlandırılmış bir uygulanabilirlik alanına sahiptir. Bunun altında yatan neden tüm fiziksel teorilere özgü temel kavramlardır. Bu çalışmadaki fiziksel teori olan klasik elastisite teorisinin uygulanabilirliği, gövdenin iç yapısı ve karakteristik toplam uzunluğa bağlı olarak karakteristik bir uzunluk ölçüsüne (l-a) kadar indirgenebilir. Yerel olmayan elastisite teorisinin uygulanabilirlik sınırıda buna bağlı olarak (a) kadardır.

Klasik elastisite teorisi, çok küçük boyuttaki elemanların farklı yükler altındaki davranışını incelemede yetersiz kalmaktadır. Yerel olmayan elastisite teorisinin bu konuda daha anlamlı sonuçlar doğuracağı görülmektedir. Bu çalışmanın amacı bu yolda bir ilerleme kaydetmektir.

2. ERİNGEN DENKLEMİ



Şekil 2.1 : Çubuk ve koordinat eksenleri

Eringen' nin esas denklemi aşağıdaki gibidir [13];

$$\sigma(z) = E\left[\xi_1 \varepsilon(z) + \xi_2 \int_V K(z,z')\varepsilon(z')dz'\right] \tag{2.1}$$

Bu denklemde E, Young Modülü ve $K(z,z')$, z noktasında merkezlenmiş yaklaşım fonksiyonudur (çekirdek fonksiyonu). $\sigma(z)$, klasik elastisitede z noktasındaki gerilme değeridir. $\varepsilon(z')$, yerel olmayan elastisitede yerdeğiştirme fonksiyonudur. ξ_1 ve ξ_2 sabittirler ve aşağıdaki şartı sağlarlar:

$$\xi_1 + \xi_2 = 1 \tag{2.2}$$

Bu ilişki kullanılarak denklem (2.1) aşağıdaki şekilde yazılabilir:

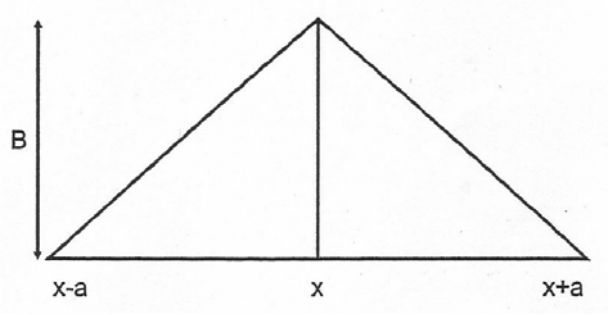
$$\varepsilon(z) = \frac{\sigma(z)}{\xi_1 E} - \frac{\xi_2}{\xi_1}\int_V K(z,z')\varepsilon(z')dz' \tag{2.3}$$

Çekirdek fonksiyonu aşağıdaki şartı sağlamalıdır [15] :

$$\int_V K(z,z')dz' = 1 \qquad \textbf{(2.4)}$$

Bu çalışmada Çekirdek fonksiyonu üçgensel seçilmiştir [1, 2] :

$$K(z,z') = \begin{cases} B\left(1 - \dfrac{|z-z'|}{a}\right), & |z-z'| < a \\ 0, & |z-z'| > a \end{cases} \qquad \textbf{(2.5)}$$



Şekil 2.2 : Üçgen Çekirdek

Bu fonksiyon üçgen Çekirdek olarak adlandırılmaktadır. Buradaki B simgesi bir sabittir ve a katsayısı ise atomik mesafeyi göstermektedir (a = 0.00000004 cm). (2.5) formülü kullanılarak B katsayısı aşağıdaki gibi bulunur.

$$B = \frac{1}{a} \qquad \textbf{(2.6)}$$

Klasik elastisite teorisinden bilindiği gibi eğilmeye maruz bir çubuğun z ekseni üzerinde herhangi bir noktasındaki gerilme aşağıdaki bulunur.

$$\sigma(z) = \frac{M_x}{I_x} y \qquad \textbf{(2.7)}$$

(2.5), (2.6) ve (2.7) denklemlerini (2.3) denkleminde yerinde koyarsak denklem aşağıdaki hali alır.

$$\varepsilon(z)=\frac{M_x y}{I_x \xi_1 E}-\frac{\xi_2}{a\xi_1}\left[\int_{z-a}^{z+a}\left(1-\frac{|z-z'|}{a}\right)\varepsilon(z')\,dz'\right] \tag{2.8}$$

(2.8) denklemindeki M_x, x ekseni etrafındaki momenttir. I_x ise x eksenine göre atalet momentidir.

Aşağıda (2.8) denklemini basitleştirmek amacıyla yeni bir sabit tanımlanmıştır.

$$\lambda=-\frac{\xi_2}{a\xi_1} \tag{2.9}$$

Buna göre (2.8) denklemi aşağıdaki hali alır.

$$\varepsilon(z)=\frac{M_x y}{I_x \xi_1 E}+\lambda\left[\int_{z-a}^{z+a}\left(1-\frac{|z-z'|}{a}\right)\varepsilon(z')\,dz'\right] \tag{2.10}$$

Çözümün aşağıdaki gibi olduğunu varsayalım.

$$\varepsilon(z)=\varepsilon_0(z)+\lambda\varepsilon_1(z)+\lambda^2\varepsilon_2(z)+\lambda^3\varepsilon_3(z)+\lambda^4\varepsilon_4(z)+\ldots+ \tag{2.11}$$

Denklemin her bir teriminin çözümü bulunur.

$$\varepsilon_0(z)=\frac{M_x y}{I_x \xi_1 E},\ \varepsilon_1(z)=\int_{z-a}^{z+a}\left(1-\frac{|z-z'|}{a}\right)\varepsilon_0(z')\,dz',$$

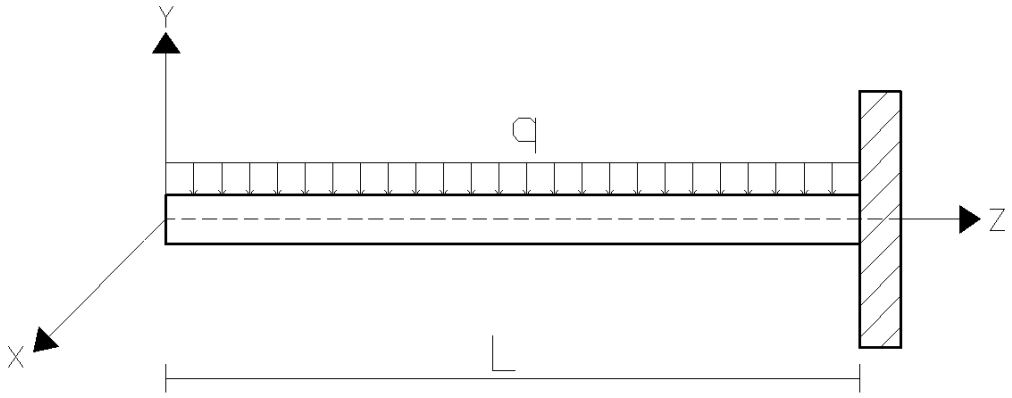
$$\varepsilon_2(z)=\int_{z-a}^{z+a}\left(1-\frac{|z-z'|}{a}\right)\varepsilon_1(z')\,dz',\ \ \varepsilon_2(z)=\int_{z-a}^{z+a}\left(1-\frac{|z-z'|}{a}\right)\varepsilon_1(z')\,dz',\ ....., \tag{2.12}$$

Bundan sonra iki durum için hesap yapılacaktır. Birinci durum; çubuğun uç noktalarından uzaktaki herhangi bir yer için yapılacaktır. Daha önce yapılan çalışmalarda çubuğun uç noktalarından uzaktaki bir nokta için yapılan çözümün, klasik elastisite teorisindeki çözümle aynı olduğu gösterilmiştir [14].

İkinci durum ise çubuğun uç bölgelerindeki gerilme ve şekil değiştirme fonksiyonlarının bulunmasıdır.

Bu çalışmada birinci durum için genel formül bulunacaktır. İkinci durum için sonuçlar bulunup, grafik üzerinde klasik elastisite teorisindeki çözümle karşılaştırılacaktır. Uç bölgelerdeki çözüm için integral sınır değerleri değişecektir. Z = 0 komşuluğundaki çözüm için sınırlar (0)' dan (z+a)' ya kadar, z = L komşuluğundaki çözüm için (z-a)' dan L' ye kadar olacaktır. L uzunluğu sırasıyla 2a, 5a, 10a, 100a ve 1000a alınarak her L uzunluğu için karşılaştırma grafiği çizilecektir.

3. ÇUBUĞUN UÇLARINDA VE UÇLARINDAN UZAKTAKİ GERİLME VE ŞEKİL DEĞİŞTİRMELERİN BULUNMASI



Şekil 3.1 : Ankastre mesnetlenmiş düzgün yayılı yükle yüklü çubuk

3.1 Çubuğun uçlarından uzak bir nokta için hesap (a ≤ z ≤ L-a)

Çubuk düzgün yayılı yükle yüklü olduğu için (2.11) ifadesinde moment aşağıdaki gibi olur.

$$M_z = -\frac{qz^2}{2} \tag{3.1}$$

(3.1) ifadesi (2.12) ifadesinde yerine konulup integral işlemleri Mathematica programı yardımıyla çözülerek $\varepsilon_0(z)$, $\varepsilon_1(z)$, $\varepsilon_2(z)$ ve $\varepsilon_3(z)$ aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$\varepsilon_0(z) = -\frac{qz^2 y}{2I_x \xi_1 E} \tag{3.2}$$

$$\varepsilon_1(z) = -\frac{a^3 qy + 6aqyz^2}{12I_x \xi_1 E} \tag{3.3}$$

$$\varepsilon_2(z) = -\frac{a^4 qy + 3a^2 qyz^2}{6I_x \xi_1 E} \tag{3.4}$$

$$\varepsilon_3(z) = -\frac{a^5 qy + 2a^3 qyz^2}{4I_x \xi_1 E} \tag{3.5}$$

Elde dilen sonuçlar (2.11) bağıntısında terine konulursa $\varepsilon(z)$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$\varepsilon(z) = -\left(\frac{qa^3 y\lambda}{12EI_x \xi_1}(1 + 2a\lambda + 3a^2\lambda^2) + \frac{qz^2 y}{2EI_x \xi_1}(1 + a\lambda + a^2\lambda^2 + a^3\lambda^3) \right) \tag{3.6}$$

Bu ifade basitleştirilip genel halde yazılırsa;

$$\varepsilon(z) = -\left(\frac{qa^3 y\lambda}{12EI_x \xi_1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a^n \lambda^n + \frac{qz^2 y}{2EI_x \xi_1} \sum_{n=0}^{\infty} a^n \lambda^n \right) \tag{3.7}$$

olur.

3.2 Çubuğun z = 0 komşuluğu için hesap (0≤ z ≤ a)

Bu durumda (2.12) denklemindeki integral ifadelerindeki limit değerleri değişerek aşağıdaki hali alır.

$$\varepsilon_0(z) = \frac{M_z y}{I_x \xi_1 E},\ \varepsilon_0(z) = -\frac{qz^2 y}{2I_x \xi_1 E},\ \varepsilon_1(z) = \int_0^{z+a} \left(1 - \frac{|z - z'|}{a}\right) \varepsilon_0(z')dz',$$

$$\varepsilon_2(z) = \int_0^{z+a} \left(1 - \frac{|z - z'|}{a}\right) \varepsilon_1(z')dz',\ \varepsilon_3(z) = \int_0^{z+a} \left(1 - \frac{|z - z'|}{a}\right) \varepsilon_2(z')dz', \ldots, \tag{3.8}$$

(3.1) ifadesi aynı şekilde (3.8) ifadelerinde yerine konulup hesap yapılırsa $\varepsilon_0(z)$, $\varepsilon_1(z)$, $\varepsilon_2(z)$ ve $\varepsilon_3(z)$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$\varepsilon_1(z) = -\frac{1}{24I_x a\xi_1 E}(a^4qy + 4a^3qyz + 6a^2qyz^2 + 4aqyz^3 - qyz^4) \quad \textbf{(3.9)}$$

$$\varepsilon_2(z) = -\frac{1}{720I_x a^2\xi_1 E}(55a^6qy + 174a^5qyz + 180a^4qyz^2 + 80a^3qyz^3 - 12aqyz^5 + qyz^6) \quad \textbf{(3.10)}$$

$$\varepsilon_3(z) = -\frac{1}{40320I_x a^3\xi_1 E}(4213a^8qy + 12328a^7qyz + 10304a^6qyz^2 + 3472a^5qyz^3 - 210a^4qyz^4 - 504a^3qyz^5 - 84a^2qyz^6 + 24aqyz^7 - qyz^8) \quad \textbf{(3.11)}$$

Bulunan sonuçlar (2.11) denkleminde yerine konulduğunda $\varepsilon(z)$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$\varepsilon(z) = -\frac{qy}{40320EI_x a^3\xi_1}(4213a^8\lambda^3 - z^8\lambda^3 + 8az^6\lambda^2(7+3z\lambda) + 8a^7\lambda^2(385+1541z\lambda) - 84a^2z^4\lambda(20+8z\lambda+z^2\lambda^2) - 70a^4z^2\lambda(-144-64z\lambda+3z^2\lambda^2) + 112a^5z\lambda(60+90z\lambda+31z^2\lambda^2) 112a^6\lambda(15+87z\lambda+92z^2\lambda^2) - 168a^3z^2(-120-40z\lambda+3z^3\lambda^3)) \quad \textbf{(3.12)}$$

3.3 Çubuğun z = L komşuluğu için hesap (L-a≤ z ≤ L)

Bu durumda (2.12) denklemindeki integral ifadelerindeki limit değerleri değişerek aşağıdaki hali alır.

$$\varepsilon_0(z) = \frac{M_z y}{I_x\xi_1 E}, \varepsilon_0(z) = -\frac{qz^2 y}{2I_x\xi_1 E}, \varepsilon_1(z) = \int_{z-a}^{L}\left(1-\frac{|z-z'|}{a}\right)\varepsilon_0(z')dz',$$

$$\varepsilon_2(z) = \int_{z-a}^{L}\left(1-\frac{|z-z'|}{a}\right)\varepsilon_1(z')dz',\ \varepsilon_3(z) = \int_{z-a}^{L}\left(1-\frac{|z-z'|}{a}\right)\varepsilon_2(z')dz', ..., \quad \textbf{(3.13)}$$

Burada $\varepsilon_0(z)$, $\varepsilon_1(z)$, $\varepsilon_2(z)$ ve $\varepsilon_3(z)$ bulunarak, ε (z) şekil değiştirme fonksiyonu hem 2 terimli hemde 3 terimli olarak elde edilerek, aynı grafik üzerinde klasik elastisite teorisi çözümüyle karşılaştırılacaktır.

$$\varepsilon_1(z) = \int_{z-a}^{L}\left(1-\frac{|z-z'|}{a}\right)\varepsilon_0(z')dz' = \int_{z-a}^{L}\left(1-\frac{|z-z'|}{a}\right)\frac{-q(z')^2 y}{2I_x\xi_1 E}dz' \quad \textbf{(3.14)}$$

$$\varepsilon_1(z) = -\frac{1}{24I_x a\xi_1 E}(a^4qy + 4aL^3qy - 3L^4qy - 4a^3qyz + 4L^3qyz + 6a^2qyz^2 - 4aqyz^3 - qyz^4) \quad \textbf{(3.15)}$$

Aynı işlem $\varepsilon_2(z)$ için tekrarlanılırsa;

$$\varepsilon_2(z) = \int_{z-a}^{L}\left(1-\frac{|z-z'|}{a}\right)\varepsilon_1(z')dz' = -\int_{z-a}^{L}\left(1-\frac{|z-z'|}{a}\right)\frac{1}{24I_x a\xi_1 E}$$
$$(a^4qy + 4aL^3qy - 3L^4qy - 4a^3qyz + 4L^3qyz + 6a^2qyz^2 - 4aqyz^3 - qyz^4)dz' \quad \textbf{(3.17)}$$

$$\varepsilon_2(z) = -\frac{1}{720I_x a^2\xi_1 E}(55a^6qy + 30a^5Lqy - 75a^4L^2qy + 140a^3L^3qy - 72aL^5qy + 10L^6qy - 174a^5qyz + 30a^4Lqyz - 60a^3L^2qyz + 180aL^4qyz - 36L^5qyz + 180a^4qyz^2 - 120aL^3qyz^2 + 45L^4qyz^2 - 80a^3qyz^3 - 20L^3qyz^3 + 12aqyz^5 + qyz^6) \quad \textbf{(3.18)}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde $\varepsilon_3(z)$ te aşağıdaki gibi bulunur.

$$\varepsilon_3(z) = \int_{z-a}^{L}\left(1-\frac{|z-z'|}{a}\right)\varepsilon_2(z')dz' = -\int_{z-a}^{L}\left(1-\frac{|z-z'|}{a}\right)\frac{1}{720I_x a^2\xi_1 E}$$
$$(55a^6qy + 30a^5Lqy - 75a^4L^2qy + 140a^3L^3qy - 72aL^5qy + 10L^6qy - 174a^5qyz + 30a^4Lqyz - 60a^3L^2qyz + 180aL^4qyz - 36L^5qyz + 180a^4qyz^2 - 120aL^3qyz^2 + 45L^4qyz^2 - 80a^3qyz^3 - 20L^3qyz^3 + 12aqyz^5 + qyz^6)dz' \quad \textbf{(3.19)}$$

$$\varepsilon_3(z) = -\frac{1}{40320 I_x a^3 \xi_1 E}(4213a^8 qy + 3640a^7 Lqy - 6272a^6 L^2 qy + 5824a^5 L^3 qy + 2590a^4 L^4 qy - 3584a^3 L^5 qy - 840a^2 L^6 qy + 360aL^7 qy - 21L^8 qy - 12328a^7 qyz + 2240a^6 Lqyz - 672a^5 L^2 qyz - 5880a^4 L^3 qyz + 9240a^3 L^4 qyz + 3024a^2 L^5 qyz - 1680aL^6 qyz + 120L^7 qyz + 10304a^6 qyz^2 - 1680a^5 Lqyz^2 + 3780a^4 L^2 qyz^2 - 6720a^3 L^3 qyz^2 - 3780a^2 L^4 qyz^2 + 3024aL^5 qyz^2 - 280L^6 qyz^2 - 3472a^5 qyz^3 - 280a^4 Lqyz^3 + 560a^3 L^2 qyz^3 + 1680a^2 L^3 qyz^3 - 2520aL^4 qyz^3 + 336L^5 qyz^3 - 210a^4 qyz^4 + 840aL^3 qyz^4 - 210L^4 qyz^4 + 504a^3 qyz^5 + 56L^3 qyz^5 - 84a^2 qyz^6 - 24aqyz^7 - qyz^8) \quad \textbf{(3.20)}$$

Bulunan $\varepsilon_0(z)$, $\varepsilon_1(z)$, $\varepsilon_2(z)$ ve $\varepsilon_3(z)$ değerleri (2.11) ifadesinde yerine konulursa çubuğun herhangi bir yerindeki yerdeğiştirme fonksiyonu bulunmuş olur. Aşağıda iki ve üç terim alınarak yer değiştirme fonksiyonları bulunmuştur.

$$\varepsilon(z)_{ikiterimli} = -\frac{qz^2 y}{2I_x \xi_1 E} - \frac{1}{24 I_x a \xi_1 E}(a^4 qy + 4aL^3 qy - 3L^4 qy - 4a^3 qyz + 4L^3 qyz + 6a^2 qyz^2 - 4aqyz^3 - qyz^4)\lambda - \frac{1}{720 I_x a^2 \xi_1 E}(55a^6 qy + 30a^5 Lqy - 75a^4 L^2 qy + 140a^3 L^3 qy - 72aL^5 qy + 10L^6 qy - 174a^5 qyz + 30a^4 Lqyz - 60a^3 L^2 qyz + 180aL^4 qyz - 36L^5 qyz + 180a^4 qyz^2 - 120aL^3 qyz^2 + 45L^4 qyz^2 - 80a^3 qyz^3 - 20L^3 qyz^3 + 12aqyz^5 + qyz^6)\lambda^2 \quad \textbf{(3.21)}$$

Gerekli düzenlemeler yapılıp bu ifade basitleştirilirse (3.21) aşağağıdaki hali alır.

$$\varepsilon(z)_{ikiterimli} = -\frac{qy}{720 E I_x a^2 \xi_1}(55a^6\lambda^2 + (L-z)^4(10L^2 + 4Lz + z^2)\lambda^2 + 6a^5\lambda(5 + 5L\lambda - 29z\lambda) - 120a^2(-3z^2 - L^3\lambda + z^3\lambda) - 20a^3\lambda(-9z^2 - 7L^3\lambda + 3L^2 z\lambda + 4z^3\lambda) + 15a^4\lambda(-5L^2\lambda + 12z^2\lambda + 2z(-4 + L\lambda)) - 6a\lambda(12L^5\lambda + L^4(15 - 30z\lambda) + z^4(5 - 2z\lambda) + 20L^3 z(-1 + z\lambda))) \quad \textbf{(3.22)}$$

$$\varepsilon(z)_{üçterimli} = -\frac{qz^2 y}{2I_x\xi_1 E} - \frac{1}{24I_x a\xi_1 E}(a^4qy + 4aL^3qy - 3L^4qy - 4a^3qyz +$$
$$4L^3qyz + 6a^2qyz^2 - 4aqyz^3 - qyz^4)\lambda - \frac{1}{720I_x a^2\xi_1 E}(55a^6qy + 30a^5Lqy -$$
$$75a^4L^2qy + 140a^3L^3qy - 72aL^5qy + 10L^6qy - 174a^5qyz + 30a^4Lqyz -$$
$$60a^3L^2qyz + 180aL^4qyz - 36L^5qyz + 180a^4qyz^2 - 120aL^3qyz^2 + 45L^4qyz^2 -$$
$$80a^3qyz^3 - 20L^3qyz^3 + 12aqyz^5 + qyz^6)\lambda^2 - \frac{1}{40320I_x a^3\xi_1 E}(4213a^8qy +$$
$$3640a^7Lqy - 6272a^6L^2qy + 5824a^5L^3qy + 2590a^4L^4qy - 3584a^3L^5qy -$$
$$840a^2L^6qy + 360aL^7qy - 21L^8qy - 12328a^7qyz + 2240a^6Lqyz - 672a^5L^2qyz - \quad \textbf{(3.23)}$$
$$5880a^4L^3qyz + 9240a^3L^4qyz + 3024a^2L^5qyz - 1680aL^6qyz + 120L^7qyz +$$
$$10304a^6qyz^2 - 1680a^5Lqyz^2 + 3780a^4L^2qyz^2 - 6720a^3L^3qyz^2 -$$
$$3780a^2L^4qyz^2 + 3024aL^5qyz^2 - 280L^6qyz^2 - 3472a^5qyz^3 - 280a^4Lqyz^3 +$$
$$560a^3L^2qyz^3 + 1680a^2L^3qyz^3 - 2520aL^4qyz^3 + 336L^5qyz^3 - 210a^4qyz^4 +$$
$$840aL^3qyz^4 - 210L^4qyz^4 + 504a^3qyz^5 + 56L^3qyz^5 - 84a^2qyz^6 -$$
$$24aqyz^7 - qyz^8)\lambda^3$$

gerekli düzenlemeler yapılırsa (3.23) ifadesi aşağıdaki hali alır.

$$\varepsilon(z)_{üçterimli} = -\frac{qy}{40320EI_x a^2\xi_1}(4213a^8\lambda^3 - (L-z)^6(21L^2 + 6Lz + z^2)\lambda^3 +$$
$$8a^7\lambda^2(385 + 455L\lambda - 1541z\lambda) + 8a(L-z)^4\lambda^2(45L^3\lambda + L^2(70 - 30z\lambda) +$$
$$z^2(7 - 3z\lambda) - 4Lz(-7 + 3z\lambda)) - 112a^6\lambda(-15 + 87z\lambda + 56L^2\lambda^2 - 92z^2\lambda^2 -$$
$$5L\lambda(3 + 4z\lambda)) - 56a^5\lambda(62z^3\lambda^2 + L^2\lambda(75 - 104L\lambda) + 30z^2\lambda(-6 + L\lambda) +$$
$$6z(20 - 5L\lambda + 2L^2\lambda^2)) - 70a^4\lambda(3z^4\lambda^2 + 4z^3\lambda(16 + L\lambda) + 12L^2z\lambda(4 + 7L\lambda) - \quad \textbf{(3.24)}$$
$$L^3\lambda(112 + 37L\lambda) - 18z^2(8 + 3L^2\lambda^2)) - 84a^2(L-z)^2\lambda(10L^4\lambda^2 -$$
$$16L^3\lambda(-3 + z\lambda) + 3L^2(20 - 8z\lambda + z^2\lambda^2) + 2Lz(20 - 8z\lambda + z^2\lambda^2) +$$
$$z^2(20 - 8z\lambda + z^2\lambda^2)) + 56a^3(165L^4z\lambda^3 + 9z^5\lambda^3 + 8L^3\lambda(15 - 8L^2\lambda^2) +$$
$$10z^3\lambda(-12 + L^2\lambda^2) - 120z^2(-3 + L^3\lambda^3))$$

(3.23) ve (3.24) ifadelerinin karmaşıklığına aldanmamak lazımdır. Burada a, E, q, I, L değişkenleri belirli sayılardır ve yerlerine konulduğunda bu ifadeler daha basite indirgenebilir. ξ_1 ve ξ_2 için ;

$$\frac{\xi_2}{\xi_1} < 1 \qquad \textbf{(3.25)}$$

kuralı daha önceden kanıtlanmıştır [8]. Bu şart aynı zamanda uçlardan uzakta, yerel ile yerel olmayan çözümlerin eşdeğer olma şartıdır. (2.2) denklemi de göz önüne alınarak ξ_1 ve ξ_2, $z = a$ ve $z = L - a$ noktalarındaki süreklilik şartları çerçevesinde aşağıdaki gibi seçilebilir.

$$\xi_1 = 0.99, \xi_2 = 0.01 \quad \textbf{(3.26)}$$

$a = 4 \times 10^{-8}$ cm dir ve bu değerler (2.9) denkleminde yerine koyulursa;

$\lambda = -\dfrac{\xi_2}{a\xi_1} = -\dfrac{0.01}{4 \times 10^{-8} \times 0.99} = -252525$ olarak bulunur.

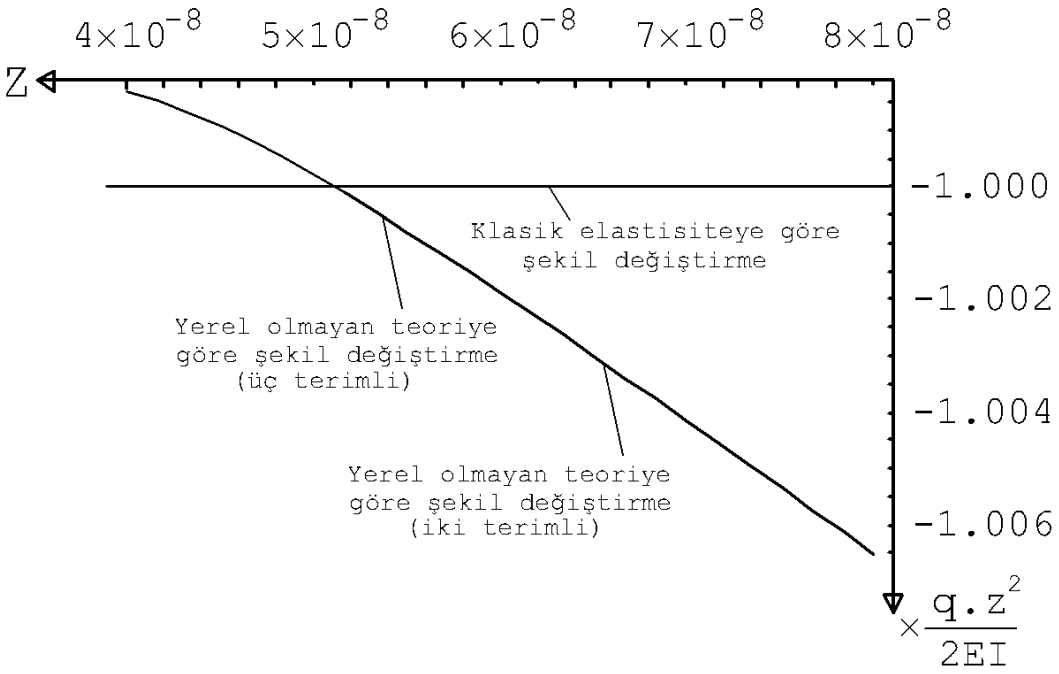
L uzunluğu ise farklı farklı değerler olarak alınacak ve her L değeri için grafik çizilecektir.

Bu değerler (3.22) ve (3.24) ifadelerinde yerine konulup gerekli düzenlemeler yapılırsa;

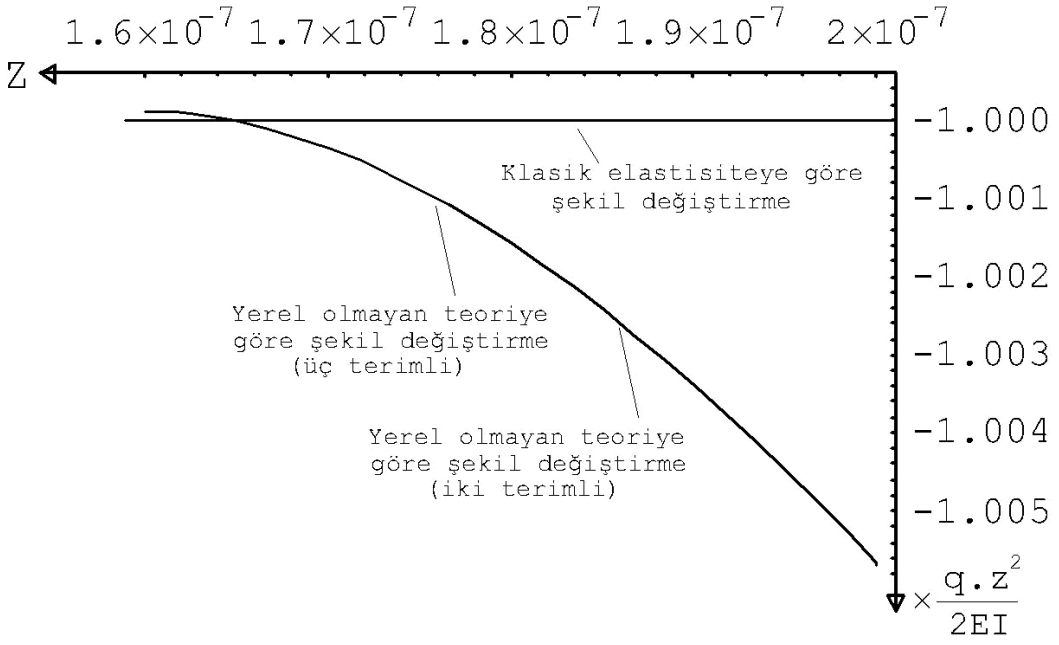
$$\varepsilon(z)_{ikiterimli} = \frac{qz^2 y}{2EI_x} \begin{bmatrix} \frac{1}{z^2}(-1.11828 \times 10^{24} L^6 + L(-3.43537 \times 10^{-13} - \\ 8.58842 \times 10^{-6} z) + L^2(0.000041471 + 429.421z) + \\ L^5(3.22066 \times 10^{17} + 4.02582 \times 10^{24} z) + \\ L^4(-1.59423 \times 10^{12} - 8.05164 \times 10^{17} z - \\ 5.03228 \times 10^{24} z^2) + 2.23657 \times 10^{24} L^3(3.98633 \times 10^{-8} \\ + z)(9.42422 \times 10^{-13} + 2.00137 \times 10^{-7} z + z^2) - \\ 1.11828 \times 10^{23}(-1.0878 \times 10^{-9} + z)(1.22129 \times 10^{-9} + z) \\ (2.71329 \times 10^{-12} - 9.13871 \times 10^{-7} z + z^2) \\ (3.31234 \times 10^{-12} + 1.39374 \times 10^{-6} z + z^2)) \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.27)}$$

$$\varepsilon(z)_{\text{üçterimli}} = \frac{qz^2 y}{2EI_x}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{z^2}(-2.64745\times10^{35}L^8 + L^7(1.8154\times10^{29} + \\ 1.51283\times10^{36}z) + L^6(-1.13523\times10^{24} - \\ 8.47185\times10^{29}z - 3.52994\times10^{36}z^2) - \\ 9.03664\times10^{6}L(4\times10^{-8} + z)(9.296\times10^{-13} + \\ 2\times10^{-7}z + z^2) + 4.51832\times10^{14}L^2(4.99238\times \\ 10^{-8} + z)(9.37493\times10^{-13} + 2.0076\times10^{-7}z + \\ z^2) + 4.23592\times10^{36}L^5(7.99539\times10^{-8} + z)\times \\ (9.42409\times10^{-13} + 2.80046\times10^{-7}z + z^2) + \\ 2.64745\times10^{36}L^4(4.04941\times10^{-13} + \\ 9.88316\times10^{-8}z + z^2)(1.48699\times10^{-12} + \\ 3.81168\times10^{-7}z + z^2) + 7.05987\times10^{35}L^3 \\ (3.98658\times10^{-8} + z)(1.46568\times10^{-12} - \\ 3.42429\times10^{-7}z + z^2)(2.03705\times10^{-12} + \\ 9.02564\times10^{-7}z + z^2) - 1.26069\times10^{34} \\ (-1.08794\times10^{-9} + z)(1.22145\times10^{-9} + z) \\ (4.16439\times10^{-12} - 1.74338\times10^{-6}z + z^2) \\ (3.38684\times10^{-12} + 2.0569\times10^{-7}z \\ + z^2)(5.65234\times10^{-12} + 2.49748\times10^{-6}z + z^2)\end{array}\right] \quad \textbf{(3.28)}$$

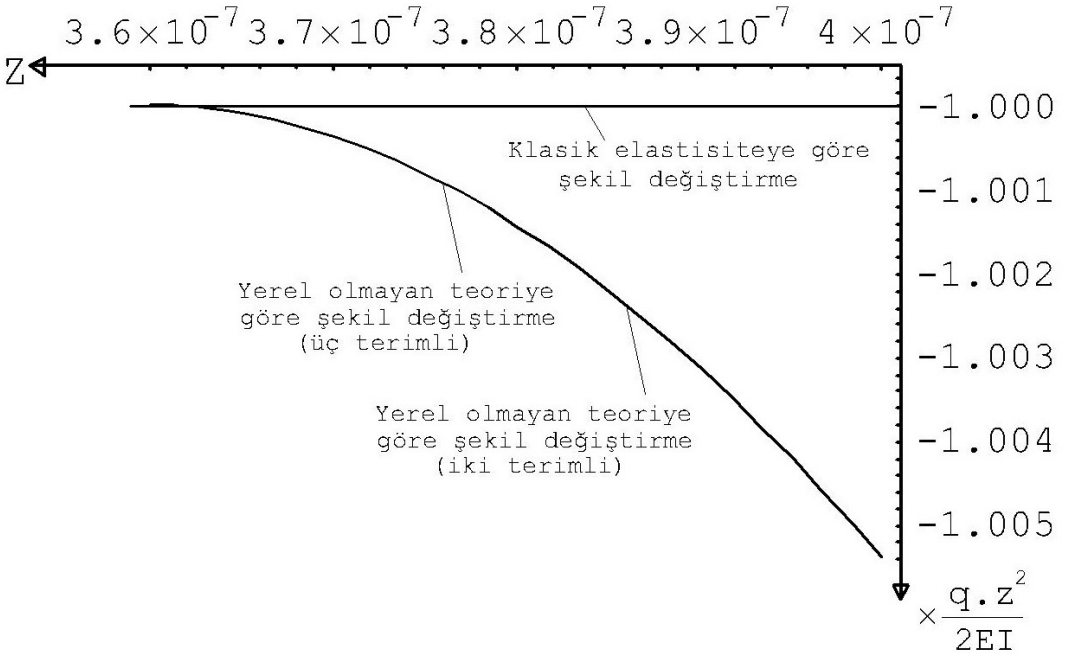
(3.27) ve (3.28) ifaderine göre (L-a) ve L arasında çizilen grafikler aşağıdaki gibidir. Çubuk boyu L = 2a, L = 5a, L = 10a, L = 100a ve L = 1000a seçilmiş ve bu beş durum için karşılaştırma grafikleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir.



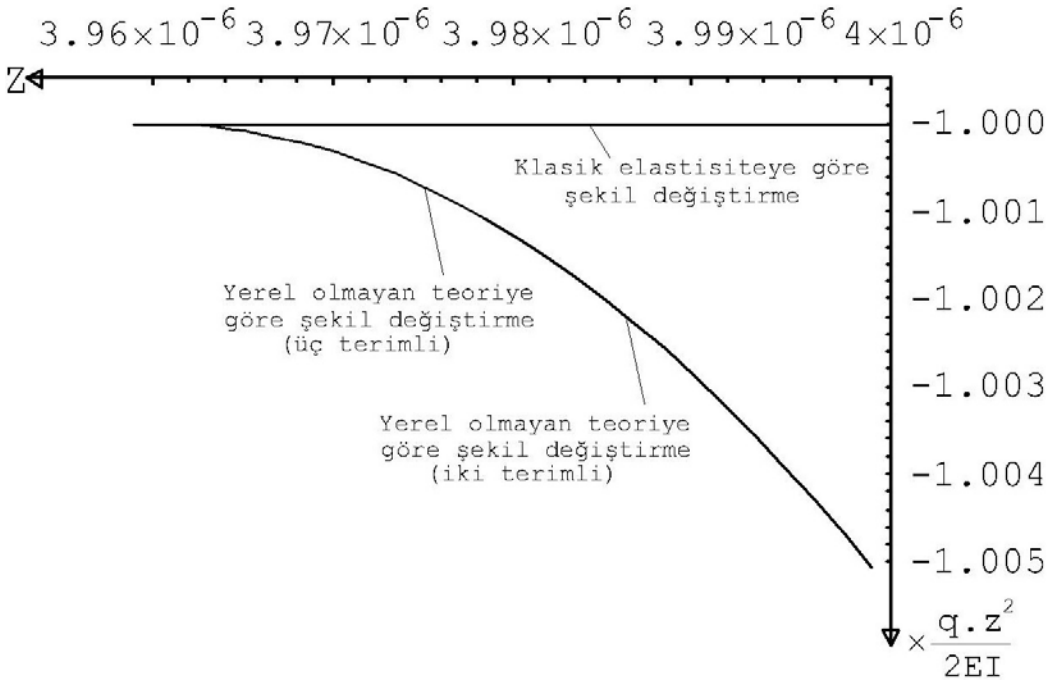
Şekil 3.2 : L = 2a için z = L komşuluğudaki şekil değiştirme grafiği



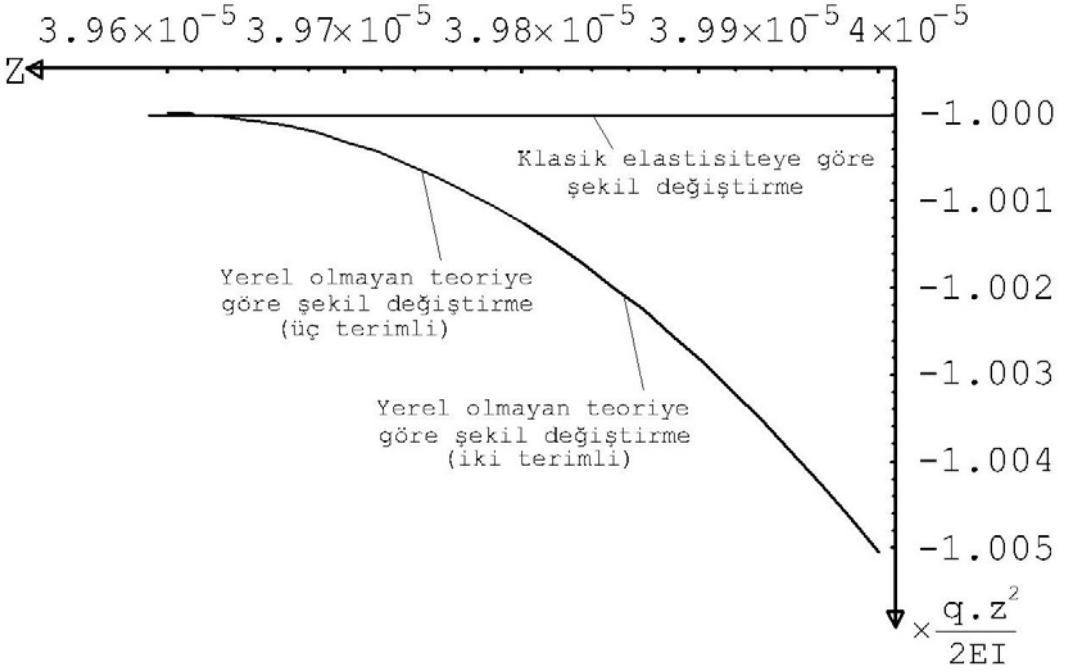
Şekil 3.3 : L = 5a için z = L komşuluğudaki şekil değiştirme grafiği



Şekil 3.4 : L = 10a için z = L komşuluğudaki şekil değiştirme grafiği



Şekil 3.5 : L = 100a için z = L komşuluğudaki şekil değiştirme grafiği



Şekil 3.6 : L = 1000a için z = L komşuluğudaki şekil değiştirme grafiği

Yukarıdaki grafiklerin yatay ekseni z mesafesini, düşey ekseni ise yerel olmayan teoriye göre bulunan sonucun, klasik elastisite teorisinin çözümü olan ($qz^2/2EI$) ifadesinin kaç katı olduğunu gösterir. Grafikten görüldüğü gibi z = L-a noktasından z = L mesnet noktasına doğru gidildikçe yerel ve yerel olmayan elastisite terorisinin çözümleri farklılaşmaktadır.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, düzgün yayılı yükle yüklenmiş, ankastre mesnetli bir çubuğun eğilme davranışı yerel olmayan elastisite teorisi çerçevesinde incelenip, elde edilen çözüm klasik elastisite teorisinin çözümüyle karşılaştırılmıştır. Gerilme denklemi olarak bir çekirdek fonksiyonuna sahip Eringen' in esas denklemi kullanılmıştır. Sonuç olarak; yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilen sonuçların çubuğun uç bölgelerinden uzakta aynı, uç bölgelerinde ise birbirinden farklı olduğu görülmüştür.

Son beş yıldır birçok ülkenin kalkınma planlarında, araştırma geliştirme faaliyetlerinin öncelikli konuları arasında nanoteknoloji yeralmaktadır. Bu alan nano-transistörlerden uzun ömürlü pillere, adrese teslim ilaçlardan, bakterilere duyarlı ve kurşun geçirmez akıllı elbiselere, kendini temizleyen boyalardan hidrojen enerjisi ile çalışan otomobillere uzanan geniş bir yelpazeyi içine alıyor. Nano teknoloji sayesinde malzemeler atom, molekül ve makro molekül ölçeklerinde inceleniyor ve değiştiriliyor. Nano malzemeler daha kuvvetli, daha hafif veya daha farklı şekilde ısı ve elektrik iletme özelliklerine sahip olabilir. Nano malzemelere örnek olarak karbon nano tüpler verilebilir. Karbon nano tüpler yassı karbon atomu yaprakları yuvarlanıp, silindir şekline getirilerek yapılırlar. Karbon nano tüpler çelikten 100 kat güçlü, 6 kat daha hafiftir. Hali hazırda elektronik görüntüleme ve algılayıcı cihaz üretiminde, hafif inşaat malzemesi yapımında kullanılmaktalar.

Herhangi bir şey nano ölçekte, normal boyutlarındakinden çok farklı özellik ve davranış gösterir. Bu yüzden karbon nano tüpler de olduğu gibi nano elamanların çeşitli yükler altındaki davranışları incelenirken klasik elastisite teorisi yetersiz kalır ve yerel olmayan teori kullanılır. Bu çalışmada da çok küçük boyuttaki bir eleman yerel olmayan teoriyle incelenerek bu alandaki çalışmalara katkıda bulunmak amaçlanmıştır.

KAYNAKLAR

[1] **Artan R, Altan BS,** 2002, Propagation of SV waves in a periodically layered media in nonlocal elasticity INT J SOLIDS STRUCT 39 (24): 5927-5944 2002

[2] **Artan R, 1999,** The nonlocal solution of the elastic half plane loaded by a couple , INT J ENG SCI 37 (11): 1389-1405

[3] **Artan, R, 1996,** Unsymmetrical Rigid Stamp on a Nonlocal Elastic Half Plane, Int. J. Engng. Sci., 34, 933-941.

[4] **Artan, R., 1996,** Rectangular Rigid Stamp on a Nonlocal Elastic Half Plane", Int. J. Solids Structures, 33, 3577-3586

[5] **Kröner E.,** 1967. Elasticity theory of materials with long range cohesive forces. Int. J. Solids Struct. 3, 731-742.

[6] **Kunin, I.A.,** 1967, The theory of elastic media with microstructure and thetheory of dislocation. In: Kröner (Ed.), Mechanics of Generalized Continua, ProcEdings of IUTAM Symposium 1967, Springer, New York, 1968.

[7] **Krumhansl J.A.,** 1968. Some consideration on the relations between solid state physics and generalized continuum mechanics. In: Kröner, E., (Ed.), Mechanics of Genaralized Continua. Springer-Verlag, Berlin,pp. 298-331

[8] **Edelen D.G.B., 1969,** Protoelastic bodies with large deformations. Arch,Rat. Mech. Anal. 34, 283-300

[9] **Edelen D.G.B., Laws, N.,** 1971, On the thermodynamics of systems with nonlocality. Arch. Rat. Mech. Anal. 43. 24-35.

[10] **Eringen. A.C.,** 1972a, Nonlocal polar elastic continua. Int. J. Engng. Sci. 10, 1-16

[11] **Eringen. A.C.,** 1972b, Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves. Int. J. Engng. Sci. 10, 425-435.

[12] **Eringen. A.C.,** 1976, Nonlocal micropolar field theory. In: Eringen A.C. (Ed.), Continuum Physics, vol. 4. Academic press, Newyork, pp. 205-267

[13] **Eringen. A.C., Speziale C. G., Kim B.S.,** 1977, Crack-tip problem in nonlocalelasticity. J. Mech. Phys. Solids 25, 339-355

[14] **Pisano A.A., Fuschi P.,** 2003. Closed form solution for a nonlocal elastic barin tension, Int. J. Sol. Str. 40. 13-23

[15] **Eringen. A.C.,** 1987, Theory of nonlocal elasticity and some applications.Res. Mechanica 21, 313-342

[16] **Sudak, L. J.,** 2003, "Column buckling of multiwalled carbon nanotubes using nonlocal continuummechanics", J. Appl. Phys. 94:11 (2003), 7281–7287

[17] **Wang Q., Shindo Y.,** 2006, Nonlocal continuum models for carbon nanotubes subjected to static loading. J. Mech. Vol 1, No.4, 2006

[18] **Wang Q., Varadan V. K.,** 2005, Vibration of carbon nanotubes studied using nonlocal continuum mechanics, *Smart Mater. Struct.* **15** 659-666

ÖZGEÇMİŞ

Bahri Aykan Aykanat 1981 yılında İstanbul' da doğdu. Sırasıyla 1992 yılında Şenlikköy İlkokulu' ndan, 1995 yılında Zeynep Bedia Kılıçlıoğlu Orta Okulu' ndan, 1998 yılında Ataköy Cumhuriyet Lisesi'nden ve 2004 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü' nden başarıyla mezun olup aynı yıl da İstanbul Teknik Üniversitesi Mekanik Anabilim Dalı' nda yüksek lisans eğitimi alma hak ve onuruna erişmiştir. Kendisi şu an bir inşaat firmasında inşaat mühendisi olarak görev yapmaktadır.