T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN LİNEER VE LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN HOMOTOPY PERTÜRBASYON METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Hüseyin EŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2022

T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN LİNEER VE LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN HOMOTOPY PERTÜRBASYON METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Hüseyin EŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2022

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
ŞEKİLLER DİZİNİ v
ÇİZELGELER DİZİNİ vi
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ vi
1.GİRİŞ 1
1.1. Temel Kavramlar 2
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR 5
3. MATERYAL ve YÖNTEM 8
3.1. Materyal 8
3.2. Yöntem 8
3.2.1. Homotopy pertürbasyon metodu 8
3.2.2. Üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklem için homotopy pertürbasyon metodu 10
4.ARAŞTIMA BULGULARI ve TARTIŞMA 14
4.1. Nümerik Sonuçlar 14
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER 29
5.1. Sonuçlar 29
5.2. Öneriler 29
KAYNAKLAR 30
ÖZGEÇMİŞ 31

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN LİNEER VE LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN HOMOTOPY PERTÜRBASYON METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Hüseyin EŞ

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mahmut MODANLI
Yıl:2022, Sayfa:31

Bu çalışmada, üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemin çözümü homotopy pertürbasyon metodu ile elde edildi. Çözüm için homotopy pertürbasyon metodu oluşturuldu. Bu metot kullanılarak lineer ve lineer olmayan örnek problemler üzerinde denklemlerin çözümü bulundu. Elde edilen çözümlerin sırasıyla tam çözüme denk ve yakın oldukları görüldü. Matlab programı kullanılarak da çözümler için grafikler verilip hata analiz tablosu oluşturuldu.

ANAHTAR KELİMELER: Üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklem, Homotopy pertürbasyon metodu, Tam çözüm, Yaklaşık çözüm.

ABSTRACT

MSc Thesis

SOLUTION OF THIRD-ORDER LINEAR AND NON-LINEAR FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH HOMOTOPY PERTURBATION METHOD

Hüseyin EŞ

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mahmut MODANLI
Year: 2022, Page:31

In this study, the solution of the third order partial differential equation is obtained by homotopy perturbation method. Homotopy perturbation method was created for the solution.Using this method, the solution of the equation is found on a sample problem. The solution obtained is found to be equivalent to the exact solution. Figures are given for the solution using the Matlab program.

KEY WORDS: Third order partial differential equation, homotopy perturbation method, exact solution, approximate solution.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam sırasında değerli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile her daima bana yol gösterici ve destek olan kıymetli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Mahmut MODANLI' ya, çalışmam boyunca manevi olarak büyük fedakarlık gösterip bu zorlu süreçte benim moral ve motivasyonumu yüksek tutmaya çalışan sevgili eşim başta olmak üzere canım aileme çok teşekkür ederim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 4.1. (4.1) probleminin $0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq \pi$ aralığındaki tam çözümünün grafiğidir 18
Şekil 4.2. (4.2) probleminin $0 \leq x \leq 0.5$, $0 \leq t \leq 0.5$ aralığındaki tam çözümün grafiğini verir 27
Şekil 4.3. (4.2) probleminin $0 \leq x \leq 0.5$, $0 \leq t \leq 0.5$ aralığındaki yaklaşık çözümün grafiğini verir 27

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

Çizelge 4.1. Hata Analizi 28

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

C	Karmaşık Sayılar
HPM	Homotopy pertürbasyon metodu
LDKM	Laplace Dönüşüm Kolokasyonu Metodu
KDD	Kısmi diferansiyel denklemler
$\mathcal{L}$	Laplace Dönüşüm Metodu
$\mathcal{L}^{-1}$	Ters Laplace Dönüşüm Metodu
N	Doğal sayılar
R	Gerçek sayılar
Z	Tam sayılar

1.GİRİŞ

Kısmi diferansiyel denklemler fizik, tıp, termodinamik, mühendislik, sismoloji ve akışkan mekaniği gibi pek çok bilim dalında uygulama alanına sahiptir. Üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin tam ve yaklaşık çözümleri ile ilgili literatürde çok fazla çalışma yapıldı. Fiber optik, iletişim teorisi ve taşıma gibi fiziksel ve mühendislik uygulamalarında kullanılabilecek Fisher benzeri lineer olmayan denklemleri içeren üçüncü mertebeden yarı lineer ve lineer olmayan dağılımlı denklemlerin, yani dağılım-tepkime modellerinin tam çözümleri elde edildi (Ashyralyev ve Şimşek, 2017). (Ashyralyev, ve ark, 2017) de zaman değişkeninin üçüncü mertebeden bir türevi ile birleşen lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemi çalıştı. Lineer olmayan dalga denklemlerinin yürüyen dalga çözümlerini elde etmedeki etkinliğini göstermek için, A. Degasperis, D. Holm ve A. Hone tarafından verilen bir üçüncü mertebeden dağılımlı kısmi diferansiyel denklemler ailesi incelendi (Clarkson, ve ark., 1997).

Soliton tipi çözümleri belirlemek için üçüncü mertebeden evrim denklemini araştırmak için Hirota bilinear yöntemi kullanıldı (Ashyralyev, ve ark., 2018). Yarı-ayrıklaştırılmış adveksiyon difüzyon reaksiyonunun zaman entegrasyonu için yeni üç aşamalı W-yöntemleri verilip kısmi diferansiyel denklemler özellikle, komütatörle ilgili gerçekçi bir varsayım altında, üçüncü mertebeden W yöntemlerinin iki üç parametrik ailesi elde edildi (Modanli, 2018).

Optik solitonların uzay-zamansal dağılım, parabolik yasa lineer olmama durumu (kübik-kuintik lineer olmama), detuning, modlar arası dağılım, kendiliğinden dikleşme, Raman etkisi, lineer olmayan dağılım ve üçüncü mertebeden mevcudiyetinde lineer olmayan meta malzemeler aracılığıyla yayılmasını incelendi (Cheng ve Chi-Wang, 2008).

Üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için sonlu fark metodu (Modanli, 2018), en küçük kareler yöntemiyle birleştirilmiş üçüncü dereceden B-spline metodu (Çağlar, ve ark., 2010), sonlu elemanlar yöntemi (He, 2003). Ve son olarak Homotopy pertürbasyon metodu (HPM) (He, 2005) kullanılmıştır. Şimdi bu çalışmada kullanılan temel tanımları açıklayalım.

1.1. Temel Kavramlar

Tanım 1.1: "$f(t), [0,\infty)$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{1.1}$$

integrali ile tanımlanan F fonksiyonu olup;

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

ile gösterilir." İntegralin mevcut olduğu bütün s değerleri F fonksiyonunun tanım kümesini oluşturur (Podlubny, 1999).

Tanım 1.2: (Türevin Laplace Dönüşümü): "Bir fonksiyonun n. mertebeden türevinin Laplace dönüşümü:

$f(t), f'(t), \ldots f^{(n-1)}(t)$ fonksiyonları $[0,\infty)$ aralığında sürekli, $f^n(t)$, $[0,\infty)$ aralığında parçalı sürekli ve bu fonksiyonların tümü α üstel mertebeden olsunlar. "

Bu durumda $s > \alpha$ için

$$L\{f^n(t)\} = s^n\, L\{f(t)\} - s^{n-1}\, f(0) - s^{n-2}\, f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \tag{1.2}$$

olur. Özel olarak $n = 2$ olması durumunda

$$L\{f''(t)\} = s^2\, L\{f(t)\} - s\, f(0) \;\; - f'(0) \tag{1.3}$$

ve $n = 3$ için ise

$$L\{f'''(t)\} = s^3\, L\{f(t)\} - s^2\, L\{f(0)\} - s\, f'(0) \;\; - f'' \tag{1.4}$$

bağıntınları kolayca elde edilebilir (Podlubny, 1999).

Tanım 1.3: "$f(t)$, $[0,\infty)$ aralığında sürekli ve $L\{f(t)\} = F(s)$ olsun. $f(t)$ fonksiyonuna $F(s)$ nin ters Laplace dönüşümü denir. Ters Laplace dönüşümü

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t) \tag{1.5}$$

ile gösterilir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Kısmi denklemler mekanik, termodinamik, elastistik, biyoloji modelleri ve fiziğin çeşitli alanlarında önemli bir uygulama alanlarına sahiptir. Hilbert uzayında öz-eşlenik pozitif tanımlı operatörlü üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklem için yerel olmayan sınır değer problemi incelendi (Ashyralyev ve Şimşek, 2017).

Tamamen lineer olmayan üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemler (KDD) sınıfı olarak kabul edilir. Bu sınıf, literatürde son zamanlarda ortaya çıkan ve oldukça sıra dışı seyahat eden dalga çözümlerinin verildiği birkaç örneği içerir. Bu çözümler esasen üstellerin toplamından oluşur; Bu üstellerin oluşumunu, ilerleyen dalga indirgemesinde bir faktör olarak görünen lineer bir alt denklemin varlığını takip eder (Ashyralyev, ve ark, 2017).

Lineer olmayan üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemler sınıfının simetri indirgemeleri üzerinde çalışıldı (Clarkson, ve ark.,1997). Öz-eşlenik pozitif tanımlı operatörlü bir Hilbert uzayında zaman gecikmeli üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemi incelendi (Ashyralyev, ve ark., 2018).

Kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmak için Laplace dönüşüm metodu, Fourier dönüşüm metodu, kuvvet serisi çözüm metodu kullanılır. Bu denklemlerin yaklaşık çözümlerini hesaplamak için çok farklı metotlar geliştirilmiştir. Bu metotlar; sonlu fark metodu (Modanli,2018), sonlu elemanlar metodu (Cheng ve Chi-Wang, 2008), B-spline method (Çağlar ve ark., 2010), Sumudo dönüşüm metodu (Rana ve ark., 2007).

Homotopy Pertürbasyon metodu kısmi diferansiyel denlemlerin çözümlerini bulmada oldukça etkili bir metottur. Geleneksel pertürbasyon yöntemlerinin aksine, bu teknik bir denklemde küçük bir parametre gerektirmez. Bu yöntemde homotopy tekniğine göre gömme parametresi $p \in [0,1]$ olan bir homotopy oluşturulur ve gömme parametresi "küçük parametre" olarak kabul edilir, bu nedenle yönteme homotopy pertürbasyon yöntemi denir. Geleneksel pertürbasyon yöntemlerinin ve homotopy tekniklerinin tüm avantajlarından yararlanabilir. Etkinliğini ve uygunluğunu göstermek için, yüksek düzeyde lineer olmayan bir Duffing denklemi kullanıldı; Sonuç, önerilen yöntemle elde edilen ilk yaklaşıklık mertebesinin, çok büyük parametreler için bile üniform olarak geçerli olduğunu ve pertürbasyon çözümlerinden daha doğru olduğunu ortaya koymaktadır (He, 2003). Homotopy pertürbasyon metodu; lineer olmayan dalga denklemine uygulandı (He, 2005).

Lineer olmayan bilimlerin hızlı gelişimi ile birlikte, çeşitli bilim adamları tarafından birçok analitik ve sayısal teknik geliştirilmiştir. Geliştirilen tekniklerin çoğu, sınırlı yakınsama, farklı sonuçlar, lineerleştirme, ayrıklaştırma, gerçekçi olmayan varsayımlar ve fiziksel problemlerin çok yönlülüğü ile uyumsuzluk gibi sınırlamalara sahiptir. Geniş bir lineer olmayan problem sınıfını çözmek için bir dizi verimli ve güvenilir teknik geliştirildi. Bu nispeten yeni fakat çok güçlü yöntemlerin fiziksel problemlerin karmaşıklıkları ile tamamen senkronize olduğu kanıtlanmıştır, Homotopy pertürbasyon Yöntemi (HPM), Lineer olmayan diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılmıştır (Mohyud-Din ve ark., 2009).

Birçok durumda bu gibi metot hızlı bir biçimde seri çözüm vermektedir. Yeni yöntemlerle Lineer ve Lineer olmayan denklemlerin tam veya numerik çözümleri için herhangi bir engel varsayım ve lineerleştirme gerektirmeden analitik çözüme yakın çözümler bulunabilir (Demirtaş, 2014).

Bu çalışmada, üçüncü mertebeden lineer kısmi diferansiyel denkleminin

$$\begin{cases} U_{ttt}(t,x)+\alpha U_{tt}(t,x)+\beta U_t(t,x)+kU(t,x)=\lambda U_{txx}(t,x) \\ +U_{xx}(t,x)+f(t,x), \quad 0<x<L, 0<t, \\ U(0,x)=\varphi_0(x), \quad U_t(0,x)=\varphi_1(x), \quad U_{tt}(0,x)=\varphi_2(x) \end{cases} \tag{2.1}$$

ve üçüncü mertebeden lineer olmaayan kısmi diferansiyel denkleminin çözümü

$$\begin{cases} U_{ttt}(t,x)+\alpha U_{tt}(t,x)+\beta U_t(t,x)+kU^2(t,x)=\lambda U_{txx}(t,x) \\ +U_{xx}(t,x)+f(t,x), \quad 0<x<L, 0<t, \\ U(0,x)=\varphi_0(x), \quad U_t(0,x)=\varphi_1(x), \quad U_{tt}(0,x)=\varphi_2(x) \end{cases} \tag{2.2}$$

homotopy pertürbasyon metodu kullanılarak incelendi (Modanli ve Eş, 2021). (2.1) denklemi; $\lambda = 0$ için üçüncü mertebeden zamanla değişen sistem (Mohyud-Din ve ark., 2009). $\lambda \neq 0$ için denklem üçüncü mertebeden pseudo kısmi diferansiyel denklemi olarak adlandırılabilir. (2.1) ve (2.2) problemi ile ilgili literatürde herhangi bir çalışma yapılmadığından bu problemi çözmek büyük öneme sahiptir. Problemin çözümü için Homotopy pertürbasyon metodu kullanıldı. Bu çalışmada, (2.1) lineer diferansiyel denkleminin homotopy pertürbasyon metodu ile çözümü tam çözüm iken (2.2) lineer olmayan diferansiyel denklemi için yaklaşık çözüm elde edildi. Dolayısıyla Homotopy pertürbasyon metodu lineer denklemler için daha avantajlı olduğu görüldü.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Materyal

Bu tezimde daha ayrıntılı bir çalışma sunmak için konuyla ilgili daha önceden yayınlanmış makalelere, dergilere ve yapılan yüksek lisans tezlerine ulaşılıp gerekli literatür taramaları yapıldı.

3.2. Yöntem

Üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemler ile ilgili eski ve yeni yapılan yapılan çalışmalar incelendi. Homotopy pertürbasyon metodu kullanılarak üçüncü mertebeden lineer ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler için tam ve yaklaşık çözümler bulundu. Yaklaşık çözüm ve tam çözüme ait hata analiz çizelgesi oluşturuldu. Matlab programı kullanılarak tam çözüm ve yaklaşık çözüme ait grafikler çizildi.

3.2.1. Homotopy pertürbasyon metodu

İlk olarak, homotopy pertürbasyon yöntemini (He, 1999; He, 2000) çalışmalarında olduğu gibi homotopy metodunun yeni modifikasyonunun algoritmasını elde edeceğiz. Bunun için, bu metodu aşağıdaki lineer olmayan diferansiyel denklemini

$$L(u) + N(u) = f(r), r \in \Omega, \tag{3.1}$$
$$B\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0, r \in \Gamma$$

sınır değerleri için elde edelim (He, 1999; He, 2000). Burada L bir lineer operatör, N lineer olmayan bir operatör, B bir sınır, Γ Ω bölgesinin sınır operatörü ve $f(r)$

bilinen bir analitik fonksiyondur. Homotopy tekniğiyle, $v(r,p) : \Omega \rightarrow \Omega \times [0,1] \rightarrow R$ olmak üzere,

$$H(v,p) = (1-p)[L(v) - L(U_0] + p[L(v) + N(v) - f(r)] = 0 \quad (3.2)$$

dir (He, 1999; He, 2000). Burada $p \in [0,1]$ bir parametre ve U_0 ise sınır değerlerini karşılayan başlangıç koşuludur. O halde (3.1) ve (3.2) denklemlerinden

$$H(v,0) = L(v) - L(U_0) = 0, \quad (3.3)$$

$$H(v,1) = L(v) + N(v) - f(r) = 0 \quad (3.4)$$

formülleri elde edilir (He, 1999; He, 2000).

Bu yüzden 0'dan 1'e p nin değişim işlemi, $v(r,p)$ nin $U_0(r)$ den $U(r)$ dönüşümüdür. Topolojide $L(v) - L(U_0)$ ve $L(v) + N(v) - f(r)$ homotopiktir. Bu varsayım (3.2) denkleminin çözümüdür ve (3.3) denkleminin p kuvvet serisi ifadesi

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \cdots \quad (3.5)$$

şeklindedir (He, 1999; He, 2000). Bu da $p = 1$ alınırsa (1.1) denkleminin yaklaşık çözümü

$$v = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \quad (3.6)$$

formülü gibi olur. (3.6) serisinin yakınsaklığının ispatı (He, 1999; He, 2000) çalışmalarında verilmiştir.

3.2.2. Üçüncü Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklem için Homotopy Pertürbasyon Metodu

Şimdi (2.1) denkleminin çözümü için Homotopy pertürbasyon metodunu oluşturalım. (2.1) probleminin Laplace dönüşümü alınırsa

$$\mathcal{L}\{U_{ttt}(t,x)\} + \mathcal{L}\{\alpha U_{tt}(t,x) + \beta U_t(t,x) + kU(t,x) - \lambda U_{txx}(t,x) - U_{xx}(t,x)\} = \mathcal{L}\{f(t,x)\} \quad (3.7)$$

elde edilir (Modanli ve Eş, 2021). (3.7) denklemi için (2.1) denklemindeki başlangıç değerleri kullanılırsa,

$$U(s,x) = \frac{1}{s^3}[s^2\varphi_0(x) + S\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + F(s,x)] + L\{\lambda U_{txx}(t,x) + U_{xx}(t,x)\} + L[-\alpha U_{tt}(t,x) - \beta U_t(t,x) - kU(t,x)]$$

bulunur (Modanli ve Eş, 2021).

Burada $U(s,x)$, $U(t,x)$ in ve $F(s,x)$, $F(t,x)$ in Laplece dönüşümüdür. $U(s,x)$ fonksiyonu

$$U(s,x) = \sum_{i=0}^{\infty} p^i U_i(s,x)$$

formunda bulunabilir (Modanli ve Eş, 2021). Burada $i = 0,1,2,\ldots$ $U_i\,(s,x)$ formülünün bilinmeyen fonksiyonudur.

Bu durumda

$$\sum_{i=0}^{\infty} p^i U_i(s,x) = \frac{1}{s^3}\,[s^2\varphi_0(x) + S\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + F(s,x)] - \frac{p}{s^3}\; L\{\,\alpha U_{tt}(t,x) + \beta U_t(t,x) + kU(t,x) - \lambda U_{txx}(t,x) - U_{xx}(t,x)\}$$

formülü elde edilebilir (Modanli ve Eş, 2021). p'nin kuvvetlerinin katsayılarının karşılaştırılması ile

$$p^0: U_0(s,x) = \frac{1}{s^3}[s^2\varphi_0(x) + S\,\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + F(s,x)],$$

$$p^1: U_1(s,x)\ \frac{1}{S^3}\ L\{\alpha(U_0)_{tt}(t,x) + \beta(U_0)_t(t,x) + \ k(U_0)(t,x) - \lambda(U_0)_{txx}(t,x) - (U_0)_{xx}(t,x)\}$$

$$p^2:\ U_2(s,x) = \tfrac{1}{S^3}\ L\{\alpha(U_1)_{tt}(t,x) + \beta(U_1)_t(t,x) + \ k(U_1)(t,x) - \lambda(U_1)_{txx}(t,x) - (U_1)_{xx}(t,x)\}\,,$$

$$\vdots\ p^{n+1}: U_{n+1}(s,x) = (-1)^{n+1}\tfrac{1}{S^3}\ L\{\alpha(U_n)_{tt}(t,x) + \beta(U_n)_t(t,x) + \ k(U_n)(t,x) - \lambda(U_n)_{txx}(t,x) - (U_n)_{xx}(t,x)\} \tag{3.8}$$

formülleri bulunur (Modanli ve Eş, 2021).

$p \to 1$ iken, (2.1) probleminin çözümü

$$H_n(s,x) = \textstyle\sum_{i=0}^{n} p^i U_i(s,x) \tag{3.9}$$

olarak bulunur (Modanli ve Eş, 2021). (3.9) formülünün ters Laplace dönüşümü alınırsa,

$$U(t,x) \cong U_n(t,x) = L^{-1}\{H_n(s,x)\} \tag{3.10}$$

yazılır (Modanli ve Eş, 2021). Burada

$$U_n(t,x) = \frac{ln2}{t}\ \textstyle\sum_{i=1}^{2p} d_i H_n\,(i\ \frac{ln2}{t}, x),\ p > 0,$$

$$\text{ve } d_i = \ (-1)^{i+p}\ \textstyle\sum_{j=[\frac{i+1}{2}]}^{\min(i,p)} \frac{\mathrm{i}^P\,(2j)!}{(p-j)!\,(j-1)!(i-1)!(2j-1)!}$$

dır (He, 1999).

Şimdi (2.2) lineer olmayan kısmi diferansiyel denkleminin çözümü için Homotopy pertürbasyon metodunu oluşturalım. (2.2) probleminin Laplace dönüşümü alınırsa

$$U(s,x) = \frac{1}{s^3}[s^2\varphi_0(x) + S\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + F(s,x)] + L\{\lambda U_{txx}(t,x) + U_{xx}(t,x)\} + L[-\alpha U_{tt}(t,x) - \beta U_t(t,x) - kU^2(t,x)]$$

elde edilir (Modanli ve Eş, 2021).

Burada $U(s,x)$, $U(t,x)$ in ve $F(s,x)$, $F(t,x)$ in Laplece dönüşümüdür. $U(s,x)$ fonksiyonu

$$U(s,x) = \sum_{i=0}^{\infty} p^i U_i(s,x)$$

formunda yazılabilir (Modanli ve Eş, 2021). Burada $i = 0,1,2,\ldots$ $U_i\,(s,x)$ formülünün bilinmeyen fonksiyonudur. Bu durumda

$$\sum_{i=0}^{\infty} p^i U_i(s,x) = \frac{1}{s^3}\,[s^2\varphi_0(x) + S\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + F(s,x)] - \frac{p}{s^3}\,L\{\,\alpha U_{tt}(t,x) + \beta U_t(t,x) + kU^2(t,x) - \lambda U_{txx}(t,x) - U_{xx}(t,x)\}$$

formülü elde edilebilir (Modanli ve Eş, 2021). p'nin kuvvetlerinin katsayılarının karşılaştırılması ile

$$p^0: U_0(s,x) = \frac{1}{s^3}[s^2\varphi_0(x) + S\,\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + F(s,x)],$$

$$p^1: U_1(s,x) = \tfrac{1}{s^3}\,L\,\{\alpha(U_0)_{tt}(t,x) + \beta(U_0)_t(t,x) + k(U_0)^2(t,x) - \lambda(U_0)_{txx}(t,x) - (U_0)_{xx}(t,x)\}$$

$$p^2:\ U_2(s,x) = \frac{1}{S^3}L\,\{\alpha(U_1)_{tt}(t,x) + \beta(U_1)_t(t,x) + k(U_1)^2(t,x) - \lambda(U_1)_{txx}(t,x)$$

$-(U_1)_{xx}(t,x)\}$,

$\vdots\ p^{n+1}$: $U_{n+1}(s,x)$

$$= (-1)^{n+1}\frac{1}{S^3}\ L\ \{\alpha(U_n)_{tt}(t,x) + \beta(U_n)_t(t,x) + \ k(U_n)^2(t,x) - \lambda(U_n)_{txx}(t,x)$$

$$- (U_n)_{xx}(t,x)\} \qquad (3.11)$$

formülleri bulunur (Modanli ve Eş, 2021). $p \to 1$ iken , (2.2) probleminin çözümü

$$H_n(s,x) = \sum_{i=0}^{n} p^i U_i(s,x) \qquad (3.12)$$

olarak bulunur (He 1999). (3.12) formülünün ters Laplace dönüşümü alınırsa,

$$U(t,x) \cong U_n(t,x) = L^{-1}\{H_n(s,x)\} \qquad (3.13)$$

yazılır (He, 1999).

4.ARAŞTIMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Nümerik Sonuçlar

Bu bölümde üçüncü mertebeden bir kısmi diferansiyel denklemin çözümünü homotopy pertürbasyon metodunu kullanarak bir örnek problem üzerinde test edeceğiz. Bu metot kullanılarak aşağıdaki örnek problemi çözmeye çalışalım.

4.1. Örnek Üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denkleminin çözümünü

$$\begin{cases} U_{ttt}(t,x) + 3U_{tt}(t,x) + 3U_t(t,x) + U(t,x) = U_{txx}(t,x) + U_{xx}(t,x) \\ U(0,x) = sinx,\ U_t(0,x) = -2sinx,\ U_{tt}(0,x) = 4sinx, \\ U(t,0) = U(t,\pi) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

homotopy pertürbasyon metodunu ile bulalım. Verilen denklemin her tarafının Laplace dönüşümü alınırsa

$$L\{U_{ttt}(t,x)\} = -3L\{\,U_{tt}(t,x)\} - 3L\{U_t\,(t,x)\} - 3L\{U(t,x)\} + L\{U_{txx}\,(t,x)\} + L\{\,U_{xx}(t,x)\}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem açılırsa

$$s^3U(s,x) - s^2U(0,x) - sU_t(0,x) - U_{tt}(0,x) = L\{-3\,U_{tt}(t,x) - 3U_t\,(t,x) - 3U(t,x) + U_{txx}\,(t,x) + \,U_{xx}(t,x)\}$$

denklemi ve buradan da verilen başlangıç değerleri kullanılırsa

$$s^3U(s,x) - s^2sinx + 2ssinx - 4sinx = L\{-3\,U_{tt}(t,x) - 3U_t\,(t,x) - 3U(t,x) + U_{txx}\,(t,x) + \,U_{xx}(t,x)\}$$

bulunur. Bu son denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$s^3U(s,x) = s^2sinx - 2ssinx + 4sinx$$
$$+ L\{-3\,U_{tt}(t,x) - 3U_t\,(t,x) - 3U(t,x) + U_{txx}\,(t,x) + \,U_{xx}(t,x)\}$$

olup buradan da

$$U(s,x) = \frac{sinx}{s} - \frac{2sinx}{s^2} + \frac{2sinx}{s^3}$$
$$+\frac{1}{s^3}L\{-3\,U_{tt}(t,x) - 3U_t\,(t,x) - 3U(t,x) + U_{txx}\,(t,x) + \,U_{xx}(t,x)\} \quad (4.2)$$

denklemi elde edilir. (3.11) formülü (4.2) denkleminde kullanılırsa

$$\mathrm{U_0(s,x)} = \frac{sinx}{s} - \frac{2sinx}{s^2} + \frac{2sinx}{s^3} \quad (4.3)$$

yazılabilir. (4.3) denkleminin ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$L^{-1}\{U_0(s,x) = \frac{sinx}{s} - \frac{2sinx}{s^2} + \frac{2sinx}{s^3}\}$$

olup

$$U_0(t,x) = sinx - 2tsinx + 2t^2sinx$$

ve

$$U_0(t,x) = (1 - 2t + 2t^2)sinx$$

bulunur. (3.8) formülünden

$$U_{n+1}(t,x) = \frac{1}{s^3}L\{-3\,(U_n)_{tt}(t,x) - 3(U_n)_t\,(t,x) - 3(U_n)(t,x) + \,(U_n)_{txx}\,(t,x) + (U_n)_{xx}(t,x)\}$$

formülü yazılabilir.

Bu son formülden,

$$U_1(t,x) = \frac{1}{s^3} L\{-3\,(U_0)_{tt}(t,x) - 3(U_0)_t\,(t,x) - 3(U_0)(t,x) + \,(U_0)_{txx}\,(t,x) + \,(U_0)_{xx}(t,x)\}$$

$$= \frac{1}{s^3}\, L\{-3.4 - 3(-2+4t) - 3(1-2t+2t^2) + (2-4t) - (1-2t+2t^2)\}\, sinx$$

ve

$$U_1(s,x) = \left(-\frac{8}{s^4} \; -\frac{8}{s^5} - \frac{16}{s^6}\right) sinx$$

bulunur. Son formülün ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$L^{-1}\{U_1(s,x)\} = \; L^{-1}\,\{\left(-\frac{8}{s^4} \; -\frac{8}{s^5} - \frac{16}{s^6}\right) sinx\}$$

olup buradan da

$$U_1(t,x) = -\left(\frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{3}t^4 + \frac{2}{15}t^5\right) sinx$$

elde edilir. Yine aynı yöntemlerle

$$U_2(t,x) = \frac{1}{s^3} L\{-3\,(U_1)_{tt}(t,x) - 3(U_1)_t\,(t,x) - 3(U_1)(t,x) + \,(U_1)_{txx}\,(t,x) + \,(U_1)_{xx}(t,x)\}$$

$$= \; \frac{1}{s^3} L\left\{\left(24t^1 + 12t^2 + 8t^3 + 12t^2 + 4t^3 + 2t^4 + 4t^3 + t^4 + \frac{2}{5}t^5 + 4t^2 + \frac{4}{3}t^3 + \frac{2}{3}t^4 + \frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{3}t^4 + \frac{2}{15}t^5\right) sinx\right\}$$

$$= \frac{1}{s^3} L\left\{\left(\frac{8}{15}t^5 + 4t^4 + \frac{56}{3}t^3 + 28t^2 + 24t^1\right) sinx\right\}$$

$$= \left(\frac{64}{s^9} + \frac{96}{s^8} + \frac{112}{s^7} + \frac{56}{s^6} + \frac{24}{s^5}\right) sinx$$

yazılabilir. Bu denklemin de ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$L^{-1}\{U_2(s,x)\} = L^{-1}\left\{\left(\frac{64}{s^9}+\frac{96}{s^8}+\frac{112}{s^7}+\frac{56}{s^6}+\frac{24}{s^5}\right)sinx\right\}$$

$$U_2(t,x) = \left(\frac{1}{630}t^8+\frac{2}{105}t^7+\frac{7}{45}t^6+\frac{7}{15}t^5+t^4\right)sinx$$

aynı şekilde devam edilir ve $i = 3,4,\ldots$ için $U_i(t,x)$ bulunup

$$U(t,x) = U_0(t,x) + U_1(t,x) + U_2(t,x) + \cdots$$

hesaplanabilir. (3.9) ve (3.10) formülleri kullanılarak

$$U(t,x) = (1-2t+2t^2)sinx + -\left(\frac{4}{3}t^3+\frac{1}{3}t^4+\frac{2}{15}t^5\right)sinx + \left(\frac{1}{630}t^8+\frac{2}{105}t^7+\frac{7}{45}t^6+\frac{7}{15}t^5+t^4\right)sinx+\cdots$$

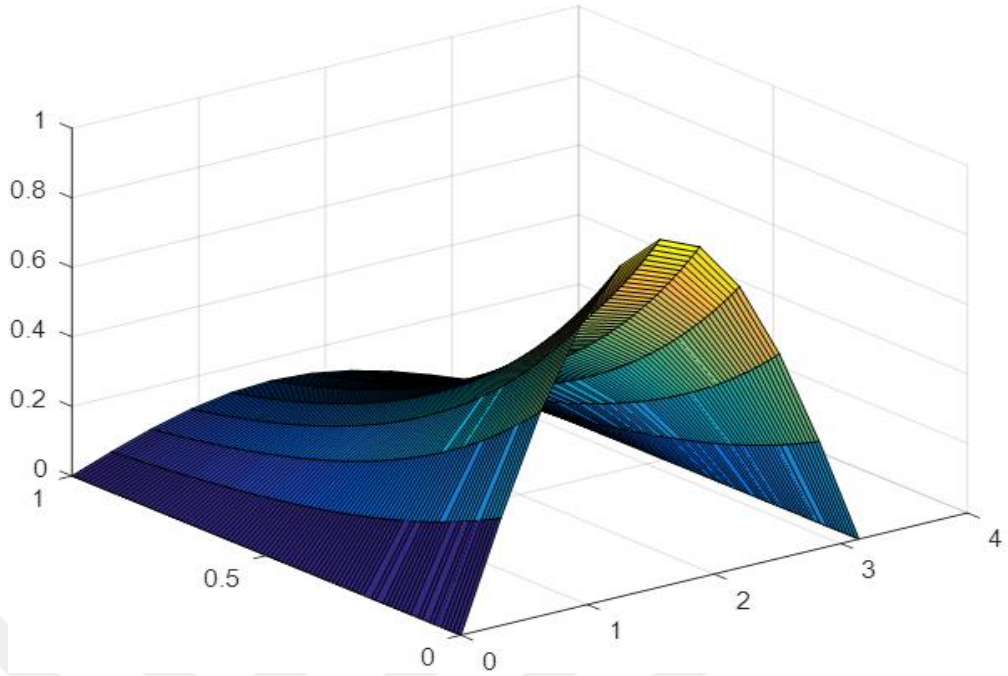
$$U(t,x) = (1-2t+2t^2+-\frac{4}{3}t^3-\frac{1}{3}t^4-\frac{2}{15}t^5+\frac{1}{630}t^8+\frac{2}{105}t^7+\frac{7}{45}t^6+\frac{7}{15}t^5+t^4)sinx+\cdots$$

$$U(t,x) = \left(1-2t+2t^2-\frac{4}{3}t^3+\frac{2}{3}t^4+\frac{1}{3}t^5+\frac{7}{45}t^6+\frac{2}{105}t^7+\frac{1}{630}t^8+\cdots\right)sinx$$

bulunur. Taylor açılımından bu son denklemin

$$U(t,x) = e^{-2t}sinx$$

olarak bulunur ki bu da Örnek (4.1)' in tam çözümüne karşılık gelir. Bu çözüm ile ilgili grafik aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.1. (4.1) probleminin $0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq \pi$ aralığındaki tam çözümünün grafiğidir.

Şimdi de lineer olmayan üçüncü mertebeden bir kısmi diferansiyel denklemin yaklaşık çözümünü homotopy pertürbasyon metodu ile incleyelim.

Örnek 4.2. Üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denkleminin çözümünü

$$\begin{cases} U_{ttt}(t,x) + U_{tt}(t,x) + 2U_t(t,x) + U^2(t,x) = U_{txx}(t,x) + U_{xx}(t,x) \\ +6(t^2+t+1) + t^6 + 2t^3x^3 + x^6 - 36x^2, \\ U(0,x) = x^3,\ U_t(0,x) = (0,x) = 0, \\ U(t,0) = t^3, U(t,\pi) = t^3 + \pi^3 \end{cases} \quad (4.4)$$

homotopy pertürbasyon metodu ile bulalım. (4.4) denklemin her tarafının Laplace dönüşümü alınırsa

$$L\{U_{ttt}(t,x)\} = -L\{U_{tt}(t,x)\} - 2L\{U_t(t,x)\} - L\{U^2(t,x)\} + L\{U_{txx}(t,x)\} + L\{U_{xx}(t,x)\} + L\{f(t,x)\}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem açılırsa

$$s^3U(s,x) - s^2U(0,x) - sU_t(0,x) - U_{tt}(0,x)$$
$$= L\{- U_{tt}(t,x) - 2U_t\,(t,x) - U^2(t,x) + U_{txx}\,(t,x) + U_{xx}(t,x) + f(t,x)\}$$

denklemi ve bu son denklemden de (4.4) probleminde verilen başlangıç değerleri kullanılırsa

$$s^3U(s,x) - s^2x^3$$
$$= L\{- U_{tt}(t,x) - 2U_t\,(t,x) - U^2(t,x) + U_{txx}\,(t,x) + U_{xx}(t,x) + 6(t^2+t+1) + t^6 + 2t^3x^3 + x^6 - 36x^2\}$$

bulunur. Bu son denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$s^3U(s,x) = s^2x^3$$
$$+ L\{- U_{tt}(t,x) - 2U_t\,(t,x) - U^2(t,x) + U_{txx}\,(t,x) + U_{xx}(t,x) + 6(t^2+t+1) + t^6 + 2t^3x^3 + x^6 - 36x^2\}$$

olup buradan da

$$U(s,x) = \frac{x^3}{s} + L\{6(t^2+t+1) + t^6 + 2t^3x^3 + x^6 - 36x^2\}$$
$$+\frac{1}{s^3}L\{- U_{tt}(t,x) - 2U_t\,(t,x) - U^2(t,x) + U_{txx}\,(t,x) + U_{xx}(t,x)\} \qquad (4.5)$$

denklemi elde edilir. (3.8) ve (3.12) formülleri kullanılırsa

$$U_0(s,x) = \{\frac{x^3}{s} + \frac{12}{s^6} + \frac{6}{s^5} + \frac{6!}{s^{10}} + \frac{12}{s^7}x^3 + \frac{1}{s^4}(x^6 - 36x^2 + 1)\} \qquad (4.6)$$

yazılabilir. (4.6) denkleminin ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$L^{-1}\{U_0(s,x) = L^{-1}\{\frac{x^3}{s} + \frac{12}{s^6} + \frac{6}{s^5} + \frac{6!}{s^{10}} + \frac{12}{s^7}x^3 + \frac{1}{s^4}(x^6 - 36x^2 + 1)\}$$

olup

$$U_0(t,x) = x^3 + \frac{1}{10}t^5 + \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{504}t^9 + \frac{1}{60}t^6x^3 + \frac{1}{6}t^3(x^6 - 36x^2 + 1) \quad (4.7)$$

bulunur. (3.8) formülünden

$$U_{n+1}(s,x) = \frac{1}{s^3}L\{-(U_n)_{tt}(t,x) - 2(U_n)_t\,(t,x) - (U_n^2)(t,x) + (U_n)_{txx}\,(t,x) + (U_n)_{xx}(t,x)\}$$

formülü yazılabilir. Bu son formülden, birinci iterasyon için

$$U_1(s,x) = \frac{1}{s^3}L\{-(U_0)_{tt}(t,x) - 2(U_0)_t\,(t,x) - (U_0^2)(t,x) + (U_0)_{txx}\,(t,x) + (U_0)_{xx}(t,x)\} \quad (4.8)$$

formülü elde edilir. Burada

$$(U_0)_t(t,x) = \frac{t^5x^3}{10} + \frac{t^2(x^6 - 36x^2 + 1)}{2} + t^3 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^8}{56};$$

$$(U_0)_{tt}(t,x) = \frac{t^4x^3}{2} + t(x^6 - 36x^2 + 1) + 3t^2 + 2t^3 + \frac{t^7}{7};$$

$$(U_0)_{txx}(t,x) = \frac{3t^5x}{5} + \frac{t^2(30x^4 - 72)}{2};$$

$$(U_0)_{xx}(t,x) = 6x + \frac{t^6x}{10} + \frac{t^3(30x^4 - 72)}{6}$$

dır. Bu formüller (4.8) denkleminde yerine yazılırsa;

$$U_1(s,x)(t,x) = \frac{1}{s^3}\left(-\frac{(72x^5)}{s^4} - \frac{2x^3}{s^4} - \frac{24x^3}{s^5} - \frac{x^6}{s} - \frac{48x^3}{s^6}\right.$$
$$+\frac{1440x^2}{s^7} + \frac{15120x^2}{s^8} - \frac{25920x^4}{s^7} + \frac{48384x^2}{s^9} - \frac{2x^9}{s^4} - \frac{64x^6}{s^7}$$
$$-\frac{3456x^3}{s^{10}} - \frac{420x^6}{s^8} - \frac{30240x^3}{s^{11}} + \frac{1440x^8}{s^7} - \frac{1344x^6}{s^9} + \frac{72576x^5}{s^{10}}$$
$$-\frac{133056x^3}{s^{12}} + \frac{11404800x^2}{s^{13}} - \frac{20x^{12}}{s^7} - \frac{2016x^9}{s^{10}} - \frac{449856x^6}{s^{13}} - \frac{86486400x^3}{s^{16}}$$
$$-\frac{x^6 - 36x^2 + 1}{s^2} - \frac{2(x^6 - 36x^2 + 1)}{s^3} + \frac{6x}{s} + \frac{72x}{s^6} + \frac{72x}{s^7} + \frac{6 * (5x^4 - 12)}{s^4}$$
$$+\frac{2(15x^4 - 36)}{s^3} - \frac{6}{s^3} - \frac{24}{s^4} - \frac{24}{s^5} - \frac{20}{s^7} - \frac{1140}{s^8} - \frac{5304}{s^9} - \frac{18144}{s^{10}}$$
$$\left.-\frac{36288}{s^{11}} - \frac{316800}{s^{13}} - \frac{6177600}{s^{14}} - \frac{34594560}{s^{15}} - \frac{25204608000}{s^{19}}\right);$$

bulunur. Bu son denklemin de ters Laplace dönüşümü alınırsa;

$$U_1(t,x) = L^{-1}\{U_1(s,x)\}$$
$$= \frac{t^5(-2x^6 + 30x^4 + 72x^2 - 80)}{120} - \frac{t^{11}(1344x^6 - 48384x^2 + 5304)}{39916800}$$
$$-\frac{t^{15}(449856x^6 - 11404800x^2 + 316800)}{1307674368000} - \frac{t^{14}x^3}{655200} - \frac{t^{18}x^3}{74027520}$$
$$-\frac{t^{10}(420x^6 - 15120x^2 + 1140)}{3628800}$$
$$-\frac{t^{12}(2016x^9 - 72576x^5 + 3456x^3 + 18144)}{479001600}$$
$$-\frac{t^6(2x^9 - 72x^5 - 30x^4 + 2x^3 + 96)}{720}$$
$$-\frac{t^9(20x^{12} - 1440x^8 + 64x^6 + 25920x^4 - 1440x^2 - 72x + 20)}{362880}$$
$$+\frac{t^3(-x^6 + 6x)}{6} + \frac{t^8(-48x^3 + 72x)}{40320} - \frac{t^4(x^6 - 36x^2 + 1)}{24} - \frac{t^7(24x^3 + 24)}{5040}$$
$$-\frac{t^{13}(30240x^3 + 36288)}{6227020800} - \frac{t^{16}}{3386880} - \frac{t^{17}}{10281600} - \frac{t^{21}}{2027047680};$$

elde edilir.

Yine aynı yöntemle,

$$U_2(s,x) = \frac{1}{s^3} L\{-(U_1)_{tt}(t,x) - 2(U_1)_t\,(t,x) - (U_1^2)(t,x) + (U_1)_{txx}\,(t,x) + (U_1)_{xx}(t,x)\} \tag{4.9}$$

formülü kullanılır. Burada;

$$\begin{aligned}
&(U_1)_{tt}(t,x)\\
&= \frac{t^3(-2x^6 + 30x^4 + 72x^2 - 80)}{6} - \frac{t^9(1344x^6 - 48384x^2 + 5304)}{362880}\\
&- \frac{t^{13}(449856x^6 - 11404800x^2 + 316800)}{6227020800} - \frac{t^{12}x^3}{3600} - \frac{t^{16}x^3}{241920}\\
&- \frac{t^8(420x^6 - 15120x^2 + 1140)}{40320}\\
&- \frac{t^{10}(2016x^9 - 72576x^5 + 3456x^3 + 18144)}{3628800} + t(-x^6 + 6x)\\
&- \frac{t^4(x^9 - 72x^5 - 30x^4 + 2x^3 + 96)}{24}\\
&- \frac{t^7(20x^{12} - 1440x^8 + 64x^6 + 25920x^4 - 1440x^2 - 72x + 20)}{5040}\\
&+ \frac{t^6(-48x^3 + 72x)}{720} - \frac{t^2(x^6 - 36x^2 + 1)}{2} - \frac{t^5(24x^3 + 24)}{120}\\
&- \frac{t^{11}(30240x^3 + 36288)}{39916800} - \frac{t^{14}}{14112} - \frac{t^{15}}{37800} - \frac{t^{19}}{4826304};
\end{aligned}$$

$$(U_1)_t\,(t,x) = \frac{t^4(-2x^6+30x^4+72x^2-80)}{24} - \frac{t^{10}(1344x^6-48384x^2+5304)}{3628800} - \frac{t^{14}(449856x^6-11404800x^2+316800)}{87178291200} - \frac{t^{13}x^3}{46800} - \frac{t^{17}x^3}{4112640} - \frac{t^9(420x^6-15120x^2+1140)}{362880} - \frac{t^{11}(2016x^9-72576x^5+3456x^3+18144)}{39916800} - \frac{t^5(2x^9-72x^5-30x^4+2x^3+96)}{120} - \frac{t^8(20x^{12}-1440x^8+64x^6+25920x^4-1440x^2-72x+20)}{40320} + \frac{t^2(-x^6+6x)}{2} + \frac{t^7(-48x^3+72x)}{5040} - \frac{t^3(x^6-36x^2+1)}{6} - \frac{t^6(24x^3+24)}{720} - \frac{t^{12}(30240x^3+36288)}{479001600} - \frac{t^{15}}{211680} - \frac{t^{16}}{604800} - \frac{t^{20}}{96526080};$$

$$(U_1)_{txx}\,(t,x) = \frac{t^4(-60x^4+360x^2+144)}{24} - 15t^2x^4 - \frac{t^5(144x^7-1440x^3-360x^2+12x)}{120} - \frac{t^8(2640x^{10}-80640x^6+1920x^4+311040x^2-2880)}{40320} - \frac{t^6x}{5} - \frac{2t^7x}{35} - \frac{t^{12}x}{2640} - \frac{t^{13}x}{7800} - \frac{t^{17}x}{685440} - \frac{t^3(30x^4-72)}{6} - \frac{t^9(12600x^4-30240)}{362880} - \frac{t^{10}(40320x^4-96768)}{3628800} - \frac{t^{14}(13495680x^4-22809600)}{87178291200} - \frac{t^{11}(145152x^7-1451520x^3+20736x)}{39916800};$$

$$(U_1)_{xx}(t,x) = \frac{t^5(-60x^4 + 360x^2 + 144)}{120} - 5t^3x^4 - \frac{t^6(144x^7 - 1440x^3 - 360x^2 + 12x)}{720} - \frac{t^9(2640x^{10} - 80640x^6 + 1920x^4 + 311040x^2 - 2880)}{362880} - \frac{t^7x}{35} - \frac{t^8x}{140} - \frac{t^{13}x}{34320} - \frac{t^{14}x}{109200} - \frac{t^{18}x}{12337920} - \frac{t^4(30x^4 - 72)}{24} - \frac{t^{10}(12600x^4 - 30240)}{3628800} - \frac{t^{11}(40320x^4 - 96768)}{39916800} - \frac{t^{15}(13495680x^4 - 22809600)}{1307674368000} - \frac{t^{12}(145152x^7 - 1451520x^3 + 20736x)}{479001600};$$

dır. Bu son formüller (4.9) denkleminde yerine yazılırsa,

$$U_2(s,x) = \frac{1}{s^3}\left(\frac{72x^5}{s^4} - \frac{2x^3}{s^4} - \frac{24x^3}{s^5} - \frac{x^6}{s} - \frac{48x^3}{s^6} + \frac{1440x^2}{s^7} + \frac{15120x^2}{s^8} - \frac{25920x^4}{s^7} + \frac{48384x^2}{s^9} - \frac{2x^9}{s^4} - \frac{64x^6}{s^7} - \frac{3456x^3}{s^{10}} - \frac{420x^6}{s^8} - \frac{30240x^3}{s^{11}} + \frac{1440x^8}{s^7} - \frac{1344x^6}{s^9} + \frac{72576x^5}{s^{10}} - \frac{133056x^3}{s^{12}} + \frac{11404800x^2}{s^{13}} - \frac{20x^{12}}{s^7} - \frac{2016x^9}{s^{10}} - \frac{449856x^6}{s^{13}} - \frac{86486400x^3}{s^{16}} - \frac{x^6 - 36x^2 + 1}{s^2} - \frac{2(x^6 - 36x^2 + 1)}{s^3} + \frac{6x}{s} + \frac{72x}{s^6} + \frac{72x}{s^7} + \frac{6(5x^4 - 12)}{s^4} + \frac{2(15x^4 - 36)}{s^3} - \frac{6}{s^3} - \frac{24}{s^4} - \frac{24}{s^5} - \frac{20}{s^7} - \frac{1140}{s^8} - \frac{5304}{s^9} - \frac{18144}{s^{10}} - \frac{36288}{s^{11}} - \frac{316800}{s^{13}} - \frac{6177600}{s^{14}} - \frac{34594560}{s^{15}} - \frac{25204608000}{s^{19}}\right);$$

yazılabilir. Bu denklemin de ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$U_2(t,x) = L^{-1}\{U_2(s,x)\}$$
$$= \frac{t^5(-2x^6 + 30x^4 + 72x^2 - 80)}{120} - \frac{t^{11}(1344x^6 - 48384x^2 + 5304)}{39916800}$$
$$- \frac{t^{15}(449856x^6 - 11404800x^2 + 316800)}{1307674368000} - \frac{t^{14}x^3}{655200} - \frac{t^{18}x^3}{74027520}$$
$$- \frac{t^{10}(420x^6 - 15120x^2 + 1140)}{3628800}$$
$$- \frac{t^{12}(2016x^9 - 72576x^5 + 3456x^3 + 18144)}{479001600}$$
$$- \frac{t^6(2x^9 - 72x^5 - 30x^4 + 2x^3 + 96)}{720}$$
$$- \frac{t^9(20x^{12} - 1440x^8 + 64x^6 + 25920x^4 - 1440x^2 - 72x + 20)}{362880}$$
$$+ \frac{t^3(-x^6 + 6x)}{6} + \frac{t^8(-48x^3 + 72x)}{40320} - \frac{t^4(x^6 - 36x^2 + 1)}{24} - \frac{t^7(24x^3 + 24)}{5040}$$
$$- \frac{t^{13}(30240x^3 + 36288)}{6227020800} - \frac{t^{16}}{3386880} - \frac{t^{17}}{10281600} - \frac{t^{21}}{2027047680};$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde devam edilirek ve $i = 3,4,\ldots$ için $U_i(t,x)$ bulunabilir. Fakat işlem yoğunluğundan burada sadece ikinci adıma kadar hesaplayabildik. Lineer olmayan üçüncü mertebeden (4.2) probleminin yaklaşık çözümü Homotopy pertürbasyon yöntemi ile

$$U(t,x) = U_0(t,x) + U_1(t,x) + U_2(t,x) \tag{4.10}$$

olarak elde edildi. $U_0(t,x)$, $U_1(t,x)$ ve $U_2(t,x)$ fonksiyonlarının elde edilen değerleri (4.10) denkleminde yerine yazılırsa

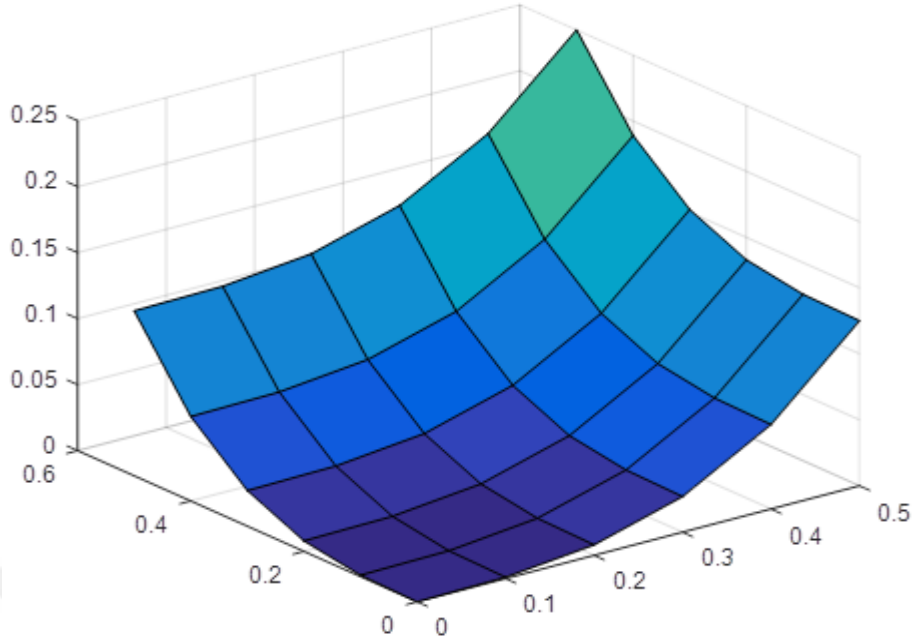
$$
\begin{aligned}
&U(t,x)\\
&=\frac{t^6x^3}{60}-\frac{t^{11}(1344x^6-\ 48384x^2+\ 5304)}{19958400}\\
&-\frac{t^{15}(449856x^6-\ 11404800x^2+\ 316800)}{653837184000}-\frac{t^{10}(420x^6-\ 15120x^2+\ 1140)}{1814400}\\
&-\frac{t^{14}x^3}{327600}-\frac{t^{18}x^3}{37013760}+\frac{t^5(-\ 2x^6+\ 30x^4+\ 72x^2-\ 80)}{60}\\
&-\frac{t^{12}(2016x^9-\ 72576x^5+\ 3456x^3+\ 18144)}{239500800}\\
&-\frac{t^6(2x^9-\ 72x^5-\ 30x^4+\ 2x^3+\ 96)}{360}\\
&-\frac{t^9(20x^{12}-\ 1440x^8+\ 64x^6+\ 25920x^4-\ 1440x^2-\ 72x\ +\ 20)}{181440}\\
&+\frac{t^3(-\ x^6+\ 6x)}{3}+\frac{t^8(-\ 48x^3+\ 72x)}{20160}+\frac{t^3(x^6-\ 36x^2+\ 1)}{6}\\
&-\frac{t^4(x^6-\ 36x^2+\ 1)}{12}-\frac{t^7(24x^3+\ 24)}{2520}-\frac{t^{13}(30240x^3+\ 36288)}{3113510400}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^5}{10}\\
&+\frac{t^9}{504}-\frac{t^{16}}{1693440}-\frac{t^{17}}{5140800}-\frac{t^{21}}{1013523840}+\ x^3;
\end{aligned}
$$

bulunur.

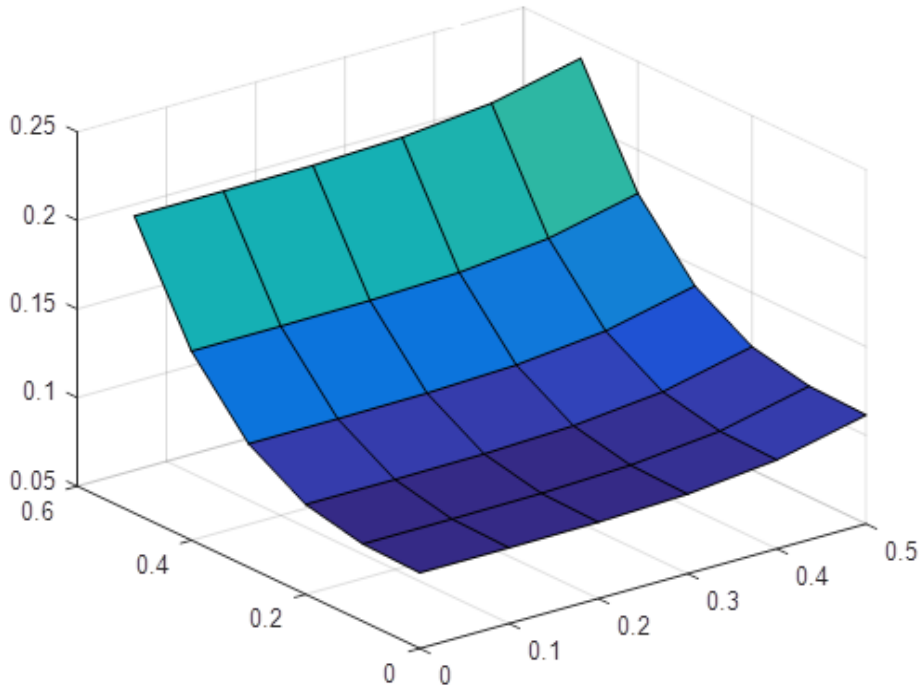
Bu da (4.2) probleminin yaklaşık çözümüne karşılık gelir. Bu problemin tam çözümü

$$U(t,x)=x^3+t^3$$

dır. Problem (4.2) için tam ve yaklaşık çözümlerin grafikleri aşağıdaki gibi verilmiştir.



Şekil 4.2. (4.2) probleminin $0 \leq x \leq 0.5$, $0 \leq t \leq 0.5$ aralığındaki tam çözümün grafiğini verir.



Şekil 4.3. (4.2) probleminin $0 \leq x \leq 0.5$, $0 \leq t \leq 0.5$ aralığındaki yaklaşık çözümün grafiğini verir.

Şekil 4.2. ve Şekil 4.3.'den tam ve yaklaşık çözümlerin grafikleri birbirine yakın olmakla birlikte aşağıdaki hata analiz tablosu tam ve yaklaşık çözümlerin oldukça yakın olduğunu daha açık bir şekilde görmemizi sağlar.

Çizelge 4.1. Hata Analizi

$t,\quad x$	Tam Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Hata Analizi($\in$)
$t = 0.5,$ $x = 0.5$	0.250000000000000	0.497219828236829	0.247219828236829
$t = 0.4,$ $x = 0.4$	0.128000000000000	0.015105189685149	0.112894810314851
$t = 0.3,$ $x = 0.3$	0.054000000000000	0.004334860620505	0.049665139379495
$t = 0.2,$ $x = 0.2$	0.016000000000000	0.002243487150053	0.013756512849947
$t = 0.1,$ $x = 0.1$	0.002000000000000	0.000287852726572	0.001712147273428
$t = 0.01,$ $x = 0.01$	2.0000×10^{-6}	1.85102×10^{-7}	1.8148×10^{-6}

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu çalışmada, üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemin çözümü homotopy pertürbasyon metodu kullanılarak elde edildi. Homotopy pertürbasyon metodunun genel formu ve bu denklemin çözümü için homotopy pertürbasyon metodu oluşturuldu. Bu metot kullanılarak lineer ve lineer olmayan örnek problemler üzerinde denklemin çözümü hesaplandı. Elde edilen çözümlerin lineer denklemde tam çözüme denk olduğu lineer olmayan denklemde ise tam çözüme yakın yaklaşık bir çözüme denk olduğu görüldü. Bu nedenle bu metodun bu problem için uygun ve pratik bir metot olduğu görüldü. Matlab programı kullanılarak çözümler için grafikler çizildi. Hata analiz tablosu çizilerek belirtilen aralıkta tutarlı ve kararlı olduğu görüldü.

5.2. Öneriler

Laplace Dönüşüm Kolokasyonu Metodu (LDKM) lineer ve lineer olmayan kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin geneline uygulanabilir.

KAYNAKLAR

ASHYRALYEV, A., and SIMSEK, S. N., 2017. An operator method for a third order partial differential equation. Numerical Functional Analysis and Optimization, *38*(10), 1341-1359.

ASHYRALYEV, A., BELAKROUM, K., and GUEZANE-LAKOUD, A., 2017. Stability of boundary-value problems for third-order partial differential equations. Electronic Journal of Differential Equations, 2017(53), 1-11.

ASHYRALYEV, A., HINCAL, E. and IBRAHIM, S., 2018. August. Stability of the third order partial differential equations with time delay. In AIP Conference Proceedings (Vol. 1997, No. 1, p. 020086). AIP Publishing LLC.

CAGLAR, H., CAGLAR, N., ÖZER, M., VALARISTOS, A. and ANAGNOSTOPOULOS, A.N., 2010. B-spline method for solving Bratu's problem. International Journal of Computer Mathematics, 87(8), 1885-1891.

CHENG, YİNGDA SHU. and CHİ-WANG. A., 2008. discontinuous Galerkin finite element method for time dependent partial differential equations with higher order derivatives. Mathematics of computation, 77.262: 699-730.

CLARKSON, P. A., MANSFIELD, E. L. and PRIESTLEY, T.J., 1997. Symmetries of a class of nonlinear third-order partial differential equations. Mathematical and Computer Modelling, 25(8-9), 195-212.

DEMIRTAŞ, A., 2014. Lineer Olmayan denklemlerin Varyasyonel İterasyon, Homotopi Pertürbasyon ve Varyasyonel Homotopi Pertürbasyon Yöntemleri ile Çözümleri. İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, İstanbul, 70s.

HE, J. H., 2005. Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations. Chaos, Solitons and Fractals, 26(3), 695-700.

HE, J.H., 1999. Homotopy perturbation technique, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 178, 257.

HE, J.H., 2000. A coupling method of a homotopy technique and a perturbation technique for non-linear problems, Int. J. Non-linear Mech. 35 (1): 37-43.

HE, J.H., 2003. Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique. Applied Mathematics and computation, 135(1), 73-79.

MODANLI, M., 2018. Two numerical methods for fractional partial differential equation with nonlocal boundary value problem. Advances in Difference Equations, 2018.1: 1-19.

MODANLI, M., ve Hüseyin, E., 2021. Üçüncü Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemin Homotopy Pertürbasyon Metodu ile Çözümü. Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 10(4), 1527-1534.

MOHYUD-DIN, S.T., NOOR, M. A. and NOOR, K. I., 2009. Some relatively new techniques for nonlinear problems. Mathematical Problems in Engineering, 1-25.

PODLUBNY, L., 1999. Fractional Differential Equations, vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, San Diego, Calif., USA, 1-281.

RANA, M. A., SIDDIQUI, A. M., GHORI, Q. K., and QAMAR, R., 2007. Application of He's homotopy perturbation method to Sumudu transform. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 8(2), 185-190