T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PSEUDO-HİPERBOLİK TELEGRAF KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMİN ANALİTİK VE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Fatma ŞİMŞEK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2022

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET.....i
ABSTRACT.....ii
TEŞEKKÜR.....iii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....iv
ÇİZELGELER DİZİNİ.....v
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....vi
1. GİRİŞ.....1
1.1.Temel Kavramlar.....3
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....4
2.1. Laplace Dönüşüm Kolokasyon Metodu (LTCM).....5
2.2. Modifiye Çift Laplace Ayrışma Yöntemi.....7
2.2.1. Metodun tam çözümü.....9
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....18
3.1. Materyal.....18
3.2. Yöntem.....18
3.2.1. Laplace dönüşüm kolokasyon metodunun nümerik uygulanması.....18
4.ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA.....28
4.1. Nümerik Sonuçlar.....28
5.SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....29
5.1. Sonuçlar.....29
5.2. Öneriler.....29
KAYNAKLAR.....30
ÖZGEÇMİŞ.....34

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

PSEUDO-HİPERBOLİK TELEGRAF KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMİN ANALİTİK VE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Fatma ŞİMŞEK

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mahmut MODANLI
Yıl:2022, Sayfa: 33

Bu çalışmada, Laplace dönüşüm kolokasyonu metodu pseudo-hiperbolik telegraf denklemine uygulandı. Modifiye Çift Laplace metodu ile elde edilen pseudo hiperbolik telegraf denklemin tam çözümü ile Laplace dönüşüm kolokasyon metodu ile elde edilen yaklaşık çözümü ile karşılaştırıldı. Karşılaştırma sonucu elde edilen nümerik sonuçlar hata tablosunda verildi. Bulunan yaklaşık çözümün tam çözüme yakın olması bu metodun pseudo-hiperbolik telegraf diferansiyel denklemi için uygun olduğunu ve güzel sonuçlar verdiğini gösterir.

ANAHTAR KELİMELER: Pseudo telegraf diferansiyel denklemi, Laplace dönüşüm kolokasyonu metodu, Modifiye çift laplace metodu, Tam çözüm, Yaklaşık çözüm.

ABSTRACT

MSc Thesis

ANALYTIC AND NUMERICAL SOLUTIONS OF PSEUDO-HYPERBOLIC TELEGRAPH PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

Fatma ŞİMŞEK

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Departmens

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mahmut MODANLI
Year:2022, Page: 33

In this study, the Laplace transform collocation method is applied to the pseudo hyperbolic telegraph equation. The exact solution of this equation obtained by the Modified Double Laplace method is compared with the approximate solution obtained by the Laplace transform collocation method. The results obtained are given in the error analysis table. The fact that the approximate solution indicates that this method is suitable for the pseudo hyperbolic telegraph differential equation and gives good results.

KEY WORDS: Pseudo hyperbolic telegraph equation, Laplace transform collocation method, Modified Double Laplace method, exact solution, approximation solution.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Mahmut MODANLI' ya çalışmam boyunca maddi ve manevi olarak yardımlarını esirgemeyen aileme sonsuz teşekkür ederim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 3.1. Tam çözüm grafiği..... 25
Şekil 3.2. Yaklaşık çözüm grafiği..... 25

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

Çizelge 3.1. Hata analizi..... 24

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

C	Caputo türevi
C	Karmaşık Sayılar
CuBSCM	Cubic B-spline Collocation Methodu
D^p	p'inci mertebeden türev operatörü
KDD	Kısmi diferansiyel denklemler
IDE	İntegro diferansiyel denklemler
$\mathcal{L}$	Laplace Dönüşüm Metodu
$\mathcal{L}^{-1}$	Ters Laplace Dönüşüm Metodu
LTCM	Laplace Dömüşüm Kolokasyon Metodu
N	Doğal sayılar
PDE	Kısmi Diferansiyel Denklem
R	Gerçek sayılar
Z	Tam sayılar

1. GİRİŞ

Hiperbolik kısmi diferansiyel denklemler ortaya çıktığı dönemden itibaren akışkanlar dinamiği, dalga yayılımı, rasgele hareket teorisi, hidrodinamik, ısıl devinim, elektromanyetik ve materyal bilimi gibi mühendislik ve bilim alanlarında önemli bir rol oynadığı bilinmektedir. Kısmi diferansiyel denklemlerin hiperbolik türü, güçler dengesi (Newton yasası) gibi genellikle fiziksel yasalardan oluşan mühendislik ve fiziksel bilim modellerini analiz eden bir araç olarak ortaya çıktı. Son yıllarda bu denklemlerin çözümleri için metotlar geliştirildi. Hiperbolik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için daha fazla metot bulundu ve çözülmeleri için bazı nümerik ve tam metotlar verildi. Hiperbolik kısmi diferansiyel denklemler hakkında daha fazla kitaplar, tezler ve makaleler yayımlandı (Ashyralyev ve Sobolevski, 2005). Son on yıl içinde, nümerik analiz alanında bu denklemlere etkili ve daha kesin metotlarla çözüm bulmak adına büyük özen gösterildi. Kararlılık problemi büyük bir değer ve önem kazandı.

Hiperbolik kısmi diferansiyel denklemlerin önemli çalışma alanlarından biri de telegraf denklemlerdir. Bu denklemler mühendislik ve diğer bilim alanlarında büyük bir öneme sahiptir. Son zamanlarda, uygulamalı bilimlerde ortaya çıkan telegraf denklemler, adi ve kısmi diferansiyel denklemler olarak tanımlanmaktadır. Mühendisliğin ve bilimin birçok dalında telegraf denklemlerin, reaksiyon difüzyonunda adi difüzyon denklemlerine göre daha makul olduğu herkesçe malumdur. Telegraf denklemleri, rasgele hareket teorisi (Banasiak ve Mika, 1998), elektriksel sinyallerin iletimi ve yayılması için sinyal analizleri (Metaxas ve Meredith, 1983) ve dalga yayılımı gibi birçok uygulanabilir problemlerin modellenmesinde önemli bir yere sahiptir. Son yıllarda telegraf denklemleri çözmek için tam anlamıyla birçok metot önerildi. Lock, Greff ve Joubert fiziksel problemlerden başlayarak daha sonra fiziksel problemlerden matematiksel problemlere geldiler. Telegraf denklemleri iletim sistemi ile modellediler (Lock ve ark., 2007). Ağırlıklı kalıntı yönteminin dikey boyutlara uygulandığı yer telegraf

denklemler, Odejide ve Binuyo' nun eserleri ile motive edildi (Odejide ve Binuyo, 2014).

Yeni yöntem olan ve Laplace dönüşümünü temel alan verimli sıralama yöntemi telegraf denkleminin çözümünü yaklaşık olarak belirlemek için önerilmektedir. Böylece bu yeni yöntem Laplace Dönüşüm Kolokasyon metodu olarak adlandırılacaktır.

Pseudo-Hiperbolik denklemler matematik, fizik, mühendislik gibi birçok alanda kullanılmıştır. Çubukların boylamasına titreşimi, genel olarak matematiksel fizikte, çubuğun nispeten ince ve uzun olduğu varsayılarak dalga denklemi ile tanımlanan klasik olarak kabul edilir. Nispeten kalın bir çubuğun (kirişin) yanal hareketinin etkisi, daha genel teorileri formüle etmek için incelenmiştir. Bu modellerin matematiksel formu, hareket denkleminin yüksek dereceli türevlerinden oluşur. Bu modeller Rayleigh, Bishop, Mindlin ve Herrmann gibi birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir.

Bu çalışmada sınır değer problemi için kısmi diferansiyel denklemleri inceleyeceğiz.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + u(t,x) = \beta \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x) \\ 0 \le x \le L, \qquad 0 \le t \le T \\ u(0,x) = \varphi(x), \;\; u_t(0,x) = \psi(x), \end{cases} \tag{1.1}$$

burada f, φ ve ψ tanımlanan bölgelerde bilinen sürekli fonksiyonlar, β bir sabit ve u fonksiyonu bilinmeyen fonksiyondur (Modanlı, Abdulazeez ve Huseın, 2020).

İlerleyen bölümlerde, (1.1) probleminin yaklaşık çözümünü bulmak için Laplace Dönüşüm Kolokasyon Metodu (LTCM) uygulanacaktır. Bu metot Laplace dönüşüm yöntemi uygulanarak bulunacaktır. Laplace dönüşüm metodu kullanılarak temel denklemden yeni bir açık fonksiyon elde edilerek yaklaşık çözüm bulunur.

Şimdi bu problemde kullanılan temel tanımları açıklayalım.

1.1.Temel Kavramlar

Tanım 1.1: "$f(t), [0,\infty)$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. f nin Laplace dönüşümü

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-s}\ f(t)dt \tag{1.2}$$

integrali ile tanımlanan F fonksiyonu olup;

$L\{f(t)\} = F(s)$

ile gösterilir. " İntegralin mevcut olduğu bütün s değerleri F' nin tanım kümesini oluşturur (Podlubny, 1999).

Tanım 1.2: (Türevin Laplace Dönüşümü): "Bir fonksiyonun n. mertebeden türevinin Laplace dönüşümü: $f(t), f'(t), \ldots f^{(n-1)}(t)$, fonksiyonları [0,∞) aralığında sürekli, $f^n(t)$, $[0,\infty)$ aralığında parçalı sürekli ve bu fonksiyonların tümü α üstel mertebeden olsunlar. " Bu durumda $s > \alpha$ için

$$L\{f^n(t)\} = s^n\, L\{f(t)\} - s^{n-1}\, f(0) - s^{n-2}\, f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \tag{1.3}$$

olur.

Özel olarak $n = 2$ olması durumunda ise

$$L\{f''(t)\} = s^2\, L\{f(t)\} - s\, f(0)\ - f'(0)$$

bağıntısı kolayca elde edilebilir (Podlubny, 1999).

Tanım 1.3: " $f(t)$, $[0,\infty)$ aralığında sürekli ve $L\{f(t)\} = F(s)$ olsun. $f(t)$ fonksiyonuna F(s) nin ters laplace dönüşümü denir. " Ters laplace dönüşümü

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t) \tag{1.4}$$

ile gösterilir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Pseudo-hiperbolik telegraf denklemler mekanik ve fiziğin çeşitli alanlarında ortaya çıkar. Bunlar, kırık kayalardaki homojen sıvı akışını, yarı iletkenlerdeki yarı durağan yolları, termodinamik ve taşıma olaylarını ve farklı fiziksel sistemleri araştırmak için kullanılır.

Javidi ve Ahmad tarafından yapılan çalışmada; Laplace dönüşüm metodu adi diferansiyel denklemler, kısmi diferansiyel denklemler (KDD), integral denklemler ve integro diferansiyel denklemler (IDE) için uygulanmıştır. Bu problemlerin çözümlerini elde etmek için, Laplace dönüşümü ve bazı fonksiyonlar için ters Laplace dönüşümünün elde edilmesi gerekir. Ters Laplace dönüşümünü karmaşık analiz metotları ile hesaplamak genellikle zordur ve bulunmasında kullanılan nümerik metotlar çok fazladır (Cohen, 2007; Davies ve Martin, 1979). Laguerre matris polinomu serilerinin, Laplace dönüşümlerinin matris fonksiyonlarının nümerik olarak tersine çevrilmesi için bir uygulama geliştirmişlerdir (Sastre ve ark., 2011).

Ters Laplace dönüşümlerini kullanarak diferansiyel denklemlerin tam nümerik sonuçlarını geliştirdi (Talbot, 1979). Laplace dönüşümünün olasılık yoğunluklarıyla ters çevrilmesi amacıyla yaklaşık bir metot vermiştir (Tagliani, 2003). Maksimum entropi tekniği, nümerik çözümün analitik bir şeklidir. Entropi ve çapraz entropi ile ilgili çalışmada yakınsama durumu kanıtlanmıştır. Çok hassas hesaplama ortamını kullanarak Laplace dönüşümlerinin nümerik olarak çevrilmesi için yeni bir algoritma üzerinde çalıştı ve kontrollü doğruluk sağladı. Yani, Laplace dönüşüm önceden belirlenmiş herhangi bir sayıda önemli değeri bulmak için gerçekleştirilebilir (Valko ve ark., 2004).

Telegraf denkleminin sayısal çözümünü hesaplamak için koşulsuz kararlı paralel fark şemasını telegraf denklemi için geliştirdiler (Borhanifar ve Abazari, 2009). İkinci mertebeden tek boyutlu doğrusal hiperbolik denklemin çözümü için sayısal bir teknik geliştirdi (Lakestani ve Saray, 2010). Telegraf denkleminin sayısal çözümü için Sinc-Colocation metodunu yaklaşık olarak uyguladı (Hesameddini ve

Asadolahifard, 2013). Telegraf denkleminin sayısal çözümlerine yaklaşmak için Cubic B-spline Collocation Metodunu (CuBSCM) kullandılar (Mittal ve Bhatia 2013, Rashidinia ve ark., 2014). Telegraf denklemlerinin yaklaşık çözümü için Fibonacci Polinomları yaklaşımını kullandılar (Bahşı ve Yalçınbaş, 2016).

2.1. Laplace Dönüşüm Kolokasyon Metodu (LTCM)

(1.1) probleminin her iki tarafın Laplace dönüşümü alınırsa

$$L\left\{\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}\right\} + L\left\{\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right\} + L\{u(t,x)\} = \beta L\left\{\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^2 \partial t}\right\} + L\left\{\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right\} + L\{f(t.x)\} \quad (2.1)$$

yazılabilir.

$$s^2 \mathrm{u(s,x)} - \mathrm{su(0,x)} - u_t(0,\mathrm{x}) = -L\left\{\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right\} - L\{u(t,x)\} + \beta L\left\{\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^2 \partial t}\right\} + L\left\{\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right\} + L\{f(t.x)\} \quad (2.2)$$

Elde edilir.

Laplace dönüşüm kolokasyon metodu için $u(t,x)$ fonksiyonunun açık formuyla tanımlanan

$$u = u_0 + \sum_{n=1}^{k} c_n u_n \quad (2.3)$$

formülünü kullanalım. Burada c_n, (1.1) denklemindeki başlangıç değerlerinin kullanılmasıyla elde edilecek sabit katsayılardır. (2.3) denklemi (2.2) denklemine uygulanırsa,

$$U(s,x)=\frac{1}{s^2}\left\{\mathrm{s}\left(u_0(0,x)+\sum_{n=1}^{k}c_n\,u_n(0,x)\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(u_0(0,x)+\sum_{n=1}^{k}c_n\,u_n(0,x)\right)\right.$$
$$+\mathcal{L}\left\{\frac{\partial}{\partial x^2}\left(u_0(t,x)+\sum_{n=1}^{k}c_n\,u_n(t,x)\right)\right\}$$
$$\left.+\beta\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^2\partial t}\left(u_0(t,x)+\sum_{n=1}^{k}c_n\,u_n(t,x)\right)\right\}\right.$$
$$-\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\left(u_0(t,x)+\sum_{n=1}^{k}c_n\,u_n(t,x)\right)\right\}-\left(u_0(t,x)+\sum_{n=1}^{k}c_n\,u_n(t,x)\right)$$
$$+\mathcal{L}\{f(t,x)\}$$

bulunur. Bu son denklemin ters laplace dönüşümü alınırsa,

$$u_{new}(t,x)=$$
$$\mathcal{L}^{-1}[\tfrac{1}{s^2}\left\{\mathrm{s}\left(u_0(0,x)+\textstyle\sum_{n=1}^{k}c_n\,u_n(0,x)\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(u_0(0,x)+\sum_{n=1}^{k}c_n\,u_n(0,x)\right)+\right.$$
$$\mathcal{L}\left\{\tfrac{\partial}{\partial x^2}\left(u_0(t,x)+\textstyle\sum_{n=1}^{k}c_n\,u_n(t,x)\right)\right\}+\beta\mathcal{L}\left\{\tfrac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^2\partial t}\left(u_0(t,x)+\textstyle\sum_{n=1}^{k}c_n\,u_n(t,x)\right)\right\}-$$
$$\mathcal{L}\left\{\tfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}\left(u_0(t,x)+\textstyle\sum_{n=1}^{k}c_n\,u_n(t,x)\right)\right\}-\left(u_0(t,x)+\textstyle\sum_{n=1}^{k}c_n\,u_n(t,x)\right)+$$
$$\left.\mathcal{L}\{f(t,x)\}\right] \qquad (2.4)$$

(2.4) denklemi (1.1) denklemi içinde kullanılırsa, $x=x_j$ noktasında yeni kolokasyon denklemi

$$\frac{\partial^2 u_{new}(t,x_j)}{\partial t^2}+\frac{\partial u_{new}(t,x_j)}{\partial t}-\frac{\partial^2 u_{new}(t,x_j)}{\partial x^2}+u_{new}(t,x_j)-\frac{\partial^3 u_{new}(t,x_j)}{\partial x^2\partial t}=f(t,x_j) \qquad (2.5)$$

olur. Burada $j=1,2,\dots,n$ için $x_j=\frac{L-0}{n+1}j$ dir.

Bu yeni fonksiyon için kalan terim

$$R_n(t,x)=L[u_n(t,x)]-f(t,x) \qquad (2.6)$$

dır. Burada $u_n(t,x)$ yaklaşık çözümü, $u(t,x)$ tam çözümü gösterir. Buradan da

$$L[u_n(t,x)] = \frac{\partial^2 u_n(t,x)}{\partial t^2} + \frac{\partial u_n(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_n(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 u_n(t,x)}{\partial x^2 \partial t} + u_n(t,x) \tag{2.7}$$

olarak yazılır. Böylece,

$$\frac{\partial^2 u_n(t,x)}{\partial t^2} + \frac{\partial u_n(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_n(t,x)}{\partial x^2} + u_n(t,x) = f + R_n \tag{2.8}$$

olur. L bir lineer operatör ve $e_n(t,x) = u(t,x) - u_n(t,x)$ alınarak,

$$\frac{\partial^2 e_n(t,x)}{\partial t^2} + \frac{\partial u_n(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 e_n(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 u_n(t,x)}{\partial x^2 \partial t} + e_n(t,x) = R_n(t,x) \tag{2.9}$$

denklemi elde edilir. (1.1) denklemindeki başlangıç değer koşulları kullanılırsa,

(2.9) denklemi için yeni başlangıç değer koşulları

$$e_n(0,x) = (e_{n)_t}(0,x) = 0 \tag{2.10}$$

$$e_n(t,0) = e_n(t,L) = 0 \tag{2.11}$$

olarak bulunur. (2.9) denkleminin çözümünün yapılması ve (2.10) ile (2.11) başlangıç değerlerinin kullanılmasıyla $e_n(t,x)$ denklemi elde edilir. Bu da

$$u(t,x) = u_n(t,x) + e_n(t,x)$$

Şeklinde hesaplanabileceğini bize gösterir.

Tanım 2.2 (Modifiye Çift Laplace Ayrışma Yöntemi):

Bu bölümde pseudo-hiperbolik kısmi diferansiyel denkleminin çözümünü bulmak için Modifiye Çift Laplace Ayrışma Yöntemi'ni kullanacağız.

Aşağıda başlangıç değer koşulları ile beraber verilen tek boyutlu pseudo-hiperbolik kısmi denklemin çözümü için

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + u(t,x) = \beta \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x) \\ 0 \le x \le L, \quad 0 \le t \le T \\ u(0,x) = \varphi(x), \;\; u_t(0,x) = \psi(x),\end{gathered} \tag{2.12}$$

Verilen problemin analitik çözümünü Modifiye Çift Laplace Ayrışma Metodunu kullanarak hesaplayalım (Modanlı ve Bajjah, 2021).

Bunun için bir formül elde edelim.

Çift boyutlu Laplace dönüşümünden

$L_t L_x[f(t,x)] = (s,), \qquad L_t L_x[(x)] = (p)$ (2.13)

olduğu biliniyor. Ayrıca

$$L_t L_x\left[\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}\right] = s^2 u(s,p) - su(0,p) - u_t(0,p) \quad (2.14)$$

şeklindedir. (2.13) ve (2.14) formülleri kullanılıp (2.12) probleminin Çift Laplace dönüşümü alınırsa,

$$L_t L_x\left[\beta \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - u(t,x)\right] + L_t L_x[f(t,x)] = s^2 u(s,p) - su(0,p) - u_t(0,p) \quad (2.15)$$

olup buradan da

$$s^2 u(s,p) = L_t L_x\left[\beta \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - u(t,x)\right] + L_t L_x[f(t,x)] + su(0,p) + u_t(0,p)$$

formülü elde edilir. Bu son formülden de

$$u(s,p) = \frac{1}{s^2} L_t L_x\left[\beta \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - u(t,x)\right] + \frac{1}{s^2} L_t L_x[f(t,x)] + \frac{1}{s} u(0,p) + \frac{1}{s^2} u_t(0,p)$$

$$u(s,p) = \frac{1}{s^2} L_t L_x\left[\beta \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - u(t,x)\right] + \frac{1}{s^2} F(s,p) + \frac{1}{s} G(p) + \frac{1}{s^2} u_t(0,p) \quad (2.16)$$

yazılır. (2.12) probleminin çözümü için

$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t,x)$

olarak alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t,x) = \varphi(x) + L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\,F(s,p)\right] + L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L_tL_x\left[\beta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t,x)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t,x) - \frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t,x) - \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t,x)\right] + L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}u_t(0,p)\right]$$

bulunur. Özel olarak,

$$u_0 = \varphi(x) + L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\,F(s,p)\right] + L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}u_t(0,p)\right] \tag{2.17}$$

alalım.

Bu durumda geri kalan terimler,

$$u_{n+1}(t,x) = L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L_tL_x\left[\beta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t,x)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t,x) - \frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t,x) - \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t,x)\right] \tag{2.18}$$

olarak yazılabilir. Burada $L_s^{-1}L_p^{-1}$ sırasıyla s ve p'nin Çift Katlı Ters Laplace Dönüşümünü ifade etmektedir.

Elde ettiğimiz bu (2.17) ve (2.18) formüllerine Modifiye Çift Laplace Ayrışma Yöntemi denir.

Şimdi pseudo-hiperbolik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için Çift Laplace Ayrışma Yöntemi kullanarak aşağıdaki problemin analitik çözümünü bulalım.

2.2.1. Metodun tam çözümü

Örnek 2.1:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + u(t,x) = \frac{2}{3}\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \frac{4}{3}e^{-t}sinx$$

$$0 \le x \le L, \qquad 0 \le t \le T \tag{2.19}$$

$$u(0,x) = sinx,$$

$$u_t(0,x) = -sinx,$$

problemini ele alalım.

Çözüm 2.1: (2.19) probleminin çözümü için Modifiye Çift Laplace Ayrışma Yöntemi'ni kullanalım.

Bunun için (2.19) formülünün Çift Laplace Dönüşümü alınırsa,

$$L_tL_x[f(t,x)] = L_tL_x\left[\frac{4}{3}e^{-t}sinx\right] = \left(\frac{4}{3}\frac{1}{s+1}\right)\left(\frac{1}{p^2+1}\right)$$

elde edilir. (2.13) formülünden,

$$\varphi(x) = sinx$$

olduğu görülebilir. (2.17) formülü kullanılırsa,

$$u_0 = sinx + L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\left(\frac{4}{3}\frac{1}{s+1}\right)\left(\frac{1}{p^2+1}\right)\right] + L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}(-sinx)\right]$$

$$= sinx + L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\left(\frac{4}{3}\frac{1}{s^2(s+1)}\right)\left(\frac{1}{p^2+1}\right)\right] + L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}(-sinx)\right]$$

$$= sinx + \left(\frac{4}{3}(t-1+e^{-t})\right)sinx - tsinx$$

$$= \left(1 + \frac{4}{3}(t-1+e^{-t}) - t\right)sinx$$

$$= \left(\frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}\right)sinx$$

olarak bulunur. (2.18) formülü kullanılırsa

$$u_1 = L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L_tL_x\left[\frac{2}{3}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial t}\big(u_0(t,x)\big)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(u_0(t,x)\big) - \frac{\partial}{\partial t}\big(u_0(t,x)\big) - \big(u_0(t,x)\big)\right]$$

$$= L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L_tL_x\left[-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}e^{-t}\right)sinx\right] + \left(-\left(\frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}\right)sinx\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}e^{-t}\right)sinx - \left(\left(\frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}\right)sinx\right)\right]$$

$$= -L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L_tL_x\left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3}e^{-t}\right)sinx\right]+\left(\left(\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}\right)sinx\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3}e^{-t}\right)sinx+\left(\left(\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}\right)sinx\right)\right]$$

$$= -L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L_tL_x\left[\left(\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3}e^{-t}\right)+\left(\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3}e^{-t}\right)\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\left(\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}\right)\right)sinx\right]\right]$$

$$= -L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L_tL_x\left[\left(\frac{4}{9}e^{-t}+\frac{2}{3}t-\frac{1}{9}\right)sinx\right]\right]$$

$$= -L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\left(\frac{2}{3}\frac{1}{s^2}+\frac{4}{9}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{9}\frac{1}{s}\right)\frac{1}{p^2+1}\right]$$

$$= -L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\left(\frac{2}{3}\frac{1}{s^4}+\frac{4}{9}\frac{1}{s^2(s+1)}-\frac{1}{9}\frac{1}{s^3}\right)\frac{1}{p^2+1}\right]$$

$$=-\left[\left(\tfrac{1}{9}t^3+\tfrac{4}{9}(t-1+e^{-t})-\tfrac{1}{18}t^2\right)sinx\right]$$

elde edilir. Benzer şekilde devam edilip (2.18) formülü kullanılırsa,

$$u_2(t,x) = L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L_tL_x\left[\frac{2}{3}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial t}\big(u_1(t,x)\big)\right]+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(u_1(t,x)\big)-\frac{\partial}{\partial t}\big(u_1(t,x)\big)\right.$$
$$\left.-\big(u_1(t,x)\big)\right]$$
$$= L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L_tL_x\left[\frac{2}{3}\left(\frac{3}{9}t^2+\frac{4}{9}(1-e^{-t})-\frac{1}{9}t\right)sinx\right]\right.$$
$$+\left[\left(\frac{1}{9}t^3+\frac{4}{9}(t-1+e^{-t})-\frac{1}{18}t^2\right)sinx\right]$$
$$+\left(\frac{3}{9}t^2+\frac{4}{9}(1-e^{-t})-\frac{1}{9}t\right)sinx$$
$$\left.+\left[\left(\frac{1}{9}t^3+\frac{4}{9}(t-1+e^{-t})-\frac{1}{18}t^2\right)sinx\right]\right]$$

$$= L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L_tL_x\left(\frac{2}{3}\left(\frac{3}{9}t^2+\frac{4}{9}(1-e^{-t})-\frac{1}{9}t\right)\right.\right.$$
$$+\left(\frac{1}{9}t^3+\frac{4}{9}(t-1+e^{-t})-\frac{1}{18}t^2\right)+\left(\frac{3}{9}t^2+\frac{4}{9}(1-e^{-t})-\frac{1}{9}t\right)$$
$$\left.\left.+\left(\frac{1}{9}t^3+\frac{4}{9}(t-1+e^{-t})-\frac{1}{18}t^2\right)\right)sinx\right]$$

$$= L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\left(\left(\frac{2}{3}\left(\frac{3}{18}\frac{2}{s^3}+\frac{4}{9}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)-\frac{1}{9}\frac{1}{s^2}\right)\right.\right.$$
$$+\left(\frac{1}{54}\frac{6}{s^4}+\frac{4}{9}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right)-\frac{1}{36}\frac{2}{s^3}\right)$$
$$+\left(\frac{3}{18}\frac{2}{s^3}+\frac{4}{9}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)-\frac{1}{9}\frac{1}{s^2}\right)$$
$$\left.\left.+\left(\frac{1}{54}\frac{6}{s^4}+\frac{4}{9}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right)-\frac{1}{36}\frac{2}{s^3}\right)\right)\left(\frac{1}{p^2+1}\right)\right)\right]$$

$$= L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\left(\frac{2}{9}\frac{1}{s^4}+\frac{4}{9}\frac{1}{s^3}+\frac{19}{27}\frac{1}{s^2}-\frac{4}{27}\frac{1}{s}+\frac{4}{27}\frac{1}{s+1}\right)\left(\frac{1}{p^2+1}\right)\right]$$

$$= L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\left(\frac{2}{9}\frac{1}{s^6}+\frac{4}{9}\frac{1}{s^5}+\frac{19}{27}\frac{1}{s^4}-\frac{4}{27}\frac{1}{s^3}+\frac{4}{27}\frac{1}{s^2(s+1)}\right)\left(\frac{1}{p^2+1}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{540}t^5+\frac{1}{54}t^4+\frac{19}{162}t^3-\frac{2}{27}t^2+\frac{4}{27}(t-1+e^{-t})\right)sinx$$

olarak bulunur. Benzer şekilde devam edilip (2.18) formülü kullanılırsa,

$$u_3(t,x) = L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L_tL_x\left[\frac{2}{3}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial t}\big(u_2(t,x)\big)\right]+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(u_2(t,x)\big)-\frac{\partial}{\partial t}\big(u_2(t,x)\big)\right.$$
$$\left.-\big(u_2(t,x)\big)\right]$$

$$= L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L_tL_x\left[-\frac{2}{3}\left(\frac{5}{540}t^4+\frac{4}{54}t^3+\frac{19.3}{162}t^2-\frac{4}{27}t+\frac{4}{27}-\frac{4}{27}e^{-t}\right)sinx\right]\right.$$
$$+\left[\left(\frac{1}{540}t^5+\frac{1}{54}t^4+\frac{19}{162}t^3-\frac{2}{27}t^2+\frac{4}{27}(t-1+e^{-t})\right)(-sinx)\right]$$
$$-\left(\frac{5}{540}t^4+\frac{4}{54}t^3+\frac{19.3}{162}t^2-\frac{4}{27}t+\frac{4}{27}-\frac{4}{27}e^{-t}\right)sinx$$
$$\left.-\left[\left(\frac{1}{540}t^5+\frac{1}{54}t^4+\frac{19}{162}t^3-\frac{2}{27}t^2+\frac{4}{27}(t-1+e^{-t})\right)sinx\right]\right]$$

$$= L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L_tL_x\left(-\frac{2}{3}\left(\frac{5}{540}t^4+\frac{4}{54}t^3+\frac{19.3}{162}t^2-\frac{4}{27}t+\frac{4}{27}-\frac{4}{27}e^{-t}\right)\right.\right.$$
$$-\left(\frac{1}{540}t^5+\frac{1}{54}t^4+\frac{19}{162}t^3-\frac{2}{27}t^2+\frac{4}{27}(t-1+e^{-t})\right)$$
$$-\left(\frac{5}{540}t^4+\frac{4}{54}t^3+\frac{19.3}{162}t^2-\frac{4}{27}t+\frac{4}{27}-\frac{4}{27}e^{-t}\right)$$
$$\left.\left.-\left(\frac{1}{540}t^5+\frac{1}{54}t^4+\frac{19}{162}t^3-\frac{2}{27}t^2+\frac{4}{27}(t-1+e^{-t})\right)sinx\right)\right]$$

$$= -L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L_tL_x\left(\frac{2}{3}\left(\frac{5}{540}t^4+\frac{4}{54}t^3+\frac{19.3}{162}t^2-\frac{4}{27}t+\frac{4}{27}-\frac{4}{27}e^{-t}\right)\right.\right.$$
$$+\left(\frac{1}{540}t^5+\frac{1}{54}t^4+\frac{19}{162}t^3-\frac{2}{27}t^2+\frac{4}{27}(t-1+e^{-t})\right)$$
$$+\left(\frac{5}{540}t^4+\frac{4}{54}t^3+\frac{19.3}{162}t^2-\frac{4}{27}t+\frac{4}{27}-\frac{4}{27}e^{-t}\right)$$
$$\left.\left.+\left(\frac{1}{540}t^5+\frac{1}{54}t^4+\frac{19}{162}t^3-\frac{2}{27}t^2+\frac{4}{27}(t-1+e^{-t})\right)sinx\right)\right]$$

$$= -L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L_tL_x\left(\left(\frac{1}{270}t^5+\frac{17}{324}t^4+\frac{29}{81}t^3+\frac{71}{162}t^2 - \frac{4}{27}(t-1+e^{-t})\right)sinx\right)\right]$$

$$= -L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\left(\frac{4}{9}\frac{1}{s^6}+\frac{34}{27}\frac{1}{s^5}+\frac{58}{27}\frac{1}{s^4}+\frac{71}{81}\frac{1}{s^3}-\frac{4}{27}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right)\right)\left(\frac{1}{p^2+1}\right)\right]$$

$$= -L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\left(\frac{4}{9}\frac{1}{s^8}+\frac{34}{27}\frac{1}{s^7}+\frac{58}{27}\frac{1}{s^6}+\frac{71}{81}\frac{1}{s^5} - \frac{4}{27}\left(\frac{1}{s^4}-\frac{1}{s^3}+\frac{1}{s^2(s+1)}\right)\right)\left(\frac{1}{p^2+1}\right)\right]$$

$$= -\left(\frac{1}{11340}t^7+\frac{17}{9720}t^6+\frac{29}{1620}t^5+\frac{71}{1944}t^4-\frac{2}{81}t^3+\frac{2}{27}t^2 - \frac{4}{27}(t-1+e^{-t})\right)sinx$$

olarak bulunur. Benzer şekilde devam edilip (2.18) formülü kullanılırsa,

$$u_4(t,x) = L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L_tL_x\left[\frac{2}{3}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial t}\big(u_3(t,x)\big)\right]+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(u_3(t,x)\big)-\frac{\partial}{\partial t}\big(u_3(t,x)\big) - \big(u_3(t,x)\big)\right]$$

$$= L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L_tL_x\left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{1620}t^6+\frac{17}{1620}t^5+\frac{29}{324}t^4+\frac{71}{486}t^3-\frac{2}{27}t^2\right.\right.\right.$$
$$\left.+\frac{4}{27}(t-1+e^{-t})\right)sinx\Big]$$
$$+\left[\left(\frac{1}{11340}t^7+\frac{17}{9720}t^6+\frac{29}{1620}t^5+\frac{71}{1944}t^4-\frac{2}{81}t^3+\frac{2}{27}t^2\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{4}{27}(t-1+e^{-t})\right)(sinx)\right]$$
$$+\left(\frac{1}{1620}t^6+\frac{17}{1620}t^5+\frac{29}{324}t^4+\frac{71}{486}t^3-\frac{2}{27}t^2\right.$$
$$\left.+\frac{4}{27}(t-1+e^{-t})\right)sinx$$
$$+\left[\left(\frac{1}{11340}t^7+\frac{17}{9720}t^6+\frac{29}{1620}t^5+\frac{71}{1944}t^4-\frac{2}{81}t^3+\frac{2}{27}t^2\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{4}{27}(t-1+e^{-t})\right)sinx\right]\right]$$

$$= L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L_tL_x\left(\frac{2}{3}\left(\frac{1}{1620}t^6+\frac{17}{1620}t^5+\frac{29}{324}t^4+\frac{71}{486}t^3-\frac{2}{27}t^2\right.\right.\right.$$
$$\left.+\frac{4}{27}(t-1+e^{-t})\right)$$
$$+\left(\frac{1}{11340}t^7+\frac{17}{9720}t^6+\frac{29}{1620}t^5+\frac{71}{1944}t^4-\frac{2}{81}t^3+\frac{2}{27}t^2\right.$$
$$\left.-\frac{4}{27}(t-1+e^{-t})\right)$$
$$+\left(\frac{1}{1620}t^6+\frac{17}{1620}t^5+\frac{29}{324}t^4+\frac{71}{486}t^3-\frac{2}{27}t^2\right.$$
$$\left.+\frac{4}{27}(t-1+e^{-t})\right)$$
$$+\left(\frac{1}{11340}t^7+\frac{17}{9720}t^6+\frac{29}{1620}t^5+\frac{71}{1944}t^4-\frac{2}{81}t^3+\frac{2}{27}t^2\right.$$
$$\left.\left.-\frac{4}{27}(t-1+e^{-t})\right)sinx\right)\Big]$$

$$= L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\left(\left(\frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}\frac{1}{s^7}+\frac{34}{27}\frac{1}{s^6}+\frac{58}{27}\frac{1}{s^5}+\frac{71}{81}\frac{1}{s^4}-\frac{4}{27}\frac{1}{s^3}+\frac{4}{27}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right)\right)\right.\right.$$
$$+\left(\frac{4}{9}\frac{1}{s^8}+\frac{34}{27}\frac{1}{s^7}+\frac{58}{27}\frac{1}{s^6}+\frac{71}{81}\frac{1}{s^5}-\frac{4}{27}\frac{1}{s^4}+\frac{4}{27}\frac{1}{s^3}\right.$$
$$\left.-\frac{4}{27}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right)\right)$$
$$+\left(\frac{4}{9}\frac{1}{s^7}+\frac{34}{27}\frac{1}{s^6}+\frac{4}{3}\frac{1}{s^5}+\frac{71}{81}\frac{1}{s^4}-\frac{4}{27}\frac{1}{s^3}+\frac{4}{27}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right)\right)$$
$$+\left(\frac{4}{9}\frac{1}{s^8}+\frac{34}{27}\frac{1}{s^7}+\frac{58}{27}\frac{1}{s^6}+\frac{71}{81}\frac{1}{s^5}-\frac{4}{27}\frac{1}{s^4}+\frac{4}{27}\frac{1}{s^3}\right.$$
$$\left.\left.\left.\left.-\frac{4}{27}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right)\right)\right)\left(\frac{1}{p^2+1}\right)\right)\right]$$

$$= L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\left(\frac{20}{27}\frac{1}{s^{10}}+\frac{194}{81}\frac{1}{s^9}+\frac{392}{81}\frac{1}{s^8}+\frac{703}{243}\frac{1}{s^7}+\frac{34}{243}\frac{1}{s^6}+\frac{4}{27}\frac{1}{s^5}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{28}{81}\left(\frac{1}{s^4}-\frac{1}{s^3}+\frac{1}{s^2(s+1)}\right)\right)\left(\frac{1}{p^2+1}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{489888}t^9+\frac{97}{1632960}t^8+\frac{7}{7290}t^7+\frac{703}{174960}t^6+\frac{17}{14580}t^5+\frac{6}{162}t^4\right.$$
$$\left.-\frac{28}{81}t^3+\frac{14}{81}t^2-\frac{28}{81}(t-1+e^{-t})\right)sinx$$

elde edilir.

u_o ile u_1 den $\left(\frac{4}{3}(t-1+e^{-t})-t\right)sinx$ ve u_1 ile u_2 den $\left(\frac{4}{9}(t-1+e^{-t})\right)sinx$ u_2 ile u_3 den $\left(\frac{4}{27}(t-1+e^{-t})\right)sinx$ terimleri sadeleşir. İşlemlere devam edilirse u_3 ile u_4 den gerekli sadeleştirmeler yapılır.

Benzer şekilde devam edilip, gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (2.18) formülü kullanılarak (2.19) probleminin tam çözümünün

$u(t,x) = e^{-t}sinx$

olduğu görülür.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Materyal

Bu çalışmada detaylı bir çalışma sunabilmek amacıyla konuyla ilgili yayınlanmış makalelere, dergilere, daha önceden yapılan yüksek lisans tezlerine (Aksoy, 2021; Göktepe, 2020) ulaşılıp, gerekli literatür taramaları yapıldı.

3.2. Yöntem

Pseudo-hiperbolik telegraf denklemler ile ilgili geçmişten günümüze yapılan çalışmalar incelendi. Laplace dönüşüm kolokasyon metodu kullanılarak pseudo-hiperbolik telegraf kısmi diferansiyel denklemler için yaklaşık çözüm bulundu. Yaklaşık çözüm ve tam çözüme ait hata analizi çizelgesi oluşturuldu. Matlab programı kullanılarak tam çözüm ve yaklaşık çözüme ait grafikler hazırlandı.

3.2.1. Laplace dönüşüm kolokasyon metodunun nümerik uygulaması

Bu bölümde Laplace dönüşüm kolokasyon metodunun pseudo-hiperbolik telegraf kısmi diferansiyel denklemler için uygulamalarını vereceğiz.

Bunun için

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + u(t,x) = \frac{2}{3}\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \frac{4}{3}e^{-t}sinx \\ u(0,x) = sinx, \;\; u_t(0,x) = -sinx, \\ 0 \le x \le \pi, \;\; 0 \le t \le 1 \end{cases} \tag{3.1}$$

problemini ele alalım. Bu problemin yaklaşık çözümü için Laplace dönüşüm kolokasyon yöntemine vurgu yapacağız.

(3.1) probleminin her iki tarafın Laplace dönüşümü alınırsa;

$$L\left\{\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}\right\} + L\left\{\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right\} + L\{u(t,x)\} = \frac{2}{3}L\left\{\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^2 \partial t}\right\} + L\left\{\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right\} + \frac{4}{3}L\{e^{-t}sinx\} \quad (3.2)$$

elde edilir. Buradan da

$$s^2\mathrm{u(s,x)} - \mathrm{su(0,x)} - u_t(0,\mathrm{x}) = -L\left\{\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right\} - L\{u(t,x)\} + \frac{2}{3}L\left\{\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^2 \partial t}\right\} + L\left\{\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right\} + \frac{4}{3}L\{e^{-t}sinx\} \quad (3.3)$$

yazılabilir. Gerekli cebirsel işlemler yapılıp $u(s,x)$ yalnız bırakılırsa;

$$\mathrm{u(s,x)} = \frac{1}{s^2}\left[s.sinx - sinx - L\left\{\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right\} - L\{u(t,x)\} + \frac{2}{3}L\left\{\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^2 \partial t}\right\} + L\left\{\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right\} + \frac{4}{3}L\{e^{-t}sinx\}\right] \quad (3.4)$$

olur. Laplace dönüşüm kolokasyon metodu kullanılarak (3.4) denkleminin yaklaşık çözümünü hesaplamak için

$$u(t,x) = sinx - tsinx + C_1t^2(x^2(x-\pi)) + C_2t^2x(x-\pi)^2 \quad (3.5)$$

formundaki açık fonksiyonu alalım. (3.5) denklemi (3.4) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\mathrm{u(s,x)} = \frac{1}{s^2}\Big[s.sinx - sinx - L\{-sinx + 2C_1t(x^2(x-\pi) + 2C_2tx(x-\pi)^2\} - L\{sinx - tsinx + C_1t^2(x^2(x-\pi) + C_2t^2x(x-\pi)^2\} + \frac{2}{3}L\{sinx + 2C_1t(6x -$$

$$2\pi) + 2C_2t(6x - 4\pi)\} + L\{-sinx + tsinx + C_1t^2(6x - 2\pi) + C_2t^2(6x - 4\pi)\} + \frac{4}{3}L\{e^{-t}sinx\}\Big] \quad (3.6)$$

bulunur. Buradan da

$$\mathrm{u(s,x)} = \left(\frac{1}{s}\right)sinx - \left(\frac{1}{s^2}\right)\ sinx - \left(\frac{1}{s^2}\right)L\{-sinx + 2C_1t(x^2(x-\pi) + 2C_2tx(x - \pi)^2\} - \left(\frac{1}{s^2}\right)L\{sinx - tsinx + C_1t^2(x^2(x-\pi) + C_2t^2x(x-\pi)^2\} + \left(\frac{1}{s^2}\right)\frac{2}{3}L\{sinx + 2C_1t(6x - 2\pi) + 2C_2t(6x - 4\pi)\} + \left(\frac{1}{s^2}\right)L\{-sinx + tsinx + C_1t^2(6x - 2\pi) + C_2t^2(6x - 4\pi)\} + \left(\frac{1}{s^2}\right)\frac{4}{3}L\{e^{-t}sinx\} \quad (3.7)$$

olarak yazılır. (3.7) formülünde Laplace dönüşümü alınırsa,

$$\begin{aligned}&\mathrm{u(s,x)}\\ &= \left(\frac{1}{s}\right)sinx - \left(\frac{1}{s^2}\right)\ sinx - \left(\frac{2}{s^4}\right)\{C_1(x^2(x-\pi) + C_2x(x-\pi)^2\} - \left(\frac{1}{s^2}\right)\ sinx\\ &+ \left(\frac{1}{s^4}\right)\ sinx - \left(\frac{2}{s^5}\right)\{C_1(x^2(x-\pi) + C_2x(x-\pi)^2\} + \frac{2}{3}\frac{1}{s^2}\mathrm{sinx}\\ &+ \left(\frac{2}{s^4}\right)\frac{2}{3}\{C_1(6x - 2\pi) + C_2(6x - 4\pi)\} - \left(\frac{1}{s^2}\right)\ sinx + \left(\frac{1}{s^4}\right)\ sinx\\ &+ \left(\frac{2}{s^5}\right)L\{C_1(6x - 2\pi) + C_2(6x - 4\pi)\}\\ &+ \left(\frac{1}{s^2}\right)\frac{4}{3}\frac{1}{s+1}sinx \end{aligned} \quad (3.8)$$

bulunur. (3.8) denklemine ters laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$u_{new}(\mathrm{t,x}) = L^{-1}\{\left(\frac{1}{s}\right) sinx - \left(\frac{1}{s^2}\right)\ sinx - \left(\frac{2}{s^4}\right)\{C_1(x^2(x-\pi) + C_2x(x-\pi)^2\} - \left(\frac{1}{s^2}\right)\ sinx + \left(\frac{1}{s^4}\right)\ sinx - \left(\frac{2}{s^5}\right)\{C_1(x^2(x-\pi) + C_2x(x-\pi)^2\} + \frac{2}{3}\frac{1}{s^2}\mathrm{sinx} + \left(\frac{2}{s^4}\right)\frac{2}{3}\{C_1(6x-2\pi) + C_2(6x-4\pi)\} - \left(\frac{1}{s^2}\right)\ sinx + \left(\frac{1}{s^4}\right)\ sinx + \left(\frac{2}{s^5}\right)L\{C_1(6x - 2\pi) + C_2(6x-4\pi)\} + \left(\frac{1}{s^2}\right)\frac{4}{3}\frac{1}{s+1}sinx\ \} \quad (3.9)$$

yani (3.9) formülüne ters laplace dönüşümü alınırsa,

$$u_{new}(\mathrm{t,x}) = -L^{-1}\left(\frac{2}{s^4}\right)\{C_1(x^2(x-\pi) + C_2x(x-\pi)^2\} - L^{-1}\left(\frac{2}{s^5}\right)\{C_1(x^2(x-\pi) + C_2x(x-\pi)^2\} + L^{-1}\left(\frac{2}{s^4}\right)\frac{2}{3}\{C_1(6x-2\pi) + C_2(6x-4\pi)\} + L^{-1}\left(\frac{2}{s^5}\right)L\{C_1(6x - 2\pi) + C_2(6x-4\pi)\} + L^{-1}\left(\frac{1}{s} - \frac{7}{3s^2} + \frac{2}{s^4} + \frac{4}{3}\frac{1}{s^2(s+1)}\right)sinx \quad (3.10)$$

olup buradan da

$$u_{new}(\mathrm{t,x}) = -\frac{1}{3}t^3\{C_1(x^2(x-\pi) + C_2x(x-\pi)^2\} - \frac{1}{12}t^4\{C_1(x^2(x-\pi) + C_2x(x-\pi)^2\} + \frac{2}{9}t^3\{C_1(6x-2\pi) + C_2(6x-4\pi)\} + \frac{1}{12}t^4\{C_1(6x-2\pi) + C_2(6x-4\pi)\} + \left(\frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}t^3 - t - \frac{1}{3}\right)sinx \quad (3.11)$$

denklemini elde edilir. Bulunan (3.11) denklemi (3.1) denkleminde yerine yazılırsa, $x = x_j$ için

$$\frac{\partial^2 u_{new}(t,x)}{\partial t^2} + \frac{\partial u_{new}(t,x)}{\partial t} + u_{new}(t,x) = \frac{2}{3}\frac{\partial^3 u_{new}(t,x)}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^2 u_{new}(t,x)}{\partial x^2} + \frac{4}{3}e^{-t}sinx \quad (3.12)$$

bu da

$$R(t,x,C_1,C_2)=\frac{\partial^2 u_{new}(t,x)}{\partial t^2}+\frac{\partial u_{new}(t,x)}{\partial t}+u_{new}(t,x)-\frac{2}{3}\frac{\partial^3 u_{new}(t,x)}{\partial x^2\partial t}-\frac{\partial^2 u_{new}(t,x)}{\partial x^2}-\frac{4}{3}e^{-t}sinx=0 \quad (3.13)$$

denklemine denktir.

(3.11) denklemi yeniden düzenlenirse,

$$u_{new}(t,x)=\left[-\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{12}t^4\right][C_1(x^3-\pi x^2)+C_2(x^3-2\pi x^2+\pi^2 x)]+\left[\frac{2}{9}t^3+\frac{1}{12}t^4\right][C_1(6x-2\pi)+C_2(6x-4\pi)]+\left(\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}t^3-t-\frac{1}{3}\right)sinx$$

olarak yazılabilir. Bu son formülden de

$$u_{new}(t,x)=\left[\left(-\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{12}t^4\right)(C_1+C_2)\right]x^3+\left[\pi\left(\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{12}t^4\right)(C_1+2C_2)\right]x^2+\left[-\pi^2\left(\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{12}t^4\right)C_2+6\left(\frac{2}{9}t^3+\frac{1}{12}t^4\right)(C_1+C_2)\right]x-\left(\frac{2}{9}t^3+\frac{1}{12}t^4\right)2\pi(C_1+2C_2)+\left(\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}t^3-t-\frac{1}{3}\right)sinx \quad (3.14)$$

formülü bulunur. (3.14) formülü kullanılarak

$$\frac{\partial u_{new}(t,x)}{\partial t}=\left[-t^2-\frac{1}{3}t^3\right](C_1+C_2)x^3+\left[\pi\left(t^2+\frac{1}{3}t^3\right)(C_1+2C_2)\right]x^2+\left[-\pi\left(t^2+\frac{1}{3}t^3\right)C_2+6\left(\frac{2}{3}t^2+\frac{1}{3}t^3\right)(C_1+C_2)\right]x-\left(\frac{2}{3}t^2+\frac{1}{3}t^3\right)2\pi(C_1+2C_2)+\left(-\frac{4}{3}e^{-t}+t^2-1\right)sinx,$$

$$\frac{\partial^2 u_{new}(t,x)}{\partial t^2} = [-2t - t^2](C_1 + C_2)x^3 + [\pi(2t + t^2)(C_1 + 2C_2)]x^2 + \left[-\pi(2t + t^2)C_2 + 6\left(\frac{4}{3}t + t^2\right)(C_1 + C_2)\right]x - \left(\frac{4}{3}t + t^2\right)2\pi(C_1 + 2C_2) + \left(\frac{4}{3}e^{-t} + 2t\right)sinx,$$

$$\frac{\partial^2 u_{new}(t,x)}{\partial x^2} = \left[-6\left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{12}t^4\right)(C_1 + C_2)\right]x + \left[2\pi\left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{12}t^4\right)(C_1 + 2C_2)\right] - \left(\frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}t^3 - t - \frac{1}{3}\right)sinx,$$

$$\frac{\partial^3 u_{new}(t,x)}{\partial x^2 \partial t} = 6\left(-t^2 - \frac{1}{3}t^3\right)(C_1 + C_2)x + 2\pi\left(t^2 + \frac{1}{3}t^3\right)(C_1 + 2C_2) + \left(\frac{4}{3}e^{-t} - t^2 + 1\right)sinx,$$

$$\frac{2}{3}\frac{\partial^3 u_{new}(t,x)}{\partial x^2 \partial t} = 4\left(-t^2 - \frac{1}{3}t^3\right)(C_1 + C_2)x + \frac{4}{3}\pi\left(t^2 + \frac{1}{3}t^3\right)(C_1 + 2C_2) + \left(\frac{8}{9}e^{-t} - \frac{2}{3}t^2 + \frac{2}{3}\right)sinx,$$

türevleri elde edilir.

(3.14) denklemi ve türevleri (3.13) denkleminde yerine yazılırsa

$$R(t,x,C_1,C_2) = \left[(-2t-t^2)-t^2-\frac{1}{3}t^3(C_1+C_2)\right]x^3$$
$$+\left[\left(2t+t^2+t^2+\frac{1}{3}t^3\right)(C_1+2C_2)\right]\pi x^2$$
$$+\left[-\pi(2t+t^2)C_2+(8t+6t^2)(C_1+C_2)-\pi\left(t^2+\frac{1}{3}t^3\right)C_2\right.$$
$$+\left(4t^2+2t^3(C_1+C_2)\right)+\left(2t^3+\frac{1}{2}t^4\right)(C_1+C_2)$$
$$\left.+4\left(t^2+\frac{1}{3}t^3\right)(C_1+C_2)\right]x+\left(-\frac{4}{3}t-t^2\right)2\pi(C_1+2C_2)$$
$$+\left(-\frac{2}{3}t^2-\frac{1}{3}t^3\right)2\pi(C_1+2C_2)-\frac{4}{3}\pi\left(t^2+\frac{1}{3}t^3\right)(C_1+2C_2)$$
$$-2\pi\left(\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{12}t^4\right)(C_1+2C_2)$$
$$+\left(\frac{4}{3}e^{-t}+2t-\frac{4}{3}e^{-t}+t^2-1-\frac{8}{9}e^{-t}+\frac{2}{3}t^2-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}t^3-t\right.$$
$$\left.-\frac{1}{3}\right)sinx-\frac{4}{3}e^{-t}$$

denklemi elde edilir. Bu son denklemde düzenlenirse,

$$R(t,x,C_1,C_2) = \left[\left(-2t-2t^2-\frac{1}{3}t^3\right)(C_1+C_2)\right]x^3$$
$$+\left[\left(2t+2t^2+\frac{1}{3}t^3\right)(C_1+2C_2)\right]\pi x^2$$
$$+\left[-\pi\left(2t+2t^2+\frac{1}{3}t^3\right)C_2+\left(8t+16t^2+\frac{16}{3}t^3+\frac{1}{2}t^4\right)(C_1+C_2)\right]x$$
$$+\left(-\frac{4}{3}t+\left(-1-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right)t^2+\left(-\frac{1}{3}-\frac{2}{9}-\frac{1}{3}\right)t^3-\frac{1}{12}t^4\right)2\pi(C_1+2C_2)$$
$$+\left(-\frac{8}{9}e^{-t}-2+t+\left(1+\frac{2}{3}\right)t^2+\frac{1}{3}t^3\right)sinx$$

bulunur. Bu son denklemden de

$$R(t,x,C_1,C_2) = -A(C_1+C_2)x^3 + A\pi(C_1+2C_2)x^2 + \left(-A\pi C_2 + B(C_1+C_2)\right)x + \left(-\frac{4}{3}t - \frac{7}{3}t^2 - \frac{8}{9}t^3 - \frac{1}{12}t^4\right)2\pi(C_1+2C_2) + \left(-\frac{8}{9}e^{-t} - 2 + t + \frac{5}{3}t^2 + \frac{1}{3}t^3\right)sinx$$

$$= -A(C_1+C_2)x^3 + A\pi(C_1+2C_2)x^2 - A\pi C_2 x + B(C_1+C_2)x + 2C(C_1+2C_2)\pi + Dsinx = 0$$

olarak yazılır ve yeniden düzenlenip gerekli cebirsel işlemler ve sadeleştirmeler yapılırsa;

$$(-Ax^3 + A\pi x^2 + Bx + 2C\pi)C_1 + (-Ax^3 + 2A\pi x^2 - A\pi x + Bx + 4Cx)C_2 + Dsinx = 0 \quad (3.15)$$

bulunur. Burada,

$A = 2t + 2t^2 + \frac{1}{3}t^3$

$B = 8t + 14t^2 + \frac{16}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^4$

$C = -\frac{4}{3}t - \frac{7}{3}t^2 - \frac{8}{9}t^3 - \frac{1}{12}t^4$

$D = -\frac{8}{3}e^{-t} - 2 + t + \frac{5}{3}t^2 + \frac{1}{3}t^3$

Olarak bulunur.

(3.15) denkleminde $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 3$ ve $t = \frac{99}{100}$ alınıp denklem sıfıra eşitlendiğinde, $C_1 = 0.002084255665935$ ve $C_2 = -0.001051610652377$ olarak elde edilir.

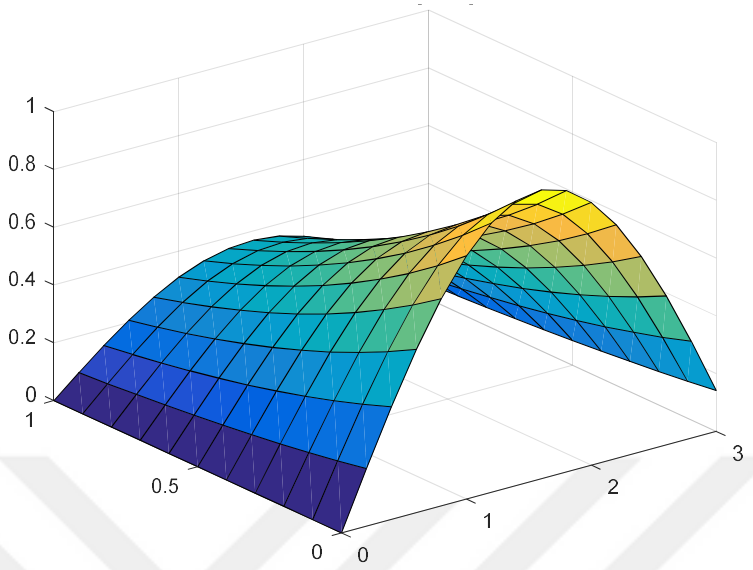
$$u(t,x) = sinx - tsinx + C_1 t^2 (x^2(x-\pi)) + C_2 t^2 x(x-\pi)^2 \qquad (3.16)$$

olur. (3.16) denklemi için farklı x ve t değerleri kullanılarak $u(t,x)$ yaklaşık çözümü elde edilir. Bu problemin yaklaşık çözümü için hata tablosu aşağıdaki gibi verilmiştir.

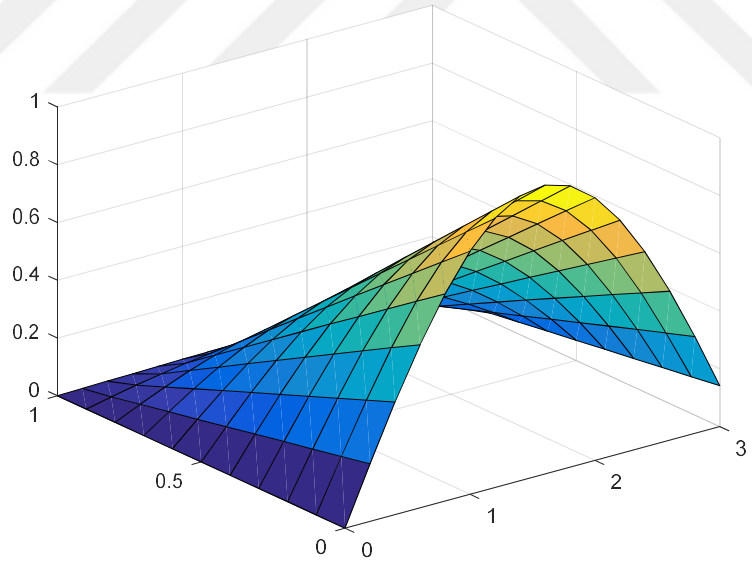
Çizelge 3.1. Hata analizi

t	x	Yaklaşık Çözüm	Tam çözüm	Hata payı
1	π	0	4.5052×10^{-17}	4.5052×10^{-17}
0.5	$\frac{\pi}{2}$	0.496961514415687	0.606530659712633	0.109569145296946
0.25	$\frac{\pi}{4}$	0.529854173974697	0.550695314903184	0.020841140928487
0.1	$\frac{\pi}{8}$	0.344375048209314	0.346266288866367	0.001891240657053
0.05	$\frac{\pi}{16}$	0.185330736430118	0.185575654737061	2.4491×10^{-4}
0.025	$\frac{\pi}{32}$	0.095566075944640	0.095597088512092	3.1012×10^{-5}
0.0125	$\frac{\pi}{64}$	0.048454248834054	0.048458145887622	3.8970×10^{-6}
0.001	$\frac{\pi}{640}$	0.004903810038244	0.004903812542731	2.5044×10^{-9}
0.0001	$\frac{\pi}{6400}$	4.9082×10^{-4}	4.9082×10^{-4}	2.5052×10^{-12}

Matlab programı yardımıyla hesaplanan Çizelge 3.1. deki değerlerlerden $x = \frac{\pi}{64}$ ve $t = 0.0125$ değerleri için tam ve yaklaşık çözümler için grafikler aşağıdaki gibi verilmiştir.



Şekil 3.1. Tam çözüm grafiğini verir



Şekil 3.2. Yaklaşık çözüm grafiğini verir

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Nümerik Sonuçlar

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + u(t,x) = \beta \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x) \\ 0 \le x \le L, \quad 0 \le t \le T \\ u(0,x) = \varphi(x), \;\; u_t(0,x) = \psi(x), \end{cases} \tag{4.1}$$

burada f, φ ve ψ tanımlanan bölgelerde bilinen sürekli fonksiyonlar, β bir sabit ve u fonksiyonu bilinmeyen fonksiyondur (Modanlı, Abdulazeez ve Huseın, 2020).

(4.1) probleminin yaklaşık çözümünü bulmak için Laplace dönüşüm kolokasyonu metodu uygulandı. Laplace dönüşüm metodu uygulanarak temel denklemden yeni bir açık fonksiyon elde edilerek yaklaşık çözüm

$$u(t,x) = sinx - tsinx + C_1 t^2 (x^2(x-\pi)) + C_2 t^2 x(x-\pi)^2 \tag{4.2}$$

Şeklinde bulundu.

(4.1) probleminin tam çözüm ve yaklaşık çözüme ait hata analizi tablosu yapıldı. Matlab programı yardımıyla hesaplanan Çizelge 3.1. deki değerlerlerden $x = \frac{\pi}{64}$ ve $t = 0.0125$ değerleri için tam çözüm ve yaklaşık çözüm için grafikler hazırlandı.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu çalışmada, Laplace dönüşüm kolokasyon metodu pseudo-hiperbolik telegraf denklemine uygulandı. Modifiye Çift Laplace metodu ile elde edilen bu denklemin tam çözümü ile Laplace dönüşüm kolokasyon metodu ile elde edilen yaklaşık çözümü ile karşılaştırıldı. Elde edilen sonuçlar hata analizi tablosunda verildi. Bulunan yaklaşık çözümün tam çözüme yakın olması bu metodun pseudo-hiperbolik telegraf diferansiyel denklemi için uygun olduğu ve güzel sonuçlar verdiğini gösterir. Modifiye Çift Laplace metodu pseudo parabolik ve pseudo hiperbolik denklemlerin tam çözümlerini bulmada oldukça kullanışlı bir yöntemdir. Bu metot Laplace dönüşüm metodunun uygulanmasında problem olan u_{txx} gibi karışık mertebeden kısmi türevler içeren denklemlere uygulanabilmesi açısından elverişlidir.

5.2. Öneriler

Laplace Dönüşüm Kolokasyonu Metodu lineer ve lineer olmayan kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin geneline uygulanabilir.

KAYNAKLAR

ABAZARI, R., and KILICMAN, A., 2014. Application of differential transform method on nonlinear integro–differential equations with proportional delay. Neural Computing & Applications, 24(2): 391–397.

ABDOU M.A., 2005. Adomian decomposition method for solving the telegraph equation in charged particle transport, Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, vol. 95, no. 3, pp. 407–414.

ADEBAYO O. A., SAHEEDO., AKİNDEİNDE., ADEBAYOA, ADEROGBA, and OGUNDAREB.S., 2017. Laplace Transform Collocation Method for Solving Hyperbolic Telegraph Equation.

AKSOY, A., 2021. Kesirli telegraf kısmi diferansiyel denklemin varyasyonel iterasyon metoduyla çözümü. Harran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Şanlıurfa, 51s.

ALTIN, A., 2011. Uygulamalı Matematik. Gazi Kitapevi, Ankara, 294s.

ASHYRALYEV, A. and AKAT, M., 2013. An approximation of stochastic hyperbolic equations: case with Wiener process. Math. Method. Appl. Sci., 36 : 1095– 1106.

ASHYRALYEV, A. and AKAT, M., 2012. An approximation of stochastic telegraph equa- tions. AIP Conf. Proc., 1479 : 598–601.

ASHYRALYEV, A. and K¨OKSAL, M.N., 2009. Onthenumerical solution of hyperbolic PDEs with variable space operator. Numerical Methods for Partial Differ- ential Equations, 25 : 1086–1099.

ASHYRALYEV, A. and SOBOLEVSKII, P., 2001. A note on the difference schemes for hyper- bolic equations. Abstr. Appl. Anal., 6 : 63–70.

BAHŞI A.K. ve YALÇINBAŞ S., 2016. A new algorithm for the numerical solution of telegraph equations by using fibonacci polynomials,Mathematical and Computational Applications, vol. 21, no. 2, p.15.

BANASIAK, J. and MIKA, J., 1998. Singularly perturved telegraph equations with appli- cations in the random walk theory. J. Appl. Math. Stoch. Anal., 11 : 9–28.

BIAZAR, J., EBRAHIMI, H., and AYATI, Z., 2009. An approximation to the solution of telegraph equation by variational iteration method. Numer. Meth. Part. D. E., 25 : 797–801.

BORHANİFAR A. and ABAZARİ R., 2009. An unconditionally stable parallel difference scheme for telegraph equation, Mathematical Problems in Engineering, vol. 2009, Article ID 969610, 17 pages.

COHEN A.M., 2007. Numerical Methods for Laplace Transform Inversion. Springer, Berlin.

CUOMO S., D"AMORE L., MURLİ A. and RİZZARDİ M., 2007. Computation of the inverse Laplace transform based on a collocation method which use sonlyrealvalues. J. Comput. Appl. Math. 198, 98-115.

DAVİES B. and MARTİN B., 1979. Numerical inversion of Laplace transform: a survey and comparison of methods. J. Comput. Phys. 33, 1-32.

DEHGHAN M. and LAKESTANİ M., 2009. The use of Chebyshev cardinal functions for solution of the second-order one-dimensional telegraph equation,

Numerical Methods for Partial Differential Equations, vol. 25, no. 4, pp. 931–938.

DEHGHAN M. and GHESMATİ A., 2010. Solution of the second-order one dimensional hyperbolic telegraph equation by using the dual reciprocity boundary integral equation (DRBIE) method, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 34, no. 1, pp.51–59.

DEHGHAN, M. and SHOKRI, A., 2008. A numerical methods for solving the hyperbolic telegraph equation. Numer. Meth. Part. D. E., 24 : 1080– 1093.

GAO F. and CHİ C., 2007. Unconditionally stable difference schemes for a onespace-dimensional linear hyperbolic equation, International Journal of Engineering Mathematics 9 Applied Mathematics and Computation, vol. 187, no. 2, pp. 1272– 1276.

GÖKTEPE, E., 2020. Caputo kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin ileri fark şeması metodu ile yaklaşık çözümü. Harran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Şanlıurfa, 29s.

HAUTUS, M. L. J., 1976. The Formal Laplace Transform for Smooth Linear Systems. In: Marchesini G., Mitter S.K. (eds) Mathematical Systems Theory. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems (Systems Theory), 131: 29-47.

HESAMMEDDINI, E. and ASODOLAHİFARD, E., 2013. The Sinc-Collocation Method for Solving the Telegraph Equation. Jour. Compt. Eng. and Inform., 1 : 13-17

I. FEDOTOV, M. SHATALOV, and J. MARAİS., 2016. Hyperbolic and pseudo-hyperbolic equations in the theory of vibration, ActaMech 227 (2016), 3315–3324.

JAVİDİ M., 2013. Chebyshev spectral collocation method for computing numerical solution of telegraph equation, Computational Methods for Differential Equations, vol. 1, no. 1, pp. 16–29.

JAVİDİ M. and NYAMORADİ N., 2013. Numerical solution of telegraph equation by using LTinversion technique, International Journal of Advanced Mathematical Sciences, vol. 1, no. 2, pp. 64–77.

JIWARI, R., PANDIT S., MITTAL, R.C., 2012. A Differential Quadrature 41 Algorithm for the NumericalSolutionoftheSecond-Order One Dimensional Hyperbolic Telegraph Equation. Int. J. of Nonlinear Sci., 13 : 259–266.

KEXUEL. and JİGEN P., 2011. Laplace transform and fractional differential equations. Appl. Math. Lett. 24, 2019-2023.

KUMAR, S., YILDIRIM, A., KHAN, Y., JAFARI, H., SAYEVAND, K., and WEI, L., 2012. Analytical solution of fractional Black-Scholes European option pricing equation by using Laplace transform. Journal of Fractional Calculus and Applications, 2(8): 1–9.

KUMAR, S., KUMAR, D., ABBASBANDY, S., and RASHIDI, M. M., 2014. Analytical solution of fractional Navier-Stokes equation by using modified Laplace decomposition method. Ain Shams Engineering Journal, 5(2): 569–574.

LAMBH.,1993.Hydrodynamics,Cambridge Mathematical Library, Combridge University Press, Cambridge, UK, 6th edition.

LAKESTANİ M. and SARAY B. N., 2010. Numerical solution of telegraph equation using interpolating scaling functions, Computers & Mathematics with Applications, vol. 60, no. 7, pp. 1964–1972.

MADANİ M., FATHİZADEH M., KHAN Y. and YILDIRIM A.,2011. On the coupling of the homotopy perturbation method and Laplace transformation. Math. Comput. Model. 53, 1937-1945.

MAHAJERİN E. and BURGESS G., 2003. A Laplace transform-based fund a mental collocation method fortwo-dimensional transien the at flow. Appl. Therm. Eng. 23, 101-111.

MİLLER K.S. and ROSS B., 1993. An Introductionto the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. Wiley, New York.

MİTTAL R. C. and BHATİA R., 2013. Numerical Solution of second order hyperbolic telegraph equation via new cubic trigonometric Bsplines approach, Applied Mathematics and Computation, vol. 220, no. 1, pp. 496–506.

MODANLI, M., ABDULAZEEZ, S. T., and HUSIEN, A. M., 2020. On variational iteration method for solving pseudo-hyperbolic partial differential equations with nonlocal conditions.

MODANLI, M., BAJJAH, B., 2021. Double laplace decomposition method and finite difference method of time-fractional schrödinger pseudoparabolic partial differential equation with caputo derivative.

ODEJİDE S. A. and BİNUYO A. O., 2014. Numerical solution of hyperbolic telegraph equation using method of weighted residuals, International Journal of Nonlinear Science, vol. 18, no. 1, pp. 65–70.

ÖZKAN, O., KURT, A., 2020. Conformable fractional double laplace transform and its applications to fractional partial integro-differential equations.

RASHİDİNİA J., JAMALZADEH S., and ESFAHANİ F., 2014. Numerical solution of one-dimensional telegraph equation using cubic B-spline collocation method, Journal of Interpolation and Approximation in Scientific Computing, vol. Article ID jiasc-00042, 8 pages.

SAADATMANDI, A. and DEHGHAN, M., 2010. Numerical solution of hyperbolic telegraph equation using the Chebyshev Tau method. Numer. Meth. Part. D. E., 26 : 239–252.

SASTRE J., DEFEZ E. and JODAR L., 2011. Application of Laguerre matrix polynomials to the numerical inversion of Laplace transforms of matrix functions. Appl. Math. Lett. 24, 1527-1532.

SHENG H., Lİ Y. and CHEN Y., 2011. Application of numerical inverse Laplace transform algorithms in fractional calculus. J. Franklin Inst. 348, 315-330.

SRİVASTAVA V. K., AWASTHİ M. K., CHAURASİA R. K., and TAMSİR M., 2013. The telegraph equation and its solution by reduced differential transform method, Modellingand Simulation in Engineering, vol. 2013, Article ID 746351, 6 pages.

STEHFEST H., 1970. Algorithm 368: numericalin version of Laplace transform. Commun. ACM 13(1), 47-49.

SUYİNG Z., MİNZHEN Z., ZİCHEN D. and WENCHENG L., 2007. Solution of nonlinear dynamic differential equations based on numerical Laplace transform inversion. Appl. Math. Comput. 189, 79-86

TAGLİANİ A., 2003. Numerical inversion of Laplace transform on there alline from expected values. Appl. Math. Comput. 134, 459-472.

TAGLİANİ A. and VELASQUEZ Y., 2003. Numerical inversion of the Laplace transform viafractional moments. Appl. Math. Comput. 143, 99-107.

TALBOT A., 1979. The accurate numericalin version of Laplace transforms. J. Appl. Math. 23(1), 97-120.

VALKO P.P. and ABATE J., 2004. Numerical Laplace inversion in rheologicalcharacterization. J. Non-Newton. Fluid Mech. 116, 395-406

WEEKS W.T., 1966. Numerical inversion of Laplace transforms using Laguerre functions. J. ACM 13(3), 419-429.

WESTON, V. and HE, S., 1993. Wave splitting of telegraph equation in R3 and its applications to inverse scattering. Inverse Probl., 9 : 789–812.

YOUSEFİ S. A., 2010. Legendre multiwavelet Galerkin method for solving the hyperbolic telegraph equation, Numerical Methods for Partial Differential Equations, vol. 26, no. 3, pp. 535–543.

Y., JAFARI, H., SAYEVAND, K., and WEI, L., 2012. Analytical solution of fractional Black-Scholes European option pricing equation by using Laplace transform. Journal of Fractional Calculus and Applications, 2(8): 1–9.