T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KLASİK VE MAKSİMUM ÇARPIM TİPİNDE SZASZ OPERATÖRLERİ İÇİN YAKLAŞIM

Saliha TAŞKESEN HIZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2021

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET……...……...……..……i
ABSTRACT……..……ii
TEŞEKKÜR…….....……...……...……..…….....iii
ŞEKİLER DİZİNİ…...……...……..……...iv
SİMGELER DİZİNİ……...…...……....v
1. GİRİŞ……...……...……1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR…….……2
2.1. Temel Tanımlar ve Teoremler…..……..……...…..…4
3. MATERYAL ve YÖNTEM…....…….……..…….……12
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA……...…..……..……....26
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER…..……...……...……...……...…….....49
KAYNAKLAR……...……...53
ÖZGEÇMİŞ……...……55

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KLASİK VE MAKSİMUM ÇARPIM TİPİNDE SZASZ OPERATÖRLERİ İÇİN YAKLAŞIM

Saliha TAŞKESEN HIZ

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Sevilay KIRCI SERENBAY
Yıl: 2021, sayfa: 54

Yaklaşımlar teorisinde, Korovkin tip teoremler lineer pozitif yaklaşım operatörleri üzerine kurulur. Fakat lineer olmayan operatörlerle de yaklaşım problemi incelemek mümkündür. Bu çalışmada, lineer operatörlerin yanısıra lineer olmayan (maksimum-çarpım tipi) pozitif operatörler de tanımlandı ve lineer olmayan operatörlerle verilen yaklaşım dereceleri, lineer operatörlerle verilen yaklaşımlarla karşılaştırıldı. Sırasıyla maksimum-çarpım tipi Szasz operatörleri, maksimum-çarpım tipi genelleştirilmiş Szasz operatörleri ve maksimum çarpım tipi modifiye Szasz operatörleri tanımlandı ve süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım problemleri incelendi. Son olarak genelleştirilmiş lineer olmayan Szasz operatörlerinin değişen değerler için fonksiyonlara yaklaşım derecesi grafiklerle gösterildi.

ANAHTAR KELİMELER: Lineer olmayan Szasz operatörü, maksimum çarpım, modifiye Szasz operatörü, yaklaşım teoremi

ABSTRACT

MSc Thesis

APPROXIMATION FOR SZASZ OPERATORS OF CLASSICAL AND MAX PRODUCT TYPE

Saliha TAŞKESEN HIZ

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr.Sevilay KIRCI SERENBAY
Year: 2021, page: 54

In approximation theory, Korovkin type theorems are built on linear positive approximation operators. However, it is also possible to examine the approximation problem with nonlinear operators. In this study, besides linear operators, nonlinear (maximum-product type) positive operators were defined and approximation degrees given by nonlinear operators were compared with approximations given by linear operators. Maximum-product type Szasz operators, maximum-product type generalized Szasz operators and maximum product type modified Szasz operators are defined, and approximation problems are examined with the help of the continuum module. Finally, the approximation degree of generalized nonlinear Szasz operators to the functions for varying values is shown with graphs.

KEYWORDS: Nonlinear Szasz operator, maximum product, modified Szasz operators, approximation theorem

TEŞEKKÜR

Öncelikle bu tezi hazırlarken problemin belirlenmesinden tezin yazımına kadar her aşamada bilgi birikimi, deneyimleri, sabrı ve ilgisiyle yanımda olan, bana her konuda rehberlik eden ve fikirleriyle beni yönlendiren kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Sevilay KIRCI SERENBAY'a teşekkür ederim.

Ayrıca hayatım boyunca bana her zaman güvenen, maddi ve manevi hayat kaynağım, başta annem Aysel TAŞKESEN ve babam Ahmet TAŞKESEN olmak üzere tüm aile bireylerime teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Son ve en özel teşekkürümü destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan, bana karşı her daim anlayışı ve hoşgörüsüyle hayatımda önemli bir yeri olan sevgili eşim Anıl HIZ'a sunarım.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 5.1. n=100 için operatörlerin f fonksiyonuna yaklaşımının karşılaştırılması…..……..……..49
Şekil 5.2. n=200 için operatörlerin f fonksiyonuna yaklaşımının karşılaştırılması…..…….....50
Şekil 5.3. n=50 için operatörlerin g fonksiyonuna yaklaşımının karşılaştırılması……..51
Şekil 5.4. n=100 için operatörlerin g fonksiyonuna yaklaşımının karşılaştırılması…..……..51

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$CB_{+}(I)$	I dan $\mathbb{R}_0^+$ ya sürekli ve sınırlı fonksiyonların uzayıs
C[m,n]	Kapalı [m,n] aralığında tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonların uzayı
d	Metrik fonksiyonu
f_n	f bir fonksiyon dizisi, $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere
$F_n^{(M)}(f)(x)$	Maksimum çarpım tipi Favard-Szasz-Mirakyan Operatörleri
$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$	f_n fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması
L	Lineer pozitif operatör
L_n	Lineer olmayan pozitif operatör
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_0^+$	Negatif olmayan reel sayılar kümesi
$S_n(f;x)$	Lineer Szasz operatörleri
$S_n^{(M)}(f)(x)$	Maksimum çarpım tipi Genelleştirilmiş Favard-Szasz-Mirakyan operatörleri
$S_n^{(M)*}(f)(x)$	Maksimum çarpım tipi Modifiye Favard-Szasz-Mirakyan operatörleri
$S_n^{*(M)}(f)(x)$	Maksimum çarpım tipi Modifiye Favard-Szasz-Mirakyan operatörleri
$\bigvee$	Maksimum çarpım işlemi
$W(f;\delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü

1. GİRİŞ

Korovkin tipi yaklaşım teorisinde rastgele seçilen bir sürekli fonksiyona düzgün yakınsama sorunu operatör dizileri yardımıyla araştırılmaktadır. Bu sorunların araştırılmasında kullanılan operatör dizileri çoğunlukla lineer ve pozitif operatör dizileri olarak karşımıza çıkmaktadır. Lineer yaklaşım operatörlerinde, gerçek sayıların lineer uzay yapısındaki cebirsel işlemler olan toplama ve çıkarma işlemi kullanılmaktadır. Burada ki asıl teoremler Weierstrass tipi düzgün yaklaşım teoremleridir. Hata oranı ise çoğunlukla süreklilik modülü yardımıyla hesaplanmaktadır. Bu tez çalışmasında lineer ve pozitif operatörlerin düzgün yaklaşım ve hata oranları öncelikli olacak şekilde değerlendirilmektedir. Bütün yaklaşım operatörleri lineer olmak zorunda mıdır? Bu sorunun cevabı hayır olarak yanıtlanmaktadır. Yaklaşım operatörü olarak lineer yapı her zaman korunamamaktadır ya da tek başına yeterli olamamaktadır. Bunun yanı sıra cebirsel işlemler toplama ve çıkarma da yetersiz kalacaktır. Bu problemlerin çözümleri için cebirsel işlem olarak maksimum alma işlemi kullanılarak maksimum-çarpım tipi yaklaşım operatörleri tanımlanmaktadır. Bunlar lineer olmayan pozitif operatörlerdir ve bu tez çalışmasında lineer olmayan Favard-Szasz-Mirakyan operatörleri tanıtılıp bu operatörlerin genelleştirilmiş operatörlerinden ve modifiyelerinden bahsedilmektedir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Karl Weierstrass yaklaşım problemi üzerinde ilk çalışmalar yapan araştırmacıdır. Weierstrass, kapalı ve sınırlı aralık üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyonun, polinomlar dizisinin limiti biçiminde gösterebilmesine ait teoremler ispatlamıştır. Yani;

$$\forall h \in C[a,b] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_n(m) = h(m) \tag{2.1}$$

(2.1) de yazıldığı gibi olacak biçimde (P_n) polinom dizisinin var olduğunu ispatlamıştır. İlerleyen yıllarda bazı matematikçiler yukarıda tanımlanan polinomlar dizisi üzerinde çalışmalarda bulunmuşlardır. 1912 yılında Rus matematikçi S. N. Bernstein toplamsal biçimde bir polinomlar dizisini

$$B_n(m) = \sum_{k=0}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} m^k (1-m)^{n-k} \tag{2.2}$$

(2.2) şeklinde tanımlamıştır. Burada $m \in [0,1]$ aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyona yaklaşılacağını ifade ve ispat ederek polinomları kendi adıyla tanımlamıştır (Bernstein, 1912). 1930 yılında Kantorovich ise $[0,1]$ aralığındaki integrallenebilir h fonksiyonları için

$$K_n(h;m) = (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} m^k (1-m)^{n-k} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k41}{n+1}} f(t)\,dt \tag{2.3}$$

(2.3) şeklinde tanımlı K_n operatörlerini tanımlamış ve bu operatörler günümüzde Kantorovich operatörleri olarak anılmaktadır (Kantorovich, 1930). İlerleyen zamanlarda $[0,1]$ kapalı aralığını sonsuza genişleyen aralık olarak yeni çalışmalarda bulunulmuştur. 1937 yılında Chlodowsky,

$$C_n(h;m) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{m}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{m}{b_n}\right)^{n-k} h\left(\frac{k}{n}b_n\right), 0 \le m \le b_n \tag{2.4}$$

(2.4) şeklindeki operatörü tanımlamış ve bu operatörün yakınsaklık özelliklerini incelemiştir (Chlodowsky, 1937). Yukarıdaki denklemde $\{b_n\}$ dizisi; $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$ koşulunu sağlayan bir pozitif reel sayıların artan dizisidir. $C_n(h;m)$

operatörlerine literatürde Bernstein-Chlodowsky polinomları adı verilir. Szasz-Mirakyan operatörleri, Bernstein polinomlarının 1941'de G. M. Mirakyan ve 1950'de O. Szasz tarafından tanıtılan sonsuz aralıklara genellemesidir. Bu operatörler,

$$S_n(h)(m) = e^{-nm}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nk)^k}{k!}h\left(\frac{k}{n}\right),\ m \in [0,\infty) \subset \mathbb{R} \text{ ve } n \in \mathbb{N} \tag{2.5}$$

(2.5) şeklinde tanımlanmıştır (Szasz, 1950). 2016 yılında B. Bede, L. Coroianu ve S. G. Gal yayınladıkları kitapta, maksimum çarpım tipi operatörler içeren yaklaşım alanındaki gelişmelerin geniş bir incelenmesini çeşitli operatörler üzerinde ele almışlardır. Kitap, maksimum çarpım tipindeki operatörlerin çoğu durumda klasik yaklaşımlarla elde edilenlerden daha iyi yaklaşımlar elde edilmesini vurgulamaktadır (Bede ve Gal, 2016). Bu operatörlerden biri olan Favard-Szasz-Mirakyan operatörlerinin tanımı aşağıdaki gibidir. Maksimum çarpım tipi Szasz operatörleri kesilmemiş operatörler olarak şu şekilde tanımlanır,

$$F_n^{(M)}(f)(x) = \frac{\bigvee_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\right)}{\bigvee_{k=0}^{\infty}\frac{(nk)^k}{k!}},\ n \in \mathbb{N} \tag{2.6}$$

(2.6) da belirtilen $f : [0,+\infty] \to \mathbb{R}_+$ dir (Bede ve Gal, 2016).

Ülkemizde de maksimum çarpım tipi operatörler hakkında çeşitli çalışmalar yapılmıştır, bu çalışmalardan bazıları şu şekildedir; Türkan Yeliz Gökçer ve Oktay Duman (2016), maksimum çarpım tipi operatörler ile sürekli fonksiyonların yaklaşımlarına odaklanarak hata tahminlerini inceleyip maksimum çarpım tipi Bernstein operatörlerine bir uygulama sunmuşlardır. Sevilay Kırcı Serenbay ve Özge Dalmanoğlu (2017), üstel ağırlıklı uzayda genelleştirilmiş Szasz-Mirakyan operatörleri için yakınsama oranı ile ilgili çalışmalarda bulunmuşlardır. Şule Yüksel Güngör ve Nurhayat İspir (2018), maksimum çarpımın belirli bir tipi olarak adalandırılan genelleştirilmiş Szasz-Mirakyan operatörlerini tanıtıp Shisha-Mond tipi teoremi kullanarak yaklaşım hatası için bir üst sınır tahmini veren çalışmalar yapmışlardır. Fahri Baruğ ve Sevilay Kırcı Serenbay (2021) ise yayınladıkları makalede lineer olmayan maksimum çarpım tipindeki modifiye Favard-Szasz-Mirakyan operatörlerinin yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir.

2.1 Temel Tanımlar ve Teoremler

Bu bölümde yaklaşım teorisinde önemli bir çalışma alanı olan lineer pozitif operatörler ile ilgili bazı temel kavramlardan bahsedilecektir. Ayrıca tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1 X bir küme ve d, X üzerinde bir metrik yani $X \times X$ üzerinde $\forall\, a, b, c \in X$ için,

1) d reel değerli, sonlu ve negatif olmayan

2) $d(a,b) = 0 \Longleftrightarrow a = b$

3) $d(a,b) = d(b,a)$ (simetri)

4) $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlayan bir fonksiyon olsun. O halde (X,d) ifadesine **metrik uzay** denir. Sabit a ve b noktalarına karşılık gelen $d(a,b)$ negatif olmayan sayısı; a den b ye olan uzaklık adını alır (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.1.2 Bir X vektör uzayı üstünde tanımlı ve reel değerli olup, bir $a \in X$ noktasındaki değeri $\|a\|$ ile gösterilebilen; θ bir skaler, a ve b, X üstünde keyfi vektörler olmak üzere

1) $\|a\| \geq 0$

2) $\|a\| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$

3) $\|\theta a\| = \theta \|a\|$

4) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

sağlayan $\|.\|$ fonksiyonuna bir **norm** denir. Üzerinde tanımlanmış bir norm olan X vektör uzayına bir **normlu uzay** denir. Eğer normlu uzay **tam** olursa o zaman bu uzaya **Banach uzayı** denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.1.3 $X \neq \varnothing$, F $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ nin bir cismi olsun.

$+ : X \times X \to X$

$\cdot : F \times X \to X$

aşağıdaki özellikleri sağladığında, F cismi X kümesi üstünde bir **lineer uzay (vektör uzayı)** oluşturur denir.

$\forall a, b, c \in X$ ve $\forall m, n \in F$ için

1) $a + b = b + a$,

2) $(a + b) + c = a + (b + c)$,

3) $a + \gamma = \gamma + a$ olacak şekilde $\gamma \in X$ vardır,

4) $\forall a \in X$ için $a + (-a) = (-a) + a = \gamma$ olacak şekilde bir $-a \in X$ vardır,

5) $1a = a$,

6) $m(a + b) = ma + mb$,

7) $(m + n)a = ma + na$,

8) $m(na) = (mn)a$

(Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 2.1.4 $[m, n]$ aralığı üstünde sürekli ve tanımlı bütün reel değerli fonksiyonların bir araya gelmesiyle oluşturduğu kümeye $C[m, n]$ **fonksiyon uzayı** denir. Bu uzaydaki norm

$$\|s(t)\|_{C[m,n]} = \max_{m \le t \le n} |s(t)|$$

şeklinde tanımlanır. Gerçekten

1) $Her\ k \in C[m, n]$ için $s + k \in C[m, n]$

2) $Her\ s, k \in C[m,n]$ için $s + k = k + s$

3) $Her\ s, k, h \in C[m,n]$ için $(s + k) + h = s + (k + h)$

4) $Her\ s \in C[m,n]$ için $\exists\theta$ vardır ki $s + \theta = \theta + s = s$

5) $Her\ s \in C[m,n]$ için $\exists s^{\shortmid}$ vardır ki $s + s^{\shortmid} = s^{\shortmid} + s = \theta$

6) $Her\ s \in C[m,n]$ ve $\beta \in \mathbb{C}$ için $\beta s \in C[m,n]$

7) $Her\ s \in C[m,n]$ ve $\beta, \mu \in \mathbb{C}$ için $(\beta\mu)s = \beta(\mu s)$

8) $Her\ s \in C[m,n]$ için $1s = s$

9) $Her\ s \in C[m,n]$ ve $\beta, \mu \in \mathbb{C}$ için $(\beta + \mu)s = \beta s + \mu s$

10) $Her\ s, k \in C[m,n]$ ve $\beta \in \mathbb{C}$ için $\beta(s + k) = \beta s + \beta k$

11) $Her\ s \in C[m,n]$ için $\| s \| \geq 0$

12) $Her\ s \in C[m,n]$ için $\| s \| = 0 \Leftrightarrow s = 0$

13) $Her\ s \in C[m,n]$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\| \lambda s \| = |\lambda| \, \| s \|$

14) $Her\ s, k \in C[m,n]$ için $\| s + k \| \leq \| s \| + \| k \|$ koşulları sağlandığından $C[m,n]$ **lineer normlu uzay**dır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 2.1.5 Kapalı aralıkta sürekli fonksiyonların en büyük ve en küçük değerlerine ait Weierstrass teoremine göre $C[a,b]$ uzayında norm;

$$\|f\|_c = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

ile gösterilir. Bu norma göre $\{f_n(x)\}$ dizisi bir fonksiyona düzgün yakınsar. Bu durumda $f_n(x)$ dizisinin $C(a,b)$ normunda bir $g(x)$ fonksiyonuna yaklaşması için gerek ve yeter koşul $[a,b]$ aralığındaki tüm noktaları için $|f_n(x) - g(x)| < M\ \varepsilon_n$, eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Burada ε_n sıfıra yakınsayan bir dizi, M ise pozitif bir sabittir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 2.1.6 Bir (h_n) fonksiyonlar dizisinin h fonksiyonuna $C[x,y]$ normunda yakınsamanın düzgün olması $\forall a \in [x,y]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \| h_n(a) - h(a) \|_{C[x,y]} = 0$$

olmasıdır. Daha açık ifade etmek gerekirse;

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\le a\le y} |h_n(a) - h(a)| = 0$$

eşitliğinin sağlanması demektir. Düzgün yakınsamanın gösterimi $h_n(a) \rightrightarrows h(a)$ şeklindedir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 2.1.7 X ve Y uzayları iki fonksiyon uzayı olmak üzere seçilsin. Eğer X uzayından alınmış rasgele f fonksiyonunu Y uzayında bir g fonksiyonu ile eşleştiren bir L kuralı varsa o takdirde X uzayında bir **operatör** tanımlanmıştır denir ve bu durumda

$$g(x) = L(f;x)$$

gösterimi kullanılır.

L operatörünün tanım bölgesi X uzayıdır ve $X = D(L)$ ile gösterilir. Bu durumda şunu söylemek mümkündür; $L(f;x) = g(x)$, Y uzayının elemanlarından biri olur ve bu şekildeki g fonksiyonlarının oluşturduğu kümeye L operatörünün değerler kümesi denir. Bu küme $R(L)$ ile gösterilir. Görülüyor ki $R(L) \subset Y$ dir. Lineer operatörün tanımı X uzayının lineer bir uzay olduğu gösterildikten sonra verilebilir.

$f_1(x)$ ve $f_2(x)$, X uzayından seçilmiş rasgele iki fonksiyon, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ seçilen keyfi sayılar olmak üzere L operatörü;

$$L(\gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2; x) = \gamma_1 L(f_1;x) + \gamma_2 L(f_2;x)$$

koşulunu gerçekliyor ise o takdirde L operatörü **lineer operatör** olarak adlandırılır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 2.1.8 L bir operatör ve f bir fonksiyon olmak üzere X uzayından alınan $\forall\ f \geq 0$ fonksiyonu için $L(f;x) \geq 0$ oluyorsa L operatörü **pozitif operatör**dür denir (Gadzhiev, 1976).

Lineer pozitif operatör ise hem lineerlik hem de pozitiflik koşulunu gerçekleyen operatöre denir (Gadzhiev, 1976).

Lemma 2.1.9 Z, T vektör uzayları, $L : Z \to T$ lineer pozitif operatör olsun. O halde, L operatörü monoton artandır. Yani;

$$a \leq b \Longrightarrow L(a) \leq L(b)$$

ifadesi gerçeklenir.

İspat $a \leq b$ olduğunu kabul edelim. Bu halde $b-a \geq 0$ olacağı için ve L operatörü pozitif olduğundan;

$$L(b-a) \geq 0 \tag{2.7}$$

yazılabilir. Diğer yandan L lineer bir operatör olduğu gerekçesiyle;

$$L(b-a) = L(b) - L(a)$$

olur ki bunun da (2.7) eşitsizliğinde kullanılması ile ispat tamamlanır (Gadzhiev, 1976).

Lemma 2.1.10 Z, T vektör uzayları, $L : Z \to T$ lineer pozitif operatör olmak üzere o halde

$$|L(a)| \leq L(|a|)$$

eşitsizliği gerçeklenir (Gadzhiev, 1976).

Tanım 2.1.11 $n \in N$ olsun. $h_n(x)$ e bir **fonksiyon dizisi** denir ve gösterimi (h_n) şeklindedir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 2.1.12 $n \in N$ olsun. $L_n(h;a)$ ya bir **operatör dizisi** denir ve gösterimi (L_n) şeklindedir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 2.1.13 $\mathbb{R}_0^+$ üzerinde $\bigvee$ (maksimum) ve .(çarpım) işlemleri göz önünde bulundurulduğu zaman $\left(\mathbb{R}_0^+, \bigvee, .\right)$ bir yarı halka yapısına sahiptir ve bu yapıya bir **maksimum çarpım cebiri** denir (Bede ve Gal, 2016).

Tanım 2.1.14 (Maksimum Çarpım Tipi Operatör Dizisi) $P \subseteq R$ sınırlı veya sınırsız bir aralık ve

$$CB_+(P) = \{h : P \to \mathbb{R}_0^+;\ h,\ P\ üzerinde\ sınırlı\ ve\ sürekli\}$$

olsun. $n \in \mathbb{N}$, $h \in CB_+(P)$, $K_n(.,t_i) \in CB_+(P)\ ve\ t_i \in P$ olmak üzere genel anlamda bir

$$L_n : CB_+(P) \to CB_+(P)$$

maksimum çarpım tipi operatör dizisi,

$$L_n(h)(t) = \bigvee_{i=0}^{n} K_n(t,t_i).h(t_i)$$

ya da

$$L_n(h)(t) = \bigvee_{i=0}^{\infty} K_n(t,t_i).h(t_i)$$

olarak tanımlanır. Bu operatörler liçin pozitif ancak ineer olmayan operatörlerdir denilebilir. Ayrıca $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+$, $h, s : P \to \mathbb{R}_0^+$ için

$$L_n(\alpha h \bigvee \beta, s)(t) = \alpha L_n(h)(t) \bigvee \beta L_n(s)(t)$$

ifadesi *lineerlik* ve $\forall\ \lambda \geq 0$ için

$$L_n(\lambda h)(t) = \lambda L_n(h)(t)$$

ifadesi de *pozitif homojenlik* özelliklerini sağlar (Bede ve Gal, 2016).

2.2 Yardımcı Teoremler

Operatörlerin yaklaşım oranını bulma konusunda aşağıda verilmiş olan lemmalar yol gösterici olacaktır.

Lemma 2.2.1 $P \subseteq \mathbb{R}$ sınırlı veya sınırsız bir aralık ve $t, h \in CB_+(P)$ olsun.

$$L_n : CB_+(P) \to CB_+(P)$$

operatör dizisi lineer değildir. Bu durumda

$1)t \leq h$ ise $\forall\, n \in N$ için $L_n(t) \leq L_n(h)$ (*monotonluk*)

$2)L_n\,(t+h) \leq L_n(t) + L_n(h)$ (*alt lineerlik*)

özellikleri sağlansın. Bu takdirde $\forall\, t, h \in CB_+(P)\ ve\ a \in P$ için

$$|L_n(t)(a) - L_n(h)(a)| \leq L_n(|t-h|)(a)$$

dir.

İspat $t, h \in CB_+(P)$ olsun. $t = t - h + h \leq |t-h| + h$ yazılabilir. Monotonluk ve alt lineerlik özelliklerini göz önüne alarak

$$L_n(t)(a) \leq L_n(|t-h|)(a) + L_n(h)(a) \tag{2.8}$$

elde edilir ve bu bilgi ile yola çıkılarak

$$L_n(t)(a) - L_n(h)(a) \leq L_n(|t-h|)(a) \tag{2.9}$$

ifadesi bulunur. Benzer şekilde
$h = h - t + t \leq |t - h| + t$ olup

$$L_n(h)(a) - L_n(t)(a) \leq L_n(|t - h|)(a)$$

olur ki (2.8) ve (2.9) dan istenen

$$|L_n(t)(a) - L_n(h)(a)| \leq L_n(|t - h|)(a)$$

eşitsizliği elde edilmiş olur. (Bede ve Gal, 2016)

Not Lineer pozitif operatörler için bilinen eşitsizliğin genelleştirmesi olarak Lemma 2.2.1 gösterilebilir; çünkü *pozitiflik* ve *lineerlik* koşulları, pozitiflik, alt lineerlik, monotonluk, pozitif homojenlik koşullarını gerektirir ancak bu ifadenin karşıtı genellikle doğru değildir (Bede ve Gal, 2016).

Lemma 2.2.2 $L_n : CB_+(P) \to CB_+(P)$ alt lineerlik, pozitif homojenlik ve monotonluk koşullarını sağlayan bir operatör dizisi olsun. O halde $\forall g \in CB_+(P)$ ve $h \in P$ için

$$|L_n(g)(h) - g(h)| \leq \left[\frac{1}{\delta} L_n(\vartheta_n)(h) + L_n(e_0)(h)\right] W_P(g;\delta)_P + g(h)\,|L_n(e_0)(h) - 1|$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\delta > 0, \forall k \in P, e_0(k) = 1, h \in P$ için $\vartheta_h(k) = |k - h|$,

$$W_P(g;\delta)_P = \sup\{|g(h) - g(s)|;\ h, s \in P,\ \ |h - s| \leq \delta\}$$

süreklilik modülüdür (Bede ve Gal, 2016).

Sonuç 2.2.3 Lemma 2.2.1 de verilen şartlara ilaveten $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $a \in P$ için $L_n(e_0) = e_0$ olsun. O halde

$$|L_n(g)(a) - g(a)| \leq \left[1 + \frac{1}{\delta} L_n(\vartheta_n)(a)\right] W_P(g;\delta)_P$$

olur (Bede ve Gal, 2016).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Yaklaşımlar teorisi ve fonksiyonel analizde yer alan lineer pozitif operatörlerle yaklaşım alanı son yetmiş yıl içerisinde meydana çıkmıştır. Karl Theodor Wilhelm Weierstrass 1885 yılında sonsuz olmayan bir aralık üzerinde sürekli her fonksiyona yine aynı aralık üzerinde yakınsayan bir polinom dizisinin var olduğunu ifade eden teoremi iddia etmiştir ayrıca ispatlamıştır. Karl Theodor Wilhelm Weierstrass'ın bu girişiminden yola çıkan Rus matematikçi Bernstein 1912 yılında varlığı ispat edilen bu polinomu $[0,1]$ aralığı için ispatlamıştır." Szasz-Mirakyan operatörleri ise Bernstein polinomlarının 1941 yılında G. M. Mirakyan ve 1950 yılında O. Szasz tarafından tanıtılan sonsuz aralıklara genellemesidir.

Teorem 3.1 (P. P. Korovkin Teoremi) $g \in C[s,m]$ ve bütün reel eksende sınırlı

$$(|g(y)| < M_g) \tag{3.1}$$

olsun. Eğer $L_n(g;y)$ lineer pozitif operatör dizisi $\forall\, y \in [s,m]$ kapalı aralığında

1) $L_n(g;y) \rightrightarrows 1$

2) $L_n(t;y) \rightrightarrows y$

3) $L_n(t^2;y) \rightrightarrows y^2$

sağlıyor ise o halde $[s,m]$ kapalı aralığı için

$$L_n(g;y) \rightrightarrows g(y)$$

yazılır.

İspat $g \in C[s,m]$ olduğunu kabul edelim. Sürekli fonksiyonların tanımından

$$|t-y| \leq \delta \Longrightarrow |g(t)-g(y)| < \varepsilon$$

olur ki $|t-y| > \delta$ olduğunda (3.1) den ve üçgen eşitsizliğinden dolayı

$$|g(t)-g(y)| \leq |g(t)| + |g(y)| \leq 2M_g \tag{3.2}$$

yazılabilmesi mümkündür. Diğer taraftan

$$|t-y| > \delta \Longrightarrow \frac{|t-y|}{\delta} > 1$$

olacağından

$$\frac{(t-y)^2}{\delta^2} > 1 \tag{3.3}$$

ifadesi sağlanır. (3.2) ve (3.3) den

$$|g(t)-g(y)| \leq 2M_g \frac{(t-y)^2}{\delta^2}$$

yazılabilir. O halde

$$|t-y| \leq \delta \Longrightarrow |g(t)-g(y)| < \varepsilon$$

$$|t-y| > \delta \Longrightarrow |g(t)-g(y)| \leq 2M_g \frac{(t-y)^2}{\delta^2}$$

elde edilir. Dolayısı ile $\forall\, t \in \mathbb{R}$ ve $\forall\, y \in [s,m]$ için

$$|g(t)-g(y)| \leq 2M_g \frac{(t-y)^2}{\delta^2} \tag{3.4}$$

dir. İspatın tamamlanabilmesi için (1), (2), (3) koşullarını sağlayan (L_n) operatör dizisinin

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(g(t);y) - g(y)\|_{C[s,m]} = 0$$

eşitliğini de sağladığı gösterilmelidir. Lineerlik özelliğinden

$$|L_n(g(t);y) - g(y)| = |L_n(g(t);y) - g(y) + L_n(g(y);y) - L_n(g(y);y)|$$

$$= |L_n((g(t)-g(y));y) + g(y)(L_n(1;y) - 1|$$

olur. Burada üçgen eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$|L_n(g(t);y) - g(y)| \leq |L_n((g(t)-g(y));y)| + |g(y)|\,|(L_n(1;y)-1)|$$

yazmak mümkündür. Lineer pozitif operatörler monoton artanlık ve

$$g(t) - g(y) \leq |g(t) - g(y)|$$

ifadesini sağlayacağından

$$|L_n((g(t) - g(y)); y)| \leq |L_n(|g(t) - g(y)|; y)|$$

olur. Operatör pozitif ve $|g(t) - g(y)| \geq 0$ olduğundan

$$|L_n(|g(t) - g(y)|; y)| = L_n(|g(t) - g(y)|; y)$$

dir. O halde

$$|L_n(g(t); y) - g(y)| \leq L_n(|g(t) - g(y)|; y) + |g(y)| \, |(L_n(1; y) - 1)|$$

olduğu gösterilmiş olur. (3.1) den

$$|L_n(g(t); y) - g(y)| \leq L_n(|g(t) - g(y)|; y) + |g(y)| \, |(L_n(1; y) - 1)|$$

yazılabilir. (L_n) monoton artan olduğundan (3.4) ün kullanılmasıyla

$$|L_n(g(t); y) - g(y)| \leq L_n\left(\varepsilon + 2M_g \frac{(t-y)^2}{\delta^2}; y\right) + M_g \, |(L_n(1; y) - 1)| \qquad (3.5)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
L_n\left(\varepsilon + \frac{2M_g}{\delta^2}(t-y)^2; y\right) &= L_n(\varepsilon; y) + L_n\left(\frac{2M_g}{\delta^2}(t-y)^2; y\right) \\
&= \varepsilon L_n(1; y) + \frac{2M_g}{\delta^2} L_n\left(t^2 - 2yt + y^2; y\right) \\
&= \varepsilon L_n(1; y) + \frac{2M_g}{\delta^2}[L_n(t^2; y) - y^2 + 2y^2 \\
&\quad -2yL_n(t; y) + y^2 L_n(1; y - y^2)] \\
&= \varepsilon L_n(1; y) + \frac{2M_g}{\delta^2}[\left(L_n(t^2; y) - y^2\right) \\
&\quad +2y\,(y - L_n(t; y)) + y^2\,(L_n(1; y) - 1)]
\end{aligned}$$

yazılabilir. Son olarak elde edilen ifadenin (3.5) de kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} |L_n(g(t);y)-g(y)| \leq \varepsilon L_n(1,y) + M_g\,|(L_n(1,y)-1)| \\ + \frac{2M_g}{\delta^2}[\Big(L_n(t^2;y)-y^2\Big) \\ + 2y\,(y-L_n(t;y)) \\ + y^2\,(L_n(1;y)-1)] \end{aligned} \tag{3.6}$$

elde edilir. (1), (2), (3) koşullarının (3.6) da kullanılması ile

$$|L_n\left(g\left(t\right);y\right)-g\left(y\right)| \leq \varepsilon$$

bulunur. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty}\max_{s\leq y\leq m}|L_n\left(g\left(t\right);y\right)-g\left(y\right)|=0$$

dır (P. P. Korovkin, 1953).

Tanım 3.2 (Szasz Operatörleri) Szasz-Mirakyan operatörleri, Bernstein polinomlarının 1941-1950'de G. M. Mirakyan ve O. Szasz tarafından tanıtılan sonsuz aralıklara genellemesidir. Burada $f \in C[0,A]$ olmak üzere

$$S_n(f;x)=e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\right), x\in[0,A]\subset\mathbb{R} \text{ ve } n\in\mathbb{N} \tag{3.7}$$

(3.7) ile tanımlanır (Szasz, 1950).

Teorem 3.3 (3.7) ile gösterilen Szasz operatörleri A pozitif reel sayıların bir elemanı olsun. Bu durumda g fonksiyonu $[0,A]$ aralığı üzerinde sürekli ve bütün pozitif yarı eksende sınırlı olur. O halde g fonksiyonu bu aralıkta düzgün yakınsar. Bunu şu şekilde ifade etmek mümkündür; $g \in C[0,A]$ ise

$$S_n(g;y) \rightrightarrows g(y), \qquad y\in[0,A]$$

dır.

İspat Teoremin ispatı Korovkin teoremi kullanılarak kolayca yapılabilir. Bu ispat için ilk olarak $S_n(g;y)$ in lineer ve pozitif bir operatör olduğunun gösterilmesi gerekir.

Szasz operatörünün lineerliği: $\forall \varphi, \theta \in \mathbb{R}$ ve $g_1, g_2 \in C[0,A]$ için,

$$\begin{aligned} S_n\left(\varphi g_1(t)+\theta g_2(t);y\right) &= e^{-ny}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\varphi g_1\left(\frac{k}{n}\right)+\theta g_2\left(\frac{k}{n}\right)\right)\frac{(ny)^k}{k!} \\ &= e^{-ny}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\varphi g_1\right)\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(ny)^k}{k!}+e^{-ny}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\theta g_2\right)\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(ny)^k}{k!} \\ &= \varphi e^{-ny}\sum_{k=0}^{\infty}g_1\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(ny)^k}{k!}+\theta e^{-ny}\sum_{k=0}^{\infty}g_2\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(ny)^k}{k!} \\ &= \varphi S_n\left(g_1\left(t\right);y\right)+\theta S_n\left(g_2\left(t\right);y\right) \end{aligned}$$

olduğu için (S_n) operatörü lineerdir.

Szasz operatörünün pozitifliği: $y \in [0,\infty)$ ve $k=0,1,2,...,n \in \mathbb{N}$ için

$$e^{-ny}\frac{n^k}{k!}y^k \geq 0$$

olduğundan $g \geq 0$ ise $S_n\left(g;y\right) \geq 0$ dır.

Korovkin teoremi gereği

1) $S_n\left(1;y\right) \rightrightarrows 1$

2) $S_n\left(t;y\right) \rightrightarrows y$

3) $S_n\left(t^2;y\right) \rightrightarrows y^2$

gösterildiği zaman

$$S_n\left(g;y\right) \rightrightarrows g(y)$$

olduğu da ispatlanmış olacaktır. Bu koşulları sırasıyla gösterelim. Fakat bundan önce $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-ny}\frac{(ny)^k}{k!}$ ifadesinin 1'e eşit olduğunu gösterelim. Taylor seri açılımından

$$e^y = 1+y+\frac{y^2}{2!}+...+\frac{y^n}{n!}... = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{k!} \qquad (k=0,1,...n \in \mathbb{N}\,,\, n>k)$$

yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafı e^{-y} ile çarpıldığı zaman

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-y} \frac{y^k}{k!}$$

elde edilir ve buradan da

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ny} \frac{(ny)^k}{k!}$$

yazılabilir. Şimdi ise koşullar gösterilebilir.

1)

$$S_n(1;y) = \underbrace{e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ny)^k}{k!}}_{1} 1 = 1$$

yani

$$S_n(1;y) = 1 \tag{3.8}$$

2)

$$\begin{aligned} S_n(t;y) &= e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ny)^k}{k!} \frac{k}{n} \\ &= e^{-ny} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ny)^{k-1}}{k(k-1)!} ny \frac{k}{n}, (k \to k+1) \\ &= \underbrace{e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ny)^k}{k!}}_{1} y = y \end{aligned}$$

yani

$$S_n(t;y) = y \tag{3.9}$$

3)

$$
\begin{aligned}
S_n\left(t^2;y\right) &= e^{-ny}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ny)^k}{k!}\frac{k^2}{n^2} \qquad (k^2=k(k-1)+k)\\
&= e^{-ny}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ny)^k}{k!}\frac{k(k-1)+k}{n^2}\\
&= e^{-ny}\left[\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(ny)^{k-2}(ny)^2}{k(k-1)(k-2)!}\frac{k(k-1)}{n^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(ny)^{k-1}(ny)}{k(k-1)!}\frac{k}{n^2}\right]\\
&= e^{-ny}\left[\sum_{\substack{k=2\\ k\to k+2}}^{\infty}\frac{(ny)^{k-2}}{(k-2)!}y^2+\sum_{\substack{k=1\\ k\to k+1}}^{\infty}\frac{(ny)^{k-1}}{k!}\frac{y}{n}\right]\\
&= \frac{1}{n^2}\left[\underbrace{e^{-ny}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ny)^k}{k!}}_{1}(ny)^2+\underbrace{e^{-ny}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ny)^k}{k!}}_{1}(ny)\right]\\
&= \frac{1}{n^2}((ny)^2+ny)=y^2+\frac{y}{n}
\end{aligned}
$$

yani

$$S_n(t^2,y)=y^2+\frac{y}{n} \tag{3.10}$$

olur ki

$$S_n(t^2,y)=y^2 \quad , \quad (n\to\infty)$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.8), (3.9), (3.10) şartları gerçeklendiğinden dolayı Korovkin teoremi gereği $\forall g\in C[0,A]$ için $[0,A]$ aralığında

$$S_n(g;y)\rightrightarrows g(y) \quad , \quad (n\to\infty)$$

bulunur (Szasz, 1950).

Yaklaşımlar teorisinin önemli bir problemi de yaklaşım hızıdır. $g_n(y)$ lere sonsuz küçülen bir fonksiyon dizisi diyebilmek için ise $g_n(y)$ herhangi bir fonksiyon dizisi ve $\lim_{n\to\infty} g_n(y)=0$ olmalıdır.

Keyfi seçilen bir lineer pozitif operatör dizisi $L_n(g;y)$ olmak üzere

$$\|L_n(g;y) - g(y)\|_{C[s,m]} \to 0, \quad (n \to \infty)$$

olmasının $L_n(g;y)$ nin $g(y)$ ye düzgün yaklaştığı teorem 3.4 (P. P. Korovkin) de daha önce belirtilmişti (Szasz, 1950).

Tanım 3.4 (Yaklaşım Hızı) $\alpha_n \to 0$, $(n \to \infty)$ olmak üzere

$$|L_n(g;y) - g(y)| < c\alpha_n$$

olacak şekilde α_n ler L_n operatörü ve g fonksiyonuna bağlı olarak değişecektirler. Yaklaşımlar teorisinde yaklaşma hızı problemi olarak adlandırılan bu hesaplamayı yapmak için çeşitli araçlar kullanılır. Burada ise bu hız, süreklilik modülü yardımıyla hesaplanacaktır. Bu sebeple ilk olarak süreklilik modülü tanımı ve bu tanıma bağlı birkaç özellik ispatları ile birlikte gösterilecektir (Szasz, 1950).

Tanım 3.5 (Süreklilik modülü) $g \in C[a,b]$ olsun. $\forall \delta > 0$ için

$$W(g;\delta) = \sup_{\substack{y,t\in[a,b] \\ |t-y|\leq\delta}} |g(t) - g(y)| \tag{3.11}$$

(3.11) ile tanımlanan $W(f;\delta)$ gösterimine g fonksiyonu için **süreklilik modülü** tanımı denir. (Anastassiou ve Gal, 2000).

Teorem 3.6 $g \in C[a,b]$ olsun. $W(g;\delta)$, $\forall \delta > 0$ için aşağıdaki özellikleri sağlar.

1) $\delta > 0$ için $W(g;\delta)$ negatif olmayan bir fonksiyondur.

2) $\delta_1 \leq \delta_2 \Longrightarrow W(g;\delta_1) \leq W(g;\delta_2)$

3) $p \in \mathbb{N}$ için $W(g;p\delta) \leq pW(g;\delta)$

4) $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $W(g;\lambda\delta) \leq (\lambda+1)\, W(g;\delta)$

5) $\lim_{\delta\to\infty} W(g;\delta) = 0$

6) $|g(t) - g(y)| \leq W(g; |t - y|)$

7) $|g(t) - g(y)| \leq (1 + \frac{|t-y|}{\delta})W(f; \delta)$

İspat

1) Yukarıda verilen süreklilik modülü tanımından ispat açıktır.

2) $|t - y| \leq \delta_2$ bölgesinin $|t - y| \leq \delta_1$ bölgesinden daha büyük olduğu $\delta_1 \leq \delta_2$ için açıktır. Böylelikle büyüdükçe alınan supremum büyüyeceği için ispat tamamlanmış olur.

3) Süreklilik modülünün tanımı gereğince;

$$W(g; p\delta) = \sup_{\substack{y,t\in[a,b] \\ |t-y|\leq p\delta}} |g(t) - g(y)|$$

yazılabilmesi mümkündür. $|t - y| \leq p\delta \Longrightarrow y - p\delta \leq t \leq y + p\delta$ olup, $t = y + pu$ seçilerek $|u| \leq \delta$ ve

$$W(g; p\delta) = \sup_{\substack{y\in[a,b] \\ |u|\leq\delta}} |g(y + pu) - g(y)|$$

şekinde yazılabilir. Diğer bir taraftan

$$\sup_{\substack{y\in[a,b] \\ |u|\leq\delta}} |g(y + pu) - g(y)| = \sup_{\substack{y\in[a,b] \\ |u|\leq\delta}} \left| \sum_{k=0}^{p-1} [g(y + (k + 1)u) - u) - g(y + ku)] \right|$$

olur ki eşitliğin sağ tarafına üçgen eşitsizliği uygulanacak olursa;

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{y\in[a,b] \\ |u|\leq\delta}} |g(y + pu) - g(y)| &\leq \sum_{k=0}^{p-1} \sup_{\substack{y\in[a,b] \\ |u|\leq\delta}} |g(y + (k + 1)u) - u) - g(y + ku)| \\ &\leq W(g; \delta) + ... + W(g; \delta) \\ &\leq pW(g; \delta) \end{aligned}$$

elde edilir.

4) $\lambda \in \mathbb{R}^+$ sayısının tam kısmı $[|\lambda|]$ ile gösterilirse bu durumda

$$[|\lambda|] < \lambda < [|\lambda|] + 1$$

eşitsizliklerinin yerinde olduğu açıkça görülür. Şimdi ise bu eşitsizliklerden ve 2) özelliğinde edilen ispata göre $W(g;\delta)$ nın azalmayan fonksiyon olması da kullanılarak,

$$W(g;\lambda\delta) \leq W(g;([|\lambda|]+1)\delta) \tag{3.12}$$

eşitsizliğinin yazılması yanlış olmayacaktır. $[|\lambda|]$ pozitif bir tamsayı olduğundan (3.12) eşitsizliğinin sağ tarafına 3) özelliği uygulanırsa bu durumda

$$W(g;([|\lambda|]+1)\delta) \leq ([|\lambda|]+1)W(g;\delta)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}^+$ için $[|\lambda|]+1 < \lambda+1$ olduğu göz önüne alınırsa;

$$W(g;([|\lambda|]+1)\delta) \leq (\lambda+1)W(g;\delta)$$

eşitsizliği geçerli olur. Netice itibariyle;

$$W(g;\lambda\delta) \leq (\lambda+1)W(g;\delta)$$

yazılır ki bu da ispatı tamamlamak için yeterlidir.

5) $|t-y| \leq \delta$ eşitsizliğindeki δ nın sıfıra yaklaşması demek $t \to y$ olması demektir. f fonksiyonu sürekli olduğu için süreklilik tanımı gereğince $t \to y$ ise

$$|g(t)-g(y)| \to 0$$

olduğundan dolayı ispatı aşikardır.

6) $W(g;\delta)$ ifadesi için $\delta = |t-y|$ seçilirse,

$$W(g;|t-y|) = \sup_{y\in[a,b]} |g(t)-g(y)|$$

elde edilir. O halde $|g(t)-g(y)|$ lerin supremumu $W(g;|t-y|)$ olacağından ispat aşikardır.

7) (6). özelliğe göre

$$|g(t)-g(y)| \leq W\left(g;\frac{|t-y|}{\delta}\delta\right) \tag{3.13}$$

yazılabilir. (3.13) eşitsizliğinde (4). özellik kullanıldığında,

$$|g(t)-g(y)| \leq \left(\frac{|t-y|}{\delta}+1\right) W\left(g;\delta\right)$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlamak için yeterlidir. (Anastassiou ve Gal, 2000).

Teorem 3.7 Szasz operatörlerinin süreklilik modülüyle yaklaşma hızı $g \in C[0,A]$ ise

$$\left\|S_n\left(g;y\right)-g\left(y\right)\right\|_{C[0,A]} \leq \left(1+\sqrt{A}\right) W\left(g;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

olarak hesaplanır.

İspat Aşağıdaki ispat Popoviciu tekniği ile yapılan ispattır (Popoviciu, 1935).

$$S_n\left(g;y\right)=e^{-ny}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ny\right)^k}{k!}g\left(\frac{k}{n}\right)$$

olduğundan

$$S_n\left(g;1\right)=e^{-ny}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ny\right)^k}{k!}$$

dır. Dolayısıyla lineerlik özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\left|S_n\left(g;y\right)-g\left(y\right)\right| &= \left|e^{-ny}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ny\right)^k}{k!}g\left(\frac{k}{n}\right)-e^{-ny}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ny\right)^k}{k!}g\left(y\right)\right| \\ &= \left|e^{-ny}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ny\right)^k}{k!}\left(g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(y\right)\right)\right|\end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{(ny)^k}{k!} \geq 0$ ve $e^{-ny} \geq 0$ olduğu göz önüne alınıp üçgen eşitsizliği de kullanılacak olursa

$$|S_n(g;y) - g(y)| \leq e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ny)^k}{k!} \left| g\left(\frac{k}{n}\right) - g(y) \right| \tag{3.14}$$

elde edilir. Teorem (3.6) süreklilik modülünün (7). özelliğinde $t = \frac{k}{n}$ seçimiyle

$$\left| g\left(\frac{k}{n}\right) - g(y) \right| \leq \left[\frac{\left|\frac{k}{n} - y\right|}{\delta} + 1 \right] W(g;\delta)$$

yazılabilir. Yazılan ifade (3.14) de yerine yazıldığında ve lineer pozitif operatörlerin monotonluğu kullanıldığında

$$\begin{aligned} |S_n(g;y) - g(y)| &\leq e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ny)^k}{k!} \left[\frac{\left|\frac{k}{n} - y\right|}{\delta} + 1 \right] W(g;\delta) \\ &= e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ny)^k}{k!} \frac{\left|\frac{k}{n} - y\right|}{\delta} W(g;\delta) + e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ny)^k}{k!} W(g;\delta) \end{aligned}$$

bulunur. Yani

$$\begin{aligned} |S_n(g;y) - g(y)| &\leq W(g;\delta) \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{\delta} e^{-ny} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(ny)^k}{k!} \left|\frac{k}{n} - y\right| \\ + e^{-ny} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(ny)^k}{k!} \end{array} \right\} \\ &= W(g;\delta) \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{\delta} e^{-ny} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(ny)^k}{k!} \left|\frac{k}{n} - y\right| \\ + S_n(1;y) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. (3.14) ün bulunan bu ifadede kullanılmasıyla

$$|S_n(g;y) - g(y)| \leq W(g;\delta) \left\{ \frac{1}{\delta} e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ny)^k}{k!} \left| \frac{k}{n} - y \right| + 1 \right\} \tag{3.15}$$

bulunur. Bu İfade için

$$K = e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ny)^k}{k!} \left| \frac{k}{n} - y \right|$$

denilirse

$$\begin{aligned} K &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(ny)^k}{k!}e^{-ny}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{(ny)^k}{k!}e^{-ny}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\left|\frac{k}{n}-y\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(ny)^k}{k!}e^{-ny}\left|\frac{k}{n}-y\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{(ny)^k}{k!}e^{-ny}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

yazılabilir. Cauchy-Schwartz eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} K &\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ny)^k}{k!}e^{-ny}\left|\frac{k}{n}-y\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ny)^k}{k!}e^{-ny}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ny)^k}{k!}e^{-ny}\left|\frac{k}{n}-y\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\,S_n\left(1;y\right)\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

olur ki (3.15) ten

$$K \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ny)^k}{k!}e^{-ny}\left|\frac{k}{n}-y\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

bulunur. Bulunan bu ifade (3.15) ten bir önceki ifadede yerine yazılacak olursa

$$\left|S_n\left(g;y\right)-g\left(y\right)\right| \leq W\left(g;\delta\right)\left\{\frac{1}{\delta}\left(e^{-ny}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ny)^k}{k!}\left|\frac{k}{n}-y\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}+1\right\}$$

elde edilir. Diğer bir yandan

$$\left|\frac{k}{n}-y\right|^2 = \left(\frac{k^2}{n^2}-2y\frac{k}{n}+y^2\right)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \left|S_n\left(g;y\right)-g\left(y\right)\right| &\leq W\left(g;\delta\right)\left\{\frac{1}{\delta}\left(e^{-ny}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k^2}{n^2}-2y\frac{k}{n}+y^2\right)\frac{(ny)^k}{k!}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right\} \\ &= W\left(g;\delta\right)\left\{\frac{1}{\delta}\left(\begin{array}{c} e^{-ny}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{n^2}\frac{(ny)^k}{k!}-2ye^{-ny}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{(ny)^k}{k!} \\ +y^2e^{-ny}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(ny)^k}{k!} \end{array}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right\} \\ &= W\left(g;\delta\right)\left\{\frac{1}{\delta}\left[S_n\left(t^2;y\right)-2yS_n\left(t;y\right)+y^2S_n\left(1;y\right)\right]^{\frac{1}{2}}+1\right\} \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ifadede daha önce hesaplanan (3.14), (3.15) ifadelerinin kullanımı ile

$$\begin{aligned} |S_n(g;y) - g(y)| &\leq W(g;\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\left(y^2 + \frac{y}{n} - 2yy + y^2 1\right)^{\frac{1}{2}} + 1\right\} \\ &= W(g;\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\left(\frac{y}{n}\right)^{\frac{1}{2}} + 1\right\} \end{aligned}$$

bulunur. $y \in [0, A]$ olduğundan

$$\max\left\{y^{\frac{1}{2}}\right\} = \sqrt{A}$$

dır. O halde

$$\left\| |S_n(g;y) - g(y)| \right\|_{C[0,A]} \leq W(g;\delta)\left[\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{A}{n}} + 1\right]$$

elde edilir. $\delta = \sqrt{\frac{1}{n}}$ için

$$\left\| |S_n(g;y) - g(y)| \right\|_{C[0,A]} \leq \left(1 + \sqrt{A}\right) W\left(g; \sqrt{\frac{1}{n}}\right)$$

bulunur (Szasz, 1950).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Maksimum çarpım tipi Favard-Szasz-Mirakyan operatörleri yaklaşım özellikleri için iyi sonuçlar elde etmeye yardımcı olur. Bu bölümde Favard-Szasz-Mirakyan operatörlerinin doğrusal olmamasından ve parçalı rasyonel operatör olmasından bahsedilecektir.

Tanım 4.1 (Maksimum Çarpım Tipi Favard-Szasz-Mirakyan Operatörleri) Maksimum çarpım tipi Favard-Szasz-Mirakyan operatörleri $0 \leq \theta \leq \infty$ ve $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu sürekli olmak üzere

$$F_n^{(M)}(g)(\theta) = \frac{\bigvee\limits_{s=0}^{\infty} S_{n,s}(\theta)\, g\left(\frac{s}{n}\right)}{\bigvee\limits_{j=0}^{\infty} S_{n,j}(\theta)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

ve $S_{n,s}(\theta) = \frac{(n\theta)^s}{s!}$ şeklinde tanımlanır (Bede ve Gal, 2016).

Tanım 4.2 Her $j, s \in \{0, 1, 2, ...\}$ ve $\theta \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$ için

$$M_{s,n,j}(\theta) = \frac{S_{n,s}(\theta)\left|\frac{s}{n} - \theta\right|}{S_{n,j}(\theta)}, \; m_{s,n,j}(\theta) = \frac{S_{n,s}(\theta)}{S_{n,j}(\theta)}$$

burada $S_{n,s}(\theta) = \frac{(n\theta)^s}{s!}$ şeklinde tanımlanır (Bede ve Gal, 2016).

Tanım 4.3 Her $j, s \in \{0, 1, 2, ...\}$ ve $\theta \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$ için Eğer $s \geq j + 1$ olursa

$$M_{s,n,j}(\theta) = \frac{S_{n,s}(\theta)\left(\frac{s}{n} - \theta\right)}{S_{n,j}(\theta)}$$

Eğer $s \leq j - 1$ olursa

$$M_{s,n,j}(\theta) = \frac{S_{n,s}(\theta)\left(\theta - \frac{s}{n}\right)}{S_{n,j}(\theta)}$$

burada $S_{n,s}(\theta) = \frac{(a_n\theta)^s}{s!}$ olarak tanımlanır (Bede ve Gal, 2016).

Lemma 4.4 Her $j, s \in \{0, 1, 2, ...\}$ ve $\theta \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$ için

$$m_{s,n,j}(\theta) \leq 1$$

dir.

İspat İki durum vardır: $1) s \geq j$ ve $2) s \leq j$.

Şimdi bu durumları gösterelim.

1) $s \geq j$ olsun

$$\frac{m_{s,n,j}(\theta)}{m_{s+1,n,j}(\theta)} = \frac{s+1}{n}\frac{1}{\theta} \geq \frac{s+1}{n}\frac{n}{j+1} = \frac{s+1}{j+1} \geq 1$$

($w(\theta) = \frac{1}{\theta}$ fonksiyonu $\left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$ kapalı aralığında artmadığından)

$$m_{j,n,j}(\theta) \geq m_{j+1,n,j}(\theta) \geq m_{j+2,n,j}(\theta) \geq ...$$

olur.

2) $s \leq j$ olsun

$$\frac{m_{s,n,j}(\theta)}{m_{s-1,n,j}(\theta)} = \frac{n}{s}\theta \geq \frac{n}{s}\frac{j}{n} = \frac{j}{s} \geq 1$$

($t(\theta) = \frac{1}{\theta}$ fonksiyonu $\left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$ kapalı aralığında azalmadığından)

$$m_{j,n,j}(\theta) \geq m_{j-1,n,j}(\theta) \geq m_{j-2,n,j}(\theta) \geq ... \geq m_{0,n,j}(\theta)$$

elde edilir bu da $m_{j,n,j}(\theta) = 1$ olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur (Bede ve Gal, 2016).

Lemma 4.5 $\theta \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$ için iki durum vardır;
1) Eğer $s \in \{j+1, j+2, ...\}$ öyle ki $s - \sqrt{s+1} \geq j$ ise

$$M_{s,n,j}(\theta) \geq M_{s+1,n,j}(\theta)$$

2) Eğer $s \in \{1, 2, ..., j-1\}$ öyle ki $s + \sqrt{s} \leq j$ ise

$$M_{s,n,j}(\theta) \geq M_{s-1,n,j}(\theta).$$

İspat

1)

$$\frac{M_{s,n,j}(\theta)}{M_{s+1,n,j}(\theta)} = \frac{(s+1)}{n}\frac{1}{\theta}\frac{\left(\frac{s}{n}-\theta\right)}{\left(\frac{s+1}{n}-\theta\right)}$$

$t(\theta) = \frac{1}{\theta}\cdot\frac{\left(\frac{s}{n}-\theta\right)}{\left(\frac{s+1}{n}-\theta\right)}$ fonksiyonu $\theta \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$ için azalıyor olup,

$$t(\theta) \geq t\left(\frac{j+1}{n}\right) = \frac{n}{j+1}\frac{s-j-1}{s-j}$$

olur. Varsayımdaki $s - \sqrt{s+1} \geq j$ koşulundan

$$(s+1)(s-j-1) \geq (j+1)(s-j)$$

elde ederiz. Bu durumda

$$\frac{M_{s,n,j}(\theta)}{M_{s+1,n,j}(\theta)} \geq \frac{s+1}{n}\frac{n}{j+1}\frac{s-j-1}{s-j} \geq 1$$

bulunur.

2) Benzer şekilde

$$\frac{M_{s,n,j}(\theta)}{M_{s-1,n,j}(\theta)} = \frac{n}{s}\theta\frac{\left(\theta-\frac{s}{n}\right)}{\left(\theta-\frac{s-1}{n}\right)}$$

$w(\theta) = \theta\frac{\left(\theta-\frac{s}{n}\right)}{\left(\theta-\frac{s-1}{n}\right)}$ fonksiyonu $\forall\, \theta \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$ için artıyor olup

$$w(\theta) \geq w\left(\frac{j}{n}\right) = \frac{j}{n}\frac{j-k}{j-k+1}$$

olur. Sonra, $s+\sqrt{s}\leq j$ koşulundan,

$$j\left(j-s\right)\geq s\left(j-s+1\right)$$

elde ederiz ki

$$\frac{M_{s,n,j}\left(\theta\right)}{M_{s-1,n,j}\left(\theta\right)}\geq\frac{n}{s}\frac{j}{n}\frac{j-s}{j-s+1}\geq 1$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır (Bede ve Gal, 2016).

Lemma 4.6 Her $\theta\in\left[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}\right]$ ve $j=0,1,2,...$ için

$$\bigvee_{s=0}^{\infty}S_{n,s}(\theta)=S_{n,j}(\theta)$$

burada $S_{n,s}(\theta)=\frac{(n\theta)^s}{s!}$.

İspat İlk olarak sabit $n\in\mathbb{N}$, $0\leq s$ ve $\theta\in\left[0,\frac{s+1}{n}\right]$ için,

$$0\leq S_{n,s+1}(\theta)\leq S_{n,s}(\theta)$$

olduğunu gösterelim. Yukarıdaki eşitsizlik açıkça yazılırsa

$$0\leq\frac{(n\theta)^{s+1}}{(s+1)!}\leq\frac{(n\theta)^s}{s!}$$

$$0\leq\frac{a_n\theta}{s+1}\leq 1$$

$$0\leq\theta\leq\frac{s+1}{n}$$

elde edilir. $s=0,1,2...$ alarak yukarıda kanıtlanan eşitsizlikte,

$$\begin{aligned} S_{n,1}(\theta) &\leq S_{n,0}(\theta) \Longrightarrow \theta \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ S_{n,2}(\theta) &\leq S_{n,1}(\theta) \Longrightarrow \theta \in \left[0, \frac{2}{n}\right] \\ S_{n,3}(\theta) &\leq S_{n,2}(\theta) \Longrightarrow \theta \in \left[0, \frac{3}{n}\right] \\ &\vdots \\ S_{n,s+1}(\theta) &\leq S_{n,s}(\theta) \Longrightarrow \theta \in \left[0, \frac{s+1}{n}\right] \end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki eşitsizliklerden

$$\begin{aligned} \theta &\in \left[0, \frac{1}{n}\right] \; ise \; s = 0, 1, ... \text{ için } \; S_{n,s}(\theta) \leq S_{n,0}(\theta) \\ \theta &\in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \; ise \; s = 0, 1, ... \text{ için } \; S_{n,s}(\theta) \leq S_{n,1}(\theta) \\ \theta &\in \left[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right] \; ise \; s = 0, 1, ... \text{ için } S_{n,s}(\theta) \leq S_{n,2}(\theta) \\ &\vdots \\ \theta &\in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right] \; ise \; s = 0, 1, ... \text{ için } \; S_{n,s}(\theta) \leq S_{n,j}(\theta) \end{aligned}$$

olur ve böylece ispat tamamlanır (Bede ve Gal, 2016).

Teorem 4.7 $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}_0^+$ fonksiyonu verilsin. Verilen fonksiyon $[0, \infty)$ aralığında sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olsun.

$$\left| F_n^{(M)}(g)(\theta) - (g)(\theta) \right| \leq 8W_1\left(g : \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{n}}\right), \forall n \in \mathbb{N}, \theta \in [0, \infty)$$

burada

$$W_1(g : \delta) = \sup\{|g(\theta) - g(\gamma)| : \theta, \gamma \in [0, \infty), |\theta - \gamma| \leq \delta\}$$

süreklilik modülüdür.

İspat Maksimum çarpım tipi Favard-Szasz-Mirakyan operatörleri sonuç 2.2.3 deki koşulları yerine getirdiğinden

$$\left|F_n^{(M)}(g)(\theta)-(g)(\theta)\right| \leq \left(1+\frac{1}{\delta_n}F_n^{(M)}(\varphi_\theta)(\theta)\right) W_1(g,\delta_n) \tag{4.1}$$

ve $(\varphi_\theta)(t)=|t-\theta|$ yazılarak

$$E_n(\theta) := F_n^{(M)}(\varphi_\theta)(\theta) = \frac{\bigvee\limits_{s=0}^{\infty} \frac{(n\theta)^s}{s!}\left|\frac{s}{n}-\theta\right|}{\bigvee\limits_{s=0}^{\infty}\frac{(n\theta)^s}{s!}}, \theta\in[0,\infty)$$

elde edilir. Yukarıda yazılan eşitlikte $\theta \in \left[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}\right]$ ve $j\in\{0,1,2,...\}$ için

$$E_n(\theta)=\max_{s=0,1,...}\{M_{s,n,j}(\theta)\}, \theta\in\left[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}\right]$$

dir. $j=0$ için $E_n(\theta)\leq\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{n}}, \theta\in\left[0,\frac{1}{n}\right]$ için bu durumda

$$M_{s,n,0}(\theta)=\frac{(n\theta)^s}{s!}\left|\frac{s}{n}-\theta\right|, s\geq 0$$

eğer $s=0$ olursa

$$M_{0,n,0}(\theta)=\theta=\sqrt{\theta}\sqrt{\theta}\leq\sqrt{\theta}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

olur. Ayrıca herhangi bir $s\geq 1$ için $\frac{1}{n}\leq\frac{s}{n}$ ve

$$M_{s,n,0}(\theta)\leq\frac{(n\theta)^s}{s!}\frac{s}{n}=\sqrt{\theta}\frac{n^{s-1}\theta^{s-\frac{1}{2}}}{(s-1)!}\leq\sqrt{\theta}\frac{n^{s-1}}{(s-1)!n^{s-\frac{1}{2}}}\leq\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{n}}$$

yazılabilir. Her bir koşul için bir üst sınır elde edilmelidir. $M_{s,n,j}(\theta)$ için $j\in 1,2,...$ ve $\theta\in\left[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}\right]$ olduğunda $s=0,1,...$ için

$$M_{s,n,j}(\theta)\leq\frac{4\sqrt{\theta}}{\sqrt{n}} \text{ ve } \theta\in\left[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}\right], s=0,1,... \tag{4.2}$$

olduğu gösterilmelidir.

Buradan $E_n(\theta) \leq \frac{4\sqrt{\theta}}{\sqrt{n}}$ ve $\theta \in [0,\infty)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\delta_n = \frac{4\sqrt{\theta}}{\sqrt{n}}$ elde edilmiş olur. (4.1) ifadesindeki tahmin elde edilir. (4.2) nin ispatlanması için aşağıdaki durumlar gösterilmelidir.

İspat üç durumda gösterilecektir.

1) $s = j$

2) $s \geq j+1$

3) $s \leq j-1$

Durum 1) Eğer $s = j$ ise

$$M_{j,n,j}(\theta) = \left|\frac{j}{n} - \theta\right|, \theta \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$$

için $M_{j,n,j}(\theta) \leq \frac{1}{n}$ dir. $j \geq 1$ ve $\theta \geq \frac{1}{n}$ olduğu için buradan

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{\theta}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

bulunur.

Durum 2) a) $s - \sqrt{s+1} < j$ olsun.

$$\begin{aligned} M_{s,n,j}(\theta) &= m_{s,n,j}(\theta)\left(\frac{s}{n} - \theta\right) \leq \frac{s}{n} - \theta \leq \frac{s}{n} - \frac{j}{n} \\ &\leq \frac{s}{n} - \frac{s-\sqrt{s+1}}{n} = \frac{\sqrt{s+1}}{n} \end{aligned}$$

olur ki $s \leq 3j$ bulunur. Kabul edelim ki $s \leq 3j$ olsun. $g(\theta) = \theta - \sqrt{\theta+1}$ fonksiyonu artan olduğu için

$$j > s - \sqrt{s+1} \geq 3j - \sqrt{3j+1}$$

bulunur ki bu da bir çelişki teşkil eder. Yani sonuç olarak $j > 3j - \sqrt{3j+1}$ çelişkisini verir.

$$M_{s,n,j}(\theta) \leq \frac{\sqrt{s+1}}{n} \leq \frac{\sqrt{3j+1}}{n} \leq \frac{2\sqrt{j}}{n} \leq \frac{2\sqrt{\theta}}{\sqrt{n}}$$

için $\sqrt{\theta} \geq \frac{\sqrt{j}}{\sqrt{n}}$ olduğu göz önüne alınırsa netice itibariyle yukarıdaki eşitsizlik bulunur.

b) $s-\sqrt{s+1} \geq j$ olsun. $z(\theta) = \theta-\sqrt{\theta+1}$ fonksiyonu $[0,\infty)$ da azalmadığından $\bar{s} \in \{0,1,2,...\}$ için maksimum değerine sahiptir. Öyle ki $\bar{s} - \sqrt{\bar{s}+1} < j$ olur. Bu durumda, $s_1 - \sqrt{s_1+1} \geq j$ ve

$$\begin{aligned} M_{\bar{s}+1,n,j}(\theta) &= m_{\bar{s}+1,n,j}(\theta) \cdot \left(\frac{\bar{s}+1}{n} - \theta\right) \leq \frac{\bar{s}+1}{n} - \theta \\ &\leq \frac{\bar{s}+1}{n} - \frac{j}{n} \leq \frac{\bar{s}+1}{n} - \frac{\bar{s}-\sqrt{\bar{s}+1}}{n} \\ &= \frac{\sqrt{\bar{s}+1}+1}{n} \leq \frac{3\sqrt{\theta}}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

$s_1 = \bar{s}+1$ için bulunur. $\bar{s} - \sqrt{\bar{s}+1} < j$, $\bar{s} < 3j$ olmasını gerektirdiğinden son eşitsizlik elde edilir. Ek olarak z fonksiyonu azalmayan olduğundan $s_1 \geq j+1$ ve $g(j) < j$ vardır. Anlıyoruz ki;

$$M_{\bar{s}+1,n,j}(\theta) \geq M_{\bar{s}+2,n,j}(\theta) \geq ...$$

yani tüm $s \in \left\{\bar{s}+1, \bar{s}+2, ...\right\}$ için $M_{s,n,j}(\theta) \leq \frac{3\sqrt{\theta}}{\sqrt{n}}$ olur. Son olarak bu iki alt durumdan $M_{s,n,j}(\theta) \leq 3\sqrt{\frac{\theta}{n}}$ bulunur.

Durum 3) a) $s+\sqrt{s} \geq j$ olsun.

$$\begin{aligned} M_{s,n,j}(\theta) &\leq m_{s,n,j}(\theta)\left(\theta - \frac{s}{n}\right) \leq \frac{j+1}{n} - \frac{s}{n} \leq \frac{s+\sqrt{s}+1}{n} - \frac{s}{n} = \frac{\sqrt{s}+1}{n} \\ &\leq \frac{\sqrt{j-2}+1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{j-2}+1}{\sqrt{n}} \leq \frac{2\sqrt{\theta}}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

elde edilir ki bu durumda

$$\Longrightarrow \frac{\sqrt{j-2}+1}{\sqrt{n}} \leq \frac{2\sqrt{j}}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{\theta}$$

bulunur.

b) $s+\sqrt{s}\leq j$ olsun. $\bar{s}\in\{0,1,2,...\}$, $\bar{s}+\sqrt{\bar{s}}>j$ olacak şekilde minimum değer olsun. O halde $s_2=\bar{s}-1$ olduğunda $s_2+\sqrt{s_2}\leq j$ yazılır ve

$$\begin{aligned} M_{\bar{s}-1,n,j}(\theta) &= m_{\bar{s}-1,n,j}(\theta)\left(\theta-\frac{\bar{s}-1}{n}\right)\leq\frac{j+1}{n}-\frac{\bar{s}-1}{n} \\ &\leq \frac{\bar{s}+\sqrt{\bar{s}}+1}{n}-\frac{\bar{s}-1}{n}=\frac{\sqrt{\bar{s}}+2}{n}\leq\frac{4\sqrt{\theta}}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

dir. Son yazılan ifade için

$$\bar{s}-1=s_2\leq s_2+\sqrt{s_2}\leq j$$

eşitsizliği kullanılıp $\bar{s}\leq j+1$ ve $\sqrt{\bar{s}}+2\leq\sqrt{j+1}+2\leq 4\sqrt{j}$ ifadeleri bulunur. Ayrıca bu halde $j\geq 1$ olduğundan $s_2\leq j-2$ olur.

$$M_{\bar{s}-1,n,j}(\theta)\geq M_{\bar{s}-2,n,j}(\theta)\geq ...\geq M_{0,n,j}(\theta)$$

yazılır ki böylelikle herhangi bir $s\leq j-2$ ve $\forall\,\theta\in\left[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}\right]$ için

$$M_{s,n,j}(\theta)\leq 4\sqrt{\frac{\theta}{n}}$$

elde edilir. Son olarak bu iki alt durumdan

$$M_{s,n,j}(\theta)\leq 4\sqrt{\frac{\theta}{n}}$$

yazılır. Elde edilen bütün değerlerden

$$M_{s,n,j}(\theta)\leq 4\sqrt{\frac{\theta}{n}}\ ,\ \ \forall\theta\in\left[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}\right]\ ,\ \ s=0,1,2,...$$

olur ki bu da

$$E_n(\theta)\leq 4\sqrt{\frac{\theta}{n}},\ \forall\theta\in[0,\infty)\ ,\ n\in\mathbb{N}$$

eşitsizliğini verir. Eşitlik (4.1) de $\delta_n=4\sqrt{\frac{\theta}{n}}$ alınarak

$$\left|F_n^{(M)}(g)(\theta)-(g)(\theta)\right|\leq 8W_1\left(g,\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{n}}\right),\forall n\in\mathbb{N},\theta\in[0,\infty)$$

olur ve ispat tamamlanır (Bede ve Gal, 2016).

Tanım 4.8 Maksimum çarpım tipi genelleştirilmiş Favard-Szasz-Mirakyan operatörleri $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}_+$ fonksiyonu sürekli, $0\leq\theta\leq\infty$, (a_n) ve (b_n) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{b_n}{a_n}}=0$ olacak şekilde pozitif reel sayıların sınırsız ve artan birer dizisi olmak üzere

$$S_n^{(M)}(g)(\theta)=\frac{\bigvee_{s=0}^{\infty}c_{n,s}(\theta)\,f\left(\frac{sb_n}{a_n}\right)}{\bigvee_{j=0}^{\infty}c_{n,s}(\theta)},\ n\in\mathbb{N}$$

ve $c_{n,s}(\theta)=\frac{(a_n\theta)^s}{b_n^s s!}$ şeklinde tanımlanır (Güngör, 2018).

Sürekli ve sınırlı bir $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}_+$ fonksiyonu için $S_n^{(M)}(g)(\theta)$, $[0,\infty)$ aralığı üzerinde sürekli ve pozitiftir. Ayrıca $\forall\ n$ için $S_n^{(M)}(g)(0)-g(0)=0$ dır (Güngör, 2018).

Tanım 4.9 Her $j,s\in\{0,1,2,...\}$ ve $\theta\in\left[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}\right]$ için

$$M_{s,n,j}(\theta)=\frac{c_{n,s}(\theta)\left|\frac{sb_n}{a_n}-\theta\right|}{c_{n,j}(\theta)},\ m_{s,n,j}(\theta)=\frac{c_{n,s}(\theta)}{c_{n,j}(\theta)}$$

burada $c_{n,s}(\theta)=\frac{(a_n\theta)^s}{b_n^s s!}$ olarak tanımlanır (Güngör, 2018).

Tanım 4.10 Her $j,s\in\{0,1,2,...\}$ ve $\theta\in\left[\frac{jb_n}{na_n},\frac{(j+1)b_n}{a_n}\right]$ için Eğer $s\geq j+1$ ise

$$M_{s,n,j}(\theta)=\frac{c_{n,s}(\theta)\left(\frac{sb_n}{a_n}-\theta\right)}{c_{n,j}(\theta)}$$

Eğer $s\leq j-1$ ise

$$M_{s,n,j}(\theta)=\frac{S_{n,s}(\theta)\left(\theta-\frac{s}{n}\right)}{S_{n,j}(\theta)}$$

burada $c_{n,s}(\theta)=\frac{(a_n\theta)^s}{b_n^s s!}$ olarak tanımlanır (Güngör, 2018).

Lemma 4.11 Her $j,s\in\{0,1,2,...\}$ ve $\theta\in\left[\frac{jb_n}{na_n},\frac{(j+1)b_n}{a_n}\right]$ için

$$m_{s,n,j}(\theta) \leq 1$$

dir (Güngör, 2018).

Lemma 4.12 $\theta \in \left[\frac{jb_n}{na_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}\right]$ için iki durum vardır; 1)Eğer $s \in \{j+1, j+2, ...\}$ öyle ki $s - \sqrt{s+1} \geq j$ ise

$$M_{s,n,j}(\theta) \geq M_{s+1,n,j}(\theta)$$

2) Eğer $s \in \{1, 2, ..., j-1\}$ öyle ki $s + \sqrt{s} \leq j$ ise

$$M_{s,n,j}(\theta) \geq M_{s-1,n,j}(\theta).$$

(Güngör, 2018).

Lemma 4.13 Her $\theta \in \left[\frac{jb_n}{na_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}\right]$ ve $j = 0, 1, 2, ...$ için

$$\bigvee_{k=0}^{\infty} c_{n,s}(\theta) = c_{n,j}(\theta)$$

burada $c_{n,s}(\theta) = \frac{(a_n\theta)^s}{b_n^s s!}$ (Güngör, 2018).

Teorem 4.14 $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}_0^+$ fonksiyonu verilsin. Verilen fonksiyon $[0, \infty)$ aralığında düzgün sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olsun. $S_n^{(M)}(g)(\theta)$ maksimum çarpım tipi genelleştirilmiş Szasz operatörleri olmak üzere

$$\left|S_n^{(M)}(g)(\theta) - (g)(\theta)\right| \leq 8W_1\left(g : \sqrt{\frac{\theta b_n}{a_n}}\right), \forall n \in \mathbb{N}, \theta \in [0, \infty)$$

olur. Burada

$$W_1(g : \delta) = \sup\{|g(\theta) - g(\beta)| : \theta, \beta \in [0, \infty), |\theta - \beta| \leq \delta\}$$

süreklilik modülüdür (Güngör, 2018).

Tanım 4.15 $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}_+$ sürekli bir fonksiyon $0 \leq \theta < \infty$, $r > 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+r} = 0$ olacak biçimde pozitif reel sayıların artan ve sınırsız birer dizisi olmak üzere maksimum çarpım tipi modifiye Favard-Szasz-Mirakyan operatörleri

$$S_n^{(M)*}(g)(\theta) = \frac{\bigvee_{s=0}^{\infty} S_{n,s}(\theta) g\left(\frac{s}{n+r}\right)}{\bigvee_{k=0}^{\infty} S_{n,s}(\theta)}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $S_{n,s}(\theta) = \frac{(n\theta)^s}{s!}$ dir.

Sürekli ve sınırlı bir $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu için $S_n^{(M)*}(g)(\theta)$, $[0,\infty)$ aralığı üzerinde sürekli ve pozitiftir. Ayrıca $\forall\ n$ için $S_n^{(M)*}(g)(0) - g(0) = 0$ dır (Serenbay ve Baruğ, 2021).

Tanım 4.16 Her bir $j, s \in \{0,1,2,...\}$ ve $\theta \in \left[\frac{j}{n+r}, \frac{j+1}{n+r}\right]$ için

$$M_{s,n,j}(\theta) = \frac{S_{n,s}(\theta)\left|\frac{s}{n+r} - \theta\right|}{S_{n,j}(\theta)} \quad , \quad m_{s,n,j}(\theta) = \frac{S_{n,s}(\theta)}{S_{n,j}(\theta)}$$

olarak tanımlanır. Burada $S_{n,s}(\theta) = \frac{(n\theta)^s}{s!}$ dir (Serenbay ve Baruğ, 2021).

Tanım 4.17 Her $j, s \in \{0,1,2,...\}$ ve $\theta \in \left[\frac{j}{n+r}, \frac{j+1}{n+r}\right]$ için Eğer $s \geq j+1$ ise

$$M_{s,n,j}(\theta) = \frac{S_{n,s}(\theta)\left(\frac{s}{n+r} - \theta\right)}{S_{n,j}(\theta)}$$

Eğer $s \leq j-1$ ise

$$M_{s,n,j}(\theta) = \frac{S_{n,s}(\theta)\left(\theta - \frac{s}{n+r}\right)}{S_{n,j}(\theta)}$$

olarak tanımlanır. Burada $S_{n,s}(\theta) = \frac{(n\theta)^s}{s!}$ dir (Serenbay ve Baruğ, 2021).

Lemma 4.18 Her $j, s \in \{0,1,2,...\}$ ve $\theta \in \left[\frac{j}{n+r}, \frac{j+1}{n+r}\right]$ için

$$m_{s,n,j}(\theta) \leq 1$$

dir (Serenbay ve Baruğ, 2021).

Lemma 4.19 $\theta \in \left[\frac{j}{n+r}, \frac{j+1}{n+r}\right]$ için incelenmesi gereken iki durum vardır. 1) Eğer $s - \sqrt{s+1} \geq j$ olacak şekilde $s \in \{j+1, j+2, ...\}$ ise

$$M_{s,n,j}(\theta) \geq M_{s+1,n,j}(\theta)$$

2) Eğer $s + \sqrt{s} \leq j$ olacak şekilde $s \in \{1, 2, ..., j-1\}$ ise

$$M_{s,n,j}(\theta) \geq M_{s-1,n,j}(\theta).$$

(Serenbay ve Baruğ, 2021).

Lemma 4.20 Her $\theta \in \left[\frac{j}{n+r}, \frac{j+1}{n+r}\right]$ ve $j = 0, 1, ...$ için

$$\bigvee_{s=0}^{\infty} S_{n,s}(\theta) = S_{n,j}(\theta)$$

dir. Burada $S_{n,s}(\theta) = \frac{(n\theta)^s}{s!}$ dir (Serenbay ve Baruğ, 2021).

Teorem 4.21 $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}_0^+$ fonksiyonu sınırlı ve düzgün sürekli bir fonksiyondur ve $S_n^{(M)*}(g)(\theta)$ maksimum çarpım tipi modifiye Favard-Szasz-Mirakyan operatörleri olmak üzere

$$\left|S_n^{(M)*}(g)(\theta) - (g)(\theta)\right| \leq 8W_1\left(g : \sqrt{\frac{\theta}{n+r}}\right),\ \theta \in [0, \infty), \forall n \in \mathbb{N}$$

sağlanır. Burada

$$W_1(g : \delta) = \sup\{|g(\theta) - g(\beta)| : \theta, \beta \in [0, \infty), |\theta - \beta| \leq \delta\}$$

süreklilik modülüdür (Serenbay ve Baruğ, 2021).

Tanım 4.22 $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}_+$ sürekli bir fonksiyon ve $0 \leq \theta < \infty, r > 0; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{r+b_n} = 0$ maksimum çarpım tipi modifiye Favard-Szasz-Mirakyan operatörleri, artan ve sınırsız sayıda pozitif reel sayısı için

$$S_n^{*(M)}(g)(\theta) = \frac{\bigvee\limits_{s=0}^{\infty} S_{n,s}(\theta) g\left(\frac{s}{r+b_n}\right)}{\bigvee\limits_{s=0}^{\infty} S_{n,s}(\theta)}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $S_{n,s}(\theta) = e^{-a_n\theta}\frac{(a_n\theta)^s}{s!}$ dir.

Sürekli ve sınırlı fonksiyonlar için $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}_+$, $S_n^{*(M)}(g)(\theta)$ pozitif ve $[0,\infty)$ aralığı boyunca süreklidir her n için $S_n^{*(M)}(g)(0) - g(0) = 0$ dır. $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}_+$ sürekli fonksiyonlar ve

$$S_n^{*(M)}(g) : CB_+([0,\infty)) \to CB_+([0,\infty))$$

dır.

Tanım 4.23 Her $j, s \in \{0,1,2,...\}$ ve $\theta \in \left[\frac{j}{r+b_n}, \frac{j+1}{r+b_n}\right]$ için

$$M_{s,n,j}(\theta) = \frac{S_{n,s}(\theta)\left|\frac{s}{r+b_n} - \theta\right|}{S_{n,j}(\theta)} \quad , \quad m_{s,n,j}(\theta) = \frac{S_{n,s}(\theta)}{S_{n,j}(\theta)}$$

olarak tanımlanır. Bu kısımda $S_{n,s}(\theta) = e^{-a_n\theta}\frac{(a_n\theta)^s}{s!}$ dir.

Tanım 4.24 Her $j, s \in \{0,1,2,...\}$ ve $\theta \in \left[\frac{j}{r+b_n}, \frac{j+1}{r+b_n}\right]$ için Eğer $s \geq j+1$ ise

$$M_{s,n,j}(\theta) = \frac{S_{n,s}(\theta)\left(\frac{s}{r+b_n} - \theta\right)}{S_{n,j}(\theta)}$$

Eğer $s \leq j-1$ ise

$$M_{s,n,j}(\theta) = \frac{S_{n,s}(\theta)\left(\theta - \frac{s}{r+b_n}\right)}{S_{n,j}(\theta)}$$

şeklinde tanımlanır. Bu kısımda $S_{n,s}(\theta) = e^{-a_n\theta}\frac{(a_n\theta)^s}{s!}$ dır.

Lemma 4.25 Her $j, s \in \{0,1,2,...\}$ ve $\theta \in \left[\frac{j}{r+b_n}, \frac{j+1}{r+b_n}\right]$ için

$$m_{s,n,j}(\theta) \leq 1$$

dir.

İspat İki durum vardır. $s \geq j$ ve $s \leq j$.

1) $s \geq j$ olsun. $h(\theta) = \frac{1}{\theta}$ fonksiyonu $\left[\frac{j}{r+b_n}, \frac{j+1}{r+b_n}\right]$ aralığında artmadığından

$$\frac{m_{s,n,j}(\theta)}{m_{s+1,n,j}(\theta)} = \frac{S_{n,s}(\theta)}{S_{n,s+1}(\theta)} = \frac{s+1}{a_n}\frac{1}{\theta} \geq \frac{s+1}{a_n}\frac{r+b_n}{j+1} = \left(\frac{r+b_n}{a_n}\right)\frac{s+1}{j+1} \geq 1$$

$$m_{j,n,j}(\theta) \geq m_{j+1,n,j}(\theta) \geq m_{j+2,n,j}(\theta) \geq ...$$

elde edilir.

2) $s \leq j$ olsun. $t(\theta) = \theta$ fonksiyonu $\left[\frac{j}{r+b_n}, \frac{j+1}{r+b_n}\right]$ aralığında azalmadığından

$$\frac{m_{s,n,j}(\theta)}{m_{s-1,n,j}(\theta)} = \frac{S_{n,s}(\theta)}{S_{n,s-1}(\theta)} = \frac{a_n}{s}\theta \geq \frac{a_n}{s}\frac{j}{r+b_n} = \left(\frac{a_n}{r+b_n}\right)\frac{j}{s} \geq 1$$

$$m_{j,n,j}(\theta) \geq m_{j-1,n,j}(\theta) \geq m_{j-2,n,j}(\theta) \geq ... \geq m_{0,n,j}(\theta)$$

elde edilir. Böylece $m_{j,n,j}(\theta) = 1$ olduğundan ispat tamamlanır.

Lemma 4.26 $\theta \in \left[\frac{j}{r+b_n}, \frac{j+1}{r+b_n}\right]$ için incelenmesi gereken iki durum vardır. 1) Eğer $s \in \{j+1, j+2, ...\}$ öyle ki $s - \sqrt{s+1} \geq j$ için

$$M_{s,n,j}(\theta) \geq M_{s+1,n,j}(\theta)$$

2) Eğer $s \in \{1, 2, ..., j-1\}$ öyle ki $s + \sqrt{s} \leq j$ için

$$M_{s,n,j}(\theta) \geq M_{s-1,n,j}(\theta).$$

İspat

$$\frac{m_{s,n,j}(\theta)}{m_{s+1,n,j}(\theta)} = \frac{(s+1)}{a_n}\frac{1}{\theta}\frac{\left(\frac{s}{r+b_n}-\theta\right)}{\left(\frac{s+1}{r+b_n}-\theta\right)}$$

oranı için

$$\Psi_{n,s}(\theta) = \frac{1}{\theta}\frac{\left(\frac{s}{r+b_n}-\theta\right)}{\left(\frac{s+1}{r+b_n}-\theta\right)}$$

fonksiyonu tüm $\theta \in \left[\frac{j}{r+b_n}, \frac{j+1}{r+b_n}\right]$ için azalıyor olduğundan,

$$\Psi_{n,s}(\theta) \geq \Psi_{n,s}\left(\frac{j+1}{r+b_n}\right) = \frac{r+b_n}{j+1}\frac{s-j-1}{s-j}$$

olur ki lemmada verilen $s-\sqrt{s+1} \geq j$ koşulundan

$$(s+1)(s-j-1) \geq (j+1)(s-j)$$

olması gerekir. O halde

$$\frac{m_{s,n,j}(\theta)}{m_{s+1,n,j}(\theta)} \geq \frac{r+b_n}{a_n}\frac{s+1}{j+1}\frac{s-j-1}{s-j} \geq 1$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\frac{m_{s,n,j}(\theta)}{m_{s-1,n,j}(\theta)} = \frac{a_n}{s}\theta\frac{\left(\theta-\frac{s}{r+b_n}\right)}{\left(\theta-\frac{s-1}{r+b_n}\right)}$$

oranı için

$$\phi_{n,s}(\theta) = \theta\frac{\left(\theta-\frac{s}{r+b_n}\right)}{\left(\theta-\frac{s-1}{r+b_n}\right)}$$

fonksiyonu tüm $\theta \in \left[\frac{j}{r+b_n}, \frac{j+1}{r+b_n}\right]$ için arttığından,

$$\phi_{n,s}(\theta) \geq \phi_{n,s}\left(\frac{j}{r+b_n}\right) = \frac{j}{r+b_n}\frac{j-s}{j-s+1}$$

olur ki lemmada verilen $s+\sqrt{s} \leq j$ koşulu,

$$j\left(j-s\right)\geq s\left(j-s+1\right)$$

olmasını gerektirdiğinden

$$\frac{m_{s,n,j}\left(\theta\right)}{m_{s-1,n,j}\left(\theta\right)}\geq\frac{a_n}{r+b_n}\frac{j}{s}\frac{j-s}{j-s+1}\geq 1$$

ispat tamamlanır.

Lemma 4.27 Her $\theta\in\left[\frac{j}{r+b_n},\frac{j+1}{r+b_n}\right]$ ve $j=0,1,2,...$ için

$$\bigvee_{s=0}^{\infty}S_{n,s}(\theta)=S_{n,j}(\theta)$$

dir ve $S_{n,s}(\theta)=e^{-a_n\theta}\frac{(a_n\theta)^s}{s!}$.

İspat İlk olarak sabit $n\in\mathbb{N}$ ve $0\leq s$ için,

$$0\leq S_{n,s+1}(\theta)\leq S_{n,s}(\theta)$$

ancak ve ancak $\theta\in\left[0,\frac{s+1}{r+b_n}\right]$ olduğunu gösterelim. Yukarıdaki eşitsizlik açıkça yazılırsa,

$$0\leq e^{-a_n\theta}\frac{(a_n\theta)^{s+1}}{(s+1)!}\leq e^{-a_n\theta}\frac{(a_n\theta)^s}{s!}$$

$$0\leq\frac{a_n\theta}{s+1}\leq 1$$

olur ki

$$0\leq\theta\leq\frac{s+1}{r+b_n}\leq\frac{s+1}{a_n}$$

$$0\leq\theta\leq\frac{s+1}{r+b_n}$$

seçmek lazım. $s=0,1,2...$ alarak yukarıda kanıtlanan eşitsizlikte ,

$$\begin{aligned}
S_{n,1}(\theta) &\leq S_{n,0}(\theta) \Longrightarrow \theta \in \left[0, \frac{1}{r+b_n}\right] \\
S_{n,2}(\theta) &\leq S_{n,1}(\theta) \Longrightarrow \theta \in \left[0, \frac{2}{r+b_n}\right] \\
S_{n,3}(\theta) &\leq S_{n,2}(\theta) \Longrightarrow \theta \in \left[0, \frac{3}{r+b_n}\right] \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
S_{n,s+1}(\theta) &\leq S_{n,s}(\theta) \Longrightarrow \theta \in \left[0, \frac{s+1}{r+b_n}\right]
\end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki eşitsizliklerden elde edilir ki;

$$\begin{aligned}
\theta &\in \left[0, \frac{1}{r+b_n}\right] \; ise \; s = 0,1,2,... \text{ için } S_{n,s}(\theta) \leq S_{n,0}(\theta) \\
\theta &\in \left[\frac{1}{r+b_n}, \frac{2}{r+b_n}\right] \; ise \; s = 0,1,2,... \text{ için } S_{n,s}(\theta) \leq S_{n,1}(\theta) \\
\theta &\in \left[\frac{2}{r+b_n}, \frac{3}{r+b_n}\right] \; ise \; s = 0,1,2,... \text{ için } S_{n,s}(\theta) \leq S_{n,2}(\theta) \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
\theta &\in \left[\frac{j}{r+b_n}, \frac{j+1}{r+b_n}\right] \; ise \; s = 0,1,2,... \text{ için } S_{n,s}(\theta) \leq S_{n,j}(\theta)
\end{aligned}$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Bir $g \in CB_+(I)$ fonksiyonunun yaklaşıklık derecesini tahmin etmede lineer olmayan operatörler için verilen Shisha-Mond teoremi kullanılır (Bede, Coroıanu ve Gal, 2010).

Teorem 4.28 $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}_0^+$ fonksiyonu sınırlı ve düzgün sürekli bir fonksiyondur ve $S_n^{*(M)}(g)(\theta)$ maksimum çarpım tipi modifiye Favard-Szasz-Mirakyan operatörleri için aşağıdaki noktasal tahmin geçerlidir

$$\left|S_n^{*(M)}(g)(\theta)-(g)(\theta)\right| \leq 8W_1\left(g:\sqrt{\frac{\theta}{r+b_n}}\right),\ \theta\in[0,\infty),\forall n\in\mathbb{N}$$

sağlanır. Burada

$$W_1(g:\delta)=\sup\{|g(\theta)-g(\beta)|:\theta,\beta\in[0,\infty),|\theta-\beta|\leq\delta\}$$

süreklilik modülüdür.

İspat $S_n^{*(M)}(e_0)(\theta) = 1$ ve Favard-Szasz-Mirakyan operatörleri hipotezleri sağladığı için

$$\left|S_n^{(M)}(g)(\theta)-(g)(\theta)\right| \leq \left(1+\frac{1}{\delta_n}\delta_n^{*(M)}\varphi_\theta(\theta)\right)W_1(f,\delta_n) \tag{4.3}$$

ve $(\varphi_\theta)(t)=|t-\theta|$. Dolayısıyla sonraki terimi tahmin etmek yeterlidir.

$$E_n(\theta):=S_n^{(M)}(\varphi_\theta)(\theta)=\frac{\bigvee\limits_{s=0}^{\infty}\frac{(n\theta)^s}{s!}\left|\frac{s}{r+b_n}-\theta\right|}{\bigvee\limits_{s=0}^{\infty}\frac{(n\theta)^s}{s!}},\theta\in[0,\infty)$$

$\theta\in\left[\frac{j}{r+b_n},\frac{j+1}{r+b_n}\right]$ ve $j\in\{0,1,2,...\}$ keyfi olarak alınırsa

$$E_n(\theta)=\max_{s=0,1,...}\left\{M_{s,n,j}(\theta),\theta\in\left[\frac{j}{r+b_n},\frac{j+1}{r+b_n}\right]\right\}$$

dir. $j=0$ için

$$M_{s,n,0}(\theta)=e^{-a_n\theta}\frac{(a_n\theta)s}{s!}\left|\frac{s}{r+b_n}-\theta\right|,s\geq 0$$

eğer $s=0$ olursa

$$M_{0,n,0}(\theta)=e^{-a_n\theta}\theta=e^{-a_n\theta}\sqrt{\theta}\sqrt{\theta}\leq\sqrt{\theta}\frac{1}{\sqrt{b_n}}$$

olur ve her $s\geq 1$ için

$$M_{s,n,0}(\theta)\leq e^{-a_n\theta}\frac{(a_n\theta)^s}{s!}\frac{s}{r+b_n}=e^{-a_n\theta}\frac{(a_n)^s\sqrt{\theta}\theta^{s-\frac{1}{2}}}{(s-1)!(r+b_n)}$$

dir. Eğer $\theta \in \left[\frac{j}{r+b_n}, \frac{j+1}{r+b_n}\right]$ ise

$$\theta^{s-\frac{1}{2}} < \left(\frac{j+1}{r+b_n}\right)^{s-\frac{1}{2}}$$

(burada $j = 0$ alınırsa)

$$\theta^{s-\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{r+b_n}\right)^{s-\frac{1}{2}}$$

olur ki

$$M_{s,n,0}(\theta) \leq \sqrt{\theta}\left(\frac{n}{r+b_n}\right)^{s-\frac{1}{2}} \frac{1}{(s+1)!}\frac{1}{\sqrt{r+b_n}}$$

$$M_{s,n,0}(\theta) \leq \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{r+b_n}} \leq \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{r}}$$

yazılabilir. $\theta \in \left[\frac{j}{r+b_n}, \frac{j+1}{r+b_n}\right]$ için $M_{s,n,j}(\theta) \leq \frac{4\sqrt{\theta}}{\sqrt{b_n}}$ $(s = 0, 1, 2, ...)$ $E_n(\theta) \leq \frac{4\sqrt{\theta}}{\sqrt{b_n}}$ ve $\delta_n = \frac{4\sqrt{\theta}}{\sqrt{b_n}}$, $\theta \in [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$ her biri için gösterilmelidir. Üç durumda gösterilecektir.

1) $s = j$

2) $s \geq j + 1$

3) $s \leq j - 1$

Durum 1) Eğer $s = j$ ise

$$M_{j,n,j}(\theta) = \left|\frac{j}{r+b_n} - \theta\right|$$

dir. $\theta \in \left[\frac{j}{r+b_n}, \frac{j+1}{r+b_n}\right]$, $M_{j,n,j}(\theta) \leq \frac{1}{r+b_n}$, $j \geq 1$ ve $\theta \geq \frac{1}{r+b_n}$ olduğu için buradan

$$\frac{1}{r+b_n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r+b_n}}}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r+b_n}}} \leq \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\frac{1}{r+b_n}}}$$

bulunur.

Durum 2) **a)** $s-\sqrt{s+1}<j$ olsun

$$\begin{aligned} M_{s,n,j}(\theta) &= m_{s,n,j}(\theta)\left(\frac{s}{r+b_n}-\theta\right) \leq \frac{s}{r+b_n}-x \leq \frac{s}{r+b_n}-\frac{j}{r+b_n} \\ &\leq \frac{s}{r+b_n}-\frac{s-\sqrt{s+1}}{r+b_n}=\frac{\sqrt{s+1}}{r+b_n} \end{aligned}$$

bu durumdan $s \leq 3j$ olur. Bu durum bir çelişki ile bulunacaktır. $o(\theta)=\theta-\sqrt{\theta+1}$ fonksiyonu azalmaz ve

$$j > s-\sqrt{s+1} \geq 3j-\sqrt{3j+1}$$

yazılabilir. Bu sonuç olarak $j > 3j-\sqrt{3j+1}$ çelişkisini verir.

$$M_{s,n,j}(x) \leq \frac{\sqrt{s+1}}{r+b_n} \leq \frac{\sqrt{3j+1}}{r+b_n} \leq \frac{2\sqrt{j}}{r+b_n} \leq \frac{2\sqrt{\theta}}{r+b_n}$$

elde edilir çünkü $\sqrt{\theta} \geq \frac{\sqrt{j}}{\sqrt{r+b_n}}$ dir.

b) $s-\sqrt{s+1} \geq j$ olsun. $o(\theta)=\theta-\sqrt{\theta+1}$ fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında azalmadığından $\bar{s} \in \{0,1,2,...\}$ maksimum değerine sahiptir. Öyle ki $\bar{s}-\sqrt{\bar{s}+1}<j$. Bu durumda, $s_1-\sqrt{s_1+1} \geq j$ ve

$$\begin{aligned} M_{\bar{s}+1,n,j}(\theta) &= m_{\bar{s}+1,n,j}(\theta)\left(\frac{\left(\bar{s}+1\right)}{r+b_n}-\theta\right) \leq \frac{\bar{s}+1}{r+b_n}-\theta \\ &\leq \frac{\bar{s}+1}{r+b_n}-\frac{j}{r+b_n} \leq \frac{\bar{s}+1}{r+b_n}-\frac{\bar{s}-\sqrt{\bar{s}+1}}{r+b_n} \\ &= \frac{\sqrt{\bar{s}+1}+1}{r+b_n} \leq \frac{3\sqrt{\theta}}{\sqrt{r+b_n}} \leq \frac{3\sqrt{\theta}}{\sqrt{b_n}} \end{aligned}$$

$s_1=\bar{s}+1$ için bulunur. $\bar{s}-\sqrt{\bar{s}+1}<j$ olması $\bar{s}<3j$ olmasını gerektirdiğinden son eşitsizlik elde edilir. Ek olarak o fonksiyonu azalmayan olduğundan $s_1 \geq j+1$ ve $o(j)<j$ vardır. Anlaşılıyor ki

$$M_{\bar{s}+1,n,j}(\theta) \geq M_{\bar{s}+2,n,j}(\theta) \geq ...$$

yani $\forall\ s\ \in\ \left\{\bar{s}+1, \bar{s}+2, ...\right\}$ için $M_{s,n,j}(\theta)\ \leq\ \frac{3\sqrt{\theta}}{\sqrt{r+b_n}}$ olur. Sonuç olarak bu iki alt ifadeden $M_{s,n,j}(\theta) \leq 3\sqrt{\frac{\theta}{r+b_n}}$ bulunur.

Durum 3) a) $s+\sqrt{s} \geq j$ olsun.

$$\begin{aligned} M_{s,n,j}(\theta) &\leq m_{s,n,j}(\theta)\left(\theta - \frac{s}{r+b_n}\right) \leq \frac{j+1}{r+b_n} - \frac{s}{r+b_n} \\ &\leq \frac{s+\sqrt{s}+1}{r+b_n} - \frac{s}{r+b_n} = \frac{\sqrt{s}+1}{r+b_n} \\ &\leq \frac{\sqrt{j-2}+1}{r+b_n} = \frac{1}{\sqrt{r+b_n}}\frac{\sqrt{j-2}+1}{\sqrt{r+b_n}} \\ &\leq \frac{2\sqrt{\theta}}{\sqrt{r+b_n}} \leq \frac{2\sqrt{\theta}}{\sqrt{b_n}} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \frac{\sqrt{j-2}+1}{\sqrt{r+b_n}} \leq \frac{2\sqrt{j}}{\sqrt{r+b_n}} \leq 2\sqrt{\theta}.$$

b) $s+\sqrt{s} \leq j$ ve $s \in \{0,1,2,...\}$, $\bar{s}+\sqrt{\bar{s}} > j$ olacak şekilde minimum değer olsun. Bu durumda $s_2 = \bar{s}-1$ olduğunda $s_2+\sqrt{s_2} \leq j$ yazılır;

$$\begin{aligned} M_{\bar{s}-1,n,j}(\theta) &= m_{\bar{s}-1,n,j}(\theta)\left(\theta - \frac{\bar{s}-1}{r+b_n}\right) \leq \frac{j+1}{r+b_n} - \frac{\bar{s}-1}{r+b_n} \\ &\leq \frac{\bar{s}+\sqrt{\bar{s}}+1}{r+b_n} - \frac{\bar{s}-1}{r+b_n} = \frac{\sqrt{\bar{s}}+2}{r+b_n} \leq \frac{4\sqrt{\theta}}{\sqrt{r+b_n}} \\ &\leq \frac{4\sqrt{\theta}}{\sqrt{b_n}} \end{aligned}$$

olur ki yazılan son ifade için

$$\bar{s}-1 = s_2 \leq s_2+\sqrt{s_2} \leq j$$

bağıntısı kullanılıp $\bar{s} \leq j+1$ ve $\sqrt{\bar{s}}+2 \leq \sqrt{j+1}+2 \leq 4\sqrt{j}$ ifadeleri yazılabilir. Ayrıca bu halde $j \geq 1$ olduğundan $s_2 \leq j-2$ olur. Buradan

$$M_{\bar{s}-1,n,j}(\theta) \geq M_{\bar{s}-2,n,j}(\theta) \geq ... \geq M_{0,n,j}(\theta)$$

yazılır. Böylece herhangi bir $s \leq j-1$ ve $\forall\, \theta \in \left[\frac{j}{r+b_n}, \frac{j+1}{r+b_n}\right]$ için

$$M_{s,n,j}\left(\theta\right) \leq 4\sqrt{\frac{\theta}{r+b_n}}$$

bulunur. Bu iki alt ifadeden

$$M_{s,n,j}\left(\theta\right) \leq 4\sqrt{\frac{\theta}{r+b_n}}$$

bulunur. Bulunan bütün değerlerden

$$M_{s,n,j}\left(\theta\right) \leq 4\sqrt{\frac{\theta}{r+b_n}},\ \forall\theta \in \left[\frac{j}{r+b_n}, \frac{j+1}{r+b_n}\right]\ \ ,\ s=0,1,2,...$$

olur ki bu da

$$E_n\left(\theta\right) \leq 4\sqrt{\frac{\theta}{r+b_n}}\ ,\ \forall\theta \in [0,\infty),\ n \in \mathbb{N}$$

eşitsizliğini verir. (4.3) eşitliğinde $\delta_n = 4\sqrt{\frac{\theta}{r+b_n}}$ alınarak

$$\left|S_n^{*(M)}\left(g\right)\left(\theta\right) - \left(g\right)\left(\theta\right)\right| \leq 8W_1\left(g : \sqrt{\frac{\theta}{r+b_n}}\right), \forall n \in \mathbb{N}, \theta \in [0,\infty)$$

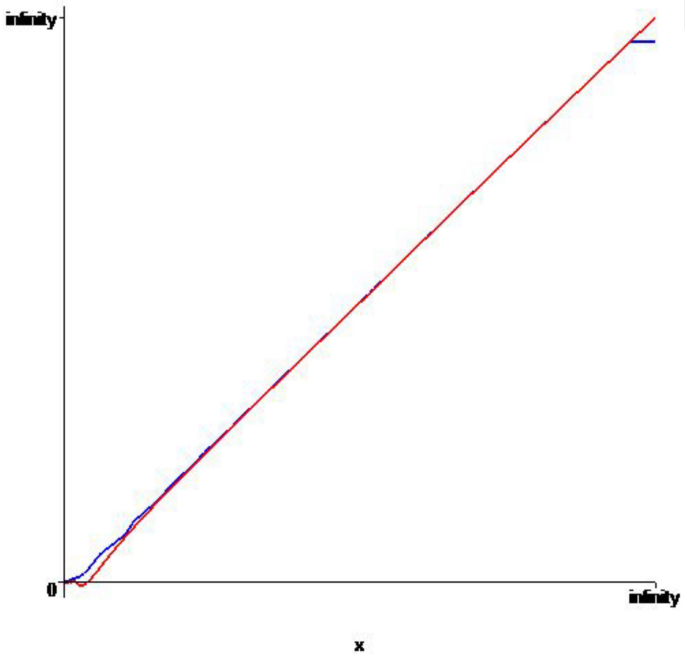
elde edilir ve ispat tamamlanır.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

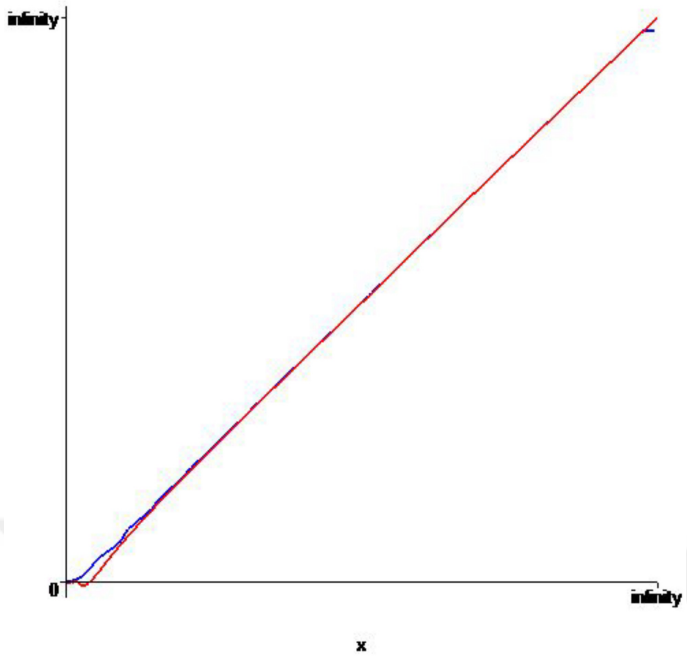
Yaklaşım teorisinde operatör dizilerinin yaklaşım fonksiyonuna en iyi yakınsama oranını vermesi önemli bir problemdir. Bu çalışmada ele alınan genelleştirilmiş lineer olmayan operatörlerin fonksiyonlara yaklaşım derecesi (a_n) ve (b_n) dizilerinin seçimi ile aşağıda verilen örneklerde n nin artan değerleri için daha iyi olduğu görülmektedir.

Örnek

$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{ise } x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{ise } x \in (0, b_n] \end{array} \right\}$ fonksiyonu verilsin ve $(a_n) = (n^{\frac{1}{2}})$ ve $(b_n) = (n^{\frac{1}{3}})$ olsun. Şekil 5.1'de $n = 100$ ve şekil 5.2'de $n = 200$ için maksimum çarpım tipi genelleştirilmiş Szasz operatörlerinin (mavi), f fonksiyonuna (kırmızı), yaklaşımları incelenmiştir. n nin büyüyen değerleri için yaklaşmın daha iyi olduğu görülmektedir. (Güngör, 2018).



Şekil 5.1 $n = 100$ için operatörlerin fonksiyona yaklaşımı

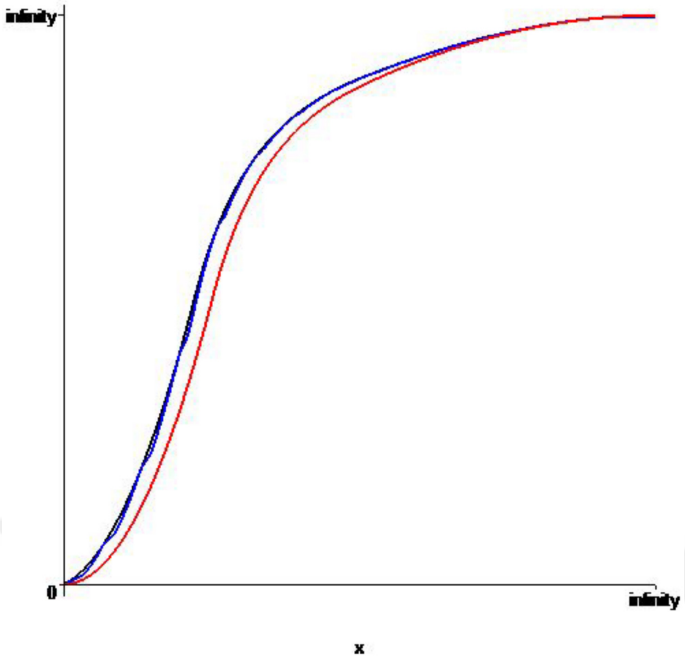


Şekil 5.2 $n = 200$ için operatörlerin fonksiyona yaklaşımı

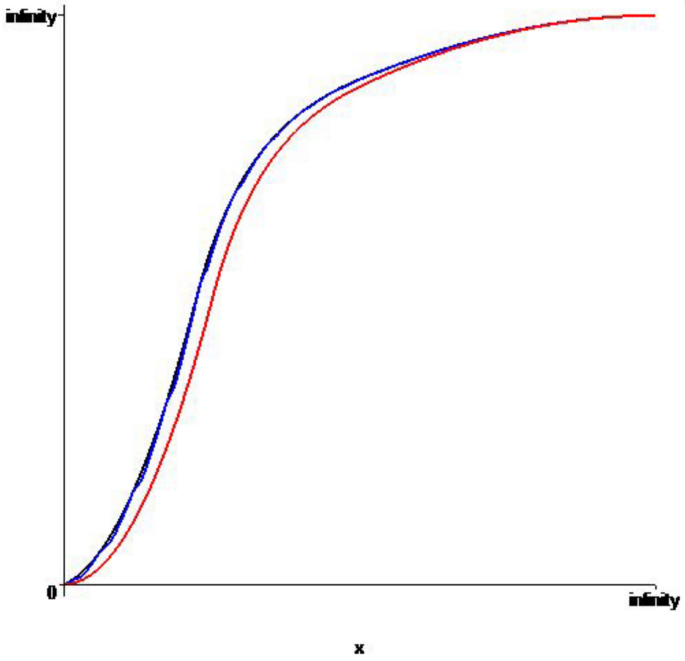
Örnek

$(a_n) = (n^{\frac{1}{2}})$ ve $(b_n) = (n^{\frac{1}{3}})$ olsun. $n = 50$ için şekil 5.3'de ve $n = 100$ için şekil 5.4'de maksimum çarpım tipi genelleştirilmiş Szasz operatörlerinin (mavi) ve lineer genelleştirilmiş Szasz operatörlerinin (siyah), $f(x) = x^2$ fonksiyonuna (kırmızı) yaklaşımları karşılaştırılmaktadır. (Güngör, 2018).

Maksimum çarpım operatörleriyle elde edilen bu sonuçların gelecek yıllardaki çalışmalara yardımcı olması öngörülebilir. Ayrıca maksimum çarpım tipi Favard-Szasz-Mirakyan operatörlerinin farklı modifiyeleri de tezlere konu olabilir.



Şekil 5.3 $n = 50$ için yaklaşımın lineer operatörler ile karşılaştırılması



Şekil 5.4 $n = 100$ için yaklaşımın lineer operatörler ile karşılaştırılması

KAYNAKLAR

ANASTASSIOU, G.A. and Gal, S.G., 2000. Approximation Theory, Moduli of Continuity and Global Smoothnees. Preservation, Birkhauser, Boston.

BEDE, B., GAL, S.G. and COROIANU, L., 2009. Approximation and shape preserving properties of the Bernstein operator of max-product kind. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Article ID 590589, doi:10.1155/590589

BEDE, B., GAL, S.G. and COROIANU, L., 2016. Approximation by max-product type operators. Springer, Berlin, no 2 ,17-19.

BEDE, B. and GAL, S.G. 2010. Approximation nonlinear Bernstein and Favard-Szasz-Mirakyan Operators of max-product kind. Journal of Concrete and Applicable Mathematics, 8(2), 193-207.

BERNSTEIN, S.N., 1912-1913. Demostration du theoreme de Weierstrass fondee sur le calcul de probabilites. Comm. Soc. Math. Kharkow (2), 13, 1-2.

GADZHIEV, A.D. 1976. Theorems of the type of P.P. Korovkin' s theorems. In Russian, Math. Z. 205:781-786 traslated in Math. Notes, 20(5-6): 995-998.

GÖKÇER, T.Y., and DUMAN, O., 2016. Summation Process by Max-Product Operators. Department of Mathematics, TOBB Economics and Technology University, Ankara.

GÜNGÖR, Ş.Y., 2018. Lineer Olmayan Bernstein Tipi Maksimum-Çarpım Operatörleri ile Yaklaşım. Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Ankara, 67-68.

GÜNGÖR, Ş.Y. ve İSPİR, N., 2018. Lineer Olmayan Bernstein Tipi Maksimum-Çarpım Operatörleri ile Yaklaşım. Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Ankara, 48-55.

HACISALİHOĞLU, H., ve HACIYEV, A., 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı. A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları no:31, Ankara, 1-94.

KANTOROVICH, L.V., 1930. Sur certains d´eveloppements suivant les polynomes de la forme de S. Bernstein. I, II, C. R. Acad. URSS, 563-568, 595-600.

KOROVKIN, P.P., 1953. Convergence of linear positive operators in the spaces of continuous functions. Doklady Akad. Nauk. SSSR (N.S.), Russian, 90, 961-964.

KREYSZIG, E., 1978. Calculation of Gauss Quadrature Rules. Math. Comput., 23:221-230+s1-s10.

POPOVICIU, T., 1935. Sur l'appoximation des functions convexes d'ordre superieur. Mathematica, Cluj, 10, 49-54.

SERENBAY, S.K. and BARUĞ, F., 2021. Approximation of modified Favard Szasz-Mirakyan operators of maximum-product type. Bull. Pure Appl. Sci. Sect. E Math. Stat. 40E(1), 60-69 (2021) e-ISSN:2320-3226, Print ISSN:0970-6577 doi:10.5958/2320-3226.2021.00006.0 ©Dr. A.K. Sharma, BPAS PUBLICATIONS, 115-RPS-DDA Flat, Mansarover Park, Shahdara, Delhi-110032, India.

SERENBAY, S.K., ve DALMANOĞLU, Ö., 2017. Rate of Convergence for Generalized Szasz–Mirakyan operators in exponential weighted space. Başkent Universty, Department of Mathematics Education, Ankara.

SZASZ, O., 1950. Generalization of S.Bernstein' s polynomials to the infinite interval.

Journal of Research of the National Bureau of Standards, 45, 239-245.