T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GÖZENEKLİ ORTAMDA TERS YÖNDE İLERLEYEN YANMA DALGALARININ SPEKTRAL KARARLILIĞI

Burcu CEYLAN KURU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2021

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET…… i
ABSTRACT…….. ii
TEŞEKKÜR……. iii
ŞEKİLLER DİZİN……... iv
1. GİRİŞ……..... 1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR…….. 4
2.1. Matematiksel Model…… 7
2.2. Önceki Çalışmalar……..…. 8
3. MATERYAL ve YÖNTEM……. 10
3.1. Materyal……. 10
3.2Yöntem…….. 10
3.2.1. Ters yönde ilerleyen dalga denklemlerinin spektrumu……... 12
3.2.1. Ters yönde ilerleyen yanma dalgaları için ağırlık fonksiyonu…… .. 16
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA……..…… 24
4.1. Evans Fonksiyonu ve Nümerik Sonuçlar…… 24
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER…… 34
KAYNAKLAR……..… 36

ÖZGEÇMİŞ……... 38

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GÖZENEKLİ ORTAMDA TERS YÖNDE İLERLEYEN YANMA DALGALARININ SPEKTRALKARARLILIĞI

Burcu CEYLAN KURU

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Fatih ÖZBAĞ

Yıl: 2021, Sayfa: 38

Bu çalışmada başlangıçta bir miktar yakıt içeren gözenekli ortama hava enjekte edilerek oluşturulan yanma dalgaları çalışılmıştır. Yanma dalgalarının petrol çıkarmada kullanıldığı bilinmektedir. Yanma dalgası modelimiz sıcaklık, yakıt ve oksijenden meydana gelmektedir. Bu üç değişken yanmanın gerçekleşmesi için birbirine bağımlıdırlar. Sistemde oksijen ve sıcaklığın hızı aynıdır. Ayrıca yanma dalgamız ters yönde ilerlemektedir. Modelimiz bir yanma dalgası civarında linerize edilmiştir. Linerize edilen modelin esas spektrumu bulunmuş, grafiği çizilmiştir. Grafik incelendiğinde esas spektrumun kararlılığı sağlamadığı görülmüş kararlılığın sağlanması için esas spektrum sanal eksenin soluna taşınmıştır. Bu taşımayı gerçekleştirmek için bir ağırlık fonksiyonu bulunmuştur. Spektral kararlılığın sağlandığını ispatlamak için ayrık spektrum incelenmiş, bu inceleme için ise Evans fonksiyonu kullanılmıştır. Sağ yarı düzlemde kararsız öz değer bulunmadığı nümerik olarak hesaplanmıştır. Yapılan incelemeler sonucunda çalışmamızdaki ters yönde ilerleyen yanma dalgamızın spektral olarak kararlılığı ispatlanmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Yanma dalgaları, Spektrum, Spektral kararlılık, Evans fonksiyonu.

ABSTRACT

MSc Thesis

SPECTRAL STABILITY OF COUNTER FLOW COMBUSTION WAVES IN POROUS MEDIA

Burcu CEYLAN KURU

Harran University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Fatih ÖZBAĞ

Year: 2021, Page: 38

In this research combustion waves that appears in a model of enhanced oil recovery by injecting air into a porous media which has some initial fuel are studied. Combustion model involves three dependent variables temperature, oxygen and fuel. Speed of temperature and oxygen are assumed same and counterflow combustion waves are considered. The model is linearized at a counterflow combustion wave and the essential spectrum of the operator of linearized system is investigated. In order to have the spectral stability, a weight function is determined to move the essential spectrum to the left half plane. Evans function is utilized to find point spectrum. Numerical calculation is performed to show that no unstable eigenvalues in the right half plane. Therefore spectral stability of counterflow combustion waves is proved.

KEYWORDS: Combustion waves, Spectrum, Spectral stability, Evans function.

TEŞEKKÜR

Çalışma sürecim boyunca yardımları ile araştırmama katkı sağlayan, tecrübeleri ve bilgileri ile bana yol gösteren değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Fatih ÖZBAĞ'a teşekkür ederim.

Tez çalışmamda kullandığım LaTeX Tez Formatı'nı hazırlayan saygıdeğer hocam Doç. Dr. Haydar ALICI'ya teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmam boyunca her zaman yanımda olan, maddi-manevi desteklerini esirgemeyen, başarılarımla her zaman gurur duyan eşim Volkan KURU, babam Ünal CEYLAN, annem Melek CEYLAN ve kardeşim İsmet CEYLAN'a sonsuz teşekkürler.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 3.1. TC sol durumu için (θ^-, ρ^-, Y^-)'deki linerize edilmiş sistemin spektrumu……....13

Şekil 3.2. OC sağ durumu için (θ^+, ρ^+, Y^+)'deki linerize edilmiş sistemin spektrumu……...……..15

Şekil 3.3. FC sağ durumu için (θ^+, ρ^+, Y^+)'deki linerize edilmiş sistemin spektrumu……..……...…16

Şekil 3.4. TC sol durumu için spektrumun ağırlık fonksiyonu ile sanal eksenin soluna taşınmış hali…….....19

Şekil 3.5. OC sağ durumu için spektrumun ağırlık fonksiyonu ile sanal eksenin soluna taşınmış hali……..21

Şekil 3.6. FC sağ durumu için spektrumun ağırlık fonksiyonu ile sanal eksenin soluna taşınmış hali……....22

Şekil 4.1. (4.3)–(4.4) sisteminin $a = 0.5$, $\theta^- = -0.1$, $Y^- = 7$, $\rho^- = 5$ ve $c = -3.6744$ için profili 27

Şekil 4.2. Yarıçapı 25 olan yarım çember şeklindekii kontur için 150 nokta çember kısmında, 100 nokta dikey çap boyunca ve kontur noktaları arasında 256 kato adımı atarak Evans fonksiyonu oluşturulmuştur…….……..…….....27

Şekil 4.3. 0'ın eğri içinde olduğunu gösteren Şekil 4.2.'in orijin civarında yakınlaştırılmış hali…….……28

Şekil 4.4 (4.3)–(4.4) sisteminin $a = 0.5$, $\theta^- = -0.1$, $Y^- = 15$, $\rho^- = 5$ ve $c = -0.0336$ için profili.....28

Şekil 4.5. Yarıçapı 25 olan yarım çember şeklindeki kontur için 150 nokta çember kısmında, 100 nokta dikey çap boyunca ve kontur noktaları arasında 256 kato adımı atarak Evans fonksiyonu oluşturulmuştur…….....…….…….29

Şekil 4.6. 0'ın eğri içinde olduğunu gösteren Şekil 4.5.'in orijin civarında yakınlaştırılmış hali ……..…..29

Şekil 4.7. (4.3)–(4.4) sisteminin $a = 0.5$, $\theta^- = -0.1$, $Y^- = 1$, $\rho^- = 5$ ve $c = -0.44$ için profili……30

Şekil 4.8.Yarıçapı 25 olan yarım çember şeklindeki kontur için 150 nokta çember kısmında, 100 nokta dikey çap boyunca ve kontur noktaları arasında 256 kato adımı atarak Evans fonksiyonu oluşturulmuştur……...……....30

Şekil 4.9. 0 'ın eğri içinde olduğunu gösteren Şekil 4.8.'in orijin civarında yakınlaştırılmış hali……...……...31

Şekil 4.10.(04.3)–(4.4) sisteminin $a = 0.5$, $\theta^- = -0.1$, $Y^- = 3$, $\rho^- = 5$ ve $c = -1.985$ için profili…….....31

Şekil 4.11. Yarıçapı 25 olan yarım çember şeklindeki kontur için 150 nokta çember kısmında, 100 nokta dikey çap boyunca ve kontur noktaları arasında 256 kato adımı atarak Evans fonksiyonu oluşturulmuştur……..……32

Şekil 4.12. 0'ın eğri içinde olduğunu gösteren Şekil 4.11.'in orijin civarında yakınlaştırılmış hali……32

1.GİRİŞ

Bir fizik terimi olarak dalga, uzayda veya maddede yayılan ve enerjinin çoğalarak ya da azalarak taşınmasını sağlayan titreşime denir. Kütle taşınımı olmadan ya da çok az kütle taşınımıyla enerjinin bir yerden başka bir yere taşınması dalga hareketini oluşturur. Dalgalar; bir noktada meydana gelen titreşimlerin belli süredeki yayılışını belirten bir dalga denklemi ile gösterilirler. Dalgalar farklı çeşitlerde meydana geldiğinden dalga denklemleri de buna bağlı olarak farklılık gösterir.

Yanma, yakıtın oksijenle birleşerek ateşlenmesi ve sıcaklığın meydana gelmesiyle oluşan kimyasal bir olaydır. Petrol çıkarma işleminde kullanılan bir yöntem olarak yanma dalgaları karşımıza çıkmaktadır. Petrol çıkarma işlemi son derece pahalı ve zaman alıcıdır. Yer altındaki petrol varlığının tespiti için bir çok ölçüm yapılır. Test ve numune alma işlemi sonucunda uygun görülürse sondaj kuyuları oluşturulur. Bu işlemleri yaparken yerdeki tabakanın gözenekliliği ve petrolün çıkarılırken deforme olmaya karşı gösterdiği direnç gibi zorluklar vardır. Daha öncelerde ham maddenin çok az bir kısmı yeryüzüne çıkarılırdı. Neredeyse yüzde 90'ı yeraltında kalırdı. Son yıllarda kullanılan petrol çıkarma yöntemleriyle doğal gaz ve benzin geri kazanımı yüzde 60'ın üzerine çıkmıştır. Bu modern yöntemlerden biri olan yanma dalgaları kullanılarak petrol geri kazanımı daha ekonomik ve pratik yöntemdir. Ayrıca spektral kararlılığını öğrenerek, petrol kazanımını maksimum düzeye çıkarabiliriz. Bu çaşışmada başlangıçta bir miktar yakıt içeren gözenekli ortama hava enjekte edilerek oluşturulan yanma dalgaları çalışılmıştır (Schult ve ark., 1996; Aldushin ve ark., 1999; Mota ve Schecter, 2006; Bruining ve ark., 2009; Ghazaryan ve ark., 2010; Mailybaev ve ark., 2011).

Sistem, içinde katı yakıt olan gözenekli bir ortama hava aktarımı ile meydana gelen yanma modelinden oluşmaktadır. Model ilk olarak tanıtılmıştır (Akkutlu ve

Yortsos, 2003). Model genişletilerek yanma dalgalarının varlığı üzerine daha fazla çalışmalar yapılmıştır (Chapiro ve ark., 2014; Chapiro ve Senos, 2017; Ozbag ve ark., 2018; Barlas, 2020). Yanma dalgası modelimiz sıcaklık, yakıt ve oksijenden meydana gelmektedir. Bu üç değişken yanmanın gerçekleşmesi için birbirine bağımlıdırlar. Modelimizdeki oksijen ve yakıt denklemlerinde difüzyon terimi yok iken sıcaklık denkleminde vardır. Bunların yanında katı yakıtın yayılmayacağı bilinmektedir. Çalışmada modelimizin parabolik olduğu gösterilmiştir. Ayrıca oksijenin yayılımı göz ardı edilir.

Oksijen ve ısının aynı hızda taşındığı durumda yanma dalgalarının varlığı gösterilmiştir (Chapiro ve ark., 2014). Oksijenin sıcaklıktan daha hızlı taşındığı durum için yanma dalgalarının varlığı kanıtlanmıştır (Ozbag ve ark., 2018). Ayrıca bu yanma dalgalarının lineer ve lineer olmayan kararlılığı ispatlanmıştır (Ozbag ve Schecter, 2018). Bahsedilen çalışmalarda yanma dalgasının hızı pozitif kabul edilmiştir. Sistemde oksijen ve sıcaklığın hızı aynıdır. Ayrıca yanma dalgamız ters yönde ilerlemektedir. Bu nedenle yanma dalgamızın hızı negatif alınmıştır.

Bu çalışmada, daha önce Chapiro ve Senos'un üzerinde çalıştığı yanma dalgalarının spektral kararlılığı incelenmiştir (Chapiro ve Senos, 2017). Önce bir yanma dalgası civarında sistem linerize edilmiştir. Daha sonra Fourier dönüşümü yapılmıştır. Böylece esas spektrum elde edilmiştir. Ters yönde ilerleyen yanma dalgamızın hızı negatif kabul edilerek iki yanma dalgası olduğu belirtilmiştir. İki yanma dalgasının da sağ ve sol durumlardaki özdeğerleri ayrı ayrı belirlenmiştir. Özdeğerler ile belirlenen esas spektrumların grafikleri çizilmiştir. Böylece spektrumun grafiğinin parabollerden meydana geldiği ve sanal eksene dokunduğu görülmüştür. Böylece esas spektrumun marjinal kararlılığa sahip olduğu görülmüştüş ancak spektral kararlılığı sağlamadığı görülmüştür. Kararlılığın sağlanması için esas spektrum sanal eksenin soluna taşınmıştır. Bu taşımayı gerçekleştirmek için bir ağırlık fonksiyonu bulunmuştur. Spektrum sol yarı düzleme taşınması sonucu

spektral kararlılığa sahip olduğunu belirleyebilmek için Evans fonksiyonundan yararlanılmıştır (Gubernov ve ark., 2003).

Evans fonksiyonu, ilerleyen dalgaların kararlılığının belirlenmesi için önemli bir araçtır. Doğrusallaştırılmış operatörün dalga civarındaki spektral analizi için hem analitik hem de nümerik hesaplama açısından kullanışlıdır. Evans fonksiyonu hesaplaması, doğrusal operatörün ayrık spektrumunu bulmaya yani herhangi bir kararsız özdeğerinin belirlenmesine yardımcı olur. Bu da belirli bir dalganın spektral kararlılığını sağlamaya ve model parametreleri değiştikçe çatallanma noktalarını (kararlılık kaybı) tanımlamaya izin verir (Barker ve ark., 2017).

Bölüm 1' de giriş yer almaktadır. Bölüm 2'de ele aldığımız matematiksel modelin çıkarımı elde edilmiştir. Matematiksel model tanıtılmış, önceki çalışmalar özetlenmiştir. Bölüm 3'te ters yönde ilerleyen yanma dalgalarının spektrumu elde edilmiştir. Sağ ve sol durumlar için öz değerler belirlenmiş, grafikleri analiz edilmiştir. Ters yönde ilerleyen yanma dalgaları için ağırlık fonksiyonu elde edilmiştir. Bölüm 4'te Evans fonksiyonunun nümerik hesaplaması yapılarak ayrık spektrum incelenmiştir. Bölüm 5'te sonuçlara ve önerilere yer verilmiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Oksijen; renk ve kokuya sahip olmayan ancak yanmanın gerçekleşmesi için gerekli olan bir gazdır. Yanma olayında kullanılan oksijen çoğunlukla havadan elde edilir. Yakıt ise; katı sıvı ve gaz hainde bulunabilen yanıcı maddelerin genel adı olarak tanımlanbilir. Yanma dalgalarının oluşabilmesi için yakıtın ateşleme sonucu sıcaklık ve oksijen ile birleşmesi gereklidir. Bu durumda sıcaklık, oksijen ve yakıt birbirine bağımlı değişkenlerdir.

Bu çalışmada ele aldığımız matematiksel modelin çıkarımını elde edecek olursak: Zaman koordinatı t ve uzay koordinatı x olan modelin ısı denge denklemi 2.1, ayrıca hareketsiz yakıt için molar denge denklemi 2.2 ve oksijen denklemi 2.3'tür. $p_g(\mathrm{mol/m^3})$ gazının molar yoğunluğunun sabit olduğunu varsayıyoruz. p_g 'nin gazı sıcaklığa bağlıdır (Akkutlu ve Yortsos, 2003). Yukarıdaki bilgiler ışığında Darcy gaz hızı $u(\mathrm{m/s})$'da sabittir (gaz enjeksiyon hızına eşittir). Daha önceki çalışmalardaki gibi gaz difüzyonu ihmal edilmiştir (Akkutlu ve Yortsos, 2003). Enerji, yakıt ve oksijen için denge denklemleri:

$$\frac{\partial((C_m+\varphi c_g\rho_g)(T-T_{res}))}{\partial t}+\frac{\partial(c_g\rho_g)u(T-T_{res})}{\partial x}=\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\theta_r\rho Y W_r, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\mu_f\rho\, Y W_r \ , \tag{2.2}$$

$$\varphi\frac{\partial(Y\rho_g)}{\partial t}+\frac{\partial(Y\rho_g u)}{\partial x}=\mu_0\rho\, Y W_r \ . \tag{2.3}$$

Burada T (K) sıcaklık, Y (mol/mol) gazdaki oksijen molar oranı, ρ(mol/m^3) hareketsiz yakıtın molar konsantrasyonudur. Kalan terimler sabit varsayılır (Akkutlu ve Yortsos, 2003): C_m(J/m^3K) gözenekli ortamın ısı kapasitesi; c_g(J/molK) gazın ısı kapasitesi; T_{res} (K) ilk rezervuar sıcaklığı; λ(J/(msK)) gözenekli ortamın termal

iletkenliği; θ_r(J/mol), T_{res}'teki hareketsiz yakıt yanma entalpisidir.

C + $O_2 \rightarrow CO_2$ reaksiyonunda olduğu gibi bir mol gaz elde etmek için bir mol hareketsiz yakıtın bir mol oksijen ile reaksiyona girdiğini varsayıyoruz. Bu da stokiyometrik katsayıların $\mu_f = \mu_0 = 1$ olduğunu gösterir. Reaksiyon hızı genellikle Arrhenius denklemi ile $W_r = k_p \exp(-E_r/\mathrm{RT})$ olarak verilir.

$$W_r \begin{cases} k_p \exp\left(\frac{-\mathrm{E}}{\mathrm{R}(T-T_{ign})}\right), & T > T_{ign}, \\ 0, & \mathrm{T} \leq T_{ign}, \end{cases} \tag{2.4}$$

burada E aktivasyon enerjisi; R ideal gaz sabiti; T_{ign} altında reaksiyon algılanamayan sıcaklık; ve k_p üstel faktördür.

Denklemler boyutsuz bağımlı ve bağımsız değişkenlerin boyutsal büyüklükleri (tildes ile gösterilir) ve referans büyüklükleri (yıldızlarla gösterilir) oranları olarak tanıtılmasıyla boyutsuzlaştırılır.

$$\tilde{t} = \frac{t}{t^*}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{x^*}, \quad \tilde{\theta} = \frac{T-T_{ign}}{\Delta T^*}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho^*}, \quad \tilde{Y} = \frac{Y}{Y^*}. \tag{2.5}$$

Referans miktarları, denklemleri mümkün olduğunca basit hale getirmek için seçilir:

$$\Delta T^* = \frac{E}{R}, \quad t^* = \frac{\varphi \theta_r \rho_g}{k_p C^*_m \Delta T^*}, \quad Y^* = \frac{1}{k_p t^*}, \quad \rho^* = \frac{\varphi \rho_g}{k_p t^*}, \quad x^* = \sqrt{\frac{\lambda t^*}{C^*_m}},$$
$$C^*_m = C_m + \varphi C_g \rho_g . \tag{2.6}$$

2.1–2.2 denklemleri 2.5 ve 2.6 denklemleri kullanılarak boyutsuz formda aşağıdaki şekilde yazılır. Bağımlı değişkenler; sıcaklık θ ($\theta = 0$, T = T_{ing}'ye karşılık gelir), oksijen oranı Y ve boyutsuz yakıt konsantrasyonu ρ:

$$\partial_t\theta + v_\theta\partial_x\theta = \partial_{xx}\theta + \rho Y\Phi, \tag{2.7}$$

$$\partial_t\rho = -\rho Y\Phi, \tag{2.8}$$

$$\partial_t Y + v_Y\partial_x Y = -\rho Y\Phi, \tag{2.9}$$

$$\Phi = \begin{cases} e^{(-1/\theta)}, & \theta > 0 \\ 0, & \theta \leq 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

burada v_θ ve v_Y boyutsuz sıcaklık ve oksijen dalga hızlarıdır:

$$v_\theta = \frac{c_g\rho_g ut^*}{x^*C^*_m}, \quad u_Y = \frac{ut^*}{\varphi x^*}, \tag{2.11}$$

Boyutsuz rezervuar sıcaklığına θ_0 ve yakıt konsantrasyonu ρ_0 tarafından verilen boyutsuz başlangıç değerine ihtiyacımız olacak:

$$\theta_0 = \frac{T_{res}-T_{ign}}{\Delta T^*}, \quad \rho_0 = \frac{\rho_{res}}{\rho^*}, \tag{2.12}$$

burada ρ_{res} yakıtın ilk rezervuar molar yoğunluğudur.

Yaygın olarak kabul edilen bir sınırlayıcı durum, gazın termal kapasitesinin substratın termal kapasitesine kıyasla ihmal edilmesidir, yani $C^*_m = C_m + \varphi c_g\rho_{g\approx}C_m$ 'dir. $v_\theta = (\varphi c_g\rho_g/C^*_m)v_Y$ olduğundan gözenekli ortamda $v_\theta \lll v_Y$ anlamına gelir. Bu çalışmada substratın termal kapasitesi gazın termal kapasitesi ile karşılaştırıldığında ihmal edilebilir. Bu da $C^*_m = \varphi c_g\rho_g$ ve $v_\theta = v_Y = a$ olduğunu gösterir. Bu varsayım poliüretan köpükte hava yanması için yaklaşık olarak doğrudur. Bu nedenle (2.7)–(2.10) denklemleri (2.13)–(2.16) sistemidir.

2.1. Matematiksel Model

Ele aldığımız sistemde; sıcaklık (θ), yakıt (ρ) ve oksijen (Y) olmak üzere üç bağımlı değişken vardır:

$$\partial_t\theta + a\partial_x\theta = \partial_{xx}\theta + \rho Y\Phi, \tag{2.13}$$

$$\partial_t\rho = -\rho Y\Phi, \tag{2.14}$$

$$\partial_t Y + a\partial_x Y = -\rho Y\Phi, \tag{2.15}$$

$$\Phi = \begin{cases} e^{(-1/\theta)}, & \theta > 0 \\ 0, & \theta \leq 0 \end{cases}. \tag{2.16}$$

Sistemimizdeki sıcaklık ve oksijenin $a > 0$ hızıyla taşındığı kabul edilmiştir. Aynı zamanda Φ birim tepki oranı olarak ele alınmıştır. Yanmanın belirli bir tutuşma sıcaklığının üzerinde meydana geldiği varsayılmıştır. Çalışmamızdaki ateşleme sıcaklığı $\theta = 0$ olacak şekilde normalize edilmiş olup oksijen difüzyonu göz ardı edilmiştir. Denklemler, parametre sayısını azaltmak için boyutsuzlaştırılmıştır (Ozbag, 2016). Bütün durumlarda $\rho \geq 0$ ve $Y \geq 0$ çözümleri ile ilgilenilmiştir. 2.13–2.15 denklemleri için $-\infty < x < +\infty$, $t \geq 0$ üzerinde sabit sınır koşulları;

$(\theta, \rho, Y)(-\infty, t) = (\theta^-, \rho^-, Y^-)$, $(\theta, \rho, Y)(+\infty, t) = (\theta^+, \rho^+, Y^+)$

şeklindedir.

Yanma olayının gerçekleşmesi ve yanmanın devam etmesi için ortamda yeteri kadar oksijenin bulunması gerekir. Oksijenin eksik olması durumunda ($Y = 0$) yanma reaksiyonu durur. Aynı şekilde yanmanın gerçekleşmesi ve devam etmesi için ortamda yakıt bulunması gerekir. Yakıt eksikliği ($\rho = 0$) durumunda yanma reaksiyonu durur. Bunların yanında atom veya moleküllerin şiddetli şekildeki titreşimlerinden oluşan enerjiye ısı denir. Bir madde ısıtıldığı zaman moleküllerin hızı

artar. Moleküllerin hızının artmasını sağlayan her şey o maddede ısı üretir. Isı üretilmesiyle maddedeki moleküller oksijen ile bir araya gelerek yanmayı gerçekleştirir. Bu nedenle ortamdaki sıcaklık düşük ise ($\theta \leq 0$) yanma reaksiyonu durur.

Yanmanın sınır koşullarında meydana gelmediği kabul edilmiştir. Yani $x = \pm\infty$ daaşağıdakilerden en az biri olmalıdır.

- Sıcaklık kontrol (TC) : düşük sıcaklıkta yani $\theta \leq 0$ olduğu zaman reaksiyon durur.
- Yakıt kontrol (FC): yakıt eksikliği yani $\rho = 0$ olduğu zaman reaksiyon durur.
- Oksijen kontrol (OC): oksijen eksikliği yani $Y = 0$ olduğu zaman reaksiyon durur.

2.2. Önceki Çalışmalar

Sol durumu (θ^-, ρ^-, Y^-), sağ durum ise (θ^+, ρ^+, Y^+) olan c hızıyla ilerleyen bir yanma dalgası $(\theta^-, \rho^-, Y^-) \xrightarrow{c} (\theta^+, \rho^+, Y^+)$ şeklinde gösterilir. Dalganın son durumlarında, (2.13)–(2.15) denklemindeki reaksiyon terimleri ortadan kaybolur. Reaksiyon terimlerinin ortadan kalktığı durumlar TC, FC, OC, $TC \cap FC$, $TC \cap OC$, $FC \cap OC$ veya $TC \cap FC$ dir. Örneğin, sol durum $TC \cap FC$ tipindeyse $\theta \leq 0$, $\rho = 0$ ve Y değeri pozitiftir.

Bu çalışmada yanma modeli ters yönde ilerlediğinden $c < 0$ kabul edilir. Ayrıca FC hareketsiz katı yakıt olduğundan sol durumda olma olasılığı yoktur. Yanma dalgası ve enjekte edilen oksijen ters yönde ilerlediğinden sol durumun OC olması imkânsızdır. Diğer taraftan son durumları aynı tipte bir yanma dalgasının olmadığını görmek kolaydır. Geriye kalan diğer olasılıklar TC $\xrightarrow{c}$ FC ve TC $\xrightarrow{c}$ OC 'dir. Bu yanma dalgalarının varlığı kanıtlanmıştır (Chapiro ve ark., 2014). Bu durumda TC$\xrightarrow{c}$FC ve TC $\xrightarrow{c}$OC ters yönde ilerleyen iki yanma denklemi vardır.

Teorem 2.1 TC sol durumu (θ^-, ρ^-, Y^-) yani ($\theta^- \leq 0$, $\rho^- > 0$, $Y^- > 0$) ve $a > 0$ olsun. Ayrıca $\theta^- + Y^- > 0$ olduğunu varsayalım. Hızı $c < 0$ ve yanma dalgası $(\theta^-,\rho^-,Y^-) \xrightarrow{c} (\theta^+, \rho^+, Y^+)$ olacak şekilde bir (θ^+, ρ^+, Y^+) sağ durumu vardır. Bu durumda $\theta^+ > 0$ ve ρ^+, Y^+ ya da her ikisi de 0 olur. Ayrıca $\theta^+ + Y^+ = \theta^- + Y^-$ ve

$$c = \frac{aY^+ - aY^-}{Y^+ - Y^- + \rho^+ - \rho^-} \tag{2.17}$$

Bir sonraki bölümde bu iki ters yönde ilerleyen yanma dalgasının spektral kararlılığı incelenecektir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Materyal

Çalışmamızda gözenekli ortamda ters yönde ilerleyen yanma dalgalarının spektral kararlılığı araştırıldığından; yanma, dalga, spektrum, kararlılık, Evans Fonksiyonu gibi kavramlar hakkında detaylı bir literatür taraması yapılmıştır. Bu konu hakkında daha önceden yazılmış makale ve tez çalışmaları incelenmiştir.

3.2. Yöntem

Bu bölümde, sistem (2.13)–(2.15) ters yönde ilerleyen bir yanma dalgası üzerinde linerize edilmiş ve linerize edilmiş operatör L'nin spektrumu incelenmiştir. $\mathcal{L}$'nin spektrumu $Sp(\mathcal{L})$ olarak ifade edilir, ayrık spektrumdan $Sp_d(\mathcal{L})$ ve esas spektrumdan $Sp_{ess}(\mathcal{L})$ oluşur. Ayrık spektrum $\mathcal{L}$'nin bütün özdeğerlerinden ve bunların sonlu sayıda katlarından oluşan spektrumdur. Spekrumun geri kalanı da esas spektrumu oluşturur. Bubölümde esas spektrum yani $Sp_{ess}(\mathcal{L})$ ele alınmıştır.

(2.13)–(2.15) denklemlerinde hareketli koordinata geçmek için $\xi = x–ct$ dönüşümü yapılırsa;

$$\partial_t\theta = \partial_{\xi\xi}\theta + (c-a)\partial_\xi\theta + F, \tag{3.1}$$

$$\partial_t\rho = c\partial_\xi\rho - F, \tag{3.2}$$

$$\partial_t Y = (c-a)\partial_\xi Y - F, \tag{3.3}$$

ve F = ρY Φ için elde edilir. c hızıyla ilerleyen $T^*(\xi) = (\theta^*(\xi), \rho^*(\xi), Y^*(\xi))$ dalgası (3.1)–(3.3) 'in değişmeyen çözümüdür ve

$$\lim_{\xi \to -\infty} T^*(\xi) == T^- = (\theta^-, \rho^-, Y^-) \qquad \lim_{\xi \to +\infty} T^*(\xi) == T^+ = (\theta^+, \rho^+, Y^+).$$

$(D^*(\xi)')$ 'nin $D^{\pm}$ ya üstel oranda yaklaştığını varsayıyoruz. (3.1)–(3.3) denklemlerini $(D^*(\xi)')$'de linerize edersek;

$$\partial_t \tilde{\theta} = \partial_{\xi\xi}\tilde{\theta} + (c-a)\partial_\xi \tilde{\theta} + F_\theta\big(D^*(\xi)\big)\tilde{\theta} + F_\rho\big(D^*(\xi)\big)\tilde{\rho} + F_Y\big(D^*(\xi)\big)\tilde{Y}, \quad (3.4)$$

$$\partial_t \tilde{\rho} = c\partial_\xi \tilde{\rho} - F_\theta\big(D^*(\xi)\big)\tilde{\theta} - F_\rho\big(D^*(\xi)\big)\tilde{\rho} - F_Y\big(D^*(\xi)\big)\tilde{Y}, \quad (3.5)$$

$$\partial_t \tilde{Y} = (c-a)\partial_\xi \tilde{Y} - F_\theta\big(D^*(\xi)\big)\tilde{\theta} - F_\rho\big(D^*(\xi)\big)\tilde{\rho} - F_Y\big(D^*(\xi)\big)\tilde{Y} \quad (3.6)$$

elde edilir. (3.4)–(3.6) denklemlerini $A_T = \mathcal{L}A$ şeklinde yazarak bir matris operatörü elde edilir;

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \partial_{\xi\xi} + (c-a)\partial_\xi + F_\theta\big(D^*(\xi)\big) & F_\rho\big(D^*(\xi)\big) & F_Y\big(D^*(\xi)\big) \\ -F_\theta\big(D^*(\xi)\big) & c\partial_\xi - F_\rho\big(D^*(\xi)\big) & -F_Y\big(D^*(\xi)\big) \\ -F_\theta\big(D^*(\xi)\big) & -F_\rho\big(D^*(\xi)\big) & (c-a)\partial_\xi - F_Y\big(D^*(\xi)\big) \end{pmatrix}$$

. (3.7)

(3.1)–(3.3) denklemlerinin D±'da linerize edilmesiyle birbiriyle ilişkili $A_T = \mathcal{L}A$ şeklinde sabit katsayılı doğrusal kısmi diferansiyel denklemler vardır. $\mathcal{L}^2$ uzayında $\mathcal{L}^{\pm}$ spektrumu Fourier dönüşümü kullanılarak hesaplanır:

$$\mathcal{L}^{\pm} = \begin{pmatrix} -\mu^2 + i\mu(c-a) + F_\theta(D^{\pm}) & F_\rho(D^{\pm}) & F_Y(D^{\pm}) \\ -F_\theta(D^{\pm}) & i\mu c - F_\rho(D^{\pm}) & -F_Y(D^{\pm}) \\ -F_\theta(D^{\pm}) & -F_\rho(D^{\pm}) & i\mu(c-a) - F_Y(D^{\pm}) \end{pmatrix}$$

(3.8)

$\mathcal{L}$'in temel spektrumunun sağ taraftaki sınırı, $\mathrm{Sp}(\mathcal{L}^{-})$ ve $\mathrm{Sp}(\mathcal{L}^{+})$'nin sağ sınırının birleşimidir.

Tanım 3.1 Eğer $L^{\pm}$'nin spektrumu

- $\mu > 0$ için $\mathrm{Re}\lambda < -\mu$ yarı düzlemi içinde yer alıyorsa, bu durumda $D^{\pm}$ kararlıdır.
- $\mathrm{Re}\lambda \leq 0$ yarı düzlemi içinde yer alıyorsa ve sanal eksene dokunuyorsa, bu durumda $D^{\pm}$ marjinal olarak kararlıdır.
- $\mathrm{Re}\lambda > 0$ noktalarını içeriyorsa, bu durumda $D^{\pm}$ kararsızdır.

Tanım 3.2 $D^{*}(\xi)$ ilerleyen dalgası aşağıdaki şartları sağlarsa X uzayında spektral olarak kararlıdır.

- X uzayında 0, L'nin izole edilmiş basit bir öz değeridir ve buna karşılık gelen özfonksiyon $D^{*}(\xi)$'' dir.
- $\mu > 0$ için L'nin spektrumunun geri kalanı $\mathrm{Re}\lambda < -\mu$ içinde yer alır.

3.2.1. Ters yönde ilerleyen dalga denklemlerinin spektrumu

Ters yönde ilerleyen iki yanma dalgası vardır: $\mathrm{TC} \xrightarrow{c} \mathrm{FC}$ ve $\mathrm{TC} \xrightarrow{c} \mathrm{OC}$. Her iki yanma dalgası için TC'yi sol durumda; FC ve OC'yi sağ durumda inceleriz.

- **TC sol durum için;**

$(\theta^{-}, \rho^{-}, Y^{-})$'da $\theta^{-} \leq 0$, $\rho^{-} > 0$, $Y^{-} > 0$ şeklindedir. Ayrıca modelimizin tanımındaki $F = \rho Y \Phi$ ifadesinden ve $\theta^{-} \leq 0$ olduğundan $\Phi = 0$ dır. Bu da bize;

$$F_\theta(D^-) = 0\,, \qquad F_\rho(D^-) = 0\,, \qquad F_Y(D^-) = 0$$

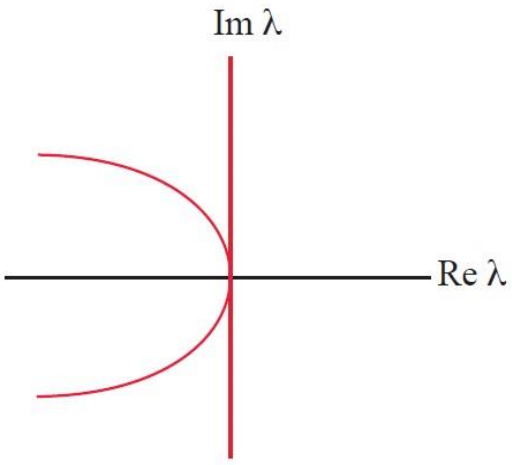
eşitliklerini verir. Elde ettiğimiz ifadeleri (3.8) denkleminde yerine yazarsak:

$$\hat{\mathcal{L}}^- = \begin{pmatrix} -\mu^2 + i\mu(c-a) & 0 & 0 \\ 0 & i\mu c & -0 \\ 0 & 0 & i\mu(c-a) \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

elde edilir. $\mathcal{L}^-$'nin spektrumu R'deki bazı μ'ler için (3.9) denkleminin özdeğerleri olan λ'ların kümesi aşağıdaki şekildedir:

$$\lambda(\mu) = -\mu^2 + i\mu(c-a), \qquad \lambda(\mu) = i\mu c, \qquad \lambda(\mu) = i\mu(c-a).$$

Şekil 3.1.'de parametrik özdeğerlerin grafiği görülmektedir. Sol yarı düzlemde sanal eksene teğet orijinden geçen bir paraboldür. Ayrıca sanal eksenin üzerinde parabole teğet iki dikey doğruya sahiptir.



Şekil 3.1. TC sol durumu için (θ^-, ρ^-, Y^-)'deki linerize edilmiş sistemin spektrumu

- **OC sağ durum için;**

(θ^+, ρ^+, Y^+)'da $\theta^+ > 0$, $\rho^+ > 0$, $Y^+ = 0$ şeklindedir. Ayrıca modelimizin tanımındaki $F = \rho Y \Phi$ ifadesinden;

$$F_\theta(T^+) = 0\,, \quad F_\rho(T^+) = 0\,, \quad F_Y(T^+) = \rho^+ \Phi(\theta^+)$$

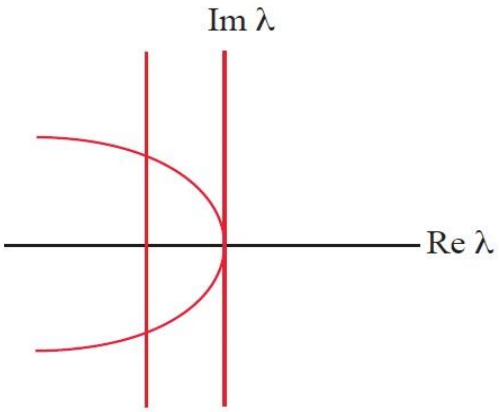
eşitliklerini verir. Elde ettiğimiz ifadeleri (3.8) denkleminde yerine yazarsak:

$$\mathcal{L}^+ = \begin{pmatrix} -\mu^2 + i\mu(c-a) & 0 & \rho^+\Phi(\theta^+) \\ 0 & i\mu c & -\rho^+\Phi(\theta^+) \\ 0 & 0 & i\mu(c-a) - \rho^+\Phi(\theta^+) \end{pmatrix} \qquad (3.10)$$

elde edilir. $\hat{\mathcal{L}}^+$ spektrumu $\mathbb{R}$'deki bazı μ'ler için (3.10) denkleminin özfonksiyonları olan λ'ların kümesi aşağıdaki şekildedir:

$$\lambda(\mu) = -\mu^2 + i\mu(c-a), \quad \lambda(\mu) = i\mu c, \quad \lambda(\mu) = i\mu(c-a) - \rho^+\Phi(\theta^+)\,.$$

Şekil 3.2. 'de bu parametrik özdeğerlerin grafiği görülmektedir. Sol yarı düzlemde sanal eksene teğet orijinden geçen bir paraboldür. Ayrıca sanal eksenin üzerinde parabole teğet ve sol yarı düzlemde parabolün üzerinden geçen iki dikey doğruya sahiptir.



Şekil 3.2. OC sağ durumu için (θ^+, ρ^+, Y^+)'deki linerize edilmiş sistemin spektrumu

• FC sağ durum için;

(θ^+, ρ^+, Y^+)'da $\theta^+ > 0$, $\rho^+ = 0$, $Y^+ > 0$ şeklindedir. Ayrıca modelimizin tanımındaki $F = \rho Y \Phi$ ifadesinden;

$$F_\theta(T^+) = 0\,, \qquad F_\rho(T^+) = Y^+\Phi(\theta^+)\,, \qquad F_Y(T^+) = 0$$

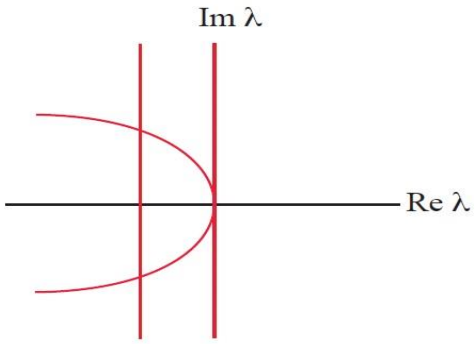
eşitliklerini verir. Elde ettiğimiz ifadeleri (3.8) denkleminde yerine yazarsak:

$$\hat{\mathcal{L}}^+ = \begin{pmatrix} -\mu^2 + i\mu(c-a) & Y^+\Phi(\theta^+) & 0 \\ 0 & i\mu c - Y^+\Phi(\theta^+) & 0 \\ 0 & Y^+\Phi(\theta^+) & i\mu(c-a) \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

elde edilir. $\hat{\mathcal{L}}^+$ spektrumu $\mathbb{R}$'deki bazı μ'ler için (3.11) denkleminin özfonksiyonları olan λ'ların kümesi aşağıdaki şekildedir:

$$\lambda(\mu) = -\mu^2 + i\mu(c-a), \quad \lambda(\mu) = i\mu c - Y^+\Phi(\theta^+) \ , \quad \lambda(\mu) = i\mu(c-a) \ .$$

Şekil 3.3. 'de bu parametrik özdeğerlerin grafiği görülmektedir. Sol yarı düzlemde sanal eksene teğet orijinden geçen bir paraboldür. Ayrıca sanal eksenin üzerinde parabole teğet ve sol yarı düzlemde parabolün üzerinden geçen iki dikey doğruya sahiptir.



Şekil 3.3. FC sağ durumu için (θ^+, ρ^+, Y^+)'deki linerize edilmiş sistemin spektrumu

Tüm durumlar için $Sp(\mathcal{L}^-)$ ve $Sp(\mathcal{L}^+)$ sanal eksene dokunduğundan spektral kararlılığa sahip değildir. Eğer bu spektrumları sanal eksenin soluna taşıyabilecek bir ağırlık fonksiyonu bulunabilirse spektral kararlılık elde edilebilir.

3.2.2. Ters yönde ilerleyen yanma dalgaları için ağırlık fonksiyonu

$\alpha = (\alpha_-, \alpha_+) \epsilon \mathbb{R}^2$ için $\Upsilon_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir ağırlık fonksiyonu olsun:

$$\Upsilon_\alpha(\xi) := \begin{cases} e^{\alpha_- \xi}, & \xi \leq 0 \\ e^{\alpha_+ \xi}, & \xi \geq 0 \end{cases} . \tag{3.12}$$

$\chi_{0,}$ $L^2(\mathbb{R})^3$ veya $H^1(\mathbb{R})^3$ standart Banach uzayından biri olsun ve $\| \|_0$ normuna sahip olsun. χ_α , $Y_\alpha(\xi)$ ağırlık fonksiyonu ile bir ağırlık uzayı belirtsin. Yani $x(\xi)\epsilon\, \chi_\alpha$ için, $Y_\alpha(\xi)x(\xi)\epsilon\, \chi_0$ ve $\| x(\xi)\|_\alpha = \| Y_\alpha(\xi)x(\xi) \|_0$ olur.

$\mathcal{L}$ nin spektrumunu χ_α üzerinde bir operatör olarak incelemek için;

$$\chi = (\tilde{\theta}(\xi), \tilde{\rho}(\xi),\ \tilde{Y}(\xi))\epsilon\, \chi_\alpha \tag{3.13}$$

$$\mathcal{W} = \Upsilon_\alpha(\xi)\chi = (u(\xi), v(\xi), z(\xi))\ \epsilon\, \chi_0 \tag{3.14}$$

alalım.

$\mathcal{W} = Y_\alpha(\xi)\chi$ ifadesi sol tarafı ${Y_\alpha}^{-1}$ ile çarpılırsa $\chi = {Y_\alpha}^{-1}\mathcal{W}$ elde edilir. $\chi_t = \mathcal{L}\chi$ denkleminde χ yerine yazılırsa ${Y_\alpha}^{-1}\mathcal{W}_t = \mathcal{L}{Y_\alpha}^{-1}\mathcal{W}$ elde edilir. ${Y_\alpha}^{-1}\mathcal{W}_t = \mathcal{L}{Y_\alpha}^{-1}\mathcal{W}$ ifadesi Y_α ile çarpılırsa $\mathcal{W}_t = Y_\alpha\mathcal{L}{Y_\alpha}^{-1}\mathcal{W}$ elde edilir. Burada $Y_\alpha\mathcal{L}{Y_\alpha}^{-1}$ operatörü χ_0 üzerinde bir lineer operatördür. $\mathcal{L}$'nin χ_α 'daki spektrumunu bulmak yerine $\mathcal{L}_\alpha = Y_\alpha\mathcal{L}{Y_\alpha}^{-1}$ izomorfik operatörün spektrumunu χ_0 üzerinde bulunur.

$\mathcal{W} = \Upsilon_\alpha(\xi)\chi = e^{\alpha\xi}.\chi$ olduğundan $\big(u(\xi), v(\xi), z(\xi)\big) = e^{\alpha\xi}.(\tilde{\theta}(\xi), \tilde{\rho}(\xi), \tilde{Y}(\xi))$'dır. Bu durumda; $\mathcal{L}_\alpha$

$$\begin{pmatrix} \partial_{\xi\xi} + (c-a-2\alpha_\pm)\partial_\xi + {\alpha_\pm}^2 + a\alpha_\pm - c\alpha_\pm + F_\theta(D^*) & F_\rho(D^*) & F_Y(D^*) \\ -F_\theta(D^*) & c\partial_\xi - c\alpha_\pm - F_\rho(D^*) & -F_Y(D^*) \\ -F_\theta(D^*) & -F_\rho(D^*) & (c-a)(\partial_\xi - \alpha_\pm) - F_Y(D^*) \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

elde edilir. $\mathcal{W}_t = \mathcal{L}_\alpha \mathcal{W}$ denkleminde $\xi \longrightarrow \pm\infty$ alınırsa $\mathcal{W}_t = \mathcal{L}_{\alpha_\pm} \mathcal{W}$ sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem elde edilir. Burada $\mathcal{L}_\alpha{}^{\pm}$

$$\begin{pmatrix} \partial_{\xi\xi} + (c-a-2\alpha_\pm)\partial_\xi + \alpha_\pm{}^2 + a\alpha_\pm - c\alpha_\pm + F_\theta(D^\pm) & F_\rho(D^\pm) & F_Y(D^\pm) \\ -F_\theta(D^\pm) & c\partial_\xi - c\alpha_\pm - F_\rho(D^\pm) & -F_Y(D^\pm) \\ -F_\theta(D^\pm) & -F_\rho(D^\pm) & (c-a)(\partial_\xi - \alpha_\pm) - F_Y(D^\pm) \end{pmatrix}$$

(3.16)

şeklindedir. $\mathcal{L}_\alpha$ esas spektrumunun sağ taraftaki sınırı $\mathrm{Sp}\mathcal{L}_\alpha{}^-$ ve $\mathrm{Sp}\mathcal{L}_\alpha{}^+$'nın sağ taraftaki sınırlarının birleşimidir. Bu spektrumlar L^2 veya H^1'de aynıdır. Bu yüzden Fourierdönüşümünü kullanarak L^2'de hesaplıyoruz.

Ters yönde ilerleyen iki yanma dalgası vardır: $\mathrm{TC} \overset{c}{\rightarrow} \mathrm{FC}$ ve $\mathrm{TC} \overset{c}{\rightarrow} \mathrm{OC}$. Her iki yanma dalgası için *TC*'yi sol durumda; *FC* ve *OC*'yi sağ durumda inceleriz.

- **TC Sol Durumu**

(θ^-, ρ^-, Y^-)'da $\theta^- \leq 0$, $\rho^- > 0$, $Y^- > 0$ şeklindedir. Ayrıca modelimizin tanımındaki $F = \rho Y \Phi$ ifadesinden ve $\theta^- \leq 0$ olduğundan $\Phi = 0$ dır. Bu da bize;

$$F_\theta(T^-) = 0, \qquad F_\rho(T^-) = 0, \quad F_Y(T^-) = 0$$

eşitliklerini verir. Elde ettiğimiz ifadeleri (3.16)'de yerine yazarsak:

$$L_\alpha{}^- = \begin{pmatrix} -\mu^2 + i\mu(c-a-2\alpha_-) + (\alpha_-)^2 + (a-c)\alpha_- & 0 & 0 \\ 0 & i\mu c - c\alpha_- & -0 \\ 0 & 0 & i\mu(c-a) - (c-a)\alpha_- \end{pmatrix}.$$

(3.17)

bulunur. $L_\alpha{}^-$'nin spektrumu R'deki bazı μ'ler için (3.17) denkleminin özdeğerleri olan λ'ların kümesi aşağıdaki şekildedir:

$$\lambda(\mu) = -\mu^2 + i\mu(c - a - 2\alpha_-) + (\alpha_-)^2 + (a - c)\alpha_-,$$

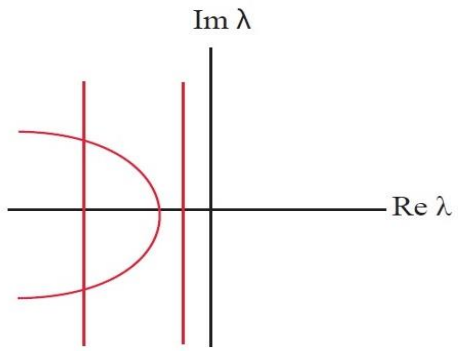
$$\lambda(\mu) = i\mu c - c\alpha_- ,$$

$$\lambda(\mu) = i\mu(c - a) - (c - a)\alpha_-.$$

(3.9)'daki spektrumu sanal eksenin soluna taşımamız için tüm özdeğerlerin reelkısmının negatif olması gerekir. Bu durumda;

$$-\mu^2 + (\alpha_-)^2 + (a - c)\alpha_- < 0,$$
$$-c\alpha_- < 0,$$
$$-(c - a)\alpha_- < 0$$

ifadelerinden $\alpha_- < 0$ ve $\alpha_- > c-a$ bulunur. Düzenlendiğinde $c-a < \alpha_- < 0$ elde edilir. Elde edilen ağırlık fonksiyonuyla spektrum sol yarı düzleme taşındığında Şekil (3.4.) elde edilir.



Şekil 3.4. TC sol durumu için spektrumun ağırlık fonksiyonu ile sanal eksenin soluna taşınmış hali

TC sol durumu için spektrumun ağırlık fonksiyonu ile sanal eksenin soluna taşınmış hali bir parabol oluşturur. Ayrıca parabolün üzerinde ve sanal eksen ile parabolün arasında iki dikey doğruya sahiptir.

- **OC Sağ Durumu**

(θ^+, ρ^+, Y^+)'da $\theta^+ > 0$, $\rho^+ > 0$, $Y^+ = 0$ şeklindedir. Ayrıca modelimizin tanımındaki $F = \rho Y \Phi$ ifadesinden;

$$F_\theta(T^+) = 0, \qquad F_\rho(T^+) = 0, \qquad F_Y T^+) = \rho^+ \Phi(\theta^+)$$

eşitliklerini verir. Elde ettiğimiz ifadeleri (3.16)'de yerine yazarsak:

$$L_\alpha{}^+ = \begin{pmatrix} -\mu^2 + i\mu(c-a-2\alpha_+) + (\alpha_+)^2 + (a-c)\alpha_+ & 0 & \rho^+\Phi(\theta^+) \\ 0 & i\mu c - c\alpha_+ & -\rho^+\Phi(\theta^+) \\ 0 & 0 & i\mu(c-a) - (c-a)\alpha_\pm - \rho^+\Phi(\theta^+) \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

bulunur. $L_\alpha{}^+$'in spektrumu R'deki bazı μ'ler için (3.18) denkleminin özdeğeri olan λ'ların kümesi aşağıdaki şekildedir:

$$-\mu^2 + i\mu(c-a-2\alpha_+) + (\alpha_+)^2 + (a-c)\alpha_+$$

$$\lambda(\mu) = i\mu c - c\alpha_+$$

$$\lambda(\mu) = i\mu(c-a) - (c-a)\alpha_+ - \rho^+\Phi(\theta^+).$$

(3.10)'daki spektrumu sanal eksenin soluna taşımamız için tüm özdeğerlerin reel kısmının negatif olması gerekir. Bu durumda;

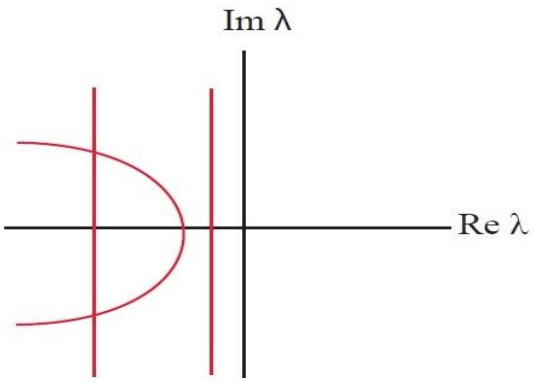
$$-\mu^2 + (\alpha_+)^2 + (a-c)\alpha_+ < 0$$

$$-c\alpha_+ < 0$$

$$-(c-a)\alpha_+ - \rho^+ \Phi(\theta^+) < 0$$

ifadelerinden $\alpha_+ < 0$ ve $\alpha_+ > c-a$ bulunur. Düzenlendiğinde $c-a < \alpha_+ < 0$ elde edilir. Elde edilen ağırlık fonksiyonuyla spektrum sol yarı düzleme taşındığında Şekil

(3.5.) elde edilir.



Şekil 3.5. OC sağ durumu için spektrumun ağırlık fonksiyonu ile sanal eksenin soluna taşınmış hali

OC sağ durumu için spektrumun ağırlık fonksiyonu ile sanal eksenin soluna taşınmış hali bir parabol oluşturur. Ayrıca parabolün üzerinde ve sanal eksen ile parabolün arasında iki dikey doğruya sahiptir.

- **FC Sağ Durumu**

(θ^+, ρ^+, Y^+)'da $\theta^+ > 0$, $\rho^+ = 0$, $Y^+ > 0$ şeklindedir. Ayrıca modelimizin tanımındaki $F = \rho Y \Phi$ ifadesinden;

$$F_\theta(T^+) = 0, \quad F_\rho(T^+) = Y^+\Phi(\theta^+), \qquad F_Y(T^+) = 0$$

eşitliklerini verir. Elde ettiğimiz ifadeleri (3.16)'de yerine yazarsak:

$$L_\alpha{}^+ = \begin{pmatrix} -\mu^2 + i\mu(c-a-2\alpha_+) + (\alpha_+)^2 + (a-c)\alpha_+ & Y^+\Phi(\theta^+) & 0 \\ 0 & i\mu c - c\alpha_+ - Y^+\Phi(\theta^+) & 0) \\ 0 & Y^+\Phi(\theta^+) & i\mu(c-a) - (c-a)\alpha_\pm \end{pmatrix}$$

(3.19)

bulunur. $\mathcal{L}$'in spektrumu R'deki bazı μ'ler için (3.19) denkleminin özdeğeri olan λ'ların kümesi aşağıdaki şekildedir:

$$-\mu^2 + i\mu(c - a - 2\alpha_+) + (\alpha_+)^2 + (a - c)\alpha_+$$

$$\lambda(\mu) = i\mu c - c\alpha_+ - Y^+\Phi(\theta^+)$$

$$\lambda(\mu) = i\mu(c - a) - (c - a)\alpha_+.$$

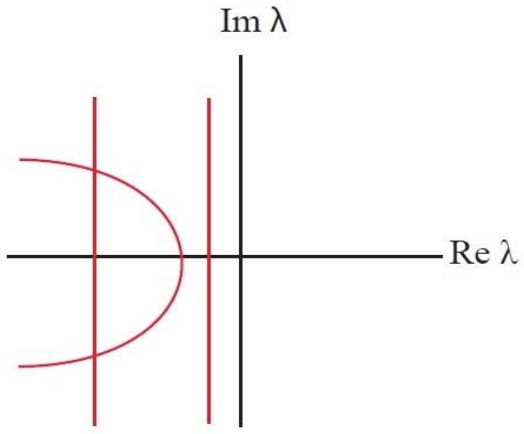
(3.11)'daki spektrumu sanal eksenin soluna taşımamız için tüm özdeğerlerin reelkısmının negatif olması gerekir. Bu durumda;

$$-\mu^2 + (\alpha_+)^2 + (a - c)\alpha_+ < 0$$

$$-c\alpha_+ - Y^+\Phi(\theta^+) < 0$$

$$-(c - a)\alpha_+ < 0$$

ifadelerinden $\alpha_+ < 0$ ve $\alpha_+ > c_a$ bulunur. Düzenlendiğinde $c - a < \alpha_+ < 0$ elde edilir. Elde edilen ağırlık fonksiyonuyla spektrum sol yarı düzleme taşındığında Şekil (3.6.) elde edilir.



Şekil 3.6. FC sağ durumu için spektrumun ağırlık fonksiyonu ile sanal eksenin soluna taşınmış hali

FC sağ durumu için spektrumun ağırlık fonksiyonu ile sanal eksenin soluna taşınmış hali bir parabol oluşturur. Ayrıca parabolün üzerinde ve sanal eksen ile parabolün arasında iki dikey doğruya sahiptir.

Ters yönde ilerleyen yanma dalgaları için $\mathcal{L}^-$ ve $\mathcal{L}^+$spektrumunun sanal eksene dokunduğu gösterilmiştir. Bu durumda dalgalarımız spektral kararlılığa sahip değildi. $\alpha = (\alpha_-, \alpha_+) \in \mathrm{R}^2$ için $c - a < \alpha_\pm < 0$ ağırlık fonksiyonu eklenerek spektrum sol yarı düzleme taşındı. Kararlılığı belirlemek için sağ yarı düzlemde özdeğerler bulunup bulunmadığı incelenmelidir. Bunun için de Evans fonksiyonunu kullanarak ayrık spektrumunun konumunu izlemek gerekir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Evans Fonksiyonu ve Nümerik Sonuçlar

Evans fonksiyonu, ilerleyen dalgaların kararlılığının belirlenmesi için önemli bir araçtır. Doğrusallaştırılmış operatörün dalga hakkındaki spektral analizi için hem analitik hem de hesaplama açısından kullanışlıdır. Evans fonksiyonu hesaplaması, doğrusal operatörün herhangi bir kararsız özdeğerinin bulunmasına izin verir. Bu da belirli bir dalganın spektral kararlılığını sağlamaya ve model parametreleri değiştikçe çatallanma noktalarını (kararlılık kaybı) tanımlamaya izin verir (Barker ve ark., 2017).

Evans fonksiyonu, $\mathcal{L}$ diferansiyel operatörünün ayrık spektrumunu bulmak için kullanılan bir analitik fonksiyondur (Alexander ve ark., 1990; Sandstede, 2002; Gubernov ve ark., 2003; Marchesin ve Schecter, 2003; Ghazaryan ve ark., 2010). Basit sistemler için analitik olarak çözülebilir, ancak genel olarak belirli bir PDE için açıkça hesaplamakzordur.

Önceki bölümde ters yönde ilerleyen yanma dalgaları için $\mathcal{L}^-$ ve $\mathcal{L}^+$ spektrumunun sanal eksene dokunduğunu gösterilmiştir. Spektruma ağırlık fonksiyonu ekleyerek sol yarı düzleme taşıdık. $\alpha = (\alpha_-, \alpha_+) \in \mathrm{R}^2$ için $c-a<\alpha_\pm<0$ spektrumu sol yarı düzleme taşımak için gereklidir. Buna ek olarak, kararlılığı belirlemek için ayrık spektrumunun konumunu izlemek gerekir. Evans fonksiyonu, ayrık spektrumunu bulmak için kullanılır. Sarmal sayısını hesaplayarak sağ yarı düzlemdeki özdeğerleri sayabiliriz.

Bu bölümde, ters yönde ilerleyen yanma dalgalarının ayrık spektrumu için Evans fonksiyonun sayısal sonucu inceleniyor. Yani esas spektrumu kararlı hale getirmek için bulunan $\alpha = (\alpha_-, \alpha_+) \in \mathrm{R}^2$ için $ca < \alpha_+ < 0$ olmak üzere $\mathcal{L}_\alpha$ operatörünün ayrık spektrumu incelenecektir. Evans fonksiyonu $D(\lambda)$, esas spektrumun sağında tanımlanan analitik bir fonksiyondur, $\mathcal{L}_\alpha$'nın özdeğeri için 0'a eşittir. Karmaşık düzlemde kapalı bir C eğrisi üzerinde $D(\lambda)$ grafiği çizilerek, sıfırdaki

sarmal sayısı $\mathcal{L}_\alpha$'nın C deki özdeğerlerinin sayısına eşit olan kapalı bir D(C) eğrisi elde edilir. İyi seçilmiş eğri, sağ yarı düzlemde $\mathcal{L}_\alpha$'nın tüm özdeğerlerini vermelidir. Bu durumda C'nin boyutunu belirli bir noktadan sonra artırmanın ek özdeğerler sağlamayacağı aşikârdır. C'yi yeterince büyük seçerek sağ yarı düzlemde ek özdeğerler olmadığı gösterilir. $У_t = \mathcal{L}_a^{\pm} У$ denkleminin özdeğer problemi yazılırsa:

$$\begin{aligned}
\lambda u &= u_{\xi\xi} + (c - a - 2\alpha_{\pm})u_\xi + (\alpha_{\pm}^{\,2} + a\alpha_{\pm} - c\alpha_{\pm})u + F_\theta(T^*)u + F_\rho(T^*)v + F_Y(T^*)z,\\
\lambda v &= cv_\xi - c\alpha_{\pm}v - F_\theta(T^*)u - F_\rho(T^*)v - F_Y(T^*)z,\\
\lambda z &= (c - a)z_\xi - (c - a)\alpha_{\pm}z - F_\theta(T^*)u - F_\rho(T^*)v - F_Y(T^*)z.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

elde edilir. $w = u_\xi$ alarak (4.1) sistemi λ parametresiyle birinci dereceden bir sistem olarak yeniden yazılırsa:

$$\begin{aligned}
u_\xi &= w,\\
w_\xi &= \lambda u - (c - a - 2\alpha_{\pm})w - (\alpha^2 + a\alpha_{\pm} - c\alpha_{\pm})u - F_\theta(T^*)u - F_\rho(T^*)v - F_Y(T^*)z,\\
v &= \tfrac{1}{c}(\lambda v + c\alpha_{\pm}v + F^{\pm}(T^*)u + F(T^*)v + F(T^*)z),\\
z &= \tfrac{1}{c-a}(\lambda z + (c - a)\,\alpha_{\pm}z + F(T^*)u + F(T^*)v + F(T^*)z)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

elde edilir. Bu denklem sistemi $Z_\xi = A(\xi, \lambda)Z$ formundadır.

$A_\pm$'nın λ cinsinden analitik olan limit matrisinin tanımı; $A_\pm(\lambda)=\lim A(\xi, \lambda)$'dır. Ayrıca L_α'nın kararsız alt uzayı $U_-(\lambda)$'nın boyutu bir ve $A_+(\lambda)$'nın kararlı alt uzayı $S_+(\lambda)$'nın boyutu üçtür. Bu da tüm faz uzayının boyutu olan dörtte birleşir. Evans fonksiyonu λ'da analitik olarak tanımlamak için; $+\infty$'daki kararsız alt uzayı kapsayan üç vektörle ve $-\infty$'deki kararlı alt uzayı kapsayan bir vektörle (4.4) denklemini kullanıp bunları $\xi = 0$'a doğru hesaplıyoruz. $\xi = 0$ için hesaplamalar sonucunda $Z^+(\xi, \lambda)$, $Z^+(\xi, \lambda)$, $Z^+(\xi, \lambda)$, $Z^-(\xi, \lambda)$ şeklinde 4 vektör elde

ediyoruz. O halde Evans fonksiyonu şu şekilde tanımlanabilir;

$$D(\lambda) = \det(Z_1^- Z_2^- Z_3^- Z_4^+).$$

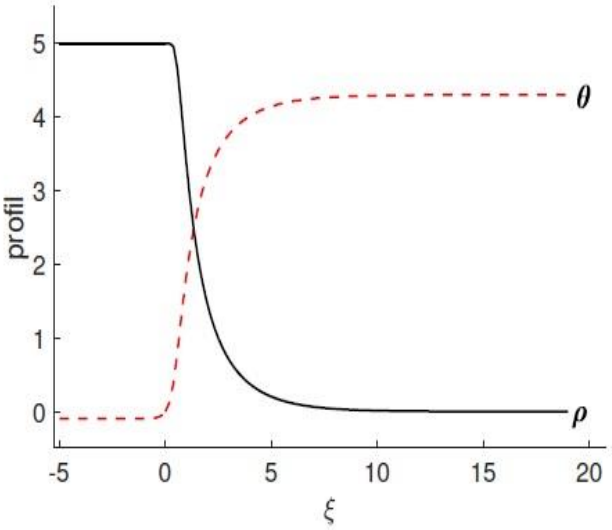
Dolayısıyla, sadece $D(\lambda) = 0$ ise bir özdeğer vardır ve kök sırası, özdeğerin cebirselçokluğuna karşılık gelir.

Sabit a, θ^-, ρ^- değerleri için Evans fonksiyonu STABLAB kullanılarak hesaplanmıştır (Barker ve ark., 2009). (3.1)–(3.3) denklemleri verilen sol durum için indirgenirse:

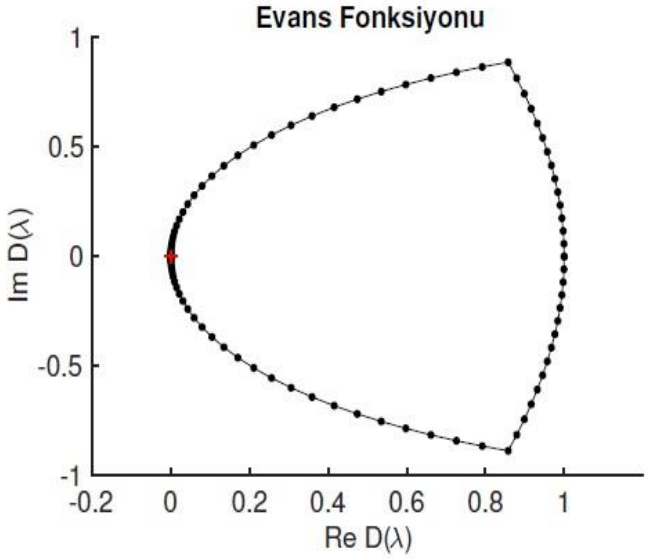
$$\dot{\theta} = (a - c)(\theta - \theta^+) - c(\rho - \rho^+) \quad (4.3)$$

$$\dot{\rho} = \left(\frac{\rho - \rho^+}{c - b} + \frac{Y^+}{c}\right)\rho\Phi(\boldsymbol{\theta}) \quad (4.4)$$

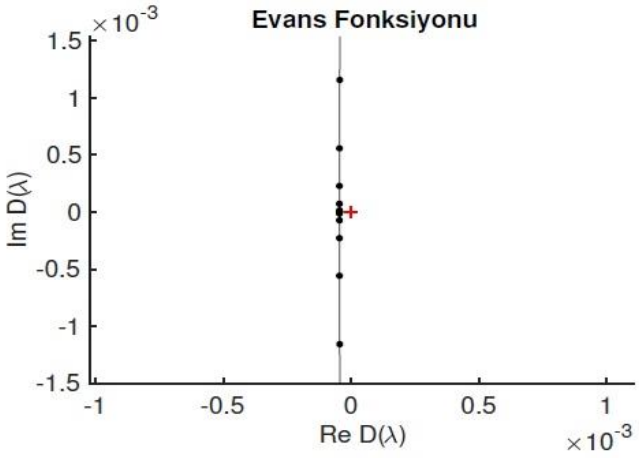
elde edilir. $Y^- = 7$ olarak sabitleyip, $TC \xrightarrow{c} FC$'ye karşılık gelen sağ durumu $\rho^+ = 0$ olan bir c hızı bulmak için AUTO kullanılarak hesaplanmıştır (Doedel ve ark., 2007). Başlangıç koşullarına uygun olarak $a = 0.5$, $\theta^- = -0.1$ ve $\rho^- = 5$ değerleri için $c = -3.6744$ olarak bulunmuştur. Ayrıca 2.1 Teoremi kullanılarak $\theta^+ = 4.3$ olarak elde edilmiştir. (4.3)–(4.4) sisteminin nümerik çözümü Şekil 4.1.'te verilmiştir. Şekil 4.2.'te Evans fonksiyonu D(C)'yi göstermektedir. Buradaki C eğrisi dikey yarıçaplı yarım daire $(x + 10^{-4})^2 + y^2 = 25^2$, $x \geq -10^{-4}$'tür. 0 civarında eğrinin sarmal sayısının bir olduğu yakınlaştırılmış Şekil 4.3.'te verilmiştir. Bu da $\lambda = 0$ özdeğeridir ve C eğrisi içinde başkaözdeğer yoktur.



Şekil 4.1. (4.3)–(4.4) sisteminin $a = 0.5$, $\theta^- = -0.1$, $Y^- = 7$, $\rho^- = 5$ ve $c = -3.6744$ için profili

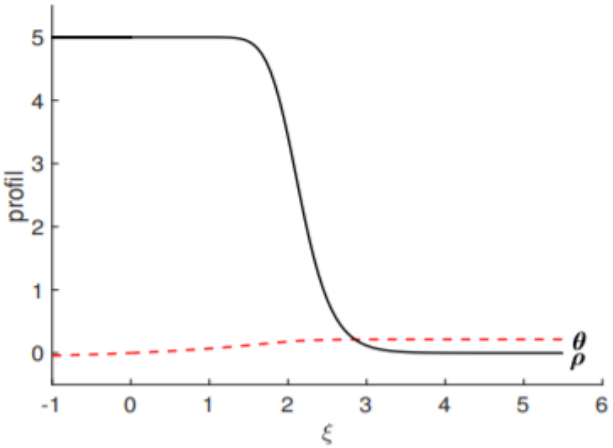


Şekil 4.2. Yarıçapı 25 olan yarım çember şeklindekii kontur için 150 nokta çember kısmında, 100 nokta dikey çap boyunca ve kontur noktaları arasında 256 kato adımı atarak Evans fonksiyonu oluşturulmuştur

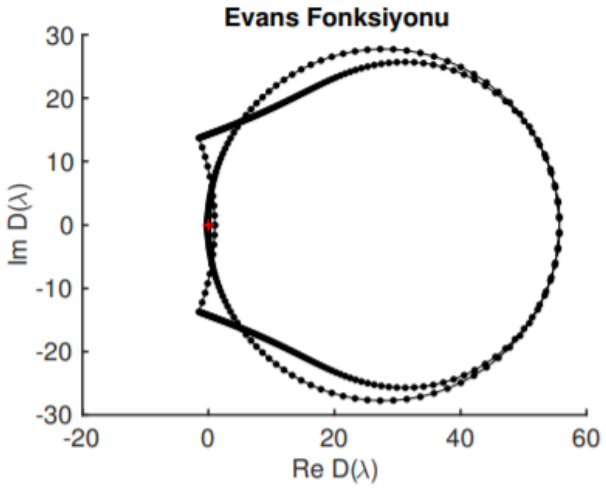


Şekil 4.3. 0'ın eğri içinde olduğunu gösteren Şekil 4.2.'in orijin civarında yakınlaştırılmış hali

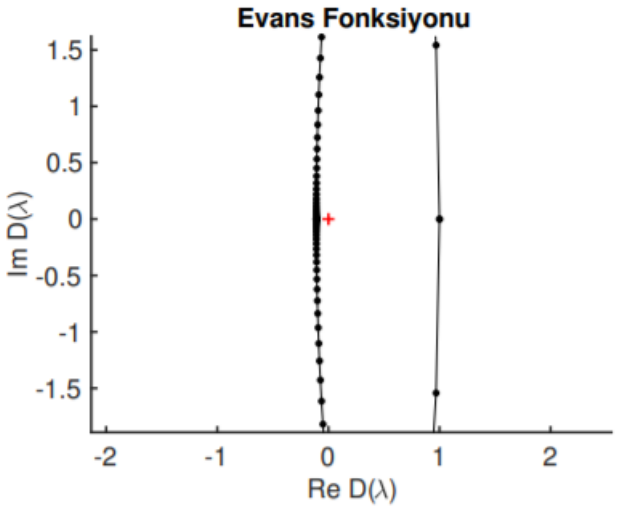
Bir başka açıdan $Y^- = 15$ olarak sabitleyip, TC $\xrightarrow{c}$ FC'ye karşılık gelen sağ durumu $\rho^+ = 0$ olan bir c hızı bulmak için AUTO kullanılarak hesaplanmıştır (Doedel ve ark., 2007). Başlangıç koşullarına uygun olarak $a = 0.5$, $\theta^- = -0.1$ ve $\rho^- = 5$ değerleri için $c = -0.0336$ olarak bulunmuştur. Ayrıca 2.1 Teoremi kullanılarak kullanılarak $\theta^+ = 0.215$ olarak elde edilmiştir. (4.3)–(4.4) sisteminin nümerik çözümü Şekil 4.4.'te verilmiştir. Şekil 4.5.'te Evans fonksiyonu D(C)'yi göstermektedir. Buradaki C eğrisi dikey yarıçaplı yarım daire $(x + 10^{-4})^2 + y^2 = 25^2$, $x \geq 10^{-4}$'tür. 0 civarında eğrinin sarmal sayısının bir olduğu yakınlaştırılmış Şekil 4.6.'te verilmiştir. Bu da $\lambda = 0$ özdeğeridir ve C eğrisi içinde başka özdeğer yoktur.



Şekil 4.4. (4.3)–(4.4) sisteminin $a = 0.5$, $\theta^- = -0.1$, $Y^- = 15$, $\rho^- = 5$ ve $c = -0.0336$ için profili



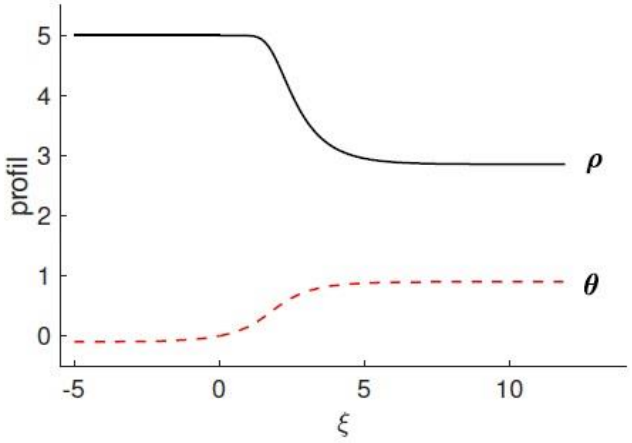
Şekil 4.5. Yarıçapı 25 olan yarım çember şeklindekii kontur için 150 nokta çember kısmında, 100 nokta dikey çap boyunca ve kontur noktaları arasında 256 kato adımı atarak Evans fonksiyonu oluşturulmuştur



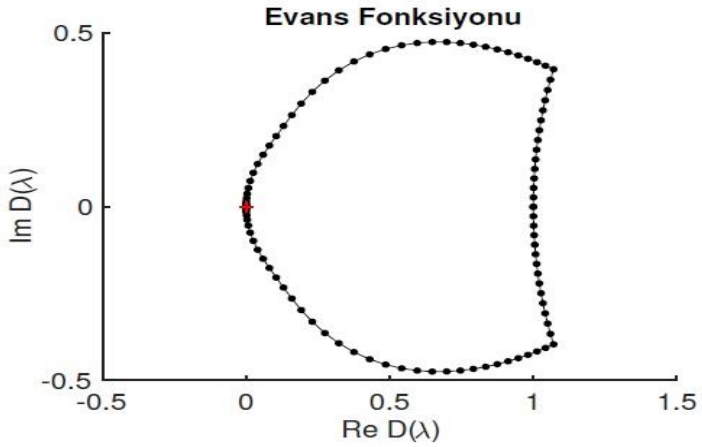
Şekil 4.6. 0'ın eğri içinde olduğunu gösteren Şekil 4.5.'in orijin civarında yakınlaştırılmış hali

Benzer şekilde $Y^{-} = 1$ olarak sabitleyip, $\mathrm{TC} \xrightarrow{c} \mathrm{FC}$ 'ye karşılık gelen sağ

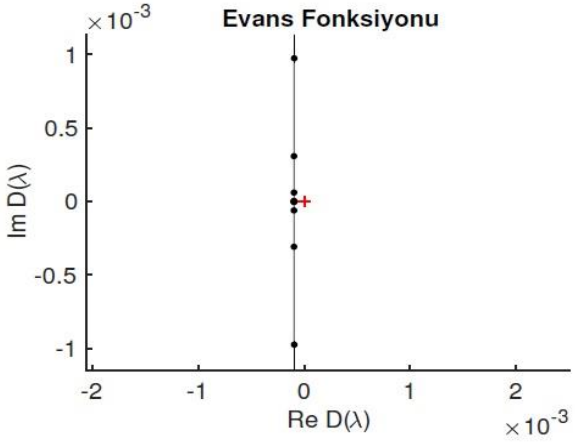
durum $Y^{+} = 0$ olan bir c hızı bulmak için AUTO kullanılarak hesaplanmıştır (Doedel ve ark., 2007). Başlangıç koşullarına uygun olarak aynı $a^{-} = 0.5$, $\theta^{-} = 0.1$ ve $\rho^{-} = 5$ değerleri için $c = 0.44$ olarak bulunmuştur. Ayrıca 2.1 Teoremi kullanılarak θ^{+}=0.9 olarak elde edilmiştir. (4.3)–(4.4) sisteminin nümerik çözümü Şekil 4.7.'te verilmiştir. Şekil 4.8.'te Evans fonksiyonu D(C)'yi göstermektedir. Buradaki C eğrisi dikey yarıçaplı yarım daire $(x + 10^{-4})^2 + y^2 = 25^2$, $x \geq 10^{-4}$,'tür. 0 civarında eğrinin sarmal sayısının bir olduğu yakınlaştırılmış Şekil 4.9.'te verilmiştir. Bu da $\lambda = 0$ özdeğeridir ve C eğrisi içinde başkaözdeğer yoktur.



Şekil 4.7. (4.3)–(4.4) sisteminin $a = 0.5$, $\theta^{-} = -0.1$, $Y^{-} = 1$, $\rho^{-} = 5$ ve $c = -0.44$ için profili

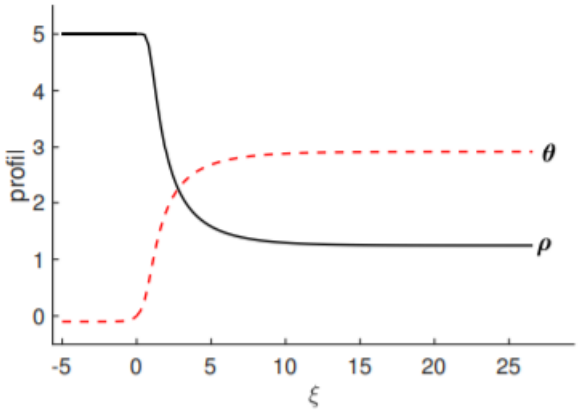


Şekil 4.8. Yarıçapı 25 olan yarım çember şeklindekii kontur için 150 nokta çember kısmında, 100 nokta dikey çap boyunca ve kontur noktaları arasında 256 kato adımı atarak Evans fonksiyonu oluşturulmuştur.

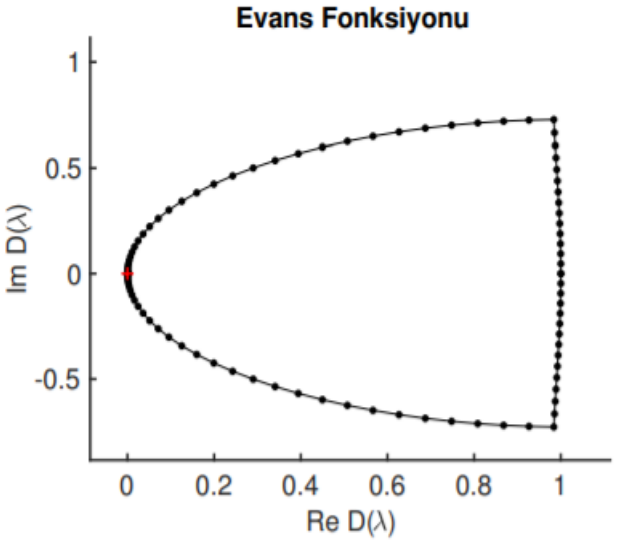


Şekil 4.9. 0'ın eğri içinde olduğunu gösteren Şekil 4.8.'in orijin civarında yakınlaştırılmış hali

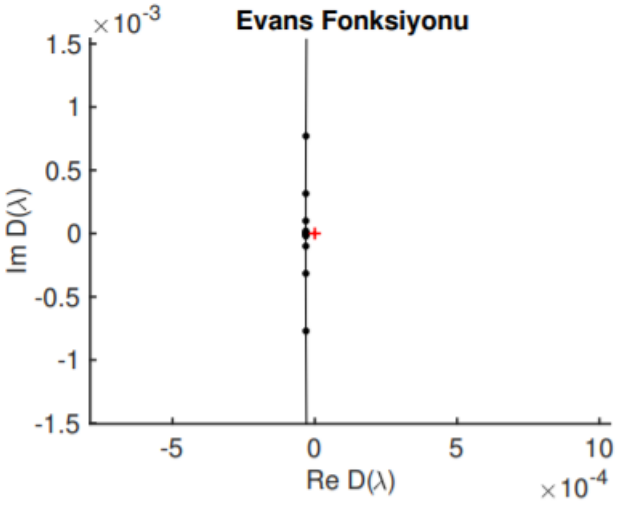
Bir başka açıdan $Y^- = 3$ olarak TC $\overset{c}{\rightarrow}$ FC 'ye karşılık gelen sağ durum Y^+=0 olan bir c hızı bulmak için AUTO kullanılarak hesaplanmıştır (Doedel ve ark.,2007). Başlangıç koşullarına uygun olarak aynı $a^- = 0.5$, $\theta^- = 0.1$ ve $\rho^- = 5$ değerleri için $c =$ 1.985 olarak bulunmuştur. Ayrıca 2.1 Teoremi kullanılarak θ^+=2.9 olarak elde edilmiştir. (4.3)–(4.4) sisteminin nümerik çözümü Şekil 4.10.'da verilmiştir. Şekil 4.11.'de Evans fonksiyonu D(C)'yi göstermektedir. Buradaki C eğrisi dikey yarıçaplı yarım daire $(x + 10^{-4})^2 + y^2 = 25^2$, $x \geq 10^{-4}$'tür. 0 civarında eğrinin sarmal sayısının bir olduğu yakınlaştırılmış Şekil 4.12.'de verilmiştir. Bu da λ=0 özdeğeridir ve C eğrisi içinde başka özdeğer yoktur.



Şekil 4.10. (4.3)–(4.4) sisteminin $a = 0.5$, $\theta^- = -0.1$, $Y^- = 3$, $\rho^- = 5$ ve $c = -1.985$ için profili



Şekil 4.11. Yarıçapı 25 olan yarım çember şeklindekii kontur için 150 nokta çember kısmında, 100 nokta dikey çap boyunca ve kontur noktaları arasında 256 kato adımı atarak Evans fonksiyonu oluşturulmuştur



Şekil 4.12. 0'ın eğri içinde olduğunu gösteren Şekil 4.11.'in orijin civarında yakınlaştırılmış hali

Ayrık spektrumlarda sıfır özdeğeri dışında kararsız özdeğer olmadığı gösterilmiştir. Böylece ters yönde ilerleyen her iki dalganın da spektral kararlılığa sahip olduğu ispatlanmıştır.

SONUÇLAR ve ÖNERİLERİ

Bu çalışmada başlangıçta bir miktar yakıt içeren gözenekli ortama hava enjekte edilerek oluşturulan yanma dalgaları çalışılmıştır. Yanma dalgalarının petrol çıkarmada kullanıldığı bilinmektedir. Yanma dalgası modelimiz sıcaklık, yakıt ve oksijenden meydana gelmektedir. Bu üç değişken yanmanın gerçekleşmesi için birbirine bağımlıdırlar. Sistemde oksijen ve sıcaklığın hızı aynıdır. Ayrıca yanma dalgamız ters yönde ilerlemektedir.

Önce bir yanma dalgası civarında sistem linerize edilmiştir. Daha sonra Fourier dönüşümü yapılmıştır. Böylece esas spektrum elde edilmiştir. Ters yönde ilerleyen yanma dalgamızın hızı negatif kabul edilerek iki yanma dalgası olduğu belirtilmiştir. İki yanma dalgasının da sağ ve sol durumlardaki özdeğerleri ayrı ayrı belirlenmiştir. Özdeğerler ile belirlenen esas spektrumların grafikleri çizilmiştir. Böylece spektrumun grafiğinin parabollerden meydana geldiği ve sanal eksene dokunduğu görülmüştür. Böylece esas spektrumun marjinal kararlılığa sahip olduğu görülmüştüş ancak spektral kararlılığı sağlamadığı görülmüştür. Kararlılığın sağlanması için esas spektrum sanal eksenin soluna taşınmıştır. Bu taşımayı gerçekleştirmek için bir ağırlık fonksiyonu bulunmuştur. Spektrum sol yarı düzleme taşınması sonucu spektral kararlılığa sahip olduğunu belirleyebilmek için Evans fonksiyonundan yararlanılmıştır.

Evans fonksiyonu ile başlangıç koşullarına uygun olarak belirlenen parametreler kullanılarak ters yönde ilerleyen yanma dalgalarının hızı bulunmuştur. AUTO programı ile oluşturulan yarım dairenin içinde kalankararlılığı bozacak özdeğerleri veren Evans fonksiyonunun grafiği çizilmiş, bir sarmal sayısı olduğu gösterilmiştir. Bu da orijin dışında kararlılığı bozacak herhangi bir özdeğer olmadığı incelenmiştir. Sonuç olarakçalışmamızda kullandığımız ters yönde ilerleyen yanma dalgalarının spektral kararlılığı ispatlanmıştır.

Çalışmada başlangıçta bir miktar yakıt içeren gözenekli ortama hava enjekte edilerek oluşturulan yanma dalgaları çalışılmıştır. Gözenekli ortamda ters yönde ilerleyen yanma dalgalarının kararlılığını ispatlayarak petrol geri kazanımının en üst düzeye çıkarılmasına yardımcı olduk. Böylece petrol çıkarma işlemi; önceden kullanılan son derece pahalı ve zaman alıcı yöntemlerin yerine modern yöntemlerle desteklenerek daha ekonomik ve daha az sürede en üst düzeye çıkarılabilir.

KAYNAKLAR

AKKUTLU, I.Y. ve YORTSOS, Y.C., 2003. The dynamics of in-situ combustion fronts in porous media. J. Combust. Flame 134, 229–247. (doi:10.1016/S0010-2180(03)00095-6)

ALEXANDER, J., GARDNER, R. ve JONES, C., 1990. A topological invariant arising in the stability analsis of traveling waves. J. Reine Angew. Math., 410, 167-212.

ALDUSHIN, A. P., RUMANOV, I. E. ve MATKOWSKY, B. J., 1999. Maximal energy accumulation in a superadiabatic filtration combustion wave. J. Combust. Flame118 (1999) 76–90.

BARKER, B., HUMPHERYS, J., LYNG, G. ve LYTLE, J., 2017. Evans function computation for the stability of travelling waves Phil. Trans. R. Soc. A 376:20170184

BARKER, B., HUMPHERYS, J. ve ZUMBRUN, K., 2009. STABLAB: a MATLAB-based numerical library for Evans function computation. See http://www.impact.byu.edu/stablab/.

BARLAS, G., 2020. Gözenekli ortamda ters yönde ilerleyen yanma dalgalarının varlığı.Yüksek Lisans Tezi, Harran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Şanlıurfa.

BRUINING, J., MAILYBAEV, A. A. ve MARCHESIN, D., 2009. Filtration combustion in wet porous medium. SIAM J. Appl. Math. 70 (2009) 1157–1177.

CHAPIRO, G., MAILYBAEV, A.A., DE SOUZA, A.J., MARCHESIN, D. ve BRUINING, J., 2012. Asymptotic approximation of long-time solution for low- temperature filtration combustion. Comput. Geosci. 16, 799–808. (doi:10.1007/s10596-012-9288-0)

CHAPIRO, G., MARCHESIN, D. ve SCHECTER, S., 2014. Combustion waves and Riemann solutions in light porous foam. J. Hyperbol. Differ. Equ. 11, 295–328.(doi:10.1142/S021989161450009X)

CHAPIRO, G. ve SENOS, L., 2017. Riemann solutions for counterflow combustion in light porous foam. Comp. Appl. Math. (doi 10.1007/s40314-017-0420-6)

DOEDEL, E.J., CHAMPNEYS, A.R., FAIRGRIEVE, T.F., KUZNETSOV, Y.A., OLDEMAN, B., PAFFENROTH, R., SANDSTEDE, B., WANG, X. ve ZHANG, C., 2007. AUTO-07P: continuation and bifurcation software for ordinary differential equations. Concordia University, Montreal, Canada. See http://indy.cs.concordia.ca/auto/.

GUBERNOV, V., MERCER, G.N., SIDHU, H.S. ve WEBER, R.O., 2003. Evans function stability of combustion waves. SIAM J. Appl. Math. 63, 1259–1275. (doi:10.1137/S0036139901400240)

GHAZARYAN, A., LATUSHKIN, Y. ve SCHECTER, S., 2010. Stability of traveling waves for a class of reaction–diffusion systems that arise in chemical reaction models SIAM J. Math. Anal. 42(6) (2010) 2434–2472.

GHAZARYAN. A., LATUSKIN, Y., SCHECTER, S. ve DE SOUZA, A.J., 2010. Stability of gasless combustion fronts in one-dimensional solids. Arch. Ration. Mech. Analy. 198(3) (2010) 981–1030.

MARCHESIN, D. ve SCHECTER, S., 2003. Oxidation heat pulses in two-phase expansive flow inMporous media. Z. Angew. Math. Phys. 54(1) (2003) 48–83.