



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATRİS EŞİTSİZLİKLERİ VE CEBİRSEL MATRİS DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜM MATRİSLERİ İÇİN SINIRLAR

Zübeyde ULUKÖK

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Mayıs-2014

KONYA

Her Hakkı Saklıdır

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Zübeyde ULUKÖK

Tarih: 09.05.2014

ÖZET

DOKTORA TEZİ

MATRİS EŞİTSİZLİKLERİ VE CEBİRSEL MATRİS DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜM MATRİSLERİ İÇİN SINIRLAR

Zübeyde ULUKÖK

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN

2014, 125 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Prof. Dr. Aşır GENÇ
Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN
Doç. Dr. Süleyman SOLAK
Doç. Dr. Yıldıray KESKİN

Son yıllarda kontrol ve dinamik sistemlerin dizayn ve analizi, özellikle optimal kontrol ve kararlılık analizi gibi mühendisliğin birçok alanında cebirsel Riccati ve Lyapunov matris denklemlerinin çözümleri ve yapıları önemli rol oynamaktadır. Kararlılık analizi gibi bazı uygulamalarda ise yalnızca bu denklemlerin çözümü için sınırlara ihtiyaç duyulmaktadır. Bu yüzden bahsedilen problemlerde sık sık karşımıza çıkan cebirsel Riccati ve Lyapunov matris denklemlerinin çözümleri için birçok sınır geliştirilmiştir. Bu doktora tez çalışmasında, özel durumlarda Lyapunov matris denklemlerini içeren, sürekli ve ayrık cebirsel Riccati matris denklemlerinin çözüm matrisleri için, matris eşitsizlikleri ve matris özdeşlikleri yardımıyla bu denklemlerin denk formları oluşturularak farklı parametrelere bağlı üst sınırlar elde edilmiştir. Ayrıca elde edilen bu sınırlar için gerçek değere daha yakın sınırlar elde etmek amacıyla iteratif algoritmalar geliştirilmiş ve bazı özel durum ve kriterlerle, özellikle de sayısal örneklerle, elde edilen sınırların etkinliği gösterilmiştir. Son olarak, elde edilen algoritmalar için Maple prosedürleri verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ayrık cebirsel Riccati matris denklemi, İteratif algoritma, Matris eşitsizliği, Matris sınırı, Sürekli cebirsel Riccati matris denklemi

ABSTRACT

Ph.D THESIS

MATRIX INEQUALITIES AND BOUNDS FOR THE SOLUTION MATRICES OF THE ALGEBRAIC MATRIX EQUATIONS

Zübeyde ULUKÖK

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATICS

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Ramazan TÜRKMEN

2014, 125 Pages

Jury
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Prof. Dr. Aşır GENÇ
Assoc. Prof. Dr. Ramazan TÜRKMEN
Assoc. Prof. Dr. Süleyman SOLAK
Assoc. Prof. Dr. Yıldıray KESKİN

In the recent years, the algebraic Riccati and Lyapunov matrix equations play an important role in many areas of engineering such as the analysis and design of control and dynamical systems, especially, the optimal control and stability analysis. But it is needed only bounds to solution matrices of these equations for some applications as stability analysis. Thus, a number of bounds are improved for the solutions of the algebraic Riccati and Lyapunov matrix equations which are frequently encountered in these kinds of problems. In Ph.D thesis, by constructing the equivalent forms of the continuous and discrete algebraic Riccati matrix equations involving Lyapunov matrix equations in special cases, by means of matrix identities and matrix inequalities, the upper bounds depending on the different parameters for the soluion matrices of the continuous and discrete algebraic Riccati matrix equations are obtained. Also, for each derived bound, iterative algorithms are developed to obtain the tighter solution estimates and the effectiveness of the given bounds are demonstrated by the special cases, criterion and particularly numerical examples. Finally, the Maple procedures of the obtained algorithms are given.

Keywords: Continuous algebraic Riccati matrix equation, Discrete algebraic Riccati matrix equation, Iterative algorithm, Matrix bound, Matrix inequality.

ÖNSÖZ

Bu doktora tez çalışması Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN yönetiminde hazırlanarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü' ne sunulmuştur.

Bu çalışmanın amacı, matematik ve mühendisliğin birçok alanında karşımıza çıkan sürekli ve ayrık cebirsel Riccati matris denklemlerinin çözümleri için matris sınırları sunmaktır. Tez, dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, söz konusu denklemlerin ortaya çıkışı, bu denklemlerde yer alan temel ifadelerin tanımları ve bu denklemlerin kullanım alanlarına ilişkin bilgiler ve çalışma boyunca kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde, literatür araştırması yapılarak son yıllardaki çalışmalar özetlenmiştir. Üçüncü bölümde, ilk iki bölümde verilen bilgiler ışığında sürekli cebirsel Riccati matris denkleminin çözüm matrisi için üst sınırlar elde edilmiş ve bu sınırlar kullanılarak gerçek değere daha yakın değerler veren iteratif algoritmalar geliştirilmiştir. Ayrıca, elde edilen sonuçların etkinliğini göstermek için sayısal örnekler verilmiştir. Dördüncü bölümde, yine ilk iki bölümde verilen bilgiler göz önüne alınarak, ayrık cebirsel Riccati matris denkleminin çözüm matrisi için üst sınırlar elde edilmiş ve bu sınırlar yardımıyla daha iyi yaklaşımlar veren iteratif algoritmalar geliştirilmiştir. Ayrıca elde edilen sonuçların etkinliğini göstermek için sayısal örnekler verilmiştir. Ekler bölümünde, üçüncü ve dördüncü bölümde geliştirilen iteratif algoritmalar için Maple prosedürleri verilmiştir.

Bu çalışmayı hazırlamamda emeği geçen değerli tez danışmanım Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN'e, tez izleme komitesinde bulunan ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım Prof. Dr. Durmuş BOZKURT'a ve Prof. Dr. Aşır GENÇ'e, çalışma boyunca her zaman destek olan, yardım ve önerilerini esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Yıldıray KESKİN'e ve desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bu çalışma süresince her zaman yanımda olan ve benden desteklerini esirgemeyen aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Zübeyde ULUKÖK
KONYA-2014

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **viii**

1. GİRİŞ **1**

1.1. Genel Bilgiler 3
1.1.1. Hermityen (Simetrik) Matrisler 3
1.1.2. Pozitif Tanımlı ve Pozitif Yarı Tanımlı Matrisler 4
1.1.3. Konveks ve Matris Konveks Fonksiyonlar 8
1.1.4. Sürekli Cebirsel Riccati Matris Denklemi ve Temel Kavramlar 10
1.1.5. Ayrık Cebirsel Riccati Matris Denklemi ve Temel Kavramlar 15

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI **20**

2.1. Sürekli Cebirsel Riccati Matris Denklemi 20
2.2. Ayrık Cebirsel Riccati Matris Denklemi 31

3. SÜREKLİ CEBİRSEL RİCCATİ MATRİS DENKLEMİNİN ÇÖZÜM MATRİSİ İÇİN ÜST SINIRLAR **39**

3.1. Temel Sonuçlar 39
3.2. Sayısal Örnekler 77

4. AYRIK CEBİRSEL RİCCATİ MATRİS DENKLEMİNİN ÇÖZÜM MATRİSİ İÇİN ÜST SINIRLAR **87**

4.1. Temel Sonuçlar 87
4.2. Sayısal Örnekler 100

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **107**

5.1. Sonuçlar 107
5.2. Öneriler 107

KAYNAKLAR **108**

EKLER **114**

Ek 1. Sürekli Cebirsel Riccati Matris Denklemi İçin Maple Prosedürleri 114
Ek 2. Ayrık Cebirsel Riccati Matris Denklemi İçin Maple Prosedürleri 123

ÖZGEÇMİŞ **126**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$: Kompleks sayılar kümesi
$\mathrm{Re}(\lambda)$: $\lambda \in \mathbb{C}$ nin reel kısmı
$\mathbb{R}^n$: n bileşenli reel vektör uzayı
$\mathbb{C}^n$: n bileşenli kompleks vektör uzayı
$\mathbb{R}^{m\times n}$: $m\times n$ tipinde reel matrisler uzayı
$\mathbb{C}^{m\times n}$: $m\times n$ tipinde kompleks matrisler uzayı
$M_{m,n}$: $m\times n$ tipinde matris uzayı
$A, B, C,$ vs : Matrisler
I : Birim matris
$A>0$: Pozitif tanımlı matris
$A\geq 0$: Pozitif yarı tanımlı matris
$\alpha, \beta, \gamma,$ vs : Sabitler
A^T : A matrisinin transpozu
A^* : A matrisinin eşlenik transpozu
A^{-1} : A matrisinin tersi
A^n : A matrisinin $n.$ kuvveti
$A^{1/2}$: Pozitif yarı tanımlı A matrisinin karekökü
$\lambda_i(A)$: A matrisinin $i.$ öz değeri
$\lambda_1(A)$: A matrisinin en büyük öz değeri
$\lambda_n(A)$: A matrisinin en küçük öz değeri
$\mu(A)$: $\lambda_1\left(\frac{A+A^T}{2}\right)$
$\rho(A)$: $\max_i \left|\lambda_i(A)\right|$ - Spektral yarıçap
$s_i(A)$: A matrisinin $i.$ singüler değeri
$s_1(A)$: A matrisinin en büyük singüler değeri
$s_n(A)$: A matrisinin en küçük singüler değeri
$\|A\|$: $\max\left\{\lambda : \lambda, \left(A^*A\right)^{1/2} \text{ nın bir öz değeri}\right\}$ - A matisinin spektral normu

Kısaltmalar

$iz(A)$: A matrisinin izi
$\det(A)$: A matrisinin determinantı
$köş(A)$: A matrisinin köşegeni
CARE : Sürekli cebirsel Riccati matris denklemi
DARE : Ayrık cebirsel Riccati matris denklemi
CALE : Sürekli cebirsel Lyapunov matris denklemi
DALE : Ayrık cebirsel Lyapunov matris denklemi

1. GİRİŞ

Lineer cebir ve matris teori matematiğin en kullanışlı dallarından biri olup, birçok alanda temel bir araç olarak ele alınmaktadır. Matris teori, uygulamalı matematiği içeren çeşitli alanlarda, bilgisayar bilimlerinde, ekonomide, mühendisliklerde, istatistik ve diğer birçok alanda yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Özellikle matris denklemlerini içeren birçok alanda matris analizi ve matris eşitsizliklerinin önemli rol oynadığı görülmektedir. Son yıllarda, matris denklemlerine ihtiyaç duyulan dinamik sistemlerin analiz ve dizayn problemleri, mühendisliğin birçok alanında ve matematikte önem teşkil etmekte ve bu problemler birçok araştırmacı tarafından ele alınmaktadır (Chen ve Lee, 2009a; Kleinman ve Athans, 1968; Lee, 1998; Pastravanu ve Matcovschi, 2010; Su ve ark., 2012; Sun, 1998; Vidyasagar, 1993; Wang ve Lin, 1987; Wu ve ark., 2011). Bu tür problemler ele alınırken genellikle Lyapunov kararlılık teorisi ve Lyapunov yaklaşımı kullanılmaktadır (Barnett ve Storey, 1970; Datta, 2003; Kwakernaak ve Sivan, 1972; Savov ve Popchev, 2004; Sun, 1998; Vidyasagar, 1993; Zhang ve ark., 2012). Lyapunov kararlılık teorisi, sürekli bir $\dot{x}(t) = Ax(t)$ diferensiyel denklem sisteminin kararlı (asimtotik kararlı) olması için gerek ve yeter şartın herhangi pozitif tanımlı bir M matrisi için

$$XA + A^T X = -M$$

denklemini sağlayan pozitif tanımlı bir X matrisinin mevcut olduğunu ifade etmektedir (Datta, 2003).

Yukarıda bahsedilen problemlerde cebirsel Riccati ve Lyapunov matris denklemleri önemli bir yere sahip olup, lineer kontrol sistemlerin analiz ve sentezinde sık sık karşımıza çıkmaktadır (Allwright, 1980; Davies ve ark., 2007b; Lee ve Chang, 1998; Lee, 2005; Mori ve Derese, 1984; Sun, 1998; Zhang ve ark., 2012). Bu yüzden bu denklemlerin yapısı, çözümleri ve çözüm şartları gibi konular kapsamlı bir şekilde incelenmektedir.

Literatüre baktığımızda, kontrol teoride, optimal kontrol (Basin ve ark., 2007; Davies ve ark., 2007b; Kwakernaak ve Sivan, 1972), kararlılık analizi (Wu ve ark., 2011), gözlemleyici tasarımı (Zhang ve ark., 2012) ve sinyal işlemede ortaya çıkan süzgeç tasarımı (Su ve ark., 2012) gibi birçok alanda bu denklemlere sıklıkla ihtiyaç duyulmaktadır. Örneğin, (Zhang ve ark., 2012) çalışmalarında, lineer olmayan sistemlerin bir sınıfı için gözlemci kazanç matrisi (observer gain matrix) olarak tanımlanan matrisi, Riccati denklemlerini kullanarak oluşturmuşlardır.

Ancak bu denklemlerin analitik çözümleri birçok hesaplama ve işlem yükü gerektirmektedir. Özellikle sistem matrislerinin mertebesi arttıkça gerçek değeri hesaplamak daha zor bir hale gelmektedir. Cebirsel Riccati matris denklemlerinin çözümleri için Schur ve Newton metodu gibi algoritmik çözümler mevcut olsa da bu metotlar da fazlaca işlem yükü gerektirmektedir (Datta, 2003; Huang ve Lin, 2009). Bu açıdan bakıldığında, işlem yükü daha aza indirgendiğinden mühendisliğin bir çok alanında bu denklemin tam çözümü yerine çözüm matrisi için sınırlara ihtiyaç duyulmaktadır (Lee, 1998; Wang ve ark., 1987). Örneğin değiştirilmiş (perturbed) sistemler için (Sun, 1998) kararlılık analizi ve sağlam kararlılık (robust stability) (Lee ve ark., 1993; Wang ve ark., 1987) gibi birçok kontrol problemi için çözüm sınırları kullanılmaktadır. Bu yüzden söz konusu denklemlerin çözüm sınırları, tam çözüm için hata miktarı içermesine rağmen tam çözüm yapılmadan, yaklaşık tahminlerde bulunulmasına imkan sağlamasının yanında çarpımsal sistemler (multiplicative systems) için (Kouikoglou ve Phillis, 1993; Lee, 2005) tahmin hatalarının ölçüsünü belirleme gibi birçok kontrol problemine çözüm aramak için kullanılabilmektedir.

Geçmiş otuz yıl boyunca, sürekli ve ayrık cebirsel Riccati matris denklemlerinin çözüm matrisleri için çok sayıda alt ve üst sınır sunan çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalar, Riccati matris denklemlerinin çözüm matrislerinin en büyük ve en küçük öz değerleri için alt ve üst sınırları (Czornik ve Yaz, 2000; Kim ve Park, 2000; Kwon ve ark., 1996; Lee, 1996; Lee, 1997b; Lee, 1997d; Mori ve Derese, 1984), öz değerler için majorizasyon eşitsizliklerini (Liu ve ark., 2010; Liu ve Zhang., 2011; Liu ve Zhang, 2014), iz sınırlarını (Kwon ve ark., 1996; Mori ve Derese, 1984; Liu ve ark., 2009; Liu ve Zhang, 2009), determinant sınırlarını (Kwon ve ark., 1996; Mori ve Derese, 1984) ve norm sınırlarını (Kang ve ark., 1996) içermektedir. Elde edilen sınırlara bakıldığında, çözüm matrisleri için elde edilen alt (Chen ve Lee, 2009b; Choi ve Kuc, 2002; Davies ve ark., 2007; Kim ve Park, 1999; Komaroff, 1994a; Lee, 1997d; Lee, 1997e; Lee ve Chang, 1998; Lee ve Hsien, 1999; Lee, 2003a; Lee, 2003b, Zhang ve Liu, 2011a; Zhang ve Liu, 2011b) ve üst sınırları içeren matris sınırları (2. bölümde detaylı olarak verilmiştir), en genel ve kullanışlı olanıdır. Çünkü öz değerleri içeren diğer sınırlar, monotonluk aracılığıyla matris sınırlarından doğrudan elde edilebilmektedir.

Sonraki bölümde, çalışmanın ileriki sürecinde kullanılacak olan temel bilgiler verilmiş ve yukarıda bahsedilen cebirsel Riccati ve Lyapunov matris denklemleri tanıtılmıştır.

1.1. Genel Bilgiler

Bu bölümde, çalışmamızda kullanılan bazı temel kavramlar, tanımlar ve teoremler verilecektir.

1.1.1. Hermityen (Simetrik) Matrisler

Tanım 1.1.1.1. (Horn ve Johnson, 2013) A, $n\times n$ kompleks matris olsun. Eğer $A^* = A$ ise A matrisine *Hermityen matris* denir.

$A,B\in M_n$ için bazı incelemeler verelim:

i. Her $A\in M_n$ için $A+A^*$, AA^* ve A^*A matrisleri Hermityendir.

ii. A bir Hermityen matris ise $k=1,2,\ldots,n$ için A^k da Hermityendir. A, singüler değilse A^{-1} de Hermityendir.

iii. A ve B Hermityen matrislerse a ve b reel skalerler olmak üzere $aA+bB$ de Hermityendir.

iv. Her $x\in\mathbb{C}^n$ için x^*Ax reeldir.

v. Her $S\in M_n$ için S^*AS Hermityendir.

Teorem 1.1.1.1. (Horn ve Johnson, 2013) $A\in M_n$ verilsin. A matrisinin Hermityen olması için gerek ve yeter şart $A=U\Lambda U^*$ olacak şekilde bir $U\in M_n$ üniter matrisinin ve bir reel köşegen $\Lambda\in M_n$ matrisinin varlığıdır.

Aşağıda Teorem 1.1.1.1 in daha genel bir formu verilmiştir:

Teorem 1.1.1.2. (Horn ve Johnson, 2013) A, $n\times n$ kompleks elemanlı bir matris ve öz değerleri $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ ler olsun. Bu takdirde T, köşegen elemanları λ_i ler olan bir üst üçgen matris olmak üzere $U^*AU=T=\left[t_{ij}\right]$ olacak şekilde bir $U\in\mathbb{C}^{n\times n}$ üniter matrisi vardır. Bu teorem *Schur üçgenleştirme teoremi* olarak adlandırılır.

Teorem 1.1.1.3. (Datta, 2003) A, $n\times n$ reel elemanlı bir matris olsun. Bu takdirde her bir R_{ii} bir skaler ya da 2×2 şeklinde bir matris olmak üzere

$$Q^TAQ=R=\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1k} \\ 0 & R_{22} & \cdots & R_{2k} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & R_{kk} \end{pmatrix}$$

olacak şekilde ortogonal bir $Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi vardır. Bu matriste skaler köşegen elemanları reel öz değerlere karşılık gelir ve köşegen üzerindeki her bir 2×2 tipindeki

matris, kompleks eşlenik öz değer çiftine sahiptir. Bu teorem *Reel Schur üçgenleştirme teoremi* olarak adlandırılır.

Teorem 1.1.1.4. (Bernstein, 2005) $A \in M_n$, Hermityen bir matris olsun. O halde

$$\lambda_n(A) I \le A \le \lambda_1(A) I \tag{1.1}$$

dır.

Teorem 1.1.1.5. (Zhang, 1999) $A,\ B \in M_n$, Hermityen matrisler olsun. Bu takdirde

$$\lambda_i(A) + \lambda_n(B) \le \lambda_i(A+B) \le \lambda_i(A) + \lambda_1(B) \tag{1.2}$$

dir.

Teorem 1.1.1.6. (Zhang, 1999) A ve B, herhangi kompleks matrisler olsun. Bu takdirde $A,\ B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ için

$$s_i(A) + s_n(B) \le s_i(A+B) \le s_i(A) + s_1(B), \tag{1.3}$$

ve $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ve $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ için

$$s_i(A) s_n(B) \le s_i(AB) \le s_i(A) s_1(B) \tag{1.4}$$

dir.

Teorem 1.1.1.7. (Zhang, 1999) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olsun. O halde $i = 1,2,\ldots,n$ için

$$\left| \lambda_i \left(\frac{A + A^T}{2} \right) \right| \le s_i(A) \tag{1.5}$$

dır.

Teorem 1.1.1.8. (Bernstein, 2005) $A \in M_n$, herhangi bir matris ve $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ler A nın öz değerleri ve $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ler de $\frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$ matrisinin öz değerleri olsun. Bu takdirde $m = 1,2,\ldots,n$ için

$$\sum_{i=1}^{m} \operatorname{Re} \lambda_i(A) \le \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \tag{1.6}$$

olup $m = n$ için eşitlik sağlanmaktadır.

1.1.2. Pozitif Tanımlı ve Pozitif Yarı Tanımlı Matrisler

Tanım 1.1.2.1 (Zhang, 1999) A, $n \times n$ tipinde herhangi bir matris olsun. Her $x \in \mathbb{C}^n$ için $x^* A x \ge 0$ oluyorsa, A matrisi *pozitif yarı tanımlı* olarak adlandırılır ve $A \ge 0$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.2.2. (Zhang, 1999) A, $n\times n$ tipinde herhangi bir matris olsun. Sıfırdan farklı her $x\in\mathbb{C}^n$ için $x^*Ax>0$ oluyorsa, A matrisi *pozitif tanımlı* olarak adlandırılır ve $A>0$ ile gösterilir.

Teorem 1.1.2.1. (Zhang, 1999) $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ olsun. Bu takdirde herhangi bir $X\in\mathbb{C}^{n\times m}$ için

$$A\geq 0\Leftrightarrow X^*AX\geq 0 \tag{1.7}$$

dır.

Teorem 1.1.2.2. (Zhang, 1999) $A\in M_n$ için aşağıdaki ifadeler denktir:

i. A, pozitif yarı tanımlıdır.

ii. Herhangi bir B matrisi için $A=B^*B$ olarak yazılabilir.

iii. Üst üçgen bir C matrisi için $A=C^*C$ olarak yazılabilir.

Teorem 1.1.2.3. (Horn ve Johnson, 2013) $A\in M_n$ matrisinin pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart öz değerlerinin reel ve pozitif olmasıdır.

Sonuç 1.1.2.1. (Horn ve Johnson, 2013) $A\in M_n$ pozitif yarı tanımlı ise $k=1,2,\ldots,n$ için A^k da pozitif yarı tanımlıdır.

Sonuç 1.1.2.2. (Horn ve Johnson, 2013) Pozitif yarı tanımlı bir matrisin izi, determinantı ve tüm esas minörleri negatif olmayan reel sayılardır.

Teorem 1.1.2.4. (Zhang, 1999) A, $n\times n$ tipinde kompleks matris ve λ_i ler de A nın öz değerleri olsun. Bu durumda A matrisinin pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart $\Lambda=köş(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ olmak üzere $A=U^*\Lambda U$ olacak şekilde bir U üniter matrisinin varlığıdır.

Teorem 1.1.2.5. (Zhang, 1999) $A\geq 0$ olsun. Bu durumda $B^2=A$ olacak şekilde tek bir $B\geq 0$ matrisi vardır.

Teorem 1.1.2.5 daha genel olarak aşağıdaki şekilde verilebilir:

Teorem 1.1.2.6. (Horn ve Johnson, 2013) A, pozitif yarı tanımlı bir matris ve $k\geq 1$ bir tamsayı olsun. O halde $B^k=A$ olacak şekilde tek bir B matrisi vardır.

Tanım 1.1.2.3. (Zhang, 1999) A ve B, $n\times n$ tipinde Hermityen matrisler olsun. $A-B$ pozitif yarı tanımlı ise $A\geq B$ yazılır. Benzer şekilde $A-B$ pozitif tanımlı ise $A>B$ yazılır. Hermityen matrisler cümlesi üzerinde ki bu sıralama *Löwner sıralaması* olarak adlandırılır. "$\geq$" bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Yani, A, B ve C, Hermityen matrisler olmak üzere;

i. $A\geq A$,

ii. $A \geq B$ ve $B \geq A$ ise $A = B$,

iii. $A \geq B$ ve $B \geq C$ ise $A \geq C$

dir.

Teorem 1.1.2.7. (Zhang, 1999) A ve B, $n \times n$ tipinde Hermityen matrisler olsun. O halde, uygun mertebeden herhangi bir X matrisi için

$$A \geq B \Leftrightarrow X^* AX \geq X^* BX \tag{1.8}$$

dir.

Teorem 1.1.2.8. (Zhang, 1999) $A, B \in M_n$, Hermityen matrisler olsun. Bu durumda $i = 1, 2, \ldots, n$ için

$$A \geq B \Rightarrow \lambda_i(A) \geq \lambda_i(B) \tag{1.9}$$

dir. Bu ifade Weyl'in monotonluk prensibi olarak adlandırılır.

Teorem 1.1.2.9. (Zhang, 1999) $A \geq B \geq 0$ olsun. Bu takdirde

i. $rank(A) \geq rank(B)$,

ii. $\det(A) \geq \det(B)$,

iii. $iz(A) \geq iz(B)$,

iv. $A^{1/2} \geq B^{1/2}$,

v. A ve B regülerse $B^{-1} \geq A^{-1}$

dir.

Teorem 1.1.2.10. (Zhang, 1999) A ve B sırasıyla $m \times n$ ve $n \times m$ tipinde kompleks matrisler olsun. Bu takdirde AB ve BA katlılıkları dahil olmak üzere sıfırdan farklı olan aynı öz değerlere sahiptir.

Tanım 1.1.2.4. (Zhang, 1999) A_{11}, A matrisinin bir kare alt matrisi olmak üzere

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

kare blok matrisi verilsin. A_{11} singüler değilse

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

yazılabilir. $\tilde{A}_{11} = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ ifadesi A da A_{11} in *Schur tamamlayanı* olarak adlandırılır. Her iki tarafın determinantı alındığında

$$\det A = \det A_{11} \det \tilde{A}_{11} \tag{1.11}$$

elde edilir.

A pozitif tanımlı bir matris ise bu takdirde A_{11} regüler ve $A_{22} \geq \tilde{A}_{11} \geq 0$ dır.

Schur tamamlayanı matris analizde temel bir araç olarak kullanılmakta ve matris eşitsizlikleri için zengin bir kaynak olarak ele alınmaktadır. Ayrıca lineer sistemler ve matris problemleriyle ilgili olarak Schur tamamlayan tekniği sık sık başvurulan bir düşüncedir.

Schur tamamlayan tekniği kullanılarak blok matris aracılığıyla elde edilen bir matris eşitsizliğini verelim:

Teorem 1.1.2.11. (Zhang, 1999) $A \in M_n$, pozitif tanımlı bir matris ve B, $n \times m$ tipinde bir matris olsun. Bu takdirde herhangi pozitif yarı tanımlı bir $X \in M_m$ matrisi için

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & X \end{pmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow X \geq B^* A^{-1} B \tag{1.12}$$

dir.

Teorem 1.1.2.12. (Zhang, 2001) A, B ve C, $n-$ kare matrisler olmak üzere

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \geq 0 \tag{1.13}$$

olsun. Bu takdirde

$$\pm\left(B + B^*\right) \leq A + C \tag{1.14}$$

ve $AB = BA$ ise

$$B^* B \leq A^{1/2} C A^{1/2} \tag{1.15}$$

dir.

Teorem 1.1.2.13. (Kreindler ve Jameson, 1972) $W = W^T$ ve $V = V^T$ olmak üzere $\begin{pmatrix} W & S \\ S^T & V \end{pmatrix} > 0$ blok matrisi tanımlansın. Bu takdirde

$$V > 0,\ W - S V^{-1} S^T > 0, \tag{1.16}$$

ya da

$$W > 0,\ V - S^T W^{-1} S > 0 \tag{1.17}$$

dır.

Bu bölümde verilen teoremleri dikkate alarak çalışmamız için kullanışlı olacak pozitif yarı tanımlı blok matrislere birkaç örnek verelim:

Örnek 1.1.2.1.

i. $X \geq A \geq 0$ için $\begin{pmatrix} A & A \\ A & X \end{pmatrix} \geq 0$,

ii. Herhangi bir A matrisi için $\begin{pmatrix} I & A \\ A^* & A^*A \end{pmatrix} \geq 0$,

iii. A, pozitif tanımlı bir matris ise $\begin{pmatrix} A & I \\ I & A^{-1} \end{pmatrix} \geq 0$,

iv. A ve B aynı mertebeden matrislerse $\begin{pmatrix} A^*A & A^*B \\ B^*A & B^*B \end{pmatrix} \geq 0$,

v. A, $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere $\begin{pmatrix} s_1(A)I & A \\ A^* & s_1(A)I \end{pmatrix} \geq 0$

dır. Yukarıda en son verilen blok matris için Schur tamamlayanı ele alındığında

$$AA^* \leq s_1^2(A)I \tag{1.18}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 1.1.2.3. A, B ve C aynı mertebeden matrisler olmak üzere $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} \geq 0$ olsun. O halde $K_1 = \begin{pmatrix} I & I \end{pmatrix}$ ve $K_2 = \begin{pmatrix} I & -I \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$K_1 M K_1^T = A + B + B^T + C \geq 0 \tag{1.19}$$

$$K_2 M K_2^T = A - B - B^T + C \geq 0 \tag{1.20}$$

dır.

Teorem 1.1.2.14. (Horn ve Johnson, 2013) $X \in M_n$, pozitif tanımlı bir matris ve $Y \in M_n$ pozitif yarı tanımlı bir matris olsun. Bu takdirde $X \geq Y$ olması için gerek ve yeter şart $\rho\left(YX^{-1}\right) \leq 1$ ve $X > Y$ olması için gerek ve yeter şart $\rho\left(YX^{-1}\right) < 1$ olmasıdır.

1.1.3. Konveks ve Matris Konveks Fonksiyonlar

Tanım 1.1.3.1. (Bhatia, 1997) $\forall x, y \in I \subset \mathbb{R}$ ve $0 \leq \alpha \leq 1$ için

$$f\left(\alpha x + (1-\alpha)y\right) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \tag{1.21}$$

ise $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna *konveks fonksiyon* denir. $\alpha = 1/2$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \tag{1.22}$$

dir.

f, $I \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlanan reel değerli bir fonksiyon olsun. $D = köş(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, köşegen elemanları I aralığında λ_j ler olan köşegen bir matris ise $f(D) = köş(f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_n))$ şeklinde tanımlanır. A, öz değerleri I aralığında λ_j ler olan bir Hermityen matris ise $A = UDU^*$ olacak şekilde bir köşegen D matrisi ve bir U üniter matrisi vardır. Bu durumda $f(A) = Uf(D)U^*$ şeklinde yazılabilir. O halde öz değerleri bir I aralığında olan herhangi bir Hermityen A matrisi için $f(A)$ tanımlanabilir.

Tanım 1.1.3.2. (Bhatia, 1997) f, reel değerli bir fonksiyon, $A \in M_n$ ve $B \in M_n$ Hermityen matrisler olsun. f, Hermityen matrisler kümesi üzerinde Löwner sıralamasına göre monoton ise yani, $A \le B$ iken $f(A) \le f(B)$ oluyorsa f fonksiyonuna *matris monoton fonksiyon* denir.

Örnek 1.1.3.1. $\alpha \ge 0$ için $f(x) = \alpha x + \beta$ fonksiyonu matris monotondur. Bu durumda $A \le B$ olsun. Gerçekten $\alpha \ge 0$ için $\alpha A + \beta I \le \alpha B + \beta I$ olup $f(A) \le f(B)$ olduğu görülür.

Tanım 1.1.3.3. (Bhatia, 1997) $0 \le \alpha \le 1$, $A \in M_n$ ve $B \in M_n$ Hermityen matrisler olsun. Bu durumda reel değerli bir f fonksiyonu için

$$f(\alpha A + (1-\alpha)B) \le \alpha f(A) + (1-\alpha) f(B) \tag{1.23}$$

oluyorsa f fonksiyonuna *matris konveks fonksiyon* denir.

f, sürekli bir fonksiyon ise $\alpha = 1/2$ için (1.23) ifadesi

$$f\left(\frac{A+B}{2}\right) \le \frac{f(A) + f(B)}{2} \tag{1.24}$$

olur.

Örnek 1.1.3.2. $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \ge 0$ için $f(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ fonksiyonunun matris konveksliğini inceleyelim:

$A \in M_n$ ve $B \in M_n$ Hermityen matrisler olmak üzere

$$\frac{f(A) + f(B)}{2} - f\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{\alpha A^2 + \beta A + \gamma I + \alpha B^2 + \beta B + \gamma I}{2}$$

$$-\left(\alpha\left(\frac{A+B}{2}\right)^2+\beta\left(\frac{A+B}{2}\right)+\gamma I\right)$$
$$=\frac{\alpha}{4}\left(A^2-AB-BA+B^2\right)$$
$$=\frac{\alpha}{4}\left(A-B\right)^2\geq 0$$

olduğundan (1.24) den verilen fonksiyon matris konvekstir, ancak matris monoton değildir. Yani A ve B Hermityen matrisleri için $B-A\geq 0$ iken $B^2-A^2\geq 0$ diyemeyiz.

Teorem 1.1.3.1. (Dragomir, 2011) $f\left(t\right)=t^r$ olsun. Bu durumda f fonksiyonunun $\left[0,\infty\right)$ aralığında monoton olması için gerek ve yeter şart $0\leq r\leq 1$ olmasıdır. $1\leq r\leq 2$ ya da $-1\leq r\leq 0$ ise f fonksiyonu $\left(0,\infty\right)$ aralığında matris konvekstir.

Uyarı 1.1.3.1.

1. Her matris monoton fonksiyon monotondur, fakat her monoton fonksiyon matris monoton değildir.
2. Her matris konveks fonksiyon konvekstir, fakat her konveks fonksiyon matris konveks değildir.
3. Her matris konveks fonksiyonun matris monoton olmasına gerek yoktur.

1.1.4. Sürekli Cebirsel Riccati Matris Denklemi ve Temel Kavramlar

Sonlu boyutlu, zamanla değişmeyen lineer sürekli zaman dinamik sistemi, birinci mertebeden adi diferensiyel denklemlerin aşağıdaki sistemi kullanılarak tanımlanabilir:

$$\begin{aligned}\dot{x}\left(t\right)&=Ax\left(t\right)+Bu\left(t\right),x\left(t_0\right)=x_0\\ y\left(t\right)&=Cx\left(t\right)+Du\left(t\right)\end{aligned}\qquad(1.25)$$

(1.25) sistemi, sürekli zaman sistemi olarak bilinmektedir ve $x\left(t\right)$, $u\left(t\right)$ ve $y\left(t\right)$ sırasıyla n, m $\left(m\leq n\right)$ ve r boyutlu vektörler olup sistemin durum vektörü, sistem girdisi ve sistem çıktısı olarak adlandırılırlar. $x\left(t_0\right)$, sistemin başlangıç şartı ve A, B, C ve D sırasıyla $n\times n$, $n\times m$, $r\times n$ ve $r\times m$ tipinde zamandan bağımsız sabit matrislerdir.

(1.25) sistemi için bu çalışmada geçen ve kullanılacak olan bazı tanım ve teoremleri verelim:

Tanım 1.1.4.1. (Datta, 2003) (1.25) sistemi, herhangi bir $x(0)$ başlangıç değerinden başlayarak $0 \le t \le t_1$ için uygun olarak bir $u(t)$ girdisi seçilerek sonlu bir t_1 zamanındaki herhangi bir $x_1 = x(t_1)$ değerine kadar sürdürülebilirse, bu sistem *kontrol edilebilir* (controllable) olarak adlandırılır. (1.25) sisteminin kontrol edilebilirliği, (A, B) matris çiftinin kontrol edilebilirliği olarak da ifade edilebilir.

Teorem 1.1.4.1. (Datta, 2003) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ve $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $(m \le n)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

i. (1.25) sistemi kontrol edilebilirdir.

ii. $n \times nm$ tipindeki $C_M = \left(B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B\right)$ matrisi için $rank\left(C_M\right) = n$ dir.

iii. Herhangi bir $t_1 > 0$ için

$$W_C = \int_0^{t_1} e^{At} BB^T e^{A^T t} dt$$

matrisi regülerdir.

iv. (λ, x), A^T nin öz çifti, yani $x^T A = \lambda x^T$ ise, $x^T B \neq 0$ dır.

v. A nın herhangi bir λ öz değeri için $rank(\lambda I - A, B) = n$ dir.

vi. $A - BK$ matrisinin öz değerleri istenen bölgede olmak üzere keyfi bir K matrisi bulunabilir.

Tanım 1.1.4.2. (Datta, 2003) (1.25) sistemini ele alalım. $x(0)$ başlangıç değerini, $0 \le t \le t_1$ olmak üzere her t için $u(t)$ ve $y(t)$ vektörlerinden, tek bir şekilde belirleyebilen bir $t_1 > 0$ varsa, (1.25) sistemi *gözlemlenebilir* (observable) olarak adlandırılır. (1.25) sisteminin gözlemlenebilirliği, (A, C) matris çiftinin gözlemlenebilirliği olarak da ifade edilebilir.

Teorem 1.1.4.2. (Datta, 2003) Aşağıdaki ifadeler denktir:

i. (1.25) sistemi gözlemlenebilirdir.

ii. $O_M = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$ matrisi için $rank\left(O_M\right) = n$ dir.

iii. Herhangi bir $t_1 > 0$ için

$$W_O = \int_0^{t_1} e^{A^T\tau} C^T C e^{A\tau} d\tau$$

matrisi regülerdir.

iv. A nın her bir λ öz değeri için $rank\begin{pmatrix} \lambda I - A \\ C \end{pmatrix} = n$ dir.

v. A nın hiçbir özvektörü, C nin satırlarına ortogonal değildir, yani (λ, y) A nın bir öz çifti ise $Cy \neq 0$ dır.

vi. $A + LC$ matrisinin öz değerleri istenen bölgede olacak şekilde keyfi bir L matrisi bulunabilir.

Tanım 1.1.4.3. (Datta, 2003) Herhangi bir A matrisinin tüm öz değerleri negatif reel kısma sahipse, yani $\mathrm{Re}\,\lambda_i(A) < 0$ ise A, *kararlı matris* olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.4.4. (Datta, 2003) (1.25) sistemi için $A - BK$ kararlı olacak şekilde bir K matrisi varsa, (A, B) çifti *kararlı hale getirebilir çift* (stabilizable) olarak adlandırılır.

Teorem 1.1.4.3. (Datta, 2003) Aşağıdaki ifadeler denktir:

i. (A, B) kararlı hale getirilebilir matris çiftidir.

ii. Her $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$ için $rank(A - \lambda I, B) = n$ dir.

iii. $x^* A = \lambda x^*$ ve $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$ olacak şekildeki her λ ve $x \neq 0$ için $x^* B \neq 0$ dır.

Teorem 1.1.4.4. (Datta, 2003) (A, B) kontrol edilebilir bir çift ise kararlı hale getirilebilirdir.

Tanım 1.1.4.5. (Datta, 2003) (1.25) sistemi için $A - LC$ matrisi kararlı olacak şekilde bir L matrisi varsa, (A, C) çifti *tespit edilebilir çift* (detectable) olarak adlandırılır.

Teorem 1.1.4.5. (Datta, 2003) Aşağıdaki ifadeler denktir:

i. (A, C) tespit edilebilir çifttir.

ii. Her $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$ için $rank\begin{pmatrix} A - \lambda I \\ C \end{pmatrix} = 2n$ dir.

iii. $Ax = \lambda x$ ve $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$ olacak şekildeki her λ ve $x \neq 0$ için $Cx \neq 0$ dır.

iv. (A^T, C^T) kararlı hale getirilebilirdir.

Bu bilgiler ışığında sürekli cebirsel Riccati matris denklemini verelim:

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ herhangi sabit matrisler ve $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ve $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pozitif yarı tanımlı matrisler olmak üzere

$$A^T P + PA - PBB^T P + Q = 0 \tag{1.26}$$

sürekli cebirsel Riccati matris denklemini (CARE) ele alalım. Burada (A, B) matris çiftinin kontrol edilebilir ve $\left(A, Q^{1/2}\right)$ matris çiftinin gözlemlenebilir (ya da tespit edilebilir) olduğu düşünülürse, CARE (1.26) nın pozitif yarı tanımlı tek çözüm matrisi P dir.

$B = 0$ ve A matrisi kararlı olduğunda (1.26) denklemi, aşağıdaki sürekli cebirsel Lyapunov matris (CALE) denklemini verir:

$$A^T P + PA + Q = 0 \tag{1.27}$$

Teorem 1.1.4.6. (Vidyasagar, 1993) (1.27) denkleminde $Q \geq (>) 0$ olsun. Bu takdirde, A matrisinin kararlı olması için gerek ve yeter şart (1.27) denkleminin pozitif yarı tanımlı (pozitif tanımlı) tek bir P çözümüne sahip olmasıdır.

Sürekli cebirsel Riccati matris denklemi kontrol teorideki optimal kontrol (Davies ve ark., 2007b), süzgeç tasarımı (Su ve ark., 2012), kararlılık analizi (Wu ve ark., 2011) gibi kontrol problemlerinin birçok alanında karşımıza çıkmaktadır. Örneğin, (Zhang ve ark., 2012) çalışmalarında, daha önce de bahsedildiği gibi lineer olmayan sistemlerin bir sınıfı için sistemde gözlemci kazanç matrisi (observer gain matrix) olarak adlandırılan matrisi, Riccati denklemlerini kullanarak oluşturmuşlardır. CARE (1.26) nın kullanım alanına bir örnek olarak (Ni, 2008) , $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ durum vektörü ve $u(t) \in \mathbb{R}^m$ kontrol vektörü olmak üzere

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0 \tag{1.28}$$

ile tanımlanan lineer sürekli zaman sistemini ele alabiliriz. $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pozitif tanımlı matris olmak üzere

$$J = \int_0^\infty \left(x^T Q x + u^T u\right) dt \tag{1.29}$$

kuadratik performans indeksi olup

$$u(t) = -Kx(t) \tag{1.30}$$

kararlı geri besleme kontrolü kullanılarak buna karşılık gelen optimal kazanç

$$K_P = -B^T P \tag{1.31}$$

ile verilsin. Bu takdirde (1.29) ile verilen performans indeksinin minimum değeri

$$J_{\min} = x^T(0)Px(0) \tag{1.32}$$

dir.

Ayrıca optimal düzenleyici (regülatör) problemi olarak adlandırılan yukarıdaki problemde (1.32) ile verilen $J_{\min}$, optimal değer olarak tanımlanır ve $iz(P)/n$, $x(0)$ birim küre yüzeyi üzerinde değiştikçe $J_{\min}$ değerinin ortalama değerini vermektedir (Liu ve Zhang, 2011).

CARE (1.26) nın çözümü için Newton ve Schur metodu başta olmak üzere bazı algoritmik çözüm metotları bulunmaktadır. Newton metodunda, her adımda sürekli cebirsel Lyapunov matris denklemini çözmek gerekmekte ve Schur metodunda ise, Schur üçgenleştirme teoremi kullanılarak çözüm elde edilmektedir. Ancak bu metotlar, hesaplama ve işlem yönünden oldukça ağırdır. Özellikle matrislerin boyutları arttıkça daha çok işlem gerektirdiğinden, Newton ve Schur metodunun bazı zorluklara sahip olduğu görülmektedir. Bu yüzden CARE (1.26) nın çözümü için matris sınırları, birçok kontrol problemine çözüm aramak için kullanıldığından (Lee 1998; Wang ve ark., 1987; Sun 1998), tam çözümlere ilişkin bazı hata miktarları içermesine rağmen sınır tahminlerinde bulunmanın, uygulamalarda daha kullanışlı olduğu görülmektedir.

Aşağıda verilen örnekle CARE (1.26) nın çözümünün Schur algoritmasıyla nasıl hesaplanacağını gösterelim:

Örnek 1.1.4.1. (Datta, 2003) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $Q = I_3$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ olmak üzere CARE (1.26) nın çözümünü bulalım.

CARE (1.26) için Schur algoritması aşağıdaki gibi verilmektedir:

Girdiler. A: $n \times n$ matris,

B: $n \times m (m \le n)$ matris,

Q: $n \times n$ simetrik matris.

Çıktı. P : CARE (1.26) nın çözüm matrisi.

Adım 1. $H = \begin{pmatrix} A & -BB^T \\ -Q & -A^T \end{pmatrix}$ Hamiltonian matrisi oluşturulur,

Adım 2. H matrisi için Teorem 1.1.1.2 ve Teorem 1.1.1.3 kullanılarak $U^T HU = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}$ reel Schur formu oluşturulur,

Adım 3. U matrisi, $U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}$ şeklinde yazılır,

Adım 4. $PU_{11} = U_{21}$ lineer sistemi çözülerek P matrisi elde edilir.

Yukarıda verilen örnek için,

Adım 1. $H = \begin{pmatrix} A & -BB^T \\ -Q & -A^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & -1- & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ olur.

Adım 2. H matrisi için

$$U^T HU = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.9940 & -0.0216 & 1.3275 & & & \\ 0 & -2.1867 & 0.7312 & & * & \\ 0 & -0.2573 & -1.9055 & & & \\ & & & 2.9940 & 1.3285 & 0.2134 \\ & 0 & & 0 & 1.9623 & 0.2434 \\ & & & 0 & -0.7207 & 2.1298 \end{pmatrix}$$

olur ve T_{11} in öz değerleri $-2.9940,\ -2.0461+0.4104i,\ -2.0461-0.4104i$ şeklindedir.

Adım 3. U matrisinden

$$U_{11} = \begin{pmatrix} 0.4417 & 0.3716 & 0.7350 \\ 0.0053 & -0.8829 & 0.3951 \\ -0.8807 & 0.1802 & 0.3986 \end{pmatrix} \text{ ve } U_{21} = \begin{pmatrix} 0.1106 & 0.0895 & 0.3260 \\ 0.0232 & -0.1992 & 0.1552 \\ -0.1285 & 0.0466 & 0.1199 \end{pmatrix}$$

olup,

Adım 4. $P = U_{21}U_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.3732 & 0.0683 & 0.0620 \\ 0.0683 & 0.2563 & 0.0095 \\ 0.0620 & 0.0095 & 0.1770 \end{pmatrix}$

elde edilir.

1.1.5. Ayrık Cebirsel Riccati Matris Denklemi ve Temel Kavramlar

Lineer, zamanla değişmeyen, ayrık zaman sistemi, bir fark denklem sistemi yardımıyla

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k)+Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k)+Du(k) \end{aligned} \tag{1.33}$$

şeklinde tanımlanabilir. Daha önce de bahsedildiği gibi $x(k)$, $n-$boyutlu durum vektörü, $u(k)$, m boyutlu girdi vektörü, $y(k)$, r boyutlu çıktı vektörü ve A, B, C ve D sırasıyla $n\times n$, $n\times m$, $r\times n$ ve $r\times m$ tipinde zamandan bağımsız sabit matrislerdir.

Tanım 1.1.5.1. (Datta, 2003) (1.33) sistemini ele alalım. Herhangi bir x_0 başlangıç değeri ve x_1 final değeri için x_0 değerini x_1 değerine transfer eden $\{u_0,u_1,\ldots,u_{N-1}\}$ girdilerinin sonlu bir dizisi varsa, yani $x(N)=x_1$ ise sistem *ayrık kontrol edilebilir* olarak adlandırılır.

(1.33) sisteminin kontrol edilebilirliği ve gözlemlenebilirliği için (1.25) sistemi için verilen kriterler geçerlidir. Bu yüzden tekrar bahsetmeye gerek duyulmamıştır.

Teorem 1.1.5.1. (Datta, 2003) (1.33) sisteminin ya da (A,B) çiftinin ayrık kontrol edilebilir olması için gerek ve yeter şart $C_M=(B,AB,\ldots,A^{n-1}B)$ matrisi için $rank(C_M)=n$ olmasıdır.

Tanım 1.1.5.2. (Datta, 2003) (1.33) sistemini ele alalım. x_0 başlangıç değerini, $u_0,u_1,\cdots,u_{N-1}$ girdi ve $y_0,y_1,\cdots,y_N$ çıktı değerlerinden tamamen belirleyebilen bir N indisi varsa, (1.33) sistemi *ayrık gözlemlenebilir* olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.5.3. (Datta, 2003) Herhangi bir A matrisinin tüm öz değerleri birim çember içerisinde kalıyorsa, yani $\forall i$ için $|\lambda_i(A)|<1$ oluyorsa, A matrisi *ayrık kararlı matris* olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.5.4. (Datta, 2003) (1.33) sistemi için $A-BK$ ayrık kararlı olacak şekilde bir K matrisi varsa, (A,B) çifti *ayrık kararlı hale getirebilir çift* olarak adlandırılır.

Teorem 1.1.5.2. (Datta, 2003) (1.33) sistemini ele alalım. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

i. (A,B) ayrık kararlı hale getirilebilir çifttir.

ii. Her $|\lambda|\geq 1$ için $rank(A-\lambda I,B)=n$ dir.

iii. $x^*A=\lambda x^*$ ve $|\lambda|\geq 1$ olacak şekildeki her λ ve $x\neq 0$ için $x^*B\neq 0$ dır.

Tanım 1.1.5.5. (Datta, 2003) (1.33) sistemi için $A-LC$ matrisi ayrık kararlı olacak şekilde bir L matrisi varsa, (A,C) çifti *ayrık tespit edilebilir çift* olarak adlandırılır.

Teorem 1.1.5.3. (Datta, 2003) (1.33) sistemini ele alalım. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir

i. (A,C) ayrık tespit edilebilirdir.

ii. $|\lambda|\geq 1$ olacak şekildeki her λ için $rank\begin{pmatrix} A-\lambda I \\ C \end{pmatrix}=n$ dir.

iii. $Ax=\lambda x$ ve $|\lambda|\geq 1$ olacak şekildeki her λ ve $x\neq 0$ için $Cx\neq 0$ dır.

iv. (A^T,C^T) ayrık kararlı hale getirilebilirdir.

Bu bilgiler ışığında ayrık cebirsel Riccati matris denklemini verelim:

$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$ herhangi sabit matrisler ve $Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ve $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ pozitif yarı tanımlı matrisler olmak üzere

$$P=A^TPA-A^TPB\left(I+B^TPB\right)^{-1}B^TPA+Q \tag{1.34}$$

ayrık cebirsel Riccati matris denklemini (DARE) ele alalım. Burada (A,B) matris çiftinin kararlı hale getirilebilir ve $(A,Q^{1/2})$ matris çiftinin tespit edilebilir olduğu düşünülürse, DARE (1.34) ün pozitif yarı tanımlı tek çözüm matrisi P dir.

$B=0$ ve A matrisi ayrık kararlı olduğunda (1.34) denklemi, aşağıdaki ayrık cebirsel Lyapunov matris (DALE) denklemini verir:

$$P=A^TPA+Q \tag{1.35}$$

Teorem 1.1.5.6. (Vidyasagar, 1993) (1.35) denkleminde $Q\geq(>0)$ olsun. A matrisinin ayrık kararlı olması için gerek ve yeter şart (1.35) denkleminin pozitif yarı tanımlı (pozitif tanımlı) tek bir P çözümüne sahip olmasıdır.

Ayrık cebirsel Riccati matris denklemi bölüm 1.1.4 de bahsedilen sürekli cebirsel Riccati matris denklemi gibi optimal kontrol (Kwakernaak ve Sivan, 1972) ve süzgeç tasarımı (Su ve ark., 2012) gibi mühendisliğin birçok alanında karşımıza çıkmaktadır. Bunun bir örneği olarak optimal kontroldeki ayrık zamanlı LQ (Linear quadratic problem) problemini ele alabiliriz. Bir sistemin optimum kontrol için ikinci dereceden bir değer fonksiyonuyla tanımlanması ve lineer diferansiyel denklemlerle veya fark denklemleriyle ortaya konması, LQ problemi olarak adlandırılmıştır. (A,B)

çiftinin kararlı hale getirilebilir ve $\left(A,Q^{1/2}\right)$ çiftinin tespit edilebilir olması halinde x_k, u_k ve y_k sırasıyla sistemin reel bileşenli durum, girdi ve çıktı vektörleri ve $Q=C^TC$ olmak üzere x_0 başlangıç değeri için

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, \\ y_k &= Cx_k,\ k=0,1,2,\ldots \end{aligned} \tag{1.36}$$

şeklinde tanımlanan ayrık zamanlı lineer sistemi verilsin ve reel bileşenli bir x_0 vektörü için

$$J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} x_k^TQx_k+u_k^Tu_k \tag{1.37}$$

değeri minimum olacak şekilde bir u_k kontrolü bulunsun. (1.37) eşitliğinin minimum değeri

$$J^*=\frac{1}{2}x_0^TPx_0 \tag{1.38}$$

olup bu değerin elde edilmesi için P, DARE (1.34) ün pozitif tanımlı tek çözümü olmak üzere, u_k^* optimal kontrolü

$$u_k^*=-\left(I+B^TPB\right)^{-1}B^TPAx_k,\ k=0,1,2,\ldots \tag{1.39}$$

ile verilir.

Yukarıda da görüldüğü gibi genel olarak DARE (1.34), lineer olmayan bir matris denklemidir ve lineer olmayan denklemlerin bir sistemi olarak ele alınabilir. Bölüm 1.1.4 de bahsedildiği gibi DARE (1.34) ün çözümü için de Newton ve Schur metodu başta olmak üzere bazı algoritmik çözüm metotları bulunmaktadır. Ancak bu metotlar, matrislerin mertebeleri arttıkça daha fazla işlem yükü gerektiğinden bazı zorluklara sahiptir. Bahsedilen bu sebebin yanı sıra zaman gecikmeli sistemler için kararlı kontrol dizaynı (Lee, 1998), zaman gecikmeli ve pertürbasyon sunumlarındaki kararlılık analizi (Wang ve ark., 1987) ve durum ve hata kovaryans tahminleri (Kouikoglou ve Phillis, 1993) gibi bazı kontrol problemlerinde DARE (1.34) ün çözüm matrisi için sınır tahminlerinin oldukça önemli ve uygulamalarda daha kullanışlı olduğu görülmektedir.

Aşağıda verilen örnekle DARE (1.34) ün çözümünün Schur algoritmasıyla nasıl hesaplanacağını gösterelim:

Örnek 1.1.5.1. (Datta, 2003) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$, $Q=I$ olmak üzere DARE (1.34) ün çözümünü bulalım.

DARE (1.34) için Schur algoritması aşağıdaki gibi verilmektedir:

Girdiler. A: $n\times n$ matris,

B: $n\times m\left(m\le n\right)$ matris,

Q: $n\times n$ simetrik matris.

Çıktı. P : DARE (1.34) ün çözüm matrisi.

Adım 1. $M=\begin{pmatrix} A+S\left(A^{-1}\right)^{T}Q & -S\left(A^{-1}\right)^{T} \\ \left(A^{-1}\right)^{T}Q & \left(A^{-1}\right)^{T} \end{pmatrix}$ (symplectic) matrisi oluşturulur.

Adım 2. M matrisi için, Teorem 1.1.1.2 ve Teorem 1.1.1.3 kullanılarak birinci bloğun öz değerlerinin modülü 1 den küçük olacak şekilde $U^{T}MU=\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{pmatrix}$ reel Schur formu oluşturulur.

Adım 3. U matrisi, $U=\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}$ şeklinde yazılır.

Adım 4. $PU_{11}=U_{21}$ lineer sistemi çözülerek P matrisi elde edilir.

Yukarıda verilen örnek için,

Adım 1. $M=\begin{pmatrix} -1 & 7/2 & 2 & -3/2 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -3/2 & -2 & 3/2 \\ -1 & 1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$ olur.

Adım 2. M matrisi için

$$U^{T}MU=\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.1800 & -0.0472 & -0.0518 & -0.6256 \\ 0 & -0.1987 & 0.7594 & 0.7269 \\ 0 & 0 & 5.542 & 1.3090 \\ 0 & 0 & -0.0130 & -5.0356 \end{pmatrix}$$

olup, S_{11} in öz değerleri sırasıyla $0.18005,\ -0.1987$ dir.

Adım 3. U matrisinden

$$U_{11}=\begin{pmatrix} -0.1079 & -0.5425 \\ 0.0847 & 0.3867 \end{pmatrix} \text{ ve } U_{21}=\begin{pmatrix} 0.4498 & -0.7011 \\ 0.8824 & 0.2853 \end{pmatrix}$$

olup,

Adım 4. $P=U_{21}U_{11}^{-1}=\begin{pmatrix} 54.943 & 75.268 \\ 75.270 & 106.26 \end{pmatrix}$

elde edilir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde, sürekli ve ayrık cebirsel Riccati matris denklemlerinin çözüm matrislerinin öz değerleri, izi, determinantı, normu ve matris sınırları üzerine yapılan bazı çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

2.1. Sürekli Cebirsel Riccati Matris Denklemi

(Mori ve Derese, 1984) çalışmalarında, 1977- 1983 yılları arasında, CARE (1.26) nın çözüm matrisi, çözüm matrisinin en büyük ve en küçük öz değerleri, izi, determinantı ve spektral normu için elde edilen sınırları toplayarak, bir bütün olarak sunmuşlardır.

(Kwon ve ark., 1996) çalışmalarında, 1977-1996 yılları arasında yukarıda da bahsedildiği gibi CARE (1.26) nın çözüm matrisi, çözüm matrisinin en büyük ve en küçük öz değerleri, öz değerlerin k. toplamları, k. çarpımları, izi, determinantı ve normları için elde edilen sınırları özetleyerek, bu sınırlara ek olarak da yeni sonuçlar vermişlerdir.

CARE (1.26) nın çözümü için bu yıllar arasındaki tüm sonuçlar yukarıdaki iki çalışmada ayrıntılı olarak yer aldığından ayrıca çalışmamızda bu sonuçlara değinilmemiştir.

(Lee, 1996a), $i=1,2,\ldots,n$ olmak üzere CARE (1.26) nın çözüm matrisinin en büyük öz değeri için

$$\lambda_1(P) \geq \max_i \left[-s_i(A) + \sqrt{s_i^2(A) + \lambda_1\left(BB^T\right)\lambda_i(Q)} \right] \left[\lambda_1\left(BB^T\right) \right]^{-1} \tag{2.1}$$

alt sınırını elde etmiştir. Ayrıca aynı çalışmada $\mathrm{Re}\left[\lambda_n\left(\alpha A - BB^T\right) \right] < 0$ olacak şekilde verilen $\alpha > 0$ sabiti için CARE (1.26) nın en küçük öz değerinin

$$\lambda_n(P) \leq \lambda_1\left(\frac{\alpha Q + BB^T}{\alpha} \right) \left\{ -2\,\mathrm{Re}\left[\lambda_n\left(\alpha A - BB^T\right) \right] \right\}^{-1} \tag{2.2}$$

eşitsizliğini sağladığı gösterilmiştir. Bu sınırlara ek olarak, $\lambda_1\left(\beta A + \beta A^T - 2BB^T\right) < 0$ olacak şekilde pozitif bir β sabiti varsa, bu takdirde CARE (1.26) nın çözüm matrisi için aşağıda verilen üst sınırların mevcut olduğu gösterilmiştir:

$$\sum_1^k \lambda_i(P) \leq \sum_1^k \lambda_i\left(\frac{\beta Q + BB^T}{\beta} \right) \left[-\lambda_1\left(\beta A + \beta A^T - 2BB^T\right) \right]^{-1}, \tag{2.3}$$

$$\lambda_1(P) \le \lambda_1\left(\frac{\beta Q + BB^T}{\beta}\right)\left[-\lambda_1\left(\beta A + \beta A^T - 2BB^T\right)\right]^{-1}, \tag{2.4}$$

$$iz(P) \le iz\left(\frac{\beta Q + BB^T}{\beta}\right)\left[-\lambda_1\left(\beta A + \beta A^T - 2BB^T\right)\right]^{-1} \tag{2.5}$$

ve

$$\det(P) \le \left(iz\left(\frac{\beta Q + BB^T}{\beta}\right)\left[-n\lambda_1\left(\beta A + \beta A^T - 2BB^T\right)\right]^{-1}\right)^n. \tag{2.6}$$

(Kang ve ark., 1996) çalışmalarındaki cebirsel Riccati matris denklemi CARE (1.26) ya göre düzenlendiğinde, CARE (1.26) nın çözüm matrisinin spektral normu için

$$\|P\| \le \left\|\left(BB^T\right)^{-1}\right\|^{1/2}\left\|A^T\left(BB^T\right)^{-1}A + Q\right\|^{1/2} + \lambda_1\left(\frac{A^T\left(BB^T\right)^{-1} + \left(BB^T\right)^{-1}A}{2}\right), \tag{2.7}$$

eşitsizliğinin ve L, ortogonal bir matris olmak üzere P matrisinin izi için

$$\begin{aligned} iz(P) &\le \lambda_1\left(\frac{L\left(BB^T\right)^{-1/2} + \left(BB^T\right)^{-1/2}L}{2}\right) iz\left(\left(A^T\left(BB^T\right)^{-1}A + Q\right)^{1/2}\right) + iz\left(A^T\left(BB^T\right)^{-1}\right) \\ &\le iz\left(\left(A^T\left(BB^T\right)^{-1}A + Q\right)^{1/2}\right)\left\|\left(BB^T\right)^{-1}\right\|^{1/2} + iz\left(A^T\left(BB^T\right)^{-1}\right) \end{aligned} \tag{2.8}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülmektedir.

(Lee, 1997a), $G \equiv \left(BB^T\right)^{1/2}$ olmak üzere $\lambda_1\left(\alpha_k A + \alpha_k A^T - 2G\right) < 0$ olacak şekilde k nın bir fonksiyonu olan bir α_k pozitif sabiti için, CARE (1.26) nın çözüm matrisinin öz değeri, izi ve determinantı için yukarıda bahsedilen çalışmasındaki sonuçları, farklı matris özdeşlikleri kullanarak geliştirmiş ve aşağıda verilen toplam sınırına sahip olduğunu göstermiştir:

$$\sum_1^k \lambda_i(P) \le \frac{\sum_1^k \alpha_k \lambda_i(Q) + k/\alpha_k}{-\lambda_1\left(\alpha_k A + \alpha_k A^T - 2G\right)} \tag{2.9}$$

Ayrıca, aynı çalışmada bu eşitsizliğe ek olarak $\mathrm{Re}\left(\lambda_n\left(\varphi A - G\right)\right) < 0$ olacak şekilde bir $\varphi > 0$ sabiti varsa, CARE (1.26) nın çözüm matrisinin en küçük öz değeri için

$$\lambda_n(P) \le \frac{\varphi\lambda_1(Q) + 1/\varphi}{-2\,\mathrm{Re}\left(\lambda_n\left(\varphi A - G\right)\right)} \tag{2.10}$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmiştir.

Yukarıda bahsedildiği gibi bu tarihlerde CARE (1.26) nın çözüm matrisi için yalnızca öz değer sınırlarını içeren çalışmalar mevcut olup alt ve üst matris sınırlarıyla ilgili çalışmalara literatürde çok rastlanılmamaktadır. Ancak bu tarihten itibaren matris sınırları üzerine birçok çalışma yapılmıştır. İlk olarak (Lee, 1997b), α ve β, $Q > A^T A/\alpha$ ve $R > \beta I$ eşitsizliklerini sağlayan pozitif sabitler olmak üzere, CARE (1.26) nın P çözüm matrisi için aşağıdaki matris sınırlarını elde etmiştir:

$$\left[\frac{Q-\frac{A^T A}{\alpha}}{\lambda_1(R)+\alpha}\right]^{1/2} \le P \le \left[\frac{Q+\frac{A^T A}{\beta}}{\lambda_n(R)-\beta}\right]^{1/2} \tag{2.11}$$

Yukarıdaki sınırlara ek olarak aynı çalışmada α, $Q > A^T A/\alpha$ şartını sağlayan pozitif bir sabit olmak üzere P çözüm matrisi için

$$P \ge \left(\frac{Q}{\alpha}-\frac{A^T A}{\alpha^2}\right)^{1/2} \tag{2.12}$$

alt matris sınırı elde edilmiştir.

Ayrıca (Lee, 1997c) çalışmasında önceki çalışmasında kullandığı matris özdeşliklerinden farklı özdeşlikler kullanarak belli varsayımlar altında, CARE (1.26) nın çözüm matrisi için daha farklı alt ve üst matris sınırları elde etmiştir. Bu sınırlar aşağıdaki gibidir:

α ve β, $\beta Q > I$ ve $\alpha AA^T < BB^T$ şartlarını sağlayan pozitif sabitler olmak üzere,

$$P \ge \left(\frac{Q - I/\beta}{\lambda_1\left(BB^T + \beta AA^T\right)}\right)^{1/2} \tag{2.13}$$

ve $s_n(B) \neq 0$ olmak üzere

$$P \le \left(\frac{Q + \alpha/I}{\lambda_n\left(BB^T - \alpha AA^T\right)}\right)^{1/2} \tag{2.14}$$

dir. Ayrıca P, pozitif tanımlı çözüm matrisi ve $1 \le i \le n$ olmak üzere $BB^T > \alpha_i AA^T$ ve $\beta_i > 1/\lambda_i(Q)$ şartlarını sağlayan α_i, $\beta_i > 0$ için

$$\lambda_1(P) \ge \left(\max_i \frac{\lambda_i(Q) - 1/\beta_i}{\lambda_i\left(BB^T + \beta_i AA^T\right)}\right)^{1/2}, \tag{2.15}$$

$$\lambda_n(P) \le \left(\min_i \frac{\lambda_i(Q) + 1/\alpha_i}{\lambda_i\left(BB^T - \alpha_i AA^T\right)} \right)^{1/2}, \; s_n(B) \neq 0 \tag{2.16}$$

dır.

(Kim ve Park, 2000) çalışmalarında, CARE (1.26) nın P çözüm matrisi için K, $A+BK$ kararlı olacak şekilde seçilen bir matris ve E ve M sırasıyla,

$$\left(A+BK\right)^T E^T E + E^T E\left(A+BK\right) \le -M \tag{2.17}$$

lineer matris eşitsizliğini sağlayan tersinir ve pozitif tanımlı matrisler olmak üzere CARE (1.26) nın çözümü olduğu sürece herhangi bir varsayım olmaksızın her zaman hesaplanabilecek olan

$$\lambda_1(P) \le \lambda_1\left(E^T E\right) \frac{\lambda_1\left[\left(Q + K^T K\right) E^T E\right]}{\lambda_n\left(ME^T E\right)} \equiv \eta_1 \tag{2.18}$$

öz değer sınırını elde etmişlerdir.

Buraya kadar olan sınırlar CARE (1.26) nın sistem matrislerini içeren matris eşitsizlikleri ve özdeşlikleri kullanılarak elde edilmiştir. (Lee, 2003b) çalışmasında, birleştirilmiş cebirsel Riccati matris denklemi olarak adlandırılan

$$PA + A^T P + \Delta A^T PA - \left(\Delta A^T + I\right) PB\left(I + \Delta B^T PB\right)^{-1} B^T P\left(\Delta A + I\right) = 0 \tag{2.19}$$

denklemini ele alarak, bu denklemden $\Delta = 0$ için CARE (1.26) yı ve $\Delta = 1$ ve $A+I$ yerine A alarak DARE (1.34) ü elde etmiştir. Ayrıca (2.19) denklemininden, yine bilinen matris özdeşlikleri ve matris eşitsizliklerini kullanarak CARE (1.26) nın çözümü için daha önce sunulan çalışmaların sonuçlarını geliştiren alt ve üst matris sınırları vermiştir.

Ayrıca (Lee, 2003a) çalışmasında, bazı varsayımlar altında CARE (1.26) nın pozitif tanımlı çözüm matrisi için çeşitli alt ve üst matris sınırları elde etmiştir. Bu sınırlar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

P, CARE (1.26) nın pozitif tanımlı çözüm matrisi olsun. Bu durumda, $G_1 \equiv \left(BB^T + R_1^{-1}\right)^{1/2}$ ve R_1, $Q > A^T R_1 A$ olacak şekilde seçilen pozitif bir sabit matris olmak üzere, P matrisi

$$P \ge G_1^{-1}\left(G_1\left(Q - A^T R_1 A\right) G_1\right)^{1/2} G_1^{-1} \equiv P_{l1} \tag{2.20}$$

alt sınırına sahiptir. Dahası, BB^T matrisi tersinirse, $\tilde{R}_1^{-1}$, $E_1 \equiv \left(BB^T - \tilde{R}_1^{-1}\right)^{1/2}$ olacak şekilde seçilen pozitif bir sabit matris olmak üzere, P matrisi

$$P \le E_1^{-1}\left(E_1\left(Q + A^T \tilde{R}_1^{-1} A\right)E_1\right)^{1/2} E_1^{-1} \equiv P_{u1} \tag{2.21}$$

üst sınırına sahiptir. Bu çalışmada ayrıca öz değer eşitsizlikleri ele alınarak, R_1 ve $\tilde{R}_1$ pozitif tanımlı matrisler olmak üzere;

$$P \ge \frac{1}{\lambda_1(G_1)}\left(Q - A^T R_1 A\right)^{1/2};\ Q > A^T R_1 A \tag{2.22}$$

$$P \le \frac{1}{\lambda_n(E_1)}\left(Q + A^T \tilde{R}_1 A\right)^{1/2} \tag{2.23}$$

alt ve üst matris sınırları elde edilmiştir. Son olarak sistem matrislerini içeren farklı matris işlemleriyle $G_2 \equiv \left(BB^T + AR_2^{-1}A^T\right)^{1/2}$ ve $E_2 \equiv \left(BB^T - A\bar{R}_2^{-1}A^T\right)^{1/2} > 0$

$$P \ge \frac{1}{\lambda_1(G_2)}\left(Q - R_2\right)^{1/2};\ 0 < R_2 < Q, \tag{2.24}$$

ve BB^T tersinirse $\bar{R}_2$ pozitif tanımlı matris olmak üzere

$$P \le \frac{1}{\lambda_n(E_2)}\left(Q + \bar{R}_2\right)^{1/2} \tag{2.25}$$

olduğu gösterilmiştir.

(Lee, 2004a) çalışmasında ise yukarıda bahsettiğimiz birleştirilmiş cebirsel Riccati matris denklemini ele alarak CARE (1.26) ve DARE (1.34) ün çözüm matrisinin öz değerleri için çeşitli sınırlar vermiştir.

(Lee, 2006) çalışmasında bazı lineer cebir teknikleri kullanarak CARE (1.26) nın çözümü için iki üst matris sınırı elde etmiştir. Ayrıca, bu matris sınırları yardımıyla tam çözüme daha yakın sınırlar elde etmek amacıyla algoritmalar geliştirmiştir. Bahsedilen üst sınırlar ve bunlara karşılık gelen algoritmalar aşağıdaki gibidir:

$$A + A^T < 2\alpha BB^T \tag{2.26}$$

olmak üzere V matrisi ve pozitif φ sabiti

$$V \equiv A - \alpha BB^T - I, \tag{2.27}$$

$$\varphi \equiv \frac{\lambda_1\left[V^{-T}\left(\alpha^2 BB^T + Q\right)V^{-1}\right]}{1 - \lambda_1\left\{V^{-T}\left[\left(V + \alpha I\right)^T\left(V + \alpha I\right) + I\right]V^{-1}\right\}} \tag{2.28}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$P \le V^{-T}\left(\varphi\left[\left(V + I\right)^T\left(V + I\right) + I\right] + \alpha^2 BB^T + Q\right)V^{-1} \equiv P_{a1} \tag{2.29}$$

olup buna karşılık gelen algoritma

Adım 1: $P_0 \equiv P_{a1}$ olsun.

Adım2: $P_k = V^{-T}\left[(V+I)^T P_{k-1}(V+I) + P_{k-1} + \alpha^2 BB^T + Q\right]V^{-1},\ k = 1,2,...$ (2.30)

iterasyonuyla verilir. İkinci üst sınır ise

$$P \le V^{-T}\left[\varphi(V+2I)^T(V+2I) + 2\left(Q+\alpha^2 BB^T\right)\right]V^{-1} \equiv P_{a2}$$

olup buna karşılık gelen algoritma

Adım 1: $\bar{P}_0 \equiv P_{a2}$ olsun.

Adım2: $\bar{P}_k = V^{-T}\left[(V+2I)^T \bar{P}_{k-1}(V+2I) + 2\alpha^2 BB^T + 2Q\right]V^{-1},\ k = 1,2,...$ (2.31)

iterasyonuyla verilir.

(Davies ve ark., 2008a) çalışmalarında CARE (1.26) nın çözümü için (Lee, 2006) çalışmasında kullanılan metodu ele alarak iki üst matris sınırı ve bu sınırlara bağlı olarak daha iyi sınırlar elde etmek için algoritmalar geliştirmişlerdir. Bahsedilen sınırlar, pozitif ρ sabiti ve W matrisi

$$\rho \equiv \frac{\lambda_1\left[W^{-T}M^{-T}\left(Q+K^TK\right)M^{-1}W^{-1}\right]}{1-\lambda_1\left\{W^{-T}\left[(W+I)^T(W+I)+I\right]W^{-1}\right\}}, \tag{2.32}$$

$$W \equiv M(A+BK)M^{-1} - I \tag{2.33}$$

gibi tanımlanmak ve $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrisi $A+BK$ kararlı ve $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tersinir matrisi $M(A+BK)M^{-1} + M^{-T}(A+BK)M^T < 0$ olacak şekilde seçilmek üzere;

$$P \le M^T W^{-T}\left(\rho\left[(W+I)^T(W+I)+I\right] + M^{-T}\left(Q+K^TK\right)M^{-1}\right)W^{-1}M \equiv P_{b1}, \tag{2.34}$$

$$P \le M^T W^{-T}\left(\rho(W+2I)^T(W+2I) + 2M^{-T}\left(Q+K^TK\right)M^{-1}\right)W^{-1}M \equiv P_{b2}, \tag{2.35}$$

olup bu sınırlara karşılık gelen algoritmalar sırasıyla

Adım 1: $R_0 \le P_{b1}$ olsun.

Adım2: $k = 0,1,...$ olmak üzere

$$R_{k+1} = M^T W^{-T}\begin{bmatrix}(W+I)^T M^{-T}R_k M^{-1}(W+I) + M^{-T}R_{k-1}M^{-1} \\ +M^{-T}\left(Q+K^TK\right)M^{-1}\end{bmatrix}W^{-1}M \tag{2.36}$$

ve

Adım 1: $\tilde{R}_0 \equiv P_{U2}$ olsun.

Adım2: $k = 0,1,...$ olmak üzere

$$\tilde{R}_{k+1} = M^T W^{-T} \begin{bmatrix} (W+2I)^T M^{-T} \tilde{R}_k M^{-1} (W+2I) \\ +2M^{-T} \left(Q + K^T K\right) M^{-1} \end{bmatrix} W^{-1} M \tag{2.37}$$

iterasyonlarıyla hesaplanır.

Daha sonra, (Chen ve Lee, 2009b), (Lee, 2003a) çalışmasında kullanılan metodu izleyerek, CARE (1.26) nın çözümü için, daha basit bir yaklaşım kullanarak farklı alt ve üst matris sınırları geliştirmişlerdir. Geliştirilen bu sınırlar herhangi farklı değişkenler içermeyip yalnızca sistem matrislerini ihtiva ettiğinden hesaplamalar daha kolaydır. Bu sınırları aşağıdaki gibi özetleyebiliriz:

Pozitif tanımlı $R \equiv \left(BB^T + 4AQ^{-1}A^T\right)^{1/2}$ matrisi için

$$P \geq \frac{\sqrt{3}}{2} R^{-1} \left(RQR\right)^{1/2} R^{-1} \equiv P_l \tag{2.38}$$

dir. Ayrıca, (Lee, 1997a) çalışmasında elde edilen;

$$\alpha = \frac{-\lambda_1\left(A + A^T\right) + \sqrt{\lambda_1^2\left(A + A^T\right) + 4s_n^2(B)\lambda_1(Q)}}{2s_n(B)\lambda_1(Q)} \tag{2.39}$$

olmak üzere

$$\lambda_1(P) \leq \frac{\alpha\lambda_1(Q) + \alpha^{-1}}{-\lambda_1\left(\alpha A + \alpha A^T - 2\left(BB^T\right)^{1/2}\right)} \equiv \eta_2, \mathrm{s}_n(B) \neq 0 \tag{2.40}$$

üst sınırını ve P_l alt sınırını dikkate alarak

$$P \leq \left\{ \frac{1}{s_n^2(B)} \left(\varphi \left(A + I\right)^T \left(A + I\right) + Q - A^T P_l A \right) + \frac{I}{4s_n^4(B)} \right\}^{1/2} - \frac{I}{2s_n^2(B)} \equiv P_u \tag{2.41}$$

sınırını elde etmişlerdir.

Birçok çalışmada temel düşünceyi teşkil eden, (Choi ve Kuc, 2002) tarafından CARE (1.26) nın çözümü için geliştirilen alt matris sınırını verelim:

CARE (1.26) daki Q matrisinin pozitif tanımlı olduğu varsayılsın. Bu durumda pozitif ε sabiti

$$0 < \varepsilon \leq \left\| BB^T + AQ^{-1}A^T \right\| \tag{2.42}$$

olmak üzere

$$P \geq \left[\varepsilon Q - \varepsilon^2 A^T \left(I - \varepsilon BB^T\right)^{-1} A \right]^{1/2} \tag{2.43}$$

dir.

(Zhang ve Liu, 2010) çalışmalarında (Choi ve Kuc, 2002) çalışmalarını esas alarak bu alt sınırı gerçek değere daha yakın hale getirmiş ve buna ek olarak bu düşünceyi esas alıp alternatif bir üst sınır elde etmişlerdir. Bu sınırlar aşağıdaki gibi verilebilir:

(Yasuda ve Hirai, 1979) çalışmasında verilen

$f(a,b,c)=\left(-a+\left(a^2+bc\right)^{1/2}\right)\Big/b$ ve $\tilde{A}=\left(A+A^T\right)\Big/2$ olmak üzere

$$\lambda_n(P)\geq f\left(-\lambda_n\left(\tilde{A}Q^{-1}\right),\lambda_1\left(RQ^{-1}\right),1\right)\equiv\eta^* \tag{2.44}$$

sabiti için, pozitif ε sabiti

$$0<\varepsilon\leq\min\left\{\frac{\eta^*}{2s_1(A)+\eta^*\lambda_1\left(BB^T\right)},\left\|BB^T+A^TQ^{-1}A\right\|\right\} \tag{2.45}$$

olmak üzere P çözüm matrisi

$$P\geq\left[\varepsilon Q-\varepsilon^2A^T\left(I-\varepsilon BB^T\right)^{-1}A+\frac{1}{4}\eta^{*2}\lambda_n\left(I-\varepsilon BB^T\right)I\right]^{1/2}\equiv\Phi_l(\varepsilon,A,Q,R) \tag{2.46}$$

ve pozitif ε sabiti

$$0<\varepsilon<\left\|BB^T+A^TQ^{-1}A\right\| \tag{2.47}$$

için

$$\begin{aligned}\tau&\equiv\frac{1}{1-\lambda_1(I-\varepsilon R)}\\ &\times\left\{\begin{array}{l}\varepsilon\lambda_1(I-\varepsilon R)s_1\left[A(I-\varepsilon R)^{-1}\right]+\left\langle\varepsilon^2\lambda_1^2(I-\varepsilon R)s_1^2\left[A(I-\varepsilon R)^{-1}\right]-\right.\\ \left.\left[1-\lambda_1(I-\varepsilon R)\right]\left\{\begin{array}{l}\varepsilon^2\lambda_n\left[A(I-\varepsilon R)A^T\right]-\varepsilon\lambda_1(Q)\\ -\varepsilon^2\lambda_1(I-\varepsilon R)s_1^2\left[A(I-\varepsilon R)^{-1}\right]\end{array}\right\}\right\rangle^{1/2}\end{array}\right.\end{aligned} \tag{2.48}$$

ile verilmek üzere

$$\begin{aligned}P&\leq\left\{\varepsilon Q-\varepsilon^2A(I-\varepsilon R)^{-1}A^T+\lambda_1(I-\varepsilon R)\left\{\tau+\varepsilon s_1\left[A(I-\varepsilon R)^{-1}\right]\right\}^2I\right\}^{1/2}\\ &\equiv\Phi_u(\varepsilon,A,Q,R)\end{aligned} \tag{2.49}$$

sınırlarına sahiptir.

(Liu ve ark., 2011) çalışmalarında, yukarıda verilen üst sınırı genelleştirerek aşağıda verilen alt ve üst sınırları türetmişlerdir:

α pozitif sabiti

$$A+A^T<2\alpha I \tag{2.50}$$

olacak şekilde seçilsin ve V matrisi

$$V \equiv A - \alpha I - I \tag{2.51}$$

ile tanımlansın. Pozitif ε sabiti (2.44) ile verilen η^* sabiti için

$$0 < \varepsilon < \min\left\{ \frac{\eta^*}{2s_1(V+I) + \eta^* \lambda_1\left(BB^T\right)}, \frac{\eta^*}{\alpha}, \left\| BB^T + (V+I)Q^{-1}(V+I)^T \right\|^{-1} \right\} \tag{2.52}$$

olmak üzere

$$P \geq \left\{ \varepsilon Q - \varepsilon^2 (V+I)^T \left(I - \varepsilon BB^T\right)^{-1} (V+I) + \varepsilon^2 \alpha^2 I + \frac{1}{4}\eta^2 \lambda_n \left(I - \varepsilon BB^T\right) I \right\}^{1/2} + \varepsilon\alpha I \tag{2.53}$$

ve

$$0 < \varepsilon^* < \min\left\{ \frac{\eta}{2s_1(V+2I) + \eta\lambda_1\left(BB^T\right)}, \frac{\eta}{\alpha - 1}, \left\| BB^T + (V+2I)Q^{-1}(V+2I)^T \right\|^{-1} \right\} \tag{2.54}$$

olmak üzere

$$P \geq \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^* Q - \varepsilon^{*2} (V+2I)^T \left(I - \varepsilon^* BB^T\right)^{-1} (V+2I) + \varepsilon^{*2} (\alpha - 1)^2 I \\ + \dfrac{1}{4}\eta^2 \lambda_n \left(I - \varepsilon^* BB^T\right) I \end{array} \right\}^{1/2} + \varepsilon^* (\alpha - 1) I \tag{2.55}$$

dir.

Ayrıca α pozitif sabiti

$$A + A^T < 2\alpha I \tag{2.56}$$

olacak şekilde seçilsin ve V matrisi

$$V \equiv A - \alpha I - I \tag{2.57}$$

ile tanımlansın. Pozitif τ sabiti

$$\begin{aligned} \tau \equiv & \frac{1}{1 - \lambda_1\left(I - \varepsilon BB^T\right)} \left\{ \varepsilon \lambda_1 \left(I - \varepsilon BB^T\right) s_1 \left[\left(I - \varepsilon BB^T\right)^{-1} (V+I) \right] + \varepsilon\alpha \right. \\ & + \left\{ \left\{ \varepsilon \lambda_1 \left(I - \varepsilon BB^T\right) s_1 \left[\left(I - \varepsilon BB^T\right)^{-1} (V+I) \right] + \varepsilon\alpha \right\}^2 + \left[1 - \lambda_1 \left(I - \varepsilon BB^T\right) \right] \right. \\ & \left. \left. \times \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^2 \lambda_1 \left(I - \varepsilon BB^T\right) s_1^2 \left[\left(I - \varepsilon BB^T\right)^{-1} (V+I) \right] \\ - \lambda_n \left[\varepsilon^2 (V+I)^T \left(I - \varepsilon BB^T\right)^{-1} (V+I) \right] + \varepsilon \lambda_1 (Q) \end{array} \right\} \right\}^{1/2} \right\} \end{aligned} \tag{2.58}$$

ve pozitif ε sabiti

$$0 < \varepsilon < \min\left\{ \frac{\eta^*}{\alpha}, \left\| BB^T + (V+I)Q^{-1}(V+I)^T \right\|^{-1} \right\} \tag{2.59}$$

olmak üzere

$$P \le \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1\left(I-\varepsilon BB^T\right)\left\{\tau+\varepsilon s_1\left[\left(I-\varepsilon BB^T\right)^{-1}\left(V+I\right)\right]\right\}^2 I \\ -\varepsilon^2\left(V+I\right)^T\left(I-\varepsilon BB^T\right)^{-1}\left(V+I\right)+\varepsilon^2\alpha^2 I+\varepsilon Q \end{array} \right\}^{1/2} + \varepsilon\alpha I \tag{2.60}$$

ve $\alpha > 1$ sabiti yukarıdaki gibi tanımlanmak üzere pozitif ε sabiti

$$0 < \tilde{\varepsilon} < \min\left\{ \frac{\eta^*}{\alpha-1}, \left\| BB^T + \left(V+2I\right)Q^{-1}\left(V+2I\right)^T \right\|^{-1} \right\} \tag{2.61}$$

ve

$$\begin{aligned} \varphi \equiv & \frac{1}{1-\lambda_1\left(I-\tilde{\varepsilon}BB^T\right)}\left\{\tilde{\varepsilon}\lambda_1\left(I-\tilde{\varepsilon}BB^T\right)s_1\left[\left(I-\tilde{\varepsilon}BB^T\right)^{-1}\left(V+I\right)\right]+\tilde{\varepsilon}\left(\alpha-1\right)\right. \\ & +\left\{\left\{\tilde{\varepsilon}\lambda_1\left(I-\tilde{\varepsilon}BB^T\right)s_1\left[\left(I-\tilde{\varepsilon}BB^T\right)^{-1}\left(V+I\right)\right]+\tilde{\varepsilon}\left(\alpha-1\right)\right\}^2+\left[1-\lambda_1\left(I-\tilde{\varepsilon}BB^T\right)\right]\right. \\ & \left.\left.\times\left\{\begin{array}{l}\tilde{\varepsilon}^2\lambda_1\left(I-\tilde{\varepsilon}BB^T\right)s_1^2\left[\left(I-\tilde{\varepsilon}BB^T\right)^{-1}\left(V+I\right)\right] \\ -\lambda_n\left[\tilde{\varepsilon}^2\left(V+I\right)^T\left(I-\tilde{\varepsilon}BB^T\right)^{-1}\left(V+I\right)\right]+\tilde{\varepsilon}\lambda_1\left(Q\right)\end{array}\right\}\right\}^{1/2}\right\} \end{aligned} \tag{2.62}$$

ile tanımlanan pozitif φ sabiti için

$$P \le \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1\left(I-\tilde{\varepsilon}BB^T\right)\left\{\varphi+\tilde{\varepsilon}s_1\left[\left(I-\tilde{\varepsilon}BB^T\right)^{-1}\left(V+2I\right)\right]\right\}^2 I \\ -\tilde{\varepsilon}^2\left(V+2I\right)^T\left(I-\tilde{\varepsilon}BB^T\right)^{-1}\left(V+2I\right)+\tilde{\varepsilon}^2\left(\alpha-1\right)^2 I+\tilde{\varepsilon}Q \end{array} \right\}^{1/2} + \tilde{\varepsilon}\left(\alpha-1\right)I \tag{2.63}$$

dir.

(Lee, 2012) çalışmasında ise CARE (1.26) için iki yeni üst sınır elde etmiştir. Bu sınırlardan biri Q nun tersinir olmasını gerektirirken diğeri Q nun tersinir olmasını gerektirmemektedir. Bu sınırlar aşağıdaki gibidir:

$$A + A^T < 2\alpha BB^T \tag{2.64}$$

olacak şekilde pozitif α sabiti varsa P çözüm matrisi için

$$P \le \frac{1+\alpha^2\mu\left(BB^TQ^{-1}\right)}{-2\mu\left(A-\alpha BB^T\right)}Q \tag{2.65}$$

dir. Ayrıca Q matrisi pozitif yarı tanımlı olmak üzere ve α yukarıdaki gibi tanımlanmak üzere P çözüm matrisi için

$$P \le \frac{Q+\alpha^2 BB^T}{-2\mu\left(A-\alpha BB^T\right)} \tag{2.66}$$

dir.

(Zhang ve ark., 2013), bazı lineer cebirsel teknikleri kullanarak literatürdeki bazı sonuçları geliştirmiş, CARE (1.26) nın pozitif yarı tanımlı çözümü için aşağıda verilen üst sınırları elde etmişlerdir:

İlk olarak;

$$A+A^T<2\alpha R \tag{2.67}$$

olacak şekilde pozitif α sabitinin olduğu varsayılsın. β pozitif bir sabit olsun ve

$$W\equiv A-\alpha R-\beta I \tag{2.68}$$

tanımlansın. $\gamma\in[0,1]$ için

$$V\equiv(W+\beta I)^T(W+\beta I)+\beta^2 I \tag{2.69}$$

ve

$$\omega\equiv\frac{\beta\lambda_1\left\{W^{-T}\left(Q+\alpha^2R\right)W^{-1}\right\}}{1-\lambda_1\left(W^{-T}VW^{-1}\right)} \tag{2.70}$$

olmak üzere P çözüm matrisi

$$P\le W^{-T}\left\{\omega V+\omega\beta\gamma\left(W+W^T+2\beta I\right)+\beta(1+\gamma)\left(Q+\alpha^2R\right)\right\}W^{-1}\equiv P_u(\beta,\gamma) \tag{2.71}$$

üst sınırına sahiptir.

İkinci olarak;

Pozitif α sabiti (2.67) şartını sağlamak üzere, yukarıda tanımlanan β,V,W ve ω için

$$P\le W^{-T}\left\{\omega V+\frac{1}{2}\omega\beta\left(W+W^T+2\beta I\right)+\frac{3}{2}\beta\left(Q+\alpha^2R\right)\right\}W^{-1}\equiv P_u(\beta) \tag{2.72}$$

dır. Bu çalışmada son olarak ise bahsedilen sınırları ele alarak daha iyi sonuçlar elde etmek için aşağıdaki iteratif algoritma verilmiştir:

Algoritma:

Adım 1. $P_u(\beta,\gamma)$ yukarıda tanımlanan üst sınır olmak üzere $X_0\equiv P_u(\beta,\gamma)$ olsun.

Adım 2. $$X_k=W^{-T}\begin{Bmatrix}(W+\beta I)^T X_{k-1}(W+\beta I)+\beta^2(1+2\gamma)X_{k-1}\\+\beta\gamma\left(X_{k-1}W+WX_{k-1}\right)+\beta(1+\gamma)\left(Q+\alpha^2R\right)\end{Bmatrix}W^{-1},\ k=1,2,\ldots. \tag{2.73}$$

Bu durumda X_k lar da CARE (1.26) nın çözümü için üst sınırlardır.

2.2. Ayrık Cebirsel Riccati Matris Denklemi

Bölüm 2.1 de CARE (1.26) için bahsedildiği gibi (Mori ve Derese, 1984) çalışmalarında, aynı zamanda 1977- 1983 yılları arasında DARE (1.34) ün çözüm matrisi, çözüm matrisinin en büyük ve en küçük öz değerleri, izi, determinantı ve spectral normu için elde edilen sınırların bir özetini sunmuştur.

Yine (Kwon ve ark., 1996) çalışmalarında, 1977-1994 yılları arasında DARE (1.34) ün çözüm matrisi, çözüm matrisinin en büyük ve en küçük öz değerleri, öz değerlerin $k.$ toplamları, $k.$ çarpımları, izi, determinantı ve normları için elde edilen sınırların bir özetini sunmuştur.

Ayrık cebirsel Riccati matris denkleminin çözümü için bu yıllar arasındaki tüm sonuçlar yukarıdaki iki çalışmada ayrıntılı olarak yer aldığından, birçoğundan ayrıca çalışmamızda bahsedilmeyecektir.

(Komaroff, 1994a) çalışmasında DARE (1.34) ün çözüm matrisi için alt ve üst sınırlar, bu sınırlara bağlı olarak tam değere daha yakın sınırlar veren algoritmalar türetilmiştir. Bu sınırları ve algoritmaları aşağıdaki gibi özetleyebiliriz:

$$P > (\geq) A^T \left(Q^{-1} + BB^T\right)^{-1} A + Q, \tag{2.74}$$

$$P < (\leq) A^T \left(BB^T\right)^{-1} A + Q \tag{2.75}$$

Bu sınırlarda A matrisi tersinir olduğunda kesin eşitsizlik elde edilir. Ayrıca yine bu çalışmadaki algoritmalar da aşağıdaki gibi verilmiştir:

$P_0 = Q$ olmak üzere $j = 1, 2, \ldots$ için

$$P_j = A^T \left(P_{j-1}^{-1} + BB^T\right)^{-1} A + Q \tag{2.76}$$

olsun. Bu durumda

$$P = \lim_{j \to \infty} P_j \tag{2.77}$$

dir. Aynı şekilde $P_0 = A^T \left(BB^T\right)^{-1} A + Q$ olmak üzere $j = 1, 2, \ldots$ için

$$P_j = A^T \left(P_{j-1}^{-1} + BB^T\right)^{-1} A + Q \tag{2.78}$$

olsun. Bu durumda

$$P = \lim_{j \to \infty} P_j \tag{2.79}$$

dir.

(Lee, 1996b) çalışmasında, DARE (1.34) ün çözümü için alt ve üst matris sınırları geliştirmiştir. Bahsedilen alt matris sınırı;

$\delta = s_n^2(A) + s_1^2(B)\lambda_n(Q) - 1$ için α_n pozitif sabiti

$$\alpha_n = \frac{\delta + \left[\delta^2 + 4s_1^2(B)\lambda_n(Q)\right]^{1/2}}{2s_1^2(B)} \tag{2.80}$$

ile tanımlanmak üzere

$$P \geq \alpha_n AA^T \Big/ \left[1 + \alpha_n s_1^2(B)\right] + Q \tag{2.81}$$

olup üst matris sınırı ise

$\varphi = s_1^2(A) + s_n^2(B)\lambda_1(Q) - 1$ için α_1 pozitif sabiti

$$\alpha_1 = \frac{\varphi + \left[\varphi^2 + 4s_n^2(B)\lambda_1(Q)\right]^{1/2}}{2s_n^2(B)} \tag{2.82}$$

ile tanımlanmak üzere

$$P \leq \alpha_1 AA^T \Big/ \left[1 + \alpha_1 s_n^2(B)\right] + Q \tag{2.83}$$

şeklindedir.

Ayrıca, (Lee, 1997d) çalışmasında (Komaroff, 1994a) çalışmasında elde edilen sınırı kullanarak DARE (1.34) ün çözümü için yeni bir üst matris sınırı elde etmiştir. Bu sınır;

$\eta = \lambda_1\left[A^T\left(Q^{-1} + BB^T\right)^{-1}A + Q\right]$ olmak üzere $s_1^2(A) < 1 + s_n^2(B)\eta$ şartı altında

$$P \leq \frac{\lambda_1(Q)}{1 + \eta s_n^2(B) - s_1^2(A)} A^T A + Q \tag{2.84}$$

şeklindedir.

(Lee ve Chang, 1998) çalışmalarında, farklı matris özdeşlikleri ve matris eşitsizlikleri kullanarak bazı varsayımlar altında DARE (1.34) ün çözümü için yeni sınırlar ve bu sınırların kontrol teorideki bazı uygulamalarını vermiştir. Bu sınırlar aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\varphi = \lambda_n\left[\lambda_n(Q)A^T A + Q\right] \Big/ \left\{1 + \lambda_1\left[A^T B\left(\lambda_n^{-1}(Q)I + B^T B\right)^{-1} B^T A\right]\right\} \tag{2.85}$$

ve

$P_0 = A^T\left(\varphi^{-1}I + BB^T\right)^{-1}A + Q$ olsun. Bu durumda sınırlar

$$P \geq A^T\left(P_0^{-1} + BB^T\right)^{-1}A + Q \tag{2.86}$$

ve

$$\eta = \lambda_1\left\{A^T\left[I - B\left(\lambda_n^{-1}(Q)I + B^TB\right)^{-1}B^T\right]A\right\} < 1 \tag{2.87}$$

şartı altında

$$P \le A^T\left[\lambda_1^{-1}(Q)(1-\eta)I + BB^T\right]^{-1}A + Q \tag{2.88}$$

şeklindedir.

(Lee ve Hsien, 1999) çalışmalarında ise DARE (1.34) ün çözüm matrisi için aşağıdaki alt ve üst matris sınırlarını geliştirmişlerdir:

$f(a,b,c)$ fonksiyonu

$$f(a,b,c) = \frac{-a + \sqrt{a^2 + bc}}{b} = \frac{c}{a + \sqrt{a^2 + bc}}, b \neq 0 \tag{2.89}$$

şeklinde tanımlansın. $a = 1 - s_n^2(A)$, $b = 2\lambda_1\left[A^TB\left(I + \lambda_n(Q)B^TB\right)^{-1}B^TA\right]$ ve $c = 2\lambda_n(Q)$ olsun. Bu durumda

$$P_1 = A^T\left[f(a,b,c)^{-1}I + BB^T\right]^{-1}A + Q \tag{2.90}$$

olmak üzere P çözüm matrisi

$$P \ge A^T\left(P_1^{-1} + BB^T\right)A + Q \tag{2.91}$$

alt sınırına sahiptir.

$a_1 = 1 - \lambda_1\left[A^TA + s_1^2(B)Q\right]$, $c = 2\lambda_1(Q)$ olsun. Bu durumda

$b = 2s_1^2(B) - 2\lambda_1\left[s_1^2(B)A^TA - A^TBB^TA\right] > 0$ ise

$$P_2 = A^T\left[f(a_1,b_1,c_1)^{-1}I + BB^T\right]^{-1}A + Q \tag{2.92}$$

olmak üzere P çözüm matrisi

$$P \le A^T\left(P_2^{-1} + BB^T\right)^{-1}A + Q \tag{2.93}$$

üst sınırına sahiptir.

Yukarıdaki sınırlara bakıldığında birçoğunun varsayımlara bağlı olduğu görülmektedir. (Kim ve Park, 1999) çalışmalarında DARE (1.34) ün çözümü için çözüm şartları var olduğu sürece herhangi bir şarta bağlı olmaksızın her zaman hesaplanabilecek olan bir alt sınır ve ayrık Lyapunov matris denkleminin çözümünü içeren ve bu çözüm olduğu sürece her zaman hesaplanabilen bir üst matris sınırı elde etmişlerdir. Bu sınırlar,

$$P \geq A^T \left(I + QBB^T \right)^{-1} A + Q \tag{2.94}$$

ve A matrisi kararlı ise, P_L, ayrık cebirsel Lyapunov matris denkleminin çözümü olmak üzere

$$P \leq A^T \left(I + P_L BB^T \right) P_L A + Q \tag{2.95}$$

ile verilmektedir.

(Choi, 2001) çalışmasında ise bazı varsayımlar altında, Schur tamamlayanını kullanarak DARE (1.34) ün çözüm matrisi için aşağıda verilen üst sınırları türetmiştir:

A matrisinin tersinir ve $\left(A^T, B, Q^{1/2} \right)$ üçlüsünün kararlı hale getirilebilir ve gözlemlenebilir olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$A^T \left(\frac{1}{\alpha} I + BB^T \right)^{-1} A + Q < \alpha I \tag{2.96}$$

şartını sağlayan pozitif bir α sabiti varsa DARE (1.34) ün pozitif tanımlı P çözüm matrisi için

$$P < A^T \left(\frac{1}{\alpha} I + BB^T \right)^{-1} A + Q \tag{2.97}$$

üst sınırdır.

Yukarıda verilen sınırda ele alınan varsayımın Schur tamamlayanı yardımıyla farklı bir versiyonu göz önüne alınarak,

$$\alpha \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} AA^T - I & AQ^{1/2} \\ Q^{1/2} A^T & Q \end{bmatrix} > 0 \tag{2.98}$$

şartını sağlayan pozitif bir α sabiti için

$$P < A^T \left(\frac{1}{\alpha} I + BB^T \right)^{-1} A + Q \tag{2.99}$$

eşitsizliği elde edilmiştir.

Son olarak A matrisinin tersinir ve $\left(A^T, B, Q^{1/2} \right)$ üçlüsünün kararlı hale getirilebilir ve gözlemlenebilir olduğu varsayılırsa ve $\bar{A} = M^{-1} A M, \bar{B} = M^{-1} B, \bar{Q} = MQM$ olacak şekilde pozitif tanımlı bir M matrisi ve bu matrisler için (2.98) şartını sağlayan pozitif bir α sabiti varsa

$$P < A^T \left(\frac{1}{\alpha} M^2 + BB^T \right)^{-1} A + Q \tag{2.100}$$

dır.

(Gao ve ark., 2002)çalışmalarında aşağıdaki sınırları elde etmişlerdir:

$$A^T\left(I+MBB^T\right)^{-1}MA+Q\le M \tag{2.101}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde pozitif yarı tanımlı bir M matrisi varsa, $i=1,2,\ldots$ için

$$\begin{aligned} P_0 &= M \\ P_i &= A^T\left(I+P_{i-1}BB^T\right)^{-1}P_{i-1}A+Q \end{aligned} \tag{2.102}$$

olmak üzere

$$P=\lim_{i\to\infty}P_i \text{ ve } P\le P_i\le P_{i-1} \tag{2.103}$$

dir.

Benzer şekilde,

$$P\ge M\ge 0 \text{ ve } A^T\left(I+MBB^T\right)^{-1}MA+Q\ge M \tag{2.104}$$

şartlarını sağlayan M matrisi varsa, $i=1,2,\ldots$ için

$$\begin{aligned} P_0 &= M \\ P_i &= A^T\left(I+P_{i-1}BB^T\right)^{-1}P_{i-1}A+Q \end{aligned} \tag{2.105}$$

olmak üzere

$$P=\lim_{i\to\infty}P_i \text{ ve } P\ge P_i\ge P_{i-1} \tag{2.106}$$

dir.

(Lee, 2003b) çalışmasında birleştirilmiş cebirsel Riccati matris denklemini ele alarak DARE (1.34) ün çözüm matrisi için çeşitli alt ve üst sınırlar geliştirmiştir. Bu sınırlar aşağıdaki gibi verilmiştir:

$f(a,b,c)$ fonksiyonu

$$f(a,b,c)=\frac{-a+\sqrt{a^2+bc}}{b}=\frac{c}{a+\sqrt{a^2+bc}},b\ne 0 \tag{2.107}$$

ile verilsin. φ_1 ve ω_1 sabitleri

$$\varphi_1\equiv f\left(-s_n^2(A)-s_1^2(B)\lambda_n(Q)+1,2s_1^2(B),2\lambda_n(Q)\right) \tag{2.108}$$

$$\omega_1\equiv f\left(-s_1^2(A)-s_n^2(B)\lambda_1(Q)+1,2s_n^2(B),2\lambda_1(Q)\right) \tag{2.109}$$

olmak üzere P_{l0d} ve P_{u0d} matrisleri

$$P_{l0d}\equiv A^T\left(\varphi_1^{-1}I+BB^T\right)^{-1}A+Q, \tag{2.110}$$

$$P_{u0d}\equiv A^T\left(\omega_1^{-1}I+BB^T\right)^{-1}A+Q \tag{2.111}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda sınırlar

$$P \geq A^T \left(P_{l0d}^{-1} I + BB^T \right)^{-1} A + Q, \tag{2.112}$$

$$P \leq A^T \left(P_{u0d}^{-1} I + BB^T \right)^{-1} A + Q, \tag{2.113}$$

$$\begin{aligned} P \leq \alpha^2 & \left\{ (A-I)^T P_{u0d} (A-I) + Q + \left[\alpha (A-I) + \frac{1}{\alpha} I \right]^T P_{u0d} \left[\alpha (A-I) + \frac{1}{\alpha} I \right] \right\} \\ & -\alpha^2 \left\{ \alpha^2 (A-I)^T P_{l0d} (A-I) + \lambda_n \left[B \left(I + B^T P_{u0d} B \right) \right] A^T P_{l0d}^2 A \right\} \end{aligned} \tag{2.114}$$

şeklindedir.

(Davies ve ark., 2008b) çalışmalarında DARE (1.34) ün çözümü için (A, B) çiftinin kararlı hale getirilebilirliğini kullanarak aşağıdaki üst matris sınırları ve bu sınırlara bağlı olarak tam değere daha yakın sınırlar elde etmek için iteratif algoritmalar geliştirmişlerdir:

P, DARE (1.34) ün pozitif yarı tanımlı çözüm matrisi ve $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $A + BK$ kararlı olacak şekilde seçilen bir matris olsun. $s_1^2 (A + BK) < 1$ ise

$$\kappa \equiv \frac{\lambda_1 \left(Q + K^T K \right)}{1 - s_1^2 (A + BK)} \tag{2.115}$$

olmak üzere

$$P \leq \kappa (A + BK)^T (A + BK) + Q + K^T K \equiv P_{U1} \tag{2.116}$$

olup bu sınıra karşılık gelen algoritma aşağıdaki gibidir:

Algoritma.

Adım 1. P_{U1}**,** (2.115) ile tanımlanmak üzere $M_0 \equiv P_{U1}$ olsun.

Adım 2. $k = 1, 2, \ldots$ olmak üzere

$$M_k = A^T \left(I + M_{k-1} BB^T \right)^{-1} M_{k-1} A + Q \tag{2.117}$$

iterasyonuyla hesaplanır. $k \to \infty$ için $M_{k+1} = M_k$ ve $M_\infty = \lim_{k \to \infty} M_k = P$ dir.

Ayrıca, $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $A + BK$ kararlı ve D, $\det D \neq 0$ için $s_1^2 \left[D (A + BK) D^{-1} \right] < 1$ olacak şekilde seçilen matrisler olsun. Bu takdirde

$$\mu \equiv \frac{\lambda_1 \left[D^{-T} \left(Q + K^T K \right) D^{-1} \right]}{1 - s_1^2 \left[D (A + BK) D^{-1} \right]} \tag{2.118}$$

olmak üzere

$$P \le \mu\left(A+BK\right)^T D^T D\left(A+BK\right)+Q+K^T K \equiv P_{U2} \tag{2.119}$$

olup bu sınıra karşılık gelen algoritma aşağıdaki gibidir:

Algoritma.

Adım 1. P_{U2}**,** (2.119) ile tanımlanmak üzere $\overline{M}_0 \equiv P_{U2}$ olsun.

Adım 2. $k=1,2,\ldots$ olmak üzere

$$\overline{M}_k = A^T\left(I+\overline{M}_{k-1}BB^T\right)^{-1}\overline{M}_{k-1}A+Q \tag{2.120}$$

iterasyonuyla hesaplanır. $k\to\infty$ için $\overline{M}_{k+1}=\overline{M}_k$ ve $\overline{M}_\infty=\lim_{k\to\infty}\overline{M}_k=P$ dir.

(Dai ve Bai, 2011), ise DARE (1.34) ün çözüm matrisinin öz değerleri, öz değerlerinin kısmi toplamları ve çarpımları için belli şartlar altında çeşitli alt ve üst sınırlar sunulmuştur. Bu sınırlar $k=1,2,\ldots,n$ için aşağıdaki gibi verilmiştir:

P , DARE (1.34) ün pozitif tanımlı çözüm matrisi olsun. Bu takdirde

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(P\right) \ge \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{s_{n-i+1}^2\left(A\right)\lambda_i\left(Q\right)}{\lambda_i\left(Q\right)\lambda_1\left(BB^T\right)+1}+\lambda_{n-i+1}\left(Q\right)\right), \tag{2.121}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(P\right) \ge \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{s_i^2\left(A\right)\lambda_{n-i+1}\left(Q\right)}{\lambda_{n-i+1}\left(Q\right)\lambda_1\left(BB^T\right)+1}+\lambda_{n-i+1}\left(Q\right)\right), \tag{2.122}$$

ve $\det A\neq 0$ ve $Q>0$ ise $\theta=s_n^2\left(A\right)+\lambda_1\left(BB^T\right)\lambda_n\left(Q\right)-1$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(P\right) \ge \frac{\theta+\sqrt{\theta^2+4\lambda_1\left(BB^T\right)\sum_{i=1}^{k}\lambda_{n-i+1}\left(Q\right)}}{2\lambda_1\left(BB^T\right)} \tag{2.123}$$

eşitsizliği sağlanmaktadır. Ayrıca $s_1\left(A\right)<1$ ise

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(P\right) \le \frac{1}{1-s_1^2\left(A\right)}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(Q\right),\ k=1,2,\ldots,n-r\,, \tag{2.124}$$

ve

$$\Theta=s_1^2\left(A\right)+\lambda_1\left(Q\right)\lambda_r\left(BB^T\right)-1, \tag{2.125}$$

$$\beta=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(Q\right)+\left(n-r\right)\lambda_r\left(R\right)\left(\frac{s_1\left(A\right)\lambda_1\left(Q\right)}{1-s_1^2\left(A\right)}\right)^2, \tag{2.126}$$

$$\delta = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (Q) + \lambda_r \left(BB^T \right) \left(\frac{s_1 (A) \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i (Q)}{1 - s_1^2 (A)} \right)^2 \tag{2.127}$$

olmak üzere $\eta = \min \{ \beta, \delta \}$ için

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (P) \le \frac{k \left[\Theta + \sqrt{\Theta^2 + 4\lambda_r \left(BB^T \right) \eta / k} \right]}{2\lambda_r \left(BB^T \right)}, \; k = n-r+1, n-r+2, \ldots, n \tag{2.128}$$

ve son olarak ise $s_1 (A) < 1$ şartı altında

$$\prod_{i=1}^{k} \lambda_i (P) \le \left(\frac{1}{k \left(1 - s_1^2 (A) \right)} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (Q) \right)^k , \; k = 1, 2, \ldots, n-r \tag{2.129}$$

$$\prod_{i=1}^{k} \lambda_i (P) \le \left(\frac{\Theta + \sqrt{\Theta^2 + 4\lambda_r \left(BB^T \right) \eta / k}}{2\lambda_r \left(BB^T \right)} \right)^k , \; k = n-r+1, n-r+2, \ldots, n \tag{2.130}$$

eşitsizlikleri sağlanmaktadır.

3. SÜREKLİ CEBİRSEL RİCCATİ MATRİS DENKLEMİNİN ÇÖZÜM MATRİSİ İÇİN ÜST SINIRLAR

Bu bölümde, ilk iki bölümde verilen bilgiler ışığında temel sonuçlar verilmiştir. Bu bölüm üç kısma ayrılmaktadır. İlk olarak, CARE (1.26) nın sistem matrisinde verilen BB^T matrisinin regüler olduğu durum ele alınarak, CARE (1.26) nın çözüm matrisi için bazı sabit parametreler içeren üst sınırlar elde edilmiştir. İkinci olarak, BB^T matrisinin hem singüler hem de regülerliği için farklı bir yöntem kullanılarak, CARE (1.26) nın çözümü için yine belli sabit parametreler içeren üst sınırlar verilmiştir. Daha sonra farklı matris özdeşlikleri dikkate alınarak bu özdeşlikler ışığında keyfi seçilen pozitif tanımlı bir matrise bağlı olarak, CARE (1.26) nın çözüm matrisi için alternatif üst sınırlar sunulmuştur. Bunlara ek olarak, elde edilen üst sınırlara bağlı olarak gerçek değere daha yakın yaklaşımlar veren iteratif algoritmalar geliştirilmiştir.

3.1. Temel Sonuçlar

Teorem 3.1.1. α ve β pozitif sabitler olmak üzere

$$V \equiv A - \alpha I - \beta I \tag{3.1}$$

matrisi tanımlansın ve P, CARE (1.26) nın pozitif yarı tanımlı çözüm matrisi olsun. Bu durumda pozitif α, β ve γ sabitleri için

$$A + A^T < 2\gamma I\,, \tag{3.2}$$

$$A + A^T < 2\alpha I \tag{3.3}$$

ve

$$2\alpha + \beta \geq 2\gamma \tag{3.4}$$

bağıntıları sağlanmak üzere ve

$$\varphi \equiv \frac{\beta\lambda_1\left[V^{-T}\left(Q+\gamma^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)V^{-1}\right]}{1-\lambda_1\left\{V^{-T}\left[\left(V+\beta I\right)^T\left(V+\beta I\right)+\left(2\alpha\beta+\beta^2-2\gamma\beta\right)I\right]V^{-1}\right\}} \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlanan φ, pozitif bir sabit olmak üzere

$$\begin{aligned} P &\leq V^{-T}\left\{\varphi\left[\left(V+\beta I\right)^T\left(V+\beta I\right)+\left(2\alpha\beta+\beta^2-2\gamma\beta\right)I\right]+\beta\left(Q+\gamma^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)\right\}V^{-1} \\ &\equiv P_{u1} \end{aligned} \tag{3.6}$$

dir.

İspat. α, pozitif bir sabit olmak üzere CARE (1.26)

$$P\left(A-\alpha I\right)+\left(A-\alpha I\right)^{T}P+2\alpha P+Q=PBB^{T}P \tag{3.7}$$

formunda yazılabilir. (3.1) den V matrisinin tanımıyla (3.7) eşitliğinin yeni formunu

$$P\left(V+\beta I\right)+\left(V+\beta I\right)^{T}P+2\alpha P+Q=PBB^{T}P \tag{3.8}$$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca, CARE (1.26) yı ve (3.8) eşitliğini bir arada ele alarak

$$\left(V+\beta I\right)^{T}P\left(V+\beta I\right)+\left(2\alpha\beta+\beta^{2}\right)P+\beta Q=V^{T}PV+\beta PBB^{T}P \tag{3.9}$$

özdeşliğini elde ederiz. γ, pozitif bir sabit olmak üzere Teorem 1.1.2.11 i kullanarak

$$\begin{pmatrix}\gamma^{2}\left(BB^{T}\right)^{-1} & \gamma P\\ \gamma P & PBB^{T}P\end{pmatrix}\geq 0 \tag{3.10}$$

blok matrisini yazabiliriz. Yukarıdaki blok matrise Teorem 1.1.2.12 nin uygulanmasıyla

$$2\gamma P\leq\gamma^{2}\left(BB^{T}\right)^{-1}+PBB^{T}P \tag{3.11}$$

eşitsizliği elde edilir ve bu eşitsizlik pozitif bir β sabiti ile çarpıldığında

$$2\beta\gamma P\leq\beta\gamma^{2}\left(BB^{T}\right)^{-1}+\beta PBB^{T}P \tag{3.12}$$

olur. Ayrıca (3.9) eşitliğinin her iki tarafına $\beta\gamma^{2}\left(BB^{T}\right)^{-1}$ eklendiğinde

$$\begin{aligned}V^{T}PV+\beta\left(\gamma^{2}\left(BB^{T}\right)^{-1}+PBB^{T}P\right)&=\left(V+\beta I\right)^{T}P\left(V+\beta I\right)+\beta\left(2\alpha+\beta\right)P\\&\quad+\beta\left(Q+\gamma^{2}\left(BB^{T}\right)^{-1}\right)\end{aligned} \tag{3.13}$$

olur ki, buradan (3.12) eşitsizliği, (3.13) eşitliği ve (3.4) şartı birlikte ele alındığında

$$V^{T}PV\leq\left(V+\beta I\right)^{T}P\left(V+\beta I\right)+\beta\left(2\alpha+\beta-2\gamma\right)P+\beta\left(Q+\gamma^{2}\left(BB^{T}\right)^{-1}\right) \tag{3.14}$$

elde edilir. Diğer yandan V matrisi için Teorem 1.1.1.8 kullanıldığında

$$2\,\mathrm{Re}\,\lambda_{i}\left(V\right)\leq\lambda_{1}\left(V+V^{T}\right)=\lambda_{1}\left(A+A^{T}-2\alpha I\right)-2\beta I<0 \tag{3.15}$$

eşitsizliğinden V matrisi tersinir olup (3.14) den

$$P\leq V^{-T}\left[\left(V+\beta I\right)^{T}P\left(V+\beta I\right)+\beta\left(2\alpha+\beta-2\gamma\right)P+\beta\left(Q+\gamma^{2}\left(BB^{T}\right)^{-1}\right)\right]V^{-1} \tag{3.16}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. (3.16) eşitsizliğine Teorem 1.1.1.4 ve Teorem 1.1.2.7 nin uygulanmasıyla

$$P\leq V^{-T}\begin{bmatrix}\left[\left(V+\beta I\right)^{T}\left(V+\beta I\right)+\beta\left(2\alpha+\beta-2\gamma\right)I\right]\lambda_{1}\left(P\right)\\ +\beta\left(Q+\gamma^{2}\left(BB^{T}\right)^{-1}\right)\end{bmatrix}V^{-1} \tag{3.17}$$

elde edilir. Bununla birlikte (3.17) eşitsizliğine Teorem 1.1.2.8 ile verilen Weyl' in monotonluk prensibinin uygulanmasıyla ve buna ek olarak Teorem 1.1.1.5 in kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}\lambda_1(P) &\le \lambda_1\left\{V^{-T}\begin{bmatrix}\left[(V+\beta I)^T(V+\beta I)+\beta(2\alpha+\beta-2\gamma)I\right]\lambda_1(P)\\ +\beta\left(Q+\gamma^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)\end{bmatrix}V^{-1}\right\}\\ &\le \lambda_1(P)\lambda_1\left\{V^{-T}\left[(V+\beta I)^T(V+\beta I)+\beta(2\alpha+\beta-2\gamma)I\right]V^{-1}\right\}\\ &+\beta\lambda_1\left[V^{-T}\left(Q+\gamma^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)V^{-1}\right]\end{aligned} \tag{3.18}$$

eşitsizliği sağlanır ki, bu,

$$\lambda_1(P) \le \frac{\beta\lambda_1\left[V^{-T}\left(Q+\gamma^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)V^{-1}\right]}{1-\lambda_1\left\{V^{-T}\left[(V+\beta I)^T(V+\beta I)+\beta(2\alpha+\beta-2\gamma)I\right]V^{-1}\right\}} \equiv \varphi \tag{3.19}$$

olduğunu gösterir.

Şimdi yukarıda elde edilen φ sabitinin pozitif olduğunu gösterelim:

Teorem 1.1.2.14 den

$$\begin{aligned}&\varphi > 0 \Leftrightarrow \lambda_1\left\{V^{-T}\left[(V+\beta I)^T(V+\beta I)+\beta(2\alpha+\beta-2\gamma)I\right]V^{-1}\right\} < 1\\ &\Leftrightarrow V^{-T}\left[(V+\beta I)^T(V+\beta I)+\beta(2\alpha+\beta-2\gamma)I\right]V^{-1} < I\end{aligned} \tag{3.20}$$

olup, V matrisi tersinir olduğundan

$$(V+\beta I)^T(V+\beta I)+\beta(2\alpha+\beta-2\gamma)I < V^TV \tag{3.21}$$

yazılabilir ve buna denk olarak

$$A+A^T < 2\gamma I$$

olup, elde edilen son eşitsizlik (3.2) varsayımı olduğundan φ nin pozitif bir sabit olduğu söylenebilir ve böylece (3.19) un, (3.17) de yerine yazılmasıyla CARE (1.26) nın çözüm matrisi için (3.6) üst sınırı elde edilir.

(3.6) ile verilen üst sınırı ele alarak, CARE (1.26) nın çözümü için daha iyi sınırlar elde etmek amacıyla aşağıdaki algoritmayı verebiliriz:

Algoritma 3.1.1.

Adım 1. P_{u1}, (3.6) ile verilen üst sınır olmak üzere $S_{1_0} \equiv P_{u1}$ olsun.

Adım 2. $i = 1, 2, \ldots$ için

$$S_{1_i} = V^{-T}\begin{bmatrix}(V+\beta I)^T S_{1_{i-1}}(V+\beta I)+\beta(2\alpha+\beta-2\gamma)S_{1_{i-1}}\\ +\beta\left(Q+\gamma^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)\end{bmatrix}V^{-1} \tag{3.22}$$

iterasyonuyla hesaplanır. O halde S_{1_i} ler de CARE (1.26) nın çözüm matrisi için üst sınırlardır.

İspat. (3.22) de $i=1$ yazıldığında

$$S_{1_1} = V^{-T}\left[(V+\beta I)^T S_{1_0}(V+\beta I)+\beta(2\alpha+\beta-2\gamma)S_{1_0}+\beta\left(Q+\gamma^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)\right]V^{-1} \tag{3.23}$$

olur. (3.23) e Teorem 1.1.1.4 ve Teorem 1.1.2.7 nin uygulanmasıyla

$$S_{1_1} \le V^{-T}\begin{bmatrix}\left[(V+\beta I)^T(V+\beta I)+\beta(2\alpha+\beta-2\gamma)I\right]\lambda_1\left(S_{1_0}\right)\\ +\beta\left(Q+\gamma^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)\end{bmatrix}V^{-1} \tag{3.24}$$

elde edilir. $S_{1_0}\equiv P_{u1}$ olduğundan, (3.24) için Teorem 1.1.2.8 ve Teorem 1.1.1.5 in kullanılmasıyla ve φ nin, (3.5) ile verilen tanımından

$$\begin{aligned}\lambda_1(K_0) &= \lambda_1\left\{V^{-T}\begin{bmatrix}\varphi\left[(V+\beta I)^T(V+\beta I)+\beta(2\alpha+\beta-2\gamma)I\right]\\ +\beta\left(Q+\gamma^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)\end{bmatrix}V^{-1}\right\}\\ &\le \varphi\lambda_1\left\{V^{-T}\left[(V+\beta I)^T(V+\beta I)+\beta(2\alpha+\beta-2\gamma)I\right]V^{-1}\right\}\\ &\quad+\lambda_1\left[V^{-T}\beta\left(Q+\gamma^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)V^{-1}\right]\\ &= \varphi\left(1-\frac{\lambda_1\left[V^{-T}\beta\left(Q+\gamma^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)V^{-1}\right]}{\varphi}\right)+\lambda_1\left[V^{-T}\beta\left(Q+\gamma^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)V^{-1}\right]\\ &\equiv \varphi\end{aligned} \tag{3.25}$$

olduğu görülür. Bu durumda (3.25) in (3.24) de yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}S_{1_1} &\le V^{-T}\left[\left[(V+\beta I)^T(V+\beta I)+\beta(2\alpha+\beta-2\gamma)I\right]\varphi_1+\beta\left(Q+\gamma^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)\right]V^{-1}\\ &= S_{1_0}\end{aligned} \tag{3.26}$$

elde edilir ki, bu, $S_{1_1}\le S_{1_0}$ olduğunu gösterir.

Şimdi $S_{1_{i-1}}\le S_{1_{i-2}}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda Teorem 1.1.2.7 dikkate alındığında

$$
\begin{aligned}
S_{1_i} &= V^{-T}\begin{bmatrix}(V+\beta I)^T S_{1_{i-1}}(V+\beta I)+\beta(2\alpha+\beta-2\gamma)S_{1_{i-1}}\\ +\beta\left(Q+\gamma^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)\end{bmatrix}V^{-1}\\
&\le V^{-T}\begin{bmatrix}(V+\beta I)^T S_{1_{i-2}}(V+\beta I)+\beta(2\alpha+\beta-2\gamma)S_{1_{i-2}}\\ +\beta\left(Q+\gamma^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)\end{bmatrix}V^{-1} \qquad (3.27)\\
&= S_{1_{i-1}}
\end{aligned}
$$

olup, tümevarım metodundan $S_{1_i} \le S_{1_{i-1}} \le \cdots \le S_{1_1} \le S_{1_0}$ elde edilir.

Teorem 3.1.2. P, CARE (1.26) nın pozitif yarı tanımlı çözümü olsun. γ, pozitif bir sabit olmak üzere

$$A + A^T < 2\gamma I \le 2\alpha I \qquad (3.28)$$

olacak şekilde bir $\alpha > 0$ sabiti ve herhangi pozitif bir β sabiti için

$$V \equiv A - \alpha I - \beta I \qquad (3.29)$$

matrisi tanımlansın. Bu durumda pozitif φ sabiti (3.5) ile tanımlanmak üzere

$$
\begin{aligned}
P &\le V^{-T}\left\{\varphi\left[(V+2\beta I)^T(V+2\beta I)+4\beta(\alpha-\gamma)I\right]+2\beta\left(Q+\gamma^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)\right\}V^{-1} \qquad (3.30)\\
&\equiv P_{u2}
\end{aligned}
$$

dir.

İspat. V matrisinin (3.29) tanımını kullanarak, (3.8) eşitliğini

$$PV + V^T P + 2\beta P + 2\alpha P + Q = PBB^T P \qquad (3.31)$$

şeklinde düzenleyebiliriz. (3.31) eşitliğinin her iki tarafını pozitif bir β sabiti için 2β ile çarparak ve her iki tarafına $V^T PV$ ekleyerek

$$V^T PV + 2\beta PV + 2\beta V^T P + 4\beta^2 P + 4\beta\alpha P + 2\beta Q = V^T PV + 2\beta PBB^T P \qquad (3.32)$$

eşitliğini yazabiliriz. Bu durumda

$$(V+2\beta I)^T P(V+2\beta I) = V^T PV + 2\beta PV + 2\beta V^T P + 4\beta^2 P \qquad (3.33)$$

özdeşliği göz önüne alındığında, (3.32) eşitliği

$$(V+2\beta I)^T P(V+2\beta I) + 4\beta\alpha P + 2\beta Q = V^T PV + 2\beta PBB^T P \qquad (3.34)$$

formuna dönüşür ve (3.12) eşitsizliğinin 2 ile çarpılarak elde edilen eşitsizlikle, (3.34) ün her iki tarafına $2\beta\gamma^2\left(BB^T\right)^{-1}$ eklenerek elde edilen eşitlik birlikte ele alındığında

$$V^T PV + 4\beta\gamma P \le (V+2\beta I)^T P(V+2\beta I) + 4\beta\alpha P + 2\beta\left(Q+\gamma^2\left(BB^T\right)^{-1}\right) \qquad (3.35)$$

olur. Bu durumda (3.28) şartıyla (3.35) eşitsizliği

$$V^T PV \le \left(V+2\beta I\right)^T P\left(V+2\beta I\right)+4\beta\left(\alpha-\gamma\right)P+2\beta\left(Q+\gamma^2\left(BB^T\right)^{-1}\right) \tag{3.36}$$

olduğunu gösterir ve (3.36) ya Teorem 1.1.1.4 ve Teorem 1.1.2.7 nin uygulanması

$$P \le V^{-T}\begin{Bmatrix}\left[\left(V+2\beta I\right)^T\left(V+2\beta I\right)+4\beta\left(\alpha-\gamma\right)I\right]\lambda_1\left(P\right)\\ +2\beta\left(Q+\gamma^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)\end{Bmatrix}V^{-1} \tag{3.37}$$

eşitsizliğini verir. (3.37) için Weyl'in monotonluk prensibi ele alınıp daha sonra Teorem 1.1.1.5 uygulandığında

$$\begin{aligned}\lambda_1\left(P\right) &\le \lambda_1\left\{V^{-T}\begin{Bmatrix}\left[\left(V+2\beta I\right)^T\left(V+2\beta I\right)+4\beta\left(\alpha-\gamma\right)I\right]\lambda_1\left(P\right)\\ +2\beta\left(Q+\gamma^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)\end{Bmatrix}V^{-1}\right\}\\ &\le \lambda_1\left(P\right)\lambda_1\left\{V^{-T}\left[\left(V+2\beta I\right)^T\left(V+2\beta I\right)+4\beta\left(\alpha-\gamma\right)I\right]V^{-1}\right\}\\ &\quad+\lambda_1\left[2\beta V^{-T}\left(Q+\gamma^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)V^{-1}\right]\end{aligned} \tag{3.38}$$

olup buradan (3.29) şartını ve φ nin tanımını dikkate aldığımızda, (3.38) den

$$\begin{aligned}\lambda_1\left(P\right) &\le \frac{\lambda_1\left[2\beta V^{-T}\left(Q+\gamma^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)V^{-1}\right]}{1-\lambda_1\left\{V^{-T}\left[\left(V+2\beta I\right)^T\left(V+2\beta I\right)+4\beta\left(\alpha-\gamma\right)I\right]V^{-1}\right\}}\\ &= \frac{\beta\lambda_1\left[V^{-T}\left(Q+\gamma^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)V^{-1}\right]}{1-\lambda_1\left\{V^{-T}\left[\left(V+\beta I\right)^T\left(V+\beta I\right)+\left(2\alpha\beta+\beta^2-2\gamma\beta\right)I\right]V^{-1}\right\}}\\ &\equiv \varphi\end{aligned} \tag{3.39}$$

olduğunu görebiliriz. Bu durumda (3.39) u (3.37) de yerine yazdığımızda, CARE (1.26) nın çözümü için (3.30) üst sınırını elde ederiz.

(3.30) ile verilen üst sınırdan faydalanarak, CARE (1.26) nın çözümüne daha yakın sınırlar elde etmek için aşağıdaki algoritmayı verebiliriz:

Algoritma 3.1.2.

Adım 1. P_{u2}, (3.30) ile verilen üst sınır olmak üzere $S_{2_0} \equiv P_{u2}$ olsun.

Adım 2. $i=1,2,\ldots$ için

$$S_{2_i} = V^{-T}\left[\left(V+2\beta I\right)^T S_{2_{i-1}}\left(V+2\beta I\right)+4\beta\left(\alpha-\gamma\right)S_{2_{i-1}}2\beta\left(Q+\gamma^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)\right]V^{-1} \tag{3.40}$$

iterasyonuyla hesaplanır. O halde S_{2_i} ler de CARE (1.26) nın çözümü için üst sınırlardır.

İspat. Bu algoritmanın ispatı, Algoritma 3.1.1 in ispatına benzer olduğundan ayrıca verilmemiştir.

Uyarı 3.1.1. (3.30) ile verilen P_{u2} üst sınırından,

$$\begin{aligned} P_{u2} &= V^{-T}\left\{\varphi\left[\left(V+2\beta I\right)^T\left(V+2\beta I\right)+4\beta\left(\alpha-\gamma\right)I\right]+2\beta\left(Q+\gamma^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)\right\}V^{-1} \\ &= P_{u1}+\beta V^{-T}\left[V+V^T+2\varphi\left(\beta+\alpha-\gamma\right)I+Q+\gamma^2\left(BB^T\right)^{-1}\right]V^{-1} \end{aligned} \tag{3.41}$$

eşitliğini yazabiliriz. $\Delta = V^{-T}\left\{\varphi\left[V+V^T+2\left(\beta+\alpha-\gamma\right)I\right]+Q+\gamma^2\left(BB^T\right)^{-1}\right\}V^{-1}$ olsun. Bu takdirde $\Delta \geq 0$ ise $P_{u1} \leq P_{u2}$, $\Delta \leq 0$ ise $P_{u2} \leq P_{u1}$ olduğu görülür. Ancak herhangi $X \leq 0$ ve $Y \geq 0$ matrisleri ve pozitif bir a sabiti için, $aX+Y$ matrisinin ne pozitif ne de negatif yarı tanımlı olduğu durumlar vardır. Örneğin

$$X = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \leq 0 \text{ ve } Y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

matrislerini göz önüne alalım. Buna göre $a=2$ için $aX+Y = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ olup bu matris ne pozitif ne de negatif yarı tanımlıdır. Bu takdirde P_{u1} ve P_{u2} üst sınırları yukarıdaki gibi karşılaştırılamayabilir. Yani, Δ matrisinin pozitif veya negatif yarı tanımlı olmaması durumunda bahsedilen iki üst sınırı karşılaştıramayabiliriz. Ancak P_{u1} ve P_{u2} üst sınırlarını birlikte ele alarak CARE (1.26) nın çözümü için aşağıdaki alternatif üst sınırı verebiliriz:

Teorem 3.1.3. α , (3.3) şartını sağlamak üzere, pozitif bir β sabiti için V matrisi (3.1) (ya da (3.29)) ile ve pozitif φ sabiti, (3.5) ile tanımlansın. Bu takdirde $\delta \in [0,1]$ pozitif bir sabit olmak üzere, CARE (1.26) nın P çözüm matrisi için

$$P \leq V^{-T}\begin{Bmatrix} \varphi\left[\left(V+\beta I\right)^T\left(V+\beta I\right)+\beta^2 I\right]+\varphi\beta\delta\left(V+V^T+2\beta I\right) \\ +\beta\left(1+\delta\right)\left(Q+\alpha^2\left(BB^T\right)^{-1}\right) \end{Bmatrix}V^{-1} \equiv P_{u3} \tag{3.42}$$

üst sınırı mevcuttur.

İspat. Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.2 de $\alpha = \gamma$ olsun. Bu durumda CARE (1.26) nın P çözümü

$$P \leq V^{-T}\left\{\varphi\left[\left(V+\beta I\right)^T\left(V+\beta I\right)+\beta^2 I\right]+\beta\left(Q+\alpha^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)\right\}V^{-1} \equiv P_{u3a} \tag{3.43}$$

ve

$$P \le V^{-T}\left\{\varphi\left[\left(V+2\beta I\right)^{T}\left(V+2\beta I\right)\right]+\beta\left(Q+\alpha^{2}\left(BB^{T}\right)^{-1}\right)\right\}V^{-1} \equiv P_{u3b} \tag{3.44}$$

üst sınırlarına sahiptir. Böylece $\delta \in [0,1]$ olmak üzere (3.43) ve (3.44) den

$$P \le (1-\delta)P_{u3a} + \delta P_{u3b} \equiv P_{u3} \tag{3.45}$$

elde edilir.

(3.42) ile verilen üst sınırı kullanarak, CARE (1.26) nın çözümü için daha iyi sınırlar elde etmek amacıyla aşağıdaki algoritmayı verebiliriz:

Algoritma 3.1.3.

Adım 1. P_{u3}, (3.42) ile verilen üst sınır olmak üzere $S_{3_0} \equiv P_{u3}$ olsun.

Adım 2. $i = 1,2,\ldots$ için

$$S_{3_i} = V^{-T}\begin{bmatrix}\left(V+\beta I\right)^{T} S_{3_{i-1}}\left(V+\beta I\right)+\beta^{2}\left(1+2\delta\right)S_{3_{i-1}}+\beta\delta\left(S_{3_{i-1}}V+V^{T}S_{3_{i-1}}\right)\\ +\beta\left(1+\delta\right)\left(Q+\alpha^{2}\left(BB^{T}\right)^{-1}\right)\end{bmatrix}V^{-1} \tag{3.46}$$

iterasyonuyla hesaplanır. O halde S_{3_i} ler de CARE (1.26) nın çözümü için üst sınırlardır.

İspat. $\alpha = \gamma$ olmak üzere (3.14) ve (3.36) eşitsizliklerini birlikte dikkate aldığımızda

$$P \le V^{-T}\begin{bmatrix}(1-\delta)\left(V+\beta I\right)^{T}P\left(V+\beta I\right)+\beta^{2}\left(1-\delta\right)P\\ +\delta\left(V+2\beta I\right)^{T}P\left(V+2\beta I\right)+\beta\left(1+\delta\right)\left(Q+\alpha^{2}\left(BB^{T}\right)^{-1}\right)\end{bmatrix}V^{-1} \tag{3.47}$$

eşitsizliğini yazabilir ve bu eşitsizliği düzenlediğimizde ise

$$P \le V^{-T}\begin{bmatrix}\left(V+\beta I\right)^{T}P\left(V+\beta I\right)+\beta^{2}\left(1+2\delta\right)P+\beta\delta\left(PV+V^{T}P\right)\\ +\beta\left(1+\delta\right)\left(Q+\alpha^{2}\left(BB^{T}\right)^{-1}\right)\end{bmatrix}V^{-1} \tag{3.48}$$

ifadesini elde ederiz. (3.47), (3.48) e denk olduğundan

$$S_{3_1} = V^{-T}\begin{bmatrix}(1-\delta)\left(V+\beta I\right)^{T}S_{3_0}\left(V+\beta I\right)+\beta^{2}\left(1-\delta\right)S_{3_0}\\ +\delta\left(V+2\beta I\right)^{T}S_{3_0}\left(V+2\beta I\right)+\beta\left(1+\delta\right)\left(Q+\alpha^{2}\left(BB^{T}\right)^{-1}\right)\end{bmatrix}V^{-1} \tag{3.49}$$

olduğu kolayca görülür ve (3.49) eşitliğine Teorem 1.1.1.4 ün uygulanmasıyla

$$S_{3_1} \le V^{-T}\begin{Bmatrix}\left[(1-\delta)\left(\left(V+\beta I\right)^{T}\left(V+\beta I\right)+\beta^{2}I\right)+\delta\left(V+2\beta I\right)^{T}\left(V+2\beta I\right)\right]\\ \times\lambda_{1}\left(S_{3_0}\right)+\beta\left(1+\delta\right)\left(Q+\alpha^{2}\left(BB^{T}\right)^{-1}\right)\end{Bmatrix}V^{-1} \tag{3.50}$$

elde edilir. Ayrıca $S_{3_0} \equiv P_{u3}$ olduğundan aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılır:

$$\lambda_1\left(S_{3_0}\right)=\lambda_1\left\{V^{-T}\left\{\begin{array}{l}\varphi\left[\left(V+\beta I\right)^T\left(V+\beta I\right)+\beta^2 I\right]+\varphi\beta\delta\left(V+V^T+2\beta I\right)\\+\beta\left(1+\delta\right)\left(Q+\alpha^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)\end{array}\right\}V^{-1}\right\}$$

$$\begin{aligned}&\le\varphi\lambda_1\left\{V^{-T}\left[\left(V+\beta I\right)^T\left(V+\beta I\right)+\beta^2 I\right]V^{-1}\right\}\\&+\varphi\beta\delta\lambda_1\left[V^{-T}\left(V+V^T+2\beta I\right)V^{-1}\right]\\&+\beta\left(1+\delta\right)\lambda_1\left[V^{-T}\left(Q+\alpha^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)V^{-1}\right]\\&=\varphi\end{aligned}\tag{3.51}$$

Böylece üstteki eşitsizlik göz önüne alındığında (3.50) den

$$\begin{aligned}S_{3_1}&\le V^{-T}\left\{\varphi\left[\begin{array}{l}\left(1-\delta\right)\left(\left(V+\beta I\right)^T\left(V+\beta I\right)+\beta^2 I\right)\\+\delta\left(V+2\beta I\right)^T\left(V+2\beta I\right)\end{array}\right]+\beta\left(1+\delta\right)\left(Q+\alpha^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)\right\}V^{-1}\\&=S_{3_0}\end{aligned}\tag{3.52}$$

elde edilir. $S_{3_{i-1}}\le S_{3_{i-2}}$ olduğunu varsayalım. O halde Teorem 1.1.2.7 den

$$\begin{aligned}S_{3_i}&=V^{-T}\left[\begin{array}{l}\left(1-\delta\right)\left(V+\beta I\right)^T S_{3_{i-1}}\left(V+\beta I\right)+\beta^2\left(1-\delta\right)S_{3_{i-1}}\\+\delta\left(V+2\beta I\right)^T S_{3_{i-1}}\left(V+2\beta I\right)+\beta\left(1+\delta\right)\left(Q+\alpha^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)\end{array}\right]V^{-1}\\&\le V^{-T}\left[\begin{array}{l}\left(1-\delta\right)\left(V+\beta I\right)^T S_{3_{i-2}}\left(V+\beta I\right)+\beta^2\left(1-\delta\right)S_{3_{i-2}}\\+\delta\left(V+2\beta I\right)^T S_{3_{i-2}}\left(V+2\beta I\right)+\beta\left(1+\delta\right)\left(Q+\alpha^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)\end{array}\right]V^{-1}\\&=V^{-T}\left[\begin{array}{l}\left(V+\beta I\right)^T S_{3_{i-2}}\left(V+\beta I\right)+\beta^2\left(1+2\delta\right)S_{3_{i-2}}+\beta\delta\left(S_{3_{i-2}}V+V^T S_{3_{i-2}}\right)\\+\beta\left(1+\delta\right)\left(Q+\alpha^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)\end{array}\right]V^{-1}\\&=S_{3_{i-1}}\end{aligned}\tag{3.53}$$

olup, tümevarım metodundan $S_{3_i}\le S_{3_{i-1}}\le\cdots\le S_{3_1}\le S_{3_0}$ elde edilir.

Teorem 3.1.4. α_1, pozitif bir sabit olmak üzere

$$V_1=A-\alpha_1 I\tag{3.54}$$

matrisi tanımlansın. β_1,

$$A+A^T<2\beta_1 I\le 2\alpha_1 I\tag{3.55}$$

eşitsizliğini sağlamak üzere ve pozitif φ_1 sabiti

$$\varphi_1\equiv\frac{\alpha_1\lambda_1\left[V_1^{-T}\left(Q+\beta_1^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)V_1^{-1}\right]}{1-\lambda_1\left[V_1^{-T}\left[A^TA+\alpha_1\left(\alpha_1-2\beta_1\right)I\right]V_1^{-1}\right]}\tag{3.56}$$

ile tanımlanmak üzere, CARE (1.26) nın pozitif yarı tanımlı P çözüm matrisi

$$P \le V_1^{-T}\left\{\varphi_1\left[A^TA+\alpha_1(\alpha_1-2\beta_1)I\right]+\alpha_1\left(Q+\beta_1^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)\right\}V_1^{-1}\equiv P_{u4} \tag{3.57}$$

üst sınırına sahiptir.

İspat. İlk olarak, (3.54) den V_1 matrisinin tanımıyla, aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$V_1^TPV_1 = A^TPA-\alpha_1\left(A^TP+PA\right)+\alpha_1^2P \tag{3.58}$$

CARE (1.26) ve (3.58) eşitliğinin birlikte ele alınması

$$V_1^TPV_1 = A^TPA-\alpha_1PBB^TP+\alpha_1Q+\alpha_1^2P \tag{3.59}$$

eşitliğini verir ve (3.59) eşitliğinin her iki tarafına $-\alpha_1\beta_1^2\left(BB^T\right)^{-1}$ eklenip, (3.12) eşitsizliğinin de göz önüne alınmasıyla

$$V_1^TPV_1 \le A^TPA+\alpha_1(\alpha_1-2\beta_1)P+\alpha_1\left(Q+\beta_1^2\left(BB^T\right)^{-1}\right) \tag{3.60}$$

elde edilir. Ayrıca (3.55) varsayımı ve Teorem 1.1.1.8 den

$$2\,\mathrm{Re}\,\lambda_i(V_1)\le\lambda_1\left(V_1+V_1^T\right)=\lambda_1\left(A+A^T-2\alpha_1I\right)<0 \tag{3.61}$$

olup, (3.61) eşitsizliği, V_1 matrisinin tersinirliğini gösterir ve böylece (3.60) dan

$$P \le V_1^{-T}\left[A^TPA+\alpha_1(\alpha_1-2\beta_1)P+\alpha_1\left(Q+\beta_1^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)\right]V_1^{-1} \tag{3.62}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Buradan (3.62) ye Teorem 1.1.1.4 ve Teorem 1.1.2.7 nin uygulanması

$$P \le V_1^{-T}\left[\left[A^TA+\alpha_1(\alpha_1-2\beta_1)I\right]\lambda_1(P)+\alpha_1\left(Q+\beta_1^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)\right]V_1^{-1} \tag{3.63}$$

eşitsizliğini verir ve (3.63) e Weyl'in monotonluk prensibi ve Teorem 1.1.1.5 in uygulanması ise

$$\begin{aligned}\lambda_1(P) &\le \lambda_1\left\{V_1^{-T}\left[\left[A^TA+\alpha_1(\alpha_1-2\beta_1)I\right]\lambda_1(P)+\alpha_1\left(Q+\beta_1^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)\right]V_1^{-1}\right\}\\ &\le \lambda_1(P)\lambda_1\left\{V_1^{-T}\left[A^TA+\alpha_1(\alpha_1-2\beta_1)I\right]V_1^{-1}\right\}\\ &\quad+\lambda_1\left[\alpha_1V_1^{-T}\left(Q+\beta_1^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)V_1^{-1}\right]\end{aligned} \tag{3.64}$$

olduğunu gösterir. Buna göre

$$\lambda_1\left\{V_1^{-T}\left[A^TA+\alpha_1(\alpha_1-2\beta_1)I\right]V_1^{-1}\right\}<1 \tag{3.65}$$

olduğunu gösterelim:

Teorem 1.1.2.14 den

$$\lambda_1\left\{W^{-T}\left[A^TA+\alpha_1(\alpha_1-2\beta_1)I\right]W^{-1}\right\}<1\Leftrightarrow W^{-T}\left[A^TA+\alpha_1(\alpha_1-2\beta_1)I\right]W^{-1}<I \\ \Leftrightarrow A^TA+\alpha_1(\alpha_1-2\beta_1)I<W^TW \tag{3.66}$$

olup, yukarıdaki ifadenin son kısmı (3.55) varsayımını ifade ettiğinden (3.65) eşitsizliği sağlanır ve

$$\lambda_1(P)\le\frac{\lambda_1\left[\alpha_1V_1^{-T}\left(Q+\beta_1^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)V_1^{-1}\right]}{1-\lambda_1\left\{V_1^{-T}\left[A^TA+\alpha_1(\alpha_1-2\beta_1)I\right]V_1^{-1}\right\}}=\varphi_1 \tag{3.67}$$

olur. Son olarak, (3.67), (3.63) de yerine yazıldığında CARE (1.26) nın çözümü için (3.57) üst sınırı elde edilir.

(3.57) ile verilen üst sınırdan faydalanarak, CARE (1.26) nın gerçek çözümüne daha yakın sınırlar elde etmek için aşağıdaki algoritmayı verebiliriz:

Algoritma 3.1.4.

Adım 1. P_{u4}, (3.57) ile verilen üst sınır olmak üzere $S_{4_0}\equiv P_{u4}$ olsun.

Adım 2. $i=1,2,\ldots$ için

$$S_{4_i}=V_1^{-T}\left[A^TS_{4_{i-1}}A+\alpha_1(\alpha_1-2\beta_1)S_{4_{i-1}}+\alpha_1\left(Q+\beta_1^2\left(BB^T\right)^{-1}\right)\right]V_1^{-1} \tag{3.68}$$

iterasyonu ile hesaplanır.

İspat. Algoritma 3.1.4 ün ispatı önceki algoritmaların ispatına benzer olarak yapılabilir.

Buraya kadar CARE (1.26) nın çözüm matrisi için elde edilen üst sınırların yalnızca BB^T matrisinin tersinir (regüler) olduğu durumlarda hesaplanabilir olduğu görülmektedir. Bundan sonraki kısımda BB^T matrisinin hem singüler hem de regüler olduğu durumları içeren üst sınırlar ve bu sınırlara bağlı olarak iteratif algoritmalar verilmiştir.

Teorem 3.1.5. P matrisi, CARE (1.26) nın pozitif yarı tanımlı çözümü olsun. α_2 ve β_2 pozitif sabitler ve $m\ge\frac{1}{2}$ olmak üzere

$$V_2\equiv A-\alpha_2I-\beta_2\left(BB^T\right)^m \tag{3.69}$$

matrisi tanımlansın. O halde

$$A+A^T<2\beta_2\left(BB^T\right)^m \tag{3.70}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, pozitif φ_2 sabiti

$$\varphi_2 \equiv \frac{\alpha_2\lambda_1\left\{V_2^{-T}\left[Q+\beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1}\right]V_2^{-1}\right\}}{1-\lambda_1\left\{V_2^{-T}\left[\left(V_2+\alpha_2 I\right)^T\left(V_2+\alpha_2 I\right)+\alpha_2^2 I\right]V_2^{-1}\right\}} \tag{3.71}$$

ile tanımlanmak üzere, P çözüm matrisi için

$$P \le V_2^{-T}\left\{\varphi_2\left[\left(V_2+\alpha_2 I\right)^T\left(V_2+\alpha_2 I\right)+\alpha_2^2 I\right]+\alpha_2\left[Q+\beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1}\right]\right\}V_2^{-1} \equiv P_{u5} \tag{3.72}$$

dir.

İspat. $P \ge 0$ ve $\left(BB^T\right)^{1/2} \ge 0$ için β_2, pozitif bir sabit olmak üzere, Teorem 1.1.1.11 kullanılarak, aşağıdaki pozitif yarı tanımlı blok matris yazılabilir:

$$\begin{pmatrix} \beta_2^2 I & \beta_2\left(BB^T\right)^{1/2}P \\ \beta_2 P\left(BB^T\right)^{1/2} & PBB^TP \end{pmatrix} \ge 0 \tag{3.73}$$

Buna göre $m \ge \frac{1}{2}$ için, (3.73) matrisinin ilk satır ve sütunu sırasıyla sağdan ve soldan $\left(BB^T\right)^{m-1/2}$ ile çarpıldığında

$$\begin{pmatrix} \beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1} & \beta_2\left(BB^T\right)^{m}P \\ \beta_2 P\left(BB^T\right)^{m} & PBB^TP \end{pmatrix} \ge 0 \tag{3.74}$$

olup, bu blok matris için (1.20) eşitliğinin göz önüne alınması,

$$0 \le D_1 = \beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1} - \beta_2\left(BB^T\right)^{m}P - \beta_2 P\left(BB^T\right)^{m} + PBB^TP \tag{3.75}$$

pozitif yarı tanımlı D_1 matrisini verir. CARE (1.26) ile D_1 matrisi birlikte ele alındığında ise

$$0 \le D_1 = \left[A-\beta_2\left(BB^T\right)^{m}\right]^T P + P\left[A-\beta_2\left(BB^T\right)^{m}\right] + Q + \beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1} \tag{3.76}$$

elde edilir. α_2, pozitif bir sabit olmak üzere V_2 matrisinin (3.76) ile verilen tanımından

$$D_1 = \left(V_2+\alpha_2 I\right)^T P + P\left(V_2+\alpha_2 I\right) + Q + \beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1} \tag{3.77}$$

yazılarak

$$\left(V_2+\alpha_2 I\right)^T P + P\left(V_2+\alpha_2 I\right) = \frac{1}{\alpha_2}\left(V_2+\alpha_2 I\right)^T P\left(V_2+\alpha_2 I\right) + \alpha_2 P - \frac{1}{\alpha_2}V_2^T P V_2 \tag{3.78}$$

özdeşliği göz önüne alınırsa (3.77) eşitliği

$$\alpha_2 D_1 + V_2^T P V_2 = \left(V_2+\alpha_2 I\right)^T P\left(V_2+\alpha_2 I\right) + \alpha_2^2 P + \alpha_2 Q + \alpha_2\beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1} \tag{3.79}$$

formunda yazılabilir ve bu eşitlik

$$V_2^T P V_2 \le \left(V_2+\alpha_2 I\right)^T P\left(V_2+\alpha_2 I\right)+\alpha_2^2 P+\alpha_2 Q+\alpha_2\beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1} \tag{3.80}$$

olduğunu gösterir. Ayrıca Teorem 1.1.1.8 ve (3.70) varsayımından

$$2\,\mathrm{Re}\,\lambda_1\left(V_2\right)\le\lambda_1\left(V_2+V_2^T\right)=\lambda_1\left[A+A^T+2\beta_2\left(BB^T\right)^m-2\alpha_2 I\right]<0 \tag{3.81}$$

olur ki, bu durum, V_2 matrisinin tersinir olduğunu gösterir. Dolayısıyla (3.80) den

$$P\le V_2^{-T}\left\{\left(V_2+\alpha_2 I\right)^T P\left(V_2+\alpha_2 I\right)+\alpha_2^2 P+\alpha_2\left[Q+\beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1}\right]\right\}V_2^{-1} \tag{3.82}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür ve (3.82) için Teorem 1.1.1.4 ve Teorem 1.1.2.7 nin kullanılması

$$P\le V_2^{-T}\left\{\left[\left(V_2+\alpha_2 I\right)^T\left(V_2+\alpha_2 I\right)+\alpha_2^2 I\right]\lambda_1\left(P\right)+\alpha_2\left[Q+\beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1}\right]\right\}V_2^{-1} \tag{3.83}$$

eşitsizliğini verir. Dahası, Weyl'in monotonluk prensibi ve Teorem 1.1.2.5 ile (3.83) den

$$\begin{aligned}\lambda_1\left(P\right)\le\lambda_1\left(P\right)\lambda_1\left\{V_2^{-T}\left[\left(V_2+\alpha_2 I\right)^T\left(V_2+\alpha_2 I\right)+\alpha_2^2 I\right]V_2^{-1}\right\}\\ +\alpha_2\lambda_1\left\{V_2^{-T}\left[Q+\beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1}\right]V_2^{-1}\right\}\end{aligned} \tag{3.84}$$

elde edilir. (3.70) varsayımı ışığında, $\alpha_2>0$ için Teorem 1.1.2.14 den

$$\begin{aligned}\alpha_2\left[A+A^T+2\beta_2\left(BB^T\right)^m-2\alpha_2 I\right]<0 &\Leftrightarrow \alpha_2\left(V_2+V_2^T\right)+2\alpha_2^2 I<0\\ &\Leftrightarrow V_2^T V_2+\alpha_2\left(V_2+V_2^T\right)+2\alpha_2^2 I<V_2^T V_2\\ &\Leftrightarrow \left(V_2+\alpha_2 I\right)^T\left(V_2+\alpha_2 I\right)+\alpha_2^2 I<V_2^T V_2\\ &\Leftrightarrow V_2^{-T}\left[\left(V_2+\alpha_2 I\right)^T\left(V_2+\alpha_2 I\right)+\alpha_2^2 I\right]V_2^{-1}<I\end{aligned} \tag{3.85}$$

olup, son ifade için Weyl'in monotonluk prensibinin kullanılmasıyla

$$\lambda_1\left\{V_2^{-T}\left[\left(V_2+\alpha_2 I\right)^T\left(V_2+\alpha_2 I\right)+\alpha_2^2 I\right]V_2^{-1}\right\}<1 \tag{3.86}$$

elde edilir ki, bu,

$$0<\lambda_1\left(P\right)\le\frac{\alpha_2\lambda_1\left\{V_2^{-T}\left[Q+\beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1}\right]V_2^{-1}\right\}}{1-\lambda_1\left\{V_2^{-T}\left[\left(V_2+\alpha_2 I\right)^T\left(V_2+\alpha_2 I\right)+\alpha_2^2 I\right]V_2^{-1}\right\}}\equiv\varphi_2 \tag{3.87}$$

olduğunu gösterir. Böylece (3.87) nin (3.83) de yerine yazılmasıyla CARE (1.26) nın çözüm matrisi için (3.72) ile verilen üst sınır elde edilmiş olur.

Sonuç 3.1.1. P , CARE (1.26) nın pozitif yarı tanımlı çözüm matrisi olsun. α_3 ve β_3 pozitif sabitler ve $m \geq \frac{1}{2}$ olmak üzere

$$V_3 \equiv A - \alpha_3 I + \beta_3 \left(BB^T \right)^m \tag{3.88}$$

matrisi tanımlansın. Buna göre

$$A + A^T + 2\beta_3 \left(BB^T \right)^m < 0 \tag{3.89}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, pozitif φ_3 sabiti

$$\varphi_3 \equiv \frac{\alpha_3 \lambda_1 \left\{ V_3^{-T} \left[Q + \beta_3^2 \left(BB^T \right)^{2m-1} \right] V_3^{-1} \right\}}{1 - \lambda_1 \left\{ V_3^{-T} \left[\left(V_3 + \alpha_3 I \right)^T \left(V_3 + \alpha_3 I \right) + \alpha_3^2 I \right] V_3^{-1} \right\}} \tag{3.90}$$

ile verilmek üzere, P çözüm matrisi için

$$P \leq V_3^{-T} \left\{ \varphi_3 \left[\left(V_3 + \alpha_3 I \right)^T \left(V_3 + \alpha_3 I \right) + \alpha_3^2 I \right] + \alpha_3 \left[Q + \beta_3^2 \left(BB^T \right)^{2m-1} \right] \right\} V_3^{-1} \equiv P_{u5}^* \tag{3.91}$$

dir.

İspat. (3.74) blok matrisi için (1.19) eşitliği ele alınarak

$$0 \leq D_2 = \beta_3^2 \left(BB^T \right)^{2m-1} + \beta_3 \left(BB^T \right)^m P + \beta_3 P \left(BB^T \right)^m + PBB^T P \tag{3.92}$$

pozitif yarı tanımlı D_2 matrisi elde edilir ve bu sonucun ispatında Teorem 3.1.5 in ispatında kullanılan yöntem izlenerek istenen sonuca ulaşılır.

Teorem 3.1.5 de geliştirilen üst sınırı kullanarak, CARE (1.26) için tam çözüme daha yakın sınırlar elde etmek amacıyla aşağıdaki iteratif algoritmayı verebiliriz:

Algoritma 3.1.5.

Adım 1. P_{u5} , (3.72) ile verilen üst sınır olmak üzere $S_{5_0} \equiv P_{u5}$ olsun.

Adım 2. $i = 1, 2, \ldots$ için

$$S_{5_i} = V_2^{-T} \left\{ \left(V_2 + \alpha_2 I \right)^T S_{5_{i-1}} \left(V_2 + \alpha_2 I \right) + \alpha_2^2 S_{5_{i-1}} + \alpha_2 \left[Q + \beta_2^2 \left(BB^T \right)^{2n-1} \right] \right\} V_2^{-1} \tag{3.93}$$

iterasyonuyla hesaplanır. Bu takdirde S_{5_i} ler de CARE (1.26) nin çözümü için üst sınırlardır.

İspat. $i = 1$ için (3.93) eşitliğinden

$$S_{5_1} = V_2^{-T} \left\{ \left(V_2 + \alpha_2 I \right)^T S_{5_0} \left(V_2 + \alpha_2 I \right) + \alpha_2^2 S_{5_0} + \alpha_2 \left[Q + \beta_2^2 \left(BB^T \right)^{2m-1} \right] \right\} V_2^{-1} \tag{3.94}$$

olduğu görülür. Yukarıdaki eşitliğe Teorem 1.1.1.4 ve Teorem 1.1.2.7 nin uygulanması

$$S_{5_1} \le V_2^{-T}\left\{\left[\left(V_2+\alpha_2 I\right)^T\left(V_2+\alpha_2 I\right)+\alpha_2^2 I\right]\lambda_1\left(S_{5_0}\right)+\alpha_2\left[Q+\beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1}\right]\right\}V_2^{-1} \qquad (3.95)$$

eşitsizliğini verir. $S_{5_0} \equiv P_{u5}$ olduğundan, P_{u5} için Teorem 1.1.1.5 ve Weyl'in monotonluk prensibi ele alınarak φ_2 sabitinin (3.71) ile verilen tanımından

$$\begin{aligned}\lambda_1\left(S_{5_0}\right) &\le \varphi_2\lambda_1\left\{V_2^{-T}\left[\left(V_2+\alpha_2 I\right)^T\left(V_2+\alpha_2 I\right)+\alpha_2^2 I\right]V_2^{-1}\right\}\\ &\quad+\alpha_2\lambda_1\left\{V_2^{-T}\left[Q+\beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1}\right]V_2^{-1}\right\}\\ &= \varphi_2\left(1-\frac{\alpha_2\lambda_1\left\{V_2^{-T}\left[Q+\beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1}\right]V_2^{-1}\right\}}{\varphi_2}\right)\\ &\quad+\alpha_2\lambda_1\left\{V_2^{-T}\left[Q+\beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1}\right]V_2^{-1}\right\}\\ &= \varphi_2\end{aligned} \qquad (3.96)$$

yazılabilir. Böylece $\lambda_1\left(S_{5_0}\right)=\lambda_1\left(P_{u5}\right)\le\varphi_2$ bağıntısının (3.95) de yerine yazılması $S_{5_1} \le S_{5_0}$ olduğunu gösterir. $S_{5_{i-1}} \le S_{5_{i-2}}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, Teorem 1.1.2.7 den

$$\begin{aligned}S_{5_i} &= V_2^{-T}\left\{\left(V_2+\alpha_2 I\right)^T S_{5_{i-1}}\left(V_2+\alpha_2 I\right)+\alpha_2^2 S_{5_{i-1}}+\alpha_2\left[Q+\beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1}\right]\right\}V_2^{-1}\\ &\le V_2^{-T}\left\{\left(V_2+\alpha_2 I\right)^T S_{5_{i-2}}\left(V_2+\alpha_2 I\right)+\alpha_2^2 S_{5_{i-2}}+\alpha_2\left[Q+\beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1}\right]\right\}V_2^{-1}\\ &= S_{5_{i-1}}\end{aligned} \qquad (3.97)$$

olup, (3.97) eşitsizliğiyle tümevarım metodundan $S_{5_i} \le S_{5_{i-1}} \le \cdots \le S_{5_1} \le S_{5_0}$ olduğu görülür.

Teorem 3.1.6. (3.70) şartını sağlayan pozitif β_2 ve $m \ge 1/2$ sabitleri ve herhangi pozitif bir α_2 sabiti için V_2 matrisi, (3.69) ile tanımlansın. Buna göre φ_2, (3.71) ile tanımlanmak üzere, CARE (1.26) nın pozitif yarı tanımlı P çözüm matrisi için

$$P \le V_2^{-T}\left\{\varphi_2\left(V_2+2\alpha_2 I\right)^T\left(V_2+2\alpha_2 I\right)+2\alpha_2\left[Q+\beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1}\right]\right\}V_2^{-1} \equiv P_{u6} \qquad (3.98)$$

dır.

İspat. Öncelikle (3.77) eşitliğini ele alalım. Bu eşitlik

$$D_1 = V_2^T P + PV_2 + 2\alpha_2 P + Q + \beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1} \qquad (3.99)$$

şeklinde yazılabilir. (3.99) eşitliğinin her iki tarafını $2\alpha_2$ ile çarpıp daha sonra her iki tarafına $V_2^T P V_2$ ekleyerek elde edilen eşitliği

$$\left(V_2+2\alpha_2 I\right)^T P\left(V_2+2\alpha_2 I\right)=V_2^T P V_2+2\alpha_2 V_2^T P+2\alpha_2 P V_2+4\alpha_2^2 P \tag{3.100}$$

özdeşliği ile birlikte ele aldığımızda

$$2\alpha_2 D_1+V_2^T P V_2=\left(V_2+2\alpha_2 I\right)^T P\left(V_2+2\alpha_2 I\right)+2\alpha_2\left[Q+\beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1}\right] \tag{3.101}$$

olur ki, buradan

$$V_2^T P V_2 \le \left(V_2+2\alpha_2 I\right)^T P\left(V_2+2\alpha_2 I\right)+2\alpha_2\left[Q+\beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1}\right] \tag{3.102}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Ayrıca V_2 matrisinin tersinirliğiyle

$$P \le V_2^{-T}\left\{\left(V_2+2\alpha_2 I\right)^T P\left(V_2+2\alpha_2 I\right)+2\alpha_2\left[Q+\beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1}\right]\right\}V_2^{-1} \tag{3.103}$$

olup, bu eşitsizliğe Teorem 1.1.1.4 ve Teorem 1.1.2.7 nin uygulanması

$$P \le V_2^{-T}\left\{\lambda_1(P)\left(V_2+2\alpha_2 I\right)^T\left(V_2+2\alpha_2 I\right)+2\alpha_2\left[Q+\beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1}\right]\right\}V_2^{-1} \tag{3.104}$$

olduğunu gösterir. Ek olarak, (3.104) için sırasıyla Weyl'in monotonluk prensibi ve Teorem 1.1.1.5 i ele aldığımızda

$$\begin{aligned}\lambda_1(P) \le{}& \lambda_1(P)\,\lambda_1\left\{V_2^{-T}\left[\left(V_2+2\alpha_2 I\right)^T\left(V_2+2\alpha_2 I\right)\right]V_2^{-1}\right\}\\ &+2\alpha_2\lambda_1\left\{V_2^{-T}\left[Q+\beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1}\right]V_2^{-1}\right\}\end{aligned} \tag{3.105}$$

eşitsizliğini kolaylıkla yazabiliriz. Buna göre (3.70) varsayımından

$$\lambda_1\left\{V_2^{-T}\left[\left(V_2+2\alpha_2 I\right)^T\left(V_2+2\alpha_2 I\right)\right]V_2^{-1}\right\}<1 \tag{3.106}$$

olur ki, bu,

$$\begin{aligned}\lambda_1(P) &\le \frac{2\alpha_2\lambda_1\left\{V_2^{-T}\left[Q+\beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1}\right]V_2^{-1}\right\}}{1-\lambda_1\left\{V_2^{-T}\left[\left(V_2+2\alpha_2 I\right)^T\left(V_2+2\alpha_2 I\right)\right]V_2^{-1}\right\}}\\ &= \frac{\alpha_2\lambda_1\left\{V_2^{-T}\left[Q+\beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1}\right]V_2^{-1}\right\}}{1-\lambda_1\left\{V_2^{-T}\left[\left(V_2+2\alpha_2 I\right)^T\left(V_2+2\alpha_2 I\right)+\alpha_2^2 I\right]V_2^{-1}\right\}}\\ &= \varphi_2\end{aligned} \tag{3.107}$$

olduğunu gösterir. Son olarak (3.107) yi (3.104) de yerine yazarak, CARE (1.26) nın çözümü için (3.98) üst sınırını elde ederiz.

Teorem 3.1.6 da (3.98) ile verilen üst sınırı ele alarak, CARE (1.26) nın çözümü için daha iyi üst sınırlar elde etmek amacıyla aşağıdaki gibi tanımlanan iteratif algoritmayı verebiliriz:

Algoritma 3.1.6.

Adım 1. P_{u6}, (3.98) ile tanımlanan üst sınır olmak üzere $S_{6_0} \equiv P_{u6}$ olsun.

Adım 2. $i = 1, 2, \ldots$ için

$$S_{6_i} = V_2^{-T}\left\{\left(V_2 + 2\alpha_2 I\right)^T S_{6_{i-1}}\left(V_2 + 2\alpha_2 I\right) + 2\alpha_2\left[Q + \beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1}\right]\right\}V_2^{-1} \tag{3.108}$$

iterasyonuyla hesaplanır. Bu takdirde S_{6_i} ler, CARE (1.26) nın çözümü için üst sınırlardır.

İspat. Algoritma 3.1.6 nın ispatı, algoritma 3.1.5 in ispatıyla aynı şekilde yapılabileceğinden ayrıca verilmemiştir.

Uyarı 3.1.1. CARE (1.26) nın çözüm matrisi için literatürde bulunan üst sınırların birçoğu BB^T matrisinin regüler olduğu durumlarda hesaplanabilmektedir. Ancak daha önce de bahsedildiği gibi kontrol problemlerinin büyük bir kısmında BB^T matrisi singülerdir. Teorem 3.1.5 ve Teorem 3.1.6 da verilen üst sınırlar $m \in \mathbb{Q}$ için her zaman hesaplanabilir sınırlardır. Yani, BB^T singüler ise $m \geq \frac{1}{2}$ olarak seçilebilir, aksi takdirde herhangi bir $m \in \mathbb{Q}$ için sınırlar her zaman hesaplanabilmektedir.

Uyarı 3.1.2. Teorem 3.1.5 ve Teorem 3.1.6 da verilen üst sınırlar α_2, β_2 and m parametrelerinin seçimlerine bağlıdır. Bu parametrelerin farklı seçimleriyle farklı üst sınırlar elde edebilir ve bu sınırlar arasından gerçek değere en yakın sınırı seçebiliriz.

Uyarı 3.1.3. (3.98) ile verilen P_{u6} üst sınırından,

$$\begin{aligned} P_{u6} &= V_2^{-T}\left\{\varphi_2\left(V_2 + V_2^T + 2\alpha_2 I\right) + \alpha_2\left[Q + \beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1}\right]\right\}V_2^{-1} \\ &\quad + \alpha_2 V_2^{-T}\left\{\varphi_2\left(V_2 + V_2^T + 2\alpha_2 I\right) + Q + \beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1}\right\}V_2^{-1} \\ &= P_{u5} + \alpha_2 V_2^{-T}\left\{\varphi_2\left(A + A^T - 2\beta\left(BB^T\right)^m\right) + Q + \beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1}\right\}V_2^{-1} \end{aligned} \tag{3.109}$$

eşitliğini yazabiliriz. $\Delta_1 = \varphi_2\left(A + A^T - 2\beta\left(BB^T\right)^m\right) + Q + \beta_2^2\left(BB^T\right)^{2m-1}$ olsun. Bu durumda $\Delta_1 \geq 0$ ise, $P_{u5} \leq P_{u6}$, $\Delta_1 \leq 0$ ise $P_{u6} \leq P_{u5}$ olduğu görülür. Ancak Uyarı 3.1.1 de bahsedildiği gibi Δ_1 matrisinin negatif tanımlı ya da pozitif tanımlı olmadığı

durumlarda bu iki sınırı karşılaştıramayabiliriz. Bununla birlikte bu iki üst sınırı içeren aşağıdaki alternatif üst sınırı verebiliriz.

Teorem 3.1.7. (3.70) şartını sağlayacak şekildeki pozitif β_2 ve $m \geq 1/2$ sabitleri ve herhangi bir $\alpha_2 > 0$ sabiti için V_2 matrisi, (3.69) ile tanımlansın. Bu takdirde, $0 < m_1 \leq 2$ ya da $-1 \leq m_1 < 0$ için $\delta_1 \in [0,1]$ olmak üzere, CARE (1.26) nın pozitif yarı tanımlı P çözümü

$$P \leq \left[(1-\delta_1)(P_{u5})^{m_1} + \delta_1 (P_{u6})^{m_1} \right]^{1/m_1} \equiv P_{u7} \tag{3.110}$$

üst sınırına sahiptir.

İspat. Teorem 1.1.3.1 den $0 \leq k \leq 1$ olmak üzere $f(t) = t^k$ fonksiyonunun $[0,\infty)$ aralığında matris monoton ve ayrıca, $1 \leq r \leq 2$ ya da $-1 \leq r \leq 0$ olmak üzere $g(t) = t^r$ fonksiyonunun $(0,\infty)$ aralığında matris konveks olduğunu biliyoruz. k ve r sabitleri için $k,\ r \neq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda Tanım 1.1.3.2, Tanım 1.1.3.3 ve Teorem 1.1.2.7 yi dikkate aldığımızda

$$0 \leq (1-\delta_1) P_{u5}^k + \delta_1 P_{u6}^k \leq \left[(1-\delta_1) P_{u5}^{rk} + \delta_1 P_{u6}^{rk} \right]^{1/r} \tag{3.111}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, matris monotonluğundan $P^k \leq P_{u5}^k$ ve $P^k \leq P_{u6}^k$ olup,

$$0 \leq P^k \leq \left[(1-\delta_1) P_{u5}^{rk} + \delta_1 P_{u6}^{rk} \right]^{1/r} \tag{3.112}$$

ifadesini elde ederiz ki, bu da

$$0 \leq P \leq \left[(1-\delta_1) P_{u5}^{rk} + \delta_1 P_{u6}^{rk} \right]^{1/\mathrm{k}\, r} \tag{3.113}$$

ifadesine denktir. Buna göre $0 < k \leq 1$ ve $1 \leq r \leq 2$ olduğundan $m_1 = rk,\ 0 < m_1 \leq 2$ için

$$0 \leq P \leq \left[(1-\delta_1)(P_{u5})^{m_1} + \delta_1 (P_{u6})^{m_1} \right]^{1/m_1} \tag{3.114}$$

olur.

Benzer şekilde, aynı işlemler, $-1 \leq m_1 < 0$ için de yapılabilir.

Sonuç 3.1.2. (3.70) şartını sağlayacak şekildeki pozitif β_2 ve $m \geq 1/2$ sabitleri ve $\alpha_2 > 0$ için V_2 matrisi, (3.69) ile tanımlansın. Bu takdirde $\delta_1 \in [0,1]$ olmak üzere ve φ_2, (3.71) ile tanımlanmak üzere, CARE (1.26) nın pozitif yarı tanımlı çözümü için

$$P \leq V_2^{-T} \left\{ \begin{array}{l} \varphi_2 \left[(V_2 + \alpha_2 I)^T (V_2 + \alpha_2 I) + \alpha_2^2 I \right] + \varphi_2 \alpha_2 \delta_1 \left(V_2 + V_2^T + 2\alpha_2 I \right) \\ + (1+\delta_1)\alpha_2 \left[Q + \beta_2^2 \left(BB^T \right)^{2m-1} \right] \end{array} \right\} V_2^{-1} \equiv P_{u7}^* \tag{3.115}$$

dir.

İspat. Teorem 3.1.7 de, $m_1 = 1$ seçilerek, (3.110) ile verilen eşitsizlik düzenlendiğinde (3.115) üst sınırı elde edilir.

Sonuç 3.1.2 de verilen üst sınırı ele alarak, CARE (1.26) nın çözümüne daha yakın sınırlar elde etmek için aşağıdaki iteratif algoritmayı verebiliriz:

Algoritma 3.1.7.

Adım 1. P_{u7}^{*}, (3.115) ile verilen üst sınır olmak üzere $S_{7_0} \equiv P_{u7}^{*}$ olsun.

Adım 2. $i = 1, 2, \ldots$ için

$$S_{7_i} = V_2^{-T} \begin{bmatrix} \left(V_2 + \alpha_2 I\right)^T S_{7_{i-1}} \left(V_2 + \alpha_2 I\right) + \alpha_2^2 \left(1 + 2\delta_1\right) S_{7_{i-1}} \\ + \alpha_2 \delta_1 \left(S_{7_{i-1}} V_2 + V_2^T S_{7_{i-1}}\right) + \alpha_2 \left(1 + \delta_1\right) \left(Q + \beta_2^2 \left(BB^T\right)^{2m-1}\right) \end{bmatrix} V_2^{-1} \tag{3.116}$$

iterasyonuyla hesaplanır. O halde S_{7_i} ler, CARE (1.26) nın çözümü için üst sınırlardır.

İspat. Algoritma 3.1.7 nin ispatı, algoritma 3.1.3 ün ispatına benzer işlemlerle kolaylıkla yapılabilir.

Şimdi B matrisinin $n-$kare olduğu durumlarda, CARE (1.26) nın çözüm matrisi için üst sınırlar verelim:

Teorem 3.1.8. β_4 pozitif sabiti ve $m \in \mathbb{Z}^+$ değeri

$$A + A^T < \beta_4 \left(B^m + \left(B^m\right)^T\right) \tag{3.117}$$

olacak şekilde seçilsin ve $\alpha_4 > 0$ için

$$V_4 \equiv A - \alpha_4 I - \beta_4 B^m \tag{3.118}$$

matrisi tanımlansın. Pozitif φ_4 sabiti

$$\varphi_4 \equiv \frac{\alpha_4 \lambda_1 \left\{V_4^{-T} \left[Q + \beta_4^2 \left(B^T\right)^{m-1} B^{m-1}\right] V_4^{-1}\right\}}{1 - \lambda_1 \left\{V_4^{-T} \left[\left(V_4 + \alpha_4 I\right)^T \left(V_4 + \alpha_4 I\right) + \alpha_4^2 I\right] V_4^{-1}\right\}} \tag{3.119}$$

olmak üzere, CARE (1.26) nın P çözümü için

$$P \le V_4^{-T} \left\{\varphi_4 \left[\left(V_4 + \alpha_4 I\right)^T \left(V_4 + \alpha_4 I\right) + \alpha_4^2 I\right] + \alpha_4 \left[Q + \beta_4^2 \left(B^T\right)^{m-1} B^{m-1}\right]\right\} V^{-1} \equiv P_{u8} \tag{3.120}$$

dir.

İspat. $P \ge 0$ için Teorem 1.1.2.11 kullanılarak, β_4 pozitif bir sabit olmak üzere, aşağıdaki pozitif yarı tanımlı blok matris yazılabilir:

$$\begin{pmatrix} \beta_4^2 I & \beta_4 B^T P \\ \beta_4 PB & PBB^T P \end{pmatrix} \geq 0 \tag{3.121}$$

$m \in \mathbb{Z}^+$ için yukarıda verilen matrisin ilk satırı soldan $\left(B^T\right)^{m-1}$ ve ilk sütunu sağdan B^{m-1} ile çarpıldığında

$$\begin{pmatrix} \beta_4^2 \left(B^T\right)^{m-1} B^{m-1} & \beta_4 \left(B^T\right)^m P \\ \beta_4 PB^m & PBB^T P \end{pmatrix} \geq 0 \tag{3.122}$$

elde edilir ve bu matris için (1.20) eşitliğinin kullanılması

$$0 \leq D_3 = \beta_4^2 \left(B^T\right)^{m-1} B^{m-1} - \beta_4 \left(B^T\right)^m P - \beta_4 PB^m + PBB^T P \tag{3.123}$$

pozitif yarı tanımlı D_3 matrisini verir. Böylece CARE (1.26) ve (3.123) birlikte ele alındığında

$$0 \leq D_3 = \left[A - \beta_4 B^m\right]^T P + P\left[A - \beta_4 B^m\right] + Q + \beta_4^2 \left(B^T\right)^{m-1} B^{m-1} \tag{3.124}$$

olur. V_4 matrisinin (3.118) ile verilen tanımı ve (3.78) özdeşliği dikkate alındığında ise, (3.124) den

$$V_4^T P V_4 \leq \left(V_4 + \alpha_4 I\right)^T P \left(V_4 + \alpha_4 I\right) + \alpha_4^2 P + \alpha_4 \left(Q + \beta_4^2 \left(B^T\right)^{m-1} B^{m-1}\right) \tag{3.125}$$

olduğu görülür. (3.117) şartının sağlanması, V_4 matrisinin tersinir olmasını ifade eder ve böylece (3.125) den

$$P \leq V_4^{-T} \left\{ \left(V_4 + \alpha_4 I\right)^T P \left(V_4 + \alpha_4 I\right) + \alpha_4^2 P + \alpha_4 \left(Q + \beta_4^2 \left(B^T\right)^{m-1} B^{m-1}\right) \right\} V_4^{-1} \tag{3.126}$$

olur ve (3.126) için Teorem 1.1.1.4 ve Teorem 1.1.2.7 den

$$P \leq V_4^{-T} \left\{ \left[\left(V_4 + \alpha_4 I\right)^T \left(V_4 + \alpha_4 I\right) + \alpha_4^2 I \right] \lambda_1(P) + \alpha_4 \left(Q + \beta_4^2 \left(B^T\right)^{m-1} B^{m-1}\right) \right\} V_4^{-1} \tag{3.127}$$

elde edilir ki, buradan Teorem 1.1.1.4 ile

$$\begin{aligned} \lambda_1(P) \leq \lambda_1(P) \lambda_1 \left\{ V_4^{-T} \left[\left(V_4 + \alpha_4 I\right)^T \left(V_4 + \alpha_4 I\right) + \alpha_4^2 I \right] V_4^{-1} \right\} \\ + \alpha_4 \lambda_1 \left\{ V_4^{-T} \left[Q + \beta_4^2 \left(B^T\right)^{m-1} B^{m-1} \right] V_4^{-1} \right\} \end{aligned} \tag{3.128}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Ayrıca, (3.117) varsayımına Teorem 1.1.2.14 ün uygulanmasıyla

$$\lambda_1 \left\{ V_4^{-T} \left[\left(V_4 + \alpha_4 I\right)^T \left(V_4 + \alpha_4 I\right) + \alpha_4^2 I \right] V_4^{-1} \right\} < 1 \tag{3.129}$$

olup, buradan

$$0<\lambda_1(P)\le\frac{\alpha_4\lambda_1\left\{V_4^{-T}\left[Q+\beta_4^2\left(B^T\right)^{m-1}B^{m-1}\right]V_4^{-1}\right\}}{1-\lambda_1\left\{V_4^{-T}\left[\left(V_4+\alpha_4 I\right)^T\left(V_4+\alpha_4 I\right)+\alpha_4^2 I\right]V_4^{-1}\right\}}\equiv\varphi_4 \tag{3.130}$$

yazılabilir. Bu durumda (3.130) un, (3.127) de yerine yazılmasıyla CARE (1.26) nın çözümü için (3.120) üst sınırı elde edilmiş olur.

Teorem 3.1.8 de türetilen üst sınırı ele alarak, CARE (1.26) nın çözümü için daha iyi tahminlerde bulunmak amacıyla aşağıdaki iteratif algoritmayı verebiliriz:

Algoritma 3.1.8.

Adım 1. P_{u8} (3.120) ile verilen üst sınır olmak üzere $S_{8_0}\equiv P_{u8}$ olsun.

Adım 2. $i=1,2,\ldots$ için

$$S_{8_i}=V_4^{-T}\left\{\left(V_4+\alpha_4 I\right)^T S_{8_{i-1}}\left(V_4+\alpha_4 I\right)+\alpha_4^2 S_{8_{i-1}}+\alpha_4\left(Q+\beta_4^2\left(B^T\right)^{m-1}B^{m-1}\right)\right\}V_4^{-1} \tag{3.131}$$

iterasyonuyla hesaplanır. O halde S_{8_i} ler CARE (1.26) nın çözümü için üst sınırlardır.

İspat. Bu algoritmanın ispatı önceki algoritmalarınkine benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 3.1.9. Pozitif β_4 sabiti ve $m\in\mathbb{Z}^+$ değeri, (3.117) şartını sağlamak üzere, V_4, herhangi bir $\alpha_4>0$ sabiti için (3.118) ile tanımlanan bir matris olsun. Buna göre φ_4, (3.119) ile tanımlanmak üzere, CARE (1.26) nın pozitif yarı tanımlı P çözümü

$$P\le V_4^{-T}\left\{\varphi_4\left(V_4+2\alpha_4 I\right)^T\left(V_4+2\alpha_4 I\right)+2\alpha_4\left[Q+\beta_4^2\left(B^T\right)^{m-1}B^{m-1}\right]\right\}V_4^{-1}\equiv P_{u9} \tag{3.132}$$

üst sınırına sahiptir.

İspat. Bu teoremin ispatı, önceki teoremlerin ispatına benzer olarak yapılabilir.

Yukarıda (3.132) ile verilen üst sınırı ele alarak, CARE (1.26) nın çözümü için aşağıdaki algoritmayı verebiliriz:

Algoritma 3.1.9.

Adım 1. P_{u9}, (3.132) ile tanımlanan üst sınır olmak üzere $S_{9_0}\equiv P_{u9}$ olsun.

Adım 2. $i=1,2,\ldots$ için

$$S_{9_i}=V_4^{-T}\left\{\left(V_4+2\alpha_4 I\right)^T S_{9_{i-1}}\left(V_4+2\alpha_4 I\right)+2\alpha_4\left(Q+\beta_4^2\left(B^T\right)^{m-1}B^{m-1}\right)\right\}V_4^{-1} \tag{3.133}$$

iterasyonuyla hesaplanır. O halde S_{9_i} ler, CARE (1.26) nın çözümü için üst sınırlardır.

İspat. Bu algoritmanın ispatı önceki algoritmaların ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Uyarı 3.1.4. Teorem 3.1.8 de ve Teorem 3.1.9 da verilen üst sınırlar için $m\in\mathbb{Z}^+$ olarak seçildiğinde B matrisi regüler olmak zorunda değildir. Yani B, singüler olsa da

$m \in \mathbb{Z}^+$ için bahsedilen üst sınırlar her zaman hesaplanabilirdir. B matrisi regülerse aynı sınırlar her $m \in \mathbb{Z}$ için her zaman hesaplanabilmektedir.

Teorem 3.1.10. Pozitif β_4 sabiti ve $m \in \mathbb{Z}^+$ değeri, (3.117) şartını sağlamak üzere, herhangi bir $\alpha_4 > 0$ sabiti için V_4 matrisi (3.118) ile tanımlansın. Bu takdirde $0 < m_2 \le 2$ ya da $-1 \le m_2 < 0$ için $\delta_2 \in [0,1]$ olmak üzere, CARE (1.26) nın pozitif yarı tanımlı P çözümü

$$P \le \left[(1-\delta_2) P_{u8}^{m_2} + \delta_2 P_{u9}^{m_2} \right]^{1/m_2} \equiv P_{u10} \tag{3.134}$$

üst sınırına sahiptir.

İspat. Bu teoremin ispatı Teorem 3.1.7 nin ispatına benzer olarak kolay bir şekilde verilebilir.

Teorem 3.1.10 da $m_2 = 1$ olarak seçildiğinde aşağıdaki sonucu ve algoritmayı verebiliriz:

Sonuç 3.1.3. Pozitif β_4 sabiti ve $m \in \mathbb{Z}^+$ değeri, (3.117) şartını sağlamak üzere, herhangi bir $\alpha_4 > 0$ sabiti için, V_4 matrisi (3.118) ile tanımlansın. Bu takdirde φ_4, (3.119) ile verilmek ve $\delta_2 \in [0,1]$ olmak üzere, CARE (1.26) nın pozitif yarı tanımlı P çözümü

$$P \le V_4^{-T} \left\{ \begin{array}{l} \varphi_4 \left[\left(V_4 + \alpha_4 I \right)^T \left(V_4 + \alpha_4 I \right) + \alpha_4^2 I \right] + \varphi_4 \alpha_4 \delta_2 \left(V_4 + V_4^T + 2\alpha_4 I \right) \\ + (1+\delta_2) \alpha_4 \left[Q + \beta_4^2 \left(B^T \right)^{m-1} B^{m-1} \right] \end{array} \right\} V_4^{-1} \equiv P_{u10}^* \tag{3.135}$$

üst sınırına sahiptir.

Yukarıda verilen üst sınırı ele alarak CARE (1.26) nın çözümü için aşağıdaki algoritmayı verebiliriz:

Algoritma 3.1.10.

Adım 1. P_{u10}^*, (3.135) ile verilen üst sınır olmak üzere $S_{10_0} \equiv P_{u10}^*$ olsun.

Adım 2. $i = 1, 2, \ldots$ için

$$S_{10_i} = V_4^{-T} \left[\begin{array}{l} \left(V_4 + \alpha_4 I \right)^T S_{10_{i-1}} \left(V_4 + \alpha_4 I \right) + \alpha_4^2 \left(1 + 2\delta_2 \right) S_{10_{i-1}} \\ + \alpha_4 \delta_2 \left(S_{10_{i-1}} V_4 + V_4^T S_{10_{i-1}} \right) + \alpha_4 \left(1 + \delta_2 \right) \left(Q + \beta_4^2 \left(B^T \right)^{m-1} B^{m-1} \right) \end{array} \right] V_4^{-1} \tag{3.136}$$

iterasyonuyla hesaplanır. O halde S_{10_i} ler de CARE (1.26) nın çözümü için üst sınırlardır.

İspat. Bu algoritmanın ispatı, Algoritma 3.1.7 nin ispatına benzer şekilde yapılabileceğinden ayrıca verilmeyecektir.

Buraya kadar kullanılan temel düşüncelerden farklı olarak, Bölüm 2.1 de de bahsedildiği gibi (Lee, 2003a) çalışmasında CARE (1.26) nın çözümü için çeşitli üst sınırlar vermiştir. Bu kısımda, (Lee, 2003a) çalışmasındaki sonuçlara benzer, ancak bu çalışmada kullanılan yöntemden farklı bir yöntem ele alınarak, yeni matris özdeşlikleri yardımıyla CARE (1.26) nın denk formları oluşturularak, keyfi seçilen pozitif tanımlı bir matrise bağlı, BB^T ve Q matrislerinin singüler ve regüler olduğu durumları içeren, yeni üst sınırlar verilmiştir.

Teorem 3.1.11. Pozitif tanımlı herhangi bir X_1 matrisi için

$$M_1 \equiv BB^T + AX_1A^T > 0 \tag{3.137}$$

olsun. Bu takdirde η_1, (2.18) ile tanımlanan pozitif sabit olmak üzere, CARE (1.26) nın pozitif yarı tanımlı P çözüm matrisi için

$$P \le M_1^{-1/2}\left\{M_1^{1/2}\left[Q - X_1^{-1} + \lambda_1\left(X_1\right)\left[\eta_1 s_1\left(A\right) + \lambda_1\left(X_1^{-1}\right)\right]^2 I\right]M_1^{1/2}\right\}^{1/2} M_1^{-1/2} \equiv P_{u11} \tag{3.138}$$

dir.

İspat. Öncelikle, $X_1 \in \mathbb{R}^{n\times n} > 0$ olmak üzere, CARE (1.26) nın her iki yanına $X_1^{-1} + PAX_1A^TP$ matrisini eklediğimizde

$$\left(PA + X_1^{-1}\right)X_1\left(PA + X_1^{-1}\right)^T - PBB^TP + Q - X_1^{-1} - PAX_1A^TP = 0 \tag{3.139}$$

eşitliğini elde ederiz ki, bu,

$$0 < P\left(BB^T + AX_1A^T\right)P = Q - X_1^{-1} + \left(PA + X_1^{-1}\right)X_1\left(PA + X_1^{-1}\right)^T \tag{3.140}$$

eşitliğine denktir. Buradan (3.140) eşitliğine sırasıyla Teorem 1.1.1.4, (1.18) eşitsizliği, Teorem 1.1.1.6 uygulandığında ve (2.18) ile verilen pozitif η_1 sabiti ele alındığında

$$\begin{aligned}
0 < P\left(BB^T + AX_1A^T\right)P &= Q - X_1^{-1} + \left(PA + X_1^{-1}\right)X_1\left(PA + X_1^{-1}\right)^T \\
&\le Q - X_1^{-1} + \lambda_1\left(X_1\right)\left[\left(PA + X_1^{-1}\right)\left(PA + X_1^{-1}\right)^T\right] \\
&\le Q - X_1^{-1} + \lambda_1\left(X_1\right)\left[s_1^2\left(PA + X_1^{-1}\right)\right]I \\
&\le Q - X_1^{-1} + \lambda_1\left(X_1\right)\left[s_1\left(PA\right) + \lambda_1\left(X_1^{-1}\right)\right]^2 I \\
&\le Q - X_1^{-1} + \lambda_1\left(X_1\right)\left[\lambda_1\left(P\right)s_1\left(A\right) + \lambda_1\left(X_1^{-1}\right)\right]^2 I \\
&\le Q - X_1^{-1} + \lambda_1\left(X_1\right)\left[\eta_1 s_1\left(A\right) + \lambda_1\left(X_1^{-1}\right)\right]^2 I
\end{aligned} \tag{3.141}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Buna göre M_1, (3.137) ile verilen matris olmak üzere (3.141) eşitsizliği sağdan ve soldan $M_1^{1/2}$ ile çarpıldığında

$$\left(M_1^{1/2}PM_1^{1/2}\right)^2 = M_1^{1/2}PM_1PM_1^{1/2} \le M_1^{1/2}\begin{bmatrix} Q - X_1^{-1} \\ +\lambda_1\left(X_1\right)\left[\eta_1 s_1\left(A\right)+\lambda_1\left(X_1^{-1}\right)\right]^2 I \end{bmatrix} M_1^{1/2} \qquad (3.142)$$

olur ve bu eşitsizlik P matrisine göre çözüldüğünde, CARE (1.26) nın çözümü için (3.138) üst sınırına ulaşılır.

Uyarı 3.1.5 Teorem 3.1.11 de (3.138) ile verilen üst sınır ele alındığında BB^T ve Q matrislerinin tersinir (regüler) olması gerekmemektedir. Ayrıca (2.18) ile verilen η_1 sabiti, bu matrislerin her durumu için hesaplanabileceğinden, (3.138) üst sınırının pozitif tanımlı keyfi bir X_1 matrisi için her zaman hesaplanabileceğini söyleyebiliriz. Bu yüzden (3.138) ile verilen üst sınırın birçok problemde, herhangi bir varsayıma ihtiyaç duyulmaksızın kullanılabileceğini ifade edebiliriz.

Aşağıdaki Teoremle, Teorem 3.1.11 e göre daha kısa bir üst sınır veren formülü verelim:

Teorem 3.1.12. Pozitif tanımlı X_1 matrisi için M_1 matrisi (3.137) ve pozitif η_1 sabiti (2.18) ile tanımlanmak üzere CARE (1.26) nın pozitif yarı tanımlı P çözüm matrisi için

$$P \le \left\{\frac{1}{\lambda_n\left(M_1\right)}\left[Q - X_1^{-1} + \lambda_1\left(X_1\right)\left[\eta_1 s_1\left(A\right)+\lambda_1\left(X_1^{-1}\right)\right]^2 I\right]\right\}^{1/2} \equiv P_{u12} \qquad (3.143)$$

dir.

İspat. (3.141) eşitsizliğinin en son elde edilen kısmını ele alarak sol tarafına Teorem 1.1.1.4 ve Teorem 1.1.2.7 uygulandığında

$$0 < \lambda_n\left(M_1\right)P^2 \le Q - X_1^{-1} + \lambda_1\left(X_1\right)\left[\eta_1 s_1\left(A\right)+\lambda_1\left(X_1^{-1}\right)\right]^2 I \qquad (3.144)$$

olur ve bu eşitsizlik, P ye göre çözüldüğünde (3.143) üst sınırı elde edilir.

Teorem 3.1.13. P, CARE (1.26) nın pozitif yarı tanımlı çözümü olsun ve

$$M_2 \equiv BB^T - A\left[\lambda_1\left(X_2\right)I - X_2\right]A^T > 0 \qquad (3.145)$$

şartını sağlayan pozitif tanımlı bir X_2 matrisi için M_2 yukarıdaki gibi tanımlansın. Bu takdirde ϕ_1 sabiti

$$\phi_1 \equiv \left\{\frac{1}{\lambda_n\left(M_2\right)}\lambda_1\left[Q - X_2^{-1} + \lambda_1\left(X_2\right)X_2^{-2}\right] + \frac{\kappa_2^2\left(X_2\right)s_1^2\left(A\right)}{\lambda_n^2\left(M_2\right)}\right\}^{1/2} + \frac{\kappa_2\left(X_2\right)s_1\left(A\right)}{\lambda_n\left(M_2\right)} \qquad (3.146)$$

ile tanımlanmak üzere P,

$$P \le \left\{ \frac{1}{\lambda_n(M_2)} \left[Q - X_2^{-1} + \lambda_1(X_2) X_2^{-2} + 2\kappa_2(X_2) s_1(A) \phi_1 I \right] \right\}^{1/2} \equiv P_{u13} \tag{3.147}$$

üst sınırına sahiptir.

İspat. İlk olarak $X_2 > 0$ olmak üzere (3.140) eşitliğini ele alalım. Bu eşitlik için sırasıyla Teorem 1.1.1.4 ve Teorem 1.1.2.7 nin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} P\left(BB^T + AX_2A^T\right)P &= Q - X_2^{-1} + \left(PA + X_2^{-1}\right) X_2 \left(PA + X_2^{-1}\right)^T \\ &\le Q - X_2^{-1} + \lambda_1(X_2)\left[PAA^TP + PAX_2^{-1} + X_2^{-1}A^TP + X_2^{-2} \right] \end{aligned} \tag{3.148}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Ayrıca, (3.148) eşitsizliğinin $PAX_2^{-1} + X_2^{-1}A^TP$ terimine sırasıyla Teorem 1.1.1.4, Teorem 1.1.1.7 ve Teorem 1.1.1.6 nın uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} PAX_2^{-1} + X_2^{-1}A^TP &\le \lambda_1\left(PAX_2^{-1} + X_2^{-1}A^TP\right) I \\ &\le \left|\lambda_1\left(PAX_2^{-1} + X_2^{-1}A^TP\right)\right| I \\ &\le 2s_1\left(PAX_2^{-1}\right) \\ &\le 2\lambda_1(P) s_1(A) \lambda_1\left(X_2^{-1}\right) I \end{aligned} \tag{3.149}$$

olup bu eşitsizlik (3.148) de yerine yazıldığında M_2 matrisinin (3.145) ile verilen tanımından

$$PM_2P \le Q - X_2^{-1} + \lambda_1(X_2) X_2^{-2} + 2\kappa_2(X_2) s_1(A) \lambda_1(P) I \tag{3.150}$$

elde edilir. Buna göre Teorem 1.1.1.4 ve Teorem 1.1.2.7 den

$$P^2 \le \frac{1}{\lambda_n(M_2)} \left[Q - X_2^{-1} + \lambda_1(X_2) X_2^{-2} + 2\kappa_2(X_2) s_1(A) \lambda_1(P) I \right] \tag{3.151}$$

olup, (3.151) için Weyl'in monotonluk prensibi ve Teorem 1.1.1.5 ele alındığında

$$\lambda_1\left(P^2\right) \le \frac{1}{\lambda_n(M_2)} \lambda_1\left[Q - X_2^{-1} + \lambda_1(X_2) X_2^{-2} \right] + 2\frac{\kappa_2(X_2) s_1(A)}{\lambda_n(M_2)} \lambda_1(P) \tag{3.152}$$

olduğu görülür. Bu durumda (3.152) eşitsizliğinin $\lambda_1(P)$ ye göre çözülmesiyle

$$\begin{aligned} \lambda_1(P) &\le \left\{ \frac{1}{\lambda_n(M_2)} \lambda_1\left[Q - X_2^{-1} + \lambda_1(X_2) X_2^{-2} \right] + \frac{\kappa_2^2(X_2) s_1^2(A)}{\lambda_n^2(M_2)} \right\}^{1/2} + \frac{\kappa_2(X_2) s_1(A)}{\lambda_n(M_2)} \\ &\equiv \phi_1 \end{aligned} \tag{3.153}$$

elde edilir ve ϕ_1 sabiti (3.151) de yerine yazıldığındaysa

$$P^2 \le \frac{1}{\lambda_n(M_2)} \left[Q - X_2^{-1} + \lambda_1(X_2) X_2^{-2} + 2\kappa_2(X_2) s_1(A) \phi_1 I \right] \tag{3.154}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Böylece (3.154), P ye göre çözüldüğünde (3.147) üst sınırı elde edilmiş olur.

Yukarıdaki üç teoremde kullanılan matris özdeşliğinden farklı, yeni bir matris özdeşliğini ele alarak ve üstteki metodu kullanarak, CARE (1.26) nın çözümü için yeni üst sınırlar verebiliriz:

Teorem 3.1.14. X_3, pozitif tanımlı herhangi bir matris olmak üzere

$$M_3 = BB^T + X_3 > 0 \tag{3.155}$$

olsun. Bu takdirde (2.18) ile verilen pozitif η_1 sabiti için CARE (1.26) nın pozitif yarı tanımlı P çözüm matrisi

$$P \le \left\{ \frac{1}{\lambda_n(M_3)} \left[Q - A^T X_3^{-1} A + \lambda_1(X_3) \left(\eta_1 + s_1\left(A^T X_3^{-1}\right) \right)^2 I \right] \right\}^{1/2} \equiv P_{u14} \tag{3.156}$$

üst sınırına sahiptir.

İspat. İlk olarak, $X_3 > 0$ olmak üzere, CARE (1.26) nın her iki tarafına $PX_3P + A^T X_3^{-1} A$ matrisini ilave edelim. Bu durumda

$$\left(P + A^T X_3^{-1}\right) X_3 \left(P + A^T X_3^{-1}\right)^T - PBB^T P + Q - A^T X_3^{-1} A - PX_3P = 0 \tag{3.157}$$

olup, bu eşitlik,

$$0 < P\left(BB^T + X_3\right)P = Q - A^T X_3^{-1} A + \left(P + A^T X_3^{-1}\right) X_3 \left(P + A^T X_3^{-1}\right)^T \tag{3.158}$$

şeklinde yazılabilir. Yukarıda verilen denklemin sağ kısmına sırasıyla Teorem 1.1.1.4, (1.18) eşitsizliği ve Teorem 1.1.1.6 uygulandığında

$$\begin{aligned} 0 < P\left(BB^T + X_3\right)P &\le Q - A^T X_3^{-1} A + \lambda_1(X_3)\left(P + A^T X_3^{-1}\right)\left(P + A^T X_3^{-1}\right)^T \\ &\le Q - A^T X_3^{-1} A + \lambda_1(X_3) s_1^2\left(P + A^T X_3^{-1}\right) I \\ &\le Q - A^T X_3^{-1} A + \lambda_1(X_3)\left[\lambda_1(P) + s_1\left(A^T X_3^{-1}\right)\right]^2 I \\ &\le Q - A^T X_3^{-1} A + \lambda_1(X_3)\left[\eta_1 + s_1\left(A^T X_3^{-1}\right)\right]^2 I \end{aligned} \tag{3.159}$$

elde edilir ve daha sonra M_3 matrisinin (3.155) tanımı ve (3.159) in sol kısmı için Teorem 1.1.1.4 ele alındığında (3.159) dan

$$P^2 \le \frac{1}{\lambda_n(M_3)} \left[Q - A^T X_3^{-1} A + \lambda_1(X_3)\left(\eta_1 + s_1\left(A^T X_3^{-1}\right)\right)^2 I \right] \tag{3.160}$$

olduğu görülür ve bu eşitsizlik (3.156) üst sınırını verir.

Teorem 3.1.15. Pozitif tanımlı bir X_4 matrisi için M_4 matrisi ve pozitif ϕ_2 sabiti sırasıyla

$$M_4 \equiv BB^T - \left[\lambda_1(X_4)I - X_4\right] > 0, \tag{3.161}$$

$$\phi_2 \equiv \left\{\frac{1}{\lambda_n(M_4)}\lambda_1\left[Q - A^T X_4^{-1}A + \lambda_1(X_4)A^T X_4^{-2}A\right] + \frac{\kappa_2^2(X_4)s_1^2(A)}{\lambda_n^2(M_4)}\right\}^{1/2} + \frac{\kappa_2(X_4)s_1(A)}{\lambda_n(M_4)} \tag{3.162}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde, CARE (1.26) nın pozitif yarı tanımlı P çözüm matrisi için

$$P \le \left\{\frac{1}{\lambda_n(M_4)}\left[Q - A^T X_4^{-1}A + \lambda_1(X_4)A^T X_4^{-2}A + 2s_1(A)\kappa_2(X_4)\phi_2 I\right]\right\}^{1/2} \equiv P_{u15} \tag{3.163}$$

dir.

İspat. (3.158) ile verilen eşitliği ele alalım. Teorem 1.1.1.4 den

$$\begin{aligned} 0 < P\left(BB^T + X_4\right)P &\le Q - A^T X_4^{-1}A + \lambda_1(X_4)\left(P + A^T X_4^{-1}\right)\left(P + A^T X_4^{-1}\right)^T \\ &= Q - A^T X_4^{-1}A + \lambda_1(X_4)\left(P^2 + PX_4^{-1}A + A^T X_4^{-1}P + A^T X_4^{-2}A\right) \end{aligned} \tag{3.164}$$

olup, bu eşitsizliğin $PX_4^{-1}A + A^T X_4^{-1}P$ terimine sırasıyla Teorem 1.1.1.4, Teorem 1.1.1.7 ve Teorem 1.1.1.6 uygulandığında

$$PX_4^{-1}A + A^T X_4^{-1}P \le 2\lambda_1(P)s_1(A)\lambda_1\left(X_4^{-1}\right) \tag{3.165}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlik ve M_4 matrisinin (3.161) tanımı dikkate alındığında (3.164) den

$$0 < PM_4P \le Q - A^T X_4^{-1}A + \lambda_1(X_4)A^T X_4^{-2}A + 2s_1(A)\kappa_2(X_4)\lambda_1(P)I \tag{3.166}$$

yazılır. Buradan Teorem 3.1.13 ün ispatında kullanılan yol izlendiğinde (3.163) ile verilen üst sınır kolaylıkla elde edilir.

Teorem 3.1.16. P, CARE (1.26) nın pozitif yarı tanımlı çözüm matrisi olsun. X_1, pozitif tanımlı bir matris olmak üzere M_1 matrisi (3.137) ile tanımlansın. Bu takdirde, (2.18) ile verilen pozitif η_1 sabiti için τ_1,

$$\tau_1 = 2\lambda_1(X_1)\eta_1 s_1\left(\frac{s_1^2(A)\eta_1}{2}I + AX_1^{-1}\right) \tag{3.167}$$

ile tanımlanmak üzere

$$P \le \left\{ \frac{1}{\lambda_n(M_1)} \left[Q - X_1^{-1} + \lambda_1(X_1) X_1^{-2} + \tau_1 I \right] \right\}^{1/2} \equiv P_{u16} \tag{3.168}$$

dır.

İspat. X_1, pozitif tanımlı herhangi bir matris olmak üzere, (3.148) eşitsizliğini ele alalım. (3.148) eşitsizliğindeki PAA^TP terimi için sırasıyla Teorem 1.1.1.4 ve Teorem 1.1.2.7 nin uygulanmasıyla

$$PAA^TP \le \lambda_1\left(AA^T\right)P^2 = s_1^2(A)P^2 \tag{3.169}$$

olur ve ayrıca Teorem 1.1.1.4, Teorem 1.1.4.7 ve (2.18) ile verilen η_1 sabitiyle

$$P^2 \le \left[P\lambda_1^2(P) IP \right]^{1/2} = \lambda_1(P)P \le \eta_1 P \tag{3.170}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Buna göre (3.170) ifadesi (3.169) da yerine yazıldığında

$$PAA^TP \le \lambda_1\left(AA^T\right)P^2 \le s_1^2(A)\eta_1 P \tag{3.171}$$

olup, (3.148) ve (3.171) birlikte ele alındığında M_1 matrisinin tanımından

$$\begin{aligned} PM_1P &\le Q - X_1^{-1} + \lambda_1(X_1)X_1^{-2} + \lambda_1(X_1)\left[s_1^2(A)\eta_1 P + PAX_1^{-1} + X_1^{-1}A^TP \right] \\ &= Q - X_1^{-1} + \lambda_1(X_1)X_1^{-2} + \lambda_1(X_1)\left[\begin{array}{l} P\left(\frac{s_1^2(A)\eta_1}{2} I + AX_1^{-1} \right) \\ + \left(\frac{s_1^2(A)\eta_1}{2} I + AX_1^{-1} \right)^T P \end{array} \right] \end{aligned} \tag{3.172}$$

sonucuna varılır. Dahası (3.172) nin son terimine sırasıyla Teorem 1.1.1.4, Teorem 1.1.1.7 ve Teorem 1.1.1.6 uygulanarak ve η_1 sabiti dikkate alınarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{s_1^2(A)\eta_1}{2} I + AX_1^{-1} \right) + \left(\frac{s_1^2(A)\eta_1}{2} I + AX_1^{-1} \right)^T P &\le 2\lambda_1(P) s_1 \left(\begin{array}{l} \frac{s_1^2(A)\eta_1}{2} I \\ + AX_1^{-1} \end{array} \right) I \\ &\le 2\eta_1 s_1 \left(\frac{s_1^2(A)\eta_1}{2} I + AX_1^{-1} \right) I \end{aligned} \tag{3.173}$$

Buna göre $0 \le P \le \lambda_1(P) I$ eşitsizliğini ve τ_1 sabitinin (3.167) tanımını ele alarak, (3.173) eşitsizliği (3.172) de yerine yazıldığında

$$P^2 \le \frac{1}{\lambda_n(M_1)} \left[Q - X_1^{-1} + \lambda_1(X_1)X_1^{-2} + \tau_1 I \right] \tag{3.174}$$

olup, (3.174), P ye göre çözülürse (3.168) üst sınırı elde edilir.

Teorem 3.1.17. X_3, pozitif tanımlı bir sabit olmak üzere M_3 matrisi (3.155) ile tanımlansın. Bu takdirde (2.18) ile verilen pozitif η_1 sabiti için τ_2,

$$\tau_2 \equiv 2\lambda_1(X_3)\eta_1 s_1\left(\frac{\eta_1}{2}I + X_3^{-1}A\right), \tag{3.175}$$

olmak üzere CARE (1.26) nın pozitif yarı tanımlı P çözüm matrisi için

$$P \le \left\{\frac{1}{\lambda_n(M_3)}\left[Q + A^T\left(\lambda_1(X_3)X_3^{-2} - X_3^{-1}\right)A + \tau_2 I\right]\right\}^{1/2} \equiv P_{u17} \tag{3.176}$$

dir.

İspat. X_3, pozitif tanımlı herhangi bir matris olmak üzere (3.159) eşitsizliğinin ilk satırı ve (3.171) eşitsizliği dikkate alındığında

$$0 < P\left(BB^T + X_3\right)P \le Q - A^T X_3^{-1}A + \lambda_1(X_3)\left(\eta_1 P + A^T X_3^{-1}P + PX_3^{-1}A\right) \tag{3.177}$$

yazılır ve bu eşitsizlikten yola çıkarak Teorem 3.1.16 nın ispatında kullanılan metotla (3.176) üst sınırı kolaylıkla elde edilebilir.

Uyarı 3.1.6. Buraya kadar verilen sınırlarda $\lambda_1(P)$ için bir üst sınır olarak verilen pozitif η_1 sabiti, her zaman hesaplanabilir olmasına rağmen BB^T ve Q matrislerinin singüler veya regüler olma durumları göz önüne alındığında bu durumlara uygun ve literatürde $\lambda_1(P)$ için mevcut olan farklı üst sınırlarda ele alınabilir. Örneğin B matrisi regüler olduğunda (2.40) ile verilen η_2 sabiti de ele alınabilir.

Uyarı 3.1.7. CARE (1.26) için literatürde bulunan üst sınırların çoğu BB^T ve Q matrislerinin sadece tersinir (regüler) olduğu durumları ele almaktadır. Halbuki birçok kontrol probleminde daha önce de bahsedildiği gibi bu matrisler tersinir olmak zorunda değildir. Yukarıda verilen Teorem 3.1.11, Teorem 3.1.12, Teorem 3.1.14, Teorem 3.1.16 ve Teorem 3.1.17 deki sınırlar bu sınırlandırmayı ortadan kaldırır. Yani bu teoremlerle verilen üst sınırlar, (3.137) ve (3.155) şartlarını sağlayan herhangi pozitif tanımlı X_1 ve X_3 matrisleri için her zaman hesaplanabilen üst sınırlardır.

Uyarı 3.1.8. X, pozitif tanımlı herhangi bir matris olmak üzere, CARE (1.26) yı (-1) ile çarpıp ardından her iki tarafına $X^{-1} + PAX^{-1}A^TP$ matrisi eklediğimizde

$$0 < P\left(BB^T - AXA^T\right)P = Q + X^{-1} - \left(PA - X^{-1}\right)X\left(PA - X^{-1}\right)^T \tag{3.178}$$

eşitliğini elde ederiz. (3.178) eşitliğine Teorem 1.1.1.4 ve (1.18) eşitsizliğini uyguladığımızda ise

$$\begin{aligned} 0 < P\left(BB^T - AXA^T\right)P &= Q + X^{-1} - \left(PA - X^{-1}\right)X\left(PA - X^{-1}\right)^T \\ &\le Q + X^{-1} - \lambda_n(X)\left[\left(PA - X^{-1}\right)\left(PA - X^{-1}\right)^T\right] \\ &\le Q + X^{-1} - \lambda_n(X)\left[s_n^2\left(PA - X^{-1}\right)\right]I \end{aligned} \tag{3.179}$$

olur. Burada (3.179) un son terimi olan $\left[s_n^2\left(PA - X^{-1}\right)\right]$ ifadesini ele alalım. Teorem 1.1.1.6 dan biliyoruz ki, herhangi Y ve Z matrisleri için

$$s_n(Y)s_n(Z) \le s_n(YZ) \tag{3.180}$$

ve

$$s_n(Y) - s_n(Z) \le s_n\left(Y + (-Z)\right) \tag{3.181}$$

eşitsizlikleri mevcut olup buradan

$$\lambda_n(P)s_n(A) - \lambda_n\left(X^{-1}\right) \le s_n(PA) - s_n\left(X^{-1}\right) \le s_n\left(PA - X^{-1}\right) \tag{3.182}$$

olduğu görülür. Ancak yukarıdaki eşitsizliğin sol yanı hem negatif hem de pozitif olabilir. Bu yüzden yukarıda bahsedilen eşitsizlikleri kullanarak ek bir varsayıma gerek duymadan, CARE (1.26) nın çözümü için herhangi bir sınır elde edemeyiz. Son eşitsizliğin devamını yazamadığımız için Teorem 3.1.11 ve Teorem 3.1.14 de kullanılan metotla, (3.179) eşitsizliğini kullanarak alternatif sınırlar elde edemeyiz. Bu yüzden (3.178) özdeşliğini kullanarak bahsedilen olumsuz durum için farklı sınırlar elde etmek amacıyla farklı bir yol izlenecektir.

Teorem 3.1.18. P , CARE (1.26) nın pozitif yarı tanımlı çözüm matrisi ve X_5 ,

$$BB^T - AX_5A^T > 0 \tag{3.183}$$

olacak şekilde seçilen pozitif tanımlı bir matris olsun. O halde M_5 matrisi ve ϕ_3 sabiti sırasıyla

$$M_5 \equiv BB^T - AX_5A^T + \lambda_n(X_5)AA^T \tag{3.184}$$

ve

$$\phi_3 \equiv \frac{s_1(A) + \left\{s_1^2(A) + \lambda_1\left[Q + X_5^{-1} - \lambda_n(X_5)X_5^{-2}\right]\lambda_n(M_5)\right\}^{1/2}}{\lambda_n(M_5)} \tag{3.185}$$

şeklinde tanımlanmak üzere,

$$P \le \left\{ \frac{1}{\lambda_n(M_5)} \left[Q + X_5^{-1} - \lambda_n(X_5) X_5^{-2} + 2s_1(A)\phi_3 I \right] \right\}^{1/2} \equiv P_{u18} \tag{3.186}$$

dir.

İspat. X_5, (3.183) şartını sağlayan pozitif tanımlı bir matris olmak üzere, (3.178) eşitliğinde X yerine X_5 matrisini yazarak,

$$\left(PA - X_5^{-1}\right) X_5 \left(PA - X_5^{-1}\right)^T = X_5^{-1} - A^T P - PA + PAX_5 A^T P \tag{3.187}$$

matris özdeşliği ve (3.178) eşitliğinin birlikte ele alınmasıyla

$$P\left[BB^T - AX_5 A^T \right] P = Q + X_5^{-1} - \left(PA - X_5^{-1}\right) X_5 \left(PA - X_5^{-1}\right)^T \tag{3.188}$$

eşitliğini elde ederiz ve (3.188) e Teorem 1.1.1.4 ün uygulanmasıyla

$$P\left[BB^T - AX_5 A^T \right] P \le Q + X_5^{-1} - \lambda_n(X_5)\left(PAA^T P - PAX_5^{-1} - X_5^{-1} A^T P + X_5^{-2}\right) \tag{3.189}$$

yazabiliriz. Buradan (3.189) eşitsizliğinin $PAX_5^{-1} + X_5^{-1} A^T P$ terimi için sırasıyla Teorem 1.1.1.4, Teorem 1.1.1.7 ve Teorem 1.1.1.6 dan aşağıda verilen eşitsizliklerin sağlandığı görülür:

$$\begin{aligned} PAX_5^{-1} + X_5^{-1} A^T P &\le \lambda_1\left(PAX_5^{-1} + X_5^{-1} A^T P\right) I \\ &\le \left|\lambda_1\left(PAX_5^{-1} + X_5^{-1} A^T P\right)\right| I \\ &\le 2s_1\left(PAX_5^{-1}\right) I \\ &\le 2s_1(A)\lambda_1\left(X_5^{-1}\right)\lambda_1(P) I \end{aligned} \tag{3.190}$$

Böylece M_5 matrisinin (3.184) ile verilen tanımı ve elde edilen son eşitsizlik ışığında, (3.189) eşitsizliğini

$$\begin{aligned} PM_5 P &\le Q + X_5^{-1} - \lambda_n(X_5) X_5^{-2} + \lambda_n(X_5) 2s_1(A)\lambda_1\left(X_5^{-1}\right)\lambda_1(P) I \\ &= Q + X_5^{-1} - \lambda_n(X_5) X_5^{-2} + 2s_1(A)\lambda_1(P) I \end{aligned} \tag{3.191}$$

formuna getirerek, (3.191) den

$$P^2 \le \frac{1}{\lambda_n(M_5)} \left[Q + X_5^{-1} - \lambda_n(X_5) X_5^{-2} + 2s_1(A)\lambda_1(P) I \right] \tag{3.192}$$

yazabiliriz. Böylece daha önceki teoremlerin ispatına benzer olarak devam edildiğinde CARE (1.26) nın çözümü için (3.186) üst sınırını elde ederiz.

Teorem 3.1.19. P, CARE (1.26) nın pozitif yarı tanımlı çözüm matrisi ve X_6,

$$BB^T - X_6 > 0 \tag{3.193}$$

şartını sağlayacak şekilde seçilen pozitif tanımlı bir matris olsun. O halde M_6 matrisi ve pozitif ϕ_4 sabiti

$$M_6 \equiv BB^T - X_6 + \lambda_n\left(X_6\right) I\,, \tag{3.194}$$

$$\phi_4 \equiv \frac{s_1\left(A\right)+\left\{s_1^2\left(A\right)+\lambda_1\left[Q+A^T\left(X_6^{-1}-\lambda_n\left(X_6\right)X_6^{-2}\right)A\right]\lambda_n\left(M_6\right)\right\}^{1/2}}{\lambda_n\left(M_6\right)} \tag{3.195}$$

şeklinde tanımlanmak üzere, P matrisi

$$P \le \left\{\frac{1}{\lambda_n\left(M_6\right)}\left[Q+A^T\left(X_6^{-1}-\lambda_n\left(X_6\right)X_6^{-2}\right)A+2s_1\left(A\right)\phi_4 I\right]\right\}^{1/2} \equiv P_{u19} \tag{3.196}$$

üst sınırına sahiptir.

İspat. X_6, pozitif tanımlı herhangi bir matris olmak üzere, CARE (1.26) yı (-1) ile çarpıp ardından elde edilen denklemin her iki tarafına $PX_6P + A^T X_6^{-1} A$ matrisini ilave ettiğimizde CARE (1.26) nın

$$P\left(BB^T - X_6\right)P = Q + A^T X_6^{-1} A - \left(P - A^T X_6^{-1}\right) X_6 \left(P - A^T X_6^{-1}\right)^T \tag{3.197}$$

şeklindeki yeni formunu elde ederiz. İlk olarak (3.197) için Teorem 1.1.1.4 ele alındığında

$$\begin{aligned} P\left(BB^T - X_6\right)P &\le Q + A^T X_6^{-1} A - \lambda_n\left(X_6\right)\left(P - A^T X_6^{-1}\right)\left(P - A^T X_6^{-1}\right)^T \\ &= Q + A^T X_6^{-1} A - \lambda_n\left(X_6\right)\left(P^2 - PX_6^{-1}A - A^T X_6^{-1}P + A^T X_6^{-2} A\right) \end{aligned} \tag{3.198}$$

eşitsizliği elde edilir ve M_6 matrisinin (3.194) ile verilen tanımından

$$PM_6P \le Q + A^T\left(X_6^{-1} - \lambda_n\left(X_6\right)X_6^{-2}\right)A + \lambda_n\left(X_6\right)\left(PX_6^{-1}A + A^T X_6^{-1}P\right) \tag{3.199}$$

olur. Böylece daha önceki teoremlerde kullanılan metot izlendiğinde P matrisi için (3.196) üst sınırını elde ederiz.

Uyarı 3.1.9. Teorem 3.1.11-Teorem 3.1.19 ile verilen üst sınırlar $k = 1, 2, \ldots, 6$ keyfi pozitif tanımlı X_k matrislerini içeren $i = 1, 2, \ldots, 6$ için M_i matrislerine bağlıdır. Ancak optimal sınırı elde edebilmemiz için herhangi bir kriter ya da sistematik bir metot belirleyemeyiz. Bu yüzden bu matrislerin farklı seçimleriyle CARE (1.26) nın pozitif yarı tanımlı çözüm matrisi için farklı üst sınırlar elde edilir ve bunlar içerisinde gerçek değere en yakın olan tercih edilebilir.

Teorem 3.1.11-Teorem 3.1.19 da verilen sınırlar göz önüne alındığında bu sonuçları elde etmek için kullandığımız matris özdeşlikleri ve matris eşitsizlikleri,

Algoritma 3.1.1-Algoritma 3.1.10 gibi iteratif algoritmalar vermemize elverişli değildir. Bu şekildeki algoritmalar belli iterasyonlara bağlı olarak tam değere daha yakın değerler vereceğinden Teorem 3.1.11-Teorem 3.1.19 da kullanılan matris özdeşlikleri ele alınarak ve farklı matris eşitsizlikleriyle CARE (1.26) nın çözüm matrisi için aşağıdaki üst sınırlar verilerek bu sınırlara bağlı olarak algoritmalar geliştirilecektir.

Teorem 3.1.20. $X_1 > 0$ için M_1, (3.137) ile verilsin ve η_1, (2.18) ile verilen pozitif bir sabit olmak üzere

$$M_7 \equiv s_1^2(A)\eta_1/2\,I + AX_1^{-1} \tag{3.200}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde pozitif ϕ_5 sabiti

$$\phi_5 \equiv \frac{\lambda_1(X_1)\left(1+s_1^2(M_7)\right)+\left\{\begin{array}{l}\left[\lambda_1(X_1)\left(1+s_1^2(M_7)\right)\right]^2\\ +4\lambda_1\left[Q-X_1^{-1}+\lambda_1(X_1)X_1^{-2}\right]\lambda_n(M_1)\end{array}\right\}^{1/2}}{2\lambda_n(M_1)} \tag{3.201}$$

ile verilmek üzere, CARE (1.26) nın pozitif yarı tanımlı P çözüm matrisi için

$$P \le \left\{\frac{1}{\lambda_n(M_1)}\left[Q-X_1^{-1}+\lambda_1(X_1)\left(X_1^{-2}+\phi_5\left(I+M_7^TM_7\right)\right)\right]\right\}^{1/2} \equiv P_{u20} \tag{3.202}$$

dir.

İspat. X_1, pozitif tanımlı herhangi bir matris olmak üzere (3.172) eşitsizliğini ele alalım. Buna göre M_7 matrisinin tanımından

$$PM_1P \le Q-X_1^{-1}+\lambda_1(X_1)X_1^{-2}+\lambda_1(X_1)\left(PM_7+M_7^TP\right) \tag{3.203}$$

yazabiliriz. $P \ge 0$ olmak üzere Teorem 1.1.2.11 den

$$\begin{pmatrix}P^{1/2} & 0\\ P^{1/2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P^{1/2} & P^{1/2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P & P\\ P & P\end{pmatrix}\ge 0 \tag{3.204}$$

pozitif yarı tanımlı blok matrisi elde edilir ve bu blok matrisin 1. satırını soldan M_7^T ve 1. sütununu sağdan M_7 matrisi ile çarparak Teorem 1.1.2.12 den

$$\begin{pmatrix}M_7^TPM_7 & M_7^TP\\ PM_7 & P\end{pmatrix}\ge 0 \Rightarrow PM_7+M_7^TP \le M_7^TPM_7+P \tag{3.205}$$

elde edilir ve (3.205) ve (3.203) birlikte ele alındığında

$$PM_1P \le Q-X_1^{-1}+\lambda_1(X_1)X_1^{-2}+\lambda_1(X_1)\left(M_7^TPM_7+P\right) \tag{3.206}$$

olur. Bu takdirde Teorem 1.1.1.4 ve Teorem 1.1.2.7 den

$$P^2 \le \frac{1}{\lambda_n(M_1)}\left[Q - X_1^{-1} + \lambda_1(X_1)X_1^{-2} + \lambda_1(X_1)\left(M_7^T P M_7 + P\right)\right] \tag{3.207}$$

olup, aynı şekilde (3.207) eşitsizliğinin sağ kısmı için de Teorem 1.1.1.4 ve Teorem 1.1.2.7 kullanılarak

$$P^2 \le \frac{1}{\lambda_n(M_1)}\left[Q - X_1^{-1} + \lambda_1(X_1)X_1^{-2} + \lambda_1(X_1)\lambda_1(P)\left(M_7^T M_7 + I\right)\right] \tag{3.208}$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece Weyl'in monotonluk prensibi ve Teorem 1.1.1.5 den

$$\lambda_1^2(P) \le \frac{1}{\lambda_n(M_1)}\left[\lambda_1\left(Q - X_1^{-1} + \lambda_1(X_1)X_1^{-2}\right) + \lambda_n(X_1)\lambda_1(P)\lambda_1\left(M_7^T M_7 + I\right)\right] \tag{3.209}$$

olur ve bu eşitsizlik, $\lambda_1(P)$ ye göre çözüldüğünde

$$\lambda_1(P) \le \frac{\lambda_n(X_1)\left(1+s_1^2(M_7)\right) + \left\{\begin{array}{l}\left[\lambda_n(X_1)\left(1+s_1^2(M_7)\right)\right]^2 \\ +4\lambda_1\left[Q - X_1^{-1} + \lambda_1(X_1)X_1^{-2}\right]\lambda_n(M_1)\end{array}\right\}^{1/2}}{2\lambda_n(M_1)} \equiv \phi_5 \tag{3.210}$$

elde edilir. Buna göre ϕ_5 sabiti (3.208) de yerine yazılarak, elde edilen eşitsizlik P ye göre çözüldüğünde (3.202) üst sınırı elde edilir.

Teorem 3.1.20 de elde edilen üst sınırı ele alarak, CARE (1.26) nın çözümü için daha yakın değerler veren aşağıdaki iteratif algoritmayı verebiliriz:

Algoritma 3.1.11.

Adım 1. P_{u20}, (3.202) ile verilen üst sınır olmak üzere $S_{11_0} \equiv P_{u20}$ olsun.

Adım 2. $i = 1, 2, \ldots$ olmak üzere

$$S_{11_i} = \left\{\frac{1}{\lambda_n(M_1)}\left[Q - X_1^{-1} + \lambda_1(X_1)X_1^{-2} + \lambda_1(X_1)\left(M_7^T S_{11_{i-1}} M_7 + S_{11_{i-1}}\right)\right]\right\}^{1/2} \tag{3.211}$$

iterasyonuyla hesaplanır. Bu takdirde S_{11_i} ler de CARE (1.26) nın çözümü için üst sınırlardır.

İspat. (3.211) de $i = 1$ yazıldığında

$$S_{11_1} = \left\{\frac{1}{\lambda_n(M_1)}\left[Q - X_1^{-1} + \lambda_1(X_1)X_1^{-2} + \lambda_1(X_1)\left(M_7^T S_{11_0} M_7 + S_{11_0}\right)\right]\right\}^{1/2} \tag{3.212}$$

olur. Bu eşitsizliğin sağ kısmına sırasıyla Teorem 1.1.1.4 ve Teorem 1.1.2.7 nin uygulanmasıyla

$$S_{11_1} \le \left\{ \frac{1}{\lambda_n(M_1)} \left[Q - X_1^{-1} + \lambda_1(X_1) X_1^{-2} + \lambda_1(X_1) \lambda_1\left(S_{11_0}\right)\left(M_7^T M_7 + I\right) \right] \right\}^{1/2} \tag{3.213}$$

elde edilir ve $S_{11_0} \equiv P_{u20}$ olduğundan (3.120) den

$$S_{11_1} \le \left\{ \frac{1}{\lambda_n(M_1)} \left[Q - X_1^{-1} + \lambda_1(X_1) X_1^{-2} + \lambda_1(X_1) \phi_5 \left(M_7^T M_7 + I\right) \right] \right\}^{1/2} = S_{11_0} \tag{3.214}$$

olduğu açıktır. $S_{11_{i-1}} \le S_{11_{i-2}}$ olduğunu varsayalım. Buna göre Teorem 1.1.2.7 ışığında

$$\begin{aligned} S_{11_i} &= \left\{ \frac{1}{\lambda_n(M_1)} \left[Q - X_1^{-1} + \lambda_1(X_1) X_1^{-2} + \lambda_1(X_1)\left(M_7^T S_{11_{i-1}} M_7 + S_{11_{i-1}}\right) \right] \right\}^{1/2} \\ &\le \left\{ \frac{1}{\lambda_n(M_1)} \left[Q - X_1^{-1} + \lambda_1(X_1) X_1^{-2} + \lambda_1(X_1)\left(M_7^T S_{11_{i-2}} M_7 + S_{11_{i-2}}\right) \right] \right\}^{1/2} \\ &= S_{11_{i-1}} \end{aligned} \tag{3.215}$$

olup, tümevarım metodundan $S_{11_i} \le S_{11_{i-1}} \le \cdots \le S_{11_1} \le S_{11_0}$ elde edilir.

Teorem 3.1.21. $X_3 > 0$ için M_3 matrisi (3.155) ile verilsin ve η_1, (2.18) ile verilen pozitif bir sabit olmak üzere

$$M_8 \equiv \frac{\eta_1}{2} I + X_3^{-1} A \tag{3.216}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde, pozitif ϕ_6 sabiti

$$\phi_6 \equiv \frac{\lambda_1(X_3)\left(1 + s_1^2(M_8)\right) + \left\{ \begin{array}{l} \left[\lambda_1(X_3)\left(1 + s_1^2(M_8)\right) \right]^2 \\ +4\lambda_1\left[Q - A^T X_3^{-1} A + \lambda_1(X_3) A^T X_3^{-2} A \right] \lambda_n(M_3) \end{array} \right\}^{1/2}}{2\lambda_n(M_3)} \tag{3.217}$$

ile verilmek üzere, CARE (1.26) nın pozitif yarı tanımlı P çözüm matrisi için

$$\begin{aligned} P &\le \left\{ \frac{1}{\lambda_n(M_3)} \left[Q - A^T X_3^{-1} A + \lambda_1(X_3) A^T X_3^{-2} A + \lambda_1(X_3) \phi_6 \left(I + M_8^T M_8\right) \right] \right\}^{1/2} \\ &\equiv P_{u21} \end{aligned} \tag{3.218}$$

dir.

İspat. $X_3 > 0$ için $M_3 > 0$ olmak üzere (3.164) ve (3.171) eşitsizlikleri ele alınarak M_8 matrisinin tanımından

$$PM_3P \le Q - A^T X_3^{-1} A + \lambda_1(X_3) A^T X_3^{-2} A + \lambda_1(X_3) \begin{bmatrix} P\left(\frac{\eta_1}{2} I + X_3^{-1} A\right) \\ +\left(\frac{\eta_1}{2} I + X_3^{-1} A\right)^T P \end{bmatrix} \tag{3.219}$$
$$= Q - A^T X_3^{-1} A + \lambda_1(X_3) A^T X_3^{-2} A + \lambda_1(X_3)\left(PM_8 + M_8^T P\right)$$

yazılır ve (3.204) blok matrisinin 1. satırını soldan M_8^T ve 1. sütununu sağdan M_8 matrisi ile çarparak Teorem 1.1.2.12 den

$$\begin{pmatrix} M_8^T P M_8 & M_8^T P \\ PM_8 & P \end{pmatrix} \ge 0 \Rightarrow PM_8 + M_8^T P \le M_8^T P M_8 + P \tag{3.220}$$

elde edilir. Buna göre (3.219) ve (3.220) eşitsizlikleri birlikte ele alındığında

$$PM_3P \le Q - A^T X_3^{-1} A + \lambda_1(X_3) A^T X_3^{-2} A + \lambda_1(X_3)\left(M_8^T P M_8 + P\right) \tag{3.221}$$

olur. Böylece (3.221) eşitsizliğinden devam edilerek önceki teoremin ispatı izlendiğinde Teorem 3.1.21 in ispatı kolaylıkla yapılabilir.

(3.218) ile verilen üst sınıra bağlı olarak aşağıdaki iteratif algoritmayı verebiliriz:

Algoritma 3.1.12.

Adım 1. P_{u21}, (3.218) ile verilen üst sınır olmak üzere $S_{12_0} \equiv P_{u21}$ olsun.

Adım 2. $i = 1, 2, \ldots$ olmak üzere

$$S_{12_i} = \left\{ \frac{1}{\lambda_n(M_3)} \begin{bmatrix} Q - A^T X_3^{-1} A + \lambda_1(X_3) A^T X_3^{-2} A \\ +\lambda_1(X_3)\left(M_8^T S_{12_{i-1}} M_8 + S_{12_{i-1}}\right) \end{bmatrix} \right\}^{1/2} \tag{3.222}$$

iterasyonuyla hesaplanır. Bu takdirde S_{12_i} ler de CARE (1.26) nın çözümü için üst sınırlardır.

İspat. Algoritma 3.1.12 nin ispatı, Algoritma 3.1.11 in ispatına benzer olarak yapılabilir.

Teorem 3.1.22. X_5, (3.183) şartını sağlayan pozitif tanımlı bir matris olmak üzere M_5 matrisi (3.184) ile tanımlansın. O halde pozitif ϕ_7 sabiti

$$\phi_7 \equiv \frac{\lambda_n(X_5)\left(1 + s_1^2\left(AX_5^{-1}\right)\right) + \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_n(X_5)\left(1 + s_1^2\left(AX_5^{-1}\right)\right)\right]^2 \\ +4\lambda_1\left[Q + X_5^{-1} - \lambda_n(X_5) X_5^{-2}\right]\lambda_n(M_5) \end{bmatrix} \right\}^{1/2}}{2\lambda_n(M_5)} \tag{3.223}$$

ile verilmek üzere, CARE (1.26) nın pozitif yarı tanımlı P çözüm matrisi için

$$P \le \left\{ \frac{1}{\lambda_n (M_5)} \left[Q + X_5^{-1} - \lambda_n (X_5) X_5^{-2} + \lambda_n (X_5) \phi_7 \left(I + X_5^{-1} A^T A X_5^{-1} \right) \right] \right\}^{1/2} \equiv P_{u22} \qquad (3.224)$$

dir.

İspat. $X_5 > 0$ olmak üzere CARE (1.26) dan elde edilen (3.189) eşitsizliğini ele alalım. M_5 matrisinin (3.184) tanımından

$$PM_5P \le Q + X_5^{-1} - \lambda_n (X_5) X_5^{-2} + \lambda_n (X_5) \left(PAX_5^{-1} + X_5^{-1} A^T P \right) \qquad (3.225)$$

olduğu görülür. Buna göre (3.204) matrisinin 1. sütunu sağdan AX_5^{-1} ve 1. satırı soldan $X_5^{-1} A^T$ ile çarpıldığında

$$\begin{pmatrix} X_5^{-1} A^T P A X_5^{-1} & X_5^{-1} A^T P \\ PAX_5^{-1} & P \end{pmatrix} \ge 0 \qquad (3.226)$$

elde edilir ve bu matrise Teorem 1.1.2.12 nin uygulanması

$$X_5^{-1} A^T P + PAX_5^{-1} \le X_5^{-1} A^T P A X_5^{-1} + P \qquad (3.227)$$

olduğunu gösterir. Bu takdirde (3.225) ve (3.227) eşitsizlikleri birlikte ele alındığında

$$PM_5P \le Q + X_5^{-1} - \lambda_n (X_5) X_5^{-2} + \lambda_n (X_5) \left(X_5^{-1} A^T P A X_5^{-1} + P \right) \qquad (3.228)$$

olup buradan önceki iki teoremin ispatına benzer olarak devam edildiğinde (3.224) üst sınırı elde edilir.

(3.224) ile verilen üst sınıra bağlı olarak aşağıdaki iteratif algoritmayı verebiliriz:

Algoritma 3.1.13.

Adım 1. P_{u22}, (3.224) ile verilen üst sınır olmak üzere $S_{13_0} \equiv P_{u22}$ olsun.

Adım 2. $i = 1, 2, \ldots$ için

$$S_{13_i} = \left\{ \frac{1}{\lambda_n (M_5)} \left[Q + X_5^{-1} - \lambda_n (X_5) X_5^{-2} + \lambda_n (X_5) \left(X_5^{-1} A^T S_{13_{i-1}} A X_5^{-1} + S_{13_{i-1}} \right) \right] \right\}^{1/2} \qquad (3.229)$$

iterasyonuyla hesaplanır. Bu durumda S_{13_i} ler de CARE (1.26) nın çözümü için üst sınırlardır.

İspat. Algoritma 3.1.13 ün ispatı, Algoritma 3.1.11 in ispatına benzer olarak yapılabilir.

Teorem 3.1.23. X_6, (3.193) şartını sağlayan pozitif tanımlı bir matris olmak üzere M_6 matrisi (3.194) ile verilsin. O halde pozitif ϕ_6 sabiti

$$\phi_6 \equiv \frac{\lambda_n\left(X_6\right)\left(1+s_1^2\left(AX_6^{-1}\right)\right)+\left\{\begin{array}{l}\left[\lambda_n\left(X_6\right)\left(1+s_1^2\left(AX_6^{-1}\right)\right)\right]^2 \\ +4\lambda_1\left[Q+A^T\left(X_6^{-1}-\lambda_n\left(X_6\right)X_6^{-2}\right)A\right]\lambda_n\left(M_6\right)\end{array}\right\}^{1/2}}{2\lambda_n\left(M_6\right)} \tag{3.230}$$

ile verilmek üzere, CARE (1.26) nın pozitif yarı tanımlı P çözüm matrisi

$$\begin{aligned} P &\le \left\{\frac{1}{\lambda_n\left(M_6\right)}\left[Q+A^T\left(X_6^{-1}-\lambda_n\left(X_6\right)X_6^{-2}\right)A+\lambda_n\left(X_6\right)\phi_6\left(X_6^{-1}A^TAX_6^{-1}+I\right)\right]\right\}^{1/2} \\ &\equiv P_{u23} \end{aligned} \tag{3.231}$$

üst sınırına sahiptir.

İspat. Öncelikle $X_6 > 0$ olmak üzere (3.199) eşitsizliğini ele alalım. Buna göre (3.204) ile verilen blok matrisin 1. sütunu sağdan $X_6^{-1}A$ ve 1. satırı soldan $A^TX_6^{-1}$ ile çarpıldığında

$$\begin{pmatrix} A^TX_6^{-1}PX_6^{-1}A & A^TX_6^{-1}P \\ PX_6^{-1}A & P \end{pmatrix} \ge 0 \tag{3.232}$$

elde edilir ve (3.232) matrisine Teorem 1.1.2.12 nin uygulanması

$$A^TX_6^{-1}P + PX_6^{-1}A \le A^TX_6^{-1}PX_6^{-1}A + P \tag{3.233}$$

olduğunu gösterir. Bu takdirde (3.199) ve (3.233) eşitsizlikleri dikkate alınarak

$$PM_6P \le Q + A^T\left(X_6^{-1}-\lambda_n\left(X_6\right)X_6^{-2}\right)A+\lambda_n\left(X_6\right)\left(A^TX_6^{-1}PX_6^{-1}A+P\right) \tag{3.234}$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.1.20 nin ispatına benzer işlemlerle devam edildiğinde CARE (1.26) nın çözümü için (3.231) üst sınır bulunur.

(3.231) ile verilen üst sınıra bağlı olarak aşağıdaki iteratif algoritmayı verebiliriz:

Algoritma 3.1.14.

Adım 1. P_{u23}, (3.231) ile verilen üst sınır olamk üzere $S_{14_0} \equiv P_{u23}$ olsun.

Adım 2. $i = 1, 2, \ldots$ için

$$S_{14_i} = \left\{\frac{1}{\lambda_n\left(M_6\right)}\left[\begin{array}{l}Q+A^T\left(X_6^{-1}-\lambda_n\left(X_6\right)X_6^{-2}\right)A \\ +\lambda_n\left(X_6\right)\left(A^TX_6^{-1}S_{14_{i-1}}X_6^{-1}A+S_{14_{i-1}}\right)\end{array}\right]\right\}^{1/2} \tag{3.235}$$

iterasyonuyla hesaplanır. Bu takdirde S_{14_i} ler de CARE (1.26) nın çözümü için üst sınırlardır.

İspat. Algoritma 3.1.14 ün ispatı, Algoritma 3.1.11 in ispatına benzer olarak yapılabilir.

Sonuç 3.1.4. P , CARE (1.26) nın pozitif yarı tanımlı çözüm matrisi ise $j=1,2,...,23$ olmak üzere P_{uj} , bu bölümde verilen üst sınırlar olmak üzere aşağıdaki öz değer sınırları elde edilebilir:

$$\begin{aligned} &\lambda_i(P) \le \lambda_i(P_{uj}), \\ &\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(P) \le \sum_{i=1}^{k}\lambda_i(P_{uj}), 1 \le i \le k \le n, \\ &iz(P) \le iz(P_{uj}), \\ &\det(P) \le \det(P_{uj}) \end{aligned} \tag{3.236}$$

3.2. Sayısal Örnekler

Bu kısımda, bölüm 3.1 de, CARE (1.26) nın pozitif yarı tanımlı çözüm matrisi için elde edilen üst sınırları, literatürdeki bazı sınırlarla karşılaştırmak ve elde ettiğimiz sonuçların etkinliğini göstermek amacıyla sayısal örnekler verilmiştir.

Örnek 3.2.1. (Lee, 2003a)

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 \end{pmatrix},\ BB^T=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix} 3 & 0.2 \\ 0.2 & 3 \end{pmatrix}$$

olmak üzere CARE (1.26) yı ele alalım. Bu durumda CARE (1.26) nın pozitif yarı tanımlı tek çözümü olan P matrisi için

$$P_{tam}=\begin{pmatrix} 0.3967 & 0.0936 \\ 0.0936 & 1.9603 \end{pmatrix},\ iz(P)=2.3570,\ \det(P)=0.7689$$

olur.

$\alpha=\beta=\gamma=1$ için Teorem 3.1.1 de P_{u1} ile verilen üst sınırdan

$$P \le \begin{pmatrix} 2.8851 & -0.0459 \\ -0.0459 & 3.3512 \end{pmatrix}=P_{u1},\ \det(P) \le 9.6664,\ iz(P) \le 6.2363$$

elde edilir.

P_{u1} sınırı için verilen Algoritma 3.1.1 uygulanarak 5 iterasyon sonucunda

$$P \le \begin{pmatrix} 0.7701 & 0.0867 \\ 0.0867 & 2.6194 \end{pmatrix}=S_1,\ \det(P) \le 2.0096,\ iz(P) \le 3.3895$$

elde edilir.

$\alpha=\gamma=1,\beta=2$ için P_{u1} ile verilen sınırdan

$$P \le \begin{pmatrix} 1.6546 & 0.0348 \\ 0.0348 & 2.6339 \end{pmatrix}=P_{u11},\ \det(P) \le 4.3568,\ iz(P) \le 4.2885$$

elde edilir ve bu durumda Algoritma 3.1.1 in 5 kez uygulanması sonucunda

$$P \le \begin{pmatrix} 0.4756 & 0.1293 \\ 0.1293 & 2.5909 \end{pmatrix} \equiv S_1,\ \det(P) \le 1.2155,\ iz(P) \le 3.0665$$

olur.

$\alpha = \beta = \gamma = 1$ için, Teorem 3.1.2 ile verilen P_{u2} üst sınırından

$$P \le \begin{pmatrix} 1.7162 & -0.0919 \\ -0.0919 & 2.6484 \end{pmatrix} = P_{u2}, \det(P) \le 4.5367, tr(P) \le 4.3646$$

olup, Algoritma 3.1.2 den 5 iterasyon sonucunda

$$P \le \begin{pmatrix} 0.4177 & 0.1369 \\ 0.1369 & 2.5865 \end{pmatrix} = S_2,\ \det(P) \le 1.0616,\ iz(P) \le 3.0042$$

elde edilir.

$\alpha = \beta = 1$ ve $\delta = 0.5$ olmak üzere Teorem 3.1.3 de verilen P_{u3} sınırından

$$P \le \begin{pmatrix} 2.3009 & -0.0689 \\ -0.0689 & 2.9998 \end{pmatrix} \equiv P_{u3}, \det(P) \le 6.8974, iz(P) \le 5.4007$$

olup, buradan Algoritma 3.1.3 den 5 iterasyon sonucunda

$$P \le \begin{pmatrix} 0.4822 & 0.1269 \\ 0.1269 & 2.5885 \end{pmatrix} \equiv S_3, \det(P) \le 1.2320, iz(P) \le 3.0707$$

elde edilir.

$\alpha_1 = 2,\ \beta_1 = 1$ olmak üzere Teorem 3.1.4 de verilen P_{u4} sınırından

$$P \le \begin{pmatrix} 1.7162 & -0.0919 \\ -0.0919 & 2.6484 \end{pmatrix} = P_{u4}, \det(P) \le 4.5367, tr(P) \le 4.3646$$

olur ve bu durum için Algoritma 3.1.4 den 5 iterasyon sonucunda

$$P \le \begin{pmatrix} 0.4177 & 0.1369 \\ 0.1369 & 2.5865 \end{pmatrix} = S_5,\ \det(P) \le 1.0616,\ iz(P) \le 3.0042$$

elde edilir.

Teorem 3.1.8 ve Teorem 3.1.9 da $\alpha_2 = \beta_2 = \alpha_4 = \beta_4 = 2$ ve $m = 1$ olsun. Bu durumda Teorem 3.1.5 ve Teorem 3.1.6 da $m = \frac{1}{2}$ alındığında, Teorem 3.1.8 ve Teorem 3.1.9 ile verilen sınırlar için $P_{u5} \equiv P_{u8}$ ve $P_{u6} \equiv P_{u9}$ olduğunu görmek kolaydır. Bu durumda P_{u5}, P_{u6}, P_{u8} ve P_{u9} sınırlarından ve Algoritma 3.1.5 ve Algoritma 3.1.6 dan 5 iterasyon sonucunda

$$P_{u5} = P_{u8} = \begin{bmatrix} 2.0371 & 0 \\ 0 & 2.4121 \end{bmatrix}, \det(P) \le 4.9136, iz(P) \le 4.4492,$$

$$S_5 = \begin{pmatrix} 0.6854 & 0.0578 \\ 0.0578 & 1.9803 \end{pmatrix}, \det(P) \le 1.3539, iz(P) \le 2.6657$$

ve

$$P_{u6} = P_{u9} = \begin{bmatrix} 1.2251 & 0 \\ 0 & 1.9750 \end{bmatrix}, \det(P) \le 2.4195, iz(P) \le 3.2001,$$

$$S_6 = \begin{pmatrix} 0.503 & 0.0733 \\ 0.0733 & 1.9648 \end{pmatrix}, \det(P) \le 0.9829, iz(P) \le 2.4678$$

elde edilir.

$m_1 = 0.1$ olmak üzere Teorem 3.1.7 de verilen P_{u7} sınırı ise

$$P_{u7} = \begin{pmatrix} 1.5989 & 0 \\ 0 & 2.1830 \end{pmatrix}, \det(P) \le 3.4903, iz(P) \le 3.7819$$

değerini verir.

Şimdi bu örnek için literatürde bulunan bazı sonuçları ele alalım:

(Chen ve Lee, 2009b) çalışmasında Sonuç 2.1 ile verilen üst sınır

$$P \le \begin{pmatrix} 3.2278 & -0.2618 \\ -0.2618 & 2.3232 \end{pmatrix}, \ \det(P) \le 7.4302, \ iz(P) \le 5.5510$$

değerlerini verir.

Aynı zamanda $K = \begin{bmatrix} -1 & -0.25 \\ -0.1 & -2 \end{bmatrix}$ ve $M = I$ olmak üzere (Davies ve ark., 2008a) çalışmasında verilen iki sınır aşağıdaki değerleri vermektedir:

$$P \le \begin{pmatrix} 2.4579 & 0.0387 \\ 0.0387 & 2.6609 \end{pmatrix}, \ \det(P) \le 6.5387, \ iz(P) \le 5.1188,$$

$$P \le \begin{bmatrix} 1.2701 & -0.0162 \\ -0.0162 & 2.0728 \end{bmatrix}, \ \det(P) \le 2.6324, \ iz(P) \le 3.3429$$

(Lee, 1987) ve (Lee, 1997b) çalışmalarında verilen üst sınırlar için $\beta = \frac{1}{2.1}, \kappa = \frac{1}{3.2}$ olmak üzere

$$P \le \begin{pmatrix} 2.5430 & 0.0410 \\ 0.0410 & 2.5430 \end{pmatrix}, \ \det(P) \le 6.4651, \ iz(P) \le 5.086$$

ve

$$P \le \begin{pmatrix} 6.4396 & -0.6175 \\ -0.6175 & 2.5512 \end{pmatrix},\ \det(P) \le 16.0474,\ \mathrm{iz}(P) \le 8.9908$$

elde edilir.

BB^T matrisi tersinir olduğundan $\overline{R}_1 = \left(BB^T - 0.95I\right)^{-1}$ olmak üzere (Lee, 2003a) çalışmasında verilen ilk sınır için

$$P \le \begin{pmatrix} 2.5444 & 0.0249 \\ 0.0249 & 2.0213 \end{pmatrix}, \det(P) \le 5.1423, tr(P) \le 4.5657$$

$$P \le \begin{pmatrix} 2.5444 & 0.0249 \\ 0.0249 & 2.0213 \end{pmatrix},\ \det(P) \le 5.1423,\ iz(P) \le 4.5657$$

ve $\overline{R}_1 = 2.1I$ ve $\overline{R}_1 = 3.2\left(AA^T\right)^{-1}$ olmak üzere ikinci sınır için

$$P \le \begin{pmatrix} 6.4396 & -0.6175 \\ -0.6175 & 2.5512 \end{pmatrix},\ \det(P) \le 16.0474,\ iz(P) \le 8.9908,$$

$$P \le \begin{pmatrix} 2.5430 & 0.0410 \\ 0.0410 & 2.5430 \end{pmatrix},\ \det(P) \le 6.4651,\ iz(P) \le 5.086$$

bulunur.

Ayrıca CARE (1.26) nın çözüm matrisinin izi için (Komaroff, 1994b) ve (Liu ve Zhang, 2011) çalışmalarında verilen iz sınırlardan

$iz(P) \le 3.9497$ ve $iz(P) \le 3.2853$

olduğu görülür.

$\varepsilon = 0.014$ olmak üzere (Zhang ve Liu, 2010) çalışmasında verilen üst sınır için ise

$$P \le \begin{pmatrix} 6.8384 & 0.0002 \\ 0.0002 & 6.8385 \end{pmatrix},\ \det(P) \le 46.7647,\ iz(P) \le 13.6770$$

dir.

$\alpha = \gamma = 2$ için (Zhang ve ark., 2013) çalışmasında verilen P_{ua} ve P_{ub} sınırlarından

$$P_{ua} = \begin{bmatrix} 3.0162 & -0.0068 \\ -0.0068 & 2.8730 \end{bmatrix},\ \det(P) \le 8.6655,\ iz(P) \le 5.8892,$$

$$P_{ub} = \begin{bmatrix} 2.2584 & -0.0137 \\ -0.0137 & 1.9721 \end{bmatrix},\ \det(P) \le 4.4536,\ iz(P) \le 4.2305$$

elde edilir.

Aşağıdaki tablolar, bu çalışmada elde edilen ve literatürde bulunan bazı sonuçların karşılaştırmalarını özetlemektedir:

Metot	**Determinant ve iz sınırları**	
Teorem 3.1.1 $(\alpha=\beta=\gamma=1)$	$\det(P)\le 9.6664$	$iz(P)\le 6.2363$
Algoritma 3.1.1$(\alpha=\beta=\gamma=1)$	$\det(P)\le 2.0096$	$iz(P)\le 3.3895$
Teorem 3.1.1 $(\alpha=\gamma=1,\beta=2)$	$\det(P)\le 4.3568$	$iz(P)\le 4.2885$
Algoritma 3.1.1 $(\alpha=\gamma=1,\beta=2)$	$\det(P)\le 1.2155$	$iz(P)\le 3.0665$
Teorem 3.1.2 $(\alpha=\beta=\gamma=1)$	$\det(P)\le 4.5367$	$iz(P)\le 4.3646$
Algoritma 3.1.2 $(\alpha=\beta=\gamma=1)$	$\det(P)\le 1.0616$	$iz(P)\le 3.0042$
Teorem 3.1.3 $(\alpha=\beta=1,\delta=0.5)$	$\det(P)\le 6.8974$	$iz(P)\le 5.4007$
Algoritma 3.1.3 $(\alpha=\beta=1,\delta=0.5)$	$\det(P)\le 1.2320$	$iz(P)\le 3.0707$
Teorem 3.1.4 $(\alpha_1=2,\beta_1=1)$	$\det(P)\le 4.5362$	$iz(P)\le 4.3644$
Algoritma 3.4 $(\alpha_1=2,\beta_1=1)$	$\det(P)\le 1.0616$	$iz(P)\le 3.0042$
Teorem 3.1.5 $(\alpha=\beta=2,m=1/2)$	$\det(P)\le 4.9136$	$iz(P)\le 4.4492$
Algoritma 3.1.5$(\alpha=\beta=2,m=1/2)$	$\det(P)\le 1.3539$	$iz(P)\le 2.6657$
Teorem 3.1.6 $(\alpha=\beta=2,m=1/2)$	$\det(P)\le 2.4195$	$iz(P)\le 3.2001$
Algoritma 3.1.6 $(\alpha=\beta=2,m=1/2)$	$\det(P)\le 0.9829$	$iz(P)\le 2.4678$
Teorem 3.1.7 $(m_1=0.1)$	$\det(P)\le 3.4903$	$iz(P)\le 3.7819$
(Chen ve Lee, 2009b)	$\det(P)\le 7.4302$	$iz(P)\le 5.5510$
(Davies ve ark., 2008a)	$\det(P)\le 6.5387$	$iz(P)\le 5.1188$
(Davies ve ark., 2008a)	$\det(P)\le 2.6324$	$iz(P)\le 3.3429$
(Komaroff, 1994b)	-	$iz(P)\le 3.9497$
(Lee, 1987)	$\det(P)\le 6.4651$	$iz(P)\le 5.086$
(Lee, 1997b)	$\det(P)\le 16.047$	$iz(P)\le 8.9908$
(Lee, 2003a) $\left(\overline{R}_1=\left(BB^T-0.95I\right)^{-1}\right)$	$\det(P)\le 5.1423$	$iz(P)\le 4.5657$
(Lee, 2003a) $\left(\overline{R}_1=2.1I\right)$	$\det(P)\le 16.047$	$iz(P)\le 8.9908$

(Lee, 2003a) $\left(\overline{R}_1 = 3.2\left(AA^T\right)^{-1}\right)$	$\det(P) \le 6.4651$	$iz(P) \le 5.0860$
(Liu ve Zhang, 2011)	-	$iz(P) \le 3.2853$
(Zhang ve Liu, 2010)	$\det(P) \le 46.764$	$iz(P) \le 13.6770$
(Zhang ve ark., 2013)	$\det(P) \le 8.6655$	$iz(P) \le 5.8892$
(Zhang ve ark., 2013)	$\det(P) \le 4.4536$	$iz(P) \le 4.2305$

$\eta_1 = 2.01917$ olmak üzere Teorem 3.1.12-Teorem 3.1.19 da verilen üst sınırların X_i matrislerinin farklı seçimlerine göre verdiği değerleri göstermek amacıyla aşağıdaki tabloyu verelim:

Metot	**Matris sınırı**
Teorem 3.1.12	
$X_1 = I$	$P \le \begin{pmatrix} 7.1170 & 0.0134 \\ 0.0134 & 7.1170 \end{pmatrix} = P_{u12}$
$X_1 = 0.01I$	$P \le \begin{pmatrix} 3.9562 & 0.0252 \\ 0.0252 & 3.9562 \end{pmatrix} = P_{u12}$
$X_1 = 0.0001I$	$P \le \begin{pmatrix} 3.8729 & 0.0258 \\ 0.0258 & 3.8729 \end{pmatrix} = P_{u12}$
Teorem 3.1.13	
$X_2 = \begin{pmatrix} 2.5 & 0.3 \\ 0.3 & 2.5 \end{pmatrix}$	$P \le \begin{pmatrix} 25.459 & 0.0089 \\ 0.0089 & 25.459 \end{pmatrix} = P_{u13}$
$X_2 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.01 \\ 0.01 & 0.1 \end{pmatrix}$	$P \le \begin{pmatrix} 8.0239 & -0.0644 \\ -0.0644 & 8.0239 \end{pmatrix} = P_{u13}$
$X_2 = I$	$P \le \begin{pmatrix} 6.5558 & 0.0152 \\ 0.0152 & 6.5558 \end{pmatrix} = P_{u13}$
Teorem 3.1.14	
$X_3 = I$	$P \le \begin{pmatrix} 3.1117 & 0.029 \\ 0.029 & 3.7791 \end{pmatrix} = P_{u14}$
$X_3 = \begin{pmatrix} 2.5 & 0.1 \\ 0.1 & 2.5 \end{pmatrix}$	$P \le \begin{pmatrix} 2.7558 & 0.0136 \\ 0.0136 & 2.9432 \end{pmatrix} = P_{u14}$

$X_3 = 1000I$	$P \le \begin{pmatrix} 2.0218 & 0 \\ 0 & 2.0218 \end{pmatrix} = P_{u14}$
Teorem 3.1.15	
$X_4 = \begin{pmatrix} 2.5 & 0.1 \\ 0.1 & 2.5 \end{pmatrix}$	$P \le \begin{pmatrix} 7.8107 & 0.0131 \\ 0.0131 & 7.7989 \end{pmatrix} = P_{u15}$
$X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.1 & 1 \end{pmatrix}$	$P \le \begin{pmatrix} 6.7442 & 0.0142 \\ 0.0142 & 6.7370 \end{pmatrix} = P_{u15}$
$X_4 = I$	$P \le \begin{pmatrix} 6.5558 & 0.0152 \\ 0.0152 & 6.5558 \end{pmatrix} = P_{u15}$
Teorem 3.1.16	
$X_1 = I$	$P \le \begin{pmatrix} 6.3241 & 0 \\ 0 & 6.3241 \end{pmatrix} = P_{u16}$
$X_1 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.02 \\ 0.02 & 0.2 \end{pmatrix}$	$P \le \begin{pmatrix} 3.7289 & 0 \\ 0 & 3.7289 \end{pmatrix} = P_{u16}$
$X_1 = \begin{pmatrix} 0.16 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.16 \end{pmatrix}$	$P \le \begin{pmatrix} 3.2545 & 0 \\ 0 & 3.2545 \end{pmatrix} = P_{u16}$
Teorem 3.1.17	
$X_3 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.01 \\ 0.01 & 0.1 \end{pmatrix}$	$P \le \begin{pmatrix} 5.0617 & -0.0967 \\ -0.0967 & 3.8647 \end{pmatrix} = P_{u17}$
$X_3 = I$	$P \le \begin{pmatrix} 2.3816 & 0.0209 \\ 0.0209 & 2.3816 \end{pmatrix} = P_{u17}$
$X_3 = 3.5I$	$P \le \begin{pmatrix} 2.0126 & 0.0110 \\ 0.0110 & 2.0126 \end{pmatrix} = P_{u17}$
Teorem 3.1.18	
$X_5 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.01 \\ 0.01 & 0.1 \end{pmatrix}$	$P \le \begin{pmatrix} 6.7273 & 0.0763 \\ 0.0763 & 6.7273 \end{pmatrix} = P_{u18}$
$X_5 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}$	$P \le \begin{pmatrix} 6.7080 & 0.0452 \\ 0.0452 & 6.7080 \end{pmatrix} = P_{u18}$
$X_5 = 0.1I$	$P \le \begin{pmatrix} 6.5558 & 0.0152 \\ 0.0152 & 6.5558 \end{pmatrix} = P_{u18}$
Teorem 3.1.19	

$X_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.9 \end{pmatrix}$	$P \le \begin{pmatrix} 13.931 & -0.0247 \\ -0.0247 & 13.769 \end{pmatrix} = P_{u19}$
$X_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}$	$P \le \begin{pmatrix} 6.6692 & 0.0037 \\ 0.0037 & 6.6032 \end{pmatrix} = P_{u19}$
$X_6 = 0.1I$	$P \le \begin{pmatrix} 6.5558 & 0.0152 \\ 0.0152 & 6.5558 \end{pmatrix} = P_{u19}$

Son olarak $\eta_1 = 2.01917$ olmak üzere Teorem 3.1.20-Teorem 3.1.23 de verilen sınırların keyfi seçilen X_i matrislerine göre verdiği ve 5 iterasyon sonucunda algoritmalardan elde edilen değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Metot	**Matris sınırı**	**Algoritma sonucu**
Teorem 3.1.20		
$X_1 = I$	$P \le \begin{pmatrix} 59.084 & 2.3699 \\ 2.3699 & 88.404 \end{pmatrix} = P_{u20}$	$S_{11} = \begin{pmatrix} 39.392 & 2.9526 \\ 2.9526 & 88.362 \end{pmatrix}$
$X_1 = 0.15I$	$P \le \begin{pmatrix} 19.517 & -2.3655 \\ -2.3655 & 20.451 \end{pmatrix} = P_{u20}$	$S_{11} = \begin{pmatrix} 17.417 & -1.3873 \\ -1.3873 & 18.018 \end{pmatrix}$
Teorem 3.1.21		
$X_3 = I$	$P \le \begin{pmatrix} 3.0428 & -0.2345 \\ -0.2345 & 2.3897 \end{pmatrix} = P_{u21}$	$S_{12} = \begin{pmatrix} 2.9856 & -0.2205 \\ -0.2205 & 2.0557 \end{pmatrix}$
$X_3 = 2.1I$	$P \le \begin{pmatrix} 1.6130 & -0.0002 \\ -0.0002 & 2.0319 \end{pmatrix} = P_{u21}$	$S_{12} = \begin{pmatrix} 1.4608 & 0.0121 \\ 0.0121 & 2.0150 \end{pmatrix}$
Teorem 3.1.22		
$X_5 = 0.4I$	$P \le \begin{pmatrix} 23.143 & -3.1696 \\ -3.1696 & 4.4252 \end{pmatrix} = P_{u22}$	$S_{13} = \begin{pmatrix} 22.797 & -3.2393 \\ -3.2393 & 2.5316 \end{pmatrix}$
$X_5 = \begin{pmatrix} 0.43 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$P \le \begin{pmatrix} 6.7458 & -2.8474 \\ -2.8474 & 4.9356 \end{pmatrix} = P_{u22}$	$S_{13} = \begin{pmatrix} 5.7659 & -2.0518 \\ -2.0518 & 3.5099 \end{pmatrix}$
Teorem 3.1.23		
$X_6 = 0.9I$	$P \le \begin{pmatrix} 11.249 & -1.2280 \\ -1.2280 & 3.9371 \end{pmatrix} = P_{u23}$	$S_{14} = \begin{pmatrix} 11.091 & -1.3706 \\ 01.3706 & 2.5028 \end{pmatrix}$
$X_6 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$	$P \le \begin{pmatrix} 2.5934 & 0.0472 \\ 0.0472 & 2.1132 \end{pmatrix} = P_{u23}$	$S_{14} = \begin{pmatrix} 2.5716 & 0.0168 \\ 0.0168 & 2.0251 \end{pmatrix}$

Örnek 3.2.2. (Davies ve ark., 2007a)

$A=\begin{pmatrix}0.5 & 0\\ 1 & -2.5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ ve $Q=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

olmak üzere CARE (1.26) yı ele alalım. Bu durumda CARE (1.26) nın pozitif yarı tanımlı tek çözümü olan P matrisi

$$P_{tam}=\begin{pmatrix}0.6989 & 0.1228\\ 0.1228 & 0.5879\end{pmatrix}$$

şeklindedir. B matrisi singüler olduğundan bu örnek için Teorem 3.1.1-Teorem 3.1.4 de verilen sınırlar hesaplanamaz.

$\alpha=\beta=1$ ve $m=1/2$ için Teorem 3.1.5 ve Teorem 3.1.6 ile verilen sınırlardan ve Algoritma 3.1.5 ve Algoritma 3.1.6 nın 5 kez uygulanması sonucunda

$$P_{u5}=\begin{pmatrix}1.0704 & 0.068\\ 0.068 & 1.0832\end{pmatrix},\ S_5=\begin{pmatrix}0.8173 & 0.1865\\ 0.1865 & 0.8205\end{pmatrix}$$

ve

$$P_{u6}=\begin{pmatrix}0.8624 & 0.136\\ 0.136 & 0.8879\end{pmatrix},\ S_6=\begin{pmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.2 & 0.8\end{pmatrix}$$

elde edilir. Ayrıca Teorem 3.1.8 ve Teorem 3.1.9 da $\alpha=\beta=m=1$ seçildiğinde yukarıda P_{u5} ve P_{u6} ile verilen sonuçlar elde edilir.

B matrisi singüler olduğundan bu örnek için Teorem 3.1.13, Teorem 3.1.15, Teorem 3.1.18, Teorem 3.19, Teorem 3.1.22 ve Teorem 3.1.23 de verilen sınırlar hesaplanamamaktadır. Teorem 3.1.12, Teorem 3.1.16, Teorem 3.1.17, Teorem 3.1.20 ve Teorem 3.1.21 ile verilen sınırlar ise X_i matrislerinin farklı seçimlerine göre aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Metot	**Matris sınırı**
Teorem 3.1.5 $\alpha=\beta=1, m=1/2$	$P_{u5}=\begin{pmatrix}1.0704 & 0.068\\ 0.068 & 1.0832\end{pmatrix},\ S_5=\begin{pmatrix}0.8173 & 0.1865\\ 0.1865 & 0.8205\end{pmatrix}$
Teorem 3.1.6 $\alpha=\beta=1, m=1/2$	$P_{u6}=\begin{pmatrix}0.8624 & 0.136\\ 0.136 & 0.8879\end{pmatrix},\ S_6=\begin{pmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.2 & 0.8\end{pmatrix}$
Teorem 3.1.12	
$X_1=I$	$P_{u12}=\begin{pmatrix}1.5439 & 0\\ 0 & 1.6921\end{pmatrix}$

$X_1 = 0.5I$	$P_{u12} = \begin{pmatrix} 1.4711 & 0 \\ 0 & 1.6529 \end{pmatrix}$
Teorem 3.1.14	
$X_3 = I$	$P_{14} = \begin{pmatrix} 3.6013 & -0.0778 \\ -0.0778 & 2.8231 \end{pmatrix}$
$X_3 = 30I$	$P_{14} = \begin{pmatrix} 0.9058 & -0.0003 \\ -0.0003 & 0.9377 \end{pmatrix}$
Teorem 3.1.16	
$X_1 = I$	$P_{u16} = \begin{pmatrix} 1.4415 & 0 \\ 0 & 1.4415 \end{pmatrix}$
$X_1 = 0.5I$	$P_{u16} = \begin{pmatrix} 1.3687 & 0 \\ 0 & 1.3687 \end{pmatrix}$
Teorem 3.1.17	
$X_3 = I$	$P_{u17} = \begin{pmatrix} 2.1838 & 0 \\ 0 & 2.6017 \end{pmatrix}$
$X_3 = 15I$	$P_{u17} = \begin{pmatrix} 0.8757 & 0 \\ 0 & 0.9488 \end{pmatrix}$
Teorem 3.1.20	
$X_1 = I$	$P_{u20} = \begin{pmatrix} 3.3988 & 0.0717 \\ 0.0717 & 1.2974 \end{pmatrix}$, $S_{11} = \begin{pmatrix} 3.1916 & 0.0267 \\ 0.0267 & 0.9988 \end{pmatrix}$
$X_1 = 0.5I$	$P_{u20} = \begin{pmatrix} 3.0956 & -0.4006 \\ -0.4006 & 1.7915 \end{pmatrix}, S_{11} = \begin{pmatrix} 2.5762 & -0.1640 \\ -0.1640 & 1.3689 \end{pmatrix}$
Teorem 3.1.21	
$X_3 = I$	$P_{u21} = \begin{pmatrix} 4.3299 & -1.3930 \\ -1.3930 & 6.2479 \end{pmatrix}, S_{12} = \begin{pmatrix} 2.8038 & -1.2757 \\ -1.2757 & 5.6711 \end{pmatrix}$
$X_3 = 15I$	$P_{u21} = \begin{pmatrix} 1.2903 & 0.0081 \\ 0.0081 & 1.2704 \end{pmatrix}$, $S_{12} = \begin{pmatrix} 1.2461 & 0.0137 \\ 0.0137 & 1.2187 \end{pmatrix}$

4. AYRIK CEBİRSEL RİCCATİ MATRİS DENKLEMİNİN ÇÖZÜM MATRİSİ İÇİN ÜST SINIRLAR

Bu bölümde, birinci bölümde verilen teoremler ve bazı lineer cebir teknikleri kullanılarak, ayrık cebirsel Riccati matris denkleminin (DARE (1.34)) çözüm matrisi için üst matris sınırları ve bu sınırların özel durumlarını içeren bazı sonuçlar verilmiştir. Ayrıca, DARE (1.34) için elde edilen bu sınırları ele alarak, gerçek değere daha yakın sınırlar elde etmek için iteratif algoritmalar geliştirilmiştir.

Bahsedilen sınırları türetmek için, son yıllarda (Davies ve ark., 2008b) çalışmasında da kullanılan, (A,B) çiftinin kararlı hale getirilebilir, dolayısıyla (A,B) çifti kararlı hale getirilebilir ise, $A+BK$ kararlı olacak şekilde her zaman bir K matrisi vardır düşüncesi kullanılmıştır. Bu düşünce kullanılarak blok matrisler yardımıyla temel sonuçlar verilmiştir.

4.1. Temel Sonuçlar

Teorem 4.1.1. P matrisi, DARE (1.34) ün pozitif yarı tanımlı çözümü olsun. $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A+BK$ kararlı olacak şekilde seçilen bir matris ve $s_1^2(A+BK)<1$ olmak üzere,

$$P \le \frac{\lambda_1\left[(A+BK)^T(Q+K^TK)(A+BK)\right]}{1-s_1^2(A+BK)}I+Q+K^TK \equiv P_{U1} \tag{4.1}$$

dir.

İspat. Öncelikle, Teorem 1.1.2.11 ışığında, pozitif yarı tanımlı N matrisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$N=\begin{pmatrix} I+B^TPB & B^TPA \\ A^TPB & A^TPB\left(I+B^TPB\right)^{-1}B^TPA \end{pmatrix} \ge 0 \tag{4.2}$$

Bu durumda $K \in \mathrm{R}^{m\times n}$ için $L=\begin{pmatrix} K^T & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlanan L matrisini ele alarak,

$$LNL^T=\begin{pmatrix} K^TK+K^TB^TPBK & K^TB^TPA \\ A^TPBK & A^TPB\left(I+B^TPB\right)^{-1}B^TPA \end{pmatrix} \ge 0 \tag{4.3}$$

blok matrisini elde edebiliriz ve (1.19) eşitliğini kullanarak pozitif yarı tanımlı D matrisini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$D \equiv K^TK+K^TB^TPBK+K^TB^TPA+A^TPBK+A^TPB\left(I+B^TPB\right)^{-1}B^TPA \tag{4.4}$$

Buna göre

$$\left(A+BK\right)^T P\left(A+BK\right)=A^TPA+A^TPBK+K^TB^TPA+K^TB^TPBK \tag{4.5}$$

matris özdeşliğini göz önüne aldığımızda, (4.4) den

$$D\equiv K^TK+\left(A+BK\right)^T P\left(A+BK\right)-A^TPA+A^TPB\left(I+B^TPB\right)^{-1}B^TPA \tag{4.6}$$

olduğu görülür. DARE (1.34) ve (4.6) eşitliğini birlikte ele aldığımızda

$$D-Q-K^TK=-P+\left(A+BK\right)^T P\left(A+BK\right) \tag{4.7}$$

eşitliğini yazabilir ve κ_1 sabiti ve N_1 matrisi

$$\kappa_1\equiv\frac{\lambda_1\left(\left(A+BK\right)^T\left(Q+K^TK\right)\left(A+BK\right)\right)}{1-s_1^2\left(A+BK\right)}, \tag{4.8}$$

$$N_1=\left(A+BK\right)^T\left(\kappa_1I+Q+K^TK\right)\left(A+BK\right)-\kappa_1I \tag{4.9}$$

şeklinde tanımlanmak üzere, (4.8) ve (4.9) ışığında (4.7) nin her iki tarafına κ_1I+Q+K^TK matrisini ilave ettiğimizde

$$D-N_1=\left(\kappa_1I+Q+K^TK-P\right)-\left(A+BK\right)^T\left(\kappa_1I+Q+K^TK-P\right)\left(A+BK\right) \tag{4.10}$$

eşitliğini elde ederiz. Ayrıca N_1 matrisi için sırasıyla Teorem 1.1.1.4, Teorem 1.1.2.7 ve (1.18) eşitsizliğini kullandığımızda

$$\begin{aligned} N_1 &\le \kappa_1 s_1^2\left(A+BK\right)I+\left(A+BK\right)^T\left(Q+K^TK\right)\left(A+BK\right)-\kappa_1I \\ &=\kappa_1\left(s_1^2\left(A+BK\right)-1\right)I+\lambda_1\left(\left(A+BK\right)^T\left(Q+K^TK\right)\left(A+BK\right)\right) \\ &=0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

elde edilir. Böylece son eşitsizlikten $N_1\le 0$ olduğundan, $D-N_1\ge 0$ olduğu açıktır. Buna ek olarak $A+BK$ matrisi kararlı olduğundan, Teorem 1.1.5.6 dan (4.10) denkleminin bir ayrık cebirsel Lyapunov matris denklemi ve bu denklemin pozitif yarı tanımlı tek çözümünün $\left(\kappa_1I+Q+K^TK-P\right)$ olduğunu söyleyebiliriz. Sonuç olarak bu durum, DARE (1.34) ün P çözüm matrisinin (4.1) ile verilen üst sınıra sahip olduğunu gösterir.

Herhangi U ve V matrisleri için

$$\left(I+UV\right)^{-1}=I-U\left(I+VU\right)^{-1}V \tag{4.12}$$

ile verilen matris özdeşiliğini kullanarak DARE (1.34) ün aşağıda verilen farklı bir formunu yazabiliriz:

$$P = A^T\left(I + PBB^T\right)^{-1} PA + Q \tag{4.13}$$

Buna göre DARE (1.34) ün yeni formunu kullanarak, Teorem 4.1.1 den, DARE (1.34) ün çözüm matrisinin gerçek değerine daha yakın değerler veren aşağıdaki iteratif algoritmayı geliştirebiliriz:

Algoritma 4.1.1.

Adım 1. P_{U1}, (4.1) ile verilmek üzere, $T_{1_0} \equiv P_{U1}$ olsun.

Adım 2. $i = 1, 2, ...$ olmak üzere

$$T_{1_i} = A^T\left(I + T_{1_{i-1}} BB^T\right)^{-1} T_{1_{i-1}} A + Q \tag{4.14}$$

iterasyonuyla hesaplanır. Bu takdirde T_{1_i} ler de DARE (1.34) ün çözümü için üst sınırlardır.

İspat. Öncelikle $T_{1_1} \le T_{1_0}$ olduğunu göstermeliyiz. (4.14) de $i = 1$ yazılması

$$T_{1_1} = A^T\left(I + T_{1_0} BB^T\right)^{-1} T_{1_0} A + Q \tag{4.15}$$

olduğunu gösterir. Buna göre (4.15) eşitliği ve bu eşitliğin denk formu ele alınarak ve Teorem 1.1.1.4 kullanılarak

$$\begin{aligned} T_{1_1} &= A^T\left(I + T_{1_0} BB^T\right)^{-1} T_{1_0} A + Q \\ &= A^T T_{1_0} A - A^T T_{1_0} B\left(I + B^T T_{1_0} B\right)^{-1} B^T T_{1_0} A + Q \\ &= A^T T_{1_0} A + K^T K + K^T B^T T_{1_0} BK + K^T B^T T_{1_0} A + A^T T_{1_0} BK - D \\ &\le \left(A + BK\right)^T T_{1_0}\left(A + BK\right) + Q + K^T K \\ &= \lambda_1\left[\left(A + BK\right)^T T_{1_0}\left(A + BK\right)\right] I + Q + K^T K \end{aligned} \tag{4.16}$$

elde edilir ve tekrar Teorem 1.1.1.4, Teorem 1.1.2.7, Teorem 1.1.1.5 ve (1.18) eşitsizliğinin kullanılmasıyla (4.1) den

$$\begin{aligned} \lambda_1\left[\left(A + BK\right)^T T_{1_0}\left(A + BK\right)\right] &= \lambda_1\left[\left(A + BK\right)^T\left(\kappa_1 I + Q + K^T K\right)\left(A + BK\right)\right] \\ &\le \kappa_1 s_1^2\left(A + BK\right) \\ &\quad + \lambda_1\left[\left(A + BK\right)^T\left(Q + K^T K\right)\left(A + BK\right)\right] \\ &= \kappa_1 s_1^2\left(A + BK\right) + \kappa_1\left[1 - s_1^2\left(A + BK\right)\right] \\ &= \kappa_1 \end{aligned} \tag{4.17}$$

olur ki, (4.17) nin (4.16) da yerine yazılmasıyla $T_{1_1} \le \kappa_1 I + Q + K^T K = T_{1_0}$ olduğu görülür. $T_{1_{i-1}} \le T_{1_{i-2}}$ olsun. O halde Teorem 1.1.2.7 nin kullanılmasıyla (4.14) den

$$T_{1_i} = A^T\left(I + T_{1_{i-1}}BB^T\right)^{-1}T_{1_{i-1}}A + Q \le A^T\left(I + T_{1_{i-2}}BB^T\right)^{-1}T_{1_{i-2}}A + Q = T_{1_{i-1}} \tag{4.18}$$

olur ve böylece tümevarım metodundan $T_{1_i} \le T_{1_{i-1}} \le \cdots \le T_{1_1} \le T_{1_0}$ elde edilir.

Sonraki iki Teoremle, bazı varsayımlar altında DARE (1.34) ün çözümü için alternatif üst sınırlar verilmiştir.

Teorem 4.1.2. $K \in \mathrm{R}^{m\times n}$, $A+BK$ kararlı olacak şekilde seçilen bir matris olmak üzere, pozitif $\varepsilon < 1$ sabiti için

$$\left(A+BK\right)^T\left(Q+K^TK\right)\left(A+BK\right) < \varepsilon\left(Q+K^TK\right) \tag{4.19}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, DARE (1.34) ün pozitif yarı tanımlı P çözüm matrisi için

$$P \le \frac{1}{1-\varepsilon}\left(Q+K^TK\right) \equiv P_{U2} \tag{4.20}$$

dir.

İspat. Öncelikle (4.17) denklemini ele alalım. $K \in \mathrm{R}^{m\times n}$, sabit bir matris olmak üzere (4.17) nin her iki tarafına $\frac{1}{1-\varepsilon}\left(Q+K^TK\right)$ matrisi ilave edildiğinde

$$\begin{aligned} &D - Q - K^TK + \frac{1}{1-\varepsilon}\left(Q+K^TK\right) - \frac{1}{1-\varepsilon}\left(A+BK\right)^T\left(Q+K^TK\right)\left(A+BK\right) \\ &= \left(\frac{1}{1-\varepsilon}\left(Q+K^TK\right) - P\right) - \left(A+BK\right)^T\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\left(Q+K^TK\right) - P\right)\left(A+BK\right) \end{aligned} \tag{4.21}$$

olur ve N_2 matrisi,

$$N_2 \equiv \frac{1}{1-\varepsilon}\left(A+BK\right)^T\left(Q+K^TK\right)\left(A+BK\right) - \frac{1}{1-\varepsilon}\left(Q+K^TK\right) + \left(Q+K^TK\right) \tag{4.22}$$

ile tanımlanmak üzere, (4.19) şartı altında

$$\begin{aligned} N_2 &= \frac{1}{1-\varepsilon}\left(A+BK\right)^T\left(Q+K^TK\right)\left(A+BK\right) - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\left(Q+K^TK\right) \\ &= \frac{1}{1-\varepsilon}\left[\left(A+BK\right)^T\left(Q+K^TK\right)\left(A+BK\right) - \varepsilon\left(Q+K^TK\right)\right] \\ &\le 0 \end{aligned} \tag{4.23}$$

elde edilir. Buna göre $N_2 \le 0$ olması $D - N_2 \ge 0$ olduğunu gösterir ve bu durumda Teorem 1.1.5.6 ışığında (4.21) denkleminin bir ayrık cebirsel Lyapunov matris denklemi olduğunu söyleyebiliriz. Böylece (4.21) denkleminin çözümü olan $\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\left(Q+K^TK\right) - P\right)$ matrisi, pozitif yarı tanımlıdır ki, bu, (4.20) üst sınırını verir.

DARE (1.34) ün çözüm matrisi için daha iyi sınırlar elde etmek amacıyla,

aşağıdaki iteratif algoritmayı verebiliriz:

Algoritma 4.1.2.

Adım 1. P_{U2}, (4.20) ile verilmek üzere $T_{2_i} \equiv P_{U2}$ olsun.

Adım 2. $i = 1, 2, \ldots$ olmak üzere

$$T_{2_i} = A^T \left(I + T_{2_{i-1}} BB^T \right)^{-1} T_{2_{i-1}} A + Q \tag{4.24}$$

iterasyonuyla hesaplanır. O halde T_{2_i} ler de DARE (1.34) ün çözümü için üst sınırlardır.

İspat. (4.24) de $i = 1$ alındığında

$$T_{2_1} = A^T \left(I + T_{2_0} BB^T \right)^{-1} T_{2_0} A + Q \tag{4.25}$$

olur. (4.25) ve bu eşitliğin denk formu olan (4.12) eşitliği ele alınarak

$$\begin{aligned} T_{2_1} &= A^T \left(I + T_{2_0} BB^T \right)^{-1} T_{2_0} A + Q \\ &= A^T T_{2_0} A - A^T T_{2_0} B \left(I + B^T T_{2_0} B \right)^{-1} B^T T_{2_0} A + Q \\ &= A^T T_{2_0} A + K^T K + K^T B^T T_{2_0} BK + K^T B^T T_{2_0} A + A^T T_{2_0} BK - D \\ &\le \left(A + BK \right)^T T_{2_0} \left(A + BK \right) + Q + K^T K \\ &= \frac{1}{1-\varepsilon} \left(A + BK \right)^T \left(Q + K^T K \right) \left(A + BK \right) + Q + K^T K. \end{aligned} \tag{4.26}$$

yazılabilir. Buradan (4.19) şartı altında

$$\frac{1}{1-\varepsilon} \left(A + BK \right)^T \left(Q + K^T K \right) \left(A + BK \right) < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \left(Q + K^T K \right) \tag{4.27}$$

olup, (4.26) ve (4.27) eşitsizlikleri birlikte göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} T_{2_1} &\le \frac{1}{1-\varepsilon} \left(A + BK \right)^T \left(Q + K^T K \right) \left(A + BK \right) + Q + K^T K \\ &\le \frac{1}{1-\varepsilon} \left(Q + K^T K \right) = T_{2_0} \end{aligned} \tag{4.28}$$

elde edilir. $T_{2_{i-1}} \le T_{2_{i-2}}$ olsun. Bu takdirde Teorem 1.1.2.7 kullanılarak (4.24) den

$$T_{2_i} = A^T \left(I + T_{2_{i-1}} BB^T \right)^{-1} T_{2_{i-1}} A + Q \le A^T \left(I + T_{2_{i-2}} BB^T \right)^{-1} T_{2_{i-2}} A + Q = T_{2_{i-1}} \tag{4.29}$$

yazılarak tümevarım metodundan $T_{2_i} \le T_{2_{i-1}} \le \cdots \le T_{2_1} \le T_{2_0}$ elde edilir.

Sonuç 4.1.1. $K \in \mathrm{R}^{m \times n}$, $A + BK$ kararlı olacak şekilde seçilen bir matris ve $s_1^2 \left(A + BK \right) < 1$ olmak üzere,

$$\left(A + BK \right)^T \left(Q + K^T K \right) \left(A + BK \right) \le s_1^2 \left(A + BK \right) \left(Q + K^T K \right) \tag{4.30}$$

şartı sağlanıyorsa, DARE (1.34) ün pozitif yarı tanımlı P çözüm matrisi için

$$P \le \frac{1}{1-s_1^2\left(A+BK\right)}\left(Q+K^TK\right) \equiv P_{U2}^* \tag{4.31}$$

dır.

İspat. Teorem 4.1.2 de $\varepsilon = s_1^2\left(A+BK\right)$ alınarak istenen sonuca ulaşılır.

Uyarı 4.1.1. (4.30) şartı altında, (4.31) ile verilen üst sınırın, (Dai ve Bai, 2011) çalışmasında, (2.124) ile verilen sonuçtan daha genel olduğu görülmektedir.

Teorem 4. 1.3. $K \in \mathrm{R}^{m\times n}$, $A+BK$ kararlı olacak şekilde seçilen bir matris olmak üzere, pozitif $\varepsilon < 1$ sabiti için

$$\lambda_1\left(Q+K^TK\right)s_1^2\left(A+BK\right)I \le \varepsilon(Q+K^TK) \tag{4.32}$$

şartı sağlanıyorsa, DARE (1.34) ün pozitif yarı tanımlı P çözüm matrisi

$$P \le \frac{1}{1-\varepsilon}\left(A+BK\right)^T\left(Q+K^TK\right)\left(A+BK\right)+\left(Q+K^TK\right) \equiv P_{U3} \tag{4.33}$$

üst sınırına sahiptir.

İspat. $K \in \mathrm{R}^{m\times n}$ sabit bir matris olmak üzere, N_3 matrisi

$$\begin{aligned} N_3 = {} & \left(A+BK\right)^T\left[\frac{1}{1-\varepsilon}\left(A+BK\right)^T\left(Q+K^TK\right)\left(A+BK\right)+\left(Q+K^TK\right)\right]\left(A+BK\right) \\ & -\frac{1}{1-\varepsilon}\left(A+BK\right)^T\left(Q+K^TK\right)\left(A+BK\right) \end{aligned} \tag{4.34}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda (4.7) eşitliğinin her iki yanına $\frac{1}{1-\varepsilon}\left(A+BK\right)^T\left(Q+K^TK\right)\left(A+BK\right)+\left(Q+K^TK\right)$ matrisi ilave edildiğinde

$$\begin{aligned} D-N_3 = {} & \left[\frac{1}{1-\varepsilon}\left(A+BK\right)^T\left(Q+K^TK\right)\left(A+BK\right)+\left(Q+K^TK\right)-P\right]+\left(Q+K^TK\right) \\ & -\left(A+BK\right)^T\left[\begin{array}{l}\frac{1}{1-\varepsilon}\left(A+BK\right)^T\left(Q+K^TK\right)\left(A+BK\right) \\ +\left(Q+K^TK\right)-P\end{array}\right]\left(A+BK\right) \end{aligned} \tag{4.35}$$

olur. N_3 matrisine Teorem 1.1.1.4, Teorem 1.1.2.7 ve (1.18) eşitsizliği uygulanılarak, (4.32) şartı altında

$$\begin{aligned} N_3 & \le \left[\frac{1}{1-\varepsilon}s_1^2\left(A+BK\right)^T\lambda_1\left(Q+K^TK\right)-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\left(Q+K^TK\right)\right]\left(A+BK\right)^T\left(A+BK\right) \\ & \le 0 \end{aligned} \tag{4.36}$$

elde edilir ve bu durum $D-N_3 \ge 0$ olduğunu gösterir. $A+BK$ matrisi kararlı olduğundan, (4.35) denkleminin bir ayrık cebirsel Lyapunov matris denklemi olduğunu

söyleyebiliriz ve bu denklemin pozitif yarı tanımlı çözümü $\left[\frac{1}{1-\varepsilon}(A+BK)^T\left(Q+K^TK\right)(A+BK)+\left(Q+K^TK\right)-P\right]$ olup, buradan P için (4.33) üst sınırı elde edilir.

(4.33) sınırını ele alarak DARE (1.34) ün çözüm matrisi için daha iyi sınırlar elde etmek amacıyla aşağıdaki algoritmayı verebiliriz:

Algoritma 4.1.3.

Adım 1. P_{U3}, (4.33) ile verilmek üzere $T_{3_i} \equiv P_{U3}$ olsun.

Adım 2. $i=1,2,...$ olmak üzere

$$T_{3_i} = A^T\left(I+T_{3_{i-1}}BB^T\right)^{-1}T_{3_{i-1}}A+Q \tag{4.37}$$

iterasyonuyla hesaplanır. O halde T_{3_i} ler de DARE (1.34) ün çözümü için üst sınırlardır.

İspat. (4.37) eşitliğinde $i=1$ için

$$T_{3_1} = A^T\left(I+T_{3_0}BB^T\right)^{-1}T_{3_0}A+Q \tag{4.38}$$

dir. (4.12) den (4.38) in denk formu yazılarak ve Teorem 1.1.1.4, Teorem 1.1.2.7 ve (1.18) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
T_{3_1} &= A^T\left(I+T_{3_0}BB^T\right)^{-1}T_{3_0}A+Q \\
&= A^TT_{3_0}A-A^TT_{3_0}B\left(I+B^TT_{3_0}B\right)^{-1}B^TT_{3_0}A+Q \\
&= A^TT_{3_0}A+K^TK+K^TB^TT_{3_0}BK+K^TB^TT_{3_0}A+A^TT_{3_0}BK-D \\
&\le (A+BK)^TT_{3_0}(A+BK)+Q+K^TK \\
&\le \frac{1}{1-\varepsilon}\lambda_1\left(Q+K^TK\right)s_1^2(A+BK)(A+BK)^T(A+BK) \\
&\quad +(A+BK)^T\left(Q+K^TK\right)(A+BK)+Q+K^TK \\
&= (A+BK)^T\left[\frac{1}{1-\varepsilon}\lambda_1\left(Q+K^TK\right)s_1^2(A+BK)I+Q+K^TK\right](A+BK) \\
&\quad +Q+K^TK
\end{aligned} \tag{4.39}$$

elde edilir. (4.32) varsayımıyla

$$\frac{1}{1-\varepsilon}\lambda_1\left(Q+K^TK\right)s_1^2(A+BK)I \le \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\left(Q+K^TK\right) \le \frac{1}{1-\varepsilon}\left(Q+K^TK\right) \tag{4.40}$$

yazılır ve bu eşitsizliğin (4.39) ile birlikte ele alınması

$$T_{3_1} \le \frac{1}{1-\varepsilon}(A+BK)^T\left(Q+K^TK\right)(A+BK)+Q+K^TK = T_{3_0} \tag{4.41}$$

olduğunu gösterir. $T_{3_{i-1}} \le T_{3_{i-2}}$ olsun. Bu durumda (4.37) için Teorem 1.1.2.7 nin

kullanılması

$$T_{3_i} = A^T\left(I + T_{3_{i-1}}BB^T\right)^{-1}T_{3_{i-1}}A + Q \le A^T\left(I + T_{3_{i-2}}BB^T\right)^{-1}T_{3_{i-1}}A + Q = T_{3_{i-2}} \tag{4.42}$$

eşitsizliğini verir. Böylece tümevarım metoduyla $T_{3_i} \le T_{3_{i-1}} \le \cdots \le T_{3_1} \le T_{3_0}$ elde edilir.

Teorem 4.1.3 den elde edilen bazı sonuçları verelim:

Sonuç 4.1.2. $K \in \mathrm{R}^{m\times n}$, $A+BK$ kararlı olacak şekilde seçilen bir matris ve $s_1^2(A+BK) < 1$ olmak üzere, $Q + K^TK$ bir skaler matris olsun. Bu takdirde $\kappa_2 \equiv \dfrac{1}{1-s_1^2(A+BK)}$ olmak üzere, DARE (1.34) ün pozitif yarı tanımlı P çözüm matrisi için

$$P \le \kappa_2\left(A+BK\right)^T\left(Q+K^TK\right)\left(A+BK\right) + \left(Q+K^TK\right) \equiv P_{U3a} \tag{4.43}$$

dır.

Sonuç 4.1.3. $K \in \mathrm{R}^{m\times n}$, $A+BK$ kararlı olacak şekilde seçilen bir matris ve $s_1^2(A+BK) \le 0.5$ olmak üzere,

$$\lambda_1\left(Q+K^TK\right)\left(1-s_1^2(A+BK)\right)I \le Q + K^T\mathrm{K} \tag{4.44}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $\kappa_3 \equiv \dfrac{1-s_1^2(A+BK)}{1-2s_1^2(A+BK)}$ olmak üzere, DARE (1.34) ün pozitif yarı tanımlı P çözüm matrisi için

$$P \le \kappa_3\left(A+BK\right)^T\left(Q+K^TK\right)\left(A+BK\right) + \left(Q+K^TK\right) \equiv P_{U3b} \tag{4.45}$$

dir.

Sonuç 4.1.4. $K \in \mathrm{R}^{m\times n}$, $A+BK$ kararlı olacak şekilde seçilen bir matris ve $s_1(A+BK) < 1$ olmak üzere,

$$\lambda_1\left(Q+K^TK\right)s_1(A+BK)I \le Q + K^TK \tag{4.46}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $\kappa_4 \equiv \dfrac{1}{1-s_1(A+BK)}$ olmak üzere, DARE (1.34) ün pozitif yarı tanımlı P çözüm matrisi için

$$P \le \kappa_4\left(A+BK\right)^T\left(Q+K^TK\right)\left(A+BK\right) + \left(Q+K^TK\right) \equiv P_{U3c} \tag{4.47}$$

dir.

Aşağıdaki teoremle, yukarıdaki yöntemi kullanarak, (Davies ve ark., 2008b) çalışmasında verilen sonucun farklı bir ispatını verelim:

Teorem 4.1.4. $K \in \mathrm{R}^{m\times n}$, $A+BK$ kararlı olacak şekilde seçilen bir matris ve $s_1^2(A+BK)<1$ olmak üzere, DARE (1.34) ün pozitif yarı tanımlı P çözüm matrisi

$$P \le \frac{\lambda_1\left(Q+K^TK\right)}{1-s_1^2\left(A+BK\right)}\left(A+BK\right)^T\left(A+BK\right)+Q+K^TK \equiv P_{U4} \tag{4.48}$$

üst sınırına sahiptir.

İspat. Pozitif κ_5 sabiti ve N_4 matrisi sırasıyla

$$\kappa_5 \equiv \frac{\lambda_1\left(Q+K^TK\right)}{1-s_1^2\left(A+BK\right)} \tag{4.49}$$

ve

$$\begin{aligned} N_4 \equiv{}& \left(A+BK\right)^T\left[\kappa_5\left(A+BK\right)^T\left(A+BK\right)+Q+K^TK\right]\left(A+BK\right) \\ &-\kappa_5\left(A+BK\right)^T\left(A+BK\right) \end{aligned} \tag{4.50}$$

ile tanımlanmak üzere, (4.7) nin her iki tarafına $\kappa_5\left(A+BK\right)^T\left(A+BK\right)+Q+K^TK$ matrisini ilave ederek

$$\begin{aligned} D-N_4 ={}& \left[\kappa_5\left(A+BK\right)^T\left(A+BK\right)+Q+K^TK-P\right] \\ &-\left(A+BK\right)^T\left[\kappa_5\left(A+BK\right)^T\left(A+BK\right)+Q+K^TK-P\right]\left(A+BK\right) \end{aligned} \tag{4.51}$$

eşitiliğini yazarız. N_4 matrisi için Teorem 1.1.1.4, Teorem 1.1.2.7 ve (1.18) eşitsizliğini ele alarak

$$\begin{aligned} N_4 &\le \kappa_5 s_1^2\left(A+BK\right)\left(A+BK\right)^T\left(A+BK\right) \\ &\quad +\lambda_1\left(Q+K^TK\right)\left(A+BK\right)^T\left(A+BK\right)-\kappa_5\left(A+BK\right)^T\left(A+BK\right) \\ &\le \left[\kappa_5\left(s_1^2\left(A+BK\right)-1\right)+\lambda_1\left(Q+K^TK\right)\right]\left(A+BK\right)^T\left(A+BK\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.52}$$

elde ederiz. Bu durum $D-N_4 \ge 0$ olduğunu gösterir ve buradan $\left[\kappa_5\left(A+BK\right)^T\left(A+BK\right)+Q+K^TK-P\right]$ matrisinin, (4.51) ile verilen ayrık cebirsel Lyapunov matris denkleminin pozitif yarı tanımlı çözümü olduğunu söyleyebiliriz. Bu takdirde, (4.48), DARE (1.34) ün pozitif yarı tanımlı çözümü için bir üst sınırdır.

Teorem 4.1.4 de elde edilen üst sınıra bağlı olarak verilen algoritma ve bu algoritmanın ispatı (Davies ve ark., 2008b) çalışmasında aşağıdaki gibi verilmiştir:

Algoritma 4.1.4.

Adım 1. P_{U4}, (4.48) ile verilmek üzere $T_{4_0} \equiv P_{U4}$ olsun.

Adım 2. $i=1,2,...$ olmak üzere

$$T_{4_i}=A^T\left(I+T_{4_{i-1}}BB^T\right)^{-1}T_{4_{i-1}}A+Q \tag{4.53}$$

iterasyonuyla hesaplanır. O halde T_{4_i} ler de DARE (1.34) ün çözümü için üst sınırlardır.

İspat. (4.53) de $i=1$ yazıldığında

$$T_{4_1}=A^T\left(I+T_{4_0}BB^T\right)^{-1}T_{4_0}A+Q \tag{4.54}$$

olur ve (4.54) için Teorem 1.1.1.4 ele alınarak

$$T_{4_1}\le\lambda_1\left(T_{4_0}\right)A^T\left[I+\lambda_1\left(T_{4_0}\right)BB^T\right]^{-1}A+Q \tag{4.55}$$

olduğu görülür. (4.55) için (4.12) özdeşliği dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
T_{4_1}&\le\lambda_1\left(T_{4_0}\right)A^T\left[I+\lambda_1\left(T_{4_0}\right)BB^T\right]^{-1}A+Q\\
&=A^T\lambda_1\left(T_{4_0}\right)A-A^T\lambda_1\left(T_{4_0}\right)B\left[I+B^T\lambda_1\left(T_{4_0}\right)B\right]^{-1}B^T\lambda_1\left(T_{4_0}\right)A+Q\\
&=A^T\lambda_1\left(T_{4_0}\right)A-\left[K+\left(I+B^T\lambda_1\left(T_{4_0}\right)B\right)^{-1}B^T\lambda_1\left(T_{4_0}\right)A\right]^T\left(I+B^T\lambda_1\left(T_{4_0}\right)B\right)\\
&\times\left[K+\left(I+B^T\lambda_1\left(T_{4_0}\right)B\right)^{-1}B^T\lambda_1\left(T_{4_0}\right)A\right]+K^TK\\
&+K^TB^T\lambda_1\left(T_{4_0}\right)BK+A^T\lambda_1\left(T_{4_0}\right)BK+KB^T\lambda_1\left(T_{4_0}\right)A\\
&\le\left(A+BK\right)^T\lambda_1\left(T_{4_0}\right)\left(A+BK\right)+\left(Q+K^TK\right)\\
&=\lambda_1\left(T_{4_0}\right)\left(A+BK\right)^T\left(A+BK\right)+\left(Q+K^TK\right)
\end{aligned} \tag{4.56}$$

elde edilir. Ayrıca $s_1^2\left(A+BK\right)<1$ olmak üzere, Teorem 1.1.1.4, Teorem 1.1.2.7 ve (1.18) eşitsizliği kullanılarak (4.48) den

$$\begin{aligned}
\lambda_1\left(T_{4_0}\right)&=\lambda_1\left[\kappa_5\left(A+BK\right)^T\left(A+BK\right)+\left(Q+K^TK\right)\right]\\
&\le\kappa_5 s_1^2\left(A+BK\right)+\lambda_1\left(Q+K^TK\right)\\
&=\kappa_5\left[1-\frac{\lambda_1\left(Q+K^TK\right)}{\kappa_5}\right]+\lambda_1\left(Q+K^TK\right)\\
&=\kappa_5
\end{aligned} \tag{4.57}$$

olup, (4.57), (4.55) de yerine yazılması

$$T_{4_1}\le\kappa_5\left(A+BK\right)^T\left(A+BK\right)+\left(Q+K^TK\right)=T_{4_0} \tag{4.58}$$

olduğunu gösterir. $T_{4_{i-1}}\le T_{4_{i-2}}$ olsun. Böylece (4.53) ile Teorem 1.1.2.7 nin kullanılmasıyla

$$T_{4_i} = A^T\left(I + T_{4_{i-1}} BB^T\right)^{-1} T_{4_{i-1}} A + Q \le A^T\left(I + T_{4_{i-2}} BB^T\right)^{-1} T_{4_{i-2}} A + Q = T_{4_{i-1}} \tag{4.59}$$

olur ki, bu tümevarım metodundan $T_{4_i} \le T_{4_{i-1}} \le \cdots \le T_{4_1} \le T_{4_0}$ olduğunu gösterir.

Yukarıda verilen üst sınırları karşılaştırmak için aşağıdaki kriterleri verebiliriz:

Uyarı 4.1.2. Eğer

$$s_1^2(A+BK)\left(Q+K^TK\right) < \lambda_1\left(Q+K^TK\right)(A+BK)^T(A+BK) \tag{4.60}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa (4.31) üst sınırı, (4.48) üst sınırından daha keskindir. Yukarıdaki eşitsizliği ele aldığımızda gerçekten,

$$\frac{s_1^2(A+BK)}{1-s_1^2(A+BK)}\left(Q+K^TK\right) < \frac{\lambda_1\left(Q+K^TK\right)}{1-s_1^2(A+BK)}(A+BK)^T(A+BK), \tag{4.61}$$

olup, $s_1^2(A+BK)<1$ şartından,

$$\left(\frac{1}{1-s_1^2(A+BK)}-1\right)\left(Q+K^TK\right) < \frac{\lambda_1\left(Q+K^TK\right)}{1-s_1^2(A+BK)}(A+BK)^T(A+BK) \tag{4.62}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde,

$$\lambda_1\left(Q+K^TK\right)(A+BK)^T(A+BK) < s_1^2(A+BK)\left(Q+K^TK\right) \tag{4.63}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa (4.48) üst sınırı, gerçek değere (4.31) üst sınırından daha yakındır denilebilir.

Uyarı 4.1.3. Eğer

$$\frac{1}{1-s_1(A+BK)}\left(Q+K^TK\right) < \frac{1}{1-s_1^2(A+BK)}\lambda_1\left(Q+K^TK\right) \tag{4.64}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa (4.47) üst sınırı, (4.48) üst sınırından daha iyidir. Aynı şekilde,

$$\frac{1}{1-s_1^2(A+BK)}\lambda_1\left(Q+K^TK\right) < \frac{1}{1-s_1(A+BK)}\left(Q+K^TK\right) \tag{4.65}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, (4.48) üst sınırı, (4.47) üst sınırından daha iyi bir değer verir.

Pozitif yarı tanımlı $X, Y \in \mathrm{R}^{n\times n}$ matrislerini ele alalım. Bu iki matris için $\lambda_1(XY)I \le \lambda_1(Y)X$ ya da $\lambda_1(Y)X \le \lambda_1(XY)I$ olup olmadığını bilemediğimizden, Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.1.4 ü aşağıda verilen kriterle karşılaştırabiliriz:

Uyarı 4.1.4. Eğer

$$\lambda_1\left[\left(Q+K^TK\right)(A+BK)^T(A+BK)\right]I < \lambda_1\left(Q+K^TK\right)(A+BK)^T(A+BK)\ , \tag{4.66}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa (4.1) üst sınırı, (4.48) üst sınırından daha iyidir. Benzer şekilde,

$$\lambda_1\left(Q+K^TK\right)\left(A+BK\right)^T\left(A+BK\right)<\lambda_1\left[\left(Q+K^TK\right)\left(A+BK\right)^T\left(A+BK\right)\right]I \tag{4.67}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa (4.48) üst sınırının, (4.1) üst sınırından daha iyi olduğu görülür.

Şimdi, (Davies ve ark., 2008b) çalışmasında ele alınan, DARE (1.34) ün keyfi seçilen bir matrise göre uyarlanan denk formunu ele alan yöntem ışığında, Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.1.3 de bahsedilen varsayımları ortadan kaldıracak şekilde, alternatif üst sınırlar verelim:

Teorem 4.1.5. P, DARE (1.34) ün pozitif yarı tanımlı çözümü olsun. $K\in \mathrm{R}^{m\times n}$, $A+BK$ kararlı ve regüler R matrisi, $s_1^2[R\left(A+BK\right)R^{-1}]<1$ olacak şekilde seçilsin. Bu takdirde, pozitif κ_6 sabiti

$$\kappa_6\equiv\frac{\lambda_1\left[R^{-T}\left(A+BK\right)^T\left(Q+K^TK\right)\left(A+BK\right)R^{-1}\right]}{1-s_1^2[R\left(A+BK\right)R^{-1}]} \tag{4.68}$$

ile verilmek üzere,

$$P\le\kappa_6R^TR+Q+K^TK\equiv P_{U5} \tag{4.69}$$

dir.

İspat. $\det R\neq 0$ olacak şekilde seçilen bir R matrisi için A matrisinin benzerlik dönüşümü $\bar{A}=RAR^{-1}$ ile verilsin. $\bar{A}$ matrisi, DARE (1.34) de yerine yazıldığında $\bar{P}=R^{-T}PR^{-1}$, $\bar{B}=RB$ ve $\bar{Q}=R^{-T}QR^{-1}$ olmak üzere,

$$\bar{P}=\bar{A}^T\bar{P}\bar{A}-\bar{A}^T\bar{P}\bar{B}\left(I+\bar{B}^T\bar{P}\bar{B}\right)^{-1}+\bar{B}^T\bar{P}\bar{A}+\bar{Q}+\bar{K}^T\bar{K} \tag{4.70}$$

eşitliği yazılabilir ve bu denklem DARE (1.34) ün farklı bir formu olarak ele alınabilir. DARE (4.70) için Teorem 4.1.1 de ele alınan metot izlendiğinde $\bar{K}=KR^{-1}$ olmak üzere

$$\bar{P}\le\frac{\lambda_1\left[\left(\bar{A}+\bar{B}\bar{K}\right)^T\left(\bar{Q}+\bar{K}^T\bar{K}\right)\left(\bar{A}+\bar{B}\bar{K}\right)\right]}{1-s_1^2\left(\bar{A}+\bar{B}\bar{K}\right)}I+\bar{Q}+\bar{K}^T\bar{K} \tag{4.71}$$

olur ve elde edilen (4.71) eşitsizliğinde $\bar{A}=RAR^{-1}$, $\bar{B}=RB$ ve $\bar{K}=KR^{-1}$ matrisleri yerine yazıldığında DARE (1.34) ün pozitif yarı tanımlı P çözüm matrisi için (4.69) üst sınırı elde edilir.

Uyarı 4.1.5. (Davies ve ark., 2008b) çalışmasında, K matrisi, $A+BK$ kararlı olacak şekilde seçilmesine rağmen $s_1^2\left(A+BK\right)<1$ şartının sağlanmasının her zaman mümkün olamayacağı belirtilmiştir. Fakat Teorem 4.1.5 ışığında $s_1^2[R\left(A+BK\right)R^{-1}]$ olacak şekilde her zaman tersinir bir R matrisi bulunabilir. Buna göre Teorem 4.1.5 de verilen

üst sınır, herhangi bir varsayım olmaksızın her zaman hesaplanabilir bir sınırdır. Bahsedilen bu üst sınır K ve R matrislerinin seçimlerine bağlı olarak değişkenlik gösterir. Bu yüzden bu matrislerin çeşitli seçimleriyle elde edilen sınırlar arasından gerçek değere en yakın olanı belirleyebiliriz.

(4.69) üst sınırını ele alarak, DARE (1.34) ün çözümü için daha iyi yaklaşımlar veren aşağıdaki iteratif algoritmayı verebiliriz:

Algoritma 4.1.5.

Adım 1. P_{U5}, (4.69) ile verilmek üzere $T_{5_i} \equiv P_{U5}$ olsun.

Adım 2. $i = 1, 2, \ldots$ olmak üzere

$$T_{5_i} = A^T \left(I + T_{5_{i-1}} B B^T \right)^{-1} T_{5_{i-1}} A + Q \tag{4.72}$$

iterasyonuyla hesaplanır. O halde T_{5_i} ler de DARE (1.34) için üst sınırlardır.

İspat. Bu algoritmanın ispatı öncekilere benzer olarak yapılabilir.

Teorem 4.1.6. $K \in \mathrm{R}^{m \times n}$, $A + BK$ kararlı olacak şekilde seçilen bir matris olsun. $\tilde{Q} = R^{-T} \left(Q + K^T K \right) R^{-1}$ şeklinde tanımlanmak üzere, herhangi bir $\varepsilon < 1$ pozitif sabiti için

$$\lambda_1 \left(\tilde{Q} \right) s_1^2 \left(R^{-T} \left(Q + K^T K \right) R^{-1} \right) I \le \varepsilon \tilde{Q} \tag{4.73}$$

oluyorsa, DARE (1.34) ün pozitif yarı tanımlı P çözüm matrisi için

$$P \le \frac{1}{1-\varepsilon} \left(A + BK \right)^T \left(Q + K^T K \right) \left(A + BK \right) + \left(Q + K^T K \right) \equiv P_{U6} \tag{4.74}$$

dır.

İspat. Bu teoremin ispatı Teorem 4.1.3 ün ispatına benzer olarak yapılır. DARE (4.70) in pozitif yarı tanımlı $\bar{P}$ matrisi için

$$\bar{P} \le \frac{1}{1-\varepsilon} \left(\bar{A} + \bar{B}\bar{K} \right)^T \left(\bar{Q} + \bar{K}^T \bar{K} \right) \left(\bar{A} + \bar{B}\bar{K} \right) + \bar{Q} + \bar{K}^T \bar{K} \tag{4.75}$$

olup $\bar{P} = R^{-T} P R^{-1}$, $\bar{A} = RAR^{-1}$, $\bar{B} = RB$, $\bar{Q} = R^{-T} Q R^{-1}$ ve $\bar{K} = KR^{-1}$ olmak üzere (4.75) eşitsizliğinde bu matrisler yerine yazıldığında DARE (1.34) ün pozitif yarı tanımlı P çözüm matrisi için (4.74) ile verilen üst sınır elde edilir.

DARE (1.34) ün çözüm matrisi için (4.74) üst sınırını göz önüne alarak aşağıdaki iteratif algoritmayı verebiliriz:

Algoritma 4.1.6.

Adım 1. P_{U6}, (4.74) ile verilmek üzere $T_{6_i} \equiv P_{U6}$ olsun.

Adım 2. $i=1,2,...$ olmak üzere

$$T_{6_i}=A^T\left(I+T_{6_{i-1}}BB^T\right)^{-1}T_{6_{i-1}}A+Q \tag{4.76}$$

iterasyonuyla hesaplanır. O halde T_{6_i} ler de DARE (1.34) ün çözümü için üst sınırlardır.

İspat. Bu algoritmanın ispatı daha önceki algoritmaların ispatlarına benzer olarak yapılabilir.

Sonuç 4.1.5. $K\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $A+BK$ kararlı olacak şekilde seçilen bir matris ve R tersinir bir matris olmak üzere, $\tilde{Q}=R^{-T}\left(Q+K^TK\right)R^{-1}$ olsun. Bu takdirde $\lambda_1\left(\tilde{Q}\right)s\left[R^{-T}\left(Q+K^TK\right)R^{-1}\right]I\le\tilde{Q}$ eşitsizliği sağlanıyorsa, DARE (1.34) ün pozitif yarı tanımlı P çözüm matrisi için

$$P\le\frac{1}{1-s_1[R\left(A+BK\right)R^{-1}]}\left(A+BK\right)^T\left(Q+K^TK\right)\left(A+BK\right)+\left(Q+K^TK\right) \tag{4.77}$$

dır.

Uyarı 4.1.6. Teorem 4.1.6 da elde edilen sınır da, Teorem 4.1.5 de verilen sınır gibi her zaman hesaplanabilmektedir. Çünkü $s\left[R^{-T}\left(Q+K^TK\right)R^{-1}\right]I\le\dfrac{\tilde{Q}}{\lambda_1\left(\tilde{Q}\right)}\le I$ olacak şekilde her zaman K ve R matrisleri bulunabilir.

Sonuç 4.1.6. P, DARE (1.34) ün pozitif yarı tanımlı çözüm matrisi ise $j=1,2,...,6$ olmak üzere P_{Uj}, (4.1), (4.20), (4.33), (4.48), (4.69) ve (4.74) ile verilen üst sınırlar olmak üzere aşağıdaki öz değer sınırları elde edilir:

$$\begin{aligned}
&\lambda_i\left(P\right)\le\lambda_i\left(P_{Uj}\right),\\
&\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(P\right)\le\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(P_{Uj}\right),1\le i\le k\le n,\\
&iz\left(P\right)\le iz\left(P_{Uj}\right),\\
&\det\left(P\right)\le\det\left(P_{Uj}\right)
\end{aligned} \tag{4.78}$$

4.2. Sayısal Örnekler

Bu kısımda, bölüm 4.1 de DARE (1.34) ün pozitif yarı tanımlı çözüm matrisi için elde edilen üst sınırları literatürdeki sınırlarla karşılaştırmak ve elde ettiğimiz sonuçların etkinliğini göstermek amacıyla sayısal örnekler verilmiştir.

Örnek 4.2.1. (Choi, 2001)

$$A=\begin{pmatrix}1.45 & -0.45\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix}0.25 & 0.19\\ 0.19 & 0.1444\end{pmatrix}$$

olmak üzere, DARE (1.34) ün pozitif tanımlı P çözüm matrisi için

$$P_{tam}=\begin{pmatrix}1.5989 & -0.1802\\ -0.1802 & 0.2690\end{pmatrix},\ iz(P)=1.8679,\ \det(P)=0.3976$$

dır. (Ogata, 1995) çalışmasında verilen kutup yerleştirme tekniğini kullanlarak, $A+BK$ matrisi kararlı ve $\lambda_1(A+BK)=0.25$ ve $\lambda_2(A+BK)=0.2$ olacak şekildeki K matrisi, $K=\begin{pmatrix}-1 & 0.4\end{pmatrix}$ şeklinde belirlenebilir.

Buna göre öncelikle bu çalışmada geliştirilen sınırları ele alalım:

$s_1(A+BK)=1.0968$ olduğundan (4.1), (4.33) ve (4.48) ile verilen sınırlar bu örnek için uygun değildir. Ancak Teorem 4.1.2 de (4.20) ile verilen sınır ve Algoritma 4.1.2 nin 2 iterasyon sonucu verdiği değer

$$P_{U2}=\begin{pmatrix}1.8261 & -0.3067\\ -0.3067 & 0.4447\end{pmatrix},$$

$$T_2=\begin{pmatrix}1.6422 & -0.1908\\ -0.1908 & 0.2720\end{pmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca $R=\begin{pmatrix}-0.3 & 0.1\\ 0.1 & 0.1\end{pmatrix}$ olmak üzere Teorem 4.1.5 de (4.69) ile verilen sınır, buna karşılık gelen algoritmanın 2 iterasyon sonucunda verdiği değer ve (Davies ve ark., 2008b) çalışmasında Teorem 2 ile verilen üst sınır ve buna karşılık gelen algoritmanın 2 iterasyon sonucunda verdiği değer

$$P_{U5}=\begin{pmatrix}1.8169 & -0.3233\\ -0.3233 & 0.4177\end{pmatrix},T_5=\begin{pmatrix}1.6273 & -0.1862\\ -0.1862 & 0.2705\end{pmatrix}$$

$$P\le\begin{pmatrix}1.7596 & -0.2386\\ -0.2386 & 0.3101\end{pmatrix},\ P\le\begin{pmatrix}1.6067 & -0.1823\\ -0.1823 & 0.2698\end{pmatrix}$$

şeklindedir. $R=\begin{pmatrix}-0.6 & 0.1\\ 0.1 & 0.1\end{pmatrix}$ olmak üzere bu sınırlar için

$$P_{U5}=\begin{pmatrix}1.7823 & -0.2819\\ -0.2819 & 0.3331\end{pmatrix},T_5=\begin{pmatrix}1.6046 & -0.1807\\ -0.1807 & 0.2692\end{pmatrix},$$

$$P\le\begin{pmatrix}2.4319 & -0.3479\\ -0.3479 & 0.3263\end{pmatrix},\ P\le\begin{pmatrix}1.6132 & -0.1868\\ -0.1868 & 0.2729\end{pmatrix}$$

elde edilir. Ayrıca Teorem 4.1.6 da (4.74) ile verilen P_{U6} sınırı ve Algoritma 4.1.6, $R=\begin{pmatrix} 2.3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $\varepsilon = 0.85$ için

$$P_{U6}=\begin{pmatrix} 10.790 & -1.5175 \\ -1.5175 & 2.0502 \end{pmatrix},\ T_6=\begin{pmatrix} 1.9870 & -0.2886 \\ -0.2886 & 0.3034 \end{pmatrix}$$

değerlerini verir.

Bu örnekte A ve B matrisleri için $s_1(A)=1.8>1$, $s_n(A)=0.2499$, $s_n(B)=0$, $\lambda_1(Q)=0.3944$ ve $\lambda_n(Q)=0$ dır. Buna göre BB^T singüler olduğundan (Komaroff, 1994a; Lee, 1994; Lee, 2003b) çalışmalarında verilen sınır değerleri hesaplanamaz. Ayrıca $s_n^2(B)=0$ ve $s_1^2(A)>1$ olduğundan (Lee, 1997d) çalışmasındaki formül ve $\lambda_n(Q)=0$ ve $s_n^2(A)<1$ olduğundan (Lee, 1997e) çalışmasındaki formül bu örneğe uygulanamaz. Üstelik A matrisi kararlı olmadığından (Kim ve Park, 1999) çalışmasında verilen sınır, (Lee ve Chang, 1998) çalışmasında, (2.87) ile verilen η sabiti için bu örnekte $\eta>1$ olduğundan bu örneğe uygulanamazlar. (Lee ve Hsien, 1999) çalışmasındaki, (2.92) ile verilen formülde b_1 sabiti için $b_1=0$ olduğundan, bu sınırda hesaplanamayacaktır.

(Gao ve ark., 2002) çalışmasında verilen sınır ise, $M=\begin{pmatrix} 4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$P\le\begin{pmatrix} 2.49 & -0.341 \\ -0.341 & 0.3064 \end{pmatrix}$$

değerini verir.

Bu durumda bu değerlerin oluşturduğu aşağıdaki tabloyu ele aldığımızda bizim sonuçlarımızın bazı durumlarda gerçek değere daha yakın olduğunu görebiliriz.

Metot	**Determinant ve iz sınırları**	
Teorem 4.1.2	$\det(P)\le 0.718$	$iz(P)\le 2.2708$
Algoritma 4.1.2, 2 iterasyon	$\det(P)\le 0.4102$	$iz(P)\le 1.9142$
Teorem 4.1.5, $R=\begin{pmatrix} -0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$	$\det(P)\le 0.6543$	$iz(P)\le 2.2346$
Algoritma 4.1.5, 2 iterasyon	$\det(P)\le 0.4055$	$iz(P)\le 1.8978$

(Davies ve ark., 2008b), Teorem 2 $R=\begin{pmatrix}-0.3 & 0.1\\ 0.1 & 0.1\end{pmatrix}$	$\det(P)\le 0.4887$	$iz(P)\le 2.0697$
(Davies ve ark., 2008b), Algoritma 2, 2 iterasyon	$\det(P)\le 0.4002$	$iz(P)\le 1.8765$
Teorem 4.1.5 , $R=\begin{pmatrix}-0.6 & 0.1\\ 0.1 & 0.1\end{pmatrix}$	$\det(P)\le 0.5142$	$iz(P)\le 2.1154$
Algoritma 4.1.5, 2 iterasyon	$\det(P)\le 0.3993$	$iz(P)\le 1.8738$
(Davies ve ark., 2008b), Teorem 2 , $R=\begin{pmatrix}-0.6 & 0.1\\ 0.1 & 0.1\end{pmatrix}$	$\det(P)\le 0.6724$	$iz(P)\le 2.7582$
(Davies ve ark., 2008b), Algoritma 2, 2 iterasyon	$\det(P)\le 0.4053$	$iz(P)\le 1.8861$
Teorem 4.1.6, $R=\begin{pmatrix}2.3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \varepsilon=0.85$	$\det(P)\le 19.8188$	$iz(P)\le 12.8402$
Algoritma 4.1.6, 2 iterasyon	$\det(P)\le 0.5195$	$iz(P)\le 2.2904$
(Gao ve ark., 2002), $M=\begin{pmatrix}4 & 0.1\\ 0.1 & 0.5\end{pmatrix}$	$\det(P)\le 0.6466$	$iz(P)\le 2.7964$

Örnek 4.2.2. (Davies ve ark., 2008b)

$$A=\begin{pmatrix}1.1 & 0\\ 0.1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

olmak üzere DARE (1.34) ün pozitif tanımlı P çözüm matrisi için

$$P=\begin{pmatrix}3.3340 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix},\ iz(P)=7.3340,\ \det(P)=12.3360$$

dır. Bu durumda $A+BK$ matrisinin öz değerleri 0.0689 ve 0.0289 olacak şekilde $K=\begin{pmatrix}-0.53 & 0.01\end{pmatrix}$ matrisini ele alabiliriz. Bu durum $A+BK$ matrisinin kararlı olduğunu gösterir. Ayrıca $s_1(A)=1.1045$ ve $s_n(A)=0$, $s_1(B)=2$ ve $s_n(B)=0$, $\lambda_1(Q)=4.6180$ ve $\lambda_n(Q)=2.3820$ dır. Bu örnek için Teorem 4.1.1-Teorem 4.1.6 ile verilen tüm sınırlar hesaplanabilir olup, bu sınırlar ve bu sınırlara karşılık gelen algoritmaların 1 iterasyon sonucu verdiği değerler aşağıdaki gibidir:

$$P \le \begin{pmatrix} 3.3351 & 0.9947 \\ 0.9947 & 4.0543 \end{pmatrix} = P_{U1}, \det(P_{U1}) = 12.532, iz(P_{U1}) = 7.3894,$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 3.3344 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \det(T_1) = 12.3376, iz(T_1) = 7.3344,$$

$\varepsilon = 0.017$ için

$$P \le \begin{pmatrix} 3.3377 & 1.0119 \\ 1.0119 & 4.0693 \end{pmatrix} = P_{U2}, \det(P_{U2}) = 12.5581, iz(P_{U2}) = 7.407,$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 3.3348 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \det(T_2) = 12.3392, iz(T_2) = 7.3348,$$

$\varepsilon = 0.02121$ için

$$P \le \begin{pmatrix} 3.4065 & 1.021 \\ 1.021 & 4.0882 \end{pmatrix} = P_{U3}, \det(P_{U3}) = 12.884, iz(P_{U3}) = 7.4947,$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 3.3352 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \det(T_3) = 12.3408, iz(T_3) = 7.3352 ,$$

$$P \le \begin{pmatrix} 3.3360 & 0.9985 \\ 0.9985 & 4.0020 \end{pmatrix} = P_{U4}, \det(P_{U4}) = 12.3536, iz(P_{U4}) = 7.338,$$

$$T_4 = \begin{pmatrix} 3.3340 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \det(T_4) = 12.336, iz(T_4) = 7.3340,$$

$R = \begin{pmatrix} 8 & 0.4 \\ 0.4 & 3 \end{pmatrix}$ için

$$P \le \begin{pmatrix} 3.3345 & 0.9983 \\ 0.9983 & 4.0078 \end{pmatrix} = P_{U5}, \det(P_{U5}) = 12.3674, iz(P_{U5}) = 7.3423,$$

$$T_5 = \begin{pmatrix} 3.3340 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \det(T_5) = 12.336, iz(T_5) = 7.3340,$$

$R = \begin{pmatrix} 2.5 & 0.3 \\ 0.3 & 2.5 \end{pmatrix}, \varepsilon = 0.0178$ için

$$P \le \begin{pmatrix} 3.3944 & 1.0174 \\ 1.0174 & 4.0738 \end{pmatrix} = P_{U6}, \det(P_{U6}) = 12.793, iz(P_{U6}) = 7.4682,$$

$$T_6 = \begin{pmatrix} 3.3350 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \det(T_6) = 12.34, iz(T_6) = 7.3350.$$

Literatürde bulunan bazı sınırların bu örnek için verdikleri değerleri inceleyelim: Verilen örnekte BB^T matrisi singüler olduğundan (Komaroff, 1994a; Lee, 1996; Lee, 2003b) çalışmalarında verilen üst sınır formülleri hesaplamaya uygun değildir ve A

matrisi kararlı olmadığından (Kim ve Park, 1999) çalışmasında verilen üst sınır da bu örneğe uygulanamaz. Ayrıca $s_1^2(A)=1.1045>1$ olduğundan (Lee, 1997a) çalışmasında verilen sınır ve (Choi, 2001) çalışmasında verilen sınırda A matrisinin tersinir olması durumu ele alındığından bu örnek için bu sınırda hesaplanamamaktadır. Ancak (Davies ve ark., 2008b; Gao ve ark., 2002; Lee, 1997e; Lee ve Chang, 1998; Lee ve Hsien, 1999) çalışmalarında verilen sınırlar bu örnek için hesaplanabilir olup, verdikleri değerler sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$R=\begin{pmatrix}8 & 0.4\\ 0.4 & 3\end{pmatrix} \text{ için, } P\le\begin{pmatrix}3.3825 & 1.0213\\ 1.0213 & 4.0115\end{pmatrix}, \det(P)\le 12.5258, iz(P)\le 7.394,$$

$$P\le\begin{pmatrix}3.4133 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}, M=\begin{pmatrix}3.5 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}, \det(P)\le 12.6532, iz(P)\le 7.4133,$$

$$P\le\begin{pmatrix}3.3341 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}, \det(P)\le 12.3364, iz(P)\le 7.3341,$$

$$P\le\begin{pmatrix}3.3377 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}, \det(P)\le 12.3508, iz(P)\le 7.3377,$$

$$P\le\begin{pmatrix}3.3349 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}, \det(P)\le 12.3396, iz(P)\le 7.3349.$$

Bu durumda yukarıda hesaplanan değerlerin oluşturduğu aşağıdaki tabloyu ele aldığımızda bizim sonuçlarımızın bazı durumlarda herhangi bir şarta bağlı olmaksızın her zaman hesaplanabileceğini ve gerçek değere daha yakın olduğunu görebiliriz:

Metot	**Determinant ve iz sınırları**	
Teorem 4.1.1	$\det(P_{U1})=12.532$	$iz(P_{U1})=7.3894$
Teorem 4.1.2	$\det(P_{U2})=12.5581$	$iz(P_{U2})=7.407$
Teorem 4.1.3	$\det(P_{U3})=12.884$	$iz(P_{U3})=7.4947$
Teorem 4.1.4	$\det(P_{U4})=12.3536$	$iz(P_{U4})=7.338$
Teorem 4.1.5	$\det(P_{U5})=12.3674$	$iz(P_{U5})=7.3423$
Teorem 4.1.6	$\det(P_{U6})=12.793$	$iz(P_{U6})=7.4682$
(Davies ve ark., 2008b), Teorem 2	$\det(P)\le 12.5258$	$iz(P)\le 7.394$
(Gao ve ark., 2002)	$\det(P)\le 12.6532$	$iz(P)\le 7.4133$
(Lee, 1997e)	$\det(P)\le 12.3364$	$iz(P)\le 7.3341$

(Lee ve Chang, 1998)	$\det(P) \le 12.3508$	$iz(P) \le 7.3377$
(Lee ve Hsien, 1999)	$\det(P) \le 12.3396$	$iz(P) \le 7.3349$

$A+BK$ matrisinin kararlı ve $Q+K^TK \ge 0$ olsun. Bu takdirde

$$P_K = (A+BK)^T P_K (A+BK) + Q + K^T K \tag{4.79}$$

denklemi bir ayrık cebirsel Lyapunov matris denklemidir (DALE) ve bu denklemin tek pozitif yarı tanımlı çözüm matrisi P_K olup bu matris DARE (1.34) için bir üst sınır belirtmektedir. DALE (1.35) in çözüm matrisinin hesaplanması DARE (1.34) e göre daha kolay olduğu bilinmektedir. Ancak bu denklem de, hesaplama yönünden yine bazı zorluklara sahip olup bundan dolayı çözüm matrisi için birçok sınır elde edilmiştir (Davies ve ark., 2008c; Lee, 1997e; Lee ve ark., 2003; Lee, 2004b; Tran ve Sawan, 1984). Bu yüzden, bu denklem DARE (1.34) ün çözüm matrisi için bir üst sınır olarak, yukarıdaki örnekler için ele alınmamıştır.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu çalışmada, matris eşitsizlikleri ve matris özdeşlikleri kullanılarak, sürekli ve ayrık cebirsel Riccati matris denklemleri için içermiş oldukları parametrelere göre hesaplama kolaylığı ve işlem yoğunluğu itibariyle belli avantajlara sahip olan üst sınırlar elde edilmiş ve elde edilen sınırların tam değere daha da yakın hale getirilmesi amacıyla bu sınırlara bağlı iteratif algoritmalar geliştirilmiştir. İçerdikleri parametrelerin seçimlerine göre elde edilen bu sınırların etkinliği, önceki çalışmalarla ve çözüm matrislerinin gerçek çözümüyle, verilen bazı kriterlerle, uygun parametre seçimleriyle ve özellikle sayısal örnekler yardımıyla karşılaştırılarak verilmiştir. Bu tür denklemler ve bu denklemleri içeren çalışmalar göz önüne alındığında, elde edilen bu sonuçların içerdiği avantajlar yönünden, sistem teori, sinyal işleme ve özellikle optimal kontrol gibi çeşitli mühendislik uygulamalarında kullanılabileceğini söyleyebiliriz.

5.2 Öneriler

Sürekli ve ayrık cebirsel Riccati matris denklemlerinin çözüm matrisleri için sınırlar elde etme, güncel bir problem olup birçok araştırmacı tarafından üzerinde çalışılmaktadır. Dolayısıyla bu denklemlerin çözüm matrisleri, var olan çalışmalarda kullanılan matris eşitsizlikleri, matris özdeşlikleri ve yöntemler üzerine farklı yaklaşımlar dikkate alınarak gerçek değere daha yakın sınırlar elde edilebilir ve bu sınırlar yardımıyla da algoritmalar geliştirilebilir. Aynı zamanda bu ve benzeri çalışmalarda elde edilen üst sınırlar çeşitli parametrelere bağlı olduklarından, elde edilen üst sınırların içerdikleri parametrelerin hangi seçimlerinde, en uygun değere sahip olduğu, bir optimizasyon problemi olarak ele alınabilir. Ayrıca elde edilen sınırlar üzerine disiplinlerarası ortak çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

Allwright, J. C., 1980, A Lower Bound for the Solution of the Algebraic Riccati Equation of Optimal Control and a Geometric Convergence Rate for the Kleinmam Algorithm, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25, 826-829.

Barnett, S. ve Storey, C., 1970, Matrix Methods in Stability Theory, *Barnes and Noble Inc.*, New York, NY, USA.

Basin, M., Rodriguez-Gonzaleza, J. ve Fridman , L., 2007, Optimal and robust control for linear state-delay systems, *Journal of the Franklin Institute*, 344, 830-845.

Bernstein, D.S., 2005, Matrix Mathematics: Theory, facts and formulas with application to linear systems theory, *Princeton University Press*, Princeton, NJ, USA.

Bhatia, R., 1997, Matrix Analysis, *Springer- Verlag*, New York, Inc.

Chen, C.Y. ve Lee, C. H., 2009a, Delay-independent stabilization of linear systems with time-varying delayed state and uncertainties, *Journal of the Franklin Institute*, 346, 378-390.

Chen, C.Y. ve Lee, C. H., 2009b, Explicit matrix bounds of the solution for the continuous Riccati equation, *ICIC Express Letters*, 3, 147-152.

Choi, H.H., 2001, Upper matrix bounds for the discrete algebraic Riccati matrix equation, *IEEE Transactions on Automatic Control*,46, 504–508.

Choi, H.H. ve Kuc, T.Y., 2002, Lower matrix bounds for the continuous algebraic Riccati and Lyapunov matrix equations, *Automatica*, 38, 1147-1152.

Czornik, A. ve Yaz, E., 2000, Comments on "Bounds for the eigenvalues of the solution of the discrete Riccati equations", *International Journal of Systems Science*, 31, 809.

Dai, H. ve Bai, Z., 2011, On eigenvalue bounds and iteration methods for discrete algebraic Riccati equations, *Journal of Computational Mathematics*, 29, 341-366.

Datta, B.N., 2003, Numerical methods for linear control systems, *Elsevier Science and Technology Books*.

Davies, R., Shi, P. ve Wiltshire, R., 2007a, New lower solution bounds of the continuous algebraic Riccati matrix equation, *Linear Algebra and its Applications*, 427, 242-255.

Davies, R., Shi, P. ve Wiltshire, R., 2007b, New upper solution bounds for perturbed continuous algebraic Riccati equations applied to automatic control, *Chaos, Solutions and Fractals*, 32, 487-495.

Davies, R., Shi, P. ve Wiltshire, R., 2008a, New upper matrix bounds for the solution of the continuous algebraic Riccati matrix equation, *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 6, (5), 776-784.

Davies, R., Shi, P. ve Wiltshire, R., 2008b, New upper solution bounds of the discrete algebraic Riccati matrix equation, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 213, 307-315.

Davies, R., Shi, P. ve Wiltshire, R., 2008c, New lower matrix bounds for the solution of the continuous algebraic Lyapunov equation, *Asian Journal of Control*, 10, 4, 449-455.

Dragomir, S.S., 2011, The Hermite–Hadamard type inequalities for operator convex functions, *Applied Mathematics and Computation*, 218, 766–772.

Gao, L., Xue, A. ve Sun, Y., 2002, Comments on "Upper matrix bounds for the discrete algebraic Riccati matrix equation", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47, 1212-1213.

Horn, R.A. ve Johnson, C.R., 2013, Matrix Analysis, *Cambridge University Press*, Cambridge, UK.

Huang, T.M. ve Lin, W.W., 2009, Structured doubling algorithms for weakly stabilizing Hermitian solutions of algebraic Riccati equations, *Linear Algebra and its Applications*, 430, 1452-1478.

Kang, T., Kim, B.S. ve Lee, J.G., 1996, Spectral norm and trace bounds of algebraic Matrix Riccati equations, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41,12,1828-1830.

Kim, S. W., Park, P. G. ve Kwon, W. H., 1993, Lower bounds for the trace of the solution of the discrete algebraic Riccati equation, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38, 12-14.

Kim, S.W. ve Park, P.G., 1999, Matrix bounds of the discrete ARE solution, *Systems Control Letters*, 36, 15-20.

Kim, S.W. ve Park, P.G., 2000, Upper bounds of the continuous ARE solution, *IEICE - Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Science*, *E83-A*, 380-385.

Kleinman, D.L. ve Athans, M., 1968, The design of suboptimal linear time-varying systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 13, 150-159.

Komaroff, N., 1994a, Iterative matrix bounds and computational solutions to the discrete algebraic Riccati equation, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39, 1676–1678.

Komaroff, N., 1994b, Diverse bounds for the eigenvalues of the continuous algebraic Riccati equation, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39, 3, 532-534.

Kouikoglou, V.S. ve Phillis, Y.A., 1993, Trace bounds on the covariances of continuous-time systems with multiplicative noise, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38, 138-142.

Kreindler, E. ve Jameson, A., 1972, Conditions for nonnegativeness of partitioned matrices, *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-17, 147-148.

Kwakernaak, K., Sivan, R., 1972, Linear optimal control systems, *Wiley*, New York.

Kwon, W.H., Moon, Y.S. ve Ahn, S.C., 1996, Bounds in algebraic Riccati and Lyapunov equations: a survey and some new results, *International Journal of Control*, 64, 3, 377– 389.

Lee, C.H., 1987, On the upper and lower bounds of the solution for the continuous Riccati matrix equation, *International Journal of Control*, 66, 105-118.

Lee, C.H., Li, T.-H.S. ve Kung, F.C., 1993, A new approach for the robust stability of perturbed systems with a class of noncommensurate time delays, *IEEE Transactions Circuits and Systems, I*, 40, 605-608.

Lee, C. H., 1996a, Eigenvalue upper and lower bounds of the solution fort he continuous algebraic matrix Rixxati equation, *IEEE Transactions Circuits and Systems I:Fundamental Theory and Applications*, 43, 8, 683-686.

Lee, C.H., 1996b, On the matrix bounds for the solution matrix of the discrete algebraic Riccati equation, *IEEE Transactions Circuits and Systems I*, 43, 402–407.

Lee, C.H., 1997a, Eigenvalue upper bounds of the solution of the continuous Riccati equation, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42, 9, 1268-1271.

Lee, C.H., 1997b, New results for the bounds of the solution for the continuous Riccati and Lyapunov equations, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42, 1, 118–123.

Lee, C., 1997c, On the upper and lower bounds of the solution fort he continuous Riccati matrix equation, *International Journal of Control*, 66, 105-118.

Lee, C.H., 1997d, Upper matrix bound of the solution for the discrete Riccati equation, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42, 840–842.

Lee, C.H., 1997e, Upper and lower bounds of the solutions of the discrete algebraic Riccati and Lyapunov matrix equations, *International Journal of Control*, 68, 579–598.

Lee, C.H., 1998, Simple stabilizability criteria andmemoryless state feedback control design for time-delay systems with timevarying perturbations, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 45, 11, 1211–1215.

Lee, C.H. ve Chang, Y.C., 1998, Solution bounds for the discrete Riccati equation and its applications, *Journal of Optimization Theory Applications*, 99, 443–463.

Lee, C.H. ve Hsien, T.L., 1999, New solution bounds for the discrete algebraic matrix Riccati equation, *Optimal Control Applications and Methods*, 20,113–125.

Lee, C.H., 2003a, Solution bounds of the continuous Riccati matrix equation, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48, 1409-1413.

Lee, C.H., 2003b, Matrix bounds of the continuous and discrete Riccati equations-A unified approach, *International Journal of Control*, 76, 635-642.

Lee, C.H., 2004a, A unified approach to eigenvalue bounds of the solution of the Riccati equation, *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, 27, 431–437.

Lee, C. H., 2004b, Solution bounds of the continuous and discrete Lyapunov matrix equations, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 120, 3,559-578.

Lee, C.H., 2005, On the estimation of the covariance of the continuous multiplicative systems, *Journal of the Franklin Institute*, 342, 161-174.

Lee, C.H., 2006, New upper solution bounds of the continuous algebraic Riccati matrix equation, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51, 330-334.

Lee, C.H., 2012, New Approach for Upper Bound Estimations of the Solution of the Continuous Riccati Equation, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57, 8, 2074-2077.

Lee, D.G., Heo, G. H. ve Woo, J. M., 2003, New bounds using the solution of the discrete Lyapunov matrix equation, *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 1, 4, 459-463.

Liu, J., Zhang, J. ve Liu, Y., 2009, Trace inequalities for matrix products and trace bounds for the solution of the algebraic Riccati equations, *Journal of Inequalities and Applications*, Vol. 2009, Article ID 101085, 17 pages, DOI:10.1155/2009/101085.

Liu, J. ve Zhang, J., 2009, New trace bounds for the product of two matrices and their applications in the algebraic Riccati equation, *Journal of Inequalities and Applications*, Vol. 2009, Article ID 620758, 18 pages, DOI:10.1155/2009/620758.

Liu, J., Zhang, J. ve Liu, Y., 2010, A new upper bound for the eigenvalues of the continuous algebraic Riccati equation, *Electronic Journal of Linear Algebra*, 20, 314-321.

Liu, J., Zhang, J. ve Liu, Y., 2011, New solution bounds for the continuous algebraic Riccati equation, *Journal of the Franklin Institute*, 348, 2128-2141.

Liu, J. ve Zhang, J., 2011, Bounds for the eigenvalues of the continuous algebraic Riccati equation, *International Journal of Systems Science*, 42, 10, 1747-1753.

Liu, J. ve Zhang, J., 2014, New upper and lower eigenvalue bounds for the solution of the continuous algebraic Ricccati equation, Asian Journal of Control, 16, 1, 284-291

Mori, T. ve Derese, I. A., 1984, A brief summary of the bounds on the solution of the algebraic equations in control theory, International Journal of Control, 39, 247-256.

Ni, M.L., 2008, Existence condition on solutions to the algebraic Riccati equation, *Acta Automatica Sinica*, 34, 1, 85-87.

Ogata, K., 1995, Discrete-time control systems, Prentice-Hall International Inc., Englewood Cliffs, NJ.

Ogata, K., 1997, Modern Control Engineering, *Prentice-Hall*, Upper Saddle River, NJ, USA, 3rd edition.

Pastravanu, O. ve Matcovschi, M.H., 2010, Linear time-variant systems: Lyapunov functions and invariant sets defined by Hölder norms, *Journal of the Franklin Institute*, 347, 627-640.

Savov, S. ve Popchev, I., 2004, New upper estimates for the solution of the continuous algebraic Lyapunov equation, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49, 1841-1842.

Su, X., Shi, P., Wu, L. ve Song, Y.D., 2012, A novel approach to filter design for T-S fuzzy discrete time systems with time-varying delay, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 20, 6, 1114-1129.

Sun, J.G., 1998, Perturbation theory for algebraic Riccati equation, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 19, 39-65.

Tran, M. ve Sawan, M.E., 1984, A note on the discrete Lyapunov and Riccati matrix equations, *International Journal of Control*, 39, 337–341.

Tippett, M. K. ve Marchesin, D., 1999, Upper bounds for the solution of the discrete algebraic Lyapunov equation, *Automatica*, 35, 1485-1489.

Vidyasagar, M., 1993, Nonlinear system analysis, *Prentice-Hall*, Englewood Cliffs, New Jersey.

Wang, S.S., Chen, B.S. ve Lin, T.P., 1987, Robust stability of uncertain time-delay systems, *International Journal of Control*, 46, 963-976.

Wu, L., Su, X., Shi, P. ve Qiu, J., 2011, A new approach to stability analysis and stabilization of discrete-time T-S fuzzy timevarying delay systems, *IEEE Transactions on Systems,Man, and Cybernetics B*, 41, 1, 273–286.

Yasuda, K. ve Hirai, K., 1979, Upper and lower bounds on the solution of the algebraic Riccati and Lyapunov equations, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24, 483-487.

Zhang, F., 1999, Matrix Theory:Basic results and techniques, Springer-Verlag, New York Inc.

Zhang, F., 2001, Matrix inequalities by means of block matrices, *Mathematical Inequalities and Applications*, 4, 4, 481-490.

Zhang, J. ve Liu, J., 2010, Matrix bounds for the solution of the continuous algebraic Riccati equation, *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2010, 15 pages, Article ID 819064, DOI:10.1155/2010/819064.

Zhang, J. ve Liu, J., 2011a, New lower solution bounds for the continuous algebraic Riccati equation, *Electronic Journal of Linear Algebra*, 22, 191-202.

Zhang, J. ve Liu, J., 2011b, New series lower bounds for the solution of the continuous algebraic Riccati equation, *IEEE, International Conference on Electric Information and Control Engineering 2011*, 1487–1490, DOI: 10.1109/ICEICE.2011.5777868.

Zhang, W., Su, H., Wang, H. ve Han, Z., 2012, Full-order and reduced-order observers for one-sided Lipschitz nonlinear systems using Riccati equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17, 12, 4968–4977.

Zhang, W., Su, H. ve Wang, J., 2013, Computation of upper bounds for the solution of continuous algebraic Riccati equations, *Circuits, Systems and Signal Processing*, 32, 3, 1477–1488.

EKLER

Bu bölümde, CARE (1.26) nın ve DARE (1.34) ün çözüm matrisleri için elde edilen algoritmaların Maple prosedürleri verilmiştir. Posedürler Maple 14 de yazılmış olup temel olarak üç farklı paket kullanılmıştır. Prosedürler sıralı olarak verildiğinden burada yazılan terimler ve parametreler, teoremlerin ifadelerindeki terim ve parametreleri belirttiğinden, posedürler yazılırken indislerin yazılmasına gerek duyulmamıştır.

EK-1 Sürekli Cebirsel Riccati Matris Denklemi İçin Maple Prosedürleri

1. $\lambda_1(P)$ İçin Üst Sınır (Kim ve ark., 2000)

```
η :=proc(A, B, Q, K, E, M)
 local n, η1 :
n := linalg[coldim](A) :
 if Re( op(1, sort([seq(op(i, [linalg[eigenvalues](evalm(A+B&*K))]), i = 1 .. n)], `>`))) ≥ 0
     then print("K düzgün seç")
 elif LinearAlgebra[Determinant](E) = 0 then print("E düzgün seç")
 elif not LinearAlgebra[IsDefinite](M, 'query' = 'positive_definite') then print("M düzgün seç")
 elif not LinearAlgebra[IsDefinite](evalm(transpose(evalm(A+B&*K))&*transpose(E)&*E
      +transpose(E)&*E&*(A+B&*K)+M), 'query' = 'negative_semidefinite')
     then print("M ve E düzgün seç")
 else
η1 := ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](evalm(transpose(E)&*E))])
     *(ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](evalm((Q+transpose(K)&*K)&*transpos
     &*E))])) :
print(η1', η1) :
 fi:
 end:
```

2. $\lambda_1(P)$ İçin Üst Sınır (Lee, 1997a)

```
η :=proc(A, B, Q)
local α, η2, n :
n := linalg[coldim](A) :
α := evalf(evalm((-ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](evalm(A
     +transpose(A)))]) +sqrt((ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](evalm(A
     +transpose(A)))]))^2 +4*(ListTools[FindMinimalElement](evalf(linalg[singularvals](B))))^2
     *ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](Q)]))/(2
     *ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](Q)])
     *ListTools[FindMinimalElement](evalf(linalg[singularvals](B)))))) :
η2 := evalf(evalm((α*ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](Q)]) +α^-1)/(
     -ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](evalm(α*A+α*transpose(A) -2
     *LinearAlgebra[MatrixFunction](evalm(B&*transpose(B)), sqrt(v), v)])))))) :
print(η2', η2) :
end:
```

3. Teorem 3.1.1 İçin Maple Prosedürü

```
Teorem1 :=proc(A, B, Q, α, β, γ, s)
local P, V, φ, r, n :
n := linalg[coldim](A) : Digits := 5 :
if not LinearAlgebra[IsDefinite](evalm(2*α*Matrix(n, shape = identity) − A − transpose(A)), query =
    'positive_definite') then print("α düzgün seç")
elif not LinearAlgebra[IsDefinite](evalm(2*γ*Matrix(n, shape = identity) − A − transpose(A)), query =
    'positive_definite') then print("γ düzgün seç")
elif not 2*α + β ≥ 2*γ then print("β düzgün seç")
else
V := evalf(evalm(A − α*Matrix(n, shape = identity) − β*Matrix(n, shape = identity))) :
φ := evalf(evalm( (β
    *ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](transpose(linalg[inverse](V))&*(Q + γ^2
    *linalg[inverse](evalm(B&*transpose(B))))&*linalg[inverse](V)]))/(1
    − ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](evalm(transpose(linalg[inverse](V))
    &*(transpose(V + β*Matrix(n, shape = identity))&*(V + β*Matrix(n, shape = identity)) + (2*α
    *β + β^2 − 2*γ*β)*Matrix(n, shape = identity))&*linalg[inverse](V))]))))) :
P[0] := evalf(evalm(transpose(linalg[inverse](V))&*(φ*(transpose(V + β*Matrix(n, shape
    = identity))&*(V + β*Matrix(n, shape = identity)) + (2*α*β + β^2 − 2*γ*β)*Matrix(n, shape
    = identity)) + β*(Q + γ*linalg[inverse](evalm(B&*transpose(B))))&*linalg[inverse](V))) :
print('P_u1', P[0]) :
  for r from 1 to s do
P[r] := evalf(evalm(transpose(linalg[inverse](V))&*((transpose(V + β*Matrix(n, shape = identity))
    &*P[r − 1]&*(V + β*Matrix(n, shape = identity)) + (2*α*β + β^2 − 2*γ*β)*P[r − 1]) + β*(ζ
    + γ^2*linalg[inverse](evalm(B&*transpose(B))))&*linalg[inverse](V))) :
od:
print('S_1', P[s]) :
fi:
end:
```

4. Teorem 3.1.2 İçin Maple Prosedürü

```
Teorem2 :=proc(A, B, Q, α, β, γ, s)
 local P, V, φ, r, n :
n := linalg[coldim](A) : Digits := 5 :
if not LinearAlgebra[IsDefinite](evalm(2*α*Matrix(n, shape = identity) − A − transpose(A)), query =
    'positive_definite') then print("α düzgün seç")
elif not LinearAlgebra[IsDefinite](evalm(2*γ*Matrix(n, shape = identity) − A − transpose(A)), query =
    'positive_definite') then print("γ düzgün seç")
elif not α − γ ≥ 0 then print("a ve γ düzgün seç")
else
V := evalf(evalm(A − α*Matrix(n, shape = identity) − β*Matrix(n, shape = identity))) :
 φ := evalf(evalm( (β
    *ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](transpose(linalg[inverse](V))&*(Q + γ^2
    *linalg[inverse](evalm(B&*transpose(B))))&*linalg[inverse](V)]))/(1
    − ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](evalm(transpose(linalg[inverse](V))
    &*(transpose(V + β*Matrix(n, shape = identity))&*(V + β*Matrix(n, shape = identity)) + (2*α
    *β + β^2 − 2*γ*β)*Matrix(n, shape = identity))&*linalg[inverse](V))]))))) :
P[0] := evalf(evalm(transpose(linalg[inverse](V))&*(φ*(transpose(V + 2*β*Matrix(n, shape
    = identity))&*(V + 2*β*Matrix(n, shape = identity)) + 4*β*(α − γ)*Matrix(n, shape
    = identity)) + 2*β*(Q + γ^2*linalg[inverse](evalm(B&*transpose(B))))&*linalg[inverse](V))
    ) :
print('P_u2', P[0]) :
  for r from 1 to s do
```

```
P[r] := evalf(evalm(transpose(linalg[inverse](V))&*((transpose(V+2*β*Matrix(n, shape
      = identity))&*P[r-1]&*(V+2*β*Matrix(n, shape = identity))) + 4*β*(α-γ)*P[r-1]) +2
      *β*(Q+γ*linalg[inverse](evalm(B&*transpose(B))))))&*linalg[inverse](V))):
od:
print('S_2', P[s]):
fi:
end:
```

5. Teorem 3.1.3 İçin Maple Prosedürü

```
Teorem3 :=proc(A, B, Q, α, β, δ, s)
local P, V, φ, r, n:
n := linalg[coldim](A): Digits := 5:
if not LinearAlgebra[IsDefinite](evalm(2*α*Matrix(n, shape = identity) -A-transpose(A)), query =
     'positive_definite') then print("α düzgün seç")
elif not 0 ≤ δ ≤ 1 then print("δ düzgün seç")
else
V := evalf(evalm(A-α*Matrix(n, shape = identity) -β*Matrix(n, shape = identity))):
φ := evalf(evalm((β
     *ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](transpose(linalg[inverse](V))&*(Q+α^2
     *linalg[inverse](evalm(B&*transpose(B))))&*linalg[inverse](V))]))/(1
     -ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](evalm(transpose(linalg[inverse](V))
     &*(transpose(V+β*Matrix(n, shape = identity))&*(V+β*Matrix(n, shape = identity))+β^2
     *Matrix(n, shape = identity))&*linalg[inverse](V)))])))):
P[0] := evalf(evalm(transpose(linalg[inverse](V))&*(φ*(transpose(V+β*Matrix(n, shape
     = identity))&*(V+β*Matrix(n, shape = identity)))+β^2*Matrix(n, shape = identity))+φ*β*δ
     *(V+transpose(V)+2*β*Matrix(n, shape = identity))+β*(1+δ)*(Q+α^2
     *linalg[inverse](evalm(B&*transpose(B))))&*linalg[inverse](V))):
print('P_u3', P[0]):
 for r from 1 to s do
P[r] := evalf(evalm(transpose(linalg[inverse](V))&*((transpose(V+β*Matrix(n, shape = identity))
     &*P[r-1]&*(V+β*Matrix(n, shape = identity)))+β^2*(1+2*δ)*P[r-1])+β*δ*evalm(P[r
     -1]&*V+transpose(V)&*P[r-1])+β*(1+δ)*(Q+α^2*linalg[inverse](evalm(B
     &*transpose(B))))&*linalg[inverse](V))):
od:
print('S_3', P[s]):
fi:
end:
```

6. Teorem 3.1.4 İçin Maple Prosedürü

```
Teorem4 :=proc(A, B, Q, α, β, s)
local P, V, φ, r, n:
n := linalg[coldim](A): Digits := 5:
if not LinearAlgebra[IsDefinite](evalm(2*β*Matrix(n, shape = identity) -A-transpose(A)), query =
     'positive_definite') then print("β düzgün seç")
elif not α-2*β ≥ 0 then print("α ve β düzgün seç")
else
V := evalf(evalm(A-α*Matrix(n, shape = identity))):
φ := evalf(evalm((α
     *ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](transpose(linalg[inverse](V))&*(Q+β^2
     *linalg[inverse](evalm(B&*transpose(B))))&*linalg[inverse](V))]))/(1
     -ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](evalm(transpose(linalg[inverse](V))
     &*(transpose(A)&*A+α*(α-2*β)*Matrix(n, shape = identity))&*linalg[inverse](V)))])))):
P[0] := evalf(evalm(transpose(linalg[inverse](V))&*(φ*(transpose(A)&*A+α*(α-2*β)
     *Matrix(n, shape = identity))+α*(Q+β^2*linalg[inverse](evalm(B&*transpose(B)))))
     &*linalg[inverse](V))):
```

```
print('P_u4', P[0]):
 for r from 1 to s do
P[r] := evalf(evalm(transpose(linalg[inverse](V))&*((transpose(A)&*P[r-1]&*A+α*(α-2*β)
      *P[r-1])+α*(Q+β^2*linalg[inverse](evalm(B&*transpose(B)))))&*linalg[inverse](V))):

 od:
 print('S_4', P[s]):
fi:
 end:
```

7. Teorem 3.1.5 İçin Maple Prosedürü

```
Teorem5 :=proc(A, B, Q, α, β, m, s)
local P, Z, V, φ, r, n :
n := linalg[coldim](A) : Digits := 5 :
if not m ≥ 1/2 then print("m düzgün seç")
elif not LinearAlgebra[IsDefinite](evalm(2*β*LinearAlgebra[MatrixFunction](evalm(B
      &*transpose(B)), (v)^m, v) - A - transpose(A)), query = 'positive_definite')
      then print("β düzgün seç")
else
Z := LinearAlgebra[MatrixFunction](evalm(B&*transpose(B)), (v)^(2m-1), v):
if Z = 1 then Z := Matrix(n, shape = identity):
fi:
V := evalf(evalm(A-α*Matrix(n, shape = identity) -β*LinearAlgebra[MatrixFunction](evalm(B
      &*transpose(B)), (v)^m, v))):
φ := evalf(evalm((α
      *ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](transpose(linalg[inverse](V))&*(Q+β^2
      *Z)&*linalg[inverse](V))]))/(1
      -ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](evalm(transpose(linalg[inverse](V))
      &*(transpose(V+α*Matrix(n, shape = identity))&*(V+α*Matrix(n, shape = identity))+α^2
      *Matrix(n, shape = identity))&*linalg[inverse](V)))])))):
P[0] := evalf(evalm(transpose(linalg[inverse](V))&*(φ*(transpose(V+α*Matrix(n, shape
      = identity))&*(V+α*Matrix(n, shape = identity))+α^2*Matrix(n, shape = identity))+α*(Q
      +β^2*Z))&*linalg[inverse](V))):
print('P_u5', P[0]):
 for r from 1 to s do
P[r] := evalf(evalm(transpose(linalg[inverse](V))&*((transpose(V+α*Matrix(n, shape = identity))
      &*P[r-1]&*(V+α*Matrix(n, shape = identity))+α^2*P[r-1])+α*(Q+β^2*Z))
      &*linalg[inverse](V))):
od:
print('S_5', P[s]):
fi:
end:
```

8. Teorem 3.1.6 İçin Maple Prosedürü

```
Teorem6 :=proc(A, B, Q, α, β, m, s)
local P, Z, V, f, r, n :
n := linalg[coldim](A) : Digits := 5 :
if not m ≥ 1/2 then print("m düzgün seç")
elif not LinearAlgebra[IsDefinite](evalm(2*β*LinearAlgebra[MatrixFunction](evalm(B
      &*transpose(B)), (v)^m, v) - A - transpose(A)), query = 'positive_definite')
      then print("β düzgün seç")
else
Z := LinearAlgebra[MatrixFunction](evalm(B&*transpose(B)), (v)^(2m-1), v):
if Z = 1 then Z := Matrix(n, shape = identity):
fi:
```

```
V := evalf(evalm(A − α*Matrix(n, shape = identity) − β*LinearAlgebra[MatrixFunction](evalm(B
     &*transpose(B)), (v)^m, v))) :
f := evalf(evalm((α
     *ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](transpose(linalg[inverse](V))&*(Q + β^2
     *Z)&*linalg[inverse](V))]))/(1
     − ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](evalm(transpose(linalg[inverse](V))
     &*(transpose(V + α*Matrix(n, shape = identity))&*(V + α*Matrix(n, shape = identity)) + α^2
     *Matrix(n, shape = identity))&*linalg[inverse](V)))])))) :
P[0] := evalf(evalm(transpose(linalg[inverse](V))&*(f*(transpose(V + 2*α*Matrix(n, shape
     = identity))&*(V + 2*α*Matrix(n, shape = identity))) + 2*α*(Q + β^2*Z))
     &*linalg[inverse](V))) :
print('P_u6', P[0]) :
for r from 1 to s do
P[r] := evalf(evalm(transpose(linalg[inverse](V))&*(transpose(V + 2*α*Matrix(n, shape
     = identity))&*P[r − 1]&*(V + 2*α*Matrix(n, shape = identity)) + 2*α*(Q + β^2*Z))
     &*linalg[inverse](V))) :
 od:
print('S_6', P[s]) :
fi:
end:
```

9. Teorem 3.1.8 İçin Maple Prosedürü

```
Teorem8 :=proc(A, B, Q, α, β, m, s)
local P, Z, V, φ, r, n :
n := linalg[coldim](A) : Digits := 5 :
if not type(m, integer) then print("m düzgün seç") elif not LinearAlgebra[IsDefinite](evalm(β
     *(LinearAlgebra[MatrixFunction](B, (v)^m, v) + transpose(LinearAlgebra[MatrixFunction](B, (v)^m,
     v))) − A − transpose(A)), query = 'positive_definite') then print("β düzgün seç")
else
Z := LinearAlgebra[MatrixFunction](B, (v)^(m − 1), v) :
if Z = 1 then Z := Matrix(n, shape = identity) :
fi:
V := evalf(evalm(A − α*Matrix(n, shape = identity) − β*LinearAlgebra[MatrixFunction](B, (v)^m, v))) :

φ := evalf(evalm((α
     *ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](transpose(linalg[inverse](V))&*(Q + β^2
     *transpose(Z)&*Z)&*linalg[inverse](V))]))/(1
     − ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](evalm(transpose(linalg[inverse](V))
     &*(transpose(V + α*Matrix(n, shape = identity))&*(V + α*Matrix(n, shape = identity)) + α^2
     *Matrix(n, shape = identity))&*linalg[inverse](V)))])))) :
P[0] := evalf(evalm(transpose(linalg[inverse](V))&*(φ*(transpose(V + α*Matrix(n, shape
     = identity))&*(V + α*Matrix(n, shape = identity)) + α^2*Matrix(n, shape = identity)) + α*(Q
     + β^2*transpose(Z)&*Z))&*linalg[inverse](V))) :
print('P_u8', P[0]) :
for r from 1 to s do
P[r] := evalf(evalm(transpose(linalg[inverse](V))&*((transpose(V + α*Matrix(n, shape = identity))
     &*P[r − 1]&*(V + α*Matrix(n, shape = identity)) + α^2*P[r − 1]) + α*(Q + β^2*transpose(Z)
     &*Z))&*linalg[inverse](V))) :
 od:
print('S_8', P[s]) :
fi:
end:
```

10. Teorem 3.1.9 İçin Maple Prosedürü

```
Teorem9 := proc(A, B, Q, α, β, m, s)
local P, Z, V, φ, r, n :
n := linalg[coldim](A) : Digits := 5 :
if not LinearAlgebra[IsDefinite](evalm(β*(LinearAlgebra[MatrixFunction](B, (v)^m, v)
    + transpose(LinearAlgebra[MatrixFunction](B, (v)^m, v))) - A - transpose(A)), query =
    'positive_definite') then print("β düzgün seç")
else
Z := LinearAlgebra[MatrixFunction](B, (v)^(m - 1), v) :
if Z = 1 then Z := Matrix(n, shape = identity) :
fi:
V := evalf(evalm(A - α*Matrix(n, shape = identity) - β*LinearAlgebra[MatrixFunction](B, (v)^m, v))) :

φ := evalf(evalm(((α
    *ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](transpose(linalg[inverse](V))&*(Q + β^2
    *transpose(Z)&*Z))&*linalg[inverse](V)]))/(1
    - ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](evalm(transpose(linalg[inverse](V))
    &*(transpose(V + α*Matrix(n, shape = identity)))&*(V + α*Matrix(n, shape = identity)) + α^2
    *Matrix(n, shape = identity))&*linalg[inverse](V))])))) :
P[0] := evalf(evalm(transpose(linalg[inverse](V))&*(φ*(transpose(V + 2*α*Matrix(n, shape
    = identity))&*(V + 2*α*Matrix(n, shape = identity))) + 2*α*(Q + β^2*transpose(Z)&*Z))
    &*linalg[inverse](V))) :
print('P_u9', P[0]) :
for r from 1 to s do
P[r] := evalf(evalm(transpose(linalg[inverse](V))&*(transpose(V + α*Matrix(n, shape = identity))
    &*P[r - 1]&*(V + α*Matrix(n, shape = identity)) + 2*α*(Q + β^2*transpose(Z)&*Z))
    &*linalg[inverse](V))) :
od:
print('S_9', P[s]) :
fi:
end:
```

11. Teorem 3.1.20 İçin Maple Prosedürü

```
Teorem20 := proc(A, B, Q, X, s)
local P, M, ϕ, r, η, 𝕄, n :
n := linalg[coldim](A) : Digits := 5 :
if not LinearAlgebra[IsDefinite](X, query = 'positive_definite') then print("X düzgün seç")
else
M := evalf(evalm(B&*transpose(B) + A&*X&*transpose(A))) :
η := η_i :
𝕄 := evalf(evalm((ListTools[FindMaximalElement](evalf(linalg[singularvals](A))))^2 * η/2
    *Matrix(n, shape = identity) + A&*linalg[inverse](X))) :
ϕ := evalf(evalm(1/(2*ListTools[FindMinimalElement]([linalg[eigenvalues](M)])
    *(ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](X)]))*(1
    + (ListTools[FindMaximalElement](evalf(linalg[singularvals](𝕄))))^2)
    + sqrt((ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](X)]))*(1
    + (ListTools[FindMaximalElement](evalf(linalg[singularvals](𝕄))))^2))^2 + 4
    *ListTools[FindMinimalElement]([linalg[eigenvalues](M)])
    *ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](Q - linalg[inverse](X)
    + ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](X)])*(linalg[inverse](X))^2)])))) :
```

```
P[0]
      := LinearAlgebra[MatrixFunction](evalf(evalm(1/
      (ListTools[FindMinimalElement]([linalg[eigenvalues](M)])) *(Q-linalg[inverse](X)
      +ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](X)]) *(linalg[inverse](X))^2
      +ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](X)]) *φ*(Matrix(n, shape=identity)
      +transpose(M)&*M)))), sqrt(v), v) :
print('P_u20', P[0]) :
 for r from 1 to s do
P[r]
      := LinearAlgebra[MatrixFunction](evalf(evalm(1/
      (ListTools[FindMinimalElement]([linalg[eigenvalues](M)])) *(Q-linalg[inverse](X)
      +ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](X)]) *(linalg[inverse](X))^2
      +ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](X)]) *(P[r-1]+transpose(M)&*P[r
      -1]&*M)))), sqrt(v), v);
od:
print('S_11', P[s]) :
fi:
end:
```

12. Teorem 3.1.21 İçin Maple Prosedürü

```
Teorem21 :=proc(A, B, Q, X, s)
local P, M, φ, r, η, M, n :
n := linalg[coldim](A) : Digits := 5 :
if not LinearAlgebra[IsDefinite](X, query='positive_definite') then print("X düzgün seç")
else
M := evalf(evalm(B&*transpose(B)+X)) :
η := η_i :
M := evalf(evalm(η/2 *Matrix(n, shape=identity)+linalg[inverse](X)&*A)) :
φ := evalf(evalm(1/(2*ListTools[FindMinimalElement]([linalg[eigenvalues](M)])
      *(ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](X)]) *(1
      +(ListTools[FindMaximalElement](evalf(linalg[singularvals](M))))^2)
      +sqrt((ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](X)]) *(1
      +(ListTools[FindMaximalElement](evalf(linalg[singularvals](M))))^2))^2+4
      *ListTools[FindMinimalElement]([linalg[eigenvalues](M)])
      *ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](Q-transpose(A)&*linalg[inverse](X)&*A
      +linalg[eigenvalues](X)[n] *transpose(A)&*(linalg[inverse](X))^2&*A)])))))) :
P[0]
      := LinearAlgebra[MatrixFunction](evalf(evalm(1/
      (ListTools[FindMinimalElement]([linalg[eigenvalues](M)])) *(Q-transpose(A)
      &*linalg[inverse](X)&*A+ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](X)])
      *transpose(A)&*(linalg[inverse](X))^2&*A
      +ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](X)]) *φ*(Matrix(n, shape=identity)
      +transpose(M)&*M)))), sqrt(v), v) :
print('P_u21', P[0]) :
for r from 1 to s do
P[r]
      := LinearAlgebra[MatrixFunction](evalf(evalm(1/
      (ListTools[FindMinimalElement]([linalg[eigenvalues](M)])) *(Q-transpose(A)
      &*linalg[inverse](X)&*A+ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](X)])
      *transpose(A)&*(linalg[inverse](X))^2&*A
      +ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](X)]) *(P[r-1]+transpose(M)&*P[r
      -1]&*M)))), sqrt(v), v) :
od:
print('S_12', P[s]) :

fi: end:
```

13. Teorem 3.1.22 İçin Maple Prosedürü

```
Teorem22 := proc(A, B, Q, X, s)
local P, M, ϕ, r, n :
n := linalg[coldim](A) : Digits := 5 :
if not LinearAlgebra[IsDefinite](X, query = 'positive_definite') then print("X düzgün seç")
elif not LinearAlgebra[IsDefinite](evalm(B&*transpose(B) - A&*X&*transpose(A)) , query =
    'positive_definite') then print("X düzgün seç")

else
M := evalf(evalm(B&*transpose(B) - A&*X&*transpose(A)
    + ListTools[FindMinimalElement]([linalg[eigenvalues](X)]) * (A&*transpose(A))));
ϕ := evalf(evalm( 1
    / (2 * ListTools[FindMinimalElement]([linalg[eigenvalues](M)])
    * ( ListTools[FindMinimalElement]([linalg[eigenvalues](X)]) * (1
    + (ListTools[FindMaximalElement](evalf(linalg[singularvals](evalm(A
    &*linalg[inverse](X))))))^2)
    + sqrt(( ListTools[FindMinimalElement]([linalg[eigenvalues](X)]) * (1
    + (ListTools[FindMaximalElement](evalf(linalg[singularvals](evalm(A
    &*linalg[inverse](X))))))^2))^2 + 4 * ListTools[FindMinimalElement]([linalg[eigenvalues](M)])
    * ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues]]((Q + linalg[inverse](X)
    - linalg[eigenvalues](X)[1] * (linalg[inverse](X))^2))])))))) :
P[0]
    := LinearAlgebra[MatrixFunction](evalf(evalm(1/
    (ListTools[FindMinimalElement]([linalg[eigenvalues](M)]))) * ( Q + linalg[inverse](X)
    - ListTools[FindMinimalElement]([linalg[eigenvalues](X)]) * (linalg[inverse](X))^2
    + ListTools[FindMinimalElement]([linalg[eigenvalues](X)]) * ϕ * (Matrix(n, shape = identity)
    + (linalg[inverse](X)&*transpose(A)&*A&*linalg[inverse](X))))), sqrt(v), v) :
print('P_u22', P[0]) :
  for r from 1 to s do
P[r]
    := LinearAlgebra[MatrixFunction](evalf(evalm(1/
    (ListTools[FindMinimalElement]([linalg[eigenvalues](M)]))) * ( Q + linalg[inverse](X)
    - ListTools[FindMinimalElement]([linalg[eigenvalues](X)]) * (linalg[inverse](X))^2
    + ListTools[FindMinimalElement]([linalg[eigenvalues](X)]) * (P[r - 1] + (linalg[inverse](X)
    &*transpose(A)&*P[r - 1]&*A&*linalg[inverse](X))))), sqrt(v), v) :
od:
print('S_13', P[s]) :
fi:
end:
```

14. Teorem 3.1.23 İçin Maple Prosedürü

```
Teorem23 := proc(A, B, Q, X, s)
 local P, M, ϕ, r, n :
n := linalg[coldim](A) : Digits := 5 :
if not LinearAlgebra[IsDefinite](X, query = 'positive_definite') then print("X düzgün seç")
elif not LinearAlgebra[IsDefinite](evalm(B&*transpose(B) - X) , query = 'positive_definite')
    then print("X düzgün seç")
else
M := evalf(evalm(B&*transpose(B) - X + ListTools[FindMinimalElement]([linalg[eigenvalues](X)])
    * (Matrix(n, shape = identity))));
```

```
φ := evalf( evalm( 1/(2*ListTools[FindMinimalElement]([linalg[eigenvalues](M)])
    *( ListTools[FindMinimalElement]([linalg[eigenvalues](X)])*(1
    +(ListTools[FindMaximalElement](evalf(linalg[singularvals]((evalm(linalg[inverse](X)
    &*A)))))^2) +sqrt((ListTools[FindMinimalElement]([linalg[eigenvalues](X)])*(1
    +(ListTools[FindMaximalElement](evalf(linalg[singularvals]((evalm(linalg[inverse](X)
    &*A)))))^2))^2 +4*ListTools[FindMinimalElement]([linalg[eigenvalues](M)])
    *ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues]((Q+transpose(A)&*linalg[inverse](X)
    &*A-linalg[eigenvalues](X)[1]*transpose(A)&*(linalg[inverse](X))^2&*A))])))))):
P[0]
    := LinearAlgebra[MatrixFunction](evalf(evalm(1/
    (ListTools[FindMinimalElement]([linalg[eigenvalues](M)]))*(Q+transpose(A)
    &*linalg[inverse](X)&*A-ListTools[FindMinimalElement]([linalg[eigenvalues](X)])
    *transpose(A)&*(linalg[inverse](X))^2&*A
    +ListTools[FindMinimalElement]([linalg[eigenvalues](X)])*φ*(Matrix(n, shape=identity)
    +transpose(A)&*(linalg[inverse](X))^2&*A)))), sqrt(v), v):
print('P_u23', P[0]):
 for r from 1 to s do
P[r]
    := LinearAlgebra[MatrixFunction](evalf(evalm(1/
    (ListTools[FindMinimalElement]([linalg[eigenvalues](M)]))*(Q+transpose(A)
    &*linalg[inverse](X)&*A-ListTools[FindMinimalElement]([linalg[eigenvalues](X)])
    *transpose(A)&*(linalg[inverse](X))^2&*A
    +ListTools[FindMinimalElement]([linalg[eigenvalues](X)])*(P[r-1]+transpose(A)
    &*linalg[inverse](X)&*P[r-1]&*linalg[inverse](X)&*A)))), sqrt(v), v);
 od:
 print('S_14', P[s]):
 fi:
 end:
```

EK-2 Ayrık Cebirsel Riccati Matris Denklemi İçin Maple Prosedürleri

1. Teorem 4.1.1 İçin Maple Prosedürü

```
Teorem1 :=proc(A, B, Q, K, s)
local P, r, n :
n := linalg[coldim](A) : Digits := 5 :
if not abs(op(1, ( sort( [seq(op(i, [linalg[eigenvalues](evalm(A+B&*K))]), i=1..n)], `>`))))) < 1
    then print("K düzgün seç")
elif not ListTools[FindMaximalElement](evalf(linalg[singularvals](evalm(A+B&*K))))^2 < 1
    then print("K düzgün seç")
else
P[0] := evalf(evalm(((ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](transpose(evalm(A+B
    &*K))&*(Q+transpose(K)&*K)&*(A+B&*K))]))/(1
    -ListTools[FindMaximalElement](evalf(linalg[singularvals](evalm(A+B&*K))))^2)*Matrix(n,
    shape=identity)+Q+transpose(K)&*K)) :
print('P_U1', P[0]) :
  for r from 1 to s do
P[r] := evalf(evalm(transpose(A)&*linalg[inverse](Matrix(n, shape=identity)+P[r-1]&*B
    &*transpose(B))&*P[r-1]&*A+Q)) :
od:
print('T_1', P[s]) :
fi:
end:
```

2. Teorem 4.1.2 İçin Maple Prosedürü

```
Teorem2 :=proc(A, B, Q, K, ε, s)
local P, r, n :
n := linalg[coldim](A) : Digits := 5 :
if not abs(op(1, ( sort( [seq(op(i, [linalg[eigenvalues](evalm(A+B&*K))]), i=1..n)], `>`))))) < 1
    then print("K düzgün seç")
elif not ε < 1 then print("ε düzgün seç")
elif not LinearAlgebra[IsDefinite](evalm(ε*(Q+transpose(K)&*K)-transpose(A+B&*K)&*(Q
    +transpose(K)&*K)&*(A+B&*K)), query='positive_definite')
    then print("ε ve K düzgün seç")
else
P[0] := evalf(evalm((1/(1-ε))*(Q+transpose(K)&*K))) :
print('P_U2', P[0]) :
for r from 1 to s do
P[r] := evalf(evalm(transpose(A)&*linalg[inverse](Matrix(n, shape=identity)+P[r-1]&*B
    &*transpose(B))&*P[r-1]&*A+Q)) :
od:
print('T_2', P[s]) :
fi:
end:
```

3. Teorem 4.1.3 İçin Maple Prosedürü

```
Teorem3 :=proc(A, B, Q, K, ε, s)
local P, r, n :
n := linalg[coldim](A) : Digits := 5 :
if not abs(op(1, ( sort( [seq(op(i, [linalg[eigenvalues](evalm(A+B&*K))]), i=1..n)], `>`))))) < 1
    then print("K düzgün seç")
elif not ε < 1 then print("ε düzgün seç")
elif not LinearAlgebra[IsDefinite](evalm(ε*(Q+transpose(K)&*K)
    -ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](Q+transpose(K)&*K)])
    *ListTools[FindMaximalElement](evalf(linalg[singularvals](evalm(A+B&*K))))^2*Matrix(n,
    shape=identity)), query='positive_definite') then ("ε ve K düzgün seç")
else
```

```
P[0] := evalf(evalm(((1/(1-ε)))*(transpose(evalm(A+B&*K))&*(Q+transpose(K)&*K)&*(A+B
    &*K)+Q+transpose(K)&*K))):
print('P_U3', P[0]):
 for r from 1 to s do
 P[r] := evalf(evalm(transpose(A)&*linalg[inverse](Matrix(n, shape=identity)+P[r-1]&*B
    &*transpose(B))&*P[r-1]&*A+Q)):
 od:
 print('T_3', P[s]):
fi:
end:
```

4. Teorem 4.1.4 İçin Maple Prosedürü

```
Teorem4 := proc(A, B, Q, K, s)
local P, r, n:
n := linalg[coldim](A): Digits := 5:
if not abs(op(1, (sort([seq(op(i, [linalg[eigenvalues](evalm(A+B&*K))]), i=1..n)], `>`)))) < 1
    then print("K düzgün seç")
elif not ListTools[FindMaximalElement](evalf(linalg[singularvals](evalm(A+B&*K))))^2 < 1
    then print("K düzgün seç")
else
P[0]
    := evalf(evalm(((ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](evalm(Q
    +transpose(K)&*K))]))/(1
    -ListTools[FindMaximalElement](evalf(linalg[singularvals](evalm(A+B&*K))))^2))
    *transpose(evalm(A+B&*K))&*(A+B&*K)+Q+transpose(K)&*K)):
print('P_U4', P[0]):
for r from 1 to s do
P[r] := evalf(evalm(transpose(A)&*linalg[inverse](Matrix(n, shape=identity)+P[r-1]&*B
    &*transpose(B))&*P[r-1]&*A+Q)):
od:
print('T_4', P[s]):
fi:
end:
```

5. Teorem 4.1.5 İçin Maple Prosedürü

```
Teorem5 := proc(A, B, Q, K, R, s)
local P, r, κ, n:
n := linalg[coldim](A): Digits := 5:
if not abs(op(1, (sort([seq(op(i, [linalg[eigenvalues](evalm(A+B&*K))]), i=1..n)], `>`)))) < 1
    then print("K düzgün seç")
elif LinearAlgebra[Determinant](R) = 0 then print("R düzgün seç")
elif not ListTools[FindMaximalElement](evalf(linalg[singularvals](evalm(R&*(A+B&*K)
    &*linalg[inverse](R))))^2 < 1 then print("R ve K düzgün seç")
else
κ
    := evalf(evalm(((ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](evalm(transpose(linalg[
    inverse](R))&*(transpose(evalm(A+B&*K))&*(Q+transpose(K)&*K)&*(A+B&*K))
    &*linalg[inverse](R)))]))/(1
    -ListTools[FindMaximalElement](evalf(linalg[singularvals](evalm(R&*(A+B&*K)
    &*linalg[inverse](R))))^2))):
P[0] := evalf(evalm(κ*transpose(R)&*R+Q+transpose(K)&*K)):
print('P_U5', P[0]):
for r from 1 to s do
```

```
P[r] := evalf(evalm(transpose(A)&* linalg[inverse](Matrix(n, shape = identity) +P[r − 1]&*B
    &*transpose(B))&*P[r − 1]&*A + Q)) :
od:
print('T5', P[s]) :
fi:
end:
```

6. Teorem 4.1.6 İçin Maple Prosedürü

```
Teorem6 :=proc(A, B, Q, K, ε, R, s)
local P, r, n :
n := linalg[coldim](A) : Digits := 5 :
if not abs(op(1, (sort([seq(op(i, [linalg[eigenvalues](evalm(A + B&*K))]), i = 1 .. n)], `>`)))) < 1
    then print("K düzgün seç")
elif LinearAlgebra[Determinant](R) = 0 then print("R düzgün seç")
elif not ε < 1 then print("ε düzgün seç")
elif not
        LinearAlgebra[IsDefinite](evalm((ε/
    (ListTools[FindMaximalElement]([linalg[eigenvalues](evalm(transpose(linalg[inverse](R))&*(Q
    + transpose(K)&*K)&*linalg[inverse](R)))]))) *(transpose(linalg[inverse](R))&*(Q
    + transpose(K)&*K)&*linalg[inverse](R))
    − ListTools[FindMaximalElement](evalf(linalg[singularvals](evalm(R&*(A + B&*K)
    &*linalg[inverse](R))))^2 *Matrix(n, shape = identity)), query = 'positive_definite')
    then print("ε, K ve R düzgün seç")
 else
P[0] := evalf(evalm((1/(1 − ε))*(transpose(A + B&*K)&*(Q + transpose(K)&*K)&*(A + B&*K)
    + Q + transpose(K)&*K))) :
print('PU6', P[0]) :
for r from 1 to s do
P[r] := evalf(evalm(transpose(A)&* linalg[inverse](Matrix(n, shape = identity) +P[r − 1]&*B
    &*transpose(B))&*P[r − 1]&*A + Q)) :
od:
print('T6', P[s]) :
fi:
end:
```

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Zübeyde ULUKÖK
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Kulu, 05.06.1986
Telefon : 0(332) 223 39 62
Faks : 0(332) 241 24 99
e-mail : zulukok@selcuk.edu.tr

EĞİTİM

Derece		Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	:	Kulu Lisesi, Kulu, Konya	2002
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2007
Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2009
Doktora	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2014

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2008-2014	Selçuk Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

UZMANLIK ALANI

Matris Teori ve Uygulamaları

YABANCI DİLLER

İngilizce

YAYINLAR

A. Uluslararası hakemli dergilerde yayınlanan makaleler

A1. Ulukök Z., Türkmen R., On some matrix trace inequalities, Journal of Inequalities and Applications, Article ID 201486, 8 pages, doi:10.1155/2010/201486, 2010. (Yüksek Lisans Tezinden)

A2. Türkmen R., **Ulukök Z.,** On the Frobenius condition number of positive definite matrices, Journal of Inequalities and Applications, Article ID 897279, 11 pages, doi:10.1155/2010/897279, 2010.

A3. Ulukök Z., Türkmen R., Inequalities for Quaternion matrices, Selçuk J. Appl. Math., Special Issue, 87-94, 2010.

A4. Ulukök Z., Türkmen R., Trace Inequalities for Operations of Matrix Powers by Aid of Block Matrices, Int. J. Contemp. Math. Sciences, 6, 26, 1261 – 1270, 2011.

A5. Türkmen R., **Ulukök Z.,** Inequalities for Singular Values of Positive Semidefinite Block Matrices, International Mathematical Forum, 6, 31, 1535 – 1545, 2011. (Yüksek Lisans Tezinden)

A6. Ulukök Z., Türkmen R., New upper bounds on the solution matrix to the continuous algebraic Riccati matrix equation, Journal of the Franklin Institute, 350, 3417–3431, 2013. (Doktora Tezinden)

A7. Ulukök Z., Türkmen R., Improved upper bounds for the solution of the continuous algebraic Riccati matrix equation, Applied Mathematics and Computation, 225 , 306–317, 2013. (Doktora Tezinden)

A8. Ulukök Z., Türkmen R., Some Upper Matrix Bounds for the Solution of the Continuous Algebraic Riccati Matrix Equation, Journal of Applied Mathematics, Article ID 792782, 9 pages, http://dx.doi.org/10.1155/2013/792782, 2013. (Doktora Tezinden)

A9. Ulukök Z., Türkmen R., On the upper bounds for the solution matrix of the discrete algebraic Riccati matrix equation, 2013, Submitted. (Doktora Tezinden)

B- Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitabında basılan bildiriler

B1. Ulukök Z., Türkmen R., Some bounds for the singular values of matrices using the trace and determinant, Proceedings of the first international conference on mathematics and statistics, 2010, Sharjah,U.A.E.

B2. Ulukök Z., Türkmen R., Trace inequalities for matrices, ICCAM 2009, Antalya, Turkey.

B3. Ulukök Z., Türkmen R., New Bounds for the Solution of the Algebraic Matrix Riccati Equation, International Conference On Applied Analysis and Algebra, 2011, İstanbul, Turkey.

B4. Ulukök Z., Türkmen R., Matrix Bounds for the Solution of the Discrete Algebraic Riccati Matrix Equation, MATTRIAD' 2011-International Conference on Matrix Analysis and its Applications, 2011, Tomar, Portugal.

B5. Türkmen R., **Ulukök Z.,** Inequalities involving the Kronecker products and the Hadamard products of matrices, MATTRIAD' 2011-International Conference on Matrix Analysis and its Applications, 2011, Tomar, Portugal.

B6. Ulukök Z., Türkmen R., The well known inequalities and applications to matrices, The 24th International Conference of Jangeon Mathematical Society, 2011, Konya, Turkey.

B7. Ulukök Z., Türkmen R., Upper bounds on the solution of the continuous algebraic Riccati matrix equation, 2012 SIAM Conference on Applied Linear Algebra, Valencia, Spain.

B8. Ulukök Z., Türkmen R., More upper and lower bounds for the continuous algebraic Riccati matrix equation, 4th International Conference on Matrix Analysis and Applications, 2013, Konya, Turkey.

B9. Ulukök Z., Türkmen R., On the Continuous Algebraic Riccati Matrix Equation and Bounds for the Solution Matrix, 2nd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, 2013, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina.

E- Ulusal bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitabında basılan bildiriler

E1. Türkmen R., **Ulukök Z.,** Pozitif Tanımlı Matrislerin Şart Sayıları Üzerine, 5.Ankara Matematik Günleri, 2010.

E2. Ulukök Z., Türkmen R., Kuaterniyon Matrisler İçin Eşitsizlikler, 2. Ulusal Konya Ereğli Kemal Akman Meslek Yüksekokulu Tebliğ Günleri, 13-14 Mayıs 2010.

E3. Ulukök Z., Türkmen R., Matrislerin Hadamard Çarpımları İçin Eşitsizlikler, 2. Ulusal Konya Ereğli Kemal Akman Meslek Yüksekokulu Tebliğ Günleri, 28-29 Nisan 2011.