Agrociencia
ISSN: 1405-3195
agrocien@colpos.mx
Colegio de Postgraduados
México

Villaseñor-Alva, José A.; Luna-Espinoza, Ignacio
Pruebas de autocorrelación e independencia y su relación con la hipótesis de martingala
Agrociencia, vol. 39, núm. 1, enero-febrero, 2005, pp. 65-79
Colegio de Postgraduados
Texcoco, México

Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=30239107

Cómo citar el artículo
Número completo
Más información del artículo
Página de la revista en redalyc.org

Sistema de Información Científica
Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

PRUEBAS DE AUTOCORRELACIÓN E INDEPENDENCIA Y SU RELACIÓN CON LA HIPÓTESIS DE MARTINGALA

AUTOCORRELATION AND INDEPENDENCE TESTS AND THEIR RELATION TO THE MARTINGALE HYPOTHESIS

José A. **Villaseñor-Alva** e Ignacio **Luna-Espinoza**

Programa en Estadística. Instituto de Socioeconomía, Estadística e Informática. ISEI. Colegio de Postgraduados. 56230. Montecillo, Estado de México. (jvillasr@colpos.mx) (i_moon@mixmail.com)

Resumen

En estudios financieros generalmente se presenta el problema de conocer el comportamiento estocástico de una serie de tiempo $\{Z_i\}_{i=1}^n$. Para ello, es común suponer que $\{Z_i\}_{i=1}^n$ es una realización de una martingala. Es bien conocido que este proceso estocástico posee incrementos no correlacionados con media constante igual a cero. Con base en estas propiedades y bajo supuestos débiles sobre el proceso, en este trabajo se proponen siete pruebas de bondad de ajuste para la hipótesis de martingala. Las potencias de estas pruebas son analizadas y comparadas por medio de simulación de Monte Carlo junto con la potencia de la prueba propuesta por Lobato (2001).

Palabras clave: Martingalas, procesos estocásticos, pruebas de bondad de ajuste.

Introducción

El análisis de una sucesión de variables aleatorias (v.a.) bajo el supuesto de la propiedad de martingala ha sido ampliamente utilizado en desarrollos teóricos, tales como en el estudio de la convergencia de estimadores, el cálculo de probabilidades de absorción y el análisis secuencial de decisiones. Asimismo, la hipótesis de martingala es muy importante en la economía financiera como una condición para tener un juego justo, en el sentido de que el valor esperado de cualquier diferencia entre los componentes de un proceso respecto a un conjunto de información disponible es cero. En este trabajo se proponen metodologías estadísticas alternativas que permiten probar la hipótesis de martingala con base en una realización finita de un proceso estocástico (PE) y bajo supuestos débiles del mismo.

Una martingala se define formalmente de la siguiente manera. Sea $\{X_n; n \geq 1\}$ una sucesión finita o infinita de variables o vectores aleatorios, $X_n=(X_1,\ldots,X_n)$, $n\geq 1$; D_n un subconjunto para el cual $P(X_n\in D_n) = 1$, para toda $n\geq 1$; $w_1, w_2, w_3,\ldots$ una sucesión de funciones reales con

Recibido: Abril, 2003. Aprobado: Noviembre, 2004.
Publicado como ENSAYO en Agrociencia 39: 65-79. 2005.

Abstract

In financial studies, not knowing the stochastic behavior of a time series $\{Z_i\}_{i=1}^n$ is generally a problem. In order to ascertain this behavior, it is common to assume that $\{Z_i\}_{i=1}^n$ is a realization of a martingale. It is well known that this stochastic process has non-correlated increments with a constant mean equal to zero. Based on these properties and under weak assumptions on the process, in this paper seven goodness-of-fit tests are proposed for the martingale hypothesis. The powers of these tests are analyzed and compared by means of Monte Carlo simulation, together with the power of a test proposed by Lobato (2001).

Key words: Martingales, stochastic processes, goodness-of-fit tests.

Introduction

The analysis of a succession of random variables (r.v.) under the assumption of the martingale property has been widely used in theoretical developments, such as in the study of the convergence of estimators, calculation of absorption probabilities, and sequential analysis of decisions. The martingale hypothesis is also very important in financial economics as a condition for fair play, in the sense that the expected value of any difference among the components of a process, with respect to a set of available information is zero. In this study, alternative statistical methods are proposed to test the martingale hypothesis based on a finite realization of a stochastic process under weak assumptions.

A martingale is formally defined in the following manner. Let $\{X_n; n \geq 1\}$ be a finite or infinite succession of random variables or vectors, $X_n=(X_1,\ldots,X_n)$, $n=1$; D_n a subset for which $P(X_n\in D_n) = 1$ for all $n\geq 1$; $w_1, w_2, w_3,\ldots$ a succession of real functions with dominions D_1, D_2, D_3,...; and $\{Y_n; n \geq 1\}$ a succession of random variables (r.v.) defined by $Y_n= w_n(X_1,\ldots, X_n)$, $n\geq 1$.

Definition

The succession of r.v. $\{Y_n; n \geq 1\}$ is a martingale with respect to $\{X_n; n \geq 1\}$ if, and only if, 1)

dominios D_1, D_2, D_3,...; y $\{Y_n; n \geq 1\}$ una sucesión de v.a. definidas por $Y_n = w_n(X_1,\ldots, X_n)$, $n \geq 1$.

Definición

La sucesión de v.a. $\{Y_n; n \geq 1\}$ es una martingala respecto a $\{X_n; n \geq 1\}$ si y sólo si 1) $E(|Y_n|) < \infty$ y, 2) $E(Y_{n+1} / X_n) = Y_n$ (Woodroofe, 1971).

Haciendo uso de las propiedades de esperanzas condicionadas es posible demostrar los siguientes resultados.

Teorema 1

Si $\{Y_n; n \geq 1\}$ es una martingala respecto a $\{X_n; n \geq 1\}$, con $E\{Y_n^2\} < \infty$, entonces:

i) $E\{Y_{n+m} | X_1, X_2, ..., X_n\} = Y_n$ para todas n y m mayores o iguales que 1.

ii) $E\{Y_{n+m} - Y_m\} = 0$ para todas n y m mayores o iguales que 1.

iii) La covarianza de incrementos que no se traslapan es igual a 0.

Una propiedad de los PE con incrementos independientes es:

Teorema 2

Si $\{Y_n; n \geq 1\}$ es un PE con incrementos independientes de media cero, entonces el proceso es una martingala.

Con base en los Teoremas 1 y 2, los procesos $\{Y_n; n \geq 1\}$ que satisfacen $E\{Y_{n+m} - Y_m\} = 0$ y tales que tienen incrementos independientes resultan ser martingalas; y éstas a su vez son procesos con incrementos no correlacionados. Es decir, la hipótesis de martingala es una propiedad de dependencia de los incrementos del proceso que se encuentra entre independencia y no correlación.

Por tanto, con base en la independencia o la no correlación de los incrementos, es posible confrontar a favor o en contra la información que contiene una realización finita de un proceso, con la hipótesis de martingala. Sin embargo, en el análisis de datos es bien conocido que no existen métodos estadísticos suficientemente precisos que, con base en una muestra, permitan diferenciar contundentemente a un proceso de variables independientes de uno de variables no correlacionadas (Cuadro 4, proceso NOC). Consecuentemente, es difícil distinguir

$E(|Y_n|) < \infty$ and, 2) $E(Y_{n+1} / X_n) = Y_n$ (Woodroofe, 1971).

Making use of the conditional expectations properties, it is possible to demonstrate the following results:

Theorem 1

If $\{Y_n; n \geq 1\}$ is a martingale with respect to $\{X_n; n \geq 1\}$, where $E\{Y_n^2\} < \infty$, then:

i) $E\{Y_{n+m} | X_1, X_2, ..., X_n\} = Y_n$ for all n and m greater than or equal to 1.

ii) $E\{Y_{n+m} - Y_m\} = 0$ for all n and m greater than or equal to 1.

iii) The covariance of increments that do not overlap is equal to 0.

A property of stochastic processes (SP) with independent increments is:

Theorem 2

If $\{Y_n; n \geq 1\}$ is a SP with independent increments with mean zero, then the process is a martingale.

Based on Theorems 1 and 2, the $\{Y_n; n \geq 1\}$ processes that satisfy $E\{Y_{n+m} - Y_m\} = 0$ and have independent increments, prove to be martingales, and these in turn are processes with non-correlated increments. That is, the martingale hypothesis has the property of dependence of increments of the process, which lies between independence and non-correlation.

Therefore, on the basis of independence or non-correlation of the increments, it is possible to confront, in favor of or against, the information that contains a finite realization of a process with the martingale hypothesis. However, in data analysis it is commonly known that there are no statistical methods precise enough to differentiate conclusively between a process of independent variables from one of non-correlated variables on the basis of one sample (Table 4, NOC process). Consequently, it is difficult to distinguish the martingale hypothesis from that of non-correlation. However, testing the martingale hypothesis is not equivalent to testing that the process has independent or non-correlated increments.

Under the assumption that we have a Gaussian process (all the joint distributions of the variables of the process are normal) with zero mean increments, the martingale hypothesis is equivalent to increments being independent, which in turn is equivalent to the process having non-correlated increments.

la hipótesis de martingala de la de no correlación; sin embargo, evidentemente probar la hipótesis de martingala no es lo mismo que probar que el proceso tiene incrementos independientes o no correlacionados.

Bajo el supuesto de que se tiene un proceso Gaussiano (todas las distribuciones conjuntas de las variables del proceso son normales) con incrementos de media cero, la hipótesis de martingala es equivalente a que los incrementos son independientes, lo cual equivale a que el proceso tiene incrementos no correlacionados.

El problema de probar la hipótesis de martingala ha sido abordado por otros autores. A continuación se presenta una breve revisión de publicaciones recientes sobre pruebas estadísticas para la hipótesis de martingala.

De acuerdo con el Teorema 2, para que un PE sea una martingala se requiere probar que los incrementos son independientes; sin embargo, no es fácil probar que un proceso tiene incrementos independientes sin la suposición de distribuciones idénticas (Campbell *et al*., 1997). Aun las pruebas no paramétricas para verificar independencia requieren de algún supuesto sobre las distribuciones de las observaciones. Ross (1996) menciona que la verificación de incrementos independientes en procesos Poisson, usualmente se determina del conocimiento del proceso.

Utilizando la propiedad de incrementos no correlacionados, Cochrane (1988) y Lo y MacKinlay (1988) desarrollaron una metodología para probar la hipótesis de martingala. La prueba se basa en el estadístico de la razón de la varianza de la k-ésima diferencia y k veces la varianza de la primera diferencia de la serie de tiempo. Lo y MacKinlay (1988) obtuvieron la distribución asintótica de la razón de varianzas bajo los supuestos de normalidad y estacionaridad en los incrementos del proceso.

Durlauf (1991) utilizó la densidad espectral para probar la hipótesis de martingala. En su investigación expone que bajo la suposición de martingala y estacionaridad, la función de densidad espectral de las primeras diferencias de la sucesión de v.a. tiene forma rectangular.

Bajo el supuesto de que se tiene un PE estrictamente estacionario y ergódico, Domínguez y Lobato (2002) desarrollaron una prueba para verificar la hipótesis de diferencia de martingala usando un procedimiento de remuestreo modificado.

Como se puede observar en los trabajos citados, las pruebas son aplicables bajo supuestos que no necesariamente son satisfechos por el proceso en cuestión, y no existe metodología estadística para verificarlos.

En la sección de Materiales y Métodos se discuten algunas pruebas no paramétricas conocidas para probar estadísticamente si los incrementos son, ya sea independientes, o no correlacionados y con media cero. Estas

The problem of proving the martingale hypothesis has been approached by other authors. Next, we present a brief review of recent publications on statistical tests for the martingale hypothesis.

According to Theorem 2, for a SP to be a martingale, it must be proved that the increments are independent. However, it is not easy to prove that a process has independent increments without assuming identical distributions (Campbell *et al*., 1997). Even the non-parametric tests to verify independence require some assumption on the distributions of the observations. Ross (1996) mentions that verification of independent increments in Poisson processes are usually determined from knowledge of the process.

Using the property of non-correlated increments, Cochrane (1988) and Lo and MacKinlay (1988) developed a methodology to test the martingale hypothesis. The test is based on the statistic of the proportion of variance of the k^{th} difference and k times the variance of the first difference of the time series. Lo and MacKinlay (1988) obtained the asymptotic distribution of the variances' ratio under the assumptions of normal and stationary increments of the process.

Durlauf (1991) used spectral density to test the martingale hypothesis. In his research, he shows that under the assumption that a process is a martingale and stationary, the function of spectral density of the first differences of the succession of r.v. has a rectangular form.

Under the assumption that a SP is strictly stationary and ergodic, Domínguez and Lobato (2002) developed a test to verify the martingale difference hypothesis using a procedure of modified re-sampling.

As can be observed in the works cited, the tests are applicable under assumptions that are not necessarily satisfied by the process in question, and there is no statistical methodology to verify them.

In the Materials and Methods' section some known non-parametric tests to prove statistically whether the increments are either independent or non-correlated and with zero mean are discussed. These tests have been selected because it is possible to implement them under weak assumptions on the process under study.

Based on the methodologies presented in the Materials and Methods' section, seven tests are proposed that allow to confront the information with the martingale hypothesis; these tests are studied through simulation to ascertain their performance in terms of preserving the test size.

Provided that the tests of independence do not reject independence of the increments in the realization, then, by Theorem 2, there will be no evidence against the martingale hypothesis, while if the tests for non-correlation detect correlation different from zero in the

pruebas han sido seleccionadas debido a que es posible implementarlas bajo supuestos débiles sobre el proceso en estudio.

Con base en las metodologías presentadas en la sección de Materiales y Métodos, se proponen siete pruebas que permiten confrontar la información con la hipótesis de martingala, las cuales son estudiadas por simulación con el propósito de conocer su comportamiento respecto a la preservación del tamaño de la prueba.

En la medida en que las pruebas de independencia no rechacen la independencia de los incrementos de la realización, entonces, por el Teorema 2, no existirá evidencia en contra de la hipótesis de martingala; mientras que si las pruebas para no correlación detectan correlación diferente de cero en los incrementos, entonces, por el Teorema 1, se tiene evidencia en contra de la hipótesis de martingala.

Posteriormente dichas pruebas son estudiadas por simulación, conjuntamente con la prueba de Lobato (2001), con el propósito de conocer sus potencias respecto a una amplia variedad de alternativas.

Materiales y Métodos

Sea $\{W_n = Y_n - Y_{n-1}; n \geq 1\}$ el proceso de primeras diferencias de una martingala $\{Y_n; n \geq 1\}$. La función del valor medio $m(n) = E(W_n)$ y función de autocovarianza $K(n_1, n_2) = Cov(Wn_1, Wn_2)$ de $\{W_n; n \geq 1\}$ se encuentran dadas por:

$$m(n) = 0 \text{ y } K(n_1, n_2) = 0 \text{ si } n_1 \neq n_2, \ \sigma^2_{n_1} \text{ si } n_1 = n_2.$$

De acuerdo con los Teoremas 1 y 2, a continuación se presentan algunas pruebas no paramétricas conocidas, las cuales pueden ser usadas para obtener evidencia sobre la independencia o no correlación de las variables del proceso $\{W_n; n \geq 1\}$.

Prueba de rachas de Wald-Wolfowitz

Con base en estudios de simulación se ha podido observar que la prueba de Wald-Wolfowitz tiene buena potencia para detectar si las v.a. de un PE son independientes.

En seguida se describe brevemente esta prueba, la cual se propone para verificar si el proceso $\{Y_n; n \geq 1\}$ tiene incrementos independientes, debido a que su implementación solamente requiere del supuesto $P(W_i \geq 0) = p$ y $P(W_i < 0) = 1 - p$, el cual es más débil que suponer distribuciones idénticas. Evidentemente una martingala no necesariamente implica este supuesto; sin embargo, algunos procesos que lo satisfacen pueden ser identificados como martingalas al aplicar esta prueba.

Dada una trayectoria del proceso de primeras diferencias $\{W_n; n \geq 1\}$, definamos la variable $U_i = a$ si $W_i \geq 0$, b si $W_i < 0$. Sean n_1 el número de valores a, n_2 el numero de valores b y T_{ra} el número de rachas en la secuencia $W_1, \ldots, W_m$, definiendo como racha a una sucesión de símbolos idénticos. Cuando m tiende a infinito, y si

increments, then, by Theorem 1, there is evidence against the martingale hypothesis.

Later, these tests are studied by simulation, together with the Lobato (2001) test, to determine their powers with respect to a wide variety of alternatives.

Materials and Methods

Let $\{W_n = Y_n - Y_{n-1}; n \geq 1\}$ be the process of first differences of a $\{Y_n; n \geq 1\}$ martingale. The mean value function $m(n) = E(W_n)$ and that of autocovariance $K(n_1, n_2) = Cov(Wn_1, Wn_2)$ of $\{W_n; n \geq 1\}$ are given by

$$m(n) = 0 \text{ and } K(n_1, n_2) = 0 \text{ if } n_1 \neq n_2, \ \sigma^2_{n_1} \text{ if } n_1 = n_2.$$

Below are presented some known non-parametric tests that can be used to obtain evidence on the independence or non-correlation of the $\{W_n; n \geq 1\}$ process variables according to Theorems 1 and 2.

The Wald-Wolfowitz run test

From simulation studies, it has been observed that the Wald-Wolfowitz test has good power to detect whether the r.v. of a SP are independent.

Below, we briefly describe this test, which is proposed for verifying whether the process $\{Y_n; n \geq 1\}$ has independent increments, since its implementation requires only the assumption $P(W_i \geq 0) = p$, and $P(W_i < 0) = 1 - p$, which is a weaker condition than assuming identical distributions. Obviously, a martingale does no t neccesarily imply this assumption; however, some proccesses that satisfy it, may be identifyed as martingales when using this test.

Given a trajectory of the $\{W_n; n \geq 1\}$ process of first differences, let us define the variable $U_i = a$ if $W_i \geq 0$, b if $W_i < 0$. Let n_1 be the number of a values, n_2 the number of b values, and T_{ra} the number of runs in the $W_1, \ldots, W_m$ sequence. A run is defined as a succession of identical symbols. When m tends to infinite, and if $n_1 / m \to p, n_2 / m \to (1-p)$, where p is a constant, and under the hypothesis that the W_i values are independent, then the r.v. $T_{rae} = (T_{ra} - 2mp(1-p)) / (2m^{1/2} p(1-p))$ converges in distribution to a r.v. with a normal standard distribution (Gibbons, 1985). Thus, given the test size a, the hypothesis of independent increments is rejected if $|T_{rae}| \geq \Phi_{1-\alpha/2}$, where $\Phi_{1-\alpha/2}$ is the quantile $(1-\alpha/2)$ of the normal standard distribution.

Test of turning points

This test examines the number of turning points in the sequence $W_1, W_2, \ldots, W_m$ to prove independence, in which a turning point occurs in time i, $1 < i < n$, when $W_{i-1} < W_i$ and $W_i > W_{i+1}$ o $W_{i-1} > W_i$ and $W_i < W_{i+1}$. Let T_{pc} be the number of turning points in the sequence $W_1, W_2, \ldots, W_m$. If the r.v. $\{W_n; n \geq 1\}$ are independent and identically distributed (iid), then $T_p = (T_{pc} - \mu_{pc}) / \sigma_{pc}$ converges in distribution at a r.v. with a normal standard distribution, where $\mu_{pc} = 2(m-2)/3$ and $\sigma^2_{pc} = (16m - 29)/90$ (Kendall and Stuart 1976). Given a test size a, the hypothesis of independent increments is rejected if $|T_p| > \Phi_{1-\alpha/2}$.

$n_1/m \to p, n_2/m \to (1-p)$, donde p es una constante, y bajo la hipótesis de que las W_i son independientes, entonces la v.a. $T_{rae} = \left(T_{ra} - 2mp(1-p)\right) / \left(2m^{1/2}p(1-p)\right)$ converge en distribución a una v.a. con distribución normal estándar (Gibbons, 1985). Así, dado un tamaño de prueba α, se rechaza la hipótesis de incrementos independientes si $|T_{rae}| \geq \Phi_{1-\alpha/2}$, donde $\Phi_{1-\alpha/2}$ es el cuantil $(1-\alpha/2)$ de la distribución normal estándar.

Prueba de puntos cambiantes

Esta prueba consiste en examinar el número de puntos cambiantes en la secuencia W_1, W_2,..., W_m para probar independencia, en donde un punto cambiante ocurre en el tiempo i, $1<i<n$, cuando $W_{i-1}<W_i$ y $W_i>W_{i+1}$ o $W_{i-1}>W_i$ y $W_i<W_{i+1}$. Sea T_{pc} el número de puntos cambiantes en la secuencia W_1, W_2,…, W_m. Si las v.a. $\{W_n; n \geq 1\}$ son independientes e idénticamente distribuidas (iid), entonces $T_p = \left(T_{pc} - \mu_{pc}\right)/\sigma_{pc}$ converge en distribución a una v.a. con distribución normal estándar, donde $\mu_{pc}=2(m-2)/3$ y $\sigma^2_{pc} = (16m-29)/90$ (Kendall y Stuart, 1976). Dado un tamaño de prueba α, se rechaza la hipótesis de incrementos independientes si $|T_p| > \Phi_{1-\alpha/2}$.

Prueba de Box-Pierce

Para obtener evidencia sobre la no correlación de las v.a. de un PE de covarianza estacionaria es común utilizar el estadístico Q (Box-Pierce, 1970); sin embargo, la obtención de la distribución asintótica del estadístico de prueba bajo la hipótesis nula requiere además del supuesto de variables idénticamente distribuidas. Una martingala no necesariamente tiene incrementos idénticamente distribuidos; sin embargo, algunos procesos con incrementos idénticamente distribuidos pueden ser rechazados como martingalas al aplicar esta prueba.

Sea $\rho(j)$ la autocorrelación de rezago j del proceso $\{W_n; n \geq 1\}$. Sean $\bar{W} = m^{-1}\sum_{i=1}^{m} W_i$, $\sigma^2 = m^{-1}\sum_{i=1}^{m}\left(W_i - \bar{W}\right)^2$ y $\hat{\rho}^2(j) = m^{-1}\hat{\sigma}^2 \sum_{i=1}^{m-j}\left(W_i - \bar{W}\right)\left(W_{i+j} - \bar{W}\right)$, j≥1. Bajo el supuesto de que las v.a. $\{W_n; n \geq 1\}$ son idénticamente distribuidas y para k fija, $Q = m\sum_{j=1}^{k}\hat{\rho}(j)^2$ converge en distribución a una v.a. con distribución ji-cuadrada con k grados de libertad $\left(\chi^2_k\right)$. Así, dado un tamaño de prueba α, se rechaza la hipótesis nula de no correlación si $Q > \chi^2_{k,1-\alpha}$, donde $\chi^2_{k,1-\alpha}$ es el cuantil $(1-\alpha)$ de la distribución χ^2_k.

Prueba de Lobato para covarianza cero

Bajo el supuesto de covarianza estacionaria con media constante μ, a continuación se describe la prueba de Lobato (2001) para realizar inferencias sobre las autocovarianzas del proceso $\{W_n; n \geq 1\}$.

Se desea probar el juego de hipótesis

$$H_o: \gamma(1) = ... = \gamma(K) = 0 \; vs \; H_a: \gamma(j) \neq 0 \text{ para alguna } j=1,\ldots, K, \quad (1)$$

donde $\gamma(j) = E\left\{\left(W_1 - \mu\right)\left(W_{1+j} - \mu\right)\right\}$, $j=1,...K$,

Box-Pierce Test

To obtain evidence on the non-correlation of the r.v. of a SP of stationary covariance, it is common to use the Box-Pierce statistics (1970). However, obtaining the asymptotic distribution of the test statistic under the null hypothesis requires, additionally, the assumption of identically distributed variables. A martingale not neccesarily has identically distributed increases; however, some processes with identically distributed increases may be rejected as martingales with this test.

Let $\rho(j)$ be the residual autocorrelation j of the $\{W_n; n \geq 1\}$ process. Let $\bar{W} = m^{-1}\sum_{i=1}^{m} W_i$, $\sigma^2 = m^{-1}\sum_{i=1}^{m}\left(W_i - \bar{W}\right)^2$ and $\hat{\rho}^2(j) = m^{-1}\hat{\sigma}^2 \sum_{i=1}^{m-j}\left(W_i - \bar{W}\right)\left(W_{i+j} - \bar{W}\right)$, j≥1. Under the assumption that the r.v. $\{W_n; n \geq 1\}$ are identically distributed and for fixed k, converges in distribution at a r.v. with $Q = m\sum_{j=1}^{k}\hat{\rho}(j)^2$ distribution with k degrees of freedom $\left(\chi^2_k\right)$. Thus, given a test size α, the null hypothesis of non-correlation is rejected if $Q > \chi^2_{k,1-\alpha}$, where $\chi^2_{k,1-\alpha}$ is the quantile $(1-\alpha)$ of the χ^2_k distribution.

Lobato test for zero covariance

Under the assumption of stationary covariance with constant mean μ, the Lobato (2001) test for making inferences on the autocovariances of the process $\{W_n; n \geq 1\}$ is described below.

To test the set of hypotheses

$$H_o: \gamma(1) = ... = \gamma(K) = 0 \; vs \; H_a: \gamma(j) \neq 0 : \text{for some } j=1,..., K, \quad (1)$$

where $\gamma(j) = E\left\{\left(W_1 - \mu\right)\left(W_{1+j} - \mu\right)\right\}$, $j=1,...K$,

Define $c = (c_1,\ldots,c_k)'$, $c_j = m^{-1}\sum_{t=1}^{m}\left(W_t - W\right)\left(W_{t+j} - W\right)$; $j=1,...,K$, $\gamma = \left(\gamma(1),...,\gamma(K)\right)'$; $z_t = \left(z_{1t},...,z_{Kt}\right)'$; $z_{kt} = \left(W_t - W\right)\left(W_{t+k} - W\right)$, $k=1,...,K$; $S_t = \sum_{j=1}^{t}\left(z_{1j} - c_1,...,z_{Kj} - c_K\right)'$ and $C_K = m^{-2}\sum_{t=1}^{m} S_t S_t'$. Lobato (2001) shows that under the null hypothesis in (1), the statistic $U_K = mc' C_K^{-1} c$ converges in distribution to the r.v. $U^k = B_K(1)' V_K^{-1} B_K(1)$, where $B_K(r)$ is the k-dimensional vector of independent Brownian motion and $v_K = \int_0^1 \left[B_K(r) - rB_K(1)\right]\left[B_K(r) - rB_K(1)\right]' dr$ and $B_K(r) - rB_K(1)$ is the k-dimensional Brownian bridge. The null hypothesis in (1) is rejected with a test size α if $U_K > U^k_{1-\alpha}$, where $U^k_{1-\alpha}$ is the quantile $(1-\alpha)$ of the distribution of U^k.

As in the test for non-correlation with the Q statistic, the number of autocovariances to be analyzed must be of special interest to conclude whether the process is non-correlated or not, since it may occur that, if too many autocorrelations are considered, the test loses power because of the presence of insignificant autocorrelations. On the other hand, if too few autocorrelations are taken into account, higher

Definase $c = (c_1,\ldots,c_k)'$, $c_j = m^{-1}\sum_{t=1}^{m}\left(W_t - W\right)\left(W_{t+j} - W\right)$; j=1,...,K, $\gamma = \left(\gamma(1),...,\gamma(K)\right)'$; $z_t = \left(z_{1t},...,z_{Kt}\right)'$; $z_{kt} = \left(W_t - W\right)\left(W_{t+k} - W\right)$, k=1,...,K; $S_t = \sum_{j=1}^{t}$ $\left(z_{1j} - c_1,...,z_{Kj} - c_K\right)'$ y $C_K = m^{-2}\sum_{t=1}^{m} S_t S_t'$. Lobato (2001) muestra que bajo la hipótesis nula en (1), el estadístico $U_K = mc' C_K^{-1} c$ converge en distribución a la v.a., $U^k = B_K(1)' V_K^{-1} B_K(1)$, donde $B_K(r)$ es el vector k-dimensional del movimiento browniano independiente, y $v_K = \int_0^1 \left[B_K(r) - rB_K(1)\right]$ $\left[B_K(r) - rB_K(1)\right]' dr$ y $B_K(r) - rB_K(1)$ es el puente browniano k-dimensional. Se rechaza la hipótesis nula en (1) con un tamaño de prueba α si $U_K > U_{1-\alpha}^k$, donde $U_{1-\alpha}^k$ es el cuantil $(1-\alpha)$ de la distribución de U^k.

Al igual que en la prueba para no correlación con el estadístico Q, el número de autocovarianzas a analizar debe ser de especial interés para concluir si el proceso es no correlacionado, ya que puede suceder que al considerar demasiadas autocorrelaciones la prueba pierda potencia debido a la presencia de autocorrelaciones, insignificantes. Por otro lado, al considerar pocas autocorrelaciones, se pierde información de las mismas de más alto orden. En el presente trabajo se consideran diez autocorrelaciones muestrales.

De acuerdo con los Teoremas 1 y 2, además de probar la hipótesis de independencia o no correlación de las v.a. del PE $\left\{W_n; n \geq 1\right\}$, es necesario probar la hipótesis de que el proceso tiene función de valor medio igual a cero con base en una realización finita del mismo. Para esto, a continuación se presentan dos pruebas conocidas basadas en el supuesto de que el proceso en cuestión tiene covarianza estacionaria.

Prueba de Lobato para media cero

Sea $\left\{W_n; n \geq 1\right\}$ un PE de covarianza estacionaria con función del valor medio constante.

Se desea probar el juego de hipótesis

$$H_o : \mu = 0 \quad vs \quad H_a : \mu \neq 0 \tag{2}$$

Lobato (2001) muestra que el estadístico para probar el juego de hipótesis en (2), $U = n\bar{W}^2 / \left(n^{-2}\sum_{t=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{t}\left(W_j - W\right)\right)^2\right)$, converge en distribución a la v.a. $U^1 = B(1)^2 / \int_0^1 \left[B(r) - rB(1)\right]^2 dr$, donde $B(r)$ es un movimiento browniano y, dado un tamaño de prueba α, se rechaza la hipótesis nula $H_o : \mu = 0$ si $U > U_{1-\alpha}^1$, donde $U_{1-\alpha}^1$ es el cuantil $(1-\alpha)$ de la distribución de U^1.

Prueba para la media del proceso con el estadístico T

Si $\left\{W_n; n \geq 1\right\}$ es un proceso de covarianza estacionaria, bajo condiciones de dependencia débil (Lobato, 2001), se tiene que $m^{1/2}\left(\bar{W} - \mu\right)$ converge en distribución a una v.a. normal con media

order information is lost. In this paper, ten sample autocorrelations are considered.

According to Theorems 1 and 2, besides testing the hypothesis of independence or non-correlation of the r.v. of the SP $\left\{W_n; n \geq 1\right\}$, it is necessary to test the hypothesis that the process has a mean value function equal to zero based on the finite realization. To this end, below are presented two known tests based on the assumption that the process in question has stationary covariance.

Lobato test for zero mean

Let $\left\{W_n; n \geq 1\right\}$ be a stationary covariance SP with a constant mean value function.

To test the set of hypotheses

$$H_o : \mu = 0 \quad vs \quad H_a : \mu \neq 0 \tag{2}$$

Lobato (2001) shows that a statistic to test the set of hypotheses in (2) is $U = n\bar{W}^2 / \left(n^{-2}\sum_{t=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{t}\left(W_j - W\right)\right)^2\right)$, which converges in distribution at the r.v. $U^1 = B(1)^2 / \int_0^1 \left[B(r) - rB(1)\right]^2 dr$, where $B(r)$ is a Brownian motion and, given a test size α, the null hypothesis $H_o : \mu = 0$ is rejected if $U > U_{1-\alpha}^1$, where $U_{1-\alpha}^1$ the quantile $(1-\alpha)$ of the U^1 distribution.

Test for the process mean with the T statistic

If $\left\{W_n; n \geq 1\right\}$ is a stationary covariance process, under the conditions of weak dependence (Lobato, 2001), converges in distribution at a normal r.v. with mean zero $m^{1/2}\left(\bar{W} - \mu\right)$ and $\sum_{j=-\infty}^{\infty}\gamma(j)$ variance. If $\left\{Y_n; n \geq 1\right\}$ is a martingale, then $\gamma(j)$=0 for all j$\neq$0. Therefore, under the martingale hypothesis, the r.v. $m^{1/2}\left(\bar{W} - \mu\right)$ converges in distribution at a normal r.v. with mean zero and $\gamma(0)$ variance. The moment estimator is biased for $\hat{\gamma}(0)$; nevertheless, for large sample sizes, is asymptotically unbiased (Brockwell and Davis, 1996). Thus, a test statistic for the set of hypotheses in (3) is $T = \sqrt{m}\bar{X} / \sqrt{\gamma(0)}$. Given a test size α, the null hypothesis $H_o : \mu = 0$ is rejected if $|T| \geq \Phi_{1-\alpha/2}$. In this paper, it is considered that $\hat{\gamma}(0) = (m-1)^{-1}\sum_{i=1}^{m}\left(W_i - \bar{W}\right)^2$. If the succession $\left\{W_n; n \geq 1\right\}$ are iid r.v. with finite mean and variance, then $\sqrt{m}\left(\bar{X} - \mu\right) / \sqrt{\gamma(0)}$ converges in distribution at a r.v. with normal standard distribution (Efron, 1969). The U^k and T statistics require an assumption of stationary covariance.

Definition of the statistics for testing whether a SP is martingale

The test procedures are defined by R_T, R_M, Q_T, Q_M, P_T, P_M, U_T and U_M (Lobato test) as the combinations of the two tests with the statistics (T_{rae},T), (T_{rae},U), (Q,T), (Q,U), (T_P,T), (T_P,U), (U^k,T) and (U^k,U), respectively, to test the martingale hypothesis of a SP with first

cero y varianza $\sum_{j=-\infty}^{\infty}\gamma(j)$. Si $\{Y_n; n\geq 1\}$ es una martingala, entonces $\gamma(j)$=0 para toda j≠0. Por lo que bajo la hipótesis de martingala, la v.a. $m^{1/2}(\bar{W}-\mu)$ converge en distribución a una v.a. normal con media cero y varianza $\gamma(0)$. El estimador de momentos $\hat{\gamma}(0)=m^{-1}\sum_{i=1}^{m}(W_i-\bar{W})^2$ es sesgado para $\gamma(0)$. No obstante, para muestras grandes, $\hat{\gamma}(0)$ es asintóticamente insesgado, (Brockwell y Davis, 1996); por lo que un estadístico de prueba para el juego de hipótesis en (3) es $T=\sqrt{m}\bar{X}/\sqrt{\gamma(0)}$. Dado un tamaño de prueba α, se rechaza la hipótesis $H_o:\mu=0$ si $|T|\geq\Phi_{1-\alpha/2}$. En el presente trabajo se considera $\hat{\gamma}(0)=(m-1)^{-1}\sum_{i=1}^{m}\left(W_i-\bar{W}\right)^2$. Si la sucesión $\{W_n; n\geq 1\}$ son v.a. iid con media y varianza finita, entonces $\sqrt{m}(\bar{X}-\mu)/\sqrt{\gamma(0)}$ converge en distribución a una v.a. con distribución normal estándar. (Efron, 1969). Los estadísticos U^k y T requieren del supuesto de covarianza estacionaria.

Definición de los estadísticos para probar si un PE es martingala

Se definen los procedimientos de prueba por R_T, R_M, Q_T, Q_M, P_T, P_M, U_T y U_M (prueba de Lobato) a las combinaciones de las dos pruebas con los estadísticos (T_{rae},T), (T_{rae},U), (Q,T), (Q,U), (T_P,T), (T_P,U), (U^k,T) y (U^k,U), respectivamente, para probar la hipótesis de martingala de un PE con PE de primeras diferencias de covarianza estacionaria. Los procedimientos de prueba R_T, R_M, P_T y P_M no rechazan la hipótesis de martingala si ninguna de las dos pruebas de la combinación rechaza. Los procedimientos de prueba Q_T, Q_M, U_T y U_M rechazan la hipótesis de martingala si alguna de las dos pruebas de la combinación rechaza. Cada una de las combinaciones nos permite probar la independencia o no correlación y la media igual a cero de los incrementos de un proceso. Dado un tamaño de prueba α para probar si un proceso es una martingala, se propone tomar un tamaño de prueba igual a α/2 para cada una de las dos pruebas que componen a R_T, R_M, Q_T, Q_M, P_T, P_M, U_T y U_M. De esta forma se asegura una prueba de tamaño menor o igual a α.

Descripción de la metodología propuesta

1. Dada una realización de tamaño m del PE $\{Y_n; n\geq 1\}$ con observaciones registradas en tiempos equidistantes, considérese $W_n=Y_n-Y_{n-1}$, el proceso de primeras diferencias de $\{Y_n; n\geq 1\}$.

2. La hipótesis que se desea probar es: H_0: $\{Y_n; n\geq 1\}$ es una martingala *vs* H_1: $\{Y_n; n\geq 1\}$ no es una martingala, bajo el supuesto de que $\{W_n; n\geq 1\}$ es un PE de covarianza estacionaria.

3. Calcular los estadísticos T_{rae}, Q, T_P, U^k, T y U utilizando W_1, W_2,…,W_m. Probar el juego de hipótesis H_0 *vs* H_1 con cada uno de los procedimientos R_T, R_M, Q_T, Q_M, P_T, P_M, U_T y U_M, para los cuales R_T, R_M, P_T y P_M no rechazan la hipótesis de martingala si ninguna de las dos pruebas de la combinación correspondiente a cada procedimiento rechaza; Q_T, Q_M, U_T y U_M rechazan la hipótesis de martingala si alguna de las dos pruebas de la combinación correspondiente a cada procedimiento rechaza.

differences of a stationary covariance SP. The test procedures R_T, R_M, P_T and P_M do not reject the martingale hypothesis if neither of the two tests of the combination rejects its respective null hypothesis. The test procedures Q_T, Q_M, U_T and U_M reject the martingale hypothesis if either of the two tests of the combination rejects its respective null hypothesis. Each of the combinations permits testing independence or non-correlation and the mean equal to zero of the increments of a process. Given a test size α, to test whether a process is martingale, a test size equal to α/2 is proposed for each of the two tests that compose R_T, R_M, Q_T, Q_M, P_T, P_M, U_T and U_M; in this way, a test smaller or equal to α is assured.

Description of the proposed methodology

1. Given a realization size m of the SP $\{Y_n; n\geq 1\}$ with observations recorded at equally spaced times, consider $W_n=Y_n-Y_{n-1}$, the process of first differences of $\{Y_n; n\geq 1\}$.

2. The hypothesis to be tested is a martingale H_0: $\{Y_n; n\geq 1\}$ *vs* not a martingale H_1: $\{Y_n; n\geq 1\}$, under the assumption that $\{W_n; n\geq 1\}$ is a stationary covariance SP.

3. Calculate the statistics T_{rae}, Q, T_P, U^k, T and U using W_1, W_2,...,W_m. Test the set of hypotheses H_0 *vs* H_1 with each of procedures R_T, R_M, Q_T, Q_M, P_T, P_M, U_T and U_M, for which R_T, R_M, P_T and P_M do not reject the martingale hypothesis if either of the two tests of the combination corresponding to each procedure rejects.

Simulation study of martingale test size

To discern the behavior of the tests with respect to the size of each one, the probability of rejecting the null hypothesis was estimated when the data are from a martingale considering test sizes α=0.05 y 0.1. The following algorithm was used:

1. To generate an m-sized sample of the respective martingale.
2. To apply the methodology described in the previous section in accord with the test size established.
3. If the martingale hypothesis is rejected, then the value 1 is associated with the sample, otherwise, the value 0.
4. Repeat steps 1, 2 and 3 one thousand times.
5. To sum the values associated with each sample and multiply by (1/1000). The result is the estimated probability of type I error of the test.

The study was conducted with sample sizes of 100, 150, 200 and 250 of the following martingales: I) $\{S_n=S_{n-1}+e_n; n\geq 1\}$, e_n iid N(0,1), this martingale has iid increments; II) $\{S_n=S_{n-1}+e_n; n\geq 1\}$, independent e_n with uniform distribution (−1.732, 1.732), N(0, 1), Logistics(0, 0.5513), t_{30}[1], each distribution with a probability of ¼; this process has independent increments, which are symmetrical with respect to zero, with different distributions, but the same mean and variance; III) $\{S_n=S_{n-1}+e_n; n\geq 1\}$, independent e_n such that e_n is distributed N(0,1) for odd n and $2^{-1/2}\left(\chi_1^2-1\right)$ for even n, with

Estudio de simulación para el tamaño de las pruebas de martingala

Para conocer el comportamiento respecto al tamaño de cada una de las pruebas, se estimó la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando los datos provienen de una martingala, considerando los tamaños de prueba α=0.05 y 0.10. Para esto se usó el siguiente algoritmo:

1. Generar una muestra de tamaño m de la martingala respectiva.
2. Aplicar la metodología descrita en la sección anterior de acuerdo con el tamaño de prueba establecido.
3. Si se rechaza la hipótesis de martingala, entonces a la muestra se le asocia el valor 1, de otra forma, el valor 0.
4. Repetir 1000 veces los pasos 1, 2 y 3.
5. Sumar los valores asociados a cada muestra y multiplicar por (1/1000). El resultado es la probabilidad estimada de error tipo I de la prueba.

El estudio se realizó con tamaños de muestra 100, 150, 200 y 250 de las siguientes martingalas: I) $\{S_n = S_{n-1} + e_n; n \geq 1\}$, e_n iid N(0,1), esta martingala tiene incrementos iid; II) $\{S_n = S_{n-1} + e_n; n \geq 1\}$, e_n independientes con distribución Uniforme $(-1.732, 1.732)$, N(0,1), Logística (0, 0.5513), t_{30}[1], cada distribución con probabilidad ¼.; este proceso tiene incrementos independientes, simétricos respecto a cero, con diferente distribución, pero con la misma media y varianza; III) $\{S_n = S_{n-1} + e_n; n \geq 1\}$, e_n independientes tal que: e_n se distribuye N(0,1) para n impar y $2^{-1/2}\left(\chi^2_1 - 1\right)$ para n par. Este proceso tiene incrementos independientes, asimétricos respecto a cero para n par, con diferente distribución, pero con la misma media y varianza; IV) $\{S_n = S_{n-1} + e_{n-1}e_n; n \geq 1\}$, e_n iid N(0,1), los incrementos de S_n son dependientes de primer orden, y V) $\{S_n = S_{n-1} + a_n e_{n-1}e_n; n \geq 1\}$, e_n iid N(0,1), a_n proviene de la secuencia repetitiva {1, 1, 1, 1, 1, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3}, los incrementos de S_n son heterocedásticos y dependientes de primer orden. Note que en los procesos anteriores se incluyen martingalas con incrementos iid, incrementos independientes con la misma media, varianza y distribuciones simétricas, incrementos con la misma media y varianza, pero con asimetría en algunos de sus incrementos, incrementos dependientes e incrementos dependientes heterocedásticos.

Estudio de simulación para la potencia de las pruebas para algunos procesos alternativos

Con el propósito de realizar un estudio comparativo de las potencias de todas las pruebas de una manera amplia, se parte del supuesto de que el proceso en cuestión es Gaussiano. Para hacer esta comparación se generaron por simulación de Monte Carlo muestras para varios procesos alternativos y se estimó la potencia para los tamaños de prueba α=0.05 y 0.10, con el siguiente algoritmo:

different distribution, but with the same mean and variance; IV) $\{S_n = S_{n-1} + e_{n-1}e_n; n \geq 1\}$, e_n iid N(0,1), the increments of S_n are dependent of first order, and V) $\{S_n = S_{n-1} + a_n e_{n-1}e_n; n \geq 1\}$, e_n iid N(0,1), a_n is from a repetitive sequence {1, 1, 1, 1, 1, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3}, the S_n increments are heterocedastic and dependent of first order. Note that in the previous processes, martingales are included with iid increments, independent increments with the same mean, variance and symmetrical distributions, increments with the same mean and variance but with asymmetry in some of its increments, dependent increments, and heterocedastic dependent increments.

Simulation study of test power for some alternative processes

For a broad comparative study of power of all of the tests, we part from the assumption that the process in question is Gaussian. For this comparison, by Monte Carlo simulation, samples are generated for several alternative processes, and the power is estimated for the test sizes α=0.05 and 0.1, with the following algorithm:

1. To generate a sample size m of the alternative process.
2. To follow steps 2, 3 and 4 of the previous algorithm.
3. To sum the values associated by the 1000 samples and multiply by (1/1000). The result is the estimated power of the test.

The study was conducted with m =100, 150, 200 and 250 for the processes of Table 1.

Results and Discussion

Test size

Table 2 shows the estimated probability of Type I error for the different tests. Note that if the increments are from processes I, II and III, which are Gaussian, the hypotheses of independent increments, martingale and non-correlated increments are equivalent under the assumption that the increment mean is zero.

When the increments are from process I, Q_T, Q_M, U_T and U_M preserve the test size, while R_T and R_M show slight discrepancies with the pre-established test sizes. U_M is the test that has the best control over the type I error, particularly for m=100.

When the samples are from process II, the increments are independent with symmetrical distributions with respect to zero and the same variance. In this case, R_T and R_M do not preserve the test size; while for Q_T and Q_M, the probability of type I error diminishes gradually as the sample size increases, assuring a test size of a with m=250.

When the samples are from process III, the increments have the same mean and variance, but the probability

[1] t_k denota a la distribución t-student con k grados de libertad ❖ t_k denotes the Student t distribution with k degrees of freedom.

1. Generar una muestra de tamaño m del proceso alternativo.
2. Seguir los pasos 2, 3 y 4 del algoritmo anterior.
3. Sumar los valores asociados por las 1000 muestras y multiplicar por (1/1000). El resultado es la potencia estimada de la prueba.

El estudio se realizó con m =100, 150, 200 y 250 para los procesos del Cuadro 1.

Resultados y Discusión

Tamaño de las pruebas

El Cuadro 2 muestra la probabilidad estimada del error tipo I para las diferentes pruebas. Note que si los incrementos provienen de los procesos I, II y III, los cuales son Gaussianos, entonces las hipótesis de incrementos independientes, martingala e incrementos no correlacionados son equivalentes cuando las medias de los incrementos son cero.

Cuando los incrementos provienen del proceso *I*, Q_T, Q_M, U_T y U_M conservan el tamaño de la prueba, mientras R_T y R_M muestran ligeras discrepancias con los tamaños de prueba preestablecidos. U_M es la prueba que mejor control tiene sobre el error tipo I, en particular para m=100.

Cuando las muestras provienen del proceso II los incrementos son independientes, con distribuciones simétricas respecto a cero y con la misma varianza. En este caso R_T y R_M no conservan el tamaño de la prueba; mientras que para Q_T y Q_M la probabilidad de error tipo I disminuye paulatinamente a medida que el tamaño de muestra aumenta, asegurando una prueba de tamaño α con m=250.

Cuando las muestras provienen del proceso III los incrementos tienen la misma media y varianza, pero la probabilidad $P(U_i=a)$ ($P(U_i=b)$) no es constante, no cumpliéndose el supuesto de que $P(U_i=a)=p$ y $P(U_i=b)=1-p$ para toda *i*, en el que se basa la prueba de rachas. Esto

$P(U_i=a)$ ($P(U_i=b)$) is not constant and thus does not satisfy the assumption that $P(U_i=a)=p$ and $P(U_i=b)=1-p$ for all *i*, in which the test is based on runs. This causes R_M and R_T to increase the probability of type I error as the sample size increases. For this same process, Q_T, Q_M, U_T and U_M preserve the test size.

Processes IV and V are not Gaussian, hence, the hypothesis of independent increments with zero mean is not equivalent to the martingale hypothesis.

For samples of process IV, R_T and R_M preserve the size when m=250. U_T and U_M preserve test size for all sample sizes. That is, the test of runs does not distinguish between martingale (non-correlated increments) and independent increments with mean zero.

When the samples are from process V, the results are similar to those generated with process IV, indicating that, if the increments of a SP have slightly different variances, the results of the tests are not significantly altered.

The asymptotic distribution of the Q statistic requires independence of the process increments. When this assumption is not satisfied, the Q_T and Q_M tests tend to increase type I error, indicating that the probability of committing type I error is susceptible to the type of process dependence when this is not correlated (Table 2, processes IV and V). Also note that the asymptotic distribution of the Q statistic requires the assumption of identical distributions. Nevertheless, the results obtained in processes II and III indicate that if the r.v. have the same mean and variance, but not the same distribution, the results of the test size are not significantly altered.

For processes IV and V, the P_T and P_M tests do not preserve test size for different sample sizes because these tests are based on tests for independent increments. In fact, the results in this case are estimated test powers for independent increments against alternatives IV and V, which are martingales with dependent increments. These powers, however, are low. These cases are examples of how difficult it is to

Cuadro 1. Procesos alternativos para observar el comportamiento de la potencia de las pruebas.
Table 1. Alternative processes for observing the behavior of test power.

Proceso	Descripción
AR(1)	$S_n = \mu + \beta S_{n-1} + e_n, e_n$ iid $N(0,1), \mu, \beta \in R$
NOC	$\{Y_n = Y_{n-1} + W_n; n \geq 1\}, W_n = \{Z_n$ si n es par, $2^{-1/2}\left(Z_{n-1}^2 - 1\right)$ si n es impar$\}$ y $\{Zn\}_{n=1}^{\infty}$ iid $N(0,1)$
ARCH(μ, β)	$\{X_t = b_t Z_t; t \geq 0\}, Z_t$ iid $N(0,1), b_t^2 = \mu + \beta X_{t-1}^2, \mu > 0, \beta_i \geq 0$
NEAR(1)†	$Y_n = \{\beta Y_{n-1}$ con prob. p_{11}, 0 con prob. 1- $p_{11}\}$ + $\{e_n$ con prob. p_{21}, be_n con prob. $1-p_{21}\}$, e_n iid Exp(1)
NEAR(2)†	$Y_n = \{\beta_1 Y_{n-1}$ con prob. p_{11}, $\beta_2 Y_{n-1}$ con prob. p_{12}, 0 con prob. $1-p_{11}-p_{12}$,$\}$ + $\{e_n$ con prob. $1-p_{22}-p_{23}$, $b_2 e_n$ con prob. p_{22}, $b_3 e_n$ con prob. $p_{23}\}$, e_n iid Exp(1)

† Para conocer la relación entre los parámetros del proceso NEAR(1) (NEAR(2)) de manera que se tenga un proceso estacionario veáse Lawrance y Lewis (1985) ❖ For the relationship among the parameters of the process NEAR(1) (NEAR(2)) in order to have a stationary process, see Lawrance and Lewis (1985).

Cuadro 2. Probabilidad estimada del error tipo I de las pruebas para algunas martingalas.
Table 2. Estimated probability of type I error of the tests for some martingales.

Proceso	m	Tamaño de prueba	R_T	R_M	Q_T	Q_M	P_T	P_M	U_T	U_M
	100	0.05	0.046	0.048	0.044	0.046	0.040	0.043	0.035	0.037
		0.10	0.105	0.096	0.090	0.080	0.111	0.100	0.080	0.068
	150	0.05	0.051	0.045	0.052	0.046	0.052	0.044	0.049	0.044
I		0.10	0.095	0.094	0.088	0.090	0.093	0.094	0.087	0.089
	200	0.05	0.051	0.046	0.048	0.040	0.043	0.043	0.048	0.041
		0.10	0.102	0.104	0.088	0.091	0.096	0.096	0.085	0.084
	250	0.05	**0.048**	**0.049**	**0.047**	**0.049**	0.051	0.053	0.047	0.048
		0.10	**0.098**	**0.097**	**0.087**	**0.085**	0.103	0.101	0.095	0.091
	100	0.05	0.057	0.050	0.054	0.048	0.046	0.041	0.046	0.040
		0.10	0.113	0.115	0.104	0.106	0.107	0.113	0.088	0.092
	150	0.05	0.057	0.057	0.055	0.053	0.048	0.048	0.045	0.044
II		0.10	0.108	0.105	0.098	0.096	0.098	0.096	0.093	0.090
	200	0.05	0.054	0.058	0.052	0.054	0.049	0.053	0.047	0.050
		0.10	0.112	0.114	0.101	0.102	0.107	0.109	0.105	0.105
	250	0.05	**0.045**	**0.052**	**0.040**	**0.047**	0.046	0.053	0.044	0.049
		0.10	**0.091**	**0.093**	**0.086**	**0.088**	0.094	0.095	0.090	0.091
	100	0.05	0.077	0.073	0.047	0.043	0.056	0.053	0.036	0.031
		0.10	0.143	0.142	0.089	0.088	0.105	0.105	0.073	0.071
	150	0.05	0.080	0.079	0.044	0.043	0.062	0.061	0.035	0.035
III		0.10	0.149	0.139	0.096	0.088	0.134	0.126	0.078	0.070
	200	0.05	0.087	0.088	0.048	0.050	0.071	0.074	0.037	0.040
		0.10	0.149	0.154	0.083	0.091	0.137	0.145	0.073	0.081
	250	0.05	0.096	0.097	**0.050**	**0.048**	0.080	0.082	0.033	0.035
		0.10	0.172	0.165	**0.100**	**0.096**	0.154	0.152	0.082	0.077
	100	0.05	0.048	0.045	0.056	0.054	**0.106**	**0.104**	0.024	0.021
		0.10	0.108	0.106	0.109	0.112	**0.239**	**0.237**	0.059	0.059
	150	0.05	0.061	0.053	0.099	0.091	**0.218**	**0.211**	0.035	0.026
IV		0.10	0.105	0.088	0.150	0.138	**0.309**	**0.297**	0.070	0.051
	200	0.05	0.049	0.044	0.097	0.092	**0.240**	**0.237**	0.025	0.019
		0.10	0.092	0.097	0.145	0.146	**0.353**	**0.359**	0.049	0.051
	250	0.05	**0.046**	**0.047**	0.096	0.098	**0.284**	**0.285**	0.027	0.028
		0.10	**0.090**	**0.096**	0.154	0.159	**0.390**	**0.401**	0.054	0.061
	100	0.05	0.049	0.047	0.084	0.081	**0.135**	**0.134**	0.027	0.025
		0.10	0.111	0.095	0.136	0.125	**0.238**	**0.232**	0.057	0.043
	150	0.05	0.053	0.045	0.097	0.090	**0.206**	**0.202**	0.020	0.012
V		0.10	0.107	0.100	0.161	0.154	**0.285**	**0.279**	0.049	0.042
	200	0.05	0.043	0.050	0.094	0.103	**0.218**	**0.223**	0.021	0.028
		0.10	0.094	0.106	0.150	0.164	**0.326**	**0.337**	0.043	0.046
	250	0.05	**0.039**	**0.041**	0.105	0.108	**0.291**	**0.291**	0.019	0.020
		0.10	**0.075**	**0.078**	0.155	0.160	**0.395**	**0.396**	0.034	0.037

ocasiona que R_M y R_T tiendan a aumentar la probabilidad de error tipo I conforme aumenta el tamaño de la muestra. Para este mismo proceso Q_T, Q_M, U_T y U_M conservan el tamaño de la prueba.

Los procesos IV y V no son Gaussianos, por tanto, la hipótesis de incrementos independientes con media cero no es equivalente a la de martingala.

Para muestras del proceso IV, R_T y R_M conservan el tamaño con m=250. U_T y U_M preservan el tamaño de la prueba para todos los tamaños de muestras. Esto es, la prueba de rachas no distingue entre martingala (incrementos no correlacionados) e incrementos independientes con media cero.

differentiate statistically the hypotheses of independence from non-correlation.

Power of the tests

When the samples are from the AR(1) process with $(\mu, \beta) = (0, \beta)$ and β=0.9, the tests do not detect that the process is not a martingale. This is because the AR(1) process with (μ, β)= (0, 1) parameters is a martingale. If β=0.7, then U_T and U_M have power greater than 0.791 (α=0.05). Although the R_T, R_M, Q_T and Q_M tests show consistency [2], their power is low compared with U_T and U_M. For β=0.5, U_T, U_M, Q_T and Q_M have very similar

Cuando las muestras provienen del proceso V, los resultados son similares a cuando se generan con el proceso IV, indicando que si los incrementos de un PE presentan varianzas ligeramente diferentes, los resultados de las pruebas no se alteran significativamente.

La distribución asintótica del estadístico Q requiere la independencia de los incrementos del proceso. Al no cumplirse este supuesto, las pruebas Q_T y Q_M tienden a aumentar el error tipo I, indicando que la probabilidad de cometer error tipo I queda expuesta al tipo de dependencia del proceso cuando éste es no correlacionado (Cuadro 2, procesos IV y V). Note también que la distribución asintótica del estadístico Q requiere el supuesto de distribuciones idénticas. No obstante, los resultados obtenidos en los procesos II y III indican que si las v.a. tienen la misma media y varianza y no la misma distribución, los resultados del tamaño de las pruebas no se alteran significativamente.

Para los procesos IV y V las pruebas P_T y P_M no conservan el tamaño de la prueba para diferentes tamaños de muestra. Esto se debe a que estas pruebas están basadas en pruebas para independencia de los incrementos. De hecho, los resultados en este caso son potencias estimadas de las pruebas para independencia de incrementos contra las alternativas IV y V que son martingalas con incrementos dependientes. Sin embargo, dichas potencias son bajas. Estos casos son ejemplos de lo difícil que es diferenciar estadísticamente las hipótesis de independencia y no correlación.

Potencia de las pruebas

Cuando las muestras provienen del proceso AR(1) con $(\mu, \beta) = (0, \beta)$ y β=0.9, las pruebas no detectan que el proceso no es una martingala. Esto se debe a que el proceso AR(1) con parámetros $(\mu, \beta) = (0, 1)$ es una martingala. Si β=0.7, U_T y U_M presentan una potencia mayor a 0.791 (α=0.05). Aunque las pruebas R_T, R_M, Q_T y Q_M muestran consistencia[2], su potencia es baja comparada con U_T y U_M. Para β=0.5, U_T, U_M, Q_T y Q_M tienen resultados muy similares para m≥200. Si β=0.3, R_T, R_M, Q_T, Q_M, U_T y U_M muestran una potencia mayor a 0.785 y 0.861 para m≥150 (α=0.05 y 0.1, respectivamente) y superior a 0.952 para β=0.1, siendo Q_T y Q_M las que presentan mayor potencia (Cuadro 3). Obsérvese también que las pruebas P_T y P_M no presentan potencia en los procesos alternativos generados con μ=0 y β=0.9, 0.7, 0.5 y 0.3; en el mejor de los casos muestran baja potencia con (μ, β)=(0, 0.1). En los procesos AR anteriores se observa la consistencia de las pruebas R_T, R_M, Q_T, Q_M,U_T y U_M.

results for m=200. If β=0.3, R_T, R_M, Q_T, Q_M, U_T and U_M exhibit power greater than 0.785 and 0.861 for m=150 (α=0.05 and 0.1, respectively), and above 0.952 for β=0.1, Q_T and Q_M being those with the greatest power (Table 3). Also observe that the P_T and P_M tests have no power in the alternative processes generated with μ=0 and β=0.9, 0.7, 0.5 and 0.3; at best, they exhibit low power with (μ, β)=(0, 0.1). In the above AR processes, consistency is observed in the R_T, R_M, Q_T, Q_M, U_T and U_M tests.

With ($\mu \neq 0$, β=1), the process has independent increments with mean μ. This causes the results of R_T, R_M, Q_T, Q_M, P_T, P_M U_T and U_M to be affected by the tests with U and T statistics, being R_T, Q_T, P_T and U_T those that show greater power compared with the similar R_M, Q_M, P_M and U_M. If $\mu \neq 0$ and $\beta \neq 1$ $\left(|\beta| < 1, S_0 = 0\right)$, the increment mean $S_{n+1} - S_n$ is $\mu\beta^n$, so that the increment mean is zero as n increases. In this way the tests lose the power exhibited when the process is generated with ($\mu \neq 0$, β=1) and show results similar to those of the process generated with $\left(\mu = 0, |\beta| < 1\right)$. Table 3 shows the results of the tests for the AR(1) processes discussed above.

When the samples are from the NOC alternative process, which has non-correlated but dependent increments, the U_T, U_M, Q_T, Q_M, R_T and R_M tests consider the process a martingale. P_T and P_M have low power, P_T reaches a power of 0.241 and 0.346, while P_M one of 0.238 and 0.356 with m=250 and α=0.05 and 0.1, respectively (Table 4). This makes it evident that it is difficult to differentiate statistically processes with independent variables from processes of non-correlated variables.

For samples from the alternative process ARCH, with (μ, β)=(1, 0.5), Q_T, Q_M, R_T and R_M record power above 0.830 for m=150. U_T and U_M have no power, while for the samples generated with (μ, β)= (1, 0.1), power of Q_T, Q_M, R_T and R_M is above 0.976 for m≥150. For this same process, U_T and U_M show low power (Table 4).

When the samples are from the NEAR(1) alternative processes considered, Q_T and Q_M exhibit greater power, followed by R_T and R_M; the power of P_T, P_M, U_T and U_M is low if contrasted with that exhibited by Q_T, Q_M, R_T or R_M.

For samples from the NEAR(2) alternative process with (p_{11}, p_{12}, β_1, β_2)=(0.25, 0.5, ½, ¼), Q_T, Q_M, R_T and R_M display a power above 0.977 for m≥150; U_T (U_M) exhibits less power for all of the sample sizes and, although it has the property of consistency, its power is less than 0.672 with m=250. For the same NEAR(2) process with (p_{11}, p_{12}, β_1, β_2)=(.25, .125, 1/3, 1/8), the power of Q_T, Q_M, R_T and R_M is greater than 0.955 for

[2] En el presente trabajo se dirá que una prueba es consistente si al aumentar el tamaño de muestra aumenta su potencia ❖ In this paper, a test will be considered consistent if its power increases with the sample size.

Cuadro 3. Potencia estimada de las pruebas para procesos alternativos AR(1).
Table 3. Estimated test power for AR(1) alternative processes.

Proceso	m	Tamaño de prueba	R_T	R_M	Q_T	Q_M	P_T	P_M	U_T	U_M
(μ, β)=(0, 0.9)	100	0.05	0.034	0.034	0.034	0.034	0.024	0.024	0.019	0.019
		0.10	0.078	0.078	0.069	0.069	0.053	0.053	0.051	0.051
	150	0.05	0.036	0.036	0.041	0.041	0.037	0.037	**0.055**	**0.055**
		0.10	0.075	0.075	0.083	0.083	0.061	0.061	**0.098**	**0.098**
	200	0.05	0.036	0.036	0.043	0.043	0.024	0.024	**0.096**	**0.096**
		0.10	0.065	0.065	0.090	0.090	0.057	0.057	**0.165**	**0.165**
	250	0.05	0.060	0.060	0.076	0.076	0.030	0.030	**0.115**	**0.115**
		0.10	0.097	0.097	0.125	0.125	0.063	0.063	**0.192**	**0.192**
(μ, β)=(0, 0.7)	100	0.05	0.105	0.105	0.092	0.092	0.022	0.022	**0.179**	**0.179**
		0.10	0.187	0.187	0.169	0.169	0.058	0.058	**0.279**	**0.279**
	150	0.05	0.178	0.178	0.206	0.206	0.031	0.031	**0.475**	**0.475**
		0.10	0.263	0.263	0.330	0.330	0.056	0.056	**0.629**	**0.629**
	200	0.05	0.220	0.220	0.324	0.324	0.027	0.027	**0.792**	**0.792**
		0.10	0.326	0.326	0.486	0.486	0.060	0.060	**0.868**	**0.868**
	250	0.05	0.283	0.283	0.505	0.505	0.026	0.026	**0.911**	**0.911**
		0.10	0.366	0.366	0.640	0.640	0.057	0.057	**0.947**	**0.947**
(μ, β)=(0, 0.5)	100	0.05	0.303	0.303	0.327	0.327	0.038	0.038	**0.445**	**0.445**
		0.10	0.440	0.440	0.457	0.457	0.067	0.067	**0.592**	**0.592**
	150	0.05	0.432	0.432	0.589	0.589	0.038	0.038	**0.815**	**0.815**
		0.10	0.566	0.566	0.740	0.740	0.080	0.080	**0.893**	**0.893**
	200	0.05	0.572	0.572	0.866	0.866	0.040	0.040	**0.955**	**0.955**
		0.10	0.692	0.692	0.947	0.947	0.090	0.090	**0.975**	**0.975**
	250	0.05	0.676	0.676	0.974	0.974	0.048	0.048	**0.986**	**0.986**
		0.10	0.768	0.768	0.993	0.993	0.089	0.089	**0.993**	**0.993**
(μ, β)=(0, 0.3)	100	0.05	0.572	0.572	0.654	0.654	0.080	0.080	0.593	0.593
		0.10	0.699	0.699	0.793	0.793	0.122	0.122	0.729	0.729
	150	0.05	0.786	0.786	0.954	0.954	0.082	0.082	0.906	0.906
		0.10	0.862	0.862	0.983	0.983	0.161	0.161	0.937	0.937
	200	0.05	0.908	0.908	0.998	0.998	0.116	0.116	0.978	0.978
		0.10	0.948	0.948	1.000	1.000	0.212	0.212	0.985	0.985
	250	0.05	0.948	0.948	1.000	1.000	0.141	0.141	0.991	0.991
		0.10	0.972	0.972	1.000	1.000	0.222	0.222	0.998	0.998
(μ, β)=(0, 0.1)	100	0.05	0.834	0.834	0.937	0.937	0.168	0.168	0.646	0.646
		0.10	0.915	0.915	0.974	0.974	0.243	0.243	0.769	0.769
	150	0.05	0.953	0.953	1.000	1.000	0.227	0.227	0.920	0.920
		0.10	0.980	0.980	1.000	1.000	0.364	0.364	0.955	0.955
	200	0.05	0.991	0.991	1.000	1.000	0.313	0.313	0.983	0.983
		0.10	0.997	0.997	1.000	1.000	0.452	0.452	0.992	0.992
	250	0.05	0.999	0.999	1.000	1.000	0.357	0.357	0.993	0.993
		0.10	0.999	0.999	1.000	1.000	0.487	0.487	0.998	0.998
		0.10	0.371	0.269	0.367	0.265	0.376	0.277	0.369	0.265
(μ, β)=(0.3, 1.0)	100	0.05	0.798	0.533	0.798	0.533	0.795	0.530	0.794	0.525
		0.10	0.868	0.679	0.866	0.676	0.865	0.677	0.866	0.672
	150	0.05	0.925	0.716	0.923	0.711	0.923	0.712	0.923	0.708
		0.10	0.955	0.814	0.957	0.808	0.955	0.808	0.955	0.807
	200	0.05	0.978	0.793	0.978	0.791	0.978	0.788	0.978	0.789
		0.10	0.988	0.888	0.988	0.885	0.988	0.887	0.989	0.887
	250	0.05	0.995	0.878	0.995	0.876	0.995	0.877	0.995	0.875
		0.10	1.000	0.940	1.000	0.936	1.000	0.938	1.000	0.938
(μ, β)=(0.3, 0.9)	100	0.05	0.040	0.040	0.043	0.043	0.026	0.026	0.024	0.024
		0.10	0.079	0.079	0.080	0.080	0.072	0.072	0.043	0.043
	150	0.05	0.046	0.046	0.051	0.051	0.025	0.025	0.051	0.051
		0.10	0.083	0.083	0.075	0.075	0.055	0.055	0.084	0.084
	200	0.05	0.065	0.065	0.056	0.056	0.021	0.021	0.092	0.092
		0.10	0.107	0.107	0.098	0.098	0.060	0.060	0.144	0.144
	250	0.05	0.052	0.052	0.064	0.064	0.019	0.019	0.127	0.127
		0.10	0.092	0.092	0.120	0.120	0.046	0.046	0.201	0.201

Con ($\mu \neq 0$, β=1), el proceso tiene incrementos independientes con media μ. Ésto ocasiona que los resultados de R_T, R_M, Q_T, Q_M, P_T, P_M, U_T y U_M se vean influenciados por las pruebas con los estadísticos U y T, siendo R_T, Q_T, P_T y U_T las que muestran mayor potencia respecto a sus similares R_M, Q_M, P_M y U_M. Si $\mu \neq 0$ y $\beta \neq 1$ $\left(|\beta| < 1, S_0 = 0\right)$ la media del incremento $S_{n+1} - S_n$ es $\mu\beta^n$, por lo que la media de los incrementos es cero conforme n aumenta, de esta forma las pruebas pierden la potencia exhibida cuando el proceso es generado con ($\mu \neq 0$, β=1) y muestran resultados similares a los del proceso generado con $\left(\mu = 0, |\beta| < 1\right)$. El Cuadro 3 muestra los resultados de las pruebas para los procesos AR(1) discutidos anteriormente.

Cuando las muestras provienen del proceso alternativo NOC, el cual tiene incrementos no correlacionados pero dependientes, las pruebas U_T, U_M, Q_T, Q_M, R_T y R_M consideran al proceso como martingala. P_T y P_M presentan baja potencia, P_T sólo alcanza una potencia de 0.241 y 0.346 y P_M de 0.238 y 0.356 con m=250 y α=0.05 y 0.1, respectivamente (Cuadro 4). Lo anterior evidencia lo difícil que es diferenciar estadísticamente a los procesos de variables independientes de los procesos de variables no correlacionadas.

Para muestras del proceso alternativo ARCH con (μ, β)=(1, 0.5), Q_T, Q_M, R_T y R_M registran una potencia mayor a 0.830 para m≥150. U_T y U_M tienen baja potencia; mientras que para muestras generadas con (μ, β)= (1, 0.1), la potencia de Q_T, Q_M, R_T y R_M es mayor a 0.976 para m≥150; para este mismo proceso, U_T y U_M registran baja potencia (Cuadro 4).

Cuando las muestras provienen de los procesos alternativos NEAR(1) considerados, Q_T y Q_M presentan la mayor potencia, seguidas de R_T y R_M; la potencia que registran P_T, P_M, U_T y U_M es baja si se contrastan con las mostradas por Q_T, Q_M, R_T o R_M.

Para muestras provenientes del proceso alternativo NEAR(2) con ($p_{11}, p_{12}, \beta_1, \beta_2$)=(0.25, 0.5, ½, ¼), Q_T, Q_M, R_T y R_M muestran una potencia mayor a 0.977 para m≥150; U_T (U_M) exhibe la menor potencia para todos los tamaños de muestras, y aunque tiene la propiedad de consistencia, su potencia es menor a 0.672 con m=250. Para el mismo proceso NEAR(2) con (p_{11}, p_{12}, β_1, β_2)=(.25, .125, 1/3, 1/8), la potencia de Q_T, Q_M, R_T y R_M es mayor a 0.955 para m≥150, y aunque U_T (U_M) y P_T (P_M) muestran la propiedad de consistencia, sólo alcanzan una potencia de 0.754 y 0.405, fijando un tamaño de prueba de 0.1 con m=250. Las pruebas P_T y P_M no presentan potencia en varios procesos alternativos, o en el mejor de los casos exhiben baja potencia (Cuadros 3 y 4), por lo que se descartan como pruebas para verificar si un PE es una martingala.

Las pruebas U_T y U_M muestran la mayor potencia respecto a las restantes cuando en la hipótesis alternativa se tienen a los procesos AR generados con β=0.9 y 0.7. Lo mismo sucede para β=0.5 para m≤200; sin embargo, con m=250 y β=0.5, la potencia de Q_T y Q_M es mayor o igual que las exhibidas por U_T y U_M. En general, en los restantes procesos alternativos considerados, Q_T y Q_M presentan la mayor potencia. Las potencias exhibidas por R_T y R_M son mayores que las mostradas por U_T y U_M.

m≥150 and, although U_T (U_M) and P_T (P_M) exhibit the property of consistency, their power is only 0.754 and 0.405, fixing a test size of 0.1 with m=250. Note that the P_T and P_M tests have no power in several alternative processes or, at best, exhibit low power (Tables 3 and 4); thus, they are ruled out as tests for verifying whether a SP is martingale.

Tests U_T and U_M show greater power than the others when the alternative hypotheses include AR processes generated with β=0.9 and 0.7. The same occurs for β=0.5 for m=200; however, with m=250 and β=0.5, the power of Q_T and Q_M is greater or equal to that exhibited by U_T and U_M. In general, in the rest of the alternative processes considered, Q_T and Q_M show the greatest power. The power exhibited by R_T and R_M are greater than that shown by U_T and U_M (Tables 3 and 4). Even though the U_M test preserves the test size with all sample sizes of the martingales analyzed, the power shown in most of the processes considered in the alternative hypothesis is considerable low, compared with Q_T or Q_M.

Conclusions

None of the tests studied proved to be uniformly most powerful against any of the alternative processes considered.

When the data are generated by processes with non-correlated increments and zero mean, and are not martingales, the tests do not exhibit enough power to reject the null hypothesis of martingale (Table 4, NOC process), demonstrating the proximity of the martingale hypothesis to that of non-correlated increments.

When the alternative processes are autoregressive models of first order with coefficient β=0.9, 0.7 and 0.5, the U_T and U_M are in general more powerful (Table 3). Q_T and Q_M preserve the test size for a sample size of 250 in several cases, although R_T and R_M preserve the sample size in more cases (Table 2). The Q_T and R_T tests, in general, are more powerful with respect to the alternative processes considered (Table 4).

It is recommended that the R_T and Q_T tests be used when the sample size is greater than 250.

–End of the English version–

Cuadro 4. Potencia estimada de las pruebas para algunos procesos alternativos.
Table 4. Estimated power of the tests for some alternative processes.

Proceso	m	Tamaño de prueba	R_T	R_M	Q_T	Q_M	P_T	P_M	U_T	U_M
NOC	100	0.05	0.085	0.079	0.077	0.070	**0.126**	**0.122**	0.044	0.035
		0.10	0.153	0.154	0.126	0.131	**0.200**	**0.203**	0.074	0.076
	150	0.05	0.067	0.070	0.061	0.064	**0.110**	**0.116**	0.027	0.031
		0.10	0.137	0.137	0.115	0.112	**0.216**	**0.218**	0.060	0.057
	200	0.05	0.089	0.088	0.096	0.093	**0.164**	**0.159**	0.029	0.026
		0.10	0.156	0.145	0.141	0.134	**0.289**	**0.274**	0.060	0.048
	250	0.05	0.097	0.095	0.079	0.079	**0.241**	**0.238**	0.036	0.035
		0.10	0.169	0.176	0.143	0.153	**0.346**	**0.356**	0.077	0.085
ARCH(1)	100	0.05	**0.636**	**0.636**	0.507	0.507	0.026	0.026	0.009	0.009
(μ, β)=(1, 0.5)		0.10	**0.745**	**0.745**	0.609	0.609	0.056	0.056	0.016	0.016
	150	0.05	**0.831**	**0.831**	0.807	0.807	0.044	0.044	0.016	0.016
		0.10	**0.903**	**0.903**	0.873	0.873	0.092	0.092	0.034	0.034
	200	0.05	**0.934**	**0.934**	0.913	0.913	0.028	0.028	0.022	0.022
		0.10	**0.964**	**0.964**	0.953	0.953	0.063	0.063	0.050	0.050
	250	0.05	**0.972**	**0.972**	0.975	0.975	0.046	0.046	0.044	0.044
		0.10	**0.988**	**0.988**	0.984	0.984	0.082	0.082	0.079	0.079
ARCH(1)	100	0.05	0.855	0.855	**0.899**	**0.899**	0.087	0.087	0.016	0.016
(μ, β)=(1, 0.1)		0.10	0.928	0.928	**0.956**	**0.956**	0.135	0.135	0.038	0.038
	150	0.05	0.976	0.976	**0.993**	**0.993**	0.120	0.120	0.074	0.074
		0.10	0.988	0.988	**1.000**	**1.000**	0.213	0.213	0.135	0.135
	200	0.05	0.994	0.994	**1.000**	**1.000**	0.138	0.138	0.207	0.207
		0.10	0.998	0.998	**1.000**	**1.000**	0.221	0.221	0.299	0.299
	250	0.05	1.000	1.000	**1.000**	**1.000**	0.173	0.173	0.309	0.309
		0.10	1.000	1.000	**1.000**	**1.000**	0.278	0.278	0.422	0.422
NEAR(1),	100	0.05	0.554	0.554	**0.705**	**0.705**	0.050	0.050	0.036	0.036
(p_{11}, β)= (0.5, ½)		0.10	0.678	0.678	**0.815**	**0.815**	0.089	0.089	0.078	0.078
	150	0.05	0.754	0.754	**0.964**	**0.964**	0.057	0.057	0.148	0.148
		0.10	0.842	0.842	**0.985**	**0.985**	0.121	0.121	0.231	0.231
	200	0.05	0.862	0.862	**0.999**	**0.999**	0.070	0.070	0.330	0.330
		0.10	0.925	0.925	**1.000**	**1.000**	0.144	0.144	0.456	0.456
	250	0.05	0.931	0.931	**1.000**	**1.000**	0.096	0.096	0.513	0.513
		0.10	0.969	0.969	**1.000**	**1.000**	0.159	0.159	0.633	0.633
NEAR(1),	100	0.05	0.160	0.160	**0.339**	**0.339**	0.078	0.078	0.012	0.012
(p_{11}, β)= (0.9, ½)		0.10	0.249	0.249	**0.466**	**0.466**	0.154	0.154	0.032	0.032
	150	0.05	0.247	0.247	**0.655**	**0.655**	0.120	0.120	0.045	0.045
		0.10	0.356	0.356	**0.793**	**0.793**	0.169	0.169	0.095	0.095
	200	0.05	0.306	0.306	**0.903**	**0.903**	0.141	0.141	0.152	0.152
		0.10	0.438	0.438	**0.962**	**0.962**	0.223	0.223	0.254	0.254
	250	0.05	0.428	0.428	**0.979**	**0.979**	0.171	0.171	0.275	0.275
		0.10	0.561	0.561	**0.995**	**0.995**	0.256	0.256	0.415	0.415
NEAR(1),	100	0.05	0.838	0.838	**0.939**	**0.939**	0.118	0.118	0.103	0.103
$(p_{11}, ß)$= (0.1, ½)		0.10	0.908	0.908	**0.970**	**0.970**	0.170	0.170	0.167	0.167
	150	0.05	0.973	0.973	**1.000**	**1.000**	0.199	0.199	0.276	0.276
		0.10	0.989	0.989	**1.000**	**1.000**	0.341	0.341	0.389	0.389
	200	0.05	0.996	0.996	**1.000**	**1.000**	0.246	0.246	0.489	0.489
		0.10	0.998	0.998	**1.000**	**1.000**	0.405	0.405	0.605	0.605
	250	0.05	1.000	1.000	**1.000**	**1.000**	0.312	0.312	0.653	0.653
		0.10	1.000	1.000	**1.000**	**1.000**	0.437	0.437	0.766	0.766
NEAR(2),	100	0.05	0.876	0.876	**0.920**	**0.920**	0.257	0.257	0.053	0.053
$(p_{11}, p_{12}, \beta_1, \beta_2)$=		0.10	0.933	0.933	**0.956**	**0.956**	0.343	0.343	0.107	0.107
(0.25, 0.5, ½, ¼)	150	0.05	0.978	0.978	**0.994**	**0.994**	0.348	0.348	0.182	0.182
		0.10	0.989	0.989	**0.997**	**0.997**	0.492	0.492	0.273	0.273
	200	0.05	0.999	0.999	**1.000**	**1.000**	0.493	0.493	0.352	0.352
		0.10	1.000	1.000	**1.000**	**1.000**	0.631	0.631	0.480	0.480
	250	0.05	1.000	1.000	**1.000**	**1.000**	0.564	0.564	0.524	0.524
		0.10	1.000	1.000	**1.000**	**1.000**	0.695	0.695	0.671	0.671
NEAR(2),	100	0.05	0.829	0.829	**0.911**	**0.911**	0.122	0.122	0.072	0.072
$(p_{11}, p_{12}, \beta_1, \beta_2)$=		0.10	0.911	0.911	**0.960**	**0.960**	0.186	0.186	0.134	0.134
(0.25, 0.125,	150	0.05	0.956	0.956	**1.000**	**1.000**	0.159	0.159	0.241	0.241
1/3, 1/8)		0.10	0.977	0.977	**1.000**	**1.000**	0.284	0.284	0.361	0.361
	200	0.05	0.987	0.987	**1.000**	**1.000**	0.225	0.225	0.482	0.482
		0.10	0.998	0.998	**1.000**	**1.000**	0.339	0.339	0.611	0.611
	250	0.05	0.999	0.999	**1.000**	**1.000**	0.307	0.307	0.635	0.635
		0.10	1.000	1.000	**1.000**	**1.000**	0.405	0.405	0.754	0.754

(Cuadros 3 y 4). A pesar de que la prueba U_M preserva el tamaño de la prueba con todos los tamaños de muestra de las martingalas analizadas, la potencia presentada en la mayoría de los procesos considerados en la hipótesis alternativa es considerablemente baja, comparada con Q_T o Q_M.

Conclusiones

Ninguna de las pruebas estudiadas resultó ser uniformemente más potente contra todos los procesos alternativos considerados.

Cuando los datos son generados por procesos con incrementos no correlacionados y media cero que no son martingalas, las pruebas presentan baja potencia para rechazar la hipótesis nula de martingala (Cuadro 4, proceso NOC), lo cual muestra la cercanía que existe entre la hipótesis de martingala y la no correlación de los incrementos.

Cuando los procesos alternativos son modelos autorregresivos de orden uno con coeficiente β= 0.9, 0.7 y 0.5, las pruebas U_T y U_M son las que, en general, presentan mayor potencia (Cuadro3).

Q_T y Q_M preservan el tamaño de la prueba para muestras de tamaño 250 en varios de los casos, aunque R_T y R_M preservan el tamaño en más casos (Cuadro 2). Las pruebas Q_T y R_T, en general, presentan la mayor potencia respecto a los procesos alternativos considerados (Cuadro 4).

Usar las pruebas R_T y Q_T cuando se tienen tamaños de muestra mayores que 250.

Literatura Citada

Box, G., E. P., and Pierce, D. A. 1970. Distribution of residual autocorrelations in autoregressive moving average time series models. Journal of the American Statistical Association, 65, 1509-1526.

Brockwell P., J., and Davis, R. A. 1996. An Introduction to Time Series and Forecasting. Springer-Verlag, NY. pp: 227-228.

Campbell, J. Y., A. W. Lo, and M. A. Craig. 1997. The Econometrics of Financial Markets. Princeton University Press. USA. pp: 41-42.

Cochrane J. 1988. How big is the random walk in GNP. J. of Pol. Econ. 96: 893-920.

Domínguez, M., A., and I. N. Lobato. 2003. Testing the martingale difference hypothesis. Econometric Reviews, 22: 351-377.

Durlauf, S. N. 1991. Spectral based testing of the martingale hipotesis. Journal of Econometrics, 50: 355-376.

Efron, B. 1969. Student's t-test under symmetry conditions. Journal of the American Statistical Association, 64: 1278-1302.

Gibbons, J. D. 1985. Nonparametric Statistical Inference. McGraw-Hill, Ltd. pp: 57-58.

Kendall, M. G., and A. Stuart. 1976. The Advanced Theory of Statistics, Vol. 3, Griffin, London. pp: 365-368.

Lawrance, J., and P. Lewis. 1985. Modelling and residual analysis of non-linear autoregressive time series in exponential variables. Journal of the Royal Statistical Society B, 42, 150-161.

Lo, A. W., and C. MacKinlay. 1988. Stock market prices do not follow random walks: evidence from a simple specification test. Review of Financial Studies, 1, 41-66.

Lobato, I. 2001. Testing that a dependent process is uncorrelated. Journal of the American Statistical Association, Theory and Methods, 96: 1066-1076.

Ross, S. M. 1996. Stochastic Processes. J. Wiley & Sons, Inc. USA. pp: 59-60.

Woodroofe, M. 1971. Probability with Applications. McGraw-Hill, New York. 329 p.