ÖHÜ Müh. Bilim. Derg. / OHU J. Eng. Sci.

ISSN: 2564-6605
doi: 10.28948/ngumuh.516884
Ömer Halisdemir Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi, Cilt 8, Sayı 1, (2019), 226-236
Omer Halisdemir University Journal of Engineering Sciences, Volume 8, Issue 1, (2019), 226-236

Araştırma / Research

PASTERNAK ELASTİK ZEMİNE OTURAN HETEROJEN ANİZOTROPİK PLAKLARIN DİNAMİK ANALİZİ

Zihni ZERİN[1] (ORCID: 0000-0001-7906-8136) [*]

[1]*İnşaat Mühendisliği Bölümü, Mühendislik Fakültesi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Samsun, Türkiye*

Geliş / Received: *08.10.2018*
Kabul / Accepted: *12.11.2018*

ÖZ

Bu makalede, elastik zeminin heterojen ortotropik plakların (HTOP) titreşim frekansları üzerindeki etkileri kayma deformasyon teorisi (KDT) kullanılarak incelenmektedir. İki parametreli elastik ortamın plak üzerindeki reaksiyonunu tanımlamak için Pasternak elastik zemin (PEZ) modeli kullanılmaktadır. Problemin formülasyonu Donnell tipi teoriye dayanır. Heterojen ortotropik malzemenin Young modüllerinin üstel fonksiyon olarak değiştiği, Poisson oranı ve yoğunluğu sabit kabul edilmektedir. Temel denklemler, Galerkin yöntemi kullanılarak zamana bağlı geometrik kısmi türevli diferansiyel denklemler adi diferansiyel denklemlere indirgenmektedir. Türetilen denklemden heterojen ortotropik plakların frekansı için kapalı çözüm elde edilmektedir. Elde edilen değerler literatürdeki benzer çalışmalar ile karşılaştırılarak sonuçlar doğrulanmıştır. Son olarak, heterojenliğin, kayma gerilmelerinin ve PEZ'in frekans parametrelerine etkilerini göstermek için parametrik çalışma gerçekleştirilmiştir.

Anahtar kelimeler: Heterojen anizotrop malzemeler, Pasternak elastik zemini, Plaklar, Titreşim, Frekans parametresi

DYNAMIC ANALYSIS OF HETEROGENEOUS ANISOTROPIC PLATES RESTING ON THE PASTERNAK ELASTIC FOUNDATION

ABSTRACT

In this study, the effects of elastic foundation on the frequencies of the heterogeneous orthotropic plates using shear deformation plate theory are investigated. Pasternak elastic foundation model is used to define the reaction of two-parameter elastic media on the plate. The formulation of the problem is based on the Donnell type plate theory. The Young's moduli of heterogeneous orthotropic material change as exponential function, Poisson's ratio and density are considered constant. The basic partial differential equations are reduced to ordinary differential equations using Galerkin method and closed-form solution is obtained for the frequency of heterogeneous orthotropic plates. The obtained values are compared with those in the current literature and the results were confirmed. Finally, a parametric study is performed to show the effects of heterogeneity, shear stresses and elastic foundations on the frequency parameters.

Keywords: Heterogeneous anisotropic materials, Pasternak elastic foundation, Plates, Vibration, Frequency parameter

1. GİRİŞ

Heterojen anizotrop malzemeler, yapı elemanlarının mukavemetini artırmak için mühendislik tasarımında ve modern teknolojide yaygın olarak kullanılmaktadır. Malzemelerin heterojenliği, nem, üretim teknikleri, yüzey ve termal polisaj prosesleri, radyasyon altında faaliyetler vb. etkilerden kaynaklanabilir. Plak malzemelerin

[*]Corresponding author / Sorumlu yazar. Tel.: +90 362 312 1919/1055; e-mail/e-posta:zihniz@omu.edu.tr

heterojenliği için çeşitli modeller literatürde önerilmiş ve ayrıntılı bir tartışma sunulmuştur [1,2]. Nükleer reaktörlerde kullanılan çelik alaşımlarda kullanılan iki veya daha fazla malzemenin karıştırılmasıyla üretilen yüksek mukavemetli kompozitler son yıllarda daha fazla ilgi görmektedir. Bu tür malzemelerin mekanik özellikleri, isteğe bağlı olarak, sürekli veya kısmi sürekli olarak, koordinatlara bağlı olarak değişebilir. Dahası, heterojen materyaller anizotropik karakterlere sahip olabilir [3]. Anizotropik plakların artan kullanımı, kararlılık ve titreşim davranışlarını analiz etmek için çeşitli plak teorileri ve sayısal hesaplama yaklaşımlarının geliştirilmesinde büyük ilgi uyandırmaktadır. Kayma deformasyon teorileri (KDT'ler), heterojen anizotropik plakların kayma gerilmeleri dikkate alınarak klasik kabuk teorisinin eksikliğini ortadan kaldırmaktadır [4-6]. Kayma deformasyonlarının etkileri, heterojen anizotropik plakların dinamik davranışlarında oldukça önemlidir. Dinamik problemlerin çözümünde heterojenlik hesaba katıldığında, bu materyallerin genellikle ana yönlerle ortotropik olarak modellendiği bilinmektedir. Son yıllarda, heterojen ortotropik kompozit yapıların burkulma, titreşim, kararlılık ve termo-elastik problemleri çeşitli teoriler ve yöntemler kullanılarak çözülmüştür [7-13].

Elastik zemin üzerinde bulunan plaklar havaalanları ve yüzme havuzlarının temelinde, zemin mühendisliğinde, çeşitli makinelerin zemine sabitlenmesinde, nükleer enerji santrallerinde, füze ve roket rampalarında, uçaklarda ve diğer endüstriyel uygulamalarda bulunabilir. Bir ve iki parametreli zemin modelleri plağın oturduğu toprak temelini modellemek için kullanılmaktadır. Pasternak elastik zemin modeli, temellerin mekanik davranışlarını tanımlamak için yaygın olarak benimsenmiştir ve iyi bilinen Winkler modeli bu modelin özel durumlarından biridir [14, 15]. Bu modeller kullanılarak homojen kompozit plaklarla ilgili bazı çalışmalar yapılmıştır [16-20]. Son yıllarda, elastik zemin üzerinde duran veya etrafı zeminle sarılmış heterojen plaklar, petrokimya ve deniz endüstrileri ile mekanik, nükleer ve inşaat mühendisliği uygulamaları gibi çeşitli mühendislik yapılarında kullanılmaya başlamıştır. Heterojen plakların dinamik karakteristiklerine elastik zemin etkilerinin incelenmesi günümüzde araştırmacıların ilgi odağıdır. Bununla birlikte, elastik temellere dayanan heterojen ortotropik plakların davranışları ile ilgili yapılan araştırmalar sınırlı sayıdadır [21-29].

Yapılan literatür özeti, PEZ üzerinde bulunan HOP'ların KDT çerçevesinde titreşim analizinin analitik olarak yeterince çalışılmadığını ortaya koymaktadır. Bu makalede, heterojen ortotropik plakların frekans parametreleri üzerindeki elastik temellerin etkileri incelenmektedir.

2. MATERYAL VE METOT

Bu makalede, elastik zeminin heterojen ortotropik plakların (HTOP) titreşim frekansları üzerindeki etkileri kayma deformasyon teorisi (KDT) kullanılarak incelenmektedir. İki parametreli elastik ortamın plak üzerindeki reaksiyonunu tanımlamak için Pasternak elastik zemin (PEZ) modeli kullanılmaktadır. Problemin formülasyonu Donnell tipi plak teorisine dayanır. Heterojen ortotropik malzemenin Young modüllerinin üssel fonksiyon olarak değiştiği, Poisson oranları ν_{12}, ν_{21} ve yoğunluğu ρ sabit kabul edilmektedir. Temel denklemler, Galerkin yöntemi kullanılarak zamana bağlı geometrik kısmi türevli diferansiyel denklemler adi diferansiyel denklemlere indirgenmektedir. Türetilen denklemden heterojen ortotropik plakların frekansları için kapalı çözüm elde edilmektedir. Elde edilen değerler literatürdeki benzer çalışmalar ile karşılaştırılarak sonuçlar doğrulanmıştır. Sayısal hesaplarda Maple ve EXCEL programları ve şekil çizimlerinde AutoCAD programı kullanılmıştır. Son olarak, heterojenliğin, kayma gerilmesinin ve PEZ'in frekans parametrelerine etkilerini göstermek için parametrik çalışma gerçekleştirilmiştir.

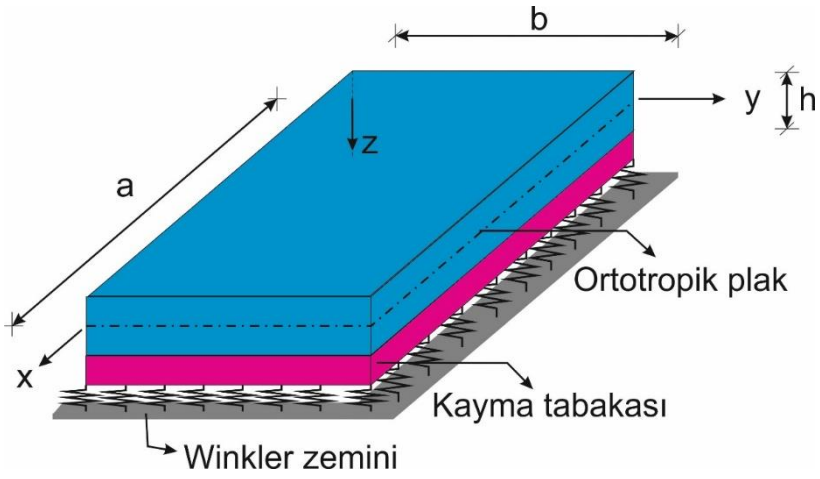
2.1. Temel bağıntılar ve denklemler

Şekil 1' de PEZ üzerinde bulunan, uzunluğu a, eni b ve kalınlığı h olan heterojen ortotropik dikdörtgen plak (HTOP) sunulmaktadır. *Oxyz* kartezyen koordinat sistemi ve zemin modeli Şekil 1 üzerinde gösterilmektedir.

Airy gerilme fonksiyonu, Φ, kuvvet bileşenleri ile $(N_{11}, N_{22}, N_{12}) = h(\Phi_{,yy}, -\Phi_{,xy}, \Phi_{,xx})$ bağıntısı ile tanımlanmaktadır [1-4]. PEZ'in HTOP'a gösterdiği tepki kuvveti şu şekilde tanımlanır [14]:

$$N = K_w w - K_p(w_{,xx} + w_{,yy}) \tag{1}$$

Burada, virgül işareti uygun değişkene göre kısmi türevdir, N zeminin reaksiyon kuvvetini, $K_w(N/m^3)$ zeminin taban reaksiyon modülünü ve $K_p(N/m^2)$ ise kayma modülünü tanımlar. (1) ifadesinde, $K_p = 0$ ise PEZ modeli Winkler elastik zemin (WEZ) modeline dönüşür [14, 15].



Şekil 1. Betonun idealize edilen davranışı

HTOP'nin Young modülleri kalınlık koordinatına bağlı üstel fonksiyon olarak değiştiği için gerilme ve deformasyon bileşenleri arasındaki bağıntılar KDT çerçevesinde şu şekilde tanımlanabilir [3,8, 10-12].

$$\begin{pmatrix}\tau_1\\ \tau_2\\ \tau_{12}\\ \tau_{13}\\ \tau_{23}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}E_{11}(Z) & E_{12}(Z) & 0 & 0 & 0\\ E_{21}(z_1) & E_{22}(Z) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & E_{66}(Z) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & E_{55}(Z) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{44}(Z)\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\\ \gamma_{13}\\ \gamma_{23}\end{pmatrix} \tag{2}$$

(2) bağıntılarında sol sütundaki semboller gerilmeleri, sağ son sütundaki semboller deformasyonları ve ortadaki 5×5 matrisi HTOP'nin malzeme özelliklerini tanımlamakta olup aşağıdaki tanımlar geçerlidir:

$$E_{11}(Z)=\frac{E_{1HT}(Z)}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\qquad E_{22}(Z)=\frac{E_{2HT}(Z)}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\qquad E_{12}(Z)=\frac{\nu_2 E_{1HT}(Z)}{1-\nu_{12}\nu_{21}}=\frac{\nu_1 E_{2HT}(Z)}{1-\nu_{12}\nu_{21}}=E_{21}(Z);$$
$$E_{66}(Z)=G_{12HT}(Z),\qquad E_{44}(Z)=G_{23HT}(Z),\qquad E_{55}(Z)=G_{13HT}(Z),\qquad Z=z/h \tag{3}$$

Bu bağıntılar içinde geçen semboller aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$E_{1HT}(Z)=E_1 e^{\eta(Z+0.5)},\qquad E_{2HT}(Z)=E_2 e^{\eta(Z+0.5)},\qquad G_{12HT}(Z)=G_{12}e^{\eta(Z+0.5)},$$
$$G_{13HT}(Z)=G_{13}e^{\eta(Z+0.5)},\qquad G_{23HT}(Z)=G_{23}e^{\eta(Z+0.5)}. \tag{4}$$

Bu sembollerin içinde yer alan $E_i(i=1,2)$ sırasıyla x ve y eksenleri doğrultusunda homojen ortotropik malzemenin Young modüllerini,$G_{ij}(i,j=1,2,3)$ kayma modüllerini, tanımlamaktadır. Ayrıca η heterojendik katsayısı olup $0 \le \eta \le 1$ eşitsizliğini sağlamaktadır ve $\eta = 0$ durumu homojen malzemeyi tanımlamaktadır.

HTOP'nin kuvvet ve moment bileşenleri aşağıdaki integrallerden bulunur [4-6]:

$$\left[(N_x,N_y,N_{xy}),(M_x,M_y,M_{xy}),(Q_x,Q_y)\right]=\int_{-h/2}^{h/2}\left[(\tau_x,\tau_y,\tau_{xy})[1,z],(\tau_{xz},\tau_{yz})\right]\mathrm{dz} \tag{5}$$

Burada T_x, T_y, T_{xy} ve M_x, M_y, M_{xy} HTOP'nin kuvvet ve moment bileşenlerini, Q_x, Q_y ise kesme kuvvetlerini tanımlamaktadır.

(2) bağıntıları (5) integrallerinde yerine yazılıp integral sonuçları (1) bağıntısı ile birlikte temel denklemlerde [4] yerine yazıldığında ve bazı matematiksel işlemlerden sonra HTOP'nin Φ gerilme fonksiyonu, w

yerdeğiştime fonksiyonu φ_1 ve φ_2 dönme açılarına bağlı hareket ve deformasyon uygunluk denklemleri aşağıdaki şekle dönüşür:

$$(y_{11}-y_{31})h\Phi_{,xxyy}+y_{12}h\Phi_{,xxxx}-y_{13}w_{,xxxx}-(y_{14}+y_{32})w_{,xxyy}+y_{15}\varphi_{1,xxx}+y_{35}\varphi_{1,xyy}-J_1\varphi_{1,x}+(y_{18}+y_{38})\varphi_{2,xxy}=0$$

$$y_{21}h\Phi_{,yyyy}+(y_{22}-y_{31})h\Phi_{,xxyy}-(y_{32}+y_{23})w_{,xxyy}-y_{24}w_{,yyyy}+(y_{25}+y_{35})\varphi_{1,xyy}+y_{28}\varphi_{2,yyy}+y_{38}\varphi_{2,xxy}-J_2\varphi_{2,y}=0 \quad (6)$$

$$x_{22}h\Phi_{,xxxx}+(x_{12}+x_{21}+x_{31})h\Phi_{,xxyy}+x_{11}h\Phi_{,yyyy}-x_{23}w_{,xxxx}-(x_{24}+x_{13}-x_{32})w_{,xxyy}-x_{14}w_{,yyyy}+x_{25}\varphi_{1,xxx}+(x_{15}+x_{35})\varphi_{1,xyy}+(x_{28}+x_{38})\varphi_{2,xxy}+x_{18}\varphi_{2,yyy}=0$$

$$-\rho_t h w_{,tt}+K_w w-K_p(w_{,xx}+w_{,yy})+J_1\varphi_{1,x}+J_2\varphi_{2,y}=0$$

Burada, t zaman ve x_{ij} ve $y_{ij}(i,j=1,2,\ldots,8)$ HTOP'ların özelliklerine bağlı katsayılardır.

2.2. Problemin Çözümü

PEZ'i üzerinde bulunan HTOP'nın sınır koşulları basit mesnetli olduğundan, (6) kısmi türevli diferansiyel denklemler sisteminin çözümü aşağıdaki gibi aranır [4, 7, 12]:

$$\Phi=r_1\sin(m_1x)\sin(m_2y)\cos\omega t,\qquad w=r_2\sin(m_1x)\sin(m_2y)\cos\omega t,$$
$$\varphi_1=r_3\cos(m_1x)\sin(m_2y)\cos\omega t,\qquad \varphi_2=r_4\sin(m_1x)\cos(m_2y)\cos\omega t \quad (7)$$

Burada $r_i(i=1,2,3,4)$ bilinmeyen katsayılar, $m_1=m\pi/a, m_2=n\pi/b$ olup (m,n) plağın eğilme modları ve ω titreşim frekansı olup birimi rad/sn'dir.

(7) denklemi, (6) kısmi türevli denklemlerinde yerine yazıldığında ve sonra Galerkin yöntemi uygulandığında, elde edilen cebirsel denklemler sisteminden HTOP'nın KDT çerçevesinde frekans parametresi için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\omega_{wp}^{KDT}=\left(\frac{u_{22}u_{11}-u_{12}u_{21}}{u_{11}q_{42}}+\frac{K_w+K_p(m_1^2+m_2^2)}{q_{42}}\right)^{0.5} \quad (8)$$

Burada $u_{ij}(i=1,2), q_{42}$ HTOP'ların özelliklerine bağlı katsayılardır.

HTOP'nın KDT çerçevesinde boyutsuz frekansı için aşağıdaki ifade kullanılır:

$$\omega_{1wp}^{KDT}=\omega_{wp}^{KDT}(a^2/h)\sqrt{(1-\nu_{12}^2)\rho/E_2} \quad (9)$$

Kayma gerilmeleri dikkate alınmadığında, (8) denkleminden klasik plak teorisi çerçevesinde HTOP'nın frekans parametresi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\omega_{wp}^{KT}=\frac{1}{\rho_t h}\Bigg\{y_{13}{m_1}^4+(y_{14}+2y_{32}+y_{23}){m_1}^2{m_2}^2+y_{24}{m_2}^4-[(y_{11}-2y_{31}+y_{22}){m_1}^2{m_2}^2+y_{12}{m_1}^4+y_{21}{m_2}^4]\times\frac{x_{23}{m_1}^4+(x_{13}-x_{32}+x_{24}){m_1}^2{m_2}^2+x_{14}{m_2}^4}{x_{22}{m_1}^4+(x_{12}+x_{31}+x_{21}){m_1}^2{m_2}^2+x_{11}{m_2}^4}+K_w+K_p(m_1^2+m_2^2)\Bigg\} \quad (10)$$

HTOP için boyutsuz frekans parametresi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\omega_{1wp}^{KT} = \omega_{wp}^{KT}(a^2/h)\sqrt{(1-\nu_{12}^2)\rho/E_2} \tag{11}$$

3. BULGULAR

Bu çalışmada frekans için elde edilen ifadelerin doğruluğunu teyit etmek için, PEZ üzerinde bulunan ince homojen izotropik kare plakaların değişik eğilme modlarına karşı gelen frekanslar için karşılaştırmalar yapılarak, Tablo 1'de sunulmaktadır. Boyutsuz parametreler şu şekilde sunulmaktadır:

$$\omega_1 = \frac{\omega b^2}{\pi^2}\sqrt{\frac{\rho h}{D}}, \quad D = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}, \quad \bar{K}_w = \frac{K_w a^4}{D}, \quad K_P = \frac{K_P a^2}{D}, \quad \nu = 0.3, \rho = \frac{1kg}{m^3},$$

$$a/b = 1, \quad b/h = 100$$

Tüm veriler Ferreira vd. [19] çalışmasından alınmıştır. Tablo 1'den görülebileceği gibi, sonuçlarımız Mindlin yaklaşımı kullanan Xiang ve ark. [16], 3D Ritz yaklaşımı kullanan Zhou ve ark. [18] ve radyal temel fonksiyonları kullanan Ferreira vd. [19] çalışmaları ile uyum içindedir.

Tablo 1. PEZ üzerinde bulunan kare plakaların eğilme modları için boyutsuz frekans parametrelerinin karşılaştırması

$\bar{K}_w$	$\bar{K}_p$	Kaynaklar	ω_1
100	10	Xiang vd. [16]	2.6551
		Zhou vd. [18]	2.6551
		Ferreira vd. [19]	2.6559
		Sunulan çalışma	2.6558
500	10	Xiang vd. [16]	3.3400
		Zhou vd. [18]	3.3398
		Ferreira vd. [19]	3.3406
		Sunulan çalışma	3.34057

Sayısal hesaplarda kayma gerilme fonksiyonları üniform, yani $f(z) = z$ olarak ve ortotropik malzeme olarak karbon fiberle güçlendirilmiş polimer, kısaltılmış şekli KFGP (Carbon Fiber Reinforced Polymer-CFRP) kullanılmaktadır [5]:

$$E_1 = 138.6 \times 10^9 Pa, \quad E_2 = 8.27 \times 10^9 Pa, \quad G_{13} = G_{23} = 0.6 \times E_2, \quad G_{12} = 4.12 \times 10^9 Pa,$$

$$\nu_{12} = 0.26.$$

Sayısal hesaplarda, heterojen malzemeler için $\eta = 1$ olarak göz önüne alınmaktadır. Bu bölümde, şu kısaltmalar kullanılmaktadır: H-homojen, HT-heterojen, KDT- kayma deformasyon teorisi ve KT-klasik teoridir. Oranlar için $\frac{\omega_{1wp}^{KDT} - \omega_1^{KT}}{\omega_1^{KT}} \times \%100$, $\frac{\text{HT-H}}{H} \times \%100$ ve $\frac{\text{KDT-KT}}{\text{KT}} \times \%100$ kullanılmaktadır.

PEZ ve WEZ etkisi dikkate alındığında ve zeminsiz durumda, KFGP' den oluşan HOP ve HTOP 'ların KT ve KDT çerçevesinde boyutsuz frekans parametre değerlerinin a/h oranına bağlı dağılımı Tablo 2' de sunulmaktadır. Plakların ölçüleri Tablo 2' de sunulmaktadır. Tablo 2' den görüldüğü gibi a/h oranı arttığında, zeminli ve zeminsiz durumlarda ω_1 değerleri artmaktadır. PEZ'nin ω_1 değerlerine etkisi WEZ etkisinden daha belirgin olduğu tablodan açık bir şekilde görülmektedir. a/h oranı arttığında ω_1 değerlerine zemin etkisi önemli derecede artmakta iken kayma deformasyonlarının (KD) etkisi azalmaktadır. Örneğin, WEZ dikkate alındığında $a/h = 10$ ve $a/h = 50$ için KD etkisi %11.35 ve %0.48 olduğu halde, PEZ dikkate alındığında sırasıyla $a/h = 10$ ve $a/h = 50$ için KD etkisi %10.98 ve %0.1. Dolayısıyla WEZ ve PEZ zeminlerin etkisi ve a/h oranının artması KD etkisini önemli ölçüde azaltmaktadır. Zeminsiz durumda, HT' nin ω_1 değerlerine etkisi a/h oranına bağlı değil ve %28 civarındadır. Zemin etkisi HT'nin ω_1 değerlerine etkisini azaltmakta ve a/h oranı artması ile ciddi bir oranda azalmaktadır. WEZ dikkate alındığında $a/h = 10$ ve $a/h = 50$ için zemin etkisi %27.86 ve %15.1 olduğu halde, PEZ dikkate alındığında sırasıyla $a/h = 10$ ve $a/h = 50$ için zemin etkisi %27.22 ve %6.55 olmaktadır.

Tablo 2. Zeminli ve zeminsiz durumlarda, KFGP ' den oluşan HOP ve HTOP'ların KT ve KDT çerçevesinde boyutsuz frekans parametresi değerlerinin $a/$□ oranına bağlı değişimi

	ω_{1wp}^{KDT}	ω_{1wp}^{KT}	ω_{1wp}^{KDT}	ω_{1wp}^{KT}
	HOP		HTOP	
a/h	$a/b=0.4;\ b=0.5\text{m};\ (K_w,K_p)=(0,0)$			
10	11.335	12.621	14.519	16.142
20	12.258	12.621	15.685	16.142
30	12.456	12.621	15.934	16.142
40	12.528	12.621	16.024	16.142
50	12.561	12.621	16.066	16.142
a/h	$a/b=0.4;\ b=0.5\text{m};\ (K_w,K_p)=(5\times10^7,0)$			
10	11.388	12.669	14.561	16.179
20	12.647	12.999	15.991	16.439
30	13.704	13.855	16.927	17.123
40	15.308	15.385	18.280	18.383
50	17.576	17.620	20.230	20.291
a/h	$a/b=0.4;\ b=0.5\text{m};\ (K_w,K_p)=(5\times1$			
10	11.538	12.805	14.679	16.286
20	13.698	14.024	16.834	17.260
30	16.771	16.894	19.493	19.664
40	21.350	21.405	23.572	23.653
50	27.231	27.259	29.015	29.057

PEZ ve WEZ etkisi dikkate alındığı ve alınmadığı durumlarda, KFGP' den oluşan HOP ve HTOP 'ların KT ve KDT çerçevesinde boyutsuz frekans parametresi değerlerinin a/b oranına bağlı değişimi Tablo 3' de sunulmaktadır. Diğer geometrik veriler Tablo 3'ün içinde sunulmaktadır. Tablo 3' den görüldüğü gibi a/b oranı arttığında zeminli ve zeminsiz durumlarda ω_1 değerleri belirgin olarak artmaktadır. PEZ'nin ω_1 değerlerine etkisinin WEZ etkisinden daha belirgin olduğu açıktır. a/b oranı arttığında ω_1 değerlerine WEZ etkisi artmakta iken PEZ etkisi önce azalmakta sonra ise artmaktadır. Ayrıca, zeminli ve zeminsiz durumlarda KD etkisi artmaktadır. a/b oranı arttığında ω_1 değerlerine PEZ etkisi dikkate alındığında HT' nin etkisi %19.39 dan %25.52'ye kadar artmakta iken, WEZ etkisi dikkate alındığında HT' nin etkisi zayıf olarak %27.62'den %26.3'e kadar azalmaktadır. Zeminsiz durumda a/b oranının değişimi HT' nin etkisini değiştirmemektedir.

PEZ ve WEZ etkisi dikkate alınmadığında, KFGP' den oluşan HOP ve HTOP 'ların KT ve KDT çerçevesinde boyutsuz frekans parametresi değerlerinin E_1/E_2 oranına bağlı değişimi Tablo 4' de sunulmaktadır. Şekil 2' de Tablo 4' de sunulan değerler kullanılarak PEZ üzerindeki HTOP'ların frekans parametresi değerlerinin E_1/E_2 oranına bağlı değişimi görülmektedir. Sayısal hesaplar için gereken veriler Tablo 4'ün içinde sunulmaktadır. Tablo 4' den görüldüğü gibi E_1/E_2 oranı arttığında zeminli ve zeminsiz durumlarda ω_1 değerleri artmaktadır. PEZ'nin ω_1 değerlerine etkisi WEZ etkisinden daha belirgindir. E_1/E_2 oranı arttığında ω_1 değerlerine WEZ ve PEZ etkisi artmaktadır. Ayrıca, KD'nin ω_1 değerlerine etkisi zeminsiz durumda arttığı halde zeminli durumlarda E_1/E_2 oranı artması ile azalmaktadır (Bkz., Şekil 2). Zeminsiz durumda, E_1/E_2 oranı 5'ten 25' e arttığında HT' nin etkisi değişmemekte iken (%28), WEZ ve PEZ etkileri dikkate alındığında, E_1/E_2 oranına bağlı olarak HT' nin etkisi sırasıyla %22.59'dan %13.81'a ve %19.62'den %9.88'e değişmektedir.

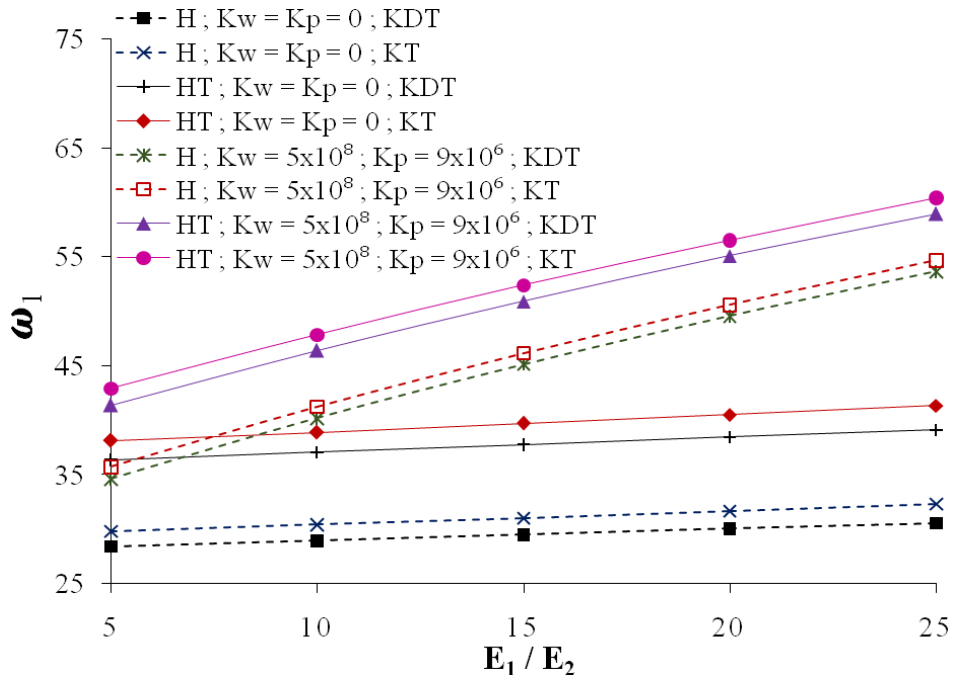
Tablo 3. Zeminli ve zeminsiz durumlarda, KFGP ' den oluşan HOP ve HTOP'ların KT ve KDT çerçevesinde boyutsuz frekans parametresi değerlerinin a/b oranına göre değişimi

	ω_{1wp}^{KDT}	ω_{1wp}^{KT}	ω_{1wp}^{KDT}	ω_{1wp}^{KT}
	HOP		HTOP	
a/b	$a/h=30;\ b=0.5\,m;\ (K_w,K_p)=(0,0)$			
0.1	11.599	11.747	14.838	15.024
0.4	12.456	12.621	15.934	16.142
0.7	14.199	14.403	18.164	18.421
1.0	16.627	16.892	21.270	21.604
a/b	$a/h=30;\ b=0.5\,m;(K_w,K_p)=(1\times10^7$			
0.1	11.669	11.817	14.892	15.078
0.4	12.716	12.877	16.138	16.343
0.7	14.596	14.794	18.476	18.728
1.0	17.111	17.369	21.651	21.979
a/b	$a/h=30;\ b=0.5\,m;\ (K_w,K_p)=(1\times10^7$			
0.1	14.187	14.308	16.938	17.101
0.4	13.430	13.584	16.707	16.905
0.7	15.059	15.251	18.844	19.091
1.0	17.484	17.736	21.946	22.270

Tablo 4. Zeminli ve zeminsiz durumlarda, KFGP ' den oluşan HOP ve HTOP'ların KT ve KDT çerçevesinde boyutsuz frekans parametresi değerlerinin E_1/E_2' ye bağlı değişimi

	ω_{1wp}^{KDT}	ω_{1wp}^{KT}	ω_{1wp}^{KDT}	ω_{1wp}^{KT}
	HOP		HTOP	
E_1/E_2	$a/h=20;\ a/b=3\,m;\ (K_w,K_p)=(0,0)$			
5	28.437	29.834	36.396	38.155
10	28.984	30.434	37.097	38.922
15	29.539	31.070	37.808	39.736
20	30.073	31.705	38.493	40.548
25	30.582	32.332	39.146	41.350
E_1/E_2	$a/h=20;\ a/b=3\,m;\ (K_w,K_p)=(5\times10^8,0)$			
5	32.032	33.278	39.269	40.905
10	35.705	36.892	42.555	44.156
15	39.048	40.218	45.625	47.235
20	42.118	43.298	48.490	50.137
25	44.969	46.177	51.180	52.885
E_1/E_2	$a/h=20;\ a/b=3\,m;\ (K_w,K_p)=(5\times10^8,9\times10^6)$			

5	34.608	35.764	41.397	42.952
10	40.226	41.283	46.414	47.886
15	45.163	46.178	50.956	52.403
20	49.604	50.610	55.117	56.571
25	53.670	54.686	58.971	60.457



Şekil 2. Pasternak zemini üzerinde ve zeminsiz durumda, KFGP ' den oluşan HOP ve HTOP'ların KT ve KDT çerçevesinde boyutsuz frekans parametresi değerlerinin $a/$ oranına bağlı değişimi

4. SONUÇLAR

Bu makalede, elastik zeminlerin HTOP'ların titreşim frekansları üzerindeki etkileri KDT temelinde incelenmektedir. İki parametreli elastik ortamın plak üzerindeki reaksiyonunu tanımlamak için PEZ modeli kullanılmaktadır. Problemin formülasyonu Donnell tipi plak teorisine dayanmaktadır. Heterojen ortotropik malzemenin Young modüllerinin üstel fonksiyon olarak değiştiği, Poisson oranı ve yoğunluğun sabit olduğu kabul edilmektedir. Galerkin yöntemi kullanılarak zamana bağlı geometrik kısmi türevli diferansiyel denklemler adi diferansiyel denklemlere indirgenmektedir. Türetilen denklemden HTOP'ların frekans parametresi için kapalı çözüm elde edilmektedir. Elde edilen değerler literatürdeki benzer çalışmalar ile karşılaştırılarak sonuçlar doğrulanmıştır.

Sayısal analizler aşağıdaki sonuçları ortaya çıkarmaktadır:

- **a)** PEZ'nin frekans parametresi değerlerine etkisi WEZ etkisinden daha belirgindir.
- **b)** a/h , a/b ve E_1/E_2 oranları arttığında zeminli ve zeminsiz durumlarda ω_1 değerleri artmaktadır.
- **c)** Zeminsiz durumda, HT' nin ω_1 değerlerine etkisi a/h , a/b ve E_1/E_2 oranlarına bağlı değildir.
- **d)** a/h ve a/b oranları arttığında ω_1 değerlerine zemin etkisi önemli derecede artmakta iken KD etkisi belirgin olarak azalmaktadır.
- **e)** Zeminsiz durumda, HT' nin ω_1 değerlerine etkisi a/h ve a/b oranlarına bağlı değildir.
- **f)** WEZ ve PEZ zeminlerinin etkilerinin dikkate alınması, HT' nin ω_1 değerlerine etkisini azaltmakta ve a/h oranı artması ile ciddi bir oranda azalmaktadır.
- **g)** a/b oranı arttığında ω_1 değerlerine WEZ etkisi artmakta iken PEZ etkisi önce azalmakta sonra ise artmaktadır.
- **h)** Zeminli ve zeminsiz durumlarda , a/b oranı arttığında ω_1 değerlerine KD etkisi artmaktadır.
- **i)** PEZ etkisi dikkate alındığında, a/b oranı arttığında ω_1 değerlerine HT' nin etkisi artmakta iken, WEZ etkisi dikkate alındığında HT' nin etkisi zayıf olarak azalmaktadır.

j) E_1/E_2 oranı arttığında ω_1 değerlerine WEZ ve PEZ etkisi artmaktadır.

SEMBOLLER

a, b, h	: Plakın eni, boyu ve kalınlığı
$G_{ij}(i,j = 1,2,3)$	: Homojen ortotropik malzemenin kayma modülleri
$E_i(i = 1,2)$	: Homojen ortotropik malzemenin Young modülleri
$f(z)$	: Kayma deformasyon fonksiyonu
KD	: Kayma deformasyonları kelimesinin kısaltması
KDT	: Kayma deformasyonlu teori
KT	: Klasik teori
H	: Homojen kelimesinin kısaltılması
HT	: Heterojen kelimesinin kısaltılması
HOP	: Homojen ortotropik plak kısaltması
HTOP	: Heterojen ortotropik plak kısaltması
K_w	: Zeminin taban reaksiyon modülü
K_p	: Zeminin kayma modülü
(m, n)	: Plağın eğilme modları
M_x, M_y, M_{xy}	: HTOP'nin moment bileşenleri
N	: Zeminin reaksiyon kuvveti
PEZ	: Pasternak elastik zemini
Q_x, Q_y	: HTOP'nin kesme kuvvetleri
$r_i(i = 1,2,3,4)$	: Bilinmeyen katsayılar
t	: Zaman
T_x, T_y, T_{xy}	: HTOP'nin kuvvet bileşenlerini
φ_1,φ_2	: Dönme açıları
Φ	: Airy gerilme fonksiyonu
ω	: Titreşim frekansı (rad/sn)
ω_{wp}^{KDT}	: HTOP'nın KDT çerçevesinde frekans parametresi
ω_{wp}^{KT}	: HTOP'nın KT çerçevesinde frekans parametresi
ω_{1wp}^{KDT}	: HTOP'nın KDT çerçevesinde boyutsuz frekans parametresi
ω_{1wp}^{KT}	: HTOP'nın KT çerçevesinde boyutsuz frekans parametresi
η	: Heterojenlik katsayısı
w	: Yerdeğiştime fonksiyonu
WEZ	: Winkler zemininin kısaltılması
ρ	: Malzemelerin Yoğunluğu
$x_{ij}, y_{ij}(i,j = 1,2,8)$	: HTOP'ların özelliklerine bağlı katsayılar

KAYNAKLAR

[1] GRIGORENKO, Y.M., GRIGORENKO, A.Y., "Static and Dynamic Problems for Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and Their Numerical Solution (review)", International Applied Mechanics, 49, 123-193, 2013.

[2] SOFIYEV, A.H., OMURTAG, M.H., SCHNACK, E., "The Vibration and Stability of Orthotropic Conical Shells with Non-Homogeneous Material Properties Under A Hydrostatic Pressure", Journal of Sound and Vibration, 319, 963-983, 2009.

[3] PAN, E., "Exact Solution for Functionally Graded Anisotropic Elastic Composite Laminates", Journal of Composite Materials, 37, 1903-1920, 2003.

[4] AMBARTSUMIAN, S. A., Theory of Anisotropic Plates; Strength, Stability, Vibration., Technomic published by Stamford, 1964.

[5] REDDY, J.N., Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis., Boca Raton, CRC Press, 2004.

[6] AYDOGDU, M., "A New Shear Deformation Theory for Laminated Composite Plates", Composite Structures, 89, 94–101, 2009.
[7] CHEN, W.Q., BIAN, Z.G., DING, H.J., "Three-dimensional Vibration Analysis of Fluid-Filled Orthotropic FGM Cylindrical Shells", International Journal of Mechanical Sciences, 46, 159-171, 2004.
[8] BATRA, R.C., JIN, J., "Natural Frequencies of a Functionally Graded Anisotropic Rectangular Plate", Journal of Sound and Vibration, 282, 509-516, 2005.
[9] OOTAO, Y, TANIGAWA, Y., "Three-dimensional Solution for Transient Thermal Stresses of An Orthotropic Functionally Graded Rectangular Plate", Composites Structures, 80, 10-20, 2007.
[10] PENG, X.L., LI, X.F., "Elastic Analysis of Rotating Functionally Graded Polar Orthotropic Disks", International Journal of Mechanical Sciences, 60, 84-91, 2012.
[11] ZERIN, Z., "On the Vibration of Laminated Nonhomogeneous Orthotropic Shells", Meccanica, 48(7), 1557-1572, 2013.
[12] AVEY A., PINARLIK M., "Fonksiyonel Değişimli Ortotropik Plakların Dinamik Tepkisine Kayma Deformasyonu ve Dönel Eylemsizlik Etkilerinin İncelenmesi", Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 20(2), 236-243, 2016.
[13] ZERIN, Z., TURAN, F., BASOGLU, M.F., "Examination of Non-homogeneity and Lamination Scheme Effects on Deflections and Stresses of Laminated Composite Plates", Structural Engineering And Mechanics, 57(4), 603-616, 2016.
[14] PASTERNAK, P.L., "On a New Method of Analysis of an Elastic Foundation by Means of Two Foundation Constants", Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu I Arkhitekture, Moscow, USSR, 1, 1–56 (in Russian), 1954.
[15] KERR, A.D., "A Study of a New Foundation Model", Acta Mechanica, 1(2), 135-147, 1964.
[16] XIANG, Y., WANG, C.M., KITIPORNCHAI, S., "Exact Vibration Solution for Initially Stressed Mindlin Plates on Pasternak Foundation", International Journal of Mechanical Sciences, 36, 311–316, 1994.
[17] OMURTAG, M.H., KADIOGLU, F., "Free Vibration Analysis of Orthotropic Plates Resting on Pasternak Foundation by Mixed Finite Element Formulation", Computers and Structures 67, 253-265, 1998.
[18] ZHOU, D., CHEUNG, Y.K., LO, S.H., AU, F.T.K., "Three-dimensional Vibration Analysis of Rectangular Thick Plates on Pasternak Foundation", International Journal of Numerical Methods for Engineering, 59, 1313–1334, 2004.
[19] FERREIRA, A.J.M., ROQUE, C.M.C., NEVES, A.M.A., JORGE, R.M.N., SOARES, C.M.M., "Analysis of Plates on Pasternak Foundations by Radial Basis Functions" Computational Mechanics, 46, 791–803, 2010.
[20] ARANI, A. G., JALAEI, M. H., "Transient Behavior of an Orthotropic Graphene Sheet Resting on Orthotropic Visco-Pasternak Foundation", International Journal of Engineering Science, 103, 97-113, 2016.
[21] MORIMOTO, T., TANIGAWA, Y., "Elastic Stability of Inhomogeneous Thin Plates on An Elastic Foundation", Archive of Applied Mechanics, 77, 653-674, 2007.
[22] BAHMYARI, E., KHEDMATI, M.R., "Vibration Analysis of Nonhomogeneous Moderately Thick Plates With Point Supports Resting on Pasternak Elastic Foundation Using Element Free Galerkin Method", Engineering Analysis with Boundary Elements, 37, 1212-1238, 2013.
[23] LAL, R., "Effect of Nonhomogeneity on Vibration of Orthotropic Rectangular Plates of Varying Thickness Resting on Pasternak Foundation", Journal of Vibration and Acoustics, 131(1), 2009.
[24] SHARIYAT, M., ASEMI, K., "Three-dimensional Non-linear Elasticity-based 3D Cubic B-spline Finite Element Shear Buckling Analysis of Rectangular Orthotropic FGM Plates Surrounded by Elastic Foundations", Composites: Part B Engineering, 56, 934-947, 2014.
[25] MA'EN, S. S., AL-KOUZ, W. G., "Vibration Analysis of Non-uniform Orthotropic Kirchhoff Plates Resting on Elastic Foundation Based on Nonlocal Elasticity Theory", International Journal of Mechanical Sciences, 114, 1-11, 2016.
[26] ASEMI, K., SHARIYET, M., "Three-dimensional Biaxal Post-Buckling Analysis of Heterogeneous Auxetic Rectangular Plates on Elastic Foundation by New criteria", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 302, 1-26, 2016.
[27] MANSOURI, M.H., SHARIYAT, M., "Differential Quadrature Thermal Buckling Analysis of General Quadrilateral Orthotropic Auxetic FGM Plates on Elastic Foundations", Thin-Walled Structures, 112, 194-207, 2017.
[28] SOFIYEV, A.H., KARACA, Z., ZERIN, Z., "Non-linear Vibration of Composite Orthotropic Cylindrical Shells on the Non-linear Elastic Foundations within the Shear Deformation Theory", Composite Structures, 159, 53–62, 2017.

[29] HACIYEV, V.C., SOFIYEV, A.H., KURUOGLU, N., "Free Bending Vibration Analysis of Thin Bidirectionally Exponentially Graded Orthotropic Rectangular Plates Resting on Two-Parameter Elastic Foundations", Composite Structures, 184, 372-377, 2018.