T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİKSEL FİZİKTE ORTAYA ÇIKAN BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÜSTEL VE HİPERBOLİK ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ

Muzaffer ERCAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2021

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET . . . iv
ABSTRACT . . . v
TEŞEKKÜR . . . vi
ŞEKİLLER DİZİNİ . . . vii
1. GİRİŞ . . . 1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR . . . 3
3. MATERYAL ve YÖNTEM . . . 5
3.1. BSEFM'nin Temel Özellikleri . . . 5
3.2. IBSEFM'nin Temel Özellikleri . . . 6
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA . . . 9
4.1. BSEFM'nun MAE Denklemine Uygulanması . . . 9
4.2. IBSEFM'nun MAE Denklemine Uygulanması . . . 21
4.3. BSEFM'nun Gross-Pitaevskii Denklemine Uygulanması . . . 24
4.4. IBSEFM'nun Gross-Pitaevskii Denklemine Uygulanması . . . 27
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER . . . 30
KAYNAKLAR . . . 31
ÖZGEÇMİŞ . . . 33

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİKSEL FİZİKTE ORTAYA ÇIKAN BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÜSTEL VE HİPERBOLİK ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ

Muzaffer ERCAN

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Hacı Mehmet BAŞKONUŞ
Yıl: 2021, Sayfa: 33

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, çalışmamızın literatür taraması verilmiştir. İkinci bölümde ise bu tezde kullanılan temel tanım ve teoremler sunulmuştur. Üçüncü bölümde, ilk olarak Bernoulli alt denklem fonksiyon metodu (BSEFM)'nin temel özellikleri verilmiştir. İkinci olarak Geliştirilmiş Bernoulli alt denklem fonksiyon metodu (IBSEFM) ayrıntılı bir şekilde sunulmuştur. Dördüncü bölümde ise BSEFM ve IBSEFM'unun modifiye edilmiş alpha denklemine ve Gross-Pitaevskii denklemine uygulamaları ayrı ayrı yapılmıştır. Elde edilen çözümlerin grafikleri parametrelerin uygun değerlerine göre çizilmiştir. Beşinci bölümde bu tezde elde edilen verilerle ilgili sonuçlar verilmiştir. Altıncı bölümde ise bu tezde kullanılan referanslar sunulmuştur.

ANAHTAR KELİMELER: Modifiye edilmiş alpha denklemi, Gross-Pitaevskii denklemi, Bernoulli alt denklem fonksiyon metodu, geliştirilmiş Bernoulli alt denklem fonksiyon metodu, iki boyutlu ve üç boyutlu grafikler.

ABSTRACT

MSc Thesis

INVESTIGATIONS OF EXPONENTIAL AND HYPERBOLIC PROPERTIES OF SOME NONLINEAR PARTIAL DIFFERANTIAL EQUATIONS ARISING IN MATHEMATICAL PHYSICS

Muzaffer ERCAN

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Hacı Mehmet BASKONUS
Year: 2021, Page: 33

This thesis is composed of six sections. In the first section, the literature review of this thesis is given. In the second section, basic definitions and theorems used in this thesis are presented. In the third section, firstly the basic properties of Bernoulli sub-equation function method (BSEFM) are given. Secondly, the improved Bernoulli sub-equation function method (IBSEFM) is presented in detail. The fourth section is also made in the applications of BSEFM and IBSEFM to the modified alpha equation (MAE) and Gross-Pitaevskii equation (GPE). The graphics of the solutions obtained are drawn according to the appropriate values of their parameters. In the fifth section, a conclusion about the solutions obtained in this thesis is given. In the last section, papers cited as reference in this thesis are reported.

KEYWORDS: Nonlinear modified alpha equation, Gross-Pitaevskii equation, Bernoulli sub equation function method, Improved Bernoulli sub equation function method, two-dimensional and three-dimensional graphics.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans ve tez çalışmalarım sürecinde her türlü destek ve yönlendirmelerinden dolayı başta Doç.Dr.Hacı Mehmet BAŞKONUŞ hocam olmak üzere Matematik bölümündeki değerli hocalarıma ve Arş.Gör.Harun ÇİÇEK hocama sonsuz teşekkür ederim. Ayrıca bu dönemde gösterdikleri anlayış ve verdikleri destekten dolayı başta eşim Fatma ERCAN olmak üzere tüm aileme teşekkürü bir borç bilirim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 4.1. (4.6) denkleminin $d = 0.1, \alpha = -1.8, b = 0.5, \epsilon = 0.4$ için 3D ve $t = 0.5$ için 2D grafiği 11
Şekil 4.2. (4.6) denkleminin $d = 0.1, \alpha = -1.8, b = 0.5, \epsilon = 0.4$ için contour grafiği 11
Şekil 4.3. (4.7) denkleminin $\alpha = 0.2, b = 0.3, c = -0.3, \epsilon = 0.4, d = 0.1$ için 3D ve $t = 0.6$ için 2D grafiği 12
Şekil 4.4. (4.7) denkleminin $\alpha = 0.2, b = 0.3, c = -0.3, \epsilon = 0.4, d = 0.1$ için contour grafiği . . . 12
Şekil 4.5. (4.8) denkleminin $\epsilon = 0.4$ için 3D grafiği 13
Şekil 4.6. (4.8) denkleminin $\epsilon = 0.4$ için contour grafiği 13
Şekil 4.7. (4.8) denkleminin $\epsilon = 0.4, t = 0.5$ için 2D grafiği 14
Şekil 4.8. (4.9) denkleminin $\epsilon = 0.4$ için 3D grafiği 14
Şekil 4.9. (4.9) denkleminin$\epsilon = 0.4, t = 0.5$ için 2D grafiği 15
Şekil 4.10. (4.9) denkleminin $\epsilon = 0.4$ için contour grafiği 15
Şekil 4.11. (4.10) denkleminin $\epsilon = 0.4$ için 3D grafiği 16
Şekil 4.12. (4.10) denkleminin $\epsilon = 0.4, t = 0.5$ için 2D grafiği 16
Şekil 4.13. (4.10) denkleminin $\epsilon = 0.4$ için contour grafiği 16
Şekil 4.14. (4.11) denkleminin $\epsilon = 0.4$ için 3D grafiği 17
Şekil 4.15. (4.11) denkleminin $\epsilon = 0.4, t = 0.5$ için 2D grafiği 17
Şekil 4.16. (4.11) denkleminin $\epsilon = 0.4$ içincontour grafiği 18
Şekil 4.17. (4.15) denkleminin $\epsilon = 5$ için 3D grafiği 19
Şekil 4.18. (4.15) denkleminin $\epsilon = 5, t = 0.3$ için 2D grafiği 19
Şekil 4.19. (4.15) denkleminin $\epsilon = 5$ için contour grafiği 19
Şekil 4.20. (4.16) denkleminin $\epsilon = 0.4, \alpha = 0.1$ için 3D grafiği 20
Şekil 4.21. (4.16) denkleminin $\epsilon = 0.4, \alpha = 0.1, t = 0.5$ için 2D grafiği 20
Şekil 4.22. (4.16) denkleminin $\epsilon = 0.4, \alpha = 0.1$ için contour grafiği 21
Şekil 4.23. (4.21) denkleminin $r = 2, d = 3, \epsilon = 4$ için 3D ve $r = 2, d = 3, \epsilon = 4, t = 0.3$ için 2D grafiği 22
Şekil 4.24. (4.23) denkleminin $a_3 = 1, \epsilon = -2$ için 3D ve $a_3 = 1, \epsilon = -2, t = 0.23$ için 2D grafiği 23
Şekil 4.25. (4.24) denkleminin $a_3 = 3, \epsilon = 2$ için 3D ve $a_3 = 3, \epsilon = 2, t = 2.2$ için 2D grafiği . . . 23
Şekil 4.26. (4.24) denkleminin $a_3 = 3, \epsilon = 2$ için contour grafiği 24
Şekil 4.27. (4.33) denkleminin $p = 0.1, d = 0.8, \alpha = 0.5, \epsilon = 0.4, b = 0.78, a_2 = 0.6$ için 3D ve $p = 0.1, d = 0.8, \alpha = 0.5, \epsilon = 0.4, b = 0.78, a_2 = 0.6, t = 0.23$ için 2D grafiği 25
Şekil 4.28. (4.33) denkleminin $p = 0.1, d = 0.8, \alpha = 0.5, \epsilon = 0.4, b = 0.78, a_2 = 0.6$ için contour grafiği 26
Şekil 4.29. (4.34) denkleminin $p = 0.1, d = 0.8, \alpha = 0.5, \epsilon = 0.4, b = 0.78, a_2 = 0.6$ için 3D ve $p = 0.1, d = 0.8, \alpha = 0.5, \epsilon = 0.4, b = 0.78, a_2 = 0.6, t = 0.23$ için 2D grafiği 26
Şekil 4.30. (4.34) denkleminin $p = 0.1, d = 0.8, \alpha = 0.5, \epsilon = 0.4, b = 0.78, a_2 = 0.6$ için contour grafiği 26
Şekil 4.31. (4.45) denkleminin $p = -3, \kappa = 0.9, r = 0.02, d = 7.2, \gamma = 0.2, \epsilon = 0.1$ için 3D ve $p = -3, \kappa = 0.9, r = 0.02, d = 7.2, \gamma = 0.2, \epsilon = 0.1, t = 0.23$ için 2D grafiği 29
Şekil 4.32. (4.45) denkleminin $p = -3, \kappa = 0.9, r = 0.02, d = 7.2, \gamma = 0.2, \epsilon = 0.1$ için contour grafiği 29

1. GİRİŞ

Son yıllarda dünyadaki birçok gerçek problem matematiksel denklemlerle ifade edilmeye çalışılmıştır. Qi ve arkadaşları fizik alanında bazı önemli modeller üzerinde çalışmışlardır (Qi ve ark., 2020). Cao ve ekibi matematiksel denklemlerin farklı uygulama alanları üzerinde çalışmışlardır (Cao, 2009). Saha ve arkadaşları lineer olmayan tekil modeller üzerinde yaptıkları araştırmalar sonucunda Bernoulli dalga ve polinomlarını elde etmişlerdir (Behera ve Saha, 2020). Syam ve arkadaşları Bernoulli alt fonksiyon metodu üzerinde çalışıp ana model ile uyumlu bir çok orijinal sonuç elde etmişlerdir (Syam, 2019). Mendo ve diğerleri Bernoulli yapısı ile bağlantılı dalga dönüşümleri serisi üzerinde çalışıp özel algoritması ile farklı Bernoulli değerleri elde etmişlerdir (Mendo, 2019). Rani ve ekibi Bernoulli polinomlarını çözen özel bir matris üzerinde çalışıp literatüre ispatlı yeni çözümler kazandırmışlardır (Rani ve Mishra, 2020). Jeon ve arkadaşları Euler-Bernoulli denklemini geliştirerek hipergeometrik türden bir denklemi elde etmişlerdir (Lee ve Jeon, 2019). Arqup ve arkadaşları Riccati ve Bernoulli denklemleri üzerinde çalışıp, geliştirilmiş model ile ilgili yeni nümerik çözümler elde etmiştir (Arqup ve Maayah, 2019). Ordokhani ve ekibi geliştirdikleri yeni metot ile Bernoulli dalgaları ile ilgili yeni özellikler bulmuşlardır (Rahimkhani ve ark., 2017). Yang yüksek mertebeden Bernoulli polinomlarının yeni bir formunu ıspatlamıştır (Yang, 2008). Dilcher, fiziksel açıdan Bernoulli polinomlarının özelliklerinin tanımlarını araştırmış ve ana modelin yeni bir formülünü üretmiştir (Dilcher ve Vignat, 2016). Ayrıca Dilcher, Bernoulli polinomlarını Tornheim zeta fonksiyonları ile ilişkilendirip bu özel fonksiyonlar arasındaki detayları literatüre kazandırmıştır (Dilcher ve ark., 2019). Ordokhani ve ekibi farklı denklemlerin yeni özelliklerini veren bir sonuç bulabilmek için Bernoulli dalgalarında yeni bir rasyonel ilişki tanımlamışlardır (Rahimkhani, 2016). Tian ve ekibi Bernoulli'ye yeni bir yaklaşım geliştirip ışık probleminin özelliklerini incelemişlerdir (Ren ve Tian, 2016). Jamei ve ekibi Bernoulli polinomlarının yeni bir çeşidini bulup bu polinomların yeni parametrik tipinin kurallarını geliştirmişlerdir (Jamei ve Beyki, 2019). Ordokhani ve arkadaşları lineer ve lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemleri çözebilecek verimli bir tahmin metodu üzerinde çalıştılar (Rahimkhani ve ark. 2017). Zhou ve arkadaşları lineer olmayan Riccati-Bernoulli diferansiyel denklemler üzerinde çalışıp bu denklemlerin bazı çözümlerini bulmuşlardır (Biswaz, 2018). Razzagni ve ekibi Bernoulli dalgalarının lineer ve lineer olmayan denklem çözümlerini ayrıntılı

bir şekilde incelemişlerdir (Keshavarz ve ark., 2019). Bernoulli operasyon metodu ile stokastik integral problemlerinin nümerik çözümleri Zeghdane ve ekibi tarafından elde edilmiştir (Zeghdane, 2019). Marinov ve ekibi Euler-Bernoulli denkleminin ters problem katsayılarında yeni çözümler bulmuşlardır (Marinov ve Vatsala, 2008). Bu tezde ise, ilk olarak

$$u_t - u_{xxt} + (\alpha+1)u^2u_x - \alpha u_x u_{xx} - uu_{xxx} = 0, \alpha \in R - \{-1, 0\}, \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanan lineer olmayan modifiye edilmiş alfa denkleminin (MAE) (İslam ve ark., 2019) analitik çözümlerini elde etmek için BSEFM ve IBSEFM'u uygulanmıştır. MAE'nin farklı fiziksel özellikleri Wazwaz ve ekibi tarafından literatüre kazandırılmıştır (Wazwaz, 2006). İkinci olarak, BSEFM ve IBSEFM'u kullanılarak

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + \gamma \mid u \mid^2 u = 0, \gamma \in R - \{0\}, \tag{1.2}$$

şeklinde tanımlanan lineer olmayan Gross-Pitaevskii (GP) diferansiyel denkleminin çözümleri elde edilmiştir (Li ve ark., 2010).

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde tezde kullanılacak olan temel tanımlar sunulmuştur.

Tanım 2.1. "x bağımsız değişkeni, $y = f(x)$ fonksiyonu (veya bağımlı değişkeni) ve bu fonksiyonun bağımsız değişkene göre $y', y'', y''', ..., y^{(n)}$ türevleri arasındaki herhangi bir bağıntıya bir diferansiyel denklem adı verilir. Böyle bir diferansiyel denklem
$F(x, y, y', y'', y''', ..., y^n) = 0$
veya
$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$
sembolüyle gösterilir. Burdan y^n çekilebiliyorsa bunun yerine bazen
$y^n = \varphi(x, y, y', y'', y''', ..., y^{(n-1)})$
gösterimi de kullanılır" (Maden, 2013).

Tanım 2.2. "Bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerini içinde bulunduran bir denkleme diferansiyel denklem denir" (Yaşar, 2009).

Tanım 2.3. "Bağımlı değişkenin yalnız bir bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bir diferansiyel denkleme adi diferansiyel denklem denir" (Yaşar, 2009).

Tanım 2.4. "Bir diferansiyel denklemde görülen en yüksek mertebeden türevin mertebesine denklemin mertebesi denir" (Yaşar, 2009).

Tanım 2.5. "Bir diferansiyel denklemin bilinmeyen fonksiyonunun ve onun en yüksek mertebeden türevinin polinom şeklinde yazılışındaki derecesine denklemin derecesi denir" (Yaşar, 2009).

Tanım 2.6. "Bir diferansiyel denklemde bilinmeyen fonksiyon y ve bağımsız değişken x olmak üzere,

$$b_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + b_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + b_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + b_1(x)\frac{dy}{dx} + b_0(x)y = g(x)$$

veya
$\sum_{j=1}^{n} b_j(x)y^{(n)} + b_0(x)y = g(x)$

biçiminde yazılabiliyorsa bu diferansiyel denkleme lineer diferansiyel denklem denir" (Yaşar, 2009).

Tanım 2.7. "Her α gerçel sayısı için $g(t,y)$ fonksiyonu $g(\alpha t, \alpha y) = \alpha^m g(t,y)$ bağıntısını gerçekliyorsa g fonksiyonuna $m.$ mertebeden homojendir denir" (Dernek ve Dernek, 2011).

Tanım 2.8. "Bir aralıkta, bilinmeyen fonksiyon ve türevleri, bağımsız değişkenin bütün değerleri için özdeş olarak diferansiyel denklemi sağlıyorsa, bu fonksiyona, verilen aralıkta tanımlı diferansiyel denklemin çözümü (integrali) denir" (Yaşar, 2009).

Tanım 2.9. "$P(x)$ ve $Q(x)$, x bağımsız değişkeninin sürekli fonksiyonları ve $n \neq 0$, $n \neq 1$ olmak üzere,
$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$
şeklinde yazılabilen bir diferansiyel denkleme Bernoulli diferansiyel denklemi denir" (Maden, 2013).

Tanım 2.10. "$P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ fonksiyonları x değişkeninin sürekli fonksiyonları ve $R(x) \neq 0$ olmak üzere
$\frac{dy}{dx} + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0$
şeklinde yazılabilen bir diferansiyel denkleme Riccati diferansiyel denklemi denir" (Maden, 2013).

Tanım 2.11. "Bir diferansiyel denklem birden fazla sayıda bağımsız değişken ve bu değişkenlerin fonksiyonu ve fonksiyonun kısmi türevlerini ihtiva ediyorsa bu diferansiyel denklemlere kısmi türevli diferansiyel denklem denir" (Yaşar, 2009).

Tanım 2.12. Balans prensibi, bayağı diferansiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeden türev ile en yüksek derece arasındaki bağıntıya denir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, BSEFM ve IBSEFM'nun genel özellikleri ayrıntılı bir şekilde sunulmuştur.

3.1. BSEFM'nin Temel Özellikleri

Tezin bu bölümünde, BSEFM'nun genel özelliklerini aşağıdaki gibi sunarız (Baskonus ve Bulut, 2015).

Adım 1. Aşağıdaki doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemi genel haliyle ele alalım,

$$P(u, u_x, u_t, u_{xt}, u_{xx}, \cdots) = 0. \tag{3.1}$$

Denklem (3.1) için

$$u(x,t) = V(\xi), \xi = kx - ct, k \neq 0, c \neq 0, \tag{3.2}$$

dönüşümünü göz önüne alırsak aşağıdaki doğrusal olmayan bayağı diferansiyel denklemi elde ederiz

$$N(V, V^{'}, V^{''}, \cdots) = 0, \tag{3.3}$$

burada, $V = V(\xi), V^{'} = \frac{dV}{d\xi}, V^{''} = \frac{d^2V}{d\xi^2}, \cdots$, dir.

Adım 2. BSEFM yapısı gereği denklem (3.3)'ün deneme çözüm denklemini aşağıdaki şekilde seçebiliriz

$$V = V(\xi) = \sum_{i=0}^{n} a_i F^i = a_0 + a_1 F + a_2 F^2 + \cdots + a_n F^n, \tag{3.4}$$

burada

$$F^{'} = bF + dF^M, b \neq 0, d \neq 0, M \in R - \{0, 1, 2\}, \tag{3.5}$$

olup $F(\xi)$ Bernoulli diferansiyel denklemini sağlayan bir polinomdur. Denklem (3.4)'ü denklem (3.5) ile beraber denklem (3.3)'te yerine yazarsak, F'nin polinom denklemini elde ederiz.

$$\sum_{i=0}^{s} \rho_i F^i(\xi) = \rho_s F(\xi)^s + ...\rho_1 F(\xi) + \rho_0 = 0. \tag{3.6}$$

Balans prensibine göre n ve M arasında bir bağıntı buluruz.

Adım 3. $\sum_{i=0}^{s} \rho_i F^i(\xi)$ denkleminde F'in aynı kuvvetten terimlerinin katsayısını sıfıra eşitlersek aşağıdaki gibi cebirsel bir denklem sistemi elde ederiz.

$$\rho_i = 0. \tag{3.7}$$

Bu denklem sistemini çözersek $a_0, a_1, \cdots, a_n$ katsayı değerlerini buluruz.

Adım 4. Bernoulli diferansiyel denklemi olan denklem (3.5)'i çözdüğümüzde b ve d'nin durumuna göre aşağıdaki iki farklı çözümü elde ederiz

$$F(\xi) = \left[\frac{-d}{b} + \frac{\epsilon}{e^{b(M-1)\xi}}\right]^{\frac{1}{1-M}}, b \neq d, \tag{3.8}$$

ve

$$F(\xi) = \left[\frac{(\epsilon-1) + (\epsilon+1)\tanh(\frac{b(1-M)\xi}{2})}{1 - \tanh(\frac{b(1-M)\xi}{2})}\right]^{\frac{1}{1-M}}, b = d, \epsilon \in R. \tag{3.9}$$

Denklem (3.6)'da elde ettiğimiz bu katsayıları denklem (3.8) veya (3.9) ile beraber denklem (3.4)'de yerine yazarsak, denklem (3.1) için aranılan yeni analitik çözümleri elde ederiz.

3.2. IBSEFM'nin Temel Özellikleri

Bu bölümde, geliştirilmiş Bernoulli alt-denklem fonksiyon metodunun (IBSEFM) genel özellikleri verilecektir. IBSEFM bir çok lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler için yeni dalga çözümleri verir. IBSEFM'nin genel yapısı 4 adımda aşağıdaki gibi verilir.

Adım 1. İlk olarak liner olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin en genel halini aşağıdaki gibi ele alabiliriz.

$$P(u, u_x, u_t, u_{tt}, u_{xx}, u^2, \cdots) = 0. \tag{3.10}$$

(3.11) denkleminde $k \neq 0, c \neq 0$ sabitler olmak üzere

$$u(x,t) = U(\xi), \xi = kx - ct, \tag{3.11}$$

dalga dönüşümü uygulanırsa

$$N(U, U^{'}, U^{''}, U^2, \cdots) = 0, \tag{3.12}$$

şeklinde bir lineer olmayan bayağı diferansiyel denklem elde edilir ve burada, $U = U(\xi), U^{'} = \frac{dU}{d\xi}, U^{''} = \frac{d^2U}{d\xi^2}, \cdots$, dir.

Adım 2. (3.12) denkleminin deneme çözüm denklemi IBSEFM yapısı gereği aşağıdaki gibi seçilir,

$$U = U(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i F^i}{\sum_{j=0}^{m} b_j F^j} = \frac{a_0 + a_1 F + a_2 F^2 + \cdots + a_n F^n}{b_0 + b_1 F + b_2 F^2 + \cdots + b_m F^m}, \tag{3.13}$$

ve burada $F = F(\xi)$ fonksiyonu

$$F'(\xi) = wF(\xi) + dF^M(\xi), \tag{3.14}$$

olarak tanımlanan Bernoulli diferansiyel denkleminin çözümü olup $w \neq 0, d \neq 0, M \neq 0, M \neq 1, M \neq 2$ dir. (3.13) ve (3.14) denklemlerini (3.12) denkleminde yerine yazılırsa

$$\Omega(F) = \rho_s F^s + \cdots + \rho_1 F + \rho_0, \tag{3.15}$$

şeklinde F'nin polinomu elde edilir. (3.15) eşitliğinin sağlanması için F'nin aynı kuvvetten terimlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyerek bir denklem sistemi elde edilir. Balans prensibi gereğince n, m ve M arasında bir bağıntı bulunur.

Adım 3. $\Omega(F)$ polinomunun bütün katsayılarını sıfır olacak şekilde düzenlersek,

$$\rho_i = 0. \tag{3.16}$$

şeklinde bir denklem sistemi bulunur. Elde edilen bu sistemin çözülmesi ile $a_0, \cdots, a_n$ ve $b_0, \cdots, b_m$ katsayı değerleri elde edilir.

Adım 4. Denklem (3.14) ile tanımlanan Bernoulli diferansiyel denkleminin çözümü, w ve d'nin iki farklı durumu için

$$F(\xi) = \left[\frac{-d}{w} + \frac{\epsilon}{e^{w(M-1)\xi}}\right]^{\frac{1}{1-M}}, w \neq d, \tag{3.17}$$

ve

$$F(\xi) = \left[\frac{(\epsilon-1) + (\epsilon+1)\tanh(\frac{w(1-M)\xi}{2})}{1 - \tanh(\frac{w(1-M)\xi}{2})}\right]^{\frac{1}{1-M}}, w = d, \epsilon \in R. \tag{3.18}$$

şeklinde elde edilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde, ele alınan MAE ve GP denklemleri için farklı salınımlı dalga çözümleri elde edilir.

4.1. BSEFM'nun MAE Denklemine Uygulanması

Bu bölümde (1.1) denkleminin analitik çözümlerini elde etmek için BSEFM'nu uygularız. Denklem (1.1) için

$$u(x,t) = U(\eta), \eta = kx - ct, k \neq 0, c \neq 0,$$

dalga dönüşümünü uygularsak, aşağıdaki lineer olmayan adi diferansiyel denklemi elde ederiz.

$$6ck^2U'' - 6k^3UU'' + 3k^3(1-\alpha)(U')^2 - 6cU + 2k(\alpha+1)U^3 = 0. \tag{4.1}$$

UU'' ve U^3 terimleri arasında balans prensibi ile M ve n arasında aşağıdaki gibi bir bağıntı elde edilir,

$$2M = n + 2. \tag{4.2}$$

Denklem (4.2)'yi dikkate alırsak, denklem (1.1) için farklı ve yeni salınımlı dalga çözümlerini aşağıdaki gibi elde ederiz.

Durum 1. Denklem (4.2)'de eğer $n = 4$ ve $M = 3$ alarak denklem (3.4)'de yerine yazarsak deneme çözüm fonksiyonunu aşağıdaki gibi yazarız

$$U = a_0 + a_1F + a_2F^2 + a_3F^3 + a_4F^4, \tag{4.3}$$

$$U' = a_1bF + 2a_2bF^2 + 2a_2dF^4 + \cdots, \tag{4.4}$$

$$U'' = a_1d^2F + 4a_1bdF^3 + 3a_1b^2F^5 + \cdots \tag{4.5}$$

Burada $a_4 \neq 0, b \neq 0, d \neq 0$ dır. Eğer (4.3), (4.4) ve (4.5) denklemlerini denklem (4.1)'de yerine yazarsak, F'nin bir cebirsel denklemini elde ederiz. F'nin aynı kuvvetten katsayılarını sıfıra eşitlersek bir denklem sistemi buluruz. Elde ettiğimiz bu denklem sistemini çözdüğümüz zaman $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, b, d, c, k, \alpha$ katsayı değerlerini buluruz.

Durum 1.1. Eğer $a_0 = -\dfrac{3d^2\alpha + \sqrt{3}\sqrt{-d^4(-4+\alpha^2)}}{2d^2(1+\alpha)}, a_1 = 0, a_3 = 0,$

$$a_2 = -\frac{6b(d^2(2+\alpha)(-1+2\alpha) + \sqrt{3}\sqrt{-d^4(-4+\alpha^2)})}{d^3(1+\alpha)^2},$$

$$a_4 = -\frac{6b^2(d^2(2+\alpha)(-1+2\alpha) + \sqrt{3}\sqrt{-d^4(-4+\alpha^2)})}{d^4(1+\alpha)^2},$$

$$k = -\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{d^2(2+\alpha)(-1+2\alpha) + \sqrt{3}\sqrt{-d^4(-4+\alpha^2)}}{d^4(1+\alpha)(2+\alpha)}},$$

$$c = -\frac{\sqrt{-\dfrac{(d^2(2+\alpha)(-1+2\alpha) + \sqrt{3}\sqrt{-d^4(-4+\alpha^2)})}{d^4(1+\alpha)(2+\alpha)}}r}{4d^2(1+\alpha)},$$

$$r = \sqrt{3}\alpha\sqrt{-d^4(-4+\alpha^2) + d^2(2+\alpha^2)}$$

katsayılarını denklem (4.3)'de yerine yazdığımız zaman (1.1) denklemi için aşağıdaki yeni üstel fonksiyon çözümü buluruz.

$$u_1(x,t) = \lambda - \frac{6b^2\Delta}{\beta} - \frac{6b(d^2(2+\alpha)(-1+2\alpha) + \sqrt{3}\sqrt{-d^4(-4+\alpha^2)}}{d^3(1+\alpha)^2(-\dfrac{b}{d} + e^{-2d(-\frac{\delta}{2}x+t\kappa)}\epsilon)}, \tag{4.6}$$

burada $\kappa = \dfrac{\sqrt{-\dfrac{d^2(2+\alpha)(-1+2\alpha) + \sqrt{3}\sqrt{-d^4(-4+\alpha^2)}}{d^4(1+\alpha)(2+\alpha)}}\Upsilon}{4d^2(1+\alpha)},$

$$\Upsilon = \sqrt{3}\alpha\sqrt{-d^4(-4+\alpha^2)} + d^2(2+\alpha^2),$$

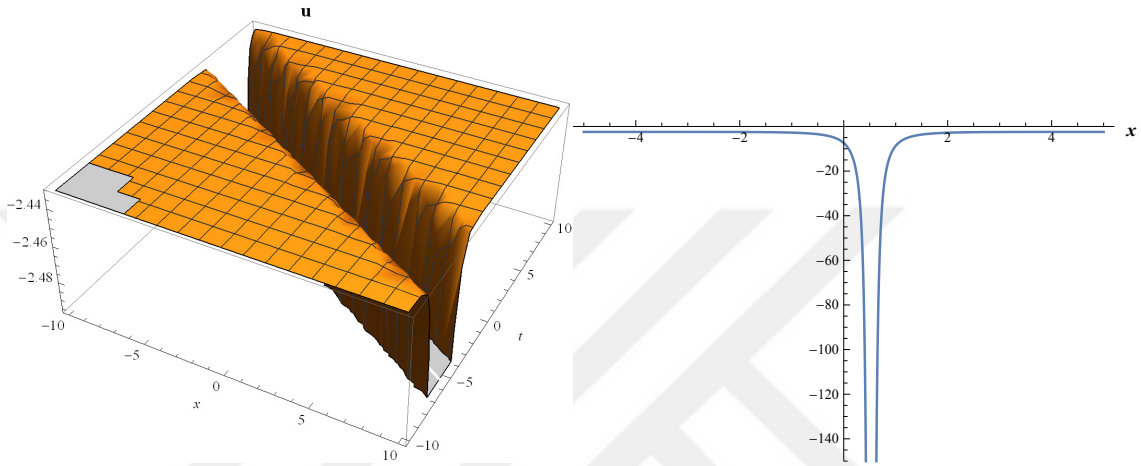
$$\delta = \sqrt{-\frac{d^2(2+\alpha)(-1+2\alpha) + \sqrt{3}\sqrt{-d^4(-4+\alpha^2)}}{d^4(1+\alpha)(2+\alpha)}},$$

$$\Delta = d^2(2+\alpha)(-1+2\alpha) + \sqrt{3}\sqrt{-d^4(-4+\alpha^2)},$$

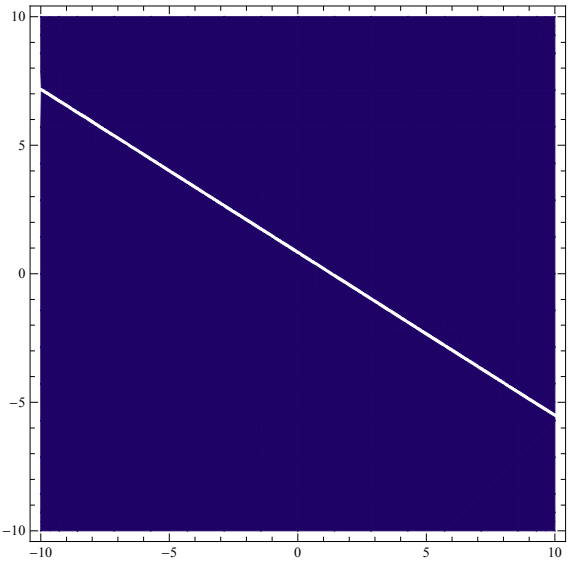
$$\lambda = -\frac{3d^2\alpha + \sqrt{3}\sqrt{-d^4(-4+\alpha^2)}}{2d^2(1+\alpha)},$$

$$\beta = d^4(1+\alpha)^2(-\frac{b}{d} + e^{-2d(-\frac{\delta}{2}x+t\kappa)}\epsilon)^2, \alpha \neq -1, \alpha \neq -2, \alpha \neq -\frac{1}{2}, e^{(.)} = exp(.)$$

dır. Denklem (4.6)'de bulunan parametreler için uygun değerleri seçerek iki boyutlu, üç boyutlu ve contour grafiklerini aşağıdaki gibi çizeriz.



Şekil 4.1. (4.6) denkleminin $d = 0.1, \alpha = -1.8, b = 0.5, \epsilon = 0.4$ için 3D ve $t = 0.5$ için 2D grafiği



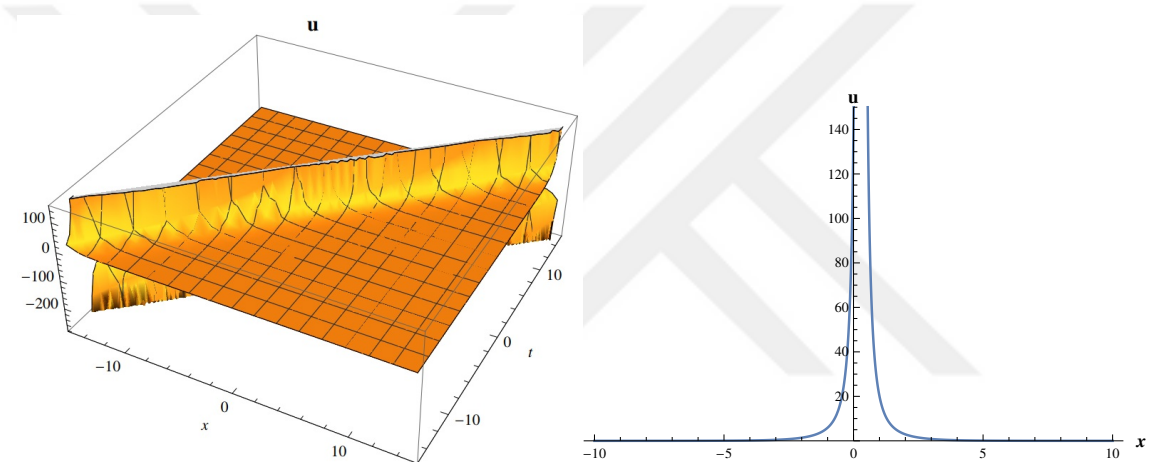
Şekil 4.2. (4.6) denkleminin $d = 0.1, \alpha = -1.8, b = 0.5, \epsilon = 0.4$ için contour grafiği

Durum 1.2. Denklem (1.1) için bir diğer katsayı olarak $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = -\frac{24bc}{1+\alpha}, a_3 = 0, a_4 = \frac{96b^2c^2}{2+3\alpha+\alpha^2}, k = \frac{2c}{2+\alpha}, d = -\frac{2+\alpha}{4c}$ katsayılarını ele alırsak,

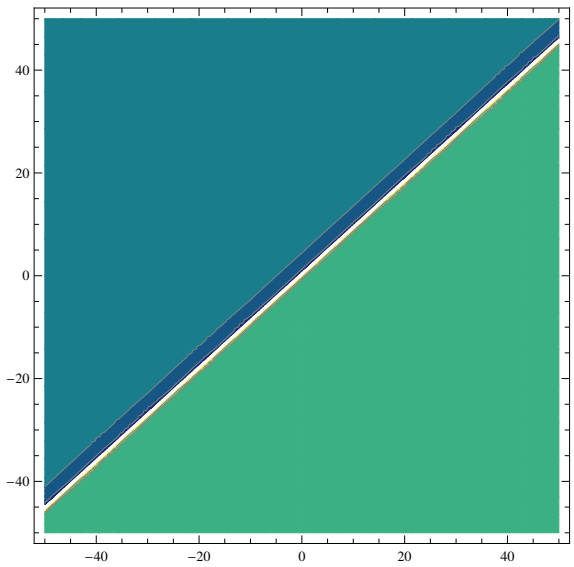
aşağıdaki üstel fonksiyon çözümü buluruz.

$$u_2(x,t) = \frac{96b^2c^2}{\sigma(\tau + e^{\frac{\gamma(-ct+\frac{2cx}{\gamma})}{2c}}\epsilon)^2} - \frac{24bc}{(\tau + e^{\frac{\gamma(-ct+\frac{2cx}{\gamma})}{2c}}\epsilon)(1+\alpha)}, \tag{4.7}$$

burada $\sigma = 2 + 3\alpha + \alpha^2, \tau = \frac{4bc}{2+\alpha}, \gamma = 2 + \alpha, i^2 = -1, e^{(.)} = exp(.)$ dır. Denklem (4.7)'nin bir analitik çözüm olması için $\alpha \neq -2, \alpha \neq -1$ koşulunu sağlaması gerekir. Denklem (4.7)'de bulunan parametreler için uygun değerler seçilirse üç boyutlu, iki boyutlu ve contour grafikleri aşağıdaki gibi elde edilir.



Şekil 4.3. (4.7) denkleminin $\alpha = 0.2, b = 0.3, c = -0.3, \epsilon = 0.4, d = 0.1$ için 3D ve $t = 0.6$ için 2D grafiği

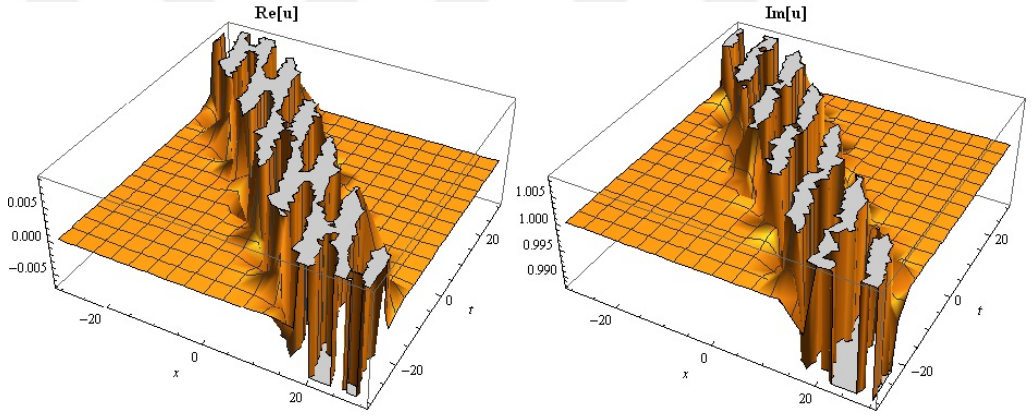


Şekil 4.4. (4.7) denkleminin $\alpha = 0.2, b = 0.3, c = -0.3, \epsilon = 0.4, d = 0.1$ için contour grafiği

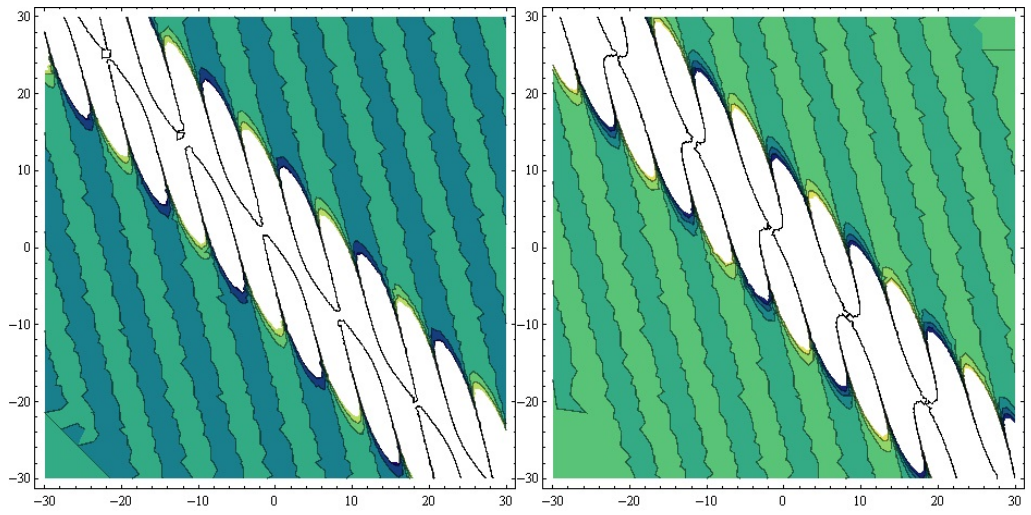
Durum 1.3. Denklem (1.1) için diğer katsayıları $a_4 = 4, k = 1, a_0 = i, a_1 = 0, a_2 = 4\sqrt{-1+3i}, a_3 = 0, b = -\frac{1}{10}\sqrt{11-2i}, d = -\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1}{5}+\frac{7i}{5}}, \alpha = \frac{8}{13} - \frac{12i}{13}, c = -\frac{7}{13} + \frac{4i}{13}$ için bir diğer dalga çözümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u_3(x,t) = i + \frac{4}{(\kappa + e^{\nu[(\frac{7}{13}-\frac{4i}{13})t+x]}\epsilon)^2} + \frac{4\sqrt{-1+3i}}{\kappa + e^{\nu[(\frac{7}{13}-\frac{4i}{13})t+x]}\epsilon}. \tag{4.8}$$

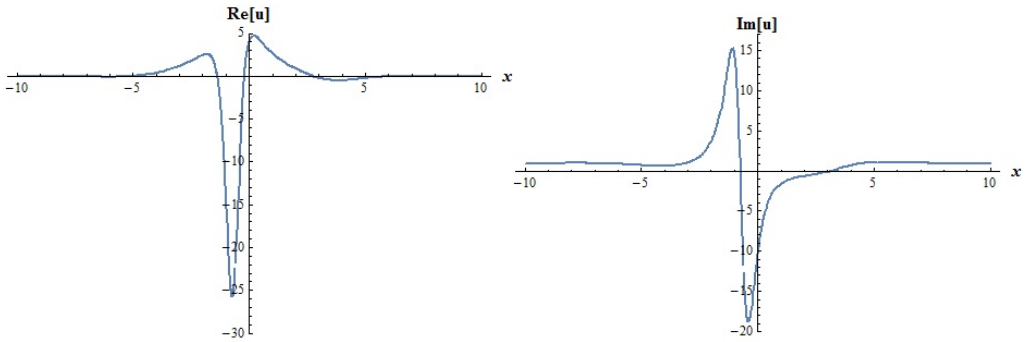
Burada ϵ sıfırdan farklı bir sabit olup $\sigma = \sqrt{\frac{11}{5} - \frac{2i}{5}}, \nu = \sqrt{-\frac{1}{5}+\frac{7i}{5}}, \kappa = -\frac{\sigma}{\sqrt{-1+7i}}$. Denklem (4.8)'de bulunan parametreler için uygun değerleri seçerek reel ve sanal kısımlar için iki boyutlu, üç boyutlu ve contour grafikleri aşağıdaki gibi çizeriz.



Şekil 4.5. (4.8) denkleminin $\epsilon = 0.4$ için 3D grafiği



Şekil 4.6. (4.8) denkleminin $\epsilon = 0.4$ için contour grafiği

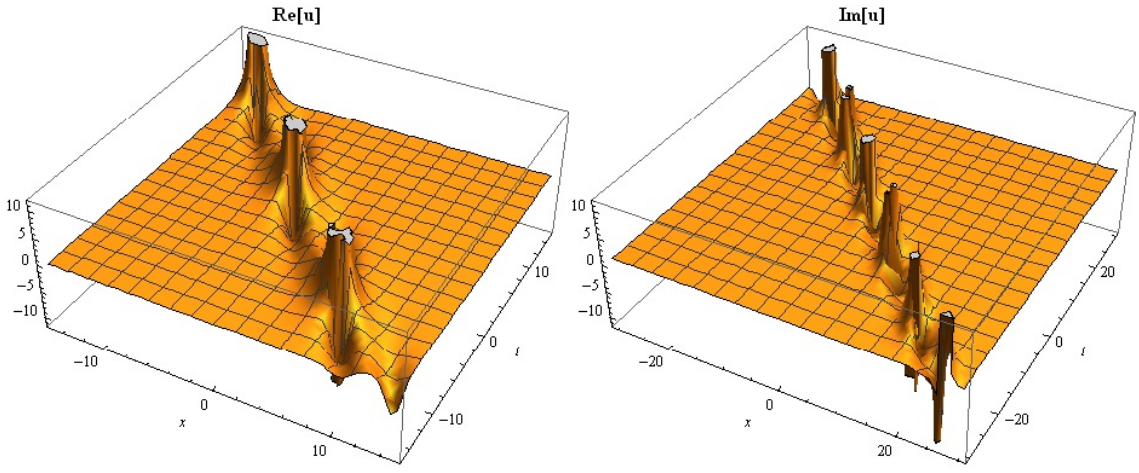


Şekil 4.7. (4.8) denkleminin $\epsilon = 0.4, t = 0.5$ için 2D grafiği

Durum 1.4. Eğer denklem (1.1) için diğer katsayıları dikkate aldığımızda $a_4 = 4, k = 1, a_0 = i, a_1 = 0, a_2 = -4\sqrt{-1+3i}, a_3 = 0, b = -\frac{1}{10}\sqrt{11-2i}, d = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1}{5}+\frac{7i}{5}}, \alpha = \frac{8}{13} - \frac{12i}{13}, c = -\frac{7}{13} + \frac{4i}{13}$, aşağıdaki dalga çözümünü elde ederiz.

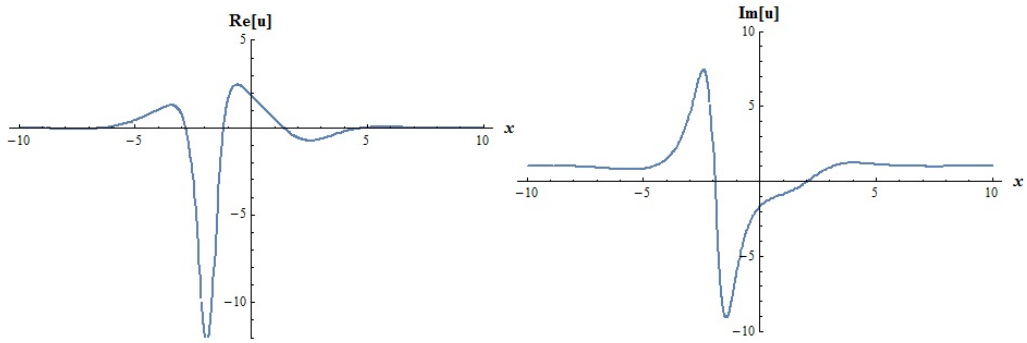
$$u_4(x,t) = i + \frac{4}{(\chi + e^{-\delta((\frac{7}{13}-\frac{4i}{13})t+x)}\epsilon)^2} - \frac{4\sqrt{-1+3i}}{\chi + e^{-\delta((\frac{7}{13}-\frac{4i}{13})t+x)}\epsilon}, \tag{4.9}$$

bu çözümde ϵ sıfırdan farklı reel bir sabit olup $\delta = \sqrt{-\frac{1}{5}+\frac{7i}{5}}, \chi = \frac{1}{\sqrt{-1+7i}}\sqrt{\frac{11}{5}-\frac{2i}{5}}$ dir. Denklem (4.9)'de bulunan parametreler için uygun değerleri seçerek reel ve sanal kısımlar için iki boyutlu, üç boyutlu ve contour grafikleri aşağıdaki gibi çizeriz.

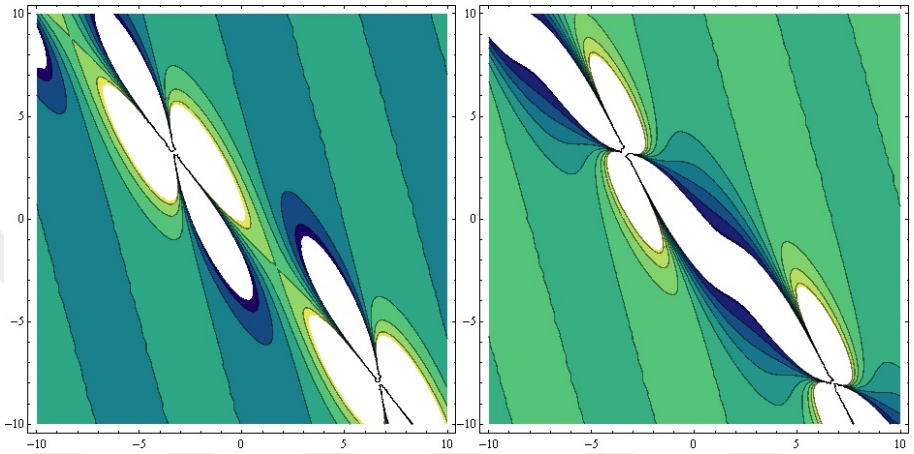


Şekil 4.8. (4.9) denkleminin $\epsilon = 0.4$ için 3D grafiği

Durum 1.5. Denklem (1.1) için $a_4 = -i, k = 1, a_0 = 2, a_1 = 0, a_2 = (-2+2i)\sqrt{5}, a_3 = 0, b = \frac{1}{10} - \frac{i}{10}, d = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \alpha = -\frac{1}{13}, c = \frac{16}{13}$, katsayılarını ele alırsak aşağıdaki rasyonel çözümü elde ederiz.



Şekil 4.9. (4.9) denkleminin$\epsilon = 0.4, t = 0.5$ için 2D grafiği

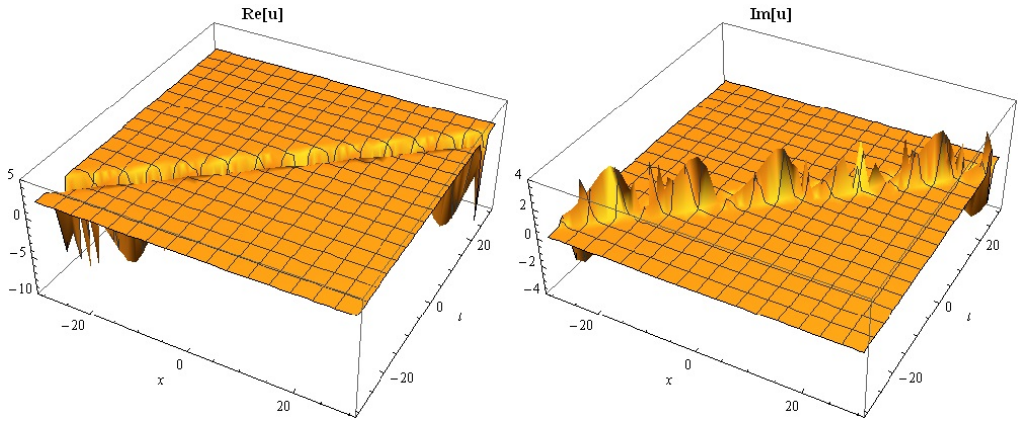


Şekil 4.10. (4.9) denkleminin $\epsilon = 0.4$ için contour grafiği

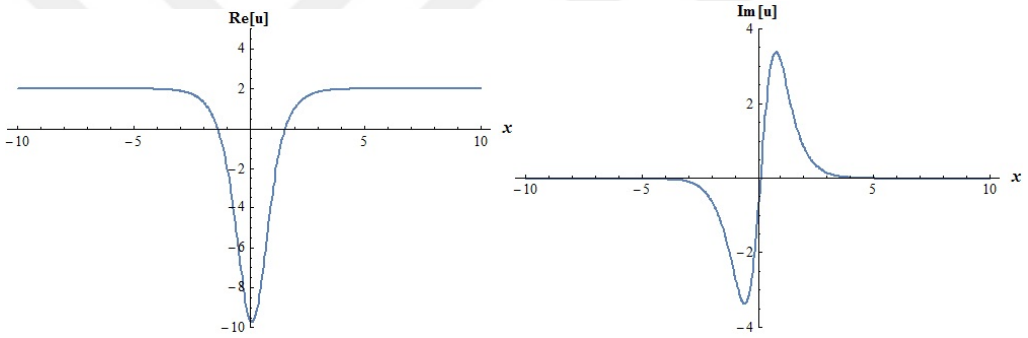
$$u_5(x,t) = 2 - \frac{i}{\delta + e^{\frac{4(-\frac{16t}{13}+x)}{\sqrt{5}}}\epsilon)^2} - \frac{(2-2i)\sqrt{5}}{\delta + e^{\frac{4(-\frac{16t}{13}+x)}{\sqrt{5}}}\epsilon}, \tag{4.10}$$

bu çözümde ε sıfırdan farklı reel sabit olup $\delta = (\frac{\frac{1}{4} - \frac{i}{4}}{\sqrt{5}}$ dir. Denklem (4.10)'da bulunan parametreler için uygun değerleri seçerek iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri aşağıdaki gibi çizebiliriz.

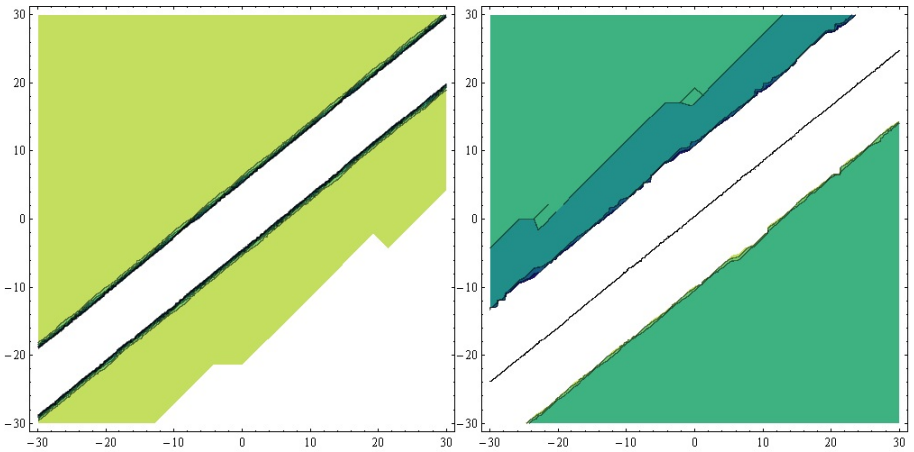
Durum 1.6. Denklem (1.1) için $a_4 = -i, k = 1, a_0 = 2, a_1 = 0, a_2 = (2 - 2i)\sqrt{5}, a_3 = 0, b = -\frac{1}{10} + \frac{i}{10}, d = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \alpha = -\frac{1}{13}, c = \frac{16}{13}$, katsayılarını ele alırsak aşağıdaki rasyonel çözümü elde ederiz.



Şekil 4.11. (4.10) denkleminin $\epsilon = 0.4$ için 3D grafiği



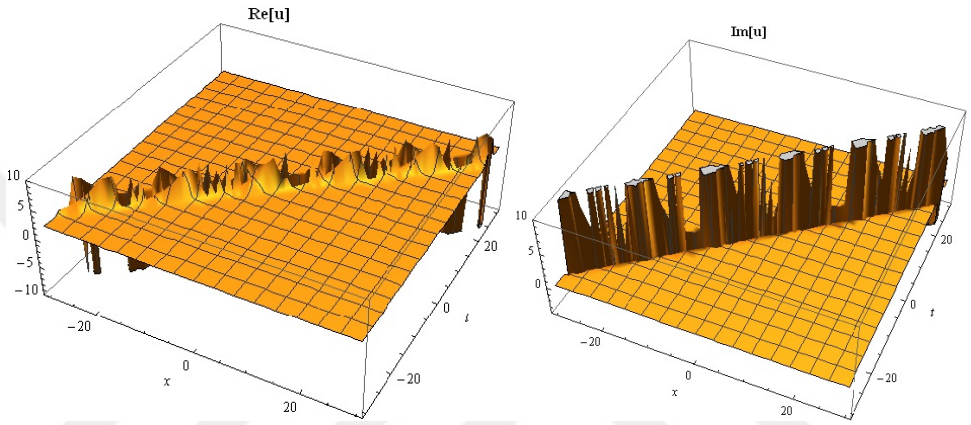
Şekil 4.12. (4.10) denkleminin $\epsilon = 0.4, t = 0.5$ için 2D grafiği



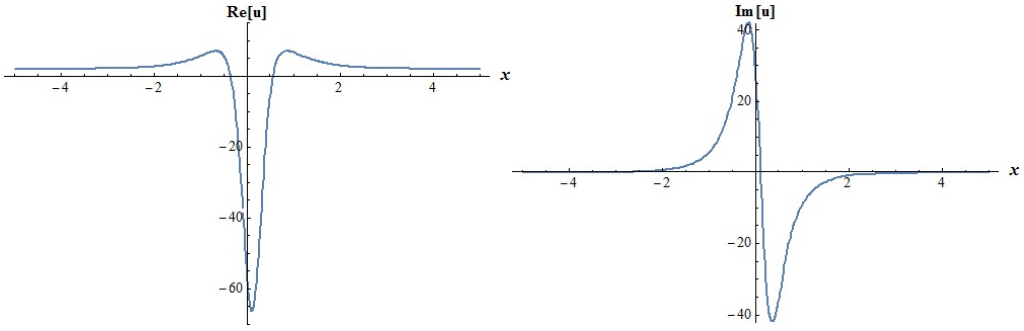
Şekil 4.13. (4.10) denkleminin $\epsilon = 0.4$ için contour grafiği

$$u_6 = 2 - \frac{i}{(-\frac{\frac{1}{4}-\frac{i}{4}}{\sqrt{5}} + e^{\frac{4(-\frac{16t}{13}+x)}{\sqrt{5}}}\epsilon)^2} + \frac{(2-2i)\sqrt{5}}{-\frac{\frac{1}{4}-\frac{i}{4}}{\sqrt{5}} + e^{\frac{4(-\frac{16t}{13}+x)}{\sqrt{5}}}\epsilon}, \qquad (4.11)$$

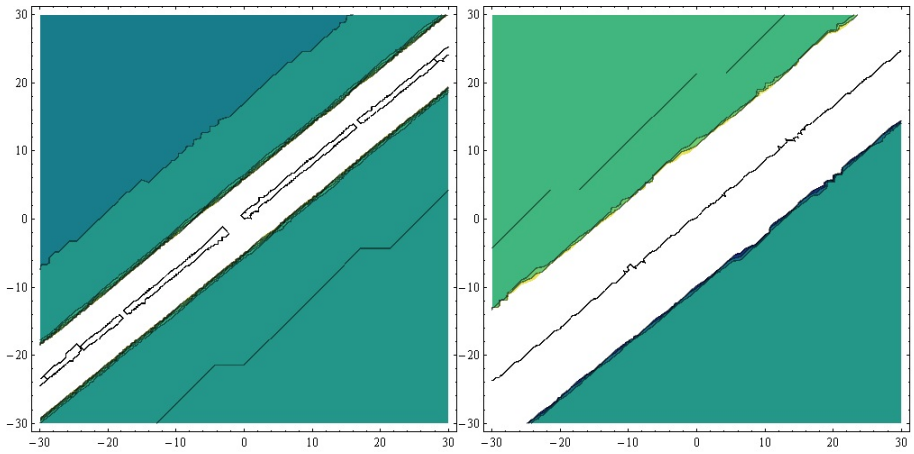
bu çözümde ε sıfırdan farklı reel sabittir. Denklem (4.11)'da bulunan parametreler için uygun değerleri seçerek iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri aşağıdaki gibi çizebiliriz.



Şekil 4.14. (4.11) denkleminin $\epsilon = 0.4$ için 3D grafiği



Şekil 4.15. (4.11) denkleminin $\epsilon = 0.4, t = 0.5$ için 2D grafiği



Şekil 4.16. (4.11) denkleminin $\epsilon = 0.4$ içincontour grafiği

Durum 2. Eğer denklem (3.4) için denklem (4.2) de $n = 6$ ve $M = 4$ alırsak aşağıdaki deneme çözüm denklemini yazabiliriz.

$$U = a_0 + a_1 F + a_2 F^2 + a_3 F^3 + a_4 F^4 + a_5 F^5 + a_6 F^6, \tag{4.12}$$

$$U' = da_1 F + bF^4 a_1 + 2dF^2 a_2 + 2bF^5 a_2 + ..., \tag{4.13}$$

ve

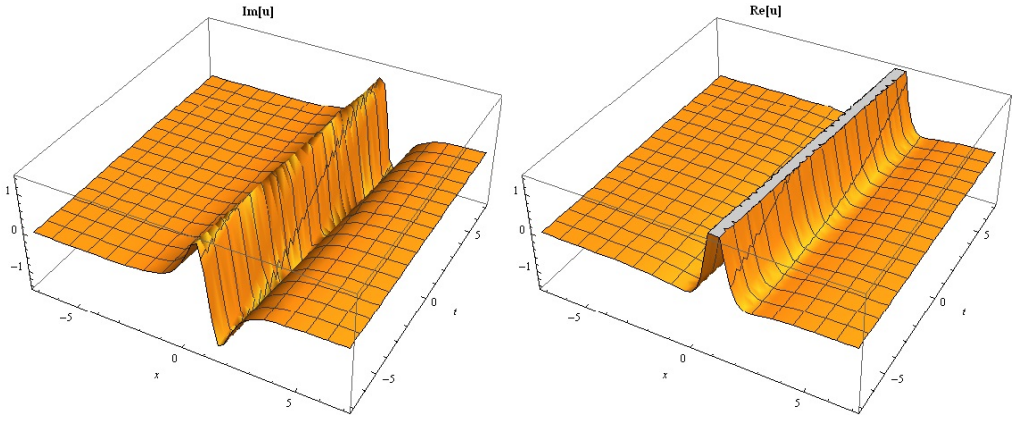
$$U'' = d^2 F a_1 + 5bdF^4 a_1 + ..., \tag{4.14}$$

ifadesi bulunur. Burada $a_6 \neq 0, b \neq 0, d \neq 0$ dır. Denklem (4.12), denklem (4.13) ve denklem (4.14) ifadelerini denklem (4.1)'de yerine yazarsak yeni bir denklem sistemi buluruz. Bu denklem sistemini paket programlar yardımıyla çözerek aşağıdaki çözümleri elde ederiz.

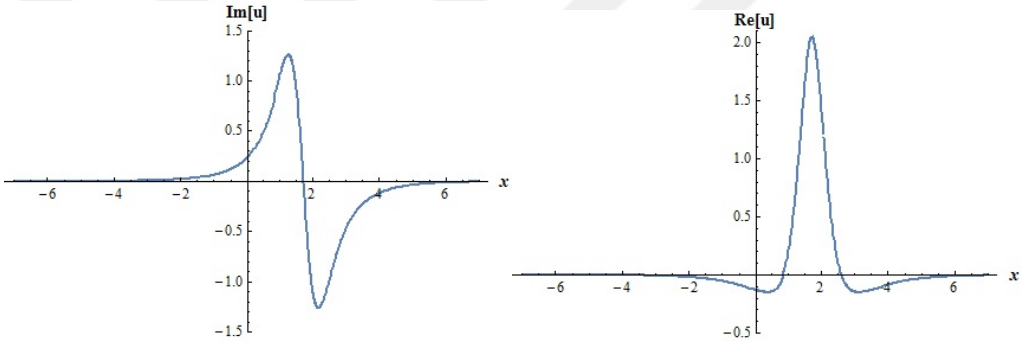
Durum 2.1 Eğer $d = 2, a_6 = i, a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 0, a_4 = 0, a_5 = 0, a_3 = (-1+i)\sqrt{\frac{3}{5}}, k = \frac{1}{6}, b = (1-i)\sqrt{\frac{5}{3}}, \alpha = -\frac{11}{6}, c = \frac{1}{72}$, olduğunda aşağıdaki salınımlı dalga çözümü bulunur.

$$u_7 = \frac{i}{((-\frac{1}{2}+\frac{i}{2})\sigma + e^{-6(-\frac{t}{72}+\frac{x}{6})}\epsilon)^2} - \frac{(1-i)\tau}{(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2})\sigma + e^{-6(-\frac{t}{72}+\frac{x}{6})}\epsilon}, \tag{4.15}$$

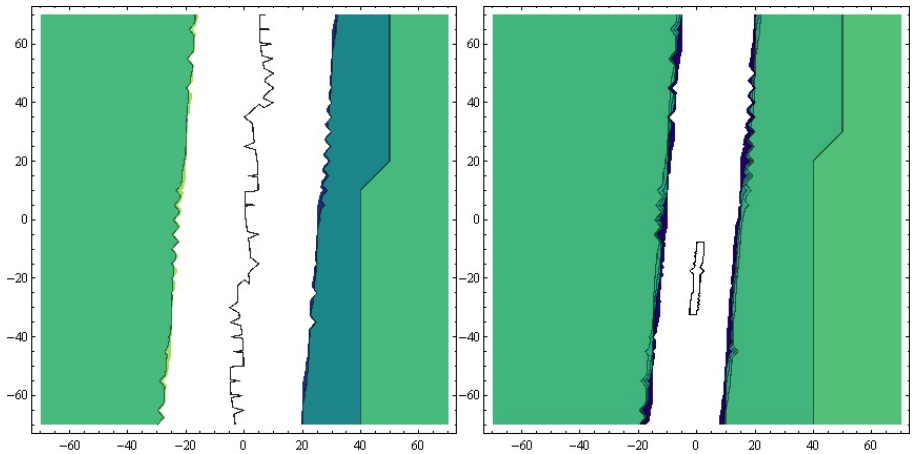
burada $\tau = \sqrt{\frac{3}{5}}, \sigma = \sqrt{\frac{5}{3}}$ dir. Bu çözümde ϵ sıfırdan farklı reel sabittir. Denklem (4.15) de bulunan parametreler için uygun değerleri seçerek reel ve sanal kısımlar için iki boyutlu, üç boyutlu ve contour grafikleri aşağıdaki gibi çizeriz.



Şekil 4.17. (4.15) denkleminin $\epsilon = 5$ için 3D grafiği



Şekil 4.18. (4.15) denkleminin $\epsilon = 5, t = 0.3$ için 2D grafiği

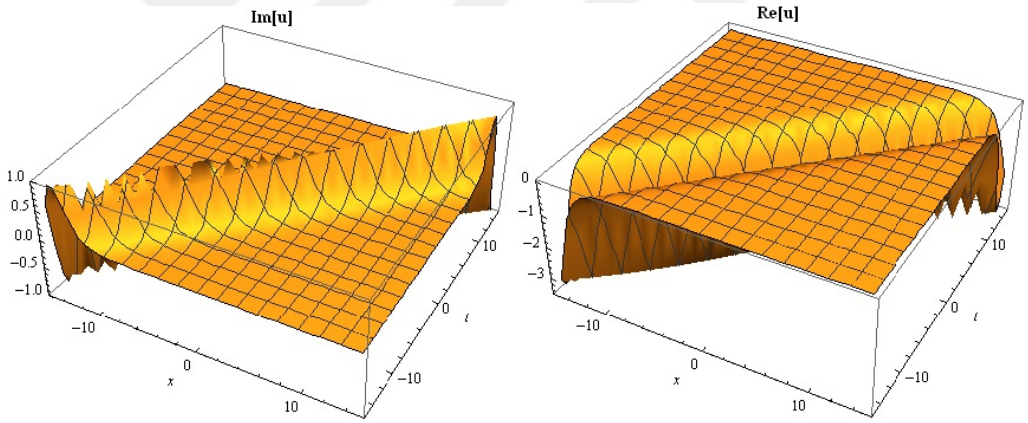


Şekil 4.19. (4.15) denkleminin $\epsilon = 5$ için contour grafiği

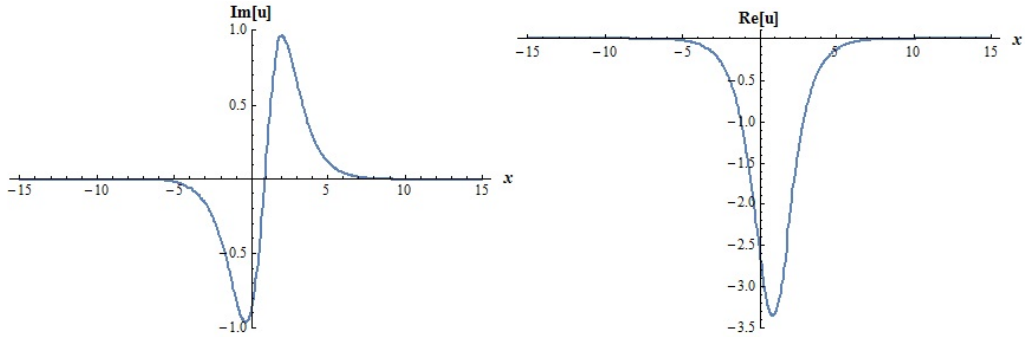
Durum 2.2. $b \neq d$, (1.1) denklemi için $d = 2, a_6 = i, a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 0, a_4 = 0, a_5 = 0, k = \frac{1}{6}, b = -\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{i(1+\alpha)}}{\sqrt{2+\alpha}}, a_3 = \frac{\sqrt{6}(1+\alpha)\sqrt{2+\alpha}}{(i(1+\alpha))^{\frac{3}{2}}}, c = \frac{2+\alpha}{12}$, yeni katsayılarını dikkate alırsak aşağıdaki gibi üstel çözümü buluruz.

$$u_8(x,t) = \frac{i}{(\delta + e^{-6(\frac{x}{6} - \frac{1}{12}t(2+\alpha))}\epsilon)^2} + \frac{\sqrt{6}(1+\alpha)\sqrt{2+\alpha}}{(i(1+\alpha))^{\frac{3}{2}}(\delta + e^{-6(\frac{x}{6} - \frac{1}{12}t(2+\alpha))}\epsilon)}, \quad (4.16)$$

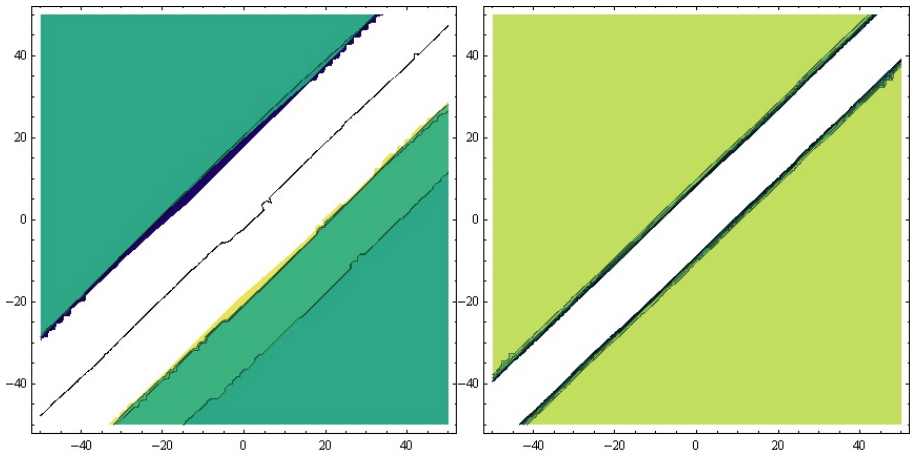
bu çözümde ϵ sıfırdan farklı reel sabit olup $\delta = \frac{\sqrt{i(1+\alpha)}}{\sqrt{6}\sqrt{2+\alpha}}$ dir. Denklem (4.16)'da bulunan parametreler için uygun değerleri seçerek reel ve sanal kısımlar için iki boyutlu, üç boyutlu ve contour grafikleri aşağıdaki gibi çizeriz.



Şekil 4.20. (4.16) denkleminin $\epsilon = 0.4, \alpha = 0.1$ için 3D grafiği



Şekil 4.21. (4.16) denkleminin $\epsilon = 0.4, \alpha = 0.1, t = 0.5$ için 2D grafiği



Şekil 4.22. (4.16) denkleminin $\epsilon = 0.4, \alpha = 0.1$ için contour grafiği

4.2. IBSEFM'nun MAE Denklemine Uygulanması

Bu bölümde, IBSEFM'u modifiye edilmiş alpha denklemine uygularız. İlk olarak (1.1) denklemine

$$u(x,t) = U(\xi), \xi = kx - ct, \tag{4.17}$$

dalga dönüşümü alınırsa

$$6ck^2U'' - 6k^3UU'' + 3k^3(1-\alpha)(U')^2 - 6cU + 2k(\alpha+1)U^3 = 0. \tag{4.18}$$

şeklinde bir lineer olmayan bayağı diferansiyel denklem elde edilir. Balans prensibi gereği

$$M + m = n + 1, \tag{4.19}$$

olarak elde edilir.

Durum 1. Denklem (4.19) için, $M = 3, m = 1, n = 3$ alınırsa, denklem (4.18) bayağı diferansiyel denkleminin deneme çözüm denklemi

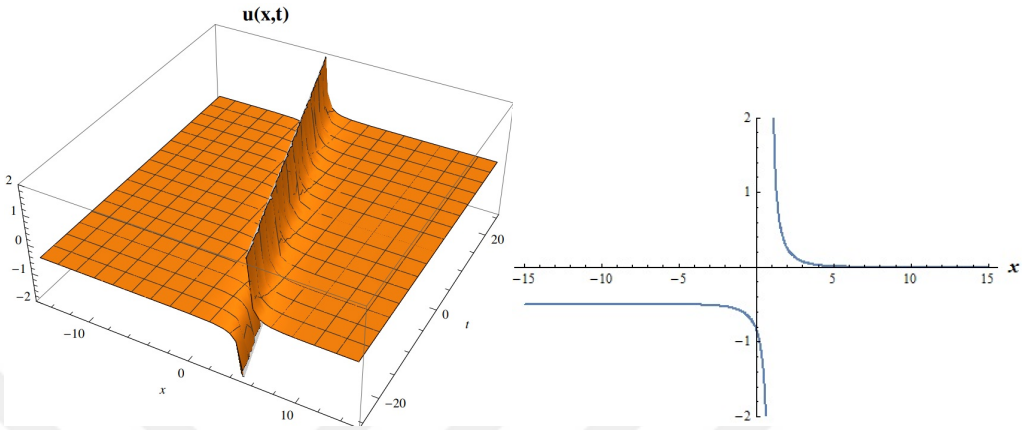
$$U = \frac{a_0 + a_1F + a_2F^2 + a_3F^3}{b_0 + b_1F}, \tag{4.20}$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (4.20)'nin birinci ve ikinci türevleri alınarak denklem (4.18)'de yerine yazarsak F'nin bir cebirsel denklemini elde ederiz. F'nin aynı kuvvetten katsayıları sıfıra eşitlenerek bir denklem sistemi elde edilir. Söz konusu denklem sisteminin çözülmesi ile aşağıda verilen çözümler elde edilir.

Durum 1.1. Eğer $a_0 = -\frac{b_0}{2}, a_1 = \frac{ir}{d}, a_2 = -\frac{db_0}{2r}, b_1 = -\frac{2ir}{d}, k = \frac{1}{2r}, c = -\frac{1}{12r}, a_3 = i, \alpha = -3$, katsayıları seçilirse aşağıdaki üstel fonksiyon çözümü elde edilir.

$$u_1(x,t) = \frac{r\epsilon}{2de^{\nu t+x} - 2r\epsilon}, \tag{4.21}$$

burada $\nu = \frac{1}{6}, b = r$ dir. Denklem (4.21)'in grafiği parametrelerin uygun değerleri altında aşağıdaki gibi çizilebilir.



Şekil 4.23. (4.21) denkleminin $r = 2, d = 3, \epsilon = 4$ için 3D ve $r = 2, d = 3, \epsilon = 4, t = 0.3$ için 2D grafiği

Durum 1.2. Eğer $a_0 = -\frac{a_2}{2dk}, a_1 = -\frac{i}{2dk}, b_0 = \frac{a_2}{dk}, b_1 = \frac{i}{dk}, r = -\frac{1}{2k}, c = -\frac{k}{6}, \alpha = -3, a_3 = i$, katsayıları seçilirse aşağıdaki bir diğer üstel fonksiyon çözümü elde edilir.

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2} + \frac{dk}{2dk + e^{\nu t + x}\epsilon}, \tag{4.22}$$

burada $\nu = \frac{1}{6}, b = r$ dir.

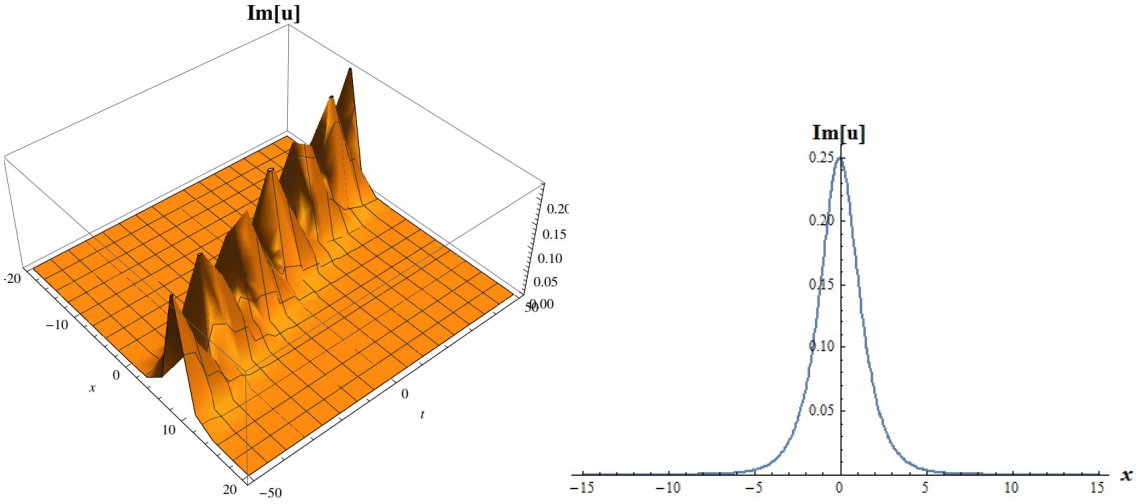
Durum 1.3. Eğer $r = -2, b_1 = i, a_0 = -\frac{b_0}{2}, a_1 = -\frac{i}{2}, a_2 = -ia_3b_0, c = -\frac{1}{24}, d = -4ia_3, k = \frac{1}{4}, \alpha = -3$, katsayıları seçilirse aşağıdaki salınımlı dalga çözümü elde edilir.

$$u_3(x,t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2 + \frac{ie^{\nu t + x}\epsilon}{a_3}}, \tag{4.23}$$

burada $\nu = \frac{1}{6}, b = r$ dir. Denklem (4.23)'de bulunan parametreler için uygun değerleri seçerek reel ve sanal kısımlar için iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri aşağıdaki gibi çizeriz.

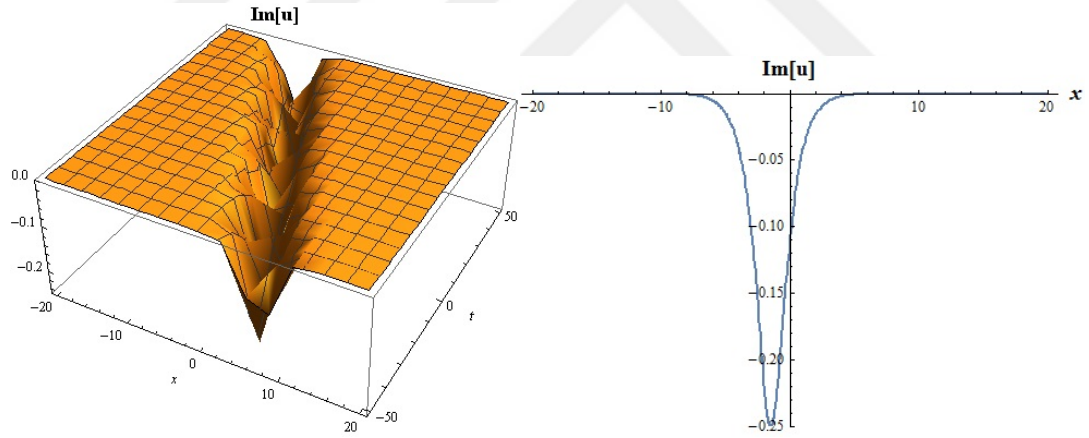
Durum 1.4. Eğer $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = -ia_3b_0, c = \frac{1}{24}, d = 4ia_3, k = -\frac{1}{4}, \alpha = -3, r = -2, b_1 = i$, katsayıları seçilirse aşağıdaki bir diğer komplex üstel fonksiyon çözüm elde edilir.

$$u_4(x,t) = \frac{1}{-2 + \frac{ie^{-\nu t - x}\epsilon}{a_3}}, \tag{4.24}$$



Şekil 4.24. (4.23) denkleminin $a_3 = 1, \epsilon = -2$ için 3D ve $a_3 = 1, \epsilon = -2, t = 0.23$ için 2D grafiği

burada $\nu = \frac{1}{6}, b = r$ dir. Denklem (4.24)'ün çeşitli boyutta grafiği parametrelerin uygun değerlerine göre aşağıdaki gibi çizilebilir.

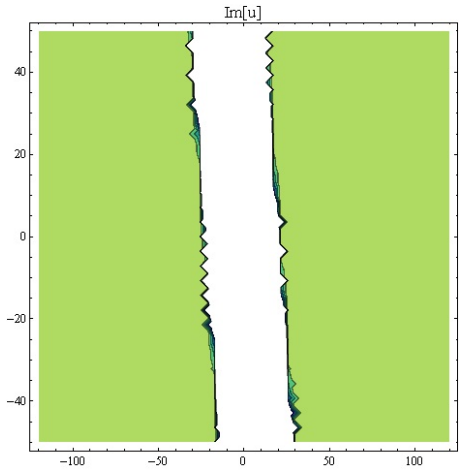


Şekil 4.25. (4.24) denkleminin $a_3 = 3, \epsilon = 2$ için 3D ve $a_3 = 3, \epsilon = 2, t = 2.2$ için 2D grafiği

Durum 1.5. Eğer $a_0 = -\frac{b_0}{2}, a_1 = -\frac{i}{2}, a_2 = -\frac{b_0}{2}, a_3 = -\frac{i}{2}, c = -\frac{1}{48}, k = \frac{1}{8}, \alpha = -3, r = d = 4, b_1 = i$, katsayıları seçilirse aşağıdaki hiperbolik fonksiyon çözümü elde edilir.

$$u_5(x,t) = \frac{1}{2}(-1 - \frac{1 + \tanh[4(\frac{t}{48} + \frac{x}{8})]}{-1 + \epsilon - (1+\epsilon)\tanh[4(\frac{t}{48} + \frac{x}{8})]}), \tag{4.25}$$

burada $b = r$ dir.



Şekil 4.26. (4.24) denkleminin $a_3 = 3, \epsilon = 2$ için contour grafiği

4.3. BSEFM'nun Gross-Pitaevskii Denklemine Uygulanması

Magnetizma alanında ortaya çıkan ve lineer olmayan Gross-Pitaevskii denklemi

$$i\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \gamma \mid u(x,t) \mid^2 u(x,t) = 0, \tag{4.26}$$

olarak tanımlanır. Bu denkleme

$$u = u(x,t) = U(\xi)e^{i\varphi}, \xi = \alpha x - \beta t, \varphi = px - \kappa t, \tag{4.27}$$

şeklinde bir dalga dönüşümü uygulanırsa, reel kısımdan

$$\alpha^2 U'' + (2\kappa - p^2)U - 2\gamma U^3 = 0, \tag{4.28}$$

elde edilir ve imajiner kısımdan ise

$$\beta = \alpha p, \tag{4.29}$$

bulunur. U^3 ve U'' terimleri arasında balance prensibi gereği

$$n + 1 = M, \tag{4.30}$$

elde edilir.

Durum 1. $n = 2, M = 3$ değerleri için

$$U = a_0 + a_1 F + a_2 F^2, \tag{4.31}$$

ve

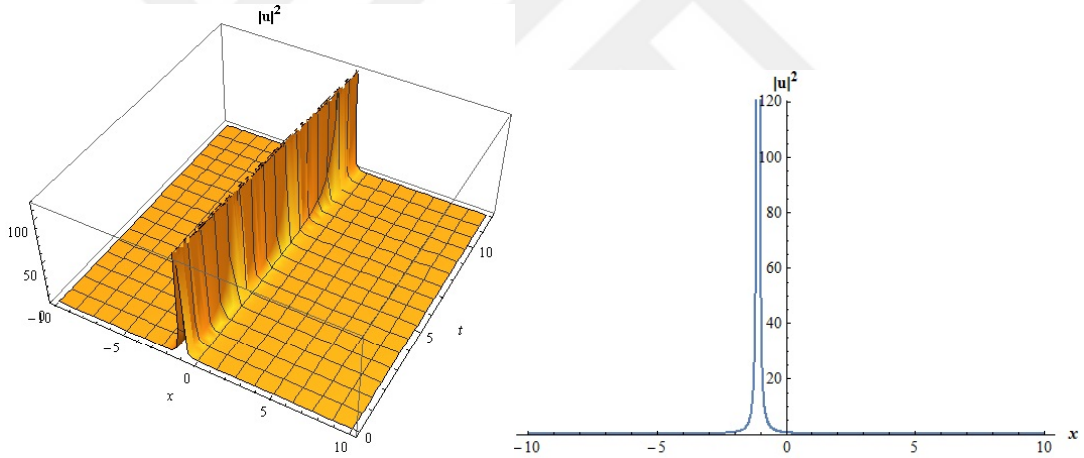
$$U'' = d^2 F a_1 + 4d^2 a_2 F^2 + 4bdF^3 a_1 + 12bda_2 F^4 + 3b^2 F^5 a_1 + 8b^2 F^6 a_2, \tag{4.32}$$

elde edilir. (4.31) ve (4.32) denklemleri (4.28) denkleminde yerine yazılırsa F'nin bir cebirsel denklemi bulunur. F'nin aynı kuvvetten terimlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyerek bir denklem sistemi elde ederiz. Bu denklem sisteminin çözümü ile aşağıdaki durumlar bulunur.

Durum 1.1. Eğer $a_0 = \frac{da_2}{2b}, a_1 = 0, \gamma = \frac{4b^2\alpha^2}{a_2^2}, \kappa = \frac{p^2}{2} + d^2\alpha^2, \beta = \alpha p,$ parametreleri alınırsa

$$u_1(x,t) = e^{i\left(px - t(\frac{p^2}{2} + d^2\alpha^2)\right)} \left(\frac{da_2}{2b} + \frac{a_2}{-\frac{b}{d} + e^{-2d(-pt\alpha + x\alpha)}\epsilon} \right), \tag{4.33}$$

çözümü elde edilir. Çözüm (4.33)'ün uygun parametre değerlerine karşılık gelen grafikleri aşağıdaki gibidir.

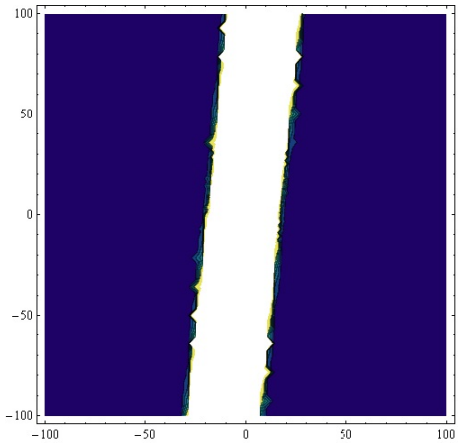


Şekil 4.27. (4.33) denkleminin $p = 0.1, d = 0.8, \alpha = 0.5, \epsilon = 0.4, b = 0.78, a_2 = 0.6$ için 3D ve $p = 0.1, d = 0.8, \alpha = 0.5, \epsilon = 0.4, b = 0.78, a_2 = 0.6, t = 0.23$ için 2D grafiği

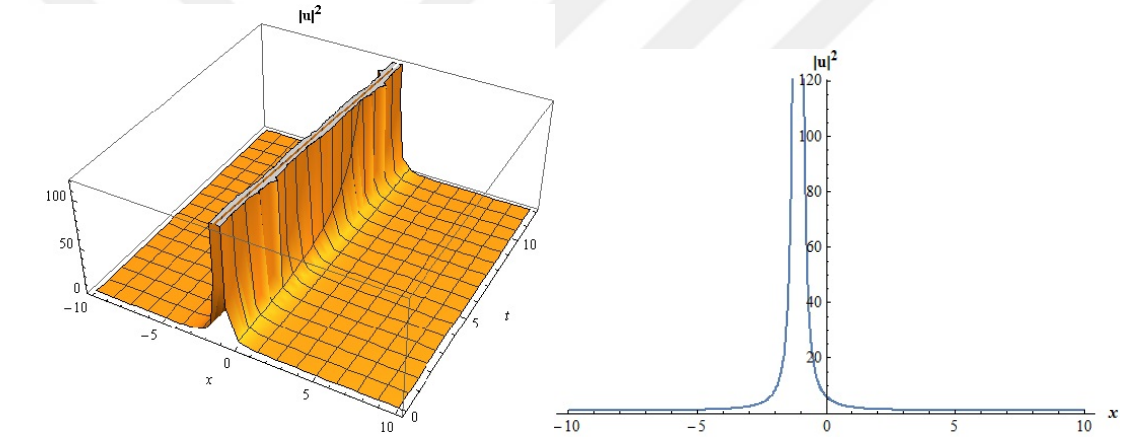
Durum 1.2. Eğer $a_0 = i, a_1 = 0, a_2 = \frac{2ib}{d}, \gamma = -d^2\alpha^2, \kappa = \frac{p^2}{2} + d^2\alpha^2, \beta = \alpha p$ katsayıları seçilirse,

$$u_2(x,t) = e^{i\left(px - t(\frac{p^2}{2} + d^2\alpha^2)\right)} \left(i + \frac{2ib}{d\left(-\frac{b}{d} + e^{-2d(-pt\alpha + x\alpha)}\epsilon\right)} \right), \tag{4.34}$$

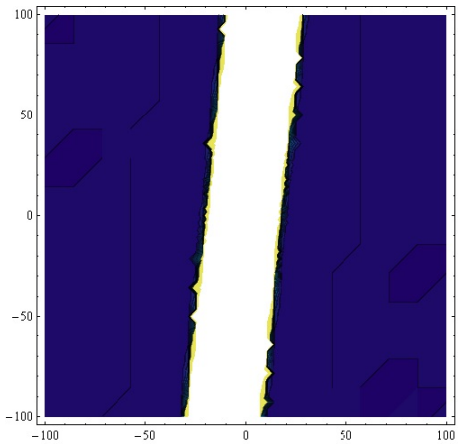
üstel fonksiyon çözümü elde edilir. Çözüm (4.34)'ün uygun parametre değerlerine karşılık gelen grafikleri aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.28. (4.33) denkleminin $p = 0.1, d = 0.8, \alpha = 0.5, \epsilon = 0.4, b = 0.78, a_2 = 0.6$ için contour grafiği



Şekil 4.29. (4.34) denkleminin $p = 0.1, d = 0.8, \alpha = 0.5, \epsilon = 0.4, b = 0.78, a_2 = 0.6$ için 3D ve $p = 0.1, d = 0.8, \alpha = 0.5, \epsilon = 0.4, b = 0.78, a_2 = 0.6, t = 0.23$ için 2D grafiği



Şekil 4.30. (4.34) denkleminin $p = 0.1, d = 0.8, \alpha = 0.5, \epsilon = 0.4, b = 0.78, a_2 = 0.6$ için contour grafiği

4.4. IBSEFM'nun Gross-Pitaevskii Denklemine Uygulanması

Bu bölümde, IBSEFM'u Gross-Pitaevskii denklemine uygularız. İlk olarak

$$i\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\gamma \mid u(x,t)\mid^2 u(x,t)=0, \tag{4.35}$$

şeklinde tanımlanan lineer olmayan Gross-Pitaevskii denklemine

$$u(x,t)=U(\xi)e^{i\varphi},\xi=\alpha x-\beta t,\varphi=px-\kappa t, \tag{4.36}$$

ile verilen dalga dönüşümü uygulanırsa, reel kısımdan

$$\alpha^2U''+(2\kappa-p^2)U-2\gamma U^3=0, \tag{4.37}$$

elde edilir ve imajiner kısımdan ise

$$\beta=\alpha p, \tag{4.38}$$

bulunur. U'' ve U^3 terimleri arasında balans prensibi gereği

$$n+1=M+m, \tag{4.39}$$

olarak elde edilir.

Durum 1. Denklem (4.39) için, $m=1,M=3,n=3$ alınırsa, denklem (4.37) bayağı diferansiyel denkleminin deneme çözüm denklemi

$$U=\frac{a_0+a_1F+a_2F^2+a_3F^3}{b_0+b_1F}, \tag{4.40}$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (4.40)'ın birinci ve ikinci türevleri alınarak denklem (4.37)'de yazarsak F'nin bir cebirsel denklemi bulunur. F'nin aynı kuvvetten katsayıları sıfır alınırsa bir denklem sistemi elde edilir. Söz konusu denklem sisteminin çözülmesi ile aşağıda verilen çözümler elde edilir.

Durum 1.1. Eğer $a_0=\frac{\sqrt{-p^2+2\kappa}b_0}{\sqrt{2}\sqrt{\gamma}},a_2=\frac{i\sqrt{-p^2+2\kappa}b_0}{\sqrt{2}\sqrt{\gamma}a_1},b_1=\frac{\sqrt{2}\sqrt{\gamma}a_1}{\sqrt{-p^2+2\kappa}},d=-\frac{\sqrt{p^2-2\kappa}}{2\sqrt{2}\alpha a_1},r=\frac{i\sqrt{p^2-2\kappa}}{\sqrt{2}\alpha},a_3=i,\beta=\alpha p,$ katsayıları seçilirse aşağıdaki kompleks fonksiyon çözümü elde edilir.

$$u_1=\frac{e^{i(px-t\kappa)}\sqrt{-p^2+2\kappa}}{\sqrt{2\gamma}a_1}\left(\frac{i}{e^{-\frac{i\sqrt{2}(-pt\alpha+x\alpha)\sqrt{p^2-2\kappa}}{\alpha}}\epsilon-\vartheta}+a_1\right), \tag{4.41}$$

burada $\vartheta = \dfrac{i}{2a_1}$ dir.

Durum 1.2. Algoritmada elde edilen diğer katsayı olarak $a_0 = -\dfrac{\sqrt{-p^2+2\kappa}b_0}{\sqrt{2}\sqrt{\gamma}}, a_1 = -\dfrac{\sqrt{-p^2+2\kappa}b_1}{\sqrt{2}\sqrt{\gamma}}, a_2 = \dfrac{ib_0}{b_1}, r = \dfrac{\sqrt{-\dfrac{p^2}{2}+\kappa}}{\alpha}, d = -\dfrac{i\sqrt{\gamma}}{2\alpha b_1}, a_3 = i, \beta = \alpha p$ dikkate alındığında

$$u_2 = -e^{i(px-t\kappa)}\varsigma + \frac{i}{b_1}(e^{-\dfrac{2(-pt\alpha+x\alpha)\sqrt{-\varpi+\kappa}}{\alpha}}\varepsilon + \frac{i\sqrt{\gamma}}{2b_1\sqrt{-\varpi+\kappa}})^{-1}e^{i(px-t\kappa)}, \tag{4.42}$$

şeklinde bir diğer çözüm elde edilir ve burada $\varpi = \dfrac{p^2}{2}, \varsigma = \dfrac{\sqrt{-p^2+2\kappa}}{\sqrt{2}\sqrt{\gamma}}$ dir.

Durum 1.3. Eğer bir diğer katsayı olan aşağıdaki katsayılar dikkate alındığında ise $a_0 = -\dfrac{\sqrt{-p^2+2\kappa}b_0}{\sqrt{2}\sqrt{\gamma}}, a_1 = \dfrac{i\sqrt{-2p^2+4\kappa}}{\sqrt{\gamma}}, a_2 = \dfrac{1}{2}ia_3b_0, d = -\dfrac{ir\sqrt{\gamma}a_3}{\sqrt{-8p^2+16\kappa}}, \alpha = \dfrac{1}{r}\sqrt{-\dfrac{p^2}{2}+\kappa}, b_1 = -2i, \beta = \alpha p$ aşağıdaki analitik çözüm elde edilir.

$$u_3(x,t) = -\frac{\sqrt{-p^2+2\kappa}}{\sqrt{2}\sqrt{\gamma}}\iota + \frac{ia_3}{2}(e^{-2r(-\dfrac{pt}{r}\sqrt{-\dfrac{p^2}{2}+\kappa+}\dfrac{x}{r}\sqrt{-\dfrac{p^2}{2}+\kappa})}\epsilon+\theta)^{-1}\iota, \tag{4.43}$$

burada $\iota = e^{i(px-t\kappa)}, \theta = \dfrac{ia_3\sqrt{\gamma}}{\sqrt{-8p^2+16\kappa}}$ dir.

Durum 1.4. Eğer bir diğer katsayı olan aşağıdaki katsayılar dikkate alınırsa $a_0 = 0, a_1 = \dfrac{i\sqrt{-2p^2+4\kappa}}{\sqrt{\gamma}}, a_2 = 0, b_0 = 0;, d = -\dfrac{ira_3\sqrt{\gamma}}{\sqrt{-8p^2+16\kappa}}, \alpha = -\dfrac{\sqrt{-\dfrac{p^2}{2}+\kappa}}{r}, b_1 = -2i, \beta = \alpha p$ aşağıdaki farklı analitik çözüm elde edilir

$$u_4(x,t) = e^{i(px-t\kappa)}\left(-\frac{\sqrt{-p^2+2\kappa}}{\sqrt{2}\sqrt{\gamma}} + \frac{ia_3}{2}(e^{-2r(\dfrac{pt\lambda}{r}-\dfrac{x\lambda}{r})}\epsilon+\delta)^{-1}\right), \tag{4.44}$$

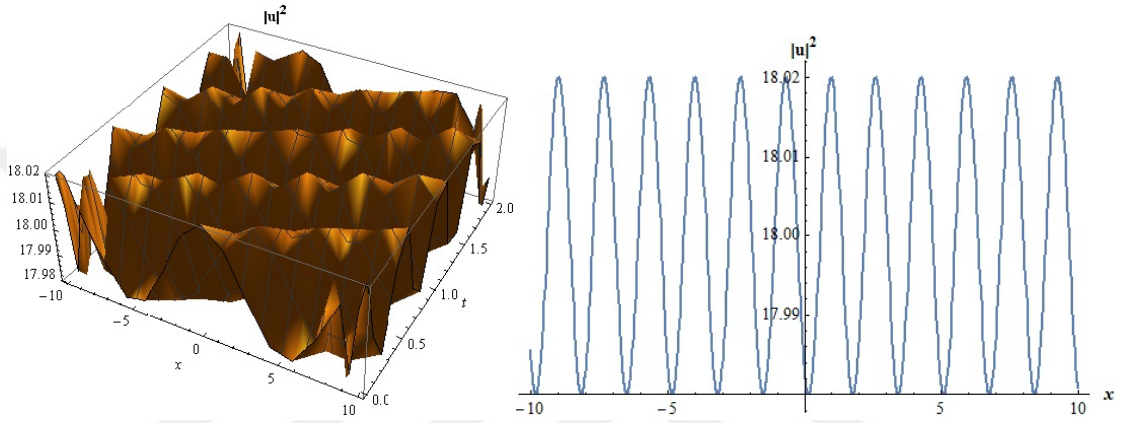
olup $\lambda = \sqrt{-\dfrac{p^2}{2}+\kappa}, \delta = \dfrac{ia_3\sqrt{\gamma}}{\sqrt{-8p^2+16\kappa}}$ dir.

Durum 1.5. Bu durumda ise aşağıdaki gibi katsayı değerleri göz önüne alındığında $a_0 = -\dfrac{i\sqrt{2}\sqrt{p^2-2\kappa}}{\sqrt{\gamma}}, a_1 = \dfrac{i\sqrt{p^2-2\kappa}b_1}{\sqrt{2}\sqrt{\gamma}}, a_2 = -\dfrac{2id\sqrt{2}\sqrt{p^2-2\kappa}}{r\sqrt{\gamma}}, a_3 =$

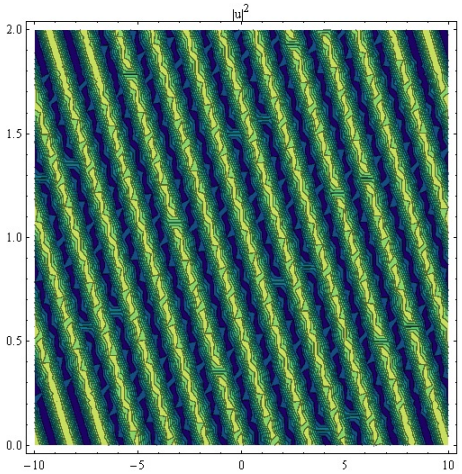
$\frac{id\sqrt{2}\sqrt{p^2-2\kappa}b_1}{r\sqrt{\gamma}}, \alpha = \frac{\sqrt{-p^2+2\kappa}}{\sqrt{2}r}, b_0 = -2, \beta = \alpha p,$ salınımlo dalga çözümü elde edilir.

$$u_5(x,t) = \frac{i\varrho e^{i(px-t\kappa)}}{\sqrt{2}r\sqrt{\gamma}}\left(r + \frac{2d}{-\frac{d}{r} + e^{-2r\left(-\frac{pti\varrho}{\sqrt{2}r}+\frac{xi\varrho}{\sqrt{2}r}\right)}\epsilon}\right), \tag{4.45}$$

burada $\varrho = \sqrt{p^2-2\kappa}, p^2-2\kappa > 0$ dir. Denklem (4.45)'in farklı boyutlardaki grafikleri ise aşağıdaki gibi çizilebilir.



Şekil 4.31. (4.45) denkleminin $p = -3, \kappa = 0.9, r = 0.02, d = 7.2, \gamma = 0.2, \epsilon = 0.1$ için 3D ve $p = -3, \kappa = 0.9, r = 0.02, d = 7.2, \gamma = 0.2, \epsilon = 0.1, t = 0.23$ için 2D grafiği



Şekil 4.32. (4.45) denkleminin $p = -3, \kappa = 0.9, r = 0.02, d = 7.2, \gamma = 0.2, \epsilon = 0.1$ için contour grafiği

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu tez çalışması, 6 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, çalışmanın önemini belirten literatür araştırması sunulmuş olup göz önüne alınan modifiye edilmiş alpha denklemi ve lineer olmayan Gross-Pitaevskii denklemlerinin tanımları verilmiştir. İkinci bölümde, tezde kullanılacak olan temel tanımlar literatüre sunulmuştur. Üçüncü bölümde, göz önüne alınan modifiye edilmiş alpha denklemi ve Gross-Pitaevskii denklemlerinin çözümlerini elde etmek için kullanılacak olan Bernoulli alt denklem fonksiyon metodu ve geliştirilmiş Bernoulli alt denklem fonksiyon metodunun genel özellikleri ayrıntılı bir şekilde verilmiştir. Geliştirilmiş Bernoulli alt denklem metodu, Bernoulli alt denklem fonksiyon metodunun temel özelliklerinden esinlenerek oluşturulmuştur. Dördüncü bölümde, uygulamalı bilimlerde çok önemli bir yere sahip olan modifiye edilmiş alpha denklemi ve lineer olmayan Gross-Pitaevskii denklemlerinin yeni salınımlı dalga çözümleri Bernoulli alt denklem fonksiyon metodu ve geliştirilmiş Bernoulli alt denklem fonksiyon metodu kullanılarak elde edilmiştir. Elde edilen tüm çözümlerin, modifiye edilmiş alpha denklemi ve Gross-Pitaevskii denklemini sağladığı gözlemlenmiştir. Bu çözümlerin dalga dağılımlarını incelemek için, parametrelere uygun değerler verilerek iki boyutlu, üç boyutlu ve contour grafikleri paket programlarla çizilmiştir. Çözümlerde bulunan sabitler değiştikçe dalganın konumu, hızı, genliği, dalga boyu gibi özelliklerinin de değiştiği görülmüştür. Ayrıca, çözümlerde bulunan parametrelerin sağlaması gereken koşullar ayrıntılı bir şekilde sunulmuştur. Beşinci bölümde, elde edilen bulgularla ilgili kapsamlı bir sonuç verilmiştir. Son bölüm olan altıncı bölümde ise, bu tezde atıf olarak kullanılan kaynakların listesi sunulmuştur. Bu tezde literatüre kazandırılan çözümler, periyodik, tekil, soliton dalga dağılımlarını inceleyen araştırmacılar için önemli bir yere sahiptir. Bu tez çalışmasında, göz önüne alınan metotların analitik çözümler elde etmek için yeterli olduğu sonucuna varılmıştır. Bu tezde çalışılan yöntemler, diğer birçok alanda ortaya çıkan lineer olmayan denklem veya denklem sistemlerine uygulanarak, üstel, periyodik, soliton ve salınımlı dalga çözümleri bulmak için kullanılabilir. Literatüre sunulan ve çözümleri incelenmemiş matematiksel modeller için de farklı dalga çözümleri elde edilebilir ve literatüre yeni çalışmalar sunulabilir. Bu tez çalışmasındaki denklemler farklı metotlarla çözülerek çözümler arasındaki benzerlikler veya farklılıklar gösterilebilir. Tezde ele alınan metotların değişik modelleri geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

ARQUB, O.A., MAAYAH, B., 2019. Modulation of reproducing kernel Hilbert space method for numerical solutions of Riccati and Bernoulli equations in the Atangana-Baleanu fractional sense. Chaos Solitons and Fractals, 125: 163–170.

BASKONUS, H.M., BULUT, H., 2015. On the Complex Structures of Kundu-Eckhaus Equation via Improved Bernoulli Sub-Equation Function Method. Waves in Random and Complex Media, 25(4): 720-728.

BEHERA, S., SAHA R.S., 2020. An operational matrix based scheme for numerical solutions of nonlinear weakly singular partial integro-differential equations. Applied Mathematics and Computation, 367(124771): 1-18.

BISWAS, A., MIRZAZADE, M., TRİKİ, H., ZHOU, Q., ULLAH, M.Z., MOSHOKOA, S.P.,and BELİC, M., 2018. Perturbed resonant 1-soliton solution with anti-cubic nonlinearity by Riccati-Bernoulli sub-ODE method. Optik, 156: 346–350.

CAO, B., 2010. Solutions of Jimbo-Miwa Equation and Konopelchenko-Dubrovsky Equations. Acta Applicandae Mathematicae, 112: 181–203.

DILCHER, K., VIGNAT, C., 2016. General convolution identities for Bernoulli and Euler polynomials. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 435(2): 1478–1498.

DILCHER, K., STRAUB, A., and VIGNAT, C., 2019. Identities for Bernoulli polynomials related to multiple Tornheim zeta functions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 476: 569–584.

DERNEK, N., DERNEK, A., 2011. Diferansiyel Denklemler. Birsen Kitapevi, 1.

ISLAM, N., ASADUZZAMAN, M., and ALI, S., 2019. Exact wave solutions to the simplified modified Camassa-Holm equation in mathematical physics. AIMS Mathematics, 5 (1): 26–41.

JAMEI, M.M., BEYKI, M.R., and KOEPF, W., 2019. An extension of the Euler-Maclaurin quadrature formula using a parametric type of Bernoulli polynomials. Bulletin des Sciences Mathématiques, 156: 102798.

LEE, J.Y., JEON, W., 2019. Exact solution of Euler-Bernoulli equation for acoustic black holes via generalized hypergeometric differential equation. Journal of Sound and Vibration, 452: 191-204.

KESHAVARZ , E., ORDOKHANI, Y. and RAZZAGHI, M. 2019. The Bernoulli wavelets operational matrix of integration and its applications for the solution of linear and nonlinear problems in calculus of variations. Applied Mathematics and Computation, 351: 83–98.

MADEN, S., 2013. Diferansiyel Denklemler. Seçkin Kitapevi, 2.

MARINOV, T.T., VATSALA, A.S., 2008. Inverse problem for coefficient identification in the Euler–Bernoulli equation. Computers and Mathematics with Applications, 56: 400–410.

MENDO, L., 2019. An asymptotically optimal Bernoulli factory for certain functions that can be expressed as power series. Stochastic Processes and their Applications, 129(11): 4366–4384.

RAHIMKHANI, P., ORDOKHANI, Y., and BABOLIAN, E., 2017. Numerical solution

of fractional pantograph differential equations by using generalized fractional-order Bernoulli wavelet. Journal of Computational and Applied Mathematics, 309: 493–510.

RAHIMKHANI, P., ORDOKHANI, Y., and BABOLIAN, E., 2016. Fractional-order Bernoulli wavelets and their application. Applied Mathematical Modelling, 40 : 8087–8107.

REN, Q., TIAN, H., 2016. Numerical solution of the static beam problem by Bernoulli collocation method. Applied Mathematical Modelling, 40:8886–8897.

RAHIMKHANI, P., ORDOKHANI, Y., and BABOLIAN, E., 2017. Fractional-order Bernoulli functions and their applications in solving fractional Fredholem–Volterra integro-differential equations. Applied Numerical Mathematics, 122: 66–81.

RANI, D., MISHRA, V., 2020. Numerical Inverse Laplace Transform based on Bernoulli Polynomials Operational Matrix for Solving Nonlinear Differential Equations. Results in Physics, 16(102836): 1-7 .

QI, F.H., HUANG, Y.H., and WANG,P., 2020. Solitary-wave and new exact solutions for an extended (3+1)-dimensional Jimbo–Miwa-like equation . Applied Mathematics Letters, 100(106004): 1-6.

SYAM, M.I., 2019. The solution of Cahn-Allen equation based on Bernoulli sub-equation Method. Results in Physics, 4(102413): 1-4.

WAZWAZ, A.M., 2006. Solitary wave solutions for modified forms of Degasperis–Procesi and Camassa–Holm equations. Physics Letters A, 352(6): 500-504.

YANG, S.L., 2008. An identity of symmetry for the Bernoulli polynomials. Discrete Mathematics, 308: 550 – 554.

YAŞAR, B.I., 2009. Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları. Siyasal Kitapevi, 4.

ZEGHDANE, R., 2019. Numerical solution of stochastic integral equations by using Bernoulli operational matrix. Mathematics and Computers in Simulation, 165: 238–254.

LI, Q.Y., LI, Z.D., LI, L., FU, G.S., 2010. Nonautonomous bright and dark solitons of Bose–Einstein condensates with Feshbach-managed time-dependent scattering length. Optics Communications, 283: 3361–3366.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Muzaffer ERCAN

EĞİTİM

Derece		**Adı**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Sunguroğlu Lisesi , Gaziantep	1996
Lisans	:	Harran Üniversitesi, Şanlıurfa	2001
Yüksek Lisans	:	Harran Üniversitesi, Şanlıurfa	2021

ULUSLARARASI YAYIN

BASKONUS, H.M. ve ERCAN, M., 2021. Extraction Complex Properties of the Nonlinear Modified Alpha Equation. Fractal and Fractional, 5(6), 1-15.

ULUSLARARASI SEMPOZYUM BİLDİRİSİ (Sözlü Sunum)

BASKONUS, H.M. ve ERCAN, M., 2021. Deeper investigations of the nonlinear modified alpha equation, International Conferences on ”Applied Nonlinear Analysis and Soft Computing” (4th Edition of the Conference Serries ”Advances in Mathematical Sciences”) at Gauhati University, 22-23 December, India, S. 1.