ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KOMPLEKS DÜZLEMDE TREMBLAY OPERATÖRÜ VE BAZI ANALİTİK FONKSİYONLARA UYGULAMALARI

Teslime Hazal YILDIZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇANKIRI
2023

Her Hakkı Saklıdır

TEZ ONAYI

Teslime Hazal YILDIZ tarafından hazırlanan "**Kompleks Düzlemde Tremblay Operatörü ve Bazı Analitik Fonksiyonlara Uygulamaları**" adlı tez bu çalışması 09/01/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Hüseyin IRMAK

Jüri Üyeleri :

Başkan : Prof. Dr. A. Erdal COŞKUN
Matematik Anabilim Dalı
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Üye : Prof. Dr. Hüseyin IRMAK
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Üye : Doç. Dr. Müfit ŞAN
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. İbrahim ÇİFTÇİ
Enstitü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum "**Kompleks Düzlemde Tremblay Operatörü ve Bazı Analitik Fonksiyonlara Uygulamaları**" konulu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, tezin Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nden başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve bu çalışmanın Çankırı Karatekin Üniversitesi tarafından kullanılan "Bilimsel İntihal Tespit Programıyla tarandığını, "intihal içermediğini" beyan ederim. Çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması halinde ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm. Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim. (09/01/2023)

Teslime HAZAL YILDIZ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KOMPLEKS DÜZLEMDE TREMBLAY
OPERATÖRÜ VE BAZI ANALİTİK FONKSİYONLARA
UYGULAMALARI

Teslime Hazal YILDIZ

Çankırı Karatekin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin IRMAK

Bu sunulan tezin temel amacı, kompleks düzlemde Tremblay operatörü ilgili bazı gerekli temel bilgileri öncelikli olarak tanıtmak ve ardından da ilgili operatörün bazı analitik fonksiyonlarla ilgili bazı uygulamalarını belirlemektir.

2023, 47 sayfa

ANAHTAR KELİMELER : Açık birim disk, Bölgeler, Kompleks düzlem, Kompleks değişkenli fonksiyon, Analitik fonksiyon, Taylor-MacLaurin seri açılımı, Kesirsel mertebeden türev, Kesirsel mertebeden türev operatörü, Tremblay operatörü.

ABSTRACT

Master of Science Thesis

THE TREMBLAY OPERATOR IN THE COMPLEX PLANE
AND ITS APPLICATIONS TO CERTAIN
ANALYTIC FUNCTIONS

Teslime Hazal YILDIZ

Çankırı Karatekin University
Institue of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Hüseyin IRMAK

The main purpose of this present thesis is primarily to introduce certain basic-necessary information relating to the Tremblay operator in the complex plane and then to determine some applications of the related operator to certain analytic functions.

2023, 47 pages

KEYWORDS: Open unit disc, domains, Complex plane, Function with complex variable, Analytic function, Taylor-Maclaurin series expansion, Fractional order calculus, Operators of fractonal order, Tremblay operator.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Konu olarak literatürde oldukça özgün ve devamlılığa sahip olan bu bilimsel araştırmada, kesirsel mertebeden türev operatörü yardımıyla tanımlanmış olan ve literatürde "Tremblay Operatörü" olarak anılan operatör (dönüşüm) kompleks düzlemde ele alınmıştır. Bu operatör (dönüşüm) için; gerekli olan temel bilgiler, teoriler ve örneklendirmeler öncelikli olarak verilmiş ve ardından da, ilgili operatörün bazı analitik fonksiyonlara olası etkileri araştırılmıştır. Elde edilen özgün sonuçlar da bu tez çalışmasının "Bulgular ve Tartışma ile Sonuç" bölümlerinde sunulmuştur.

Tez savunma sürecinde, çeşitli önerilerde bulunan Sayın Prof. Dr. A. Erdal ÇOŞKUN ve Doç. Dr. Müfit ŞAN jüri üyelerine içten teşekkürlerimi sunar ve bu akademik araştırmanın tüm süreçlerinde bana yön gösteren, ufuk açan, yardımlarını da hiç esirgemeyen ve oldukça da sabırla davranan danışmanım Sayın Prof. Dr. Hüseyin IRMAK'a da çok teşekkür ederim.

Özellikle, yoğun süren iş hayatımda ve bu tez çalışmaları sürecinde bana daima sabır gösteren ve destek olan eşim Doğan YILDIZ'a, kendilerini de zaman zaman ihmal ettiğimi düşündüğüm kızlarım Defne ve Gökçe'ye ve üzerimde emekleri olan herkese sonsuz teşekkür ederim.

Teslime Hazal YILDIZ
Çankırı, Ocak 2023

İÇİNDEKİLER

ÖZET ... **...i**
ABSTRACT ... **..ii**
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR ... **.iii**
İÇİNDEKİLER ... **.iv**
SİMGELER DİZİNİ ... **..v**
ŞEKİLLER DİZİNİ ... **.vi**
1. GİRİŞ ... **..1**
2. MATERYAL VE YÖNTEM ... **..3**
2.1 Ön Bilgiler ... **..3**
2.2 Kompleks Düzlemde Kesirsel Mertebeden Türev Operatörü ... **18**
2.3 Kompleks Düzlemde Tremblay Operatörü ... **26**
3. BULGULAR VE TARTIŞMA ... **31**
4. SONUÇ ... **42**
KAYNAKLAR ... **43**
ÖZGEÇMİŞ ... **47**

SİMGELER DİZİNİ

$B(\cdot,\cdot)$	Beta fonksiyonu
$\mathbb{C}$	Kompleks sayıların oluşturduğu küme
$D_z^{\lambda}[\cdot]$	λ -mertebeden kesirsel türev operatörü
$D_z^{\lambda}[f(z)]$	f(z) gibi bir kompleks fonksiyonun λ-mertebeden kesirsel türev Operatörü
$\mathbb{N}$	Doğal sayıların oluşturduğu küme
$\mathbb{N}_m$	$m \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $\{m, m+1, \cdots\}$ şeklindeki doğal sayıların oluşturduğu sonsuz elemanlı küme
$\mathbb{R}$	Reel sayıların oluşturduğu küme
$T_z^{\gamma,\lambda}[\cdot]$	Tremblay Operatörü
$T_z^{\gamma,\lambda}[f(z)]$	f(z) gibi bir kompleks fonksiyonun Tremblay Operatörü
$\mathbb{U}$	Kompleks düzlemdeki açık birim disk
$\mathbb{Z}$	Tam sayıların oluşturduğu küme
$\mathbb{Z}^-$	Negatif tam sayıların oluşturduğu küme
$\Gamma(\cdot)$	Gamma fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Gamma fonksiyonunun grafiği 9

1. GİRİŞ

Literatür taraması olarak, temelde üç temel bilgi birikimini içeren bu özgün araştırma doğrudan kompleks düzlemde tanımlanmış olan bazı operatörlerle veya kompleks değişkenli fonksiyonlarla ilgili olan bazı (özel kompleks) operatörlerle (dönüşümlerle) alakalıdır. Bu açıdan, bu tez çalışması için gerekli olabilecek konulara ilişkin gerekli bilgilendirmeler ve önceki çalışmalar aşağıda belirtilen sıralama ile ele alınmış ve gerekli çalışmalar da bu yönde yürütülmüştür.

Birinci bölümde, çalışma doğrudan kompleks değişkenli fonksiyonlar ile doğrudan ilgili olacağından dolayı, öncelikli olarak, giriş bölümümü bu bilim alanı ile ilgili olacak temel bilgiler, tanımlar, teoriler ve bazı uygulamalara ilişkin örneklendirmelere yer verilecektir. Bütün bu bilgiler için de, temel referans kaynağı olarak düşünülen Nehari (1952), Lebedev (1965), Abramowitz vd. (1965), Bell (1968), Duren (1983), Goodman (1983), Wunsch (1994), Howie (2003) ve Olver vd. (2010) eserleri önemli rol oynamaktadır.

İkinci temel bilgilendirmeler de bazı kesirsel mertebeden türev operatörlerini (dönüşümlerini) içereceğinden dolayı, kesirsel merteben türevlere ilişkin bazı temel bilgilendirmeler esas olacaktır. Kesirsel mertebeden türev kavramı ve doğal olarak ilgili temel kavramlar hem gerçel (reel) hem de kompleks değişkenli fonksiyonlar için geçerli olan temel bir kavramdır. Bilindik faktöryel kavramının daha faklı ve daha da uygulanabilir boyutlar kazandıran Gamma fonksiyonun çok daha kullanılabilirliği, kesirsel mertebeden türevlere ve bunlara ilişkin türev operatörlerine de oldukça katkı sağlamıştır. Bütün bu bilgilendirmeler için, özel fonksiyonları da kapsayan Lebedev (1965), Abramowitz vd. (1965), Bell (1968) ve Olver vd. (2010) eserleri önemli rol oynasa da, kesirsel mertebeden hesaplamalara ve bunlarla ilgili olan ve integral dönüşümlerle belirlenen kesirsel mertedeben türev operatörlerine ilişkin temel eserlere ek olarak; Owa (1978), Srivastava and Owa (1989), Ross (1992), Miller and Ross (1993), Samko vd. (1993), Grozdev (1997), Ross (1997), Kilbas vd. (2006), Daftardar-Gejji (2014), Herzallah (2014) ve Srivastava (2020) eserleri önemli olacaktır.

Bu tez araştırmasının temel konusu olan Tremblay operatörü (dönüşümü), kesirsel mertebeden türevler yardımıyla tanımlanan bir özel operatör olup, bu konuda ilk karşılaşılan bu özel operatör Tremblay (1974) tarafından literatüre kazandırılmıştır. Ayrıca, zaman zaman literatürde karşılaşılan bazı araştırmalar olarak da; Esa vd. (2017), Irmak and Engel (2019) ve Irmak (2019) araştırmacıları tarafından da, kompleks değişkenli fonksiyonlarla ilgili olan çeşitli sonuçları içeren makaleler referans olarak sunulabilir.

Bu tez çalışması literatürde çok iyi bilinen ve açık birim diskinde analitik olan "*n*-değerli analitik fonksiyonlar" ve bunların özel hali olan "*normalize* edilmiş analitik fonksiyonlar" ile doğrudan ilişkili olan tüm olası sonuçlar "Bulgular ve Tartışma" kısmında yer alan özgün sonuçları ve kapsamlı önerileri içeren sonuçlardır. Bu özgün sonuçlar Irmak and Yıldız (2022) tarafından literatüre kazandırılmıştır ve ilgili dergi de Emerging Sources Citation Index - Web of Science kapsamına giren bir dergidir. Özellikle, vurgulanan "*n*-değerli ve *normalize* edilmiş analitik fonksiyonlar" ile alakalı olan bazı özgün çalışmalarla ilişkili olabilecek bazı sonuçlar için Chen vd. (1997, 1998), Raina (1997), Parajabat (2009), Irmak (2020), Irmak vd. (2019, 2021) ve Şan and Irmak (2015) eserlerine odaklanılabilir.

Ayrıca, yukarı belirtilen operatörlerle ilgili olan ve diğer bilim alanlarındaki çeşitli uygulamalarını içeren eserler olarak da; Oldham and spanier (1974), Taberski (1986), Nishimoto and Kalla (1988), Raina (1997), Chen vd. (1997, 1998), Vinagre vd. (2005), Prajapat (2009), Saxena vd. (2009), Purohit (2012) ve Zhuravkov and Romanove (2015) makaleleri incelenebilir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Ön Bilgiler

2.1.1 Tanım. Kompleks sayıların oluşturduğu küme $\mathbb{C}$ gösterimi ile ifade edilir ve bu küme

$$\mathbb{C} = \{ z : z = x + iy \ \ (x, y \in \mathbb{R}) \}$$

şeklinde tanımlanır (Wunsh 1994).

Bilindiği gibi, belirtilen ilgili "*x, z* kompleks sayısının reel kısmı" ve "*y* de, *z* kompleks sayısının sanal (imajinar) kısmı" olarak kabul edilir ve bunlar sırasıyla;

$$\Re e(z) = x \quad \text{ve} \quad \Im m(z) = y$$

şeklindeki gösterimlerle ifade edilir. Çalışılan alanlara göre, ilgili küme zaman zaman "Analitik Düzlem", "Kompleks Düzlem" veya "*z*–düzlemi" gibi ifadelerle de sıkça anılır. (Wunsh 1994).

2.1.2 Tanım. $\mathbb{C}$'de açık birim disk olarak bilinen küme, genellikle **U** notasyonu ile gösterilen ve

$$\mathbf{U} = \{ z : |z| < 1 \ \ (z \in \mathbb{C}) \}$$

şeklinde tanımlanan kümedir (Nehari 1952).

2.1.3 Tanım. Herhangi A ve B şeklindeki boş olmayan iki küme verilsin. Eğer, $A \cap B = \emptyset$ ise A ve B kümelerine ayrık kümelerdir denir.

2.1.1 Örnek. $\mathbb{C}$'nin:

$$\mathrm{G} = \{ z \in \mathbb{C} : \ \Re e(z) > 0 \} \quad \text{ve} \quad \mathrm{H} = \{ z \in \mathbb{C} : \ \Re e(z) < 0 \}$$

şeklindeki kümeler ($\mathbb{C}$'de) ayrık kümelerdir.

2.1.2 Örnek. $\mathbb{C}$'nin:

$$\mathrm{G} = \{ z \in \mathbb{C} : \ \Re e(z) > 0 \} \quad \text{ve} \quad \mathrm{H} = \{ z \in \mathbb{C} : \ \Im m(z) < 0 \}$$

şeklindeki gibi verilen kümeler ise ($\mathbb{C}$'de) ayrık kümeler değildir.

2.1.4 Tanım. Keyfi $\delta > 0$ sayısı ile herhangi bir $z_0 \in \mathbb{C}$ gibi bir kompleks sayısı verilsin. Bu durumda, bu z_0 noktasının δ (-açık-) komşuluğu $\mathrm{U}_\delta(z_0)$ gösterimi ile ifade edilir ve

$$\mathrm{U}_\delta(z_0) = \{\, z \in \mathbb{C} : \ |\mathrm{z} - \mathrm{z}_0| < \ \delta \ \ (\delta > 0) \,\}$$

şeklindeki küme ile tanımlanır (Howie 2003).

2.1.3 Örnek. $\mathbb{C}$'nin $z_0 = i$ gibi bir noktasının $\delta = 1/4$ (-açık-) komşuluğu:

$$\mathrm{U}_{1/4}(i) = \{\, z \in \mathbb{C} : \ |\mathrm{z} - \mathrm{i}| < \ 1/4 \,\}$$

$$= \{\, z \in \mathbb{C} : \ |\mathrm{z} - \mathrm{i}| < \ 1/4 \,\}$$

şeklindeki kümedir.

2.1.5 Tanım. Boş kümeden farklı olan $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ gibi bir küme verilsin ve $z_0 \in \mathrm{G}$ olsun. Eğer, verilen z_0 noktasının $U_\delta(z_0) \subset \mathrm{G}$ olacak şekilde (en az bir) komşuluğu var ise, z_0 noktasına G kümesinin bir iç noktasıdır denir.

2.1.4 Örnek. $\mathbb{C}$'nin:

$$\mathrm{G} = \{\, z \in \mathbb{C} : \ \Re e\,(z) \geq 0 \,\}$$

şeklindeki gibi bir alt kümesini göz önüne alalım. $\mathbb{C}$'nin $z_0 = r \ \ (r < 0)$ ve $z_0 = ir$ $(r \in \mathbb{R})$ şeklindeki noktalarının hiçbiri G kümesi için birer iç nokta olamaz ama $\mathbb{C}$'nin $z_0 = r + is \ \ (r > 0; s \in \mathbb{R})$ noktalarının hepsi G kümesi için birer iç nokta olur.

2.1.6 Tanım. $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Eğer, G'nin her bir noktası bir iç nokta ise, G kümesine $(\mathbb{C}'\mathrm{de})$ bir açık küme denir (Nehari 1952).

2.1.5 Örnek. Örnek 2.1.2 ile sunulan kümeler $(\mathbb{C}'\mathrm{de})$ birer açık kümelerdir ama Örnek 2.1.4'te sunulan küme ise bir açık küme olamaz.

2.1.7 Tanım. Ayrık ve açık iki kümenin birleşimi şeklinde yazılamayan kümeye bağlantılı küme adı verilir (Nehari 1952).

2.1.6 Örnek. $\mathbb{C}$'nin:

$$\mathrm{A} = \{\ z \in \mathbb{C} :\ |z| < 1\ \} \quad \text{ve} \quad \mathrm{B} = \{\ z \in \mathbb{C} :\ \Re e(z) \neq 0\ \}$$

şeklindeki gibi verilen alt kümelerini göz önüne alalım. Kolayca, A kümesinin "ayrık ve açık olan iki kümenin birleşimi" şeklinde yazılması mümkün değildir. Dolayısıyla, A kümesi ($\mathbb{C}'$de) bir bağlantılı küme olur. Fakat, Örnek 2.1.1 ile verilen G ve H kümlerine odaklanılırsa, burada verilen B kümesinin de $\mathrm{B} = \mathrm{G} \cup \mathrm{H}$ şeklindeki gibi bir küme olduğu kolayca görülür. Yani, B kümesi "ayrık ve açık olan iki kümenin birleşimi" şeklinde yazılmıştır. O halde, B kümesi ($\mathbb{C}'$de) bağlantılı küme olamaz.

2.1.8 Tanım. Açık ve bağlantılı kümelere bölge adı verilir (Nehari 1952).

2.1.7 Örnek. Örnek 2.1.6 ile verilen A kümesi ($\mathbb{C}'$de) bir bölgedir ama Örnek 2.1.4 ile verilen küme ise bir bölge olamaz.

2.1.9 Tanım. Boş kümeden farklı herhangi $\mathbf{A} \subset \mathbb{C}$ ve $\mathbf{B} \subset \mathbb{C}$ şeklindeki iki küme verilsin. Fonksiyon olma koşulları altında, **A** kümesinin elemanlarını **B** kümesinin elemanlarına götüren kurala Kompleks Fonksiyon adı verilir (Owie 2003).

Bilindiği gibi, $z \in \mathbf{A}$ ve $w \in \mathbf{B}$ olmak üzere, üstte vurgulanan (fonksiyon olma) kuralı V ile ifade edilirse, ilgili fonksiyon "Kompleks Fonksiyon" adıyla anıldığı gibi "Kompleks Değişkenli Fonksiyon" veya "Kompleks Değişkenli ve Kompleks Değerli Fonksiyon" adlarıyla da ifade edilir ve bu durum bilindiği gibi,

$$V \ :\ \mathbf{A} \ \to\ \mathbf{B}$$
$$z \longmapsto w := V(z)$$

sembolik yazımıyla gösterilir. İlgili bağımlı ve bağımsız değişkenler de vurgulanarak, ilgili fonksiyon "z-bağımsız değişklenli ve w-bağımlı değişkenli kompleks fonksiyon" adıyla da ifade edilir.

2.1.10. Tanım. Verilen $V(z)$ gibi bir kompleks değişkenli fonksiyon herhangi bir z_0 gibi noktanın en az bir komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer,

$$\lim_{\mathrm{z}\to \mathrm{z}_0} \frac{V(z)-V(z_0)}{z-z_0} \tag{2.1}$$

şeklindeki limiti var ise, bu limite $V(z)$ kompleks fonksiyonun $z = z_0$ noktasındaki türevi adı verilir. Bilindiği üzere, ilgili limit de genellikle;

$$V'(z_0) \quad , \quad V'(z)|_{z:=z_0} \quad , \quad \left.\frac{dV}{dz}\right|_{z:=z_0} \quad \text{veya} \quad \frac{dV(z_0)}{dz}$$

şeklindeki gösterimlerinden herhangi biri ile gösterilir (Howie 2003).

Yukarıda verilen türev tanımında, eğer

$$z - z_0 = h \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \to z_0$$

gibi ilişkiler göz önüne alındığında, (2.1)'de verilen limite denk konumda olan:

$$\lim_{h\to 0} \frac{V(z_0+h)-V(z_0)}{h} \tag{2.2}$$

şeklindeki limitle de tanımlanabilmektedir.

Klasik analiz bilgilerinde sıkça kullanıldığı gibi, kompleks değişkenli fonksiyonların türevlerine ilişkin uygulamalarda da kullanılan (2.1) veya (2.2)'deki tanımlar, aynı zamanda verilen $V := V(z)$ gibi bir kompleks fonksiyonunun z (kompleks) bağımsız değişkenine göre türevi için de göz önüne alınır. Bu durumda, ilgili (genel değişkene göre) türeve ilişkin limit:

$$\lim_{\mathrm{h}\to 0} \frac{V(z+h)-V(z)}{h} \tag{2.3}$$

şeklindeki limite dönüşür. Bilindiği gibi, (2.2) (veya (2.3)) ile verilen limit de

$$V'(z) \qquad \text{veya} \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{dz}}$$

şeklindeki notasyonlarıyla ifade edilmektedir.

2.1.11 Tanım. $V(z)$ gibi bir kompleks değişkenli fonksiyonu, eğer z_0 gibi bir noktanın en az bir komşuluğundaki her bir noktada analitik oluyor ise, $V(z)$ kompleks fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir (Wunsch 1994).

2.1.12 Tanım. $V(z)$ gibi bir kompleks değişkenli fonksiyonu, eğer verilen herhangi bir $\mathrm{D} \subset \mathbb{C}$ gibi bir açık kümenin her bir noktasında analitik oluyor ise, $V(z)$ kompleks fonksiyonuna D kümesinde analitik bir fonksiyondur denir (Wunsch 1994).

2.1.13 Tanım. $V(z)$ gibi bir kompleks değişkenli fonksiyonu verilsin. Eğer, bu $V(z)$ fonksiyonu $\mathbb{C}$ kümesinin her bir noktasında türevlenebilir ise, $V(z)$ kompleks fonksiyonuna $\mathbb{C}$ kümesinde analitiktir veya kısaca $V(z)$ tam fonksiyondur denir (Wunsch 1994).

2.1.8 Örnek. Kompleks değişkenli:

$$V(z) = \frac{z}{z^2+1} = \frac{z}{z^2-i^2} = \frac{z}{(z-i)(z+i)}$$

şeklindeki bir fonksiyon;

$$\mathbb{C} \ , \ \{ z \in \mathbb{C} : |z+i| < \delta \ (\delta > 0) \} \text{ ve } \{ z \in \mathbb{C} : 1 < |z-i| < \delta \ (\delta > 0) \}$$

kümelerinde analitik olamaz. Fakat, ilgili kompleks (değişkenli) fonksiyon aşağıda verilen kümlerde analitik olur:

$$\mathbb{C} - \{ \pm i \} \ , \ \{ z \in \mathbb{C} : 1/2 < |z+i| < 1 \} \text{ ve } \{ z \in \mathbb{C} : 1/5 < |z-i| < 1/2 \}$$

2.1.14 Tanım. Verilen herhangi bir $[a,b]$ gibi bir aralıktan $\mathbb{C}$ kümesine tanımlanan fonksiyonlara, $\mathbb{C}$'de bir kompleks eğri adı verilir. Eğer C eğrisi verilen aralıkta tanımlanmış bir eğri ise, $C(a)$'ya C eğrisinin başlangıç noktası ve $C(b)$'ye C eğrisinin bitiş noktası adları verilir (Howie 2003).

2.1.15 Tanım. Verilen bir kompleks eğri kendi kendini sadece başlangıç ve bitiş noktalarında kesiyor ise, ilgili eğriye basit kapalı eğri adı verilir (Howie 2003).

2.1.9 Örnek. $C : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $C(t) = i + re^{it}$ $(r > 0)$ eğrisi $z_0 = i$ merkezli ve $r\ br$ yarıçaplı bir çemberi ifade eden ve kendi kendini sadece $C(0) = C(2\pi) = r + i$ şeklindeki başlangıç ve bitiş noktalarında kesen basit kapalı bir (kompleks) eğridir.

2.1.10 Örnek. $C : [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $C(t) = i + re^{it}$ $(r > 0)$ eğrisi $z_0 = i$ merkezli ve $r\ br$ yarıçaplı bir çemberin $0 \leq \theta \leq \pi$ aralığına denk gelen bir çember parçası, yani bir yay parçasıdır. Ayrıca, verilen bu (kompleks) eğri:

$$C(0) = i + r \neq i - r = C(\pi)$$

şartını sağlayan bir eğri olduğundan dolayı da basit kapalı bir eğri olamaz.

2.1.1 Teorem. Verilen $V(z)$ gibi bir kompleks değişkenli fonksiyon, kompleks düzlemin z_0 gibi bir noktasını kapsayan bir basit kapalı C eğrisinin üzerinde ve bu C eğrisince belirlenen bölgede analitik olsun. O zaman, her $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ doğal sayısı için,

$$V^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{V(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz \tag{2.4}$$

dır (Wunsh 1994).

(2.4)'te geçen kesirsel tipteki fonksiyon göz önüne alındığında, $\mathrm{V}(z_0) \neq 0$ olması gerektiğini özellikle vurgulayalım. Ayrıca, verilen Teorem 2.1.1 teoremi literatürde Cauchy türev teoremi (formülü) olarak bilinir ve kompleks integral teorisinde oldukça önemli roller üstlenir. Özellikle, vurgulanan C eğrisince belirlenen bölgedeki her z kompleks sayısı için, ilgili kompleks fonksiyonunu istenilen mertebeden türevi (2.4) ile verilen formülle belirlenir.

2.1.16 Tanım. $\mathbb{Z}_0^- := \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ olmak üzere, her $t \in \mathbf{R} := \mathbb{R} - \mathbb{Z}_0^-$ sayısı için, t değişkenli (parametreli) ve $\Gamma(t)$ notasyonu ile gösterilen Gamma fonksiyonu:

$$\Gamma(\mathrm{t}) = \int_0^\infty w^{\mathrm{t}-1}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{w}}\, \mathrm{dw} \tag{2.5}$$

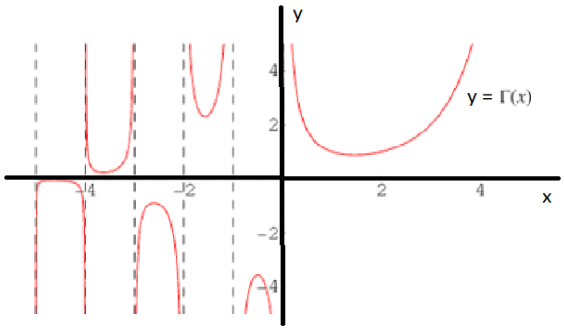
şeklindeki genelleştirilmiş integral ile tanımlanır (Olver vd. 2010).

Klasik analiz bilgileri göz önüne alınarak, (2.5) ile verilen genelleştirilmiş integral için aşağıda verilen hatırlatmaları vurgulayalım:

i) Her $t \in \mathbb{Z}_0^- := \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ tamsayıları için ilgili genelleştirilmiş integral ıraksaktır. Dolayısıyla, $\Gamma(t)$ değerleri söz konusu olamaz.

ii) Her $t \in \mathbf{R}$ değerleri için de ilgili genelleştirilmiş integralin yakınsaktır. Dolayısıyla, $\Gamma(t)$ değerleri söz konusu olur.

iii) (i) ve (ii) bilgilerinin detaylı incelenmesi sonucu ve her $x := t \in \mathbf{R}$ gerçel sayısı için, $y = \ell(x) := \Gamma(x)$ gibi bir fonksiyonuna ait grafik Şekil 2.1 'de verilmiştir:



Şekil 2.1 Gamma fonksiyonunun grafiği

iv) Her $x := v \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için $\Gamma(v+1) = v\Gamma(v) = v!$ dır. Bu sonuçlar, (2.5)'te verilen genelleştirilmiş integrale kısmi integralin uygulanmasıyla kolayca elde edilebilir.

v) (iv) ile verilen bilginin yardımıyla, her $v \in \mathbf{R}$ sayısı için, $\Gamma(v) = \frac{\Gamma(v+1)}{v}$ ilişkisinin olacağı açıktır.

Üstteki açıklamalar ve/veya klasik analiz bilgilerimiz yardımıyla hesaplanabilen ve (2.5) ile verilen genelleştirilmiş integralle belirlenebilen Gamma fonksiyonunun çeşitli sonuçlarından bazıları aşağıdaki gibi sunulmuştur. İlgili temel sonuçları, Şekil 2.1 ile verilen grafik bilgileriyle karşılaştırılabilir.

2.1.11 Örnek.

$\Gamma(18) = 17!$ dır.

2.1.12 Örnek.

$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ dır.

2.1.13 Örnek.

$\Gamma(3/2) = 1/2\ \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2$ dır.

2.1.14 Örnek.

$$\Gamma(-1/2) = \frac{\Gamma(-1/2+1)}{-1/2} = \frac{\Gamma(1/2)}{-1/2} = -2\sqrt{\pi} \text{ dır.}$$

2.1.15 Örnek.

$$\Gamma(5/2\,) = 3/2\,\Gamma(3/2) = 3/2 \cdot 1/2\;\; \Gamma(1/2) = \;3\sqrt{\pi}\,/4$$

dır.

2.1.16 Örnek.

$$\Gamma(-5/2) = \frac{\Gamma(-5/2+1)}{-5/2} = -\frac{2}{5}\frac{\Gamma(-3/2+1)}{-3/2} = \frac{4}{15}\;\Gamma(-1/2) = -\frac{8}{15}\;\sqrt{\pi}$$

dır.

2.1.17 Örnek. Her $v \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için,

$$\Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2v-1}{2}\right)\left(\frac{2v-3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\sqrt{\pi}$$

dır.

2.1.17 Tanım. Her $r, s \in \mathbf{R}$ reel sayıları için, r ve s parametreli ve $\mathbf{B}(r,s)$ notasyonu ile gösterilen Beta fonksiyonu:

$$\mathbf{B}(r,s) = \int_0^1 \mathrm{t}^{\mathrm{r}-1}(1-\mathrm{t})^{s-1}\,\mathrm{dt} \tag{2.6}$$

şeklindeki genelleştirilmiş integral ile tanımlanır (Olver vd. 2010).

Yukarıda, yani (2.6) ile verilen (belirli) integrale odaklanıldığında ve ilgili integral sınırları göz önüne alındığında, integralde geçen fonksiyonun bir genelleştirilmiş integral formunda olduğu kolayca görülebilir. Yine, klasik analiz bilgileri yardımıyla, (2.6) ile verilen genelleştirilmiş integralin yakınsaklık durumları da açıkça görülebilir. Bu bağlamda, aşağıdaki genel sonuçlar ve örneklendirmeler sunulabilir. Bunlar için, (2.7) ile verilen Beta fonksiyonu ile birlikte (2.5) ile verilen Gamma fonksiyonunu ve ilgili örnekler kolaylık sağlayacaktır. Ayrıca, detaylı bilgiler için, Olver vd. (2010) eseri hem teorik hem de çeşitli uygulamalar bakımından oldukça kapsamlı bir kaynaktır.

2.1.2 Teorem. Her $r, s \in \mathbf{R}$ için,

$$\mathbf{B}(r,s) = \frac{\Gamma(\mathrm{r})\,\Gamma(\mathrm{s})}{\Gamma(\mathrm{r+s})} \tag{2.7}$$

sağlanır.

Özellikle; $r, s \in \mathbb{N}$ olduğunda da,

$$\mathbf{B}(r,s) = \frac{\Gamma(\mathrm{r})\,\Gamma(\mathrm{s})}{\Gamma(\mathrm{r+s})} = \frac{(r-1)!\,(s-1)!}{(r+s-1)!}$$

olur (Olver vd. 2010).

2.1.18 Örnek.

$\mathbf{B}(3,7) = \frac{1}{28}$ dır.

2.1.19 Örnek.

$\mathbf{B}(1/2,1) = \frac{\Gamma(1/2)}{1/2\,\Gamma(1/2)} = 2$ dır.

2.1.20 Örnek.

$\mathbf{B}(1,-1/2) = \frac{\Gamma(-1/2)}{-1/2\ \Gamma(-1/2)} = -2$ dır.

2.1.21 Örnek.

$\mathbf{B}(2,1/3\ ) = \frac{9}{2}$ dır.

Bilindiği gibi, elementer (temel) fonksiyonların veya bunlar yardımıyla oluşturulan çeşitli fonksiyonların integralleri veya çeşitli integral dönüşümleri altındaki hesaplamalarını belirlemek her zaman kolay bir iş değildir. Bu vurgulanan durumlar, en basitten, (2.5) veya (2.7) ile verilen özel tanımlamalar kapsamında göz önüne alınırsa, ilgili her bir integralin (veya dönüşümün) varlığı bilinse de ilgili fonksiyonlar altındaki hesaplamalar kolaylıkla gerçekleştirilmez. Örneğin;

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx\,,\quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\,dx\,,\quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,,\quad \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,,\cdots$$

gibi genelleştirilmiş integrallerin yakınsaklığı analiz derslerinden biliyoruz ve doğal olarak Beta fonksiyonunu kullanmadan da ilgili integrallerin sonuçlarını elementer hesaplamalar yaparak belirleyebilmekteyiz ama

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx\,,\quad \int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx\,,\quad \int_0^1 \frac{x-x^2}{\sqrt[3]{1-x^3}}\,dx\,,\quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^7}}\,dx\,,\cdots$$

gibi genelleştirilmiş integrallerin hesaplamaları elementer yollarla hiç de kolay değildir ama (2.6) veya (2.7) ile verilen Beta fonksiyonun yardımıyla hepsinin çözümü oldukça kolaydır.

Aynı zamanda;

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx\,,\quad \int_0^1 \frac{xe^{-x}}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx\,,\quad \int_0^1 \frac{Cos(x)}{\sqrt[3]{1-x^3}}\,dx\,,\quad \int_0^1 \frac{Sinh(x)}{\sqrt[5]{1-x^7}}\,dx\,,\cdots$$

şeklinde verilen genelleştirilmiş integrallerinin klasik analiz bilgilerimizle ne de Beta fonksiyonu yardımıyla (elementer) çözümleri mümkün değildir. Fakat, hemen üstte verilen integrallerde geçen üstel, trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonların bilindik seri açılımları işleri oldukça kolaylaştıracaktır.

Yukarıda sunulan bilgiler ışığında, özellikle, literatürde sıkça karşılaşılan; Mittag-Leffler fonksiyonları, Hipergeometrik fonksiyonları gibi düzgün yakınsaklığı bilinen malum fonksiyon serilerinin "terim terime" integrallenebilmesinin kolaylılığı çoğu zaman başvurulan yollardan biridir. Kesirsel mertebeden hesaplamalar ile ilgili olan tez araştırmamız açısından da, birim diskte, yani $\mathbb{U}$'da analitik olan fonksiyonların seri açılımlarına ilişkin kuvvet serileri ile olan ilişkiler oldukça kolaylık sağlayacaktır. Bu açıdan, aşağıdaki temel bilgilere ve onlara ilişkin bazı uygulamalara zorunlu ihtiyaç duyulmuştur.

2.1.18 Tanım. Verilen $V \coloneqq V(\mathrm{z})$ gibi bir kompleks değişkenli fonksiyonu $z = z_0$ gibi bir noktada analitik olsun. Bu durumda, aşağıdaki gibi verilen:

$$V(z) = V(z_0) + V'(z_0)(z - z_0) + \frac{V''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots + \frac{V^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^2 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \qquad (2.8)$$

şeklindeki kompleks kuvvet serisine, $V(\mathrm{z})$ kompleks fonksiyonunun $\mathrm{z} = \mathrm{z}_0$ noktasındaki Taylor seri açılımı adı verilir.

Özellikle, (2.8)'de verilen kuvvet seri açılımında $z_0 = 0$ alınarak elde edilen:

$$V(z) = V(0) + V'(0)z + \frac{V'(0)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{V^{(n)}(0)}{n!}z^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V^{(n)}(0)}{n!} z^n \qquad (2.9)$$

şeklindeki kuvvet seri açılımına da $V(z)$ kompleks (z-bağımsız değişkenli) fonksiyonunun $z_0 = 0$ noktasındaki Taylor seri açılımı veya kısaca MacLaurin seri açılımı adı verilir. Bilindiği gibi,

$$V^{(n)}(z) = \frac{d^n V}{dz^n} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

dır (Howie 2003).

Tanım 2.1.11 ve Tanım 2.1.8 (veya Tanım 2.1.9) bilgilerinin ışığında, aşağıdaki gibi bir seri açılımların oluşturduğu bir fonksiyonlar ailesi her zaman söz konusu olacaktır ve böylesi bir aile araştırmamız kapsamı açısından oldukça önemli rol oynayacaktır.

2.1.19 Tanım. $\mathbf{A}_r(n)$ ailesini, **U** birim diskinde analitik olan ve

$$\left\{ V(z) \coloneqq L_r^n(z) : \; L_r^n(z) = c_n z^n + c_{n+r} z^{n+r} + c_{n+r+1} z^{n+r+1} + \cdots \right\} \qquad (2.10)$$

şeklindeki seri açılımına sahip olan fonksiyonların oluşturduğu fonksiyonlar ailesi olarak tanımlayalım. Elbette ki, yukarıda kümede geçen tüm parametreler veya katsayılar:

$$r \in \mathbb{N} \;\; , \;\; n \in \mathbb{N} \;\; , \;\; c_n \neq 0 \;\; , \;\; c_{n+r} \in \mathbb{C} \;\; \text{and} \;\; z \in \mathbf{U} \qquad (2.11)$$

özellikte olan parametrelerdir.

Kompleks fonksiyonlar teorisinde, yukarıda geçen parametreler veya katsayılar bulundukları çalışma alanlarına göre özel anlamlar belirlerler. $V(z)$, yani $L_r^n(z)$ fonksiyonları **U** açık kümesinde analitik olduğundan dolayı; eğer ilgili seride geçen tüm katsayılar sıfırdan farklı ise $\mathbf{A}_r(n)$ ailesindeki fonksiyonlar literatürde genel ifade ile "*n*-değerli analitik fonksiyonlar (*n*-valenly analytic functions) olarak" anılsa da farklı özel sıfatlarla da anılan ve üzerinde hala aktif olarak çalışılan fonksiyonlardır.

Aynı zamanda, eğer ilgili tüm katsayıların hepsi pozitif ise ilgili fonksiyonlar "Kompleks Katsayılı (*n*-değerli) Analitik Fonksiyonlar", ilgili katsayıların tümü pozitif ise "Pozitif Katsayılı (*n*-değerli) Analitik Fonksiyonlar" ve ilgili katsayıların tümü negatif ise "Negatif Katsayılı (*n*-değerli) Analitik Fonksiyonlar" anılırlar. Bu kapsamda, belirtilen bu özel sıfattaki analitik fonksiyonların oluşturdukları fonksiyon aileleri de, sırasıyla; "Kompleks Katsayılı (*n*-değerli) Analitik Fonksiyonlar Ailesi (Sınıfı)", "Pozitif Katsayılı (*n*-değerli) Analitik Fonksiyonlar Ailesi (Sınıfı)" ve "Negatif Katsayılı (*n*-değerli) Analitik Fonksiyonlar Ailesi (Sınıfı)" adlarıyla bilinir.

Özellikle, ilgili fonksiyonlar ailesinde eğer $n := 1 \; ve \; c_n := 1$ seçimleri söz konusu olursa, elde edilen fonksiyonlar "Normalize Edilmiş (Analitik) Fonksiyonlar" ve doğal olarak, bu gibi (analitik) fonksiyonların oluşturduğu fonksiyonlar ailesi de "Normalize Edilmiş (Analitik) Fonksiyonlar Ailesi" olarak bilinir. Hem bu açıdan hem de (2.10)'daki seri açılımında geçen ve varlığı da her zaman söz konusu olan o ilk katsayı konumunda olan $c_n \neq 0$ katsayısının kullanılması ve bunun alanla ilgili çalışmalara katabileceği önemli bir katkı olmadığından, ilgili baş katsayının seçimi genellikle

$$c_n \coloneqq c \in \mathbb{C}^* \coloneqq \mathbb{C} - \{0\} \quad \text{veya} \quad c_n := 1$$

halleri ile göz önüne alınır. Yani, (2.11) ile sunulan koşullar altında, araştırmacılar, (2.10)'daki gibi tanımlanmış olan $\mathbf{A}_{\mathrm{r}}(n)$ fonksiyonlar ailesinin:

$$\left\{ \mathrm{V}(z) \coloneqq \mathrm{L}_r^n(z) \; : \; \mathrm{L}_r^n(z) = cz^n + c_{n+r}z^{n+r} + c_{n+r+1}z^{n+r+1} + \cdots \; (z \in \mathbf{U}) \right\},$$

$$\left\{ \mathrm{V}(z) \coloneqq \mathrm{L}_r^n(z) \; : \; \mathrm{L}_r^n(z) = z^n + c_{n+r+1}z^{n+r+1} + c_{n+r+2}z^{n+r+2} + \cdots \; (z \in \mathbf{U}) \right\}$$

ve

$$\left\{ \mathrm{V}(z) \coloneqq \mathrm{L}_1^n(z) : \; \mathrm{L}_1^n(z) = z + c_{n+1}z^{n+1} + c_{n+2}z^{n+2} + \cdots \; (z \in \mathbf{U}) \right\}$$

şeklindeki alt kümleri konumunda olan analitik fonksiyon aileleri üzerine olan araştırmalar genellikle tercih edilir.

Yukarıda verilen fonksiyonlar ailelerinin hem zenginliği görmek hem de daha sonraki özgün sonuçlarımızda kullanabilmek adına, aşağıdaki gibi oluşturulmuş bazı kompleks elementer bazdaki örnek serileri sunmak yararlı olacaktır.

2.1.22 Örnek. $\mathrm{V}(z) = e^z$ kompleks (değişkenli) üstel fonksiyonu $\mathbb{C}$ kümesinde analitik analitiktir. Dolayısıyla, bu tam fonksiyonunun her mertebeden türevi vardır ve her $n \in \mathbb{N}_0$ için de,

$$\frac{d^n}{dz^n}\big(\mathrm{V}(z)\big) = e^z \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^n}{dz^n}\big(\mathrm{V}(z)\big)\Big|_{z:=0} = 1$$

dır.

O zaman, Tanım 2.1.18 ile sunulan (2.9)'daki gibi forma sahip olan ilgili kompleks seri açılımı, yani MacLaurin seri açılımı:

$$V(z) \coloneqq e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}\, z^2 + \frac{1}{3!}\, z^3 + \frac{1}{4!}\, z^4 + \cdots + \frac{1}{n!}\, z^n + \cdots \quad (\mathrm{z}\in\mathbb{U}) \qquad (2.12)$$

şeklindeki gibi bir kuvvet serisidir.

2.1.23 Örnek. $\mathrm{V}(z) = Sin(z)$ kompleks (değişkenli) fonksiyonu $\mathbb{C}$ kümesinde analitik bir fonksiyondur olup, her mertebeden türevi yine mevcuttur. Dolayısıyla, her $n \in \mathbb{N}_0$ sayısı için;

$$\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}\big(\mathrm{V}(z)\big) = (-1)^n Sin(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^{2n}}{dz^{2n}}\big(\mathrm{V}(z)\big)\Big|_{z:=0} = 0$$

ve

$$\frac{d^{2n+1}}{dz^{2n+1}}\big(\mathrm{V}(z)\big) = (-1)^n Cosz \quad \Rightarrow \quad \frac{d^{2n+1}}{dz^{2n+1}}\big(\mathrm{V}(z)\big)\Big|_{z:=0} = (-1)^n$$

dır.

O halde, Tanım 2.1.18 ile verilen (2.9)'daki gibi kompleks seri açılım formu, yani MacLaurin seri açılım;

$$V(z) \coloneqq Sin(z) = z - \frac{1}{3!}\, z^3 + \frac{1}{5!}\, z^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1} + \cdots \quad (z \in \mathbb{U}) \qquad (2.13)$$

şeklindeki gibi bir kuvvet serisi şeklinde olacaktır.

2.1.24 Örnek. $\mathrm{V}(z) = Cos(z)$ kompleks (değişkenli) fonksiyonu da yine $\mathbb{C}$ kümesinde analitik bir fonksiyondur. Doğal olarak, bu fonksiyonun her mertebeden türevi vardır ve yine her $n \in \mathbb{N}_0$ için;

$$\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}\big(V(z)\big) = (-1)^n Cos(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^{2n}}{dz^{2n}}\big(V(z)\big)\Big|_{z:=0} = (-1)^n$$

ve

$$\frac{d^{2n+1}}{dz^{2n+1}}\big(V(z)\big) = (-1)^n Sin(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^{2n+1}}{dz^{2n+1}}\big(V(z)\big)\Big|_{z:=0} = 0$$

sonuçları elde edilir. Bu sonuçlar, Tanım 2.1.14 ile tanıtılan (2.9)'daki gibi kompleks seri için dikkate alındığında, $V(z) = Cos(z)$ gibi bir analitik fonksiyonun MacLaurin seri açılımı da,

$$V(z) \coloneqq Cos(z) = 1 - \frac{1}{2!}\, z^2 + \frac{1}{4!}\, z^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, z^{2n} + \cdots \quad (z \in \mathbb{U}) \qquad (2.14)$$

şeklindeki gibi bir kompleks kuvvet serisi olacaktır.

2.1.25 Örnek. $\mathrm{V}(z) = (1-z)^{-1}$ şeklideki kompleks (değişkenli) fonksiyon **U** diskinde analitik bir fonksiyondur ve her $n \in \mathbb{N}_0$ için de

$$\frac{d^n}{dz^n}\big(V(z)\big) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^n}{dz^n}\big(V(z)\big)\Big|_{z_0:=0} = n!$$

dır.

Dolayısıyla, üstte verilen katsayılar Tanım 2.1.18 ile verilen (2.9)'daki kompleks seri açılımında kullanılırsa,

$$V(z) \coloneqq \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots + z^n + \cdots \quad (z \in \mathbb{U}) \qquad (2.15)$$

şeklindeki gibi bir MacLaurin seri açılımına kolayca varılır.

(2.12) ile (2.15) arasında oluşturulan bazı kompleks elementer tipteki fonksiyonların seri açılımlarından yola çıkarak, $\mathbf{A}_r(n)$ fonksiyonlar ailesinde (veya bu ailenin özel alt ailelerinde) bulunan aşırı sayıda kompleks fonksiyonların seri açılımları belirlenebilir. Bu mantıkla oluşturulacak olan bu serilerden yola çıkarak, tez çalışmamız kapsamına giren aşırı sayıda elementer hesaplamalar da gerçekleştirebilir. Aşağıda sadece birkaç tane elementer tipteki fonksiyonlara ilişkin seri açılımlar oluşturulmuş olup, diğerleri de ilgilenen araştırmacılara bırakılmıştır.

2.1.26 Örnek. $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere, Örnek 2.1.22 ile verilen (2.12)'deki seri açılımı göz önüne alınırsa,

$$z + \frac{1}{2!}\, z^2 + \frac{1}{3!}\, z^3 + \frac{1}{4!}\, z^4 + \cdots + \frac{1}{n!}\, z^n + \cdots$$

şeklindeki gibi bir kompleks kuvvet serisinin $\mathbf{A}_1(1)$ fonksiyonlar sınıfında olduğu ve bu serinin de

$$V(z) = e^z - 1$$

şeklindeki gibi bir analitik fonksiyonunu ifade ettiğini biliyoruz.

2.1.27 Örnek. $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere, Örnek 2.1.25 ile sunulmuş olan (2.15)'teki seri açılımı göz önüne alındığında da,

$$z - z^2 + z^3 - z^4 + z^5 + \cdots + (-1)^n\, z^{n+1} + \cdots$$

şeklindeki gibi bir kompleks kuvvet serisinin yine $\mathbf{A}_1(1)$ fonksiyonlar sınıfında olduğu ve bu fonksiyon serinin de

$$V(z) = \frac{z}{1+z}$$

şeklindeki gibi bir kesirsel formdaki kompleks değişkenli fonksiyonunu ifade ettiğini de yine biliyoruz.

2.2 Kompleks Düzlemde Kesirsel Mertebeden Türev Operatörü

2.2.1 Tanım. Herhangi bir $V \coloneqq V(z)$ gibi kompleks değişkenli fonksiyonu orjini içine alan herhangi bir basit kapalı bir bölgede analitik olsun. O zaman, $\mathrm{V}(z)$ fonksiyonunun λ - mertebeden türevi, genellikle;

$$\mathbf{D}_z^{\lambda}\,[V] \quad , \quad \mathbf{D}_z^{\lambda}\,[V(z)] \quad \text{veya} \quad \mathbf{D}_z^{\lambda}\,[V](z)$$

şeklindeki sembolik gösterimlerinden herhangi biri ile gösterilir ve

$$\mathbf{D}_z^{\lambda}\,[V] = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}\frac{d}{dz}\left(\int_0^z \frac{V(t)}{(z-t)^{\lambda}}\,dt\right) \quad (0 \le \lambda < 1) \tag{2.16}$$

şeklinde tanımlanır (Srivastava and Owa 1989).

Özellikle, burada şunu vurgulamakta fayda vardır: Kompleks üstel fonksiyonlarının çok değerli fonksiyonlar olduğu göz önüne alındığında, (2.16) ile verilen integral için, eğer $z - t > 0$ ise $log\,(z-t)$ ifadesi gerçel alınarak ilgili integraldeki $(z-t)^{-\lambda}$ ifadesinin katlılığı kaldırılır (Srivastava and Owa 1989).

2.2.1 Örnek. Tanım 2.2.1 ile verilen (2.16)'daki kesirsel merteben türeve ilişkin integral, $V \coloneqq V(z) = w \;\; (w \neq 0)$ gibi bir kompleks değişkenli fonksiyonu için göz önüne alınırsa, istenen λ - mertebeden kesirsel türev:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_z^{\lambda}\,[\mathrm{V}] &= \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}\frac{d}{dz}\left(\int_0^z \frac{w}{(z-t)^{\lambda}}\,dt\right)\\ &= \frac{w}{\Gamma(1-\lambda)}\frac{d}{dz}\left(\int_0^z \frac{1}{(z-t)^{\lambda}}\,dt\right)\\ &= \frac{w}{\Gamma(1-\lambda)}\frac{d}{dz}\left(\int_0^z (z-t)^{-\lambda}\,dt\right) \quad (0 \le \lambda < 1)\end{aligned} \tag{2.17}$$

şeklindeki integral ilişkilerinin bazı elementer işlemleri sonucu olarak kolayca elde edilir. Burada, eğer

$$vz = z - t \quad \text{ile} \quad zdv = -dt \tag{2.18}$$

şeklindeki gibi değişken değişimi ile diferansiyel değişimi (2.17)'de verilen *t* bağımsız değişkenli integralde kullanılırsa:

$$\mathbf{D}_z^{\lambda}[\mathrm{V}] = \frac{w}{\Gamma(1-\lambda)}\,\frac{d}{dz}\int_0^z (z-t)^{-\lambda}\,dt$$

$$= \frac{w}{\Gamma(1-\lambda)}\,\frac{d}{dz}\left(-z^{1-\lambda}\int_1^0 v^{-\lambda}\,dv\right)$$

$$= \frac{w}{\Gamma(1-\lambda)}\,\frac{d}{dz}\left(z^{1-\lambda}\int_0^1 v^{-\lambda}\,dv\right)$$

$$= \frac{w}{\Gamma(1-\lambda)}\,\frac{d}{dz}\left(z^{1-\lambda}\,\mathbf{B}(1-\lambda,1)\right)$$

$$= w\,\frac{1-\lambda}{\Gamma(1-\lambda)}\,\frac{\Gamma(1-\lambda)\,\Gamma(1)}{\Gamma(1-\lambda+1)}\,z^{-\lambda}$$

$$= w\,\frac{1-\lambda}{\Gamma(2-\lambda)}\,z^{-\lambda}$$

$$= \frac{w}{\Gamma(1-\lambda)}z^{-\lambda} \quad (0 \le \lambda < 1)$$

sonucu elde edilir.

O halde, sıfırdan farklı olan herhangi bir $V(z) = w$ kompleks sabit fonksiyonunun λ – mertebeden kesirsel türevi:

$$\mathbf{D}_z^{\lambda}[w] = \frac{w}{\Gamma(1-\lambda)}z^{-\lambda} \quad (0 \le \lambda < 1) \tag{2.19}$$

şeklinde olur.

Örnek 2.2.1'in bazı özel sonuçları olarak, (2.19)'da elde edilen sabit fonksiyonunun kesirsel mertebeden türevi yardımıyla, ilgili kompleks sabit fonksiyonun aşağıdaki gibi bazı özel sonuçları da kolayca oluşturulabilir.

2.2.2 Örnek. Örnek 2.2.1 ile elde edilen (2.19)'da $\lambda = 1/2$ seçimi dikkate alındığında, sıfıra özdeş olmayan $V \coloneqq V(z) = w$ gibi kompleks sabit fonksiyonunun $\lambda = 1/2$ - mertebeden kesirsel türevi de:

$$\mathbf{D}_z^{1/2}[w] = \frac{\mathrm{w}}{\Gamma(1/2)}\,z^{-1/2} = \frac{\mathrm{w}}{\sqrt{\pi z}}$$

şeklinde olur. Doğal olarak, $w \coloneqq i$ gibi bir seçim için de, $V(z) = i$ kompleks fonksiyonunun $\lambda = 1/2$ - mertebeden kesirsel türevi de:

$$\mathbf{D}_z^{1/2}[i] = \frac{i}{\boldsymbol{\Gamma}(\,1/2\,)}\; z^{-1/2} \;= \frac{i}{\sqrt{\boldsymbol{\pi z}}}$$

şeklinde olacaktır.

2.2.3 Örnek. $V \coloneqq V(z) = z^{\tau}\ (\tau > -1)$ şeklindeki gibi bir analitik fonksiyonunun kesirsel türevini belirleyelim. Bunun için de, yine Tanım 2.2.1 ile verilen (2.16)'daki gibi oluşturulan integral için $V(z)$ kompleks kuvvet fonksiyonunun göz önüne alınması durumunda;

$$\mathbf{D}_z^{\lambda}[V] = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}\ \frac{d}{dz}\ \left(\int_0^z \frac{V(t)}{(z-t)^{\lambda}}\ dt\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma 1-(\lambda)}\ \frac{d}{dz}\ \left(\int_0^z \frac{t^{\tau}}{(z-t)^{\lambda}}\ dt\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}\ \frac{d}{dz}\ \left(\int_0^z\ t^{\tau}(z-t)^{-\lambda}\ dt\right) \qquad (2.20)$$

şeklindeki denk ilişkiler kolayca elde edilir. Eğer, (2.18)'de verilen değişken ve diferansiyel değişimleri (2.20)'de kullanılır ve ardından da (2.6) ve (2.7)'de verilen Beta ve Gamma fonksiyonları arasındaki bağıntı kullanılırsa:

$$\mathbf{D}_z^{\lambda}[\mathrm{V}] = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}\ \frac{d}{dz}\ \left(\int_0^z t^{\tau}(z-t)^{-\lambda}\ dt\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}\ \frac{d}{dz}\left(-\ z^{1+\tau-\lambda}\int_1^0 v^{-\lambda}(1-\ v)^{\tau}\ dv\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}\ \frac{d}{dz}\left(\ z^{1+\tau-\lambda}\int_0^1 v^{-\lambda}(1-\ v)^{\tau}\ dv\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}\ \frac{d}{dz}\ \left(\ z^{1+\tau-\lambda}\ \mathbf{B}\ (1-\lambda, \tau+1)\right)$$

$$= \frac{1-\lambda+\tau}{\Gamma(1-\lambda)}\ \ \frac{\boldsymbol{\Gamma}(1-\lambda)\,\boldsymbol{\Gamma}(\tau+1)}{\boldsymbol{\Gamma}(2-\lambda+\tau)}\ z^{\tau-\lambda}$$

$$= \frac{\boldsymbol{\Gamma}(\tau+1)}{\boldsymbol{\Gamma}(1-\lambda+\tau)}\ z^{\tau-\lambda} \qquad (0 \le \lambda < 1)$$

şeklindeki sonuç elde edilir.

O halde, $V(z) = z^{\tau}\ (\tau > -1)$ gibi bir kompleks fonksiyonun λ - mertebeden kesirsel türevi:

$$\mathbf{D}_z^{\lambda}[z^{\tau}] = \frac{\Gamma(\tau+1)}{\Gamma(1-\lambda+\tau)}\, z^{\tau-\lambda} \quad (0 \le \lambda < 1) \tag{2.21}$$

şeklinde olacaktır.

Örnek 2.2.3'ün hem bazı özel sonuçları hem de bazı genel çıkarımları olarak, aşağıda verilen örnekler ve sonuçlar, (2.21)'de verilen kesirsel mertebeden hesaplamada geçen parametrelerin istenilen amaca göre önce belirlenmesi ve ardından da ilgili örnekte göz önüne alınması sonucu verilenler kolayca görülür.

2.2.4 Örnek. Örnek 2.2.1'de geçen parametreler göz önüne alındığında, aşağıdaki özel sonuçlar kolayca elde edilebilir.

i. $\mathbf{D}_z^{\lambda}[z] = \frac{1}{\Gamma(2-\lambda)}\, z^{1-\lambda} \quad (0 \le \lambda < 1)$

ii. $\mathbf{D}_z^{1/2}[z^{\tau}] = \frac{\Gamma(\tau+1)}{\Gamma(1/2+\tau)}\, z^{\tau-1/2} \quad (\tau > -1/2)$

iii. $\mathbf{D}_z^{1/2}[z] = \frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{\pi}}$

iv. $\mathbf{D}_z^{1/3}[z] = \frac{\sqrt[3]{z^2}}{\Gamma(5/3)}$

dır.

2.2.1 Sonuç. $\tau > -1,\ 0 \le \lambda < 1$ ve $z \in \mathbf{U}$ olmak üzere, $V(z) = z^{\tau}$ kompleks değişkenli fonksiyonu için;

i. $\mathbf{D}_z^{0}[V(z)] = V(z)$

ii. $\lim_{\lambda \to 1^-} \mathbf{D}_z^{\lambda}[V(z)] = V'(z)$

iii. $\lim_{\lambda \to 0^+} \mathrm{z}^{\lambda}\mathbf{D}_z^{\lambda}[V(z)] = V(z)$

iv. $\lim_{\lambda \to 1^-} \mathrm{z}^{\lambda}\mathbf{D}_z^{\lambda}[V(z)] = zV'(z)$

dır.

Tanım 2.2.1 ile verilen (2.16)'daki integral göz önüne alındığında, kesirsel mertebeden türev operatörünün "Skalarla Çarpma" ve "Lineerlik" özelliklerini sağladığı kolayca ispatlanabilir.

2.2.1 Teorem. $V(z)$ ve $W(z)$ kompleks (değişkenli) fonksiyonları Tanım 2.2.1'de vurgulanan şartları sağlasın ve $0 \leq \lambda < 1$ olsun. Her C_1 ve C_2 kompleks skalarları için, aşağıda verilenler:

i. $\mathbf{D}_z^{\lambda}\,[C_1 V(z)] = C_1 \mathbf{D}_z^{\lambda}\,[V(z)]$

ii. $\mathbf{D}_z^{\lambda}\,[C_1 V(z) + C_2 W(z)] = C_1 \mathbf{D}_z^{\lambda}\,[V(z)] + C_2 \mathbf{D}_z^{\lambda}\,[W(z)]$

doğrudur.

Teorem 2.2.1 yardımıyla ve Örnek 2.2.1 - Örnek 2.2.4 arasında verilen özel sonuçlar kullanılarak aşağıdaki hesaplamalara kolayca varılabilir.

2.2.5 Örnek.

i. $\mathbf{D}_z^{\lambda}\left[z + (1-i)\sqrt{z}\right] = \mathbf{D}_z^{\lambda}\,[z] + (1-i)\mathbf{D}_z^{\lambda}\left[\sqrt{z}\right]$

$$= \left(\frac{z}{\Gamma(2-\lambda)} + (1-i)\frac{\Gamma(3/2)\sqrt{z}}{\Gamma(3/2-\lambda)}\right) z^{-\lambda} \quad (0 \leq \lambda < 1)$$

ii. $\mathbf{D}_z^{1/2}\,[iz^{\tau} + 2z] = i\,\mathbf{D}_z^{1/2}[z^{\tau}] + 2\mathbf{D}_z^{1/2}[z]$

$$= \frac{i\,\Gamma(\tau+1)}{\Gamma(1/2+\tau)}\, z^{\tau-1/2} + \frac{4\sqrt{z}}{\sqrt{\pi}} \quad (\tau > -1/2)$$

iii. $\mathbf{D}_z^{1/2}[2z^2 - 3i] = 2\mathbf{D}_z^{1/2}[z^2] - 3\mathbf{D}_z^{1/2}[i]$

$$= \frac{2(3i+2z^2)\sqrt{z}}{3\sqrt{\pi}}$$

iv. $\mathbf{D}_z^{1/3}[z^3 - z] = \mathbf{D}_z^{1/3}[z^3] - \mathbf{D}_z^{1/3}[z]$

$$= \left(\frac{6}{\Gamma(11/3)} z^2 - \frac{1}{\Gamma(5/3)}\right) \sqrt[3]{z^2}$$

dır.

Dikkat edilirse, belirtilen koşullar altında, Tanım 2.2.1 ile verilen $V \coloneqq V(z)$ gibi bir kompleks fonksiyonun $\lambda\,(0 \leq \lambda < 1)$ mertebeden türevine ilişkin tanımlama ve ilgili operatörü verilmişti. İlgili tanımda geçen Gamma (Euler) fonksiyonunun oldukça kullanışlı işlevi ile Şekil 2.1'de verilen Gamma fonksiyonunun grafiği göz önüne alındığında, ilgili kesirsel türevin mertebesi ve doğal olarak ilgili operatörün kesirsel

mertebesi de $0 \leq \lambda < 1$ aralığının dışına çıkarılması mümkün olmuştur. Bununla ilgili bazı temel referanslar giriş bölümünde vurgulanmış olsa da, kaynaklar kısmında verilen Owa (1978), Kilbas vd. (2006) ve Srivastava (2020) eserleri oldukça geniş bilgiler sunmaktadır.

2.2.2 Tanım. Tanım 2.2.1'de belirtilen koşullar altında ve her bir $0 \leq \lambda < 1$ reel sayısı ve her $n \in \mathbb{N}_0$ doğal sayısı için, verilen $V \coloneqq V(z)$ gibi kompleks değişkenli fonksiyonun $n + \lambda$ - mertebeden kesirsel türevi yine benzeri notasyonlar yardımıyla;

$$\mathbf{D}_z^{n+\lambda}[V] \quad , \quad \mathbf{D}_z^{n+\lambda}[V(z)] \quad \text{veya} \quad \mathbf{D}_z^{n+\lambda}[V](z)$$

şeklinde gösterimlerden herhangi biri ile ifade edilir ve

$$\mathbf{D}_z^{n+\lambda}[V] = \frac{d^n}{dz^n}\left(\mathbf{D}_z^{\lambda}[V]\right) \tag{2.22}$$

şeklinde tanımlanır (Owa 1978, Srivastava and Owa 1989). .

2.2.6 Örnek. $V \coloneqq V(z) = w$ sabit fonksiyonunun λ $(0 \leq \lambda < 1)$ mertebeden kesirsel türevinin:

$$\mathbf{D}_z^{\lambda}[w] = \frac{w}{\Gamma(1-\lambda)} z^{-\lambda} \quad (0 \leq \lambda < 1; z \in \mathbb{U} - \{0\})$$

olduğunu biliyoruz. Bu üstteki ifadenin her iki tarafı z kompleks değişkenine göre türevi alınırsa, doğal olarak, (2.22) gereği;

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_z^{1+\lambda}[w] &\equiv \frac{d^1}{dz^1}\left(\mathbf{D}_z^{\lambda}[w]\right) \\
&= \frac{d^1}{dz^1}\left(\frac{w}{\Gamma(1-\lambda)} z^{-\lambda}\right) \\
&= \frac{w\,(-\lambda)}{\Gamma(1-\lambda)} z^{-\lambda-1} \\
&= \frac{w\,(-\lambda)}{(-\lambda)\Gamma(-\lambda)} z^{-\lambda-1} \\
&= \frac{w}{\Gamma(-\lambda)} z^{-\lambda-1}
\end{aligned}$$

sonucu kolayca elde edilir.

2.2.7 Örnek. $V \coloneqq V(z) = z^{\tau}$ $(\tau > -1)$ kompleks değişkenli kuvvet fonksiyonun λ $(0 \leq \lambda < 1)$ mertebeden kesirsel türevinin:

$$\mathbf{D}_z^{\lambda}[z^{\tau}] = \frac{\Gamma(\tau+1)}{\mathbf{\Gamma}(1-\lambda+\tau)} z^{\tau-\lambda} \quad (0 \leq \lambda < 1)$$

şeklinde olduğunu biliyoruz. Yine, bu üstteki eşitliği her iki tarafı z kompleks değişkenine türevi alınırsa, aşağıdaki sonuçlara:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_z^{1+\lambda}[z^{\tau}] &\equiv \frac{d^1}{dz^1}\left(\mathbf{D}_z^{\lambda}[z^{\tau}]\right) \\
&= \frac{d^1}{dz^1}\left(\frac{\Gamma(\tau+1)}{\mathbf{\Gamma}(1-\lambda+\tau)} z^{\tau-\lambda}\right) \\
&= \frac{(\tau-\lambda)\Gamma(\tau+1)}{\mathbf{\Gamma}(1-\lambda+\tau)} z^{\tau-\lambda-1} \\
&= \frac{\Gamma(\tau+1)}{\mathbf{\Gamma}(\tau-\lambda)}
\end{aligned}$$

ve doğal olarak

$$z^{1+\lambda-\tau}\, \mathbf{D}_z^{1+\lambda}[z^{\tau}] = \frac{\Gamma(\tau+1)}{\mathbf{\Gamma}(\tau-\lambda)}$$

kolayca varılır.

Tanım 2.2.2, Örnek 2.2.3 ve Örnek 2.2.7 örnekleri için göz önüne alındığında, aşağıda verilen denklemler kolayca doğrulanabilir.

2.2.8 Örnek. $V \coloneqq V(z) = z^{\tau}$ $(\tau > -1)$ fonksiyonu aşağıda verilen kesirsel mertebeden (türev) denklemlerinin bir çözümüdür:

i. $z^{1+\lambda-\tau}\, \mathbf{D}_z^{1+\lambda}[V] + (\lambda - \tau)\, z^{\lambda-\tau}\, \mathbf{D}_z^{\lambda}[V] = 0$

ii. $\Gamma(\tau - \lambda)\, z^{1+\lambda-\tau}\, \mathbf{D}_z^{1+\lambda}[V] + \Gamma(\tau - \lambda + 1)\, z^{\lambda-\tau}\, \mathbf{D}_z^{\lambda}[V] = \Gamma(\tau + 1)$

iii. $\Gamma(\tau - \lambda)\, z^{2+\lambda-\tau}\, \mathbf{D}_z^{2+\lambda}[V] + \Gamma(\tau - \lambda)\, z^{1+\lambda-\tau}\, \mathbf{D}_z^{\lambda}[V] = (\tau - \lambda)\Gamma(\tau + 1)$

Teorem 2.2.1 bilgileri ile birlikte, Tanım 2.2.1 ve Tanım 2.2.2 bilgileri (veya Örnek 2.2.6 ve Örnek 2.2.7 bilgileri) kullanıldığında, $0 \leq \lambda < 1$ olmak üzere, $\mathbf{H}_{\alpha}(n)$ sınıfında olan (2.11) formundaki analitik fonksiyonların sadece λ ve $1 + \lambda$ mertebeden türevlerine ilişkin aşağıdaki sonuçlara kolayca elde edilebilir.

2.2.1 Önerme. $0 \leq \lambda < 1$ ve $\alpha_n := \alpha \neq 0$ olmak üzere, verilen bir $V(z) \in \mathbf{A}_r(n)$ gibi n-değerli analitik fonksiyonu için, aşağıda verilenler:

i. $\mathbf{D}_z^{\lambda}[V(z)] = \mathbf{D}_z^{\lambda}\,[\,\alpha_n z^n + \sum_{k=n+r}^{\infty} \alpha_k z^k]$

$$= \alpha_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\lambda+1)} z^{n-\lambda} + \sum_{k=n+r}^{\infty} \left(\alpha_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\lambda+1)} z^{k-\lambda} \right)$$

ii. $\mathbf{D}_z^{\lambda}[V(z)] = \mathbf{D}_z^{\lambda}\,[\,\alpha_n z^n + \sum_{k=n+r}^{\infty} \alpha_k z^k]$

$$= \alpha_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\lambda)} z^{n-\lambda-1} + \sum_{k=n+r}^{\infty} \left(\alpha_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\lambda+1)} z^{k-\lambda-1} \right)$$

doğrudur.

Son olarak, Örnek 2.2.9'un daha özel bir sonucu olan ve Örnek 2.1.26 ile verilen kompleks değişkenli elementer fonksiyonunun yine hem λ hem de $1+\lambda$ mertebeden kesirsel türevleri hesaplanmıştır.

2.2.2 Önerme. $0 \leq \lambda < 1$ olmak üzere, $\mathbf{A}_1(1)$ sınıfındaki $V(z) = ze^z$ gibi bir analitik fonksiyon için, aşağıda verilenler:

i. $\mathbf{D}_z^{\lambda}[V(z)] = \mathbf{D}_z^{\lambda}\left[z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{n+1}\right]$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} z^{1-\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(n+2)}{\mathrm{n!}\,\Gamma(2-\lambda+n)} z^{n-\lambda+1} \right)$$

ii. $\mathbf{D}_z^{1+\lambda}[V(z)] = \mathbf{D}_z^{1+\lambda}\left[z + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{n+1}\right]$

$$= \frac{-\lambda}{\Gamma(1-\lambda)} z^{-\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(n+2)}{\mathrm{n!}\,\Gamma(1-\lambda+n)} z^{n-\lambda-1} \right)$$

daima doğrudur.

2.3 Kompleks Düzlemde Tremblay Operatörü

Bu bölümde, bu tez araştırma konusuyla doğrudan alakalı olan Tremblay operatörü (dönüşümü) ile ilgili temel bilgilere yer verilecektir. Bu operatör, çeşitli uzaylarda çeşitli özellikleri ile tartışılan (veya kullanılan) ve kesirsel mertebeden türevler yardımıyla tanımlanan özel bir operatördür. Literatürde, bu özel operatörle alakalı olan ve çeşitli (fonksiyon) uzaylarındaki bazı geometrik ve topolojik özelliklerini içeren çeşitli eserlerle karşılaşılmaktadır. Araştırmacılar için; Tremblay (1978), Ibrahim and Jahangiri (2014), Ibrahim vd. (2015), Esa vd. (2017), Irmak and Olga (2019) ve Irmak (2020) eserleri çeşitli yönlerden temel referans olarak yeterli olacaktır.

Literatürde, ilgili operatör hem gerçel hem de kompleks değişkenli fonksiyonlar için ele alınmaktadır. Bu araştırma ile asıl hedef ise, sadece kompleks değişkenli fonksiyonlar üzerine olan bazı olası sonuçları öncelikli belirlemek ve daha sonraki bölümde de bu bölümde elde edilen bilgileri kullanmak olacaktır.

Vurgulanan temel hesaplamalar için, (2.11) ile oluşturulmuş olan oldukça kapsamlı fonksiyonlar sınıfı üzerine odaklanılacaktır. Bu açıdan, gerekli olacak bilgilendirmelere, ilgili (kompleks) dönüşümü (operatörü) tanıtmayla başlayalım.

2.3.1 Tanım. $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere, λ ve β parametreleri:

$$0 < \lambda \leq 1 \quad , \quad 0 < \beta \leq 1 \quad \text{ve} \quad 0 \leq \lambda - \beta < 1 \tag{2.23}$$

şeklindeki koşulları sağlasın ve $V \coloneqq V(z)$ gibi bir kompleks değişkenli fonksiyonu da orijini içine alan herhangi bir kompleks bölgede analitik olsun. Bu durumda, verilen $V \coloneqq V(z)$ kompleks (değişkenli) fonksiyonunun ($\lambda \; ve \; \beta$ - parametrelerine göre) Tremblay Operatörü genellikle

$$\mathbb{T}^{\lambda,\beta}[V(z)] \qquad \text{veya} \qquad \mathbb{T}_z^{\lambda,\beta}[V]$$

şeklindeki notasyonlar ile ifade edilir ve

$$\mathbb{T}_z^{\lambda,\beta}[V] = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\lambda)} \, z^{1-\beta} \, \mathbf{D}_z^{\lambda-\beta} \left[z^{\lambda-1} \, V(z) \right] \tag{2.24}$$

şeklinde tanımlanır.

Matematik literatüründe, Kompleks Fonksiyonlar Teorisi açısından, (2.24) ile tanımlanan (kompleks) dönüşüm (operatör) için iki yönden önem taşımaktadır. Bunlardan birincisi, önceki bölümlerde de vurgulandığı gibi, (2.23) ile sınırlandırılmış koşullar altında, (2.24)'te geçen ve

$$\mathbf{D}_z^{\lambda-\beta}\,[\,\cdot\,] \quad (0 \leq \lambda - \beta < 1)$$

notasyonu ile ifade edilen dönüşüm (operatör), Tanım 2.3.1 ile verilen bir operatör olduğu açıkça görülmektedir. Özellikle, (2.23) ile verilen koşullar altında, çeşitli analitik fonksiyonların çeşitli tipteki türevlerinin incelenmesinde kullanılan ilgili operatör, Owa and Srivastava (1987) ile literatüre kazandırılan ve genellikle Srivastava-Owa Operatörü olarak bilinen operatörün özel bir halini içeren

$$\mathrm{z}^{1-\beta}\,\mathbf{D}_z^{\lambda-\beta}\,[\,\cdot\,] \quad (0 \leq \lambda - \beta < 1) \tag{2.25}$$

şeklindeki çeşitli kesirsel tipteki türevleri içeren operatördür. İkinci önemli özel durum ise, (2.25)'te verilen tanımda, eğer

$$\lambda \coloneqq \gamma =: \beta$$

gibi bir seçim göz önüne alınırsa,

$$\mathbb{T}_z^{\gamma,\gamma}[V] = V(z) \quad (0 \leq \gamma < 1) \tag{2.26}$$

şeklindeki kompleks değişkenli birim dönüşüm ilişkisini de içeren özel sonuç kolayca elde edilir. (Irmak and Yıldız 2022).

Hem (2.25) ile verilen bilgilendirmeye hem de Tanım 2.3.1 ile verilen operatörün tanımına odaklanıldığında, aynen kesirsel mertebeden türev operatöründe de belirtiği gibi, Operatör teorisinde genellik özelliği olan ve önemli rol oynayan "Skalarla Çarpma" ve "Lineerlik" ile ilgili olan bu iki temel özellik yine Tremblay operatörü (dönüşümü) için de sağladığı kolayca görülebilir. Hem bu genel özellikler göz önüne alınarak hem de Tremblay operatörünün (dönüşümünün) bazı temel uygulamaları olarak, Tanım 2.3.1'in, yani (2.24) ile verilen tanımın yardımıyla, bazı elementer hesaplamaları belirleyelim. Bu çok temel olan hesaplamalar, bu tez araştırmasının sonraki özgün sonuçları (hatta bunların sonsuz sayıdaki özel durumları) açısından da çok temel ve gerekli olacak bilgilendirmelerdir.

İlgili ilk hesaplama, yani örneklendirme, $V \coloneqq V(z) = w \ \ (w \neq 0)$ gibi bir sabit kompleks fonksiyonu ile ilgili olan aşağıdaki örneklendirmedir.

2.3.1 Örnek. (2.23)'te belirtilmiş koşullar altında, (2.26)'da belirtilen kompleks değişkenli dönüşüm için, $V \coloneqq V(z) = w \ \ (w \neq 0)$ gibi bir sabit fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda,

$$\mathbb{T}_z^{\lambda,\beta}[w] = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\lambda)}\, z^{1-\beta}\, \mathbf{D}_z^{\lambda-\beta}\left[z^{\lambda-1}w\right]$$

$$= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\lambda)}\, z^{1-\beta} \left\{ w\, \mathbf{D}_z^{\lambda-\beta}\left[z^{\lambda-1}\right] \right\}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\lambda)}\, w\, z^{1-\beta} \left\{ \mathbf{D}_z^{\lambda-\beta}\left[z^{\lambda-1}\right] \right\}$$

olup ve burada (2.21)'de elde edilen sonuç kullanılırsa,

$$\mathbb{T}_z^{\lambda,\beta}[w] = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\lambda)}\, w\, z^{1-\beta} \left\{ \mathbf{D}_z^{\lambda-\beta}\left[z^{\lambda-1}\right] \right\}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\lambda)}\, w\, z^{1-\beta} \left\{ \frac{\mathbf{\Gamma}(\lambda-1+1)}{\mathbf{\Gamma}(\,1-(\lambda-\beta)+(\lambda-1)\,)}\, z^{(\lambda-1)-(\lambda-\beta)} \right\}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\lambda)}\, w\, z^{1-\beta} \left\{ \frac{\mathbf{\Gamma}(\lambda)}{\mathbf{\Gamma}(\beta)}\, z^{\beta-1} \right\}$$

$$= w$$

gibi bir sonuca ulaşılır.

İlgili ikinci örneklendirme ise, $\mathrm{V} \coloneqq \mathrm{V}(z) = z^{\tau}\ (\tau > -1)$ gibi bir kompleks (değişkenli) kuvvet fonksiyonu ile ilgili hesaplamaları içeren ve oldukça kapsamlı sonuçlar içeren bir örnektir.

2.3.2 Örnek. (2.23)'teki gibi verilen koşullar altında, (2.24) ile tanımlanan Operatör için, $\mathrm{V} \coloneqq \mathrm{V}(z) = z^{\tau} \ \ (\tau > -1)$ komplek değişkenli kuvvet fonksiyonunu göz önüne alalım. O zaman da,

$$\mathbb{T}^{\lambda,\beta}[z^{\tau}] = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\lambda)}\, z^{1-\beta}\, \mathbf{D}_z^{\lambda-\beta}\left[z^{\lambda-1}z^{\tau}\right]$$

$$= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\lambda)}\ z^{1-\beta}\left\{ \mathbf{D}_z^{\lambda-\beta}\left[z^{\tau+\lambda-1}\right] \right\}$$

olup, eğer burada yine (2.21) ile elde edilen özel sonuç kullanılırsa,

$$\mathbb{T}^{\lambda,\beta}[z^{\tau}] = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\lambda)}\ z^{1-\beta}\left\{ \mathbf{D}_z^{\lambda-\beta}\left[z^{\tau+\lambda-1}\right] \right\}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\lambda)}\ z^{1-\beta}\left\{ \frac{\mathbf{\Gamma}(\tau+\lambda-1+1)}{\mathbf{\Gamma}(\,1-(\lambda-\beta)+(\tau+\lambda-1)\,)}\ z^{(\tau+\lambda-1)-(\lambda-\beta)} \right\}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\lambda)}\ z^{1-\beta}\left\{ \frac{\mathbf{\Gamma}(\tau+\lambda)}{\mathbf{\Gamma}(\tau+\beta)}\ z^{\tau+\beta-1} \right\}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\tau+\lambda)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\tau+\beta)}\ z^{\tau} \qquad (2.27)$$

şeklindeki sonuca varılır.

Bu bölümün son iki örneği oldukça genel bir yapıyı içereceğinden ve üstteki bilgileri de kapsadığından dolayı, ispatlanabilir önermeler şeklinde vermeyi uygun görüyoruz. Bu bağlamda, (2.11)'in koşulları altında oluşturulmuş olan (2.10) formundaki genel seri açılımına sahip olan fonksiyonlar ile ilgili serilerin oldukça özel hali konumunda olan ve Örnek 2.1.16'da verilen analitik fonksiyonlar söz konusu olsun. Bunlar için de, sırasıyla, Örnek 2.2.7 ve Örnek 2.2.8'de kullanılan ilgili analitik fonksiyonlarına ilişkin kompleks serilerin Tremblay operatörü etkisi altındaki kapsamlı bilgilerin ve detaylı işlemlerin (2.27)'deki bilgiler ışığında dikkatlice uygulanması hedefimiz açısından yeterli olacaktır.

2.3.1 Önerme. (2.23) ile verilen koşullar altında, $V \coloneqq V(z) \in \mathbf{A}_r(n)$ gibi bir n-değerli analitik fonksiyonu verilsin. O zaman,

$$\mathbb{T}_z^{\lambda,\beta}[V] = \mathbb{T}^{\lambda,\beta}[\ c_n z^n\ + \sum_{k=n+r}^{\infty} c_k z^k\ ]$$

$$= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\lambda)}\left\{ c_n \frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n+\beta)} z^n + \sum_{k=n+r}^{\infty}\ c_k \frac{\Gamma(k+\lambda)}{\Gamma(k+\beta)} z^k \right\} \qquad (2.28)$$

olur.

2.3.2 Önerme. $\mathbf{A}_1(1)$ fonksiyonlar sınıfındaki yer alan $V := V(z) = ze^z$ şeklindeki gibi (normalize edilmiş) analitik fonksiyonu verilsin. O zaman,

$$\mathbb{T}_z^{\lambda,\beta}[V] = \mathbb{T}^{\lambda,\beta}\left[z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{n+1}\right]$$

$$= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\lambda)} \left\{ \frac{\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma(1+\beta)} z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{n!\,\Gamma(n+\beta+1)} z^{n+1} \right\} \qquad (2.29)$$

olur.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, tez araştırması kapsamında elde edilen özgün sonuçların ve bu sonuçlara ilişkin olası tartışmaların oluşturulduğu esas bölümdür. Sunulacak olan tüm bu özgün sonuçlar, yani teoremler (ve ilgili bazı sonuçları) Irmak and Yıldız (2022) tarafından literatüre kazandırılmış sonuçlar olduğunu özellikle belirtelim. İlgili sonuçlar, bu tez araştırmasının hedefi gereği, (2.11) ile verilen koşullar altında, Tanım 2.3.1 ile tanıtılmış olan dönüşümünün (operatörünün), (2.10) ile tanımlanmış olan n-değerli analitik fonksiyonlarına olan bazı olası etkilerinin belirlenmesi şeklinde oluşturulmuş özgün sonuçlardır. Öncelikli olarak, ilgili teorilerin ispatları için gerekli olan yardımcı teoremi tanıtalım.

3.1 Lemma. $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik olan $\Omega(z)$ fonksiyonu (2.10)'da verilen seri açılımıma sahip olan *n*-değerli bir kompleks (değişkenli) fonksiyon olsun. O zaman, herhangi bir $v_0 \in \mathbb{U}$ gibi noktası için, eğer

$$|\Omega(v_0)| = \{\, |\Omega(v)| : \ |v| \leq |v_0| \,\} \tag{3.1}$$

oluyor ise,

$$v_0\Omega'(v_0) = \omega\, \Omega(v_0) \tag{3.2}$$

şartını sağlayan (en az) bir ω $(\omega \geq n)$ pozitif reel sayısı vardır (Jack 1971, Miller and Mocanu 1978).

3.1 Teorem. (2.11)'de verilen şartlar ile

$$v \geq r \ , \ r \in \mathbb{N} \ , \ n \in \mathbb{N} \ , \ 0 < \Delta \leq 1 \ \text{ ve } \ 0 \leq \alpha < 2\pi \tag{3.3}$$

koşulları altında ve $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere, (2.10)'da verilen seri açılımına sahip herhangi $V(z) \coloneqq \mathrm{L}_r^n(z) \in \mathbf{A}_r(n)$ gibi n-değerli bir analitik fonksiyonu için,

$$\Re e\left\{ z\frac{d^{1+n}}{dz^{1+n}}\left(\mathbb{T}_z^{\lambda,\beta}[V(z)] \right) \right\} \neq v\Delta Cos(\alpha) \tag{3.4}$$

şeklindeki eşitsizlik sağlansın. O zaman,

$$\left| \frac{d^n}{dz^n}\left(\mathbb{T}^{\lambda,\beta}[V(z)] \right) - n!\, c_n \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(n+\beta)} \right| < \Delta \tag{3.5}$$

eşitsizliği de sağlanır (Irmak and Yıldız 2022).

İspat. $V(z) \coloneqq \mathrm{L}_r^n(z) \in \mathbf{A}_r(n)$ gibi bir n-değerli bir analitik fonksiyonu (2.10)'da verilen seri açılımına sahip olsun. (2.11) ve (3.3) koşulları altında, (2.28)'de verilen eşitliğin her iki tarafın *n* defa türevi alınırsa:

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(\mathbb{T}^{\lambda,\beta}[V(z)]\right)$$

$$= \frac{d^n}{dz^n}\left\{ \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\lambda)} \left(c_n \frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n+\beta)} z^n + \sum_{k=n+r}^{\infty} c_k \frac{\Gamma(k+\lambda)}{\Gamma(k+\beta)} z^k \right) \right\}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\lambda)} \left\{ c_n \frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n+\beta)} \frac{d^n}{dz^n}(z^n) + \sum_{k=n+r}^{\infty} c_k \frac{\Gamma(k+\lambda)}{\Gamma(k+\beta)} \frac{d^n}{dz^n}\left(z^k\right) \right\}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\lambda)} \left\{ n!\, c_n \frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n+\beta)} + \sum_{k=n+r}^{\infty} \left(c_k \frac{\Gamma(k+\lambda)}{\Gamma(k+\beta)} \frac{k!}{(k-n)!} \right) z^{k-n} \right\}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\lambda)} \left\{ n!\, c_n \frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n+\beta)} + \sum_{k=r}^{\infty} \left(c_{k+n} \frac{\Gamma(k+n+\lambda)}{\Gamma(k+n+\beta)} \frac{(k+n)!}{k!} z^k \right) \right\} \qquad (3.6)$$

şeklindeki denk sonuçlar elde edilir. Beklenen ispat için, Lemma 3.1'i kullanmak istiyoruz. Bunun için de, ilgili Lemma'da geçen ve istenilen özelliklere sahip bir analitik fonksiyona ihtiyaç vardır. Bu fonksiyon için de, (3.6)'da elde edilen sonucu kullanalım. Yani, (3.6)'daki eşitlik yardımıyla, eğer

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(\mathbb{T}^{\lambda,\beta}[V(z)]\right)$$

$$= n!\, c_n \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n+\beta)} + \sum_{k=r}^{\infty} c_k \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(k+n+\lambda)}{\Gamma(k+n+\beta)} \frac{(k+n)!}{k!} z^k$$

$$= n!\, c_n \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n+\beta)} + \Delta\, \Omega(\mathrm{z}) \quad (0 < \Delta \leq 1;\ z \in \mathbb{U}) \qquad (3.7)$$

şeklindeki gibi kapalı formdaki $\Omega(\mathrm{z})$ gibi bir kompleks değişkenli fonksiyon göz önüne alınırsa, (3.6)'daki bilgiler ışığında, bu kapalı $\Omega(\mathrm{z})$ fonksiyonunun Lemma 3.1 ile vurgulanan tipteki gibi $\mathbb{U}$'da analitik bir fonksiyon olduğu, yani (2.10)'da vurgulanan kompleks seri açılımlı ve $\mathbf{A}_r(n)$ sınıfında olan *n*-değerli bir kompleks (değişkenli) fonksiyon olduğu kolayca gözlemlenebilir. Şimdi, Lemma 3.1 ile verilen ve (3.2)'de geçen birinci türev ilişkisini kullanmak adına, (3.7) ile oluşturulan eşitliğin her iki yanı z bağımsız değişkenine göre bir kere daha türevi alınırsa, aşağıdaki gibi verilen sonuç kolayca elde edilebilir:

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{d^n}{dz^n}\left(\mathbb{T}_z^{\lambda,\beta}[V(z)]\right)\right\} = \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\left(\mathbb{T}^{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\beta}}[V(z)]\right)$$

$$= \frac{d}{dz}\left\{n!\,\alpha_n \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\lambda)}\frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n+\beta)} + \Delta\,\Omega(z)\right\}$$

$$= \Delta\,\Omega'(z) \quad (0 < \Delta \leq 1;\ z \in \mathbb{U}). \tag{3.8}$$

Şimdi, her $z \in \mathbb{U}$ için $|\Omega(z)| < 1$ eşitsizliğinin doğru olduğunu kabul edelim. Elbette ki, eğer bu iddia doğru değilse, Lemma 3.1 ile verilen (3.1) ifadesi gereği:

$$|\Omega(z_0)| = \max\{\,|\Omega(z)| : \ |z| \leq |z_0|\,\} = 1$$

olacak şekilde (en az) bir $z_0 \in \mathbb{U}$ gibi bir öge var olacaktır. Böylesi bir durumda da,

$$\Omega(z_0) = e^{i\,\theta} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

şeklindeki gibi bir durum söz konusu olur. Bu durumda, (3.2) eşitsizliği (3.8) için göz önüne alınırsa;

$$z\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\left(\mathbb{T}^{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\beta}}[V(z)]\right)\Big|_{z:=z_0} = \Delta z\Omega'(z)|_{z:=z_0}$$

$$= \Delta\, v\, \Omega(z_0) \tag{3.9}$$

$$= \Delta\, v\, e^{i\,\theta} \quad (v \geq r;\ r \in \mathbb{N};\ 0 \leq \theta < 2\pi)$$

şeklindeki ilişkilere kolayca varılır. Burada, eğer (3.9) ifadesinin her iki tarafının reel kısmı alınırsa,

$$\Re e\left\{z\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\left(\mathbb{T}^{\lambda,\beta}[V(z)]\right)\Big|_{z:=z_0}\right\} = \Re e\left\{\Delta z\Omega'(z)|_{z:=z_0}\right\}$$

$$= \Delta\, v\, \Re e\{\Omega(z_0)\}$$

$$= \Delta\, v\, \Re e\left\{e^{i\,\theta}\right\}$$

$$= \Delta\, v\, \Re e\{Cos(\theta) + iSin(\theta)\}$$

$$= \Delta\, v\, Cos(\theta) \quad (v \geq r;\ r \in \mathbb{N})$$

sonucu elde edilir ki, bu da (3.4) ile verilen eşitsizlik ile çelişki oluşturur. Bu da bize $|\Omega(v_0)| = 1$ koşulunu sağlayan herhangi bir $z_0 \in \mathbb{U}$ ögesinin olmayacağını ifade eder. Dolayısıyla, her $z \in \mathbb{U}$ için $|\Omega(z)| < 1$ olmak durumunda kalır. Dahası, (3.7) ile verilen eşitsizlikten de:

$$\left| \frac{d^n}{dz^n}\left(\mathbb{T}^{\lambda,\beta}[V(z)]\right) - n!\, c_n \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(n+\beta)} \right| = \Delta|\Omega(z)|$$

şeklindeki modül ilişkisine varılır. Bu da bizi ilgili teoremin (3.5) ile verilen eşitsizliğine, yani hipotez konumundaki önermeye götürür. Böylece, istenen ispat da tamamlanmış olur.

Aşağıda verilen teoremlerin ispatları da, üstteki teoremin ispatı ışığında kolayca oluşturulabilir. Bunu için de, ispatta geçen tüm adımlar ile (3.9)'daki ifadenin aşağıda verilen teoremlerin akışına göre uygun bir şekilde yeniden düzenlenmesi yeterli olacaktır. Teorem 3.1'in ispatına benzer olan ilgili tüm detaylar araştırmacıların ilgisine bırakılmıştır.

3.2 Teorem. (2.11) ve (3.3)'te verilen koşullar altında ve $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere, (2.10)'da verilen seri açılımıma sahip olan herhangi bir $V(z) \coloneqq \mathrm{L}_r^n(z) \in \mathbf{A}_r(n)$ kompleks değişkenli fonksiyon için, eğer

$$\Im m\left\{ z \frac{d^{1+s}}{dz^{1+s}}\left(\mathbb{T}^{\lambda,\beta}[V(z)]\right)\right\} \neq v\beta Sin(\alpha) \tag{3.10}$$

şeklindeki önermesi doğru ise, (3.5) ile verilen önerme de doğru olur (Irmak and Yıldız 2022).

3.3 Teorem. (2.11) ve (3.3)'de verilen koşullar altında ve $z \in \mathbf{U}$ olmak üzere, (2.10)'da verilen seri açılımıma sahip olan herhangi bir $V(z) \coloneqq \mathrm{L}_r^n(z) \in \mathbf{A}_r(n)$ kompleks değişkenli fonksiyon için, eğer

$$\left| z \frac{d^{1+s}}{dz^{1+s}}\left(\mathbb{T}^{\lambda,\beta}[V(z)]\right)\right| \neq v\Delta \tag{3.11}$$

önermesinin doğru olması durumunda, (3.5) ile verilen önerme de doğru olur (Irmak and Yıldız 2022).

3.4 Teorem. (2.11) ve (3.3)'de verilen koşullar altında ve $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere, (2.10)'da verilen seri açılımıma sahip olan herhangi bir $V(z) \coloneqq \mathrm{L}_r^n(z) \in \mathbf{A}_r(n)$ kompleks değişkenli fonksiyon için, eğer

$$\left| \Re e \left\{ z \frac{d^{1+s}}{dz^{1+s}} \left(\mathbb{T}^{\lambda,\beta}[V(z)] \right) \right\} \right| \neq v\Delta |Cos(\alpha)| \tag{3.12}$$

şeklindeki önerme doğru olursa, (3.5) ile verilen önerme de doğru olur (Irmak and Yıldız 2022).

3.5 Teorem. (2.11) ve (3.3)'de verilen koşullar altında ve $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere, (2.10)'da verilen seri açılımıma sahip olan herhangi bir $V(z) \coloneqq \mathrm{L}_r^n(z) \in \mathbf{A}_r(n)$ kompleks değişkenli fonksiyon için, eğer

$$\left| \Im m \left\{ z \frac{d^{1+s}}{dz^{1+s}} \left(\mathbb{T}^{\lambda,\beta}[V(z)] \right) \right\} \right| \neq v\Delta |Sin(\alpha)| \tag{3.13}$$

şeklinde verilen önermesi sağlanır ise, (3.5) ile verilen önerme de sağlanır (Irmak and Yıldız 2022).

Önermeler teorisinde oldukça önemli rol oynayan "gerektirme" konumundaki önermelerle ilgili olan:

$$\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q} \equiv \mathrm{Q}^{\mathrm{t}} \Rightarrow \mathrm{P}^{\mathrm{t}} \tag{3.14}$$

şeklindeki denklik durumu göz önüne alındığında, ilgili teoremlerin farklı bir mantıkla kullanışlılığı da söz konusu olabilmektedir. Bu açıdan, ilgili teoremlerden elde edilen ve birbirine denk olan önemli bir çıkarım da oluşturulabilir. Bu mantıkla, yukarıda elde edilen teoremlerin denk olduğu genel yapıdaki bir teorem yardımıyla, elde edilmiş olan tüm önermeleri kapsayacak şekilde ve aşağıdaki gibi (özel çıkarımlar olarak) yeniden sunulmuştur.

3.6 Teorem. (2.11) ve (3.3)'te verilen koşulları altında ve z $\in \mathbb{U}$ olmak üzere, (2.10)'da verilen seri açılımına sahip herhangi bir $V(z) \coloneqq \mathrm{L}_r^n(z) \in \mathbf{A}_r(n)$ gibi n-değerli analitik fonksiyonu için,

$$\left| \frac{d^n}{dz^n} \left(\mathbb{T}^{\lambda,\beta}[V(z)] \right) - n!\, \alpha_n \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(n+\beta)} \right| \geq \Delta$$

şeklindeki önerme sağlansın. O zaman, aşağıdaki gibi sunulmuş olan önermelerin her biri de sağlanır:

$$\Re e\left\{ z\frac{d^{1+n}}{dz^{1+n}}\left(\mathbb{T}_{z}^{\lambda,\beta}[V(z)] \right) \right\} = v\Delta Cos(\alpha)\,,$$

$$\Im m\left\{ z\frac{d^{1+s}}{dz^{1+s}}\left(\mathbb{T}^{\lambda,\beta}[V(z)] \right) \right\} = v\beta Sin(\alpha)\,,$$

$$\left| z\frac{d^{1+s}}{dz^{1+s}}\left(\mathbb{T}^{\lambda,\beta}[V(z)] \right) \right| = v\Delta\,,$$

$$\left| \Re e\left\{ z\frac{d^{1+s}}{dz^{1+s}}\left(\mathbb{T}^{\lambda,\beta}[V(z)] \right) \right\} \right| = v\Delta|Cos(\alpha)|$$

ve

$$\left| \Im m\left\{ z\frac{d^{1+s}}{dz^{1+s}}\left(\mathbb{T}^{\lambda,\beta}[V(z)] \right) \right\} \right| = v\Delta|Sin(\alpha)|\,.$$

Önceden de vurguladığımız gibi yukarıda verilen teoremler bu tez araştırması için özgün sonuçlar olup, bunların her biri Irmak and Yıldız (2022) tarafından literatüre kazandırılmış sonuçlardır. Aynı makalede, ilgili yazarlar tarafından, ilgilenen araştırmacılar için, elde edilen tüm teorilerin kapsamlı sonuçları ile birlikte çeşit önerilerde de bulunmuştur. Bu önerilerden bazıları, Irmak and Yıldız (2022) tarafından oluşturulan makalede detaylıca yer almasına rağmen, burada bazıları üzerine odaklanmak ve bazı detaylandırmalara girmek istiyoruz.

Bu tez araştırmasının kapsamı gereği, kesirsel mertebeden türev operatörü (dönüşümü) yardımıyla tanımlanmış olan ve Tanım 2.2.1 ile dizayn edilmiş Tremblay operatörünün (dönüşümünün) tanımında verilen (2.16)'daki (genelleştirilmiş) integrale odaklanıldığında, ilgili kompleks değişkenli her bir $V(z)$ fonksiyonu için ilgili hesaplamalar mümkün olabilse de, elementer bazda onların belirlenmesi oldukça güçtür ve hatta mümkün de olmayabilir. Bu gibi sorunları kökten çözebilmek adına, ilgili $V(z)$ fonksiyonlarını ifade eden $\mathrm{L}_r^n(z)$ analitik fonksiyonlarının hem olası tüm seri açılımları araştırma kapsamına çekilmiştir hem de (2.10) ile verilen seri yapılarının (2.16)'da kullanılmasının ilgili integral çözümüne olan avantajları da göz ardı edilmemiştir.

Özellikle, ilgili genel formdaki kompleks seri açılımlarında yer alan n ve r parametreleri ile seride geçen katsayıların farklı farklı seçimleri bizleri $\mathbf{A}_r(n)$ fonksiyonlar ailesinin oldukça kapsamlı olan çeşitli alt ailelerine götürecektir. Bu gibi özel durumların her biri için, (3.3) ile kısıtlanmış koşullar altında, ilgili teoremlerin özel sonuçları da kaçınılmaz olacaktır. Bu özel sonuçların kimileri n-değerli analitik fonksiyonlar için önem taşısa da, kimileri için de 1-değerli analitik fonksiyonlar, yani normalize edilmiş fonksiyonlar için de önem taşıyacaktır. Bu alanlara ilişkin bilgilendirmeler için, giriş bölümünde yeterli ve gerekli olacak şekilde bazı açıklamalar da yapılmıştı.

Bilindiği gibi, kompleks değişkenli fonksiyonların analitik ve geometrik incelemeleri ilişkin teorik çeşitli bilgiler ileri sürülse de, bu bölümde sunmuş olduğumuz Teorem 3.1-Teorem 3.5 arasındaki teoremler benzeri sonuçların ilgili oldukları uzaylarda, yani z-düzleminde ve/veya w-düzleminde ifade edilmesi kolay bir iş değildir. Bu gibi araştırmalarda, kompleks fonksiyonlar teorisinde karşımıza çeşitli (kompleks) dönüşümler (doğal olarak operatörler) kapsamında çıksa da, dönüşüm ilişkilerinin şekilsel (grafiksel) ifadelerinin veya ilişkilerinin 2D veya 3D boyutlarındaki incelemeleri (veya analizleri) için çeşitli hazır (matematiksel) programlara zorunlu olarak başvurulan yollardan bazıları olabilmektedir. Özellikle bu gibi analizlere, teorik çalışmalardan ziyade uygulama boyutunda olan araştırmalarda gerek duyulmaktadır. Bu gibi boyutlarla ilgili bazı analizlerde yer alan ve bazı özel hesapları da içeren çeşitli sonuçlar açısından, kompleks değişkenli fonksiyonlarla alakalı olan ve Ibrahim vd. (2020), Kanas and Masih (2021) ile Wang vd. (2022) tarafından sunulan makaleler birer örnek olarak verilebilir.

O halde, yukarıda vurgulanan bilgiler ışığında, verilen tüm sonuçların (teoremlerin) veya bunların tüm özel sonuçlarının belirlenmesi için gerek ve yeterli şart "ilgili teorilerde geçen önermeler arasındaki ilişkilerin", yani "ilgili hipotezler ve ilgili hükümler arasındaki ilişkilerin" bir (tek yönlü) gerektirme olmasının bir şekilde görebilmek önemli rol oynayacaktır.

Şimdi, elde edilen esas sonuçların bazı özel sonuçlarını ve bunlara ilişkin bazı önerileri aşağıdaki gibi bazı önermeler ve örnekler olarak sunalım. Özellikle, Irmak and Yıldız (2022) tarafından vurgulanan çıkarımlardan biri olarak, Teorem 3.6'nın yardımıyla oluşturulacak olan özel çıkarım, aşağıdaki gibi verilen Önerme 3.1 için de detaylandırılmıştır. Yine, ilgili önermeye denk olan önermenin yeniden oluşturulması da ilgilenen araştırmacıların isteğine bırakılmıştır.

3.1 Önerme. (2.11) ve (3.3)'te verilen koşullar altında ve z ∈ 𝕌 olmak üzere , (2.10)'da verilen seri açılımına sahip herhangi $V(z) \coloneqq \mathrm{L}_r^n(z) \in \mathbf{A}_r(n)$ gibi n-değerli bir analitik fonksiyonu için, aşağıda verilen:

$$\Re e\left\{ z\frac{d^{1+n}}{dz^{1+n}}[V(z)] \right\} \neq v\Delta Cos(\alpha) ,$$

$$\Im m\left\{ z\frac{d^{1+n}}{dz^{1+n}}[V(z)] \right\} \neq v\beta sin(\alpha) ,$$

$$\left| z\frac{d^{1+n}}{dz^{1+n}}[V(z)] \right| \neq v\Delta ,$$

$$\left| \Re e\left\{ z\frac{d^{1+n}}{dz^{1+n}}[V(z)] \right\} \right| \neq v\Delta|Cos(\alpha)|$$

ve

$$\left| \Im m\left\{ z\frac{d^{1+n}}{dz^{1+n}}[V(z)] \right\} \right| \neq v\Delta|Sin(\alpha)|$$

önermelerden herhangi biri sağlansın. Bu durumda, aşağıda verilen önerme de:

$$\left| \frac{d^n}{dz^n}[V(z)] - n!\, c_n \right| < \Delta$$

sağlanır.

İspat. (2.23)'te verilen koşullar altında ve z ∈ 𝕌 olmak üzere, Teorem 3.1'in ispatında eğer $\lambda \coloneqq \gamma \coloneqq \beta$ gibi bir seçim yapılır ve (2.26) ile vurgulanan genel özellik de göz önüne alınırsa istenen ispat biter.

Önceden de belirttiğimiz gibi, tüm teoremlerde geçen parametreler uygun (mantıklı) seçilerek çok daha özel sonuçlara elbette ki varılabilir. Bunlardan birisi olarak da Önerme 3.1 belirlenmişti. Her ne kadar ilgili parametreler seçilse de, kompleks

değişkenli fonksiyonlarla ilgili olan özel (çıkarımlar) sonuçların ilgili uzaylar arasındaki ilişkileri kolayca belirlenemeyeceğini belirtmiştik. Yine de, kapsamlı bir önerme olan Önerme 3.1 veya önceki önermelerin özel bir sonucu olarak aşağıdaki çıkarımı yine önerme olarak sunmak istiyoruz.

Teorem 3.1 ile Teorem 3.5 arasında verilen tüm önermelerde geçen ilgili $V(z)$ kompleks değişkenli fonksiyonun belirlenmesi açısından, $\mathbf{A}_n(r)$ fonksiyonlar sınıfının çeşitli alt kümeleri konumunda olan ve hatta Örnek 2.1.22 ve Örnek 2.1.25 arasında elde etmiş olduğumuz elementer bazdaki özel fonksiyonlar da göz önüne alınarak ve yukarıdaki kapsamlı öneriler doğrultusunda düzenlemeler yapılabilir. Onların her biri için gerekli araştırmaları ve incelemeleri ilgilenen araştırmacılara bırakıp, örnek olsun diye önceden elde etmiş olduğumuz ve Örnek 2.1.22 ile belirlenmiş ve (2.12)'de de sunulmuş olan kompleks kuvvet serinin yardımıyla elde edilen ve Örnek 2.1.26 ile verilmiş olan kompleks serisinin de $\mathbf{A}_1(1)$ fonksiyonlar sınıfında olduğu ve doğal olarak, aşağıdaki gibi seri açılımlı:

$$V(z) \coloneqq e^z - 1 \coloneqq z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots \quad (\mathrm{z} \in \mathbb{U})$$

gibi bir (*normalize* edilmiş) formda olan kompleks değişkenli fonksiyonu kolayca oluşturulabilir. Bu durumda, aşağıdaki özel çıkarım, Önerme 3.1'in bir özel sonucu olarak kolayca sunulabilir.

3.2 Önerme. Verilen

$$V(z) \coloneqq e^z - 1 \quad (\mathrm{z} \in \mathbb{U})$$

gibi bir analitik fonksiyonu için, eğer

$$\Re e\left\{ z\frac{d^2}{dz^2}[e^z - 1] \right\} = \Re e\{ze^z\} \neq v\Delta Cos(\alpha)\,, \tag{3.15}$$

$$\Im m\left\{ z\frac{d^2}{dz^2}[e^z - 1] \right\} = \Im m\{ze^z\} \neq v\Delta \mathrm{Sin}(\alpha)\,, \tag{3.16}$$

$$\left| z\frac{d^2}{dz^2}[e^z - 1] \right| = |ze^z| \neq v\Delta\,, \tag{3.17}$$

$$\left| \Re e\left\{ z\frac{d^2}{dz^2}[e^z - 1] \right\} \right| = |\Re e\{ze^z\}| \neq v\Delta|Cos(\alpha)| \tag{3.18}$$

ve

$$\left| \Im m\left\{ z\frac{d^2}{dz^2}[e^z - 1] \right\} \right| = |\Im m\{ze^z\}| \neq v\Delta|Sin(\alpha)| \tag{3.19}$$

koşullarından herhangi biri sağlanırsa,

$$\left| z\frac{d}{dz}[e^z - 1] - 1 \right| = |ze^z - 1| < \Delta \tag{3.20}$$

koşulu da sağlanır.

Kompleks fonksiyonlar teorisinde verilen fonksiyonların veya dönüşümlerin ilgili oldukları düzlemler (z-düzlemi ile w-düzlemi) arasındaki analitik ve geometrik ilişkilerini ifade eden grafiksel ilişkilerinin gösterilmesinin kolay bir iş olmadığını belirtmiştik. Bu ilişkiler, Teorem 3.1 ile Teorem 3.5 arasındaki tüm teorilerde olduğu gibi, bu teoremler yardımıyla kolayca oluşturulabilen Teorem 3.6 gibi teorem ve bunların tüm (olası) çıkarımları konumunda olan tüm gerektirmeler ve (3.14) ile vurgulanan tüm denklikler gereği çok sayıda "tek (bir) yönlü gerektirme" konumunda olan tüm önermeler için de geçerlidir. Böylesi tüm durumların hem hipotezlerinde hem de hükümlerinde geçen tüm kompleks değişkenli fonksiyonların veya bunlara denk gelen iki değişkenli fonksiyonların 2D veya 3D boyutlarındaki grafiksel ilişkileri (analizleri) görmek adına, çeşitli matematiksel programları kullanılabildiğini vurgulamıştık.

Tüm olası sonuçlara ve bunların analitik ve geometrik bazı özelliklerinin incelenmesinde (veya analizinde), gerek öneri ve gerekse tartışma boyutlarına yönelik bir örnek olması nedeniyle, temel teoremlerimizin özel bir çıkarımı olan Önerme 3.2'de (veya bu önermeden (3.14) gerektirmesi ile kolayca oluşturulabilin dengi konumundaki önermede) geçen hipotezler ile ilgili hükümler arasındaki ilişkiler için, gerekli elementer işlemler hem z kompleks (bağımsız) değişkeni ile hem de $z = x + iy$ ilişkisi gereği x ve y gerçel (bağımsız) değişkenleri göz önüne alınarak, ilgili olan gerektirmeler oluşturulabilir. Her iki fonksiyonunun ifadesi için de, ilgili hipotezler ve hükümler arasındaki gerektirmelerin gösterilmesi adına için örneklendirme yoluna gidilebilir ama her iki fonksiyon yapısında da, hem 2D hem 3D boyutlarındaki analizler yine elementer olarak kolay işlemler (analizler) değildir. Vurgulanan fonksiyonlar açısından, Önerme 3.2'nin (3.15)-(3.20) arasında geçen hipotezlerde ve hükümde geçen:

$$W := \rho(z) \coloneqq ze^z : \mathrm{E} \subseteq \mathbf{U} \to \mathbb{C} \tag{3.21}$$

analitik fonksiyonu ve bu fonksiyonda $z = x + iy$ şeklindeki kompleks (bağımsız) değişken ile gerçel (bağımsız) değişkenler arasındaki ilişkiler gereği de:

$$
\begin{aligned}
W &\coloneqq \rho(x+iy) \coloneqq (x+iy)e^{x+iy} \\
&= (x+iy)e^{x}(Cosy+iSiny) \\
&= e^{x}(xCosy-ySiny)+ie^{x}(xSiny+yCosy)
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

gibi ilişkiler gereği, ilgili önermede geçen tüm hipotezlerdeki reel, sanal, modül, … gibi ifadeler kompleks değişkenli elementer bazdaki fonksiyonla ifade edilebildiği gibi, duruma, hedefe, araştırmaya, analize vs. durumlarında, elbette ki, iki değişkenli gerçel fonksiyonlarla da ifade edilebilir. Kısacası, klasik analiz açısından zor olabilmesine rağmen, her iki durum da mümkün olabilmektedir. Bu durumda, ilgili gerektirmenin (3.15) ile verilen hipotezi için

$$
\begin{aligned}
\Re e\{\rho(z)\} &= \Re e\{ze^{z}\} \\
&= e^{x}(xCosy-ySiny) \\
&=: \phi(x,y)
\end{aligned}
$$

ve (3.20) ile verilen hüküm için de

$$
\begin{aligned}
|ze^{z}-1| &= |e^{x}(xCosy-ySiny)-1+ie^{x}(xSiny+yCosy)| \\
&=: \Phi(x,y)
\end{aligned}
$$

şeklindeki gerçek değişkenli $\phi(x,y)$ ve $\Phi(x,y)$ şeklindeki gerçel değişkenli ve reel değerli fonksiyonları, elbette ki istenilen araştırmaların durumuna göre, kompleks değişkenli fonksiyonlara nazaran daha da kolaylık sağlayacaktır.

4. SONUÇ

Bu lisansüstü tez çalışmasında, öncelikli olarak kompleks fonksiyonlar teorisi ile bazı kesirsel mertebeden türev operatörleri (dönüşümleri) ile ilişkili olan çok temel bilgiler sunulduktan sonra, araştırma konusuyla doğrudan ilgili olan Tremblay operatörü (dönüşümü) ile ilgili bazı temel ve gerekli bilgiler verilmiş, ardından da ilgili operatörün bazı temel sonuçları olarak çeşitli teorilere ve örneklendirmelere odaklanılmıştır. Bu odaklanmalarda; özellikle, Tremblay operatörünün açık birim diskinde analitik olan bazı fonksiyonlar üzerine olası etkilerinin belirlenmesine ilişkin çeşitli özgün sonuçların ve bu sonuçların da çeşitli özel hallerinin yer aldığı (oldukça kapsamlı) teoremlere, önermelere ve çeşitli örneklendirmelere yer verilmiştir. Bulgular ve tartışma kısmında da, elde edilen özgün sonuçlar ve bunlarla ilgili çeşitli bilgilendirmelerde bulunulmuştur. Kompleks düzlemde Tremblay operatörünün ve bu operatörün analitik fonksiyonlara olan bazı kapsamlı etkilerinin araştırılması ile ilgili olan bu tez araştırması ülkemizde üzerine çalışılan ilk tez konusu olmakla birlikte, bu araştırmada elde edilen tüm özgün sonuçlar ile birlikte çeşitli önerileri ve çıkarımları içeren tüm araştırma bulguları da (Irmak and Yıldız (2022) tarafından) matematik literatürüne kazandırılmıştır. Özellikle, önceki bölümde de vurgulandığı gibi, elde edilecek olan bazı özel sonuçların 2D ve 3D boyutlarındaki özel grafiksel oluşumları da, çeşitli yönlerden bazı özel anlamalar taşıyacaktır. Bunlar için de; Nehari (1952), Duren (1983) ve Goodman (1983) eserleri oldukça temel bilgileri içermektedir.

KAYNAKLAR

Abramowitz, M. and Stegun, I. A. 1965. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. Dover.

Agarwal, P. 2012. Further results on fractional calculus of Saigo operators. Appl. Math., 7 (2): 585-594

Bell, W. W. 1968. Special functions for scientists and engineers, D. Van Nostrand Company Ltd, Reinhold, New York.

Chen, M. P., Irmak, H. and Srivastava, H. M. 1997. Some families of multivalently analytic functions with negative coefficients. J. Math. Anal. Appl., 214 (2): 674-690.

Chen, M. P., Irmak, H. and Srivastava, H. M. 1998. A certain subclass of analytic functions involving operators of fractional calculus. Comput. Math. Appl., 35 (5): 83-91.

Cho, N. E. and Aouf, M. K., 1996. Some applications of fractional calculus operators to a certain subclass of analytic functions with negative coefficients. Turkish J. Math., 20 (4): 553-562.

Daftardar-Gejji V. 2014. Fractional Calculus: Theory and Applications, Narosa Publishing House, New Delhi.

Duren, P. L. 1983. Univalent Functions, Grundlehren der Mathematischen Wissen-schaften, Band 259, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heilderberg and Tokyo.

Esa, Z., Srivastava, H. M., Kılıçman, A. and Ibrahim, R. W. 2017. A novel subclass of analytic functions specified by a family of fractional derivatives in the complex domain. Filomat, 31 (9): 2837-2849.

Goodman, A. W. 1983. Univalent functions, Vols, I and II, Polygonal Publishing Company.

Grozdev, S. 1997. On the appearance of the fractional calculus. J. Theoret. Appl. Mech., 27 (3): 11-20.

Herzallah, M. A. E. 2014. Notes on some fractional calculus operators and their properties. J. Fract. Calc. Appl., 5 (19): 10 pp.

Howie, J. M. 2003. Complex Analysis, Springer-Verlag, London, England.

Ibrahim, R. W., Hadid, S. B. and Momani, S. 2020. Generalized Briot-Bouquet differential equation by a quantum difference operator in a complex domain. Int. J. Dyn. Control, 8 (3): 762-771.

Irmak, H. and Engel, O. 2019. Some results concerning the Tremblay operator and some of its applications to certain analytic functions. Acta Univ. Sapientiae Math., 11 (2): 296-305.

Irmak, H. 2020. Geometric properties of some applications of the Tremblay operator. Gen. Math., 28 (2): 87-96.

Irmak, H. and Kulalı, Ö. F. 2021. An extensive study on various multivalently analytic functions with complex coefficients and some of their argument properties. J. Orissa Math. Soc., 40 (1-2): 1-16.

Irmak, H. and Yıldız, T. H. 2022. Comprehensive notes on various effects of some operators of fractional-order derivatives to certain functions in the complex domains and some of related implications. Punjab Univ. J. Math., 54 (5): 285-296.

Jack, I. S. 1971. Functions starlike and convex of order α. J. London. Math. Soc., 2 (3): 469-474.

Kanas, S. and Masih, V. S. 2021. On the behaviour of analytic representation of the generalized Pascal snail. Anal. Math. Phys., 11 **(**2): 27 pp.

Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J. 2006. Theory and applications of fractional differantial equations, North-Holland Mathematical Stidies 204. Elsevier (North-Holland) Science Publishers, Amsterdam, London and New York.

Lebedev, N. N. 1965. Special functions and their applications, Prentice Hall, New Jersey.

Miller, K. S. and Ross, B. 1993. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. Wiley, New York.

Miller, S. S. and Mocanu, P. T. 1978. Second-order differential inequalities in the complex plane. J. Math. Anal. Appl., 65 (2): 289-305.

Nehari, Z. 1952. Conformal mapping. McGraw-Hill book company, New York, Toronto and London.

Nishimoto, K. and Kalla, S. 1988. Application of fractional calculus to a third order linear ordinary differential equation. Serdica, 14 (4): 385-391.

Oldham, K. B. and Spanier, J. 1974. The fractional calculus theory and applications of dif-ferentiation and integration of arbitrary order. Academic press, New York and London.

Olver, F .W. J., Lozier, D. W., Boisvert, R. F. and Clark, C. W. 2010. NIST handbook of mathematical functions. Cambridge University Press, New York.

Owa, S. 1978. On the distortion theorems. I, Kyungpook Math. J., 8 (1): 53-59

Prajapat, J. K., 2009. Inclusion and neighborhood properties for certain subclasses of analytic functions involving fractional calculus operators. Bull. Pure Appl. Math., 3 (2): 170-174.

Purohit, S. D. 2012. A new class of multivalently analytic functions associated with fractional *q*-calculus operators, Fract. Differ. Calc., 2 (2): 129-138.

Raina, R. K. 1997. On certain classes of analytic functions and applications to fractional calculus operators. Integral Transform. Spec. Funct., 5(3-4): 247-260.

Ross, B. 1977. The development of fractional calculus 1695-1900. Historia Math., 4 (1): 75-89.

Ross, B., 1992. Origins of fractional calculus and some applications, Internat. J. Math. Statist. Sci., 1 (1): 21-34.

Samko, S. G., Kilbas A. A. and Marichev, O. I. 1993. Fractional integrals and derivati-ves, Taylor and Francis, Singapore.

Saxena, R. K., Ram, J. and Suthar, D. L. 2009. Fractional calculus of generalized Mittag-Leffler functions. J. Indian Acad. Math., 31 (1): 165-172.

Srivastava, H. M. and Owa, S. 1989. Univalent functions, fractional calculus and their applications. Halsted Press, John Wiley and Sons, New york, Chieschester, Brisbane, Toronto.

Şan, M. and Irmak, H. 2015. Some novel applications of certain higher order ordinary complex differential equations to normalized analytic functions. J. Appl. Anal. Comput., 5 (3): 479-484.

Srivastava, H. M., 2020. Fractional-order derivatives and integrals: introductory overview and recent developments. Kyungpook Math. J., 60 (1): 73-116.

Taberski, R. 1986. Contributions to fractional calculus and exponential approximation. Funct. Approx. Comment. Math., 15: 81-106.

Tremblay, R., 1974. Une Contribution é la théorie de la dérivéee fractionnaire, Ph.D. thesis, Université Laval, Québec, Canada.

Vinagre, J., Blas, M., Calderon, G., Antonio, J., Suarez, M., Jose, I., Monje, M. and Concepcion, A. 2005. Control theory and fractional calculus. Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat., 99 (2): 241-258.

Wunsch, A. D. 1994. Complex Variables with applications. Addison-Wesley Publishing Company, USA.

Zhuravkov, M. and Romanova, N. 2015. Modification of Hertz contact problem solution on the basis of fractional calculus for biostructures mechanical properties determination. Nonlinear Phenom. Complex Syst., 18 (1): 31-37.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı ve Soyadı	Teslime Hazal YILDIZ

Eğitim

Yüksek Lisans	Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı	2019-Halen
Lisans	Necmettin Erbakan Üniversitesi Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği (Tezsiz Yüksek Lisans)	2007-2012

İş Deneyimi

Yıl	**Kurum**	**Görev**
2013-2014	Prof. Dr. Cevdet Demirkol-Ayhan Meslek ve Teknik Anadolu Lisesi, Antalya	Öğretmen
2014-2015	Şirvan Anadolu İmam Hatip Lisesi, Siirt	Öğretmen
2015-2020	Kızılırmak Şehit Medet Ekizceli Çok Programlı Anadolu Lisesi, Çankırı	Öğretmen
2020-Halen	Hacı Murad-ı Veli İmam Hatip Anadolu Lisesi, Çankırı	Öğretmen

Akademik Aktiviteler

1. H. Irmak and T. H. Yıldız, Comprehensive notes on various effects of some operators of fractional-order derivatives to certain functions in the complex domains and some of related implications, Punjab Univ. J. Math. 54 (5) (2022): 285-296. (ESCI)