KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ HELMHOLTZ DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

SEMİHA TETİK

KOCAELİ 2021

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ HELMHOLTZ DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

SEMİHA TETİK

Doç.Dr. Mine Aylin BAYRAK		
Danışman,	**Kocaeli Üniv.**	**.....**
Doç.Dr. Ali DEMİR		
Jüri Üyesi,	**Kocaeli Üniv.**	**.....**
Dr.Öğr. Üyesi Sertaç ERMAN		
Jüri Üyesi,	**Sakarya Uygulamalı Bilimler Üniv.**	**.....**

Tezin Savunulduğu Tarih: 22.01.2021

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu tezde kesirli diferansiyel denklemlerden Helmholtz denklemlerine Residual kuvvet serisi yöntemi uygulanarak gerçek çözümlere daha yakın bir çözüm elde edildiğini göstermek amaçlanmıştır.

Beni bu konuya yönlendiren, çalışmalarımın yürütülmesi sürecinde hiçbir zaman yardımlarını ve desteğini esirgemeyen, birlikte çalışmaktan onur duyduğum danışman hocam Sayın Doç. Dr. Mine Aylin BAYRAK' a bana göstermiş olduğu ilgisinden ötürü teşekkür eder ve saygılarımı sunarım. Ayrıca, hayatım boyunca benden hiçbir zaman desteğini esirgemeyen AİLEME de sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ocak-2021 Semiha TETİK

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR i
İÇİNDEKİLER ii
ŞEKİLLER DİZİNİ iii
TABLOLAR DİZİNİ iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ v
ÖZET vi
ABSTRACT vii
GİRİŞ 1
1. TEMEL TANIMLAR 3
1.1. Gamma Fonksiyonu 3
1.2. Beta Fonksiyonu 4
1.3. Mittag-Leffler Fonksiyonu 4
1.4. Riemann-Liouville Kesirli Türevi 5
1.5. Riemann-Liouville Kesirli İntegrali 5
1.6. Caputo Kesirli Türevi 6
1.7. Grünwald-Letnikov Kesirli Türevi 6
1.8. Kesirli Kuvvet Serisi 6
1.9. Çoklu Kesirli Kuvvet Serisi 7
2. RESİDUAL KUVVET SERİSİ YÖNTEMİ (RPSM) 8
3. HELMHOLTZ DENKLEMLERİNİN RESİDUAL KUVVET SERİSİ YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ 10
4. SONUÇ VE ÖNERİLER 32
KAYNAKLAR 33
KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER 37
ÖZGEÇMİŞ 38

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. u(x,y)'nin gerçek çözümü 12
Şekil 3.2. u(x,y)'nin α=2 için yaklaşık çözümü 12
Şekil 3.3. u(x,y)'nin α=1.8 için yaklaşık çözümü 12
Şekil 3.4. u(x,y)'nin α=1.6 için yaklaşık çözümü 13
Şekil 3.5. u(x,y)'nin α=2 için mutlak hata grafiği 13
Şekil 3.6. u(x,y)'nin gerçek çözümü 18
Şekil 3.7. u(x,y)'nin α=1 için yaklaşık çözümü 18
Şekil 3.8. u(x,y)'nin α=0.8 için yaklaşık çözümü 18
Şekil 3.9. u(x,y)'nin α=0.6 için yaklaşık çözümü 19
Şekil 3.10. v(x,y)'nin gerçek çözümü 19
Şekil 3.11. v(x,y)'nin α=1 için yaklaşık çözümü 19
Şekil 3.12. v(x,y)'nin α=0.8 için yaklaşık çözümü 20
Şekil 3.13. v(x,y)'nin α=0.6 için yaklaşık çözümü 20
Şekil 3.14. u(x,y)'nin α=1 için mutlak hata grafiği 20
Şekil 3.15. v(x,y)'nin α=1 için mutlak hata grafiği 21
Şekil 3.16. u(x,y)'nin gerçek çözümü 25
Şekil 3.17. u(x,y)'nin α=2 için yaklaşık çözümü 26
Şekil 3.18. u(x,y)'nin α=1.8 için yaklaşık çözümü 26
Şekil 3.19. u(x,y)'nin α=1.6 için yaklaşık çözümü 26
Şekil 3.20. u(x,y)'nin α=2 için mutlak hata grafiği 27
Şekil 3.21. u(x,y)'nin gerçek çözümü 29
Şekil 3.22. u(x,y)'nin α=2 için yaklaşık çözümü 30
Şekil 3.23. u(x,y)'nin α=1.8 için yaklaşık çözümü 30
Şekil 3.24. u(x,y)'nin α=1.6 için yaklaşık çözümü 30
Şekil 3.25. u(x,y)'nin α=2 için mutlak hata grafiği 31

TABLOLAR DİZİNİ

Tablo 3.1. α=2 için mutlak ve bağıl hatalar ile gerçek çözüm değerleri..... 13
Tablo 3.2. α=1.8 için mutlak ve bağıl hatalar ile gerçek çözüm değerleri..... 14
Tablo 3.3. α=1.6 için mutlak ve bağıl hatalar ile gerçek çözüm değerleri..... 15
Tablo 3.4. α=1 için mutlak ve bağıl hatalar ile gerçek çözüm değerleri..... 21
Tablo 3.5. α=0.8 için mutlak ve bağıl hatalar ile gerçek çözüm değerleri..... 22
Tablo 3.6. α=0.6 için mutlak ve bağıl hatalar ile gerçek çözüm değerleri..... 22
Tablo 3.7. Gerçek çözüm ve çeşitli α değerleri için yaklaşık çözüm sonuçları..... 27
Tablo 3.8. Gerçek çözüm ve çeşitli α değerleri için yaklaşık çözüm sonuçları..... 31

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$B(x,y)$: Beta Fonksiyonu
$E_{\alpha}(z)$: Bir Parametreli Mittag-Lefler Fonksiyonu
${}_{\propto}D_{*}^{\alpha}$: Caputo Kesirli Türevi
$\Gamma\,(x)$: Gamma Fonksiyonu
$E_{\alpha,\beta}(z)$: İki Parametreli Mittag-Lefler Fonksiyonu
$\mathcal{L}$: Laplace Operatörü
I_{z}^{α} : Riemann-Liouville kesirli integrali
${}_{\propto}D_{t}^{\alpha}$: Riemann-Liouville kesirli türevi

Kısaltmalar

FDE : Fractional Differential Equations (Kesirli Diferansiyel Denklemler)
RPSM : Residual Power Series Method (Residual Kuvvet Serisi Metodu)

KESİRLİ HELMHOLTZ DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

ÖZET

Bu tezin amacı, kesirli diferansiyel denklemlere Residual kuvvet serisi yöntemini (RPSM) uygulamaktır. İlk olarak kesirli mertebeden türev tanımları ifade edilmiş ve bu türevlerin önemli özellikleri verilmiştir. Daha sonra, Caputo türevi kullanılarak kesirli Helmholtz denklemi incelenmiş ve sayısal çözümleri tablo ve grafikler ile gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlar, kesirli diferansiyel denklemleri çözmek için önerilen metodun etkili bir yöntem olduğunu ortaya koymaktadır.

Anahtar Kelimeler: Caputo Türev, Helmholtz Denklemi, Mittag-Leffler Fonksiyonu, Residual Kuvvet Serisi Yöntemi.

NUMERICAL SOLUTIONS OF THE FRACTIONAL HELMHOLTZ EQUATION

ABSTRACT

The goal of this thesis is to implement the Residual power series method (RPSM) to the fractional differential equations. Firstly, derivative definitions of fractional order and important properites are given. Then, using Caputo derivative, fractional Helmholtz equation is considered, it is shown that RPSM is very efficient for solving the fractional differential equation.

Keywords: Caputo Derivative, Helmholtz Equation, Mittag-Leffler Function, Residual Power Series Method.

GİRİŞ

Mühendislikte ve Fen Bilimlerinde karşılaşılan problemlerin tanımlanmasında matematiksel modellemeler olarak kullanılan diferansiyel denklemlerle ilgili çalışmalar, 17. Yüzyılın ikinci yarısında diferansiyel ve integral hesabın ortaya çıkmasıyla, Newton ve Leibnitz'in yaptığı çalışmalarla başlamıştır. Yine bu dönemde tamsayı türevlerden farklı olarak Leibnitz, ½. Mertebeden türevlerin varlığı ve anlamı üzerine bazı çalışmalarda bulunmuştur. Ancak matematiksel çalışmaların yeni yeni şekillenmesi, kesirli türevlerin uygulanabilir alanlarının kısıtlı ve problem çözümlerinin oldukça zor olmasından dolayı, 17. Yüzyılda bu konu ile ilgili yoğun olarak çalışılamamıştır. Matematikte kullanılan yöntem ve tekniklerin gelişiminin ardından ilk araştırma olarak sayılabilecek kesirli integrasyon tanımı Liouville tarafından verilmiştir. J. Padovan'ın 1987 yılında yayınladığı çalışmalardan sonra lineer ve lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemler üzerine yoğun olarak çalışılmaya başlanmıştır. Bununla birlikte Caputo, Grünwald, Letnikov, Bagley, Torvik, Oldham, Spainer, Mainardi, Podlubny, Samko, Kilbas, Srivastava, Trujillo, Marichev, Miller, Ross, Baleanu, Kiryakova (Baleanu, 2008), (Caputo, 1966), (Caputo, 1967), (Caputo, 1969), (Caputo, 2008), (Kilbas ve diğ., 2000), (Kilbas ve Saigo, 1995a), (Kilbas ve Saigo, 1995b), (Kilbas ve Srivastava, 2006), (Kiryakova, 1994), (Mainardi, 1997), (Mcbride, 1979), (Oldham, 1974), (Petras, 2011), (Podlubny, 1999), (Ross, 1974), (Samko ve diğ., 1993), (Saigo ve Kilbas, 1998), (Trujillo, 1999), (Zaslavsky, 2005) ve daha birçok önemli yazar, kesirli diferansiyel denklemlerle ilgili başlangıç sayılabilecek önemli çalışmalar yayınlamışlardır (Cansız, 2010). Isı transferi, visko-elastik, elektrik-devre, elektro-kimya, dinamik, ekonomi, akışkanlar mekaniği, kontrol teorisi, biyoloji, fizik ve mühendislikte vs. kesirli mertebeden diferansiyeller ile modellenebilmektedir.

Kesirli diferansiyel denklemlerin genellikle bir tam çözümü bulunmadığından, bu tip denklemleri çözmek için kullanılan nümerik ve yaklaşık çözüm veren yöntemlerin sayısında son yıllarda önemli bir artış olmuştur. Bu yöntemlerden bazıları Multi-step Yöntemi (Galeone ve Garrappa, 2006), Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

(Oturanç, 2008), Adomian Ayrıştırma Yöntemi (Cheng ve Chu, 2011), Adams Multi-step Yöntemi (Garrappa, 2009), Predictor-Corrector Yöntemi (Garrappa, 2010), Spline Yöntemi (Pedas ve Tamme, 2013), Standart Olmayan Sonlu Fark Yöntemi (Ongun ve diğ., 2013), Adomian Ayrıştırma Yöntemi (Adomian, 1986), Homotopi Analiz metodu (Dehghan ve Manafian, 2010), Homotopi pertürbasyon metodu (Hemeda, 2012), Chebyshev spektral ortogonal polinom yöntemi (Doha ve diğ., 2011), vs.

İki boyutlu durumda Helmholtz denklemi:

$$D_x^{\alpha}u + D_y^{\alpha}u + w^{\alpha}u = f(x,y), \quad 1 < \alpha \leq 2$$

$$u(0,y) = \mu_1(y)$$

$$u_x(0,y) = \mu_2(y)$$

ve

$$D_x^{2\alpha}u + D_y^{\alpha}v + w_1^{2\alpha}u = f_1(x,y), \quad 0 < \alpha \leq 1$$

$$D_x^{2\alpha}v + D_y^{\alpha}u + w_2^{2\alpha}v = f_2(x,y)$$

$$u(0,y) = \mu_1(y), \quad D_x^{\alpha}u(0,y) = \mu_2(y)$$

$$v(0,y) = v_1(y), \quad D_x^{\alpha}v(0,y) = v_2(y)$$

Burada, $f(x,y), f_1(x,y)$ ve $f_2(x,y)$ bilinen kaynak fonksiyonlarıdır.

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu tez çalışmasında, Residual kuvvet serisi yöntemi kullanılarak, kesirli Helmholtz denkleminin çözümleri incelenmiştir. Kesirli türevin mertebesinin çeşitli durumlarına göre sayısal sonuçlar, tam mertebeden çözüm ile karşılaştırılmıştır. Bu yöntemin diğer yöntemlere göre temel avantajı, lineerleştirme, pertürbasyon veya ayrıklaştırma olmaksızın ve uygun başlangıç koşulları seçilerek herhangi bir dönüşüm yapılmadan doğrudan probleme uygulanabilmesidir. Yapılan tablo ve grafikler ile elde edilen sayısal çözümlerin mutlak ve bağıl hataları gösterilmiştir. Çözümlerin grafiksel olarak çizilmesi için de Matlab paket programından faydalanılmıştır.

1. TEMEL TANIMLAR

1.1. Gamma Fonksiyonu

Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \ \mathrm{dt} \tag{1.1}$$

integrali ile tanımlanır.

Γ fonksiyonu, $\mathrm{Re}(z) > 0$ kompleks düzleminin sağ yarısında yakınsamaktadır.

$$\Gamma(x+iy) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1+iy} \ dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} e^{iylog(t)} dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \left[cos\left(ylog(t)\right) + i.sin\left(ylog(t)\right)\right] \ dt \tag{1.2}$$

ifadesindeki tüm t'ler sınırlıdır. $t = 0$'daki yakınsama için ise $x = \mathrm{Re}(z) > 1$ olmalıdır.

Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)} \tag{1.3}$$

şeklinde de ifade edilebilir (Podlubny,1999).

Gamma fonksiyonu ile ilgili bazı özellikler (Podlubny,1999) :

i)$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

ii)$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sin\pi z}, \ z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

iii)$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2z)$

1.2. Beta Fonksiyonu

Beta fonksiyonu,

$$B(z,w) = \int_0^t \tau^{z-1}\,(1-\tau)^{w-1} d\tau \qquad (\mathrm{Re}(z) > 0, \mathrm{Re}(w) > 0) \tag{1.4}$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny,1999).

Beta fonksiyonu ile ilgili bazı özellikler (Podlubny,1999) :

i)$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\mathrm{w})}{\Gamma(z+\mathrm{w})}$

ii)$B(z,w) = B(w,z)$

1.3. Mittag-Leffler Fonksiyonu

Mittag-Leffler fonksiyonu,

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \tag{1.5}$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyon bir parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu olarak bilinir (Podlubny,1999).

Özel olarak, $\alpha = 1$ ve $\alpha = 2$ durumunda

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \tag{1.6}$$

ve

$$E_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(2k+1)} = cosh\sqrt{z} \tag{1.7}$$

yazılabilir.

İki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu ise (Cansız, 2010)

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \ \alpha > 0, \beta > 0 \tag{1.8}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek olarak,

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = e^z \tag{1.9}$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z} \tag{1.10}$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2} \tag{1.11}$$

yazılabilir (Cansız,2010).

1.4. Riemann-Liouville Kesirli Türevi

$f: [a, b] \to R$ üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon ve $n - 1 < \alpha \leq n,\ n \in N^+$ olmak üzere α. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$$ {}_{\propto}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_{\propto}^{t} (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \tag{1.12}$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny,1999).

1.5. Riemann-Liouville Kesirli İntegrali

f fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında integrallenebilir ve parçalı sürekli bir fonksiyon olmak üzere α. mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali,

$$I^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\zeta)^{\alpha-1} f(\zeta)\, d\zeta, \zeta > 0, \alpha > 0 \tag{1.13}$$

$$I^0 f(t) = f(t) \tag{1.14}$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny,1999).

Kesirli türev ve kesirli integralin bazı özellikleri: (Dehghan ve diğ.,2009)

i)$I^{\alpha} I^{\beta} f = I^{\alpha+\beta} f, \alpha, \beta \geq 0$

ii)$I^{\alpha} t^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta},\ \alpha > 0\ , \beta > -1$

1.6. Caputo Kesirli Türevi

$f:[a,b]\to R$ üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon ve $n-1\le\alpha\le n$,

$n\in N^{+}$olmak üzere α. mertebeden Caputo kesirli türevi

$$ {}_{\propto}D_t^{\alpha}f(t)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{\propto}^{t}\frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}d\tau, & n-1<\alpha<n\\ \frac{d^n}{dt^n}\,f(t), & \alpha=n\end{cases} \tag{1.15}$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny, 1999).

1.7. Grünwald-Letnikov Kesirli Türevi

$\alpha>0$ olmak üzere f fonksiyonunun α.mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevi,

$$D^{\alpha}f(t)=\lim_{n\to\infty}h^{-\alpha}\sum_{t=0}^{n}(-1)^t\binom{\alpha}{t}f(t-ih) \tag{1.16}$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny,1999).

1.8. Kesirli Kuvvet Serisi

f fonksiyonu,

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,(t-t_0)^{n\alpha},\quad 0\le n-1<\alpha\le n\,,t_0\le t<t_0+R \tag{1.17}$$

şeklinde verilsin. Eğer $D^{n\alpha}f(t)$, (t,t_0+R), $n=0,1,2,\cdots$ üzerinde sürekli ise $D^{n\alpha}=D^{\alpha}D^{\alpha}\cdots D^{\alpha}{}_{(n\,kez)}$ve R, yakınsaklık yarıçapı olmak üzere c_n katsayıları

$$c_n=\frac{D^{\alpha}f(t_0)}{\Gamma(n\alpha+1)},\ n=0,1,2,\cdots \tag{1.18}$$

formülü ile verilir (El-Ajou ve diğ., 2015).

1.9. Çoklu Kesirli Kuvvet Serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)(t-t_0)^{n\alpha} = f_0(x) + f_1(x)(t-t_0)^{\alpha} + f_2(x)(t-t_0)^{2\alpha} + \cdots$$

$(0 \leq n-1 < \alpha \leq n, t \geq t_0)$ (1.19)

şeklinde bir kuvvet serisine $t = t_0$ için çoklu kesirli kuvvet serisi denir (Argub ve diğ., 2013).

2. RESİDUAL KUVVET SERİSİ YÖNTEMİ (RPSM)

Residual kuvvet serisi yönteminin ana fikrini göstermek için,

$$D_y^{n\alpha}u(x,y)+R[x]u(x,y)+N[x]u(x,y)=g(x,y), \tag{2.1}$$

$$y>0, x\in R, n-1<n\alpha<n$$

lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemi,

$$f_0(x)=f(x) \text{ ve } f_{n-1}(x)=D_y^{(n-1)\alpha}u(x,0)=h(x) \tag{2.2}$$

başlangıç koşulları ile alınsın. Burada, $D_y^{n\alpha}=\frac{\partial^{n\alpha}}{\partial y^{n\alpha}}$, $R[x]$ lineer operatör, $N[x]$ lineer olmayan operatör ve $g(x,y)$ sürekli bir fonksiyondur.

RPS yönteminde, (2.1) ve (2.2) denklemlerinin çözümü, $y=0$ başlangıç noktasında kesirli kuvvet serisinin genişlemesi olarak ifade edilir. Çözüm,

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)\frac{y^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}, \quad 0<\alpha\leq 1, x\in I\,, 0\leq y<R \tag{2.3}$$

şeklinde varsayılsın. O zaman, RPSM, kesirli kuvvet serileri sayesinde (2.1) ve (2.2) denklemlerinin analitik yaklaşık çözümünü sağlanır. $u_k(x,y)$ fonksiyonu,

$$u_k(x,y)=\sum_{n=0}^{k}f_n(x)\frac{y^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)}, 0<\alpha\leq 1, x\in I\,,\ 0\leq y<R\ , k=1,2,3,\cdots \tag{2.4}$$

şeklinde $u(x,y)$'nin k.nıncı yaklaşım serisi olarak tanımlanır. $u(x,y)$, (2.2) başlangıç koşulunu sağladığından $u(x,0)=f_0(x)=f(x)$ elde edilir. O zaman (2.4) denkleminden, $u(x,y)$'nin 1.RPS yaklaşık çözümü $u(x,y)=f(x)+f_1(x)\frac{y^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}$ şeklinde yazılabilir.Tekrar formüle edilirse,

$$u_k(x,y)=f(x)+f_1(x)\frac{y^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}+\sum_{n=2}^{k}f_n(x)\frac{y^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)} \tag{2.5}$$

$0 < \alpha \leq 1, x \in I\ , 0 \leq y < R, k = 1,2,3, \cdots$

şeklinde elde edilir. Daha sonra $f_n(x), n = 1,2,3, \cdots, k$ katsayılarının bulunabilmesi için,

$$Res(x,y) = D_y^{n\alpha} u(x,y) + R[x]u(x,y) + N[x]u(x,y) - g(x,y) \tag{2.6}$$

residual fonksiyonu ve

$$Res_k(x,y) = D_y^{n\alpha} u(x,y) + R[x]u_k(x,y) + N[x]u_k(x,y) - g(x,y) \tag{2.7}$$

$k = 1,2,3, \cdots$ olmak üzere k'ıncı residual fonksiyonu tanımlanır. Her $x \in I$ ve $y \geq 0$ için $Res(x,y) = 0$ ve $\lim_{k\to\infty} Res_k(x,y) = Res\,(x,y)$ olduğu aşikardır. Sabit fonksiyonun kesirli türevi Caputo anlamında sıfır olduğu için ve

y_0 sabit nokta olmak üzere $D_y^{(n-1)\alpha} Res_n(x,y_0) = 0, n = 1,2,3, \cdots, k$ eşitliği gösterilebilir.

Böylelikle (El-Ajouve diğ,, 2015), (Argub, 2013), (Bataineh ve diğ., 2013), (Argub ve diğ., 2013), (Abo-Hammour ve diğ., 2013),

$$D_y^{(n-1)\alpha} Res_k(x,y) = 0, 0 < \alpha \leq 1, x \in I\ , 0 \leq y < R\ \ , n = 1,2, \cdots, k \tag{2.8}$$

denklemi çözülerek (2.1) ve (2.2) denkleminin kesirli kuvvet serisinin $f_n(x)$,

$n = 1,2,3, \cdots, k$ katsayıları ve buradan da $u_n(x,y)$ yaklaşık çözümü elde edilir (Bayrak ve Demir, 2018), (Bayrak ve diğ., 2020a), (Bayrak ve diğ., 2020b), (Bayrak ve diğ., 2020c), (Bayrak ve diğ., 2020d).

Bu çalışmada, RPSM'nin doğruluğunun karşılaştırmak için mutlak ve bağıl hataları

$$\Delta_k = |\, u_{gerçek}(x,y) - u_{yaklaşık}(x,y)| \tag{2.9}$$

ve

$$\delta_k = \frac{|u_{gerçek}(\mathrm{x,y}) - u_{yaklaşık}(\mathrm{x,y})|}{|u_{gerçek}(\mathrm{x,y})|} \tag{2.10}$$

formülleri ile kullanılır.

3. HELMHOLTZ DENKLEMLERİNİN RESİDUAL KUVVET SERİSİ YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Örnek 3.1 :

$$\mathrm{D}_x^{\alpha}u + \mathrm{D}_y^{\alpha}u - u = 0, \qquad 1 < \alpha \leq 2 \tag{3.1}$$

kesirli Helmholtz denklemini,

$$u(0,y) = y,\ u_{\mathrm{x}}(0,\mathrm{y}) = y + \cosh(\mathrm{y}) \tag{3.2}$$

sınır koşulları ile ele alalım (Bayrak ve Tetik, 2020).

$u(x,y)'$nin yaklaşık çözümünü elde etmek için

$$\mathrm{Res}_{u_k}(x,\mathrm{y}) = \mathrm{D}_x^{\alpha}u_k + \mathrm{D}_y^{\alpha}u_k - u_k \tag{3.3}$$

k'ıncı residual fonksiyonunu tanımlayalım.

Başlangıç koşulunu

$$u_0(x,y) = u(0,\mathrm{y}) + xu_x(0,\mathrm{y}) = (x+1)y\ + x\cosh(y) = f_0(\mathrm{y}) \tag{3.4}$$

seçelim.

1.yaklaşım serisi $u_1(x,y)$,

$$u_1(x,y) = f_0(\mathrm{y}) + f_1(\mathrm{y})\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \tag{3.5}$$

fonksiyonu, $Res_{\mathrm{u}_1}(x,\mathrm{y})$ fonksiyonunda yerine yazarsak,

$$Res_{\mathrm{u}_1}(x,\mathrm{y}) = f_1(\mathrm{y}) + \mathrm{D}_y^{\alpha}f_0(\mathrm{y}) + \mathrm{D}_y^{\alpha}f_1(\mathrm{y})\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} - f_0(\mathrm{y}) - f_1(\mathrm{y})\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \tag{3.6}$$

elde ederiz ve (3.6) denkleminde $x = 0$ yazarsak,

$$f_1(\mathrm{y}) = y \tag{3.7}$$

buluruz.

Buradan, 1. RPS yaklaşık çözümünü

$$u_1(x,y) = (x+1)y + xcosh(y) + y\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \tag{3.8}$$

elde ederiz.

Benzer olarak, $f_2(\mathrm{y})$bilinmeyen katsayıyı belirlemek için

$$u_2(x,\mathrm{y}) = f_0(\mathrm{y}) + f_1(\mathrm{y})\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + f_2(\mathrm{y})\frac{x^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} \tag{3.9}$$

2. yaklaşım serisi, (3.3) denkleminde yerine yazarsak

$$\mathrm{Res}_{u_2}(x,\mathrm{y}) = f_1(\mathrm{y}) + f_2(\mathrm{y})\frac{x^\alpha}{\Gamma(2+\alpha)} + \mathrm{D}_y^\alpha f_0(\mathrm{y}) + \mathrm{D}_y^\alpha f_1(\mathrm{y})\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \mathrm{D}_y^\alpha f_2(\mathrm{y})\frac{x^{\alpha+1}}{\Gamma(2+\alpha)} -$$
$$f_0(\mathrm{y}) - f_1(\mathrm{y})\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - f_2(\mathrm{y})\frac{x^{\alpha+1}}{\Gamma(2+\alpha)} \tag{3.10}$$

elde ederiz.

$$D_x Res_{u_2}(0,y) = f_2(\mathrm{y}) + f_1''(y) + f_1(\mathrm{y}) = 0 \tag{3.11}$$

ve

$$f_2(\mathrm{y}) = y \tag{3.12}$$

buluruz.

Buradan, 2. RPS yaklaşık çözümünü

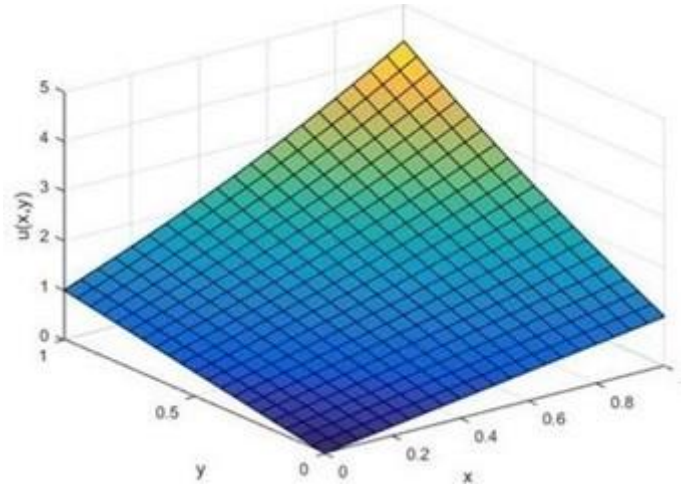
$$u_2(x,\mathrm{y}) = (x+1)y + xcosh(y) + y\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + y\frac{x^{\alpha+1}}{\Gamma(2+\alpha)}, \quad 1<\alpha \leq 2 \tag{3.13}$$

elde ederiz.

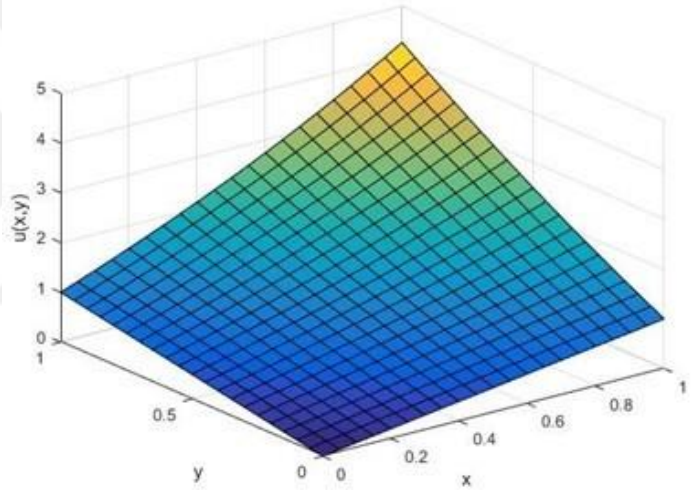
Böylece yaklaşık çözümün,

$$u(x,\mathrm{y}) = x\cosh(y) + y\,\mathrm{E}_{\alpha,1}(x^\alpha), \quad 0<\alpha \leq 1 \tag{3.14}$$

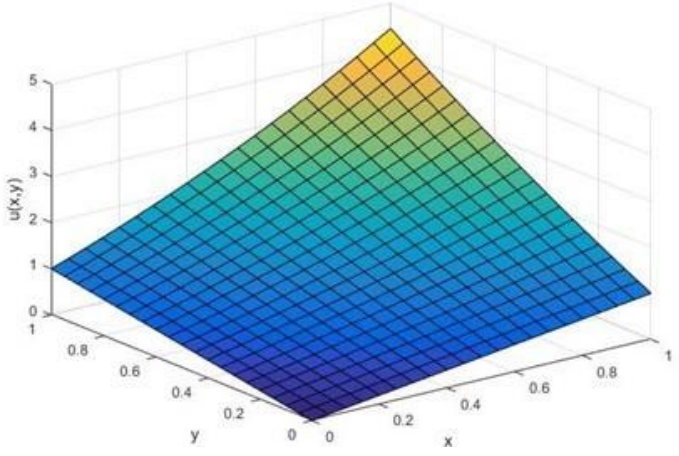
gerçek çözüme yakınsadığını görebiliriz.



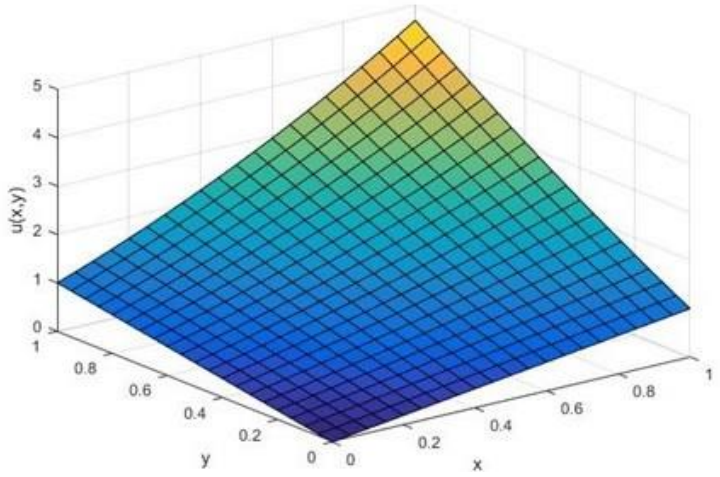
Şekil 3.1. $u(x,y)$'nin gerçek çözümü



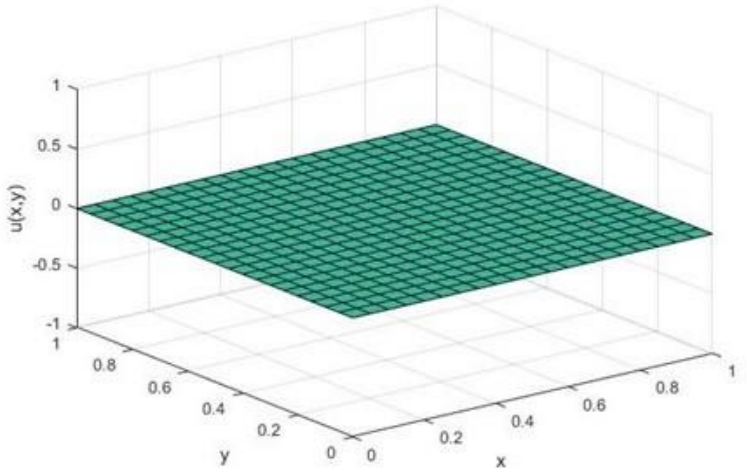
Şekil 3.2.$u(x,y)$'nin $\alpha = 2$ için yaklaşık çözümü



Şekil 3.3. $u(x,y)$'nin $\alpha = 1.8$ için yaklaşık çözümü



Şekil 3.4. $u(x,y)$'nin $\alpha = 1.6$ için yaklaşık çözümü



Şekil 3.5. $u(x,y)$' nin $\alpha = 2$ için mutlak hata grafiği

Tablo 3.1. $\alpha = 2$ için mutlak ve bağıl hatalar ile gerçek çözüm değerleri

x	y	$u_{gerçek}$	Δ_k	δ_k
0.2	0.2	0.44829	0	0
	0.4	0.70478	0	0
	0.6	0.96993	0	0
	0.8	1.24461	0	0
	1	1.53002	0	0
0.4	0.2	0.70639	0	0
	0.4	1.02916	0	0
	0.6	1.36928	0	0
	0.8	1.72843	0	0
	1	2.10906	0	0
0.6	0.2	0.97646	0	0
	0.4	1.37749	0	0
	0.6	1.80455	0	0
	0.8	2.26016	0	0
	1	2.74797	0	0

Tablo 3.1. (Devam) $\alpha = 2$ için mutlak ve bağıl hatalar ile gerçek çözüm değerleri

0.8	0.2	1.26116	0	0
	0.4	1.75507	0	0
	0.6	2.28370	0	0
	0.8	2.85038	0	0
	1	3.46001	0	0
1	0.2	1.56372	0	0
	0.4	2.16839	0	0
	0.6	2.81643	0	0
	0.8	3.51206	0	0
	1	4.26136	0	0

Tablo 3.2. $\alpha = 1.8$ için mutlak ve bağıl hatalar ile gerçek çözüm değerleri

x	y	$u_{gerçek}$	Δ_k	δ_k
0.2	0.2	0.47037	1.93e-02	4.09e-02
	0.4	0.74893	3.85e-02	5.14e-02
	0.6	1.03616	5.78e-02	5.57e-02
	0.8	1.33291	7.70e-02	5.78e-02
	1	1.64040	9.63e-02	5.87e-02
0.4	0.2	0.73800	2.32e-02	3.14e-02
	0.4	1.09237	4.63e-02	4.24e-02
	0.6	1.46410	6.95e-02	4.75e-02
	0.8	1.85486	9.27e-02	5.00e-02
	1	2.26709	1.16e-01	5.11e-02
0.6	0.2	1.01518	2.27e-02	2.24e-02
	0.4	1.45493	4.54e-02	3.12e-02
	0.6	1.92071	6.81e-02	3.55e-02
	0.8	2.41504	9.08e-02	3.76e-02
	1	2.94157	1.13e-01	3.86e-02
0.8	0.2	1.30618,	1.96e-02	1.50e-02
	0.4	1.84512	3.93e-02	2.13e-02
	0.6	2.41876	5.89e-02	2.43e-02
	0.8	3.03047	7.85e-02	2.59e-02
	1	3.68511	9.81e-02	2.66e-02
1	0.2	1.61490	1.47e-02	9.12e-03
	0.4	2.27074	2.95e-02	1.30e-02
	0.6	2.96996	4.42e-02	1.49e-02
	0.8	3.71676	5.89e-02	1.59e-02
	1	4.51724	7.37e-02	1.63e-02

Tablo 3.3. $\alpha = 1.6$ için mutlak ve bağıl hatalar ile gerçek çözüm değerleri

x	y	$u_{gerçek}$	Δ_k	δ_k
0.2	0.2	0.50086	4.52e-02	9.03e-02
	0.4	0.80991	9.04e-02	1.12e-01
	0.6	1.12764	1.36e-01	1.20e-01
	0.8	1.45489	1.81e-01	1.24e-01
	1	1.79286	2.26e-01	1.26e-01
0.4	0.2	0.77596	4.92e-02	6.34e-02
	0.4	1.16830	9.83e-02	8.42e-02
	0.6	1.57799	1.48e-01	9.35e-02
	0.8	2.00672	1.97e-01	9.80e-02
	1	2.45691	2.46e-01	1.00e-01
0.6	0.2	1.05857	4.47e-02	4.23e-02
	0.4	1.54171	8.95e-02	5.80e-02
	0.6	2.05087	1.34e-01	6.55e-02
	0.8	2.58859	1.79e-01	6.91e-02
	1	3.15851	2.24e-01	7.08e-02
0.8	0.2	1.35488	3.58e-02	2.64e-02
	0.4	1.94252	7.16e-02	3.68e-02
	0.6	2.56486	1.07e-01	4.19e-02
	0.8	3.22527	1.43e-01	4.44e-02
	1	3.92862	1.79e-01	4.55e-02
1	0.2	1.66953	2.38e-02	1.43e-02
	0.4	2.38000	4.77e-02	2.00e-02
	0.6	3.13385	7.15e-02	2.28e-02
	0.8	3.93528	9.53e-02	2.42e-02
	1	4.79039	1.19e-01	2.49e-02

Örnek 3.2:

$$\mathrm{D}_x^{2\alpha}u + \mathrm{D}_y^{2\,\alpha}v - u = 0, \qquad 0 < \alpha \leq 1 \tag{3.15}$$

$$\mathrm{D}_x^{2\alpha}v + \mathrm{D}_y^{2\alpha}u - v = 0, \tag{3.16}$$

çift kesirli homojen Helmholtz denklem sistemini,

$$u(0,y) = 0, \mathrm{D}_x^{\alpha}u(0,\mathrm{y}) = \mathrm{E}_{\alpha,1}(\mathrm{y}^{\alpha}), \tag{3.17}$$

$$v(0,y) = 0, \mathrm{D}_x^{\alpha}v(0,\mathrm{y}) = -\mathrm{E}_{\alpha,1}(\mathrm{y}^{\alpha}), \tag{3.18}$$

koşulları ile ele alalım (Bayrak ve Tetik, 2020) .

$$Res_{u_k}(x,\mathrm{y}) = \mathrm{D}_x^{2\alpha}u_k + \mathrm{D}_y^{2\alpha}v_k - u_k \tag{3.19}$$

$$Res_{v_k}(x,\mathrm{y}) = \mathrm{D}_x^{2\alpha} v_k + \mathrm{D}_y^{2\alpha} u_k - v_k \tag{3.20}$$

k'ıncı residual fonksiyonunu tanımlayalım.

$u(\mathrm{x},\mathrm{y})$ ve $v(x,y)$'nin yaklaşık çözümünü elde etmek için RPSM'i uygulayalım. Başlangıç koşullarını

$$u_0(x,y) = u(0,y) + \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} u_x(0,y) = \mathrm{E}_{\alpha,1}(\mathrm{y}^\alpha) \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} = f_0(y) \tag{3.21}$$

ve

$$v_0(x,y) = v(0,y) + \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} v_x(0,y) = -\mathrm{E}_{\alpha,1}(\mathrm{y}^\alpha) \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} = g_0(y) \tag{3.22}$$

şeklinde seçelim.

1.yaklaşım serileri $u_1(x,\mathrm{y})$ ve $v_1(x,\mathrm{y})$,

$$u_1(x,\mathrm{y}) = f_0(\mathrm{y}) + f_1(\mathrm{y}) \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \tag{3.23}$$

$$v_1(x,\mathrm{y}) = \mathrm{g}_0(y) + \mathrm{g}_1(y) \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \tag{3.24}$$

fonksiyonları, $Res_{\mathrm{u}_1}(x,\mathrm{y})$ ve $Res_{\mathrm{v}_1}(x,\mathrm{y})$ fonksiyonlarında yerine yazarsak,

$$Res_{u_1}(x,\mathrm{y}) = f_1(\mathrm{y}) + \mathrm{D}_y^{2\alpha} g_0(\mathrm{y}) + \mathrm{D}_y^{2\alpha} g_1(\mathrm{y}) \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} - f_0(\mathrm{y}) - f_1(\mathrm{y}) \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \tag{3.25}$$

$$Res_{v_1}(x,\mathrm{y}) = g_1(\mathrm{y}) + \mathrm{D}_y^{2\alpha} f_0(\mathrm{y}) + \mathrm{D}_y^{2\alpha} f_1(\mathrm{y}) \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} - g_0(\mathrm{y}) - g_1(\mathrm{y}) \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \tag{3.26}$$

elde ederiz ve (3.25) ve (3.26) denklemlerinde $x = 0$ yazarsak,

$$f_1(\mathrm{y}) = 0 \tag{3.27}$$

ve

$$g_1(\mathrm{y}) = 0 \tag{3.28}$$

buluruz. Buradan 1. RPS yaklaşık çözümünü

$$u_1(x,\mathrm{y}) = \mathrm{E}_{\alpha,1}(\mathrm{y}^{\alpha})\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \tag{3.29}$$

ve

$$v_1(x,\mathrm{y}) = -\mathrm{E}_{\alpha,1}(\mathrm{y}^{\alpha})\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \tag{3.30}$$

elde ederiz.

Benzer şekilde $f_2(\mathrm{y})$ve $g_2(\mathrm{y})$ bilinmeyen katsayılarını belirlemek için 2. yaklaşım serileri $u_2(x,\mathrm{y})$ ve $v_2(x,\mathrm{y})$,

$$u_2(x,\mathrm{y}) = f_0(\mathrm{y}) + f_1(\mathrm{y})\frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + f_2(\mathrm{y})\frac{x^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \tag{3.31}$$

$$v_2(x,\mathrm{y}) = g_0(\mathrm{y}) + g_1(\mathrm{y})\frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + g_2(\mathrm{y})\frac{x^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \tag{3.32}$$

$Res_{u_2}(x,\mathrm{y})$ ve $Res_{v_2}(x,\mathrm{y})$ fonksiyonlarında yerine yazıp (2.8) denklemini uygularsak,

$$f_2(\mathrm{y}) = 2\mathrm{E}_{\alpha,1}(y^{\alpha}) \tag{3.33}$$

ve

$$g_2(\mathrm{y}) = -2\mathrm{E}_{\alpha,1}(y^{\alpha}) \tag{3.34}$$

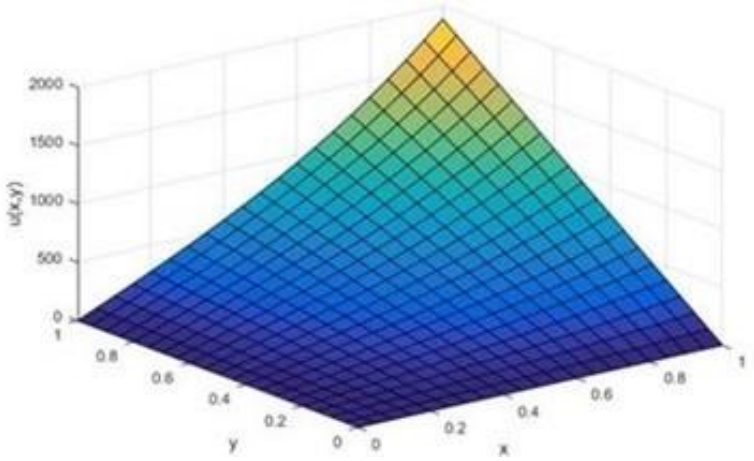
elde ederiz.

Böylece yaklaşık çözümlerin

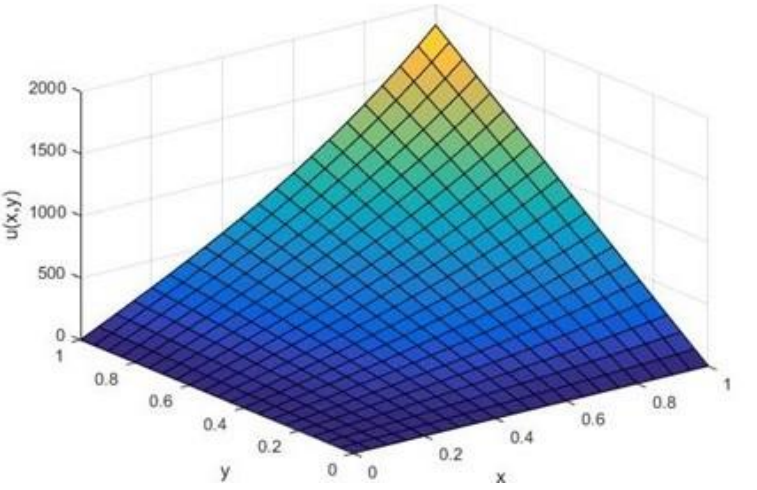
$$u(x,y) = \mathrm{E}_{\alpha,1}(\mathrm{y}^{\alpha})\left[\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + 2\frac{x^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} + \cdots\right] = \mathrm{E}_{\alpha,1}(\mathrm{y}^{\alpha})\frac{\sinh_{\alpha}(\sqrt{2}x^{\alpha})}{\sqrt{2}} \tag{3.35}$$

$$v(x,y) = -\mathrm{E}_{\alpha,1}(\mathrm{y}^{\alpha})\left[\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + 2\frac{x^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} + \cdots\right] = -\mathrm{E}_{\alpha,1}(\mathrm{y}^{\alpha})\frac{\sinh_{\alpha}(\sqrt{2}x^{\alpha})}{\sqrt{2}} \tag{3.36}$$

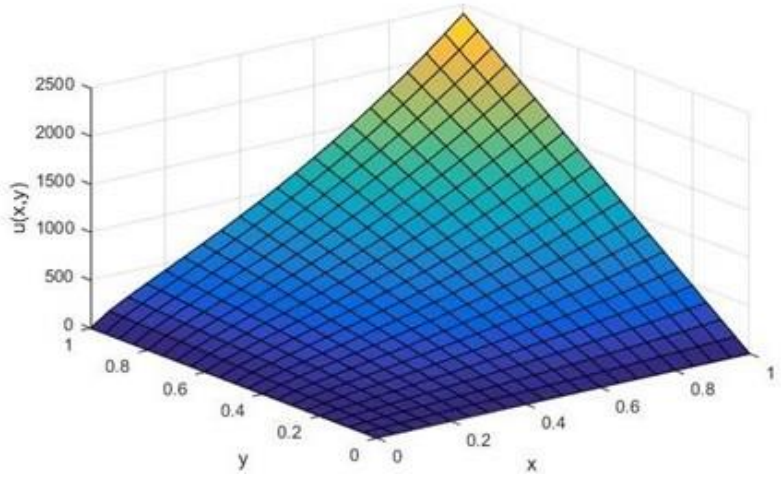
gerçek çözümlere yakınsadıkları görülebilir.



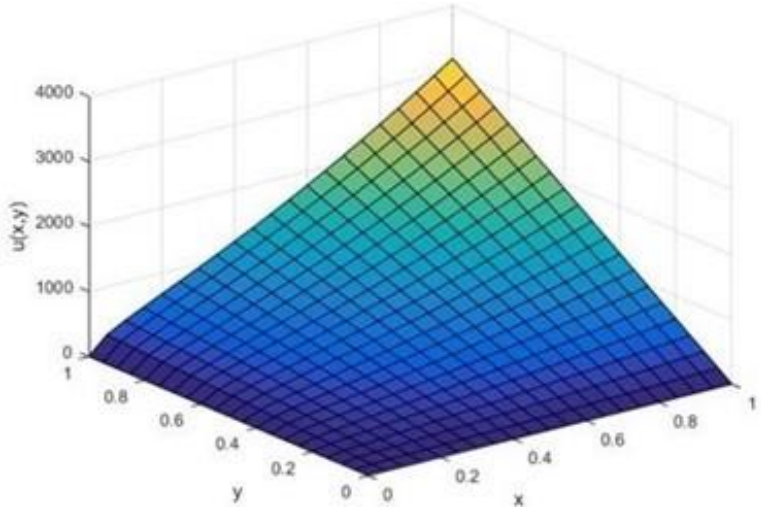
Şekil 3.6. $u(x, y)$'nin gerçek çözümü



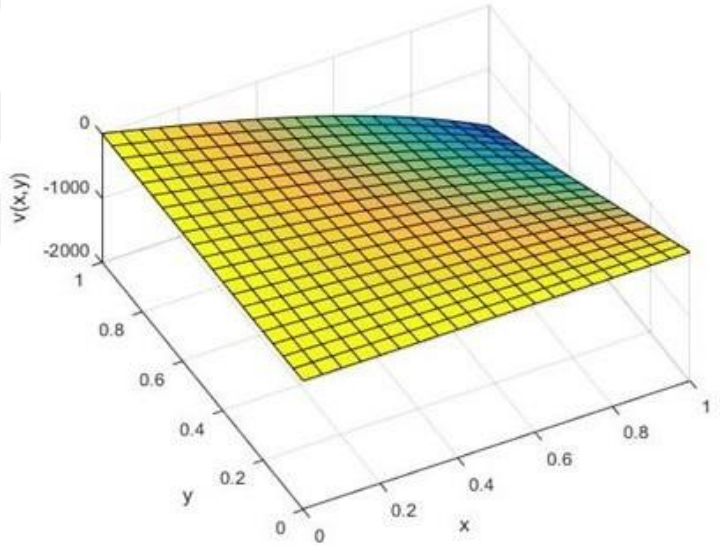
Şekil 3.7. $u(x, y)$'nin $\alpha = 1$ için yaklaşık çözümü



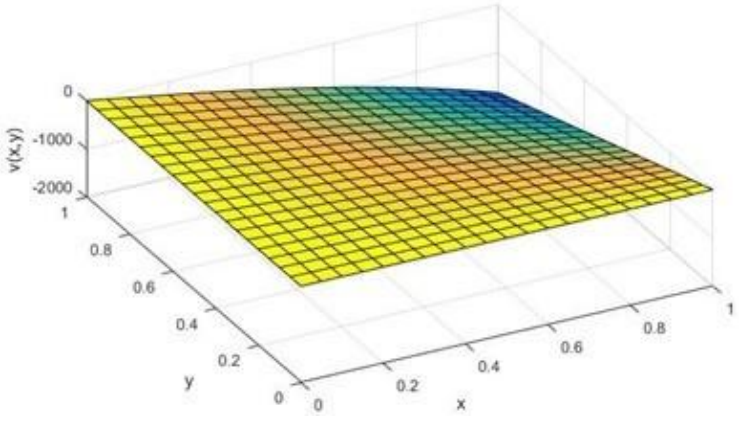
Şekil 3.8. $u(x, y)$'nin $\alpha = 0.8$ için yaklaşık çözümü



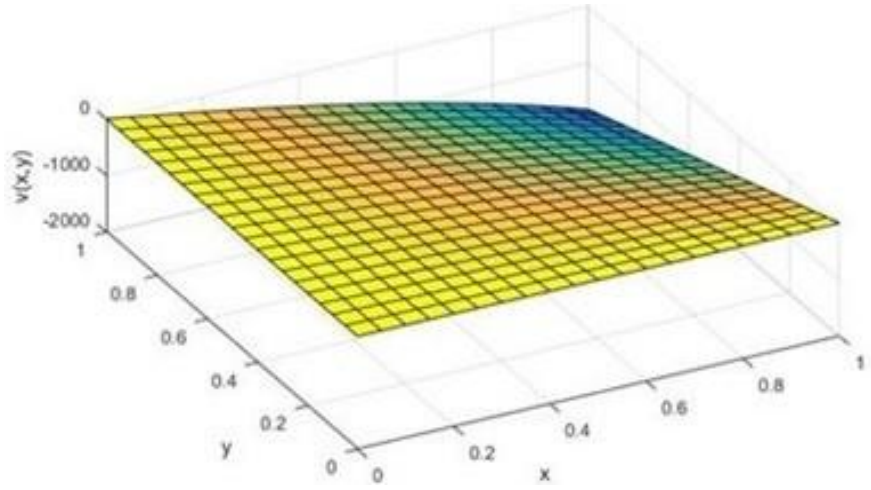
Şekil 3.9. $u(x, y)$'nin $\alpha = 0.6$ için yaklaşık çözümü



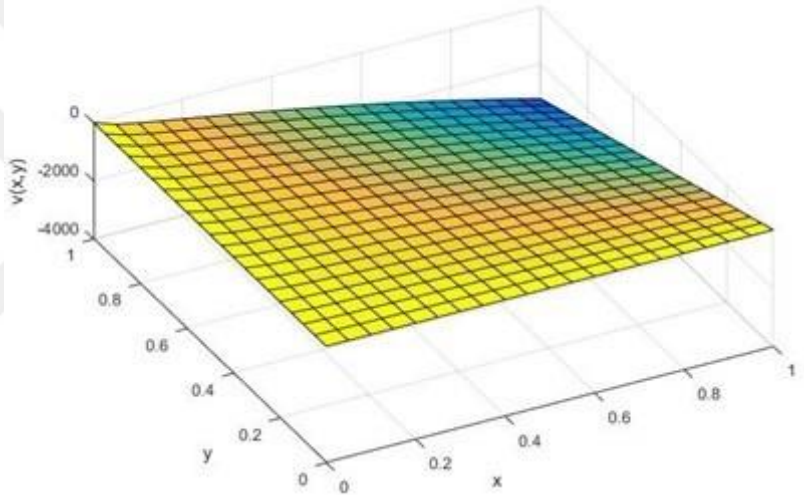
Şekil 3.10. $v(x, y)$'nin gerçek çözümü



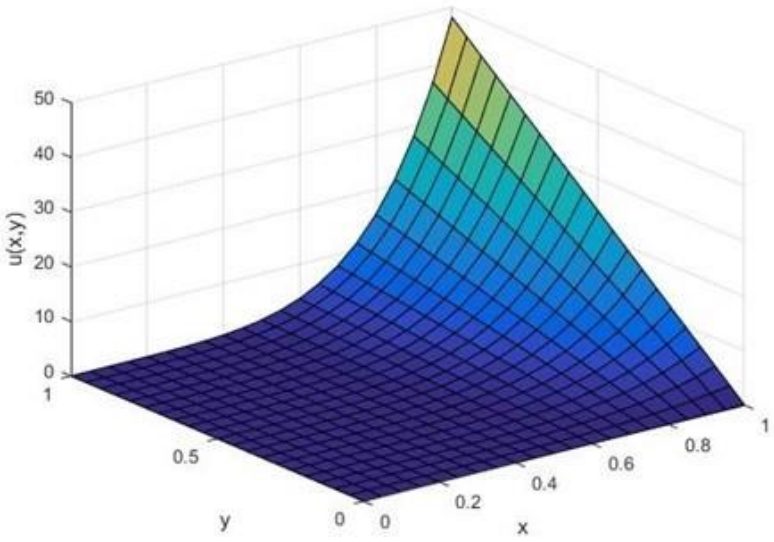
Şekil 3.11. $v(x, y)$'nin $\alpha = 1$ için yaklaşık çözümü



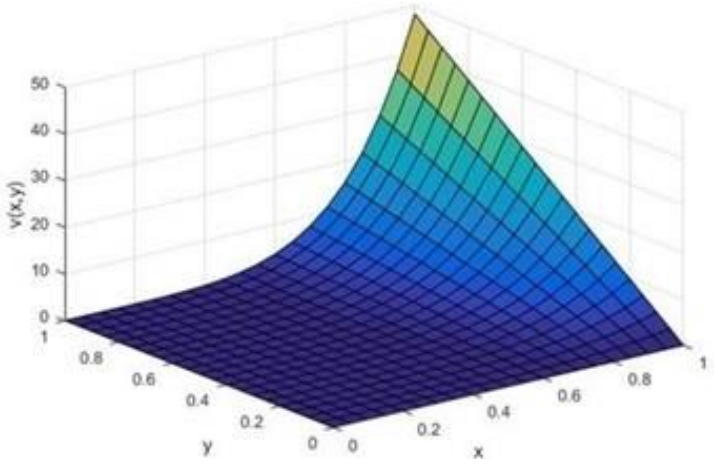
Şekil 3.12. $v(x,y)$'nin $\alpha = 0.8$ için yaklaşık çözümü



Şekil 3.13. $v(x,y)$'nin $\alpha = 0.6$ için yaklaşık çözümü



Şekil 3.14. u(x,y)'nin $\alpha = 1$ için mutlak hata grafiği



Şekil 3.15. $v(x,y)$'nin $\alpha = 1$ için mutlak hata grafiği

Tablo 3.4. $\alpha = 1$ için mutlak ve bağıl hatalar ile gerçek çözüm değerleri

x	y	$u_{gerçek}$	$v_{gerçek}$	Δ_k	δ_k
0.2	0.2	0.24755	-0.24755	1.31e-05	5.27e-05
	0.4	0.30236	-0.30236	1.59e-05	5.27e-05
	0.6	0.36930	-0.36930	1.95e-05	5.27e-05
	0.8	0.45107	-0.45107	2.38e-05	5.27e-05
	1	0.55093	-0.55093	2.91e-05	5.27e-05
0.4	0.2	0.51504	-0.51504	4.20e-04	8.16e-04
	0.4	0.62907	-0.62907	5.13e-04	8.16e-04
	0.6	0.76835	-0.76835	6.27e-04	8.16e-04
	0.8	0.93846	-0.93846	7.65e-04	8.16e-04
	1	1.14624	-1.14624	9.35e-04	8.16e-04
0.6	0.2	0.82400	-0.82400	3.22e-03	3.92e-03
	0.4	1.00644	-1.00644	3.93e-03	3.92e-03
	0.6	1.22927	-1.22927	4.80e-03	3.92e-03
	0.8	1.50143	-1.50143	5.87e-03	3.92e-03
	1	1.83385	-1.83385	7.17e-03	3.92e-03
0.8	0.2	1.19933	-1.19933	1.38e-02	1.16e-02
	0.4	1.46486	-1.46486	1.68e-02	1.16e-02
	0.6	1.78919	-1.78919	2.05e-02	1.16e-02
	0.8	2.18532	-2.18532	2.51e-02	1.16e-02
	1	2.66916	-2.66916	3.06e-02	1.16e-02
1	0.2	1.67124	-1.67124	4.27e-02	2.62e-02
	0.4	2.04126	-2.04126	5.22e-02	2.62e-02
	0.6	2.49320	-2.49320	6.37e-02	2.62e-02
	0.8	3.04521	-3.04521	7.78e-02	2.62e-02
	1	3.71942	-3.71942	9.50e-02	2.62e-02

Tablo 3.5. $\alpha = 0.8$ için mutlak ve bağıl hatalar ile gerçek çözüm değerleri

x	y	$u_{gerçek}$	$v_{gerçek}$	Δ_k	δ_k
0.2	0.2	0.34566	-0.34566	3.34e-02	8.82e-02
	0.4	0.42219	-0.42219	4.08e-02	8.82e-02
	0.6	0.51567	-0.51567	4.99e-02	8.82e-02
	0.8	0.62984	-0.62984	6.09e-02	8.82e-02
	1	0.76928	-0.76928	7.44e-02	8.82e-02
0.4	0.2	0.63303	-0.63303	8.79e-02	1.22e-01
	0.4	0.77318	-0.77318	1.07e-01	1.22e-01
	0.6	0.94437	-0.94437	1.31e-01	1.22e-01
	0.8	1.15345	-1.15345	1.60e-01	1.22e-01
	1	1.40883	-1.40883	1.96e-01	1.22e-01
0.6	0.2	0.93654	-0.93654	1.75e-01	1.58e-01
	0.4	1.14389	-1.14389	2.14e-01	1.58e-01
	0.6	1.39716	-1.39716	2.62e-01	1.58e-01
	0.8	1.70649	-1.70649	3.20e-01	1.58e-01
	1	2.08431	-2.08431	3.90e-01	1.58e-01
0.8	0.2	1.27728	-1.27728	2.99e-01	1.90e-01
	0.4	1.56007	-1.56007	3.66e-01	1.90e-01
	0.6	1.90547	-1.90547	4.47e-01	1.90e-01
	0.8	2.32735	-2.32735	5.45e-01	1.90e-01
	1	2.84263	-2.84263	6.66e-01	1.90e-01
1	0.2	1.67124	-1.67124	4.60e-01	2.16e-01
	0.4	2.04126	-2.04126	5.61e-01	2.16e-01
	0.6	2.49320	-2.49320	6.86e-01	2.16e-01
	0.8	3.04521	-3.04521	8.37e-01	2.16e-01
	1	3.71942	-3.71942	1.02e+00	2.16e-01

Tablo 3.6. $\alpha = 0.6$ için mutlak ve bağıl hatalar ile gerçek çözüm değerleri

x	y	$u_{gerçek}$	$v_{gerçek}$	Δ_k	δ_k
0.2	0.2	0.48782	-0.48782	1.13e-01	1.88e-01
	0.4	0.59583	-0.59583	1.38e-01	1.88e-01
	0.6	0.72775	-0.72775	1.69e-01	1.88e-01
	0.8	0.88887	-0.88887	2.06e-01	1.88e-01
	1	1.08567	-1.08567	2.52e-01	1.88e-01
0.4	0.2	0.78574	-0.78574	2.83e-01	2.65e-01
	0.4	0.95970	-0.95970	3.46e-01	2.65e-01
	0.6	1.17218	-1.17218	4.22e-01	2.65e-01
	0.8	1.43171	-1.43171	5.16e-01	2.65e-01
	1	1.74869	-1.74869	6.30e-01	2.65e-01
0.6	0.2	1.07034	-1.07034	5.17e-01	3.26e-01
	0.4	1.30731	-1.30731	6.31e-01	3.26e-01
	0.6	1.59676	-1.59676	7.71e-01	3.26e-01
	0.8	1.95028	-1.95028	9.42e-01	3.26e-01
	1	2.38208	-2.38208	1.15e+00	3.26e-01

Tablo 3.6. (Devam) $\alpha = 0.6$ için mutlak ve bağıl hatalar ile gerçek çözüm değerleri

0.8	0.2	1.36243	-1.36243	8.08e-01	3.72e-01
	0.4	1.66407	-1.66407	9.87e-01	3.72e-01
	0.6	2.03250	-2.03250	1.21e+00	3.72e-01
	0.8	2.48250	-2.48250	1.47e+00	3.72e-01
	1	3.03214	-3.03214	1.80e+00	3.72e-01
1	0.2	1.67124	-1.67124	1.15e+00	4.08e-01
	0.4	2.04126	-2.04126	1.41e+00	4.08e-01
	0.6	2.49320	-2.49320	1.72e+00	4.08e-01
	0.8	3.04521	-3.04521	2.10e+00	4.08e-01
	1	3.71942	-3.71942	2.57e+00	4.08e-01

Örnek 3.3.

$$D_x^{\alpha} u + u_{yy} + u = xsiny, \qquad 1 < \alpha \leq 2 \tag{3.37}$$

kesirli mertebeden Helmholtz denklemini

$$u(0, y) = 1, u_x(0, y) = 0, \tag{3.38}$$

koşulları ile ele alalım.

$u(\mathrm{x}, y)$'nin yaklaşık çözümünü elde etmek için residual kuvvet serisi metodunu uygulayalım. Başlangıç koşulunu

$$u_0(x, y) = u(0, y) + xu_x(0, y) = f_0(y) = 1 \tag{3.39}$$

şeklinde seçelim.

$f_1(y)$ bilinmeyen katsayıyı belirlemek için 1.yaklaşım serisi $u_1(x, y)$,

$$u_1(x, y) = f_0(y) + f_1(y)\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \tag{3.40}$$

fonksiyonu, $Res_{u_1}(x, y)$ fonksiyonunda yerine yazarsak,

$$Res_{u_1}(x, y) = f_1(y) + f_0''(y) + f_1''(y)\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + f_0(y) + f_1(y)\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} - xsiny \tag{3.41}$$

elde ederiz ve $x = 0$ yazarsak,

$$f_1(y) = -1 \tag{3.42}$$

buluruz.

Buradan 1.RPS yaklaşık çözümünü

$$u_1(x,y) = 1 - \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \tag{3.43}$$

elde ederiz.

Benzer olarak, $f_2(y)$ bilinmeyen katsayıyı belirlemek için 2.yaklaşım serisi:

$$u_2(x,y) = f_0(y) + f_1(y)\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + f_2(y)\frac{x^{\alpha+1}}{\Gamma(2+\alpha)} \tag{3.44}$$

$$Res_{u_2}(x,y) = f_1(y) + xf_2(y) + f_0''(y) + f_1''(y)\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + f_2''(y)\frac{x^{\alpha+1}}{\Gamma(2+\alpha)} + f_0(y) + f_1(y)\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + f_2(y)\frac{x^{\alpha+1}}{\Gamma(2+\alpha)} - xsin(y) \tag{3.45}$$

elde ederiz ve (2.8) denkleminde yerine yazarsak,

$$D_x Res_{u_2}(0,y) = f_2(y) - sin(y) = 0 \tag{3.46}$$

buluruz ve

$$f_2(y) = sin(y) \tag{3.47}$$

elde ederiz.

Buradan 2.RPS yaklaşık çözümünü

$$u_2(x,y) = 1 - \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + sin(y)\frac{x^{\alpha+1}}{\Gamma(2+\alpha)} \tag{3.48}$$

yazarız.

Benzer olarak,

$$u_3(x,y) = f_0(y) + f_1(y)\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + f_2(y)\frac{x^{\alpha+1}}{\Gamma(2+\alpha)} + f_3(y)\frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \tag{3.49}$$

ve

$$Res_{u_3}(x,y) = f_1(y)+xf_2(y) + f_3(y)\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + f_0''(y) + f_1''(y)\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + f_2''(y)\frac{x^{\alpha+1}}{\Gamma(2+\alpha)} + f_3''(y)\frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + f_0(y) + f_1(y)\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + f_2(y)\frac{x^{\alpha+1}}{\Gamma(1+\alpha)} + f_3(y)\frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} - xsin(y) \quad (3.50)$$

işlemlerini uygularsak ve

$$D_x^\alpha Res_{u_3}(0,y) = f_3(y) + f_1''(y) + f_1(y) = 0 \quad (3.51)$$

yerine yazarsak

$$f_3(y) = 1 \quad (3.52)$$

elde ederiz.

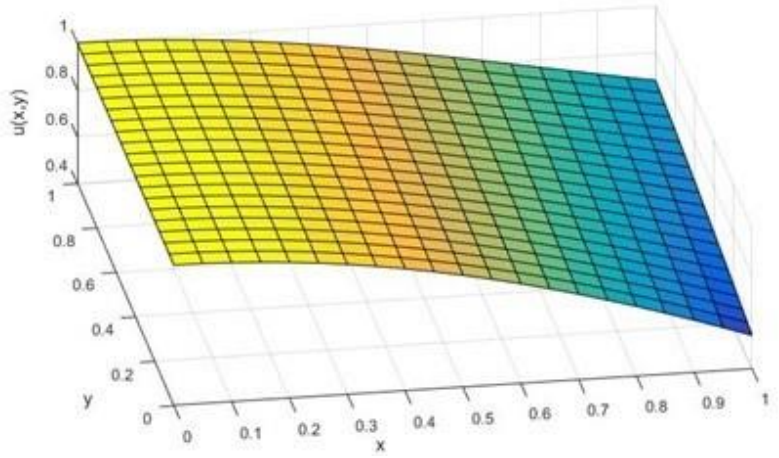
Böylece yaklaşık çözümün

$$u(x,y) = 1 - \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + siny\frac{x^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + \cdots \quad (3.53)$$

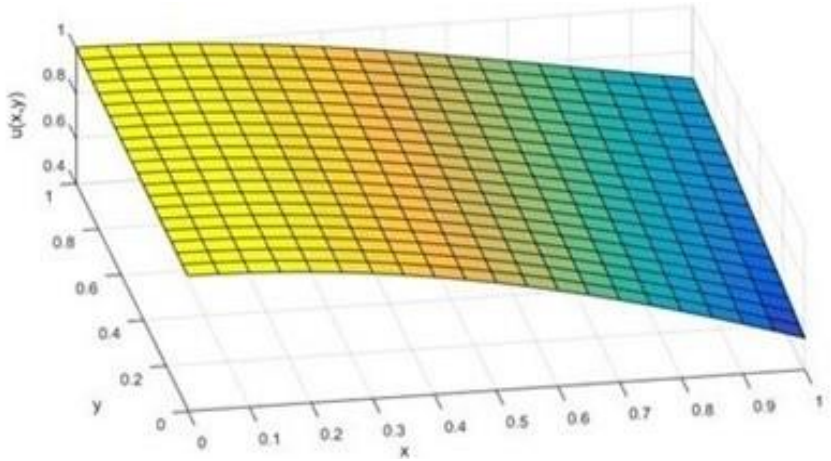
$\alpha = 2$ için;

$$u(x,y) = \frac{x^3}{3!}sin(y) + cos(x) \quad (3.54)$$

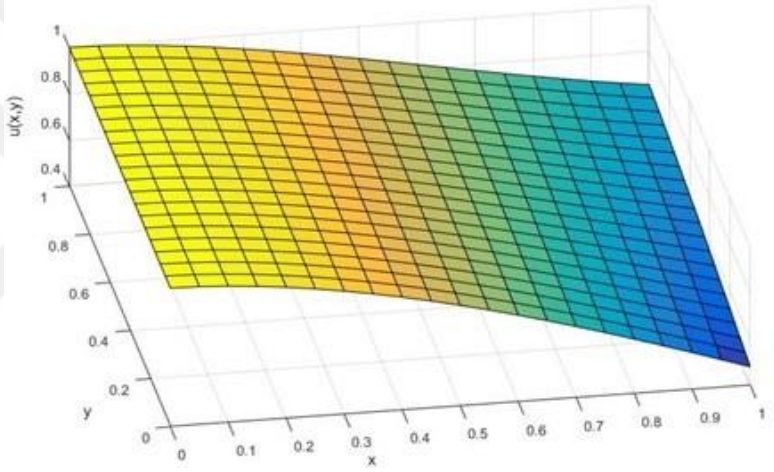
gerçek çözüme yakınsadığını kolayca gözlemleyebiliriz.



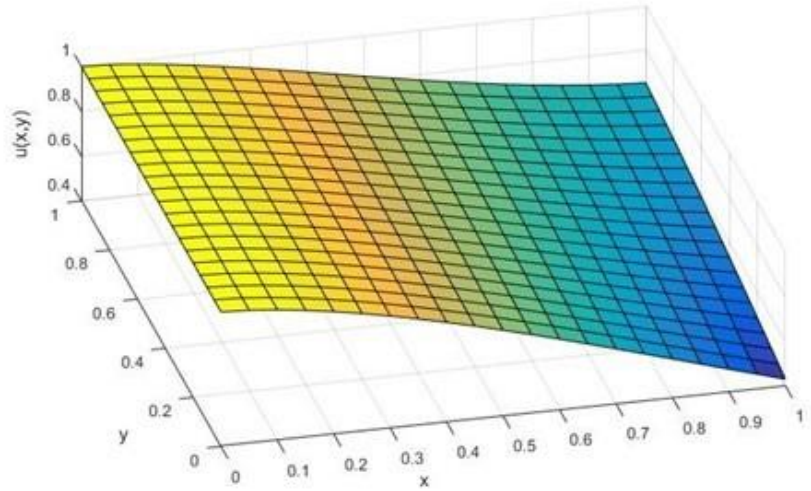
Şekil 3.16. $u(x,y)$'nin gerçek çözümü



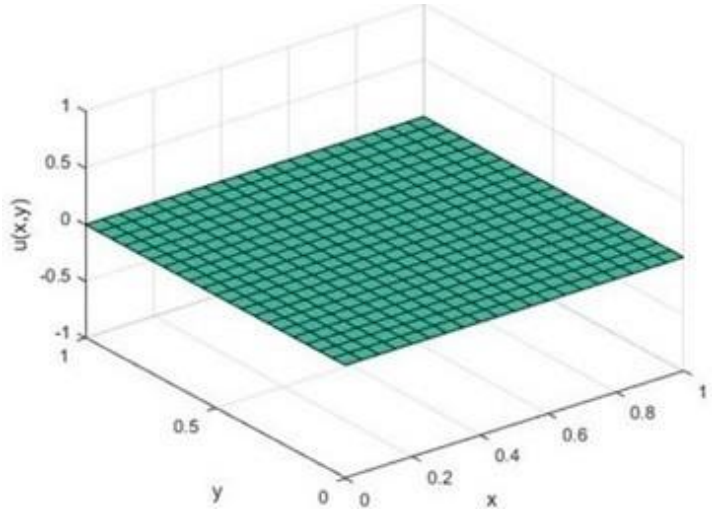
Şekil 3.17. $u(x,y)$'nin $\alpha = 2$ için yaklaşık çözümü



Şekil 3.18. $u(x,y)$'nin $\alpha = 1.8$ için yaklaşık çözümü



Şekil 3.19. $u(x,y)$'nin $\alpha = 1.6$ için yaklaşık çözümü



Şekil 3.20. $u(x,y)$'nin $\alpha = 2$ için mutlak hata grafiği

Tablo 3.7. Gerçek çözüm ve çeşitli α değerleri için yaklaşık çözüm sonuçları

x	y	$u_{gerçek}$	$\alpha = 2$	$\alpha = 1.8$	$\alpha = 1.6$
0.2	0.2	0.98033	0.98033	0.96778	0.94830
	0.4	0.98059	0.98059	0.96822	0.94908
	0.6	0.98082	0.98082	0.96864	0.94980
	0.8	0.98102	0.98102	0.96899	0.95042
	1	0.98119	0.98119	0.96929	0.95093
0.4	0.2	0.92319	0.92319	0.89138	0.85034
	0.4	0.92522	0.92522	0.89450	0.85508
	0.6	0.92709	0.92709	0.89737	0.85943
	0.8	0.92872	0.92872	0.89988	0.86323
	1	0.93004	0.93004	0.90191	0.86631
0.6	0.2	0.83255	0.83255	0.78417	0.73040
	0.4	0.83942	0.83942	0.79389	0.74400
	0.6	0.84573	0.84573	0.80282	0.75649
	0.8	0.85122	0.85122	0.81061	0.76738
	1	0.85569	0.85569	0.81693	0.77623
0.8	0.2	0.71402	0.71402	0.65695	0.60358
	0.4	0.73030	0.73030	0.67871	0.63231
	0.6	0.74525	0.74525	0.69869	0.65870
	0.8	0.75828	0.75828	0.71611	0.68170
	1	0.76887	0.76887	0.73026	0.70039
1	0.2	0.57478	0.57478	0.52057	0.48289
	0.4	0.60657	0.60657	0.56120	0.53420
	0.6	0.63577	0.63577	0.59853	0.58134
	0.8	0.66123	0.66123	0.63107	0.62243
	1	0.68191	0.68191	0.65751	0.65582

Örnek 3.4.:

$$D_x^{\alpha}u + u_{yy} + xu = 2 + x^3 + xy,\ \ 1 < \alpha \leq 2 \tag{3.55}$$

kesirli mertebeden Helmholtz denklemini

$$u(0,y) = y\,, u_x(0,y) = 0 \tag{3.56}$$

koşulları ile ele alalım.

$u(\mathrm{x}, y)$'nin yaklaşık çözümünü elde etmek için RPSM'i uygulayalım.

$$u_0(x,y) = u(0,y) + xu_x(0,y) = y = f_0(y) \tag{3.57}$$

başlangıç koşulunu alalım.

$f_1(y)$ bilinmeyen katsayıyı belirlemek için,

$$u_1(x,y) = f_0(y) + f_1(y)\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \tag{3.58}$$

fonksiyonunu

$$Res_{u_1}(x,y) = f_1(y) + D_y^{\alpha}f_0(y) + D_y^{\alpha}f_1(y)\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + xf_0(y) + xf_1(y)\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} - 2 - x^3 - xy \tag{3.59}$$

yerine yazarsak,

$$f_1(y) = 2 \tag{3.60}$$

elde ederiz.

$f_2(y)$ bilinmeyen katsayıyı belirlemek için,

$$u_2(x,y) = f_0(y) + f_1(y)\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + f_2(y)\frac{x^{\alpha+1}}{\Gamma(2+\alpha)} \tag{3.61}$$

fonksiyonunu

$$Res_{u_2}(x,y) = f_1(y) + xf_2(y) + D_y^{\alpha} f_0(y) + D_y^{\alpha} f_1(y)\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + D_y^{\alpha} f_2(y)\frac{x^{\alpha+1}}{\Gamma(2+\alpha)} +$$
$$xf_0(y) + xf_1(y)\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + xf_2(y)\frac{x^{\alpha+1}}{\Gamma(2+\alpha)} - 2 - x^3 - xy \quad (3.62)$$

yerine yazdığımızda ve

$$D_x Res_{u_2}(x,y) = f_2(y) + D_y^{\alpha} f_1(y)\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + D_y^{\alpha} f_2(y)\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + f_0(y) +$$
$$f_1(y)\frac{\Gamma(2+\alpha)x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\alpha)} + f_2(y)\frac{\Gamma(3+\alpha)x^{\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)\Gamma(2+\alpha)} - 3x^2 - y \quad (3.63)$$

uyguladığımızda

$$f_2(y) = 0 \quad (3.64)$$

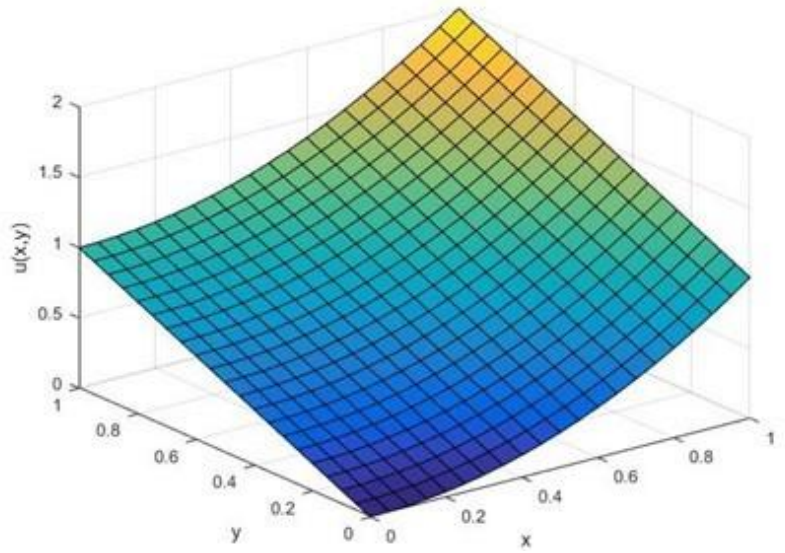
elde ederiz. Buradan,

$$u(x,y) = y + \frac{2x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + 0 + \cdots \quad (3.65)$$

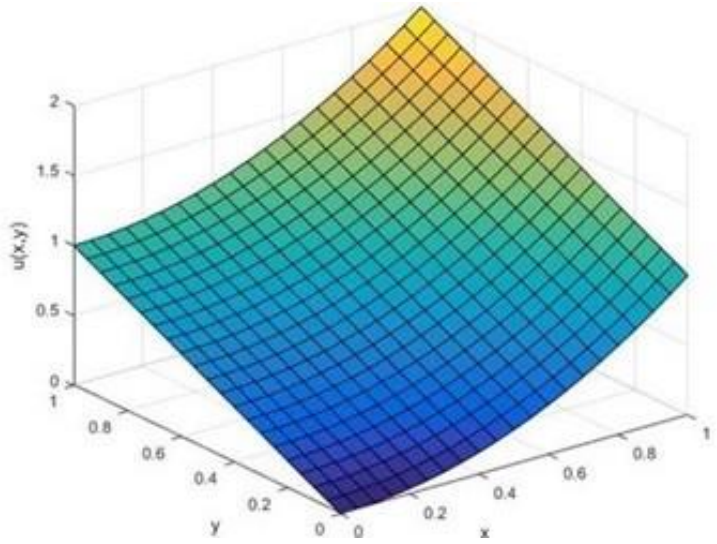
yaklaşık çözümün $\alpha = 2$ için,

$$u(x,y) = y + x^2 \quad (3.66)$$

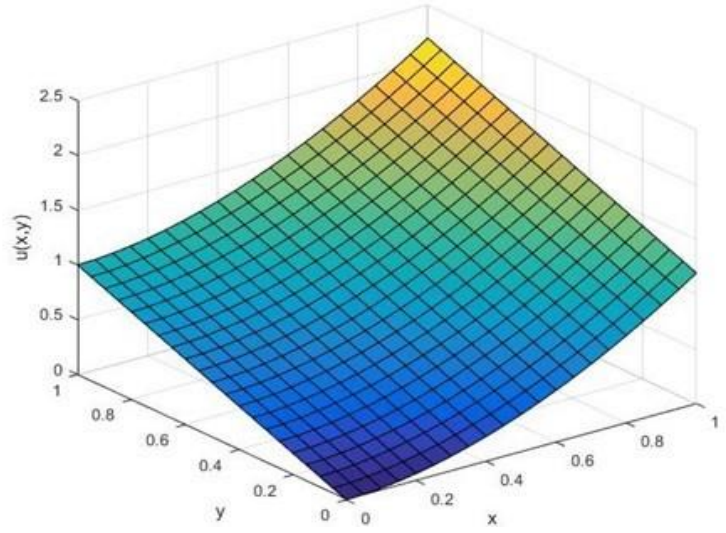
gerçek çözüme yakınsadığını kolayca gözlemleyebiliriz.



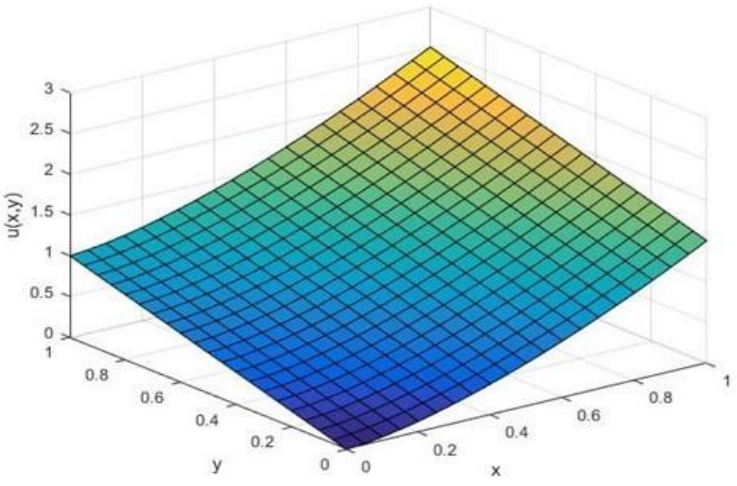
Şekil 3.21. $u(x,y)$'nin gerçek çözümü



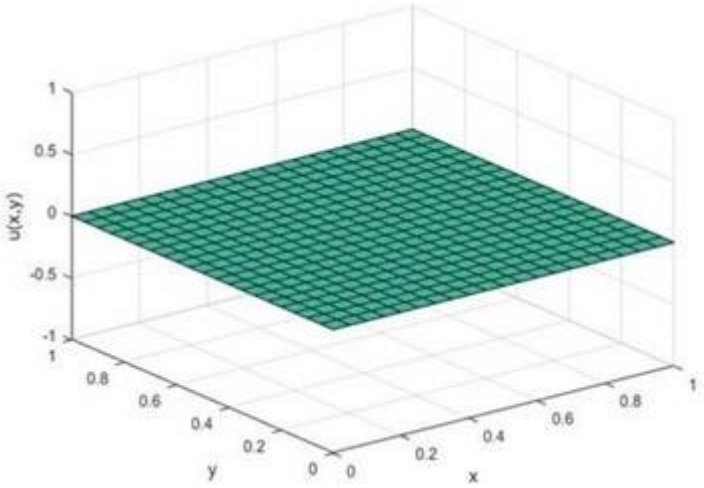
Şekil 3.22. $u(x,y)$'nin $\alpha = 2$ için yaklaşık çözümü



Şekil 3.23. $u(x,y)$'nin $\alpha = 1.8$ için yaklaşık çözümü



Şekil 3.24. $u(x,y)$'nin $\alpha = 1.6$ için yaklaşık çözümü



Şekil 3.25. $u(x,y)$'nin $\alpha = 2$ için mutlak hata grafiği

Tablo 3.8. Gerçek çözüm ve çeşitli α değerleri için yaklaşık çözüm sonuçları

x	y	$u_{gerçek}$	$\alpha = 2$	$\alpha = 1.8$	$\alpha = 1.6$
0.2	0.2	0.24000	0.24000	0.26584	0.30653
	0.4	0.44000	0.44000	0.46584	0.50653
	0.6	0.64000	0.64000	0.66584	0.70653
	0.8	0.84000	0.84000	0.86584	0.90653
	1	1.04000	1.04000	1.06584	1.10653
0.4	0.2	0.36000	0.36000	0.42926	0.52293
	0.4	0.56000	0.56000	0.62926	0.72293
	0.6	0.76000	0.76000	0.82926	0.92293
	0.8	0.96000	0.96000	1.02926	1.12293
	1	1.16000	1.16000	1.22926	1.32293
0.6	0.2	0.56000	0.56000	0.67566	0.81780
	0.4	0.76000	0.76000	0.87566	1.01780
	0.6	0.96000	0.96000	1.07566	1.21780
	0.8	1.16000	1.16000	1.27566	1.41780
	1	1.36000	1.36000	1.47566	1.61780
0.8	0.2	0.84000	0.84000	0.99835	1.17893
	0.4	1.04000	1.04000	1.19835	1.37893
	0.6	1.24000	1.24000	1.39835	1.57893
	0.8	1.44000	1.44000	1.59835	1.77893
	1	1.64000	1.64000	1.79835	1.97893
1	0.2	1.20000	1.20000	1.39297	1.59897
	0.4	1.40000	1.40000	1.59297	1.79897
	0.6	1.60000	1.60000	1.79297	1.99897
	0.8	1.80000	1.80000,	1.99297	2.19897
	1	2.00000	2.00000	2.19297	2.39897

4.SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, kesirli diferansiyel denklemlere Residual kuvvet serisi yöntemi (RPSM) uygulanarak yaklaşık çözümler elde edilmiş ve bu çözümler gerçek çözümler ile karşılaştırılmış, elde edilen sonuçların gerçek çözümlere yakınsadığı gösterilmiştir. Bulunan sonuçlar ile yöntemin daha birçok tipteki kesirli diferansiyel denklemlere başarı ile uygulanabileceği görülmektedir.

KAYNAKLAR

Argub O.A., *Series Solution of Fuzzy Differential Equations Under Strongly Generalized Differentiability*, The Journal of Advanced Research in Applied Mathematics, 2013, **5**(1), 31-52.

Argub O.A., El-Ajou A., Bataineh A., Hashim I., *A Representation of The Exact Solution of Generalized Lane-Emden Equations Using a New Analytical Method*, Abstract and Applied Analysis, 2013, **174**(2012), 1-10.

Argub O.A., Abo-Hammour Z., Al-Badarneh R., Momani S., *A Reliable Analytical Method for Solving Higher-Order Initial Value Problems*, Discrete Dynamics in Nature and Society, DOI 10.1155/2013/673829.

Adomian G., *Nonlinear Stochastic Operator Equations*, Academic Press, Orlando, 1986.

Babuçcu G., *Kesirli Diferansiyel Denklemler İçin Bazı Çözüm Yöntemleri*, Yüksek Lisans Tezi, Karabük Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Karabük, 2018, 542373.

Baleanu D., Trujillo J.J., *On Exact Solutions of a Class of Fractional Euler-Lagrange Equations*, Nonlinear Dyn., 2008, **52**(4), 331-335.

Bayrak M.A., Tetik S., *Approximate Solution of Time Fractional Helmholtz and Coupled Helmholtz Equations*, Communications in Mathematics and Applications, 2020, **11**(4), 575-586.

Bayrak M.A., Demir A., *A New Approach for Space-Time Fractional Partial Differential Equations by Residual Power Series Method*, Appl. Comput. Math., 2018, **336**(C), 215-230.

Bayrak M.A., Demir A., Ozbilge E., *New Approaches for the Solution of Space-Time Fractional Schrodinger Equation*, Adv. Dif. Eq., 2020, **133**(2020),1-21.

Bayrak M.A., Demir A., Özbilge E., *On The Numerical Solution of Conformable Fractional Diffusion Problem with Small Delay*, Numerical Methods for Partial Differential Equations, DOI:10.1002/num.22640.

Bayrak M.A., Demir A., Özbilge E., *Numerical Solution of Fractional Diffusion Equation by Chebyshev Collocation Method and Residual Power Series Method*, Alexandria Engineering Journal, DOI: 10.1016/j.aej.2020.08.033.

Bayrak M.A., Demir A., Özbilge E., *On Solution of Fractional Partial Differential Equation by the Weighted Fractional Operator*, Alexandria Engineering Journal, DOI:10.1016/j.aej.2020.08.044.

Cansız M., *Kesirli Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları*, Yüksek Lisans Tezi, Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir, 2010, 276395.

Caputo M., *Linear Models of Dissipation Whose Q is Almost Frequency Independ*ent, Anna di Geofis., 1966, **19**(4), 3-393.

Caputo M., *Linear Models of Dissipation Whose Q is Almost Frequency Independent Part II*, Geophys. J. R. Astr. Soc.,1967, **13**(5), 529-539.

Caputo M., *Elasticita e Dissipazione,* Zanichelli, Bologna,1969.

Caputo M., Cametti Cesare, *Diffusion with Memory in Two Cases of Biological İnterest*, Journal of Theoretical Biology, 2008, **254**(3), 697-703.

Cheng, J., Chu, Y., *Solution to the Linear Fractional Differential Equation Using Adomian Decomposition Method*, Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering, DOI: 10.1155/2011/587068

Dehghan M., Manafian J., Saadatmandi A., *Solving Nonlinear Fractional Partial Differential Equations Using the Homotopy Analysis Method*, Numerıcal Methods Partial Differential Equations, 2009, **26**(2), 448–479.

Doha E.H., Bhrawy A.H., Ezz-Eldien S.S., *A Chebyshev Spectral Method Based on Operational Matrix for Initial and Boundary Value Problems of Fractional Order*, Comput. Math. Appl.,2011, **62**(5), 2364–2373.

El-Ajou A., Argub O.A., Momani S., *Approximate Analytical Solution of the Nonlinear Fractional KdV-Burgers Equation: A New Iterative Algorithm*, Journal of Computational Physics, 2015, DOI 10.1016/j.jcp.2014.08.004.

El-Ajou A., Argub O.A., Al Zhour Z., Momani S., *New Results on Fractional Power Series: The Oriesand Applications*, Entropy, 2013,**15**(12), 5305-5323.

Galeone L., Garrappa, R., *On Multistep Methods for Differential Equations of Fractional Order, Mediterranean Journal of Mathematics*, 2006, **3**(3-4), 565-580.

Garrappa R., *On Linear Stability of Predictor-Corrector Algorithms for Fractional Differential Equations*, International Journal of Computer Mathematics, 2010, **87**(10), 2281-2290.

Garrappa R., *On Some Explicit Adams Multistep Methods for Fractional Differential Equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, **229**(2), 392-399.

Hemeda A.A., *Homotopy Perturbation Method for Solving Partial Differential Equations of Fractional Order,* Int. Journal of Math. Analysis, 2012, **49**(6), 2431–2448.

Kilbas A.A., Bonilla B., Trujillo J.J., *Fractional Integrals and Derivatives, and Differential Equations of Fractional Order in Weighted Spaces of Continuous Functions (Russian*), Dokl. Nats .Akad. Nauk Belarusi, 2000, **44**(6),18-22.

Kilbas A.A., Saigo M., *Fractional Integrals and Derivatives of Functions of Mittag-Leffler Type*, Dokl. Akad. Nauk Belarusi, 1995, **39**(4), 22-26.

Kilbas A.A., Saigo M., *Solution in Closed Form of a Class of Linear Differential Equations of Fractional Order*, Differntiel'nye.Uravnenija, 1997, **33**(2),195-204.

Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies 204, Elsevier, Amsterdam, 2006.

Kiryakova V.S., *Generalized Fractional Calculus and Applications*, Vol. 301 of Pitman Res. Notes in Math., Wiley and Sons, New York, 1994.

Mainardi F., Fractional Calculus, Some Basic Problems in Continuum and Statistical Mechanics, Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, Springer Verlag, Wien, 291-348, 1997.

Mcbride A.C., *Fractional Calculus and Integral Transforms of Generalized Functions*, Vol.31 of Research Notes in Math., Pitman, London, 1979.

Oldham K.B., Spanier J., *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York,1974.

Oturanç, G., Kurnaz, A., Keskin, Y., *A New Analytical Approximate Method for the Solution of Fractional Differential Equations*, International Journal of Computer Mathematics, 2008, **85**(1),131-142.

Ongun, M.Y., Arslan, D., Garrappa, R., *Nonstandard Finite Difference Scemes for Fractional Order Brusselator System*, Advances in Difference Equations, 2013, **102**(2013), 1687-1847.

Petras I., *Fractional-order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation*, Higher Education Press, Springer Verlag, 2011.

Ross B., *Fractional Calculus and its Applications*, Lecture Notes in Mathematics. Springer- Verlag, 1974.

Podlubny I., *Fractional Differential Equations*, 198, Acedemic Press, London, 1999.

Pedas A., Tamme, E., *On the Convergence of Spline Collocation Methods for Solving Fractional Differential Equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 2011, **235**(12), 3502-3514.

Samko S.G., Kilbas, *A.A., Marichev, O.I., Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1993.

Saigo, M., Kilbas, *A.A., On Mittag-Leffler Type Function and Applications*, Integral Transform. Spec. Fund., 1998, **7**(1-2), 97-112.

Trujillo, J.J., *On a Riemann–Liouville Generalized Taylor's Formula*, J. Math. Anal. Appl., 1999, **231**(1), 255-265.

Yalçın Uzun T., *Riemann-Liouville ve Hadamard Tipli Genelleştirilmiş Kesirli Diferansiyel Denklemler*, Doktora Tezi, Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Afyon, 2018, 506325.

Zaslavsky G.M., *Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics*, Oxford University Press, Oxford, 2005.

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

Bayrak M.A., **Tetik S.**, *Approximate solution of time fractional Helmholtz and coupled Helmholtz equations*, Communications in Mathematics and Applications, 2020,**11**(4), 575-586.

ÖZGEÇMİŞ

İlk, orta ve lise öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 2012 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2017 yılında mezun oldu. 2018 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Programında öğrenimine başladı.