ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

REEL FONKSİYONLAR İÇİN BAZI DİZİSEL SÜREKLİLİK KAVRAMLARI

Burçin EMİNOĞLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2021

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

REEL FONKSİYONLAR İÇİN BAZI DİZİSEL SÜREKLİLİK KAVRAMLARI

Burçin EMİNOĞLU

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Cihan ORHAN

Bu tez 6 bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde toplanabilme metoduna ilişkin temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde dizisel süreklilik ve Cesàro süreklilik kavramları verilmiştir. Süreklilik ve Cesàro sürekliliğin hangi durumda denk olduğuna ilişkin bir problem ve çözümü incelenmiştir.

Dördüncü bölümde A-süreklilik kavramı ele alınmış ve süreklilikle arasındaki ilişki incelenmiştir. Süreklilik ve A-sürekliliğin hangi koşullar altında denk olduğu gösterilmiştir. Devamında $L(a)$ özelliği ve (G) özelliği kavramları tanımlanmış ve A-sürekli fonksiyonların lineer olması incelenmiştir.

Beşinci bölümde kuvvetli regülerlik, hemen hemen yakınsaklık, hemen hemen süreklilik (F-süreklilik) ve hemen hemen A-süreklilik kavramları tanımlanmış ve bunlar arasındaki ilişki incelenmiştir. Daha sonra F-sürekli fonksiyonların lineerliğine ilişkin bir teorem verilmiştir.

Altıncı bölümde G-süreklilik kavramı tanımlanmıştır. G-sürekliliğin lineerliği gerektirmesi için yeterli bir şart verilmiştir. Ardından süreklilik ve G-süreklilik kavramları arasındaki ilişki incelenmiştir. Nihayet G lineer fonksiyoneli yerine istatistiksel yakınsaklık metodu alınarak süreklilik ve G-süreklilik arasındaki ilişki incelenmiştir.

Şubat 2021, 42 sayfa

Anahtar Kelimeler: Sürekli Fonksiyon, A-Sürekli Fonksiyon, Dizisel Sürekli Fonksiyon, Hemen Hemen Sürekli Fonksiyon, İstatistiksel Sürekli Fonksiyon

ABSTRACT

Master Thesis

SOME SEQUENTIAL CONTINUITY CONCEPTS FOR REAL FUNCTIONS

Burçin EMİNOĞLU

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Cihan ORHAN

This thesis consists of six chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some basic concepts related to summability method are recalled.

In the third chapter, sequential continuity and Cesàro continuity are studied. A problem and its solution concerning the equivalence of continuity and Cesàro continuity is considered.

In chapter four, the idea of A- continuity is defined and its relationship to continuity is examined. Under what conditions continuity and A-continuity are equivalent? This problem is also studied. Subsequently, the concepts of $L(a)$ property and (G) property are defined and the linearity of A- continuity functions is also considered.

In the fifth chapter, the concepts of strong regularity, almost convergence, almost continuity (F-continuity) and almost A-continuity are recalled. Then, the relationship between almost continuity and almost A-continuity is examined. Subsequently, a theorem on linearity of F-continuity functions is given.

In the sixth chapter, the concept of G-continuity is introduced. A sufficient condition, for the G-continuity to imply linearity is given. Then, the relationship between continuity and G-continuity concepts are considered. Finally, taking statistical convergence method in place of G method, the relationship between continuity and G-continuity is given.

February 2021, 42 pages

Key Words: Continuous Function, A-Continuous Function, Sequentially Continuous Function, Almost Continuous Function, Statistically Continuous Function

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren ve çalışmalarım boyunca ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Cihan ORHAN (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'a en içten saygı ve minnetlerimi sunarım. Bu süreçte bana gösterdiği anlayış ve destek için de ayrıca teşekkürü bir borç bilirim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca yardımlarını esirgemeyen arkadaşlarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her aşamasında daima yanımda olan ve desteklerini esirgemeyen aileme ve dostlarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

Burçin EMİNOĞLU
Ankara, Şubat 2021

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI
ETİK . . . . . **i**
ÖZET . . . . . **ii**
ABSTRACT . . . . . **iii**
TEŞEKKÜR . . . . . **iv**
SİMGELER DİZİNİ . . . . . **vi**
1. GİRİŞ **1**
2. TEMEL KAVRAMLAR **3**
2.1 Temel Bilgiler **3**
3. DİZİSEL SÜREKLİLİK VE CESÀRO SÜREKLİLİK **5**
3.1 Dizisel Süreklilik **5**
3.2 Cesàro Süreklilik **6**
4. A-SÜREKLİLİK **9**
4.1 Bir Fonksiyonun Sürekliliği İçin Eşdeğer Bir Önerme **9**
4.2 Toplanabilmeyi Koruyan Fonksiyonlar **10**
4.3 Reel Fonksiyonların A-Sürekliliği **11**
5. REEL FONKSİYONLARIN HEMEN HEMEN SÜREKLİLİĞİ **22**
5.1 Temel Bilgiler **22**
5.2 Süreklilik Kavramları Arasındaki İlişkiler **23**
5.3 Reel Fonksiyonların F-Sürekliliği **25**
6. REEL FONKSİYONLAR İÇİN SÜREKLİLİĞİN DİZİSEL TANIMLARI **29**
6.1 Giriş **29**
6.2 İstatistiksel Yakınsaklık **31**
6.3 G=$\mathcal{L}$ İçin Yeterli Bir Şart **32**
6.4 G-Sürekliliğin Topolojik Bir Bakış Açısı ve $\mathcal{G}$=$\mathcal{C}$ İçin Gerekli Bir Şart **35**
6.5 $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}$ İçin Yeterli Bir Şart **37**
7. TARTIŞMA VE SONUÇ **39**
KAYNAKLAR **40**
ÖZGEÇMİŞ **42**

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$A = (a_{nk})$	Reel ya da kompleks terimli sonsuz bir matris
$Ax = \{(Ax)_n\}$	x dizisinin A matrisi ile yapılan dönüşüm dizisi
ω	Reel ya da kompleks terimli tüm diziler uzayı
c	Reel ya da kompleks terimli tüm yakınsak diziler uzayı
m	Reel terimli tüm sınırlı diziler uzayı
F	Hemen hemen yakınsak diziler uzayı
$\sum$	Toplam
$(C, 1)$	Cesàro matrisi
$f \mid_J$	Kısıtlama fonksiyonu
$\mathcal{L}(I)$	$f : I \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyonların kümesi
$\mathcal{G}(I)$	$f : I \to \mathbb{R}$, G-sürekli fonksiyonların kümesi
$\mathcal{C}(I)$	$f : I \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonların kümesi
$\overline{D}$	D kümesinin kapanışı

1. GİRİŞ

Süreklilik konusu sadece matematik analizin değil reel analiz, fonksiyonel analiz ve topolojinin de önemli konularındandır.

Bilindiği gibi bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir u noktasında sürekliliği dizisel sürekliliğine denktir. Yani $\lim_n x_n = u$ olacak biçimdeki her $x = (x_n)$ dizisi için $\lim_n f(x_n) = f(u)$ gerçeklenmesidir.

1946 yılında Herbert Robbins tarafından eğer $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = u$ olacak biçimdeki her (x_k) dizisi için

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) = f(u)$$

gerçeklenirse bu tür fonksiyonlar Cesàro sürekli veya kısaca C-sürekli fonksiyon olarak tanımlanmıştır. Ayrıca Robbins tarafından f fonksiyonu lineer olduğunda süreklilik ve Cesàro sürekliliğin birbirine denk olduğuna ilişkin bir problem ortaya atılmıştır. Problemin çözümü 1948 yılında R.C. Buck tarafından verilmiş ve bu denklik gösterilmiştir.

Bu tür süreklilik ile dizisel süreklilik arasındaki ilişkiler 1961 yılında E.C. Posner, 1972 yılında T.B. Iwiński, 1980 yılında J. Antoni ve T. Šalát, 1980 yılında V.K. Srinivasan, 1986 yılında J. Antoni, 1993 yılında J. Borsík ve T. Šalát, 1994 yılında E. Spigel ve N. Krupnik tarafından incelenmiştir. Bu tanımda Cesàro matrisi yerine genel bir regüler $A = (a_{nk})$ matrisi alınması halinde de bazı incelemeler 1980 yılında J. Antoni ve T. Šalát, 1986 yılında J. Antoni tarafından ele alınmıştır. Hatta 1983 yılında E. Öztürk, 1993 yılında J. Borsík ve T. Šalát tarafından "limit" operatörü yerine "hemen hemen limit" işlemi alınarak F-süreklilik kavramı incelenmiştir. Daha sonra buradaki "limit" işlemi "keyfi bir G lineer fonksiyoneli" ile değiştirilerek yukarıdaki tanım 2003 yılında J. Connor ve K.-G. Grosse-Erdmann tarafından modifiye edilmiş ve bu tür fonksiyonlar G-sürekli fonksiyon olarak adlandırılmıştır.

Yukarıdaki G lineer fonksiyoneli yerine A-toplanabilme, hemen hemen yakınsaklık

veya istatistiksel yakınsaklık alarak f fonksiyonunun lineerliği ve sürekliliği arasında bazı ilişkiler elde edilmiştir. Hatta reel fonksiyonlar için sürekliliğin istatistiksel sürekliliğe denkliği gösterilmiştir.

Bu yüksek lisans tezi yukarıda verilen bilgilerin bir derlemesidir ve bu yüksek lisans tezinin amacı fonksiyonların yukarıdaki anlamlarda sürekliliği, G-sürekliliği ve lineerliği arasındaki ilişkileri incelemektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Süreklilik ve toplanabilme analizin önemli konularındandır. Bu bölümde ilk olarak tez içerisinde kullanılacak temel tanımlar verilecektir.

2.1 Temel Bilgiler

Bu kısımda toplanabilme metodu, regüler matris ve Cesàro matrisine ilişkin temel tanımlar verilecektir.

Tanım 2.1.1 (Toplanabilme Metodu) "ω reel veya kompleks tüm diziler uzayı olsun. $E \subseteq \omega$ alt vektör uzayı olmak üzere bir toplanabilme metodunu E üzerinde tanımlanmış kompleks veya reel değerli lineer bir fonksiyonel olarak tanımlayacağız. Buna göre $f : E \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ veya $\mathbb{R}$) lineer fonksiyoneli bir toplanabilme metodu olacaktır. Eğer E ıraksak bir $x := (x_k)$ dizisi içerirse, $f(x)$ değerine x ıraksak dizisinin limitidir denir. Eğer $E \supseteq c$ ve her $x \in c$ için $f(x) = \lim x$ ise f regüler metot adını alır".

Tanım 2.1.2 (Matris Toplanabilme Metodu) "$A = (a_{nk})$ reel ya da kompleks terimli sonsuz bir matris ve $x = (x_k)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her n için

$$(Ax)_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

mevcut ise yani sağdaki seri her bir n için yakınsak ise $Ax = \{(Ax)_n\}$ dizisine, x dizisinin A-dönüşümü denir. $Ax := \{(Ax)_n\}$ dizisine x dizisinin A matrisi ile yapılan dönüşüm dizisi denir.

$w_A = \{x : Ax \text{ mevcut}\}$ ve

$c_A = \{x : Ax \in c\}$ olsun. Eğer

$$\begin{aligned} f : \quad & c_A \to \mathbb{K} \\ & f(x) = \lim_n (Ax)_n \end{aligned}$$

tanımlanırsa f bir toplanabilme metodudur. Eğer $\lim Ax = L$ ise x dizisi L değerine A-toplanabilirdir denir."

Tanım 2.1.3 (Regüler Matris) "Her $x = (x_k)$ yakınsak dizisi için

$$\lim_n x_n = \lim_n (Ax)_n$$

gerçeklenir ise A matrisine regüler matris adı verilir".

Bir matrisin regülerliğini karakterize eden Silverman-Toeplitz teoremini ispatsız olarak verelim.

Teorem 2.1.1 (Silverman-Toeplitz) Bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler bir toplanabilme matrisi olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların gerçeklenmesidir:

(**i**) her k için $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$

(**ii**) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = 1$

(**iii**) her n için $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| \leq M$ olacak biçimde bir $M > 0$ vardır (Wilansky 1984).

Tanım 2.1.4 (Cesàro) "$(C, 1)$ ile verilen Cesàro matrisi bir $x = (x_k)$ dizisinin aritmetik ortalamasına karşılık gelen matristir. O halde bu matris

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & 1 \leq k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

ile verilir. Bu matrisin regüler olduğu açıktır" (Wilansky 1984).

$(C, 1)$ matrisinin,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

ile verileceği açıktır.

Tanım 2.1.5 (Cesàro Yakınsaklık) "(x_n) bir dizi olmak üzere

$$\lim_n \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \alpha$$

ise (x_n) dizisi α değerine Cesàro yakınsaktır denir. Bu durumda $\{x_n\} \underset{C}{\to} \alpha$ yazılır".

3. DİZİSEL SÜREKLİLİK VE CESÀRO SÜREKLİLİK

Bu bölümde ilk olarak dizisel süreklilik kavramı incelenecektir. Daha sonra Cesàro süreklilik kavramı verilecek olup f fonksiyonu lineer olduğunda süreklilik ile Cesàro sürekliliğin birbirine denk olduğu gösterilecektir.

3.1 Dizisel Süreklilik

Bu kısımda dizisel süreklilik tanımı verilecek olup dizisel süreklilik ve süreklilik arasındaki ilişki ifade edilecektir.

Tanım 3.1.1 (Dizisel Süreklilik) "$X = (X, d)$ ve $Y = (Y, \tilde{d})$ iki metrik uzay olsun. Bir $T : X \to Y$ dönüşümünü göz önüne alalım. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $d(x, x_0) < \delta$ koşulunu gerçekleyen bütün x'ler için

$$\tilde{d}(Tx, Tx_0) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa T dönüşümü $x_0 \in X$ noktasında süreklidir denir" (Çakar 2010).

Şimdi dizisel süreklilik ile süreklilik arasındaki ilişkiyi ifade etmek için aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.1.1 Bir (X, d) metrik uzayından, bir $(Y, \tilde{d})$ metrik uzayının içine olan bir $T : X \to Y$ dönüşümünün bir $x_0 \in X$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul

$$x_n \to x_0 \Rightarrow Tx_n \to Tx_0$$

olmasıdır (Çakar 2010).

İspat. T'nin x_0 noktasında sürekli olduğunu varsayalım. Tanım 3.1.1'e bakınız. Bu durumda, verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $d(x, x_0) < \delta$ oldukça, $\tilde{d}(Tx, Tx_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. $x_n \to x_0$ olsun. $n > N$ oldukça,

$$d(x_n, x_0) < \delta$$

olacak şekilde bir N sayısı vardır. O halde her $n > N$ için,

$$\tilde{d}(Tx_n, Tx_0) < \varepsilon$$

yazabiliriz. Bunun anlamı ise tanım gereği $Tx_n \to Tx_0$'dır.
Tersine olarak,

$$x_n \to x_0 \Rightarrow Tx_n \to Tx_0$$

olduğunu varsayalım ve bu durumda T'nin x_0'da sürekli olduğunu ispatlayalım. Bir an için T'nin x_0'da sürekli olmadığını kabul edelim. Buna göre, her $\delta > 0$ sayısı için $d(x, x_0) < \delta$ olduğu halde, $\tilde{d}(Tx, Tx_0) \geq \varepsilon$ eşitsizliğini gerçekleyen bir $x \neq x_0$ sayısı var olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır. Özel olarak $\delta = \frac{1}{n}$ için $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ olduğu halde, $\tilde{d}(Tx_n, Tx_0) \geq \varepsilon$ eşitsizliğini gerçekleyen bir x_n bulabiliriz. Açıkça görüldüğü gibi $x_n \to x_0$ olduğu halde, (Tx_n) dizisi Tx_0 değerine yakınsamamaktadır. Bu ise $Tx_n \to Tx_0$ gerçeğiyle çelişir ve teoremin ispatı tamamlanmış olur. ■

3.2 Cesàro Süreklilik

Bu kısımda öncelikle Cesàro süreklilik tanımı verilecektir. Daha sonra f fonksiyonu lineer olduğunda süreklilik ile Cesàro sürekliliğin birbirine denk olduğunu gösteren bir problem ve çözümü incelenecektir.

Tanım 3.2.1 (Cesàro Süreklilik) "(x_n) keyfi bir dizi olmak üzere

$$x_n \underset{C}{\to} \alpha \text{ olacak biçimdeki her } (x_n) \text{ dizisi için } f(x_n) \underset{C}{\to} f(\alpha)$$

gerçekleniyor ise $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $x = \alpha$ noktasında Cesàro süreklidir denir" (Robbins 1946).

Burada sadece reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonları ele alacağız.

Aşağıdaki problem 1946 yılında Herbert Robbins tarafından ortaya atılmıştır ve 1948 yılında R.C. Buck tarafından çözülmüştür.

Problem 3.2.1 Eğer $f(x) = Ax + B$ formunda ise f fonksiyonu her x değeri için Cesàro süreklidir ve eğer f fonksiyonu tek bir α noktasında Cesàro sürekli ise $f(x) = Ax + B$ formundadır (Robbins 1946).

İspat. İlk olarak $f(x) = Ax + B$ olsun. $x_n \underset{C}{\longrightarrow} x$ olacak biçimde keyfi bir dizi olsun. $\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n} \underset{C}{\longrightarrow} f(x)$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(Ax_k + B)\\ &= \frac{1}{n}(A\sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} B)\\ &= A.\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k + B.\frac{1}{n}.n \longrightarrow Ax + B = f(x)\end{aligned}$$

O halde f fonksiyonu Cesàro süreklidir.

Şimdi f fonksiyonu tek bir α noktasında C-sürekli olsun. Göstereceğiz ki $f(x) = Ax + B$ formunda yazılabilir.

Koordinat eksenlerini paralel değiştirerek $\alpha = 0$ ve $f(\alpha) = 0$ alalım. $a + b + c = 0$ olmak üzere $(a, b, c, a, b, c, ...)$ dizisi 0'a Cesàro yakınsaktır. Çünkü

$t_1 = a$

$t_2 = \frac{a+b}{2}$

$t_3 = \frac{a+b+c}{3} = 0$

$t_4 = \frac{a+b+c+a}{4} = \frac{a}{4}$

$t_5 = \frac{a+b+c+a+b}{5} = \frac{a+b}{5}$

$t_6 = 0$

$t_7 = \frac{a}{7}$

$\vdots$

f fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki Cesàro sürekliliğinden $f(a) + f(b) + f(c) = 0$ ise $f(a) + f(b) = -f(-a - b)$ olduğunu söyleyebiliriz.

$T_n = \frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n}$

$T_1 = \frac{f(x_1)}{1} = f(a)$

$T_2 = \frac{f(a)+f(b)}{2}$

$T_3 = \frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3}$

$T_4 = \frac{2f(a)+f(b)+f(c)}{4}$

$T_5 = \frac{2f(a)+2f(b)+f(c)}{5}$

$T_6 = \frac{2f(a)+2f(b)+2f(c)}{6}$

$\vdots$

$T_{3n} = \frac{n(f(a)+f(b)+f(c))}{3n} = \frac{1}{3}(f(a) + f(b) + f(c)) \longrightarrow 0$

$c = 0$ için $f(a) = -f(-a)$ ve herhangi $x, y \in \mathbb{R}$ için $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ve

$f(nx) = n.f(x)$ bulunur. Çünkü

$-f((-a)+(-b)) = -f(-a)+(-f(-b)) = -[f(-a)+f(-b)]$ olup buradan

$f((-a)+(-b)) = f(-a)+f(-b)$ elde edilir.

Böylece $f(x+y) = f(x)+f(y)$ elde edilir. Ayrıca

$y = x$ için $f(2x) = 2f(x)$

$y = 2x$ için $f(3x) = 3f(x)$

$\vdots$

$f(nx) = nf(x)$ bulunur.

$\sigma_n = \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$ olmak üzere eğer bir (x_n) dizisi 0'a Cesàro yakınsak ise $\lim_n \sigma_n = 0$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} \sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \quad &\Rightarrow \quad n\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \\ &\Rightarrow \quad f(n\sigma_n) = f(\sum_{k=1}^{n} x_k) \\ &\Rightarrow \quad nf(\sigma_n) = f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n) \\ &\Rightarrow \quad f(\sigma_n) = \frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n} \end{aligned}$$

olup $f(\sigma_n) = \frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$elde edilir.

O halde $\lim_n f(\sigma_n) = \lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = 0$ bulunur.

O halde $\sigma_n \to 0$ olduğunda $f(\sigma_n) \to f(0) = 0$ elde edilmiştir. Dolayısıyla f fonksiyonu $\alpha = 0$ noktasında süreklidir. Toplamsallıktan ve 0'da sürekli olduğundan f fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir. $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli ve toplamsallık özelliğine sahip yegane fonksiyonlar $f(x) = Ax$ formundadır.

Bu da ispatı tamamlar (Buck 1948). ■

4. A-SÜREKLİLİK

Bu bölümde ilk olarak A-süreklilik kavramı verilecektir. Daha sonra toplanabilme ve süreklilik arasındaki ilişki incelenecek olup süreklilik ile A-sürekliliğin hangi koşullar altında denk olduğu gösterilecektir. Daha önce Robbins (1946) tarafından ortaya atılan ve Buck (1948) tarafından çözülen problemi Cesàro matris yerine başka bir regüler matris alarak genellemenin mümkün olup olmadığı araştırılacaktır.

4.1 Bir Fonksiyonun Sürekliliği İçin Eşdeğer Bir Önerme

$\mathbb{K}$ reel veya kompleks sayıları göstersin. $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ olsun. Bu kısımda $\mathbb{K}$ üzerinde f fonksiyonunun sürekliliği için eş değer bir önerme verilecektir.

$f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ bir fonksiyon olsun. Eğer bir (x_n) dizisi $x \in \mathbb{K}$ değerine yakınsak olduğunda $(f(x_n))$ dizisi de $f(x)$ değerine yakınsak oluyorsa f fonksiyonunun $\mathbb{K}$ üzerinde sürekli olduğu bilinmektedir. Bunun karşıtı da doğrudur.

Tanım 4.1.1 (A′-Süreklilik) "$A = (a_{nk})$ regüler toplanabilme matrisi olsun. Eğer keyfi bir (x_n) dizisi bir $x \in \mathbb{K}$ değerine ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ veya $\mathbb{R}$) yakınsak iken $(f(x_n))$ görüntü dizisi $f(x)$ değerine A-toplanabilirse (yani $\lim x_n = x \Longrightarrow A - \lim f(x_n) = f(x)$ ise) $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ fonksiyonu A'-süreklidir denir" (Srinivasan 1980).

Burada göstereceğiz ki f fonksiyonunun sürekliliğinin bu zayıf tanımı aslında f fonksiyonunun her zamanki süreklilik kavramına eşdeğerdir.

Kullanılan temel araç R.C. Buck'ın (1943) aşağıdaki teoremidir.

Teorem 4.1.1 Eğer verilen bir dizinin her alt dizisini toplayan regüler bir A matris toplanabilme metodu varsa bu dizi yakınsaktır (Buck 1943, Buck 1956).

Şimdi aşağıdaki teoremde bu kısımdaki ana sonucumuzun ifade ve ispatını vereceğiz.

Teorem 4.1.2 $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ bir fonksiyon olsun. $A = (a_{nk})$ regüler bir matris toplanabilme metodu olsun. Aşağıdaki koşullar denktir.
i) f, $\mathbb{K}$ üzerinde süreklidir.

ii) f, $\mathbb{K}$ üzerinde A'-süreklidir (Srinivasan 1980).

İspat. **i** $\Rightarrow$ **ii** : f fonksiyonu $\mathbb{K}$ üzerinde sürekli olsun. O halde $x \in \mathbb{K}$ olmak üzere $(x_n) \longrightarrow x$ olacak biçimdeki her (x_n) dizisi için $(f(x_n)) \longrightarrow f(x)$ olsun.

O halde $A - \lim f(x_n) = f(x)$ olduğunu göstereceğiz.

A regüler bir dönüşüm olduğundan yakınsak dizileri limitini koruyarak yakınsak diziye dönüştürür.

$(f(x_n)) \longrightarrow f(x)$ olduğundan $A - \lim f(x_n) = f(x)$ olur. Dolayısıyla $(f(x_n))$ dizisi $f(x)$ değerine A-toplanabilirdir. O halde f fonksiyonu $\mathbb{K}$ üzerinde A'-süreklidir.

ii $\Rightarrow$ **i** : f fonksiyonu $\mathbb{K}$ üzerinde A'-sürekli olsun. f fonksiyonunun sürekli olduğunu göstereceğiz.

$f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ fonksiyonu verilsin. x değerine yakınsayan her (x_n) dizisi için $(f(x_n))$ dizisi $f(x)$ değerine A-toplanabilir olsun. x değerine yakınsayan (x_n) dizisinin her (x_{n_k}) alt dizisi için, A'-süreklilik tanımından $(f(x_{n_k}))$ dizisi $f(x)$ değerine A-toplanabilirdir. Bu nedenle $(f(x_n))$ dizisinin tüm $(f(x_{n_k}))$ alt dizileri $f(x)$ değerine A-toplanabilirdir. Teorem 4.1.1'den $(f(x_n))$ dizisinin kendisi yakınsaktır ve yakınsak bir dizinin limiti tek olduğu için $(f(x_n))$ dizisi $f(x)$ değerine yakınsaktır.

$(x_n) \longrightarrow x$ iken $(f(x_n)) \longrightarrow f(x)$ bulundu. O halde f fonksiyonu $\mathbb{K}$ üzerinde süreklidir. ■

4.2 Toplanabilmeyi Koruyan Fonksiyonlar

Bu kısımda R.C. Buck'ın sonucunun bir neticesi olarak aşağıdaki Lemma verilecektir.

Lemma 4.2.1 f kompleks değerli bir fonksiyon ve A bir Toeplitz matrisi olsun. Eğer (x_n) dizisi yakınsak olduğunda $(f(x_n))$ dizisi A-toplanabilirse f fonksiyonu süreklidir (Posner 1961).

İspat. (x_n) dizisi yakınsak olduğundan (x_n) dizisinin her alt dizisi yakınsaktır. Hipotezden $(f(x_n))$ dizisinin her alt dizisi A-toplanabilirdir. Teorem 4.1.1'den $(f(x_n))$ dizisi gerçekten yakınsaktır.

$\{x_n\} \longrightarrow x$ olsun. $x_1, x, x_2, x, ...$ dizisi de aynı zamanda yakınsaktır. Böylece $f(x_1), f(x), f(x_2), f(x), ...$ dizisi yakınsaktır. Bu da $\{x_n\} \longrightarrow x$ olduğunda

$\{f(x_n)\} \longrightarrow f(x)$ olduğunu gösterir. Bu da f fonksiyonunun sürekli olduğunu kanıtlar. ■

Lemmanın karşıtı Toeplitz matris tanımının bir sonucudur. Bu Lemma aynı zamanda reel değişkenli ve reel değerli bir fonksiyon için de doğrudur.

4.3 Reel Fonksiyonların A-Sürekliliği

Bu kısımda bazı temel tanımlar hatırlatılacak olup A-sürekli fonksiyonların hangi şartlar altında lineer olduğu incelenecektir.

$x_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, ...$ olsun. Eğer $\frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{n} \to x_0$ ise $x_n \underset{C}{\to} x_0$ yazılır. $x_n \underset{C}{\to} x_0$ ise $(C, 1) - \lim x_n = x_0$ şeklinde ifade edildiği daha önce gösterilmiştir.

Eğer $x_n \underset{C}{\to} x_0 \Rightarrow f(x_n) \underset{C}{\to} f(x_0)$ oluyorsa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu x_0 noktasında C-süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında C-sürekli ise f fonksiyonunun $f(x) = Ax + B$ formunda olduğu daha önce gösterilmiştir (Buck 1948).

Bu sonuçla bağlantılı olarak $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun x_0 noktasındaki sürekliliğinin aşağıda verilen 4 tipi incelenir.

1) $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$ (alışılmış süreklilik)

2) $x_n \underset{C}{\to} x_0 \Rightarrow f(x_n) \underset{C}{\to} f(x_0)$ (C-süreklilik)

3) $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \underset{C}{\to} f(x_0)$

4) $x_n \underset{C}{\to} x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$

1. ve 2. tür süreklilik daha önce açıklanmıştır. Şimdi 4. tür süreklilik ile ilgili aşağıdaki teoremi vereceğiz.

Teorem 4.3.1 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin.

$$x_n \underset{C}{\to} x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0) \tag{4.1}$$

olacak biçimde bir $x_0 \in \mathbb{R}$ mevcut olsun. O halde f bir sabit fonksiyondur (Antoni-Šalát 1980).

İspat. (4.1)'deki ifade $x_n \underset{C}{\to} x_0 \Rightarrow f(x_n) \underset{C}{\to} f(x_0)$ olmasını gerektirir. O halde Problem 3.2.1'den f bir doğrusal fonksiyondur, yani $f(x) = Ax + B$ formundadır.

$a = x_0 - 1$, $b = x_0 + 1$ yazalım. Bir $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = (a, b, a, b, \ldots)$ dizisini ele alalım. O halde $x_n \underset{C}{\to} x_0$ olduğu açıktır.

$t_1 = a = x_0 - 1$

$t_2 = \frac{a+b}{2} = \frac{2x_0}{2} = x_0$

$t_3 = \frac{2a+b}{3} = \frac{3x_0-1}{3} = x_0 - \frac{1}{3}$

$t_4 = \frac{2a+2b}{4} = \frac{4x_0}{4} = x_0$

$\vdots$

$t_{2n-1} = x_0 - \frac{1}{2n-1}$

$t_{2n} = x_0$

Buradan $(t_n) \to x_0$ olduğu görülür.

f fonksiyonunun x_0 noktasındaki Cesàro sürekliliğinden;

$T_n = \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}$

$T_1 = \frac{f(x_1)}{1} = f(a)$

$T_2 = \frac{f(a)+f(b)}{2}$

$T_3 = \frac{2f(a)+f(b)}{3}$

$T_4 = \frac{2f(a)+2f(b)}{4}$

$\vdots$

$T_{2n} = \frac{n(f(a)+f(b))}{2n} = \frac{1}{2}(f(a) + f(b)) \underset{C_1}{\to} f(x_0)$ bulunur.

Buradan $f(a) + f(b) = 2f(x_0)$ elde edilir.

(4.1)'den $\left\{f(x_n)\right\}_{n=1} = (f(a), f(b), f(a), f(b), \ldots)$ yakınsaktır. Bu da

$$f(a) = f(b) \tag{4.2}$$

olduğunu gösterir. f lineer bir fonksiyon olduğu için (4.2)'den f bir sabit fonksiyondur. ■

3. tür süreklilik, fonksiyonların süreklilik kavramının genelleştirilmesi gibi gözükmektedir ancak gözüktüğü gibi değildir. Aşağıda verilen sonuç Posner (1961) tarafından ispatlanmıştır.

Sonuç 4.3.1 A regüler bir matris ve $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi

yakınsak olduğunda $\mathbb{R}$ üzerinde $A-\lim f(x_n)$ mevcut olsun. O halde f, $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli bir fonksiyondur (Posner 1961).

Bu sonuçla bağlantılı olarak Problem 3.2.1'den aşağıdaki soru ortaya çıkmaktadır: Bahsedilen sonucu Cesàro matris yerine başka bir regüler matris alarak genelleştirmek mümkün müdür? Bu soruyu daha kesin bir şekilde şöyle formüle edebiliriz.

Tanım 4.3.1 "A regüler bir matris olsun. Eğer

$$A - \lim x_n = x_0 \Rightarrow A - \lim f(x_n) = f(x_0)$$

ifadesi gerçekleniyor ise $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında A-süreklidir denir" (Antoni-Šalát 1980).

Şimdi 'f fonksiyonunun A-sürekli olması f fonksiyonunun lineer bir fonksiyon olmasını gerektirir mi?' sorusu ortaya çıkmaktadır. Basit örnekler cevabın genelde hayır olduğunu göstermektedir. Eğer A yakınsaklığa denk bir matris ise her sürekli fonksiyon aynı zamanda A-süreklidir.

Örnek 4.3.1 $A \backsim I$ olsun. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ olsun.
$(x_n) \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$ olup f süreklidir.
O halde $If(x_n) \to If(x)$ olması
$A - \lim f(x_n) = f(x)$
olmasını gerektirir.
Fakat f lineer değildir.

Bir sonraki teoremde A-sürekli fonksiyonların lineerliği için yeterli bir şart vereceğiz.

Tanım 4.3.2 "$A - \lim \eta_n = a$ için $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\eta_n = 0$ veya 1 $(n = 1, 2, \ldots)$ olacak biçimde bir dizi varsa regüler bir A matrisi $L(a)$ özelliğine sahiptir denir" (Antoni-Šalát 1980).

Lemma 4.3.1 A regüler bir matris ve $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında A-sürekli bir fonksiyon olsun. O halde f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir (Antoni-Šalát 1980).

Lemmanın ispatı Lemma 4.2.1'in ispatına benzer olarak verilebileceğinden burada ispatı tekrar vermeyeceğiz.

Teorem 4.3.2 $A = (\alpha_{mn})$, $\alpha \neq 0, 1$ olmak üzere bir α sayısı için $L(a)$ özelliğine sahip regüler bir matris ve $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde A-sürekli bir fonksiyon olsun. O halde f lineer bir fonksiyondur (Antoni-Šalát 1980).

İspat. x, $y \in \mathbb{R}$ olsun. $a \neq 0$, 1 için $A - \lim \eta_n = a$ ve $\eta_n = 0$ veya 1 $(n = 1, 2, \ldots)$ olsun.

$t_n = \eta_n y + (1 - \eta_n)x$, $(n = 1, 2, \ldots)$ yazalım. O halde

$$\begin{aligned} A - \lim t_n &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} t_n \\ &= y \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\eta_n + x \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}(1 - \eta_n) \\ &= ay + (1 - a)x \end{aligned} \tag{4.3}$$

elde edilir.

$f(t_n) = \eta_n f(y) + (1 - \eta_n)f(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ olduğu görülür.

(4.3) ifadesine benzer şekilde

$$\begin{aligned} A - \lim f(t_n) &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} f(t_n) \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} f(\eta_n y + (1 - \eta_n)x) \\ &= f(y) \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\eta_n + f(x) \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}(1 - \eta_n) \\ &= af(y) + (1 - a)f(x) \end{aligned} \tag{4.4}$$

ifadesi elde edilir.

f fonksiyonu $ay + (1 - a)x$ noktasında A-sürekli olduğu için (4.3) ve (4.4)'ten keyfi x, $y \in \mathbb{R}$ için

$$f(ay + (1 - a)x) = af(y) + (1 - a)f(x) \tag{4.5}$$

ifadesi elde edilir. Lemma 4.3.1 ve Teorem 4.3.2'deki varsayımlara göre f, $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca f fonksiyonu x, $y \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$, $1 - a \neq 0$ olmak üzere

$$g((1 - a)x + ay) = (1 - a)g(x) + ag(y)$$

fonksiyonel eşitliğini gerçekler. Bunu sağlayan bir f fonksiyonu lineer olmak zorundadır.

Bu tip fonksiyonel eşitliklerin iyi bilinen sonuçları nedeniyle f fonksiyonunun lineer fonksiyon olduğunu söyleyebiliriz (Aczél 1961).

Bu da ispatı tamamlar. ■

Uyarı 4.3.1 Cesaro matris $L(\frac{1}{2})$ özelliğine sahiptir. Çünkü $0, 1, 0, 1, ...$ dizisi $\frac{1}{2}$'ye $(C, 1)$ toplanabilirdir.

$a \neq 0, 1$ olmak üzere Cesàro matrisine eşdeğer olmayan $L(a)$ özelliğine sahip regüler matrisler vardır. Böyle bir matris aşağıdaki A_0 matrisidir:

$$A_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & ... & & & \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & ... & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

A_0 matrisi $L(\frac{1}{2})$ özelliğine sahiptir. Çünkü

$(Ax)_1 = \frac{x_1+x_2}{2}$, $(Ax)_2 = \frac{x_3+x_4}{2}$, $(Ax)_3 = \frac{x_5+x_6}{2}$, $(Ax)_4 = \frac{x_7+x_8}{2}$, $(Ax)_n = \frac{x_{2n-1}+x_{2n}}{2}$ olup

$x := (0, 1, 0, 1, \ldots) \Rightarrow (Ax) \to \frac{1}{2}$ elde edilir.

$\eta_{2k} = 1$, $\eta_{2k-1} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ alalım. O halde $A - \lim \eta_n = \frac{1}{2}$ elde ederiz.

Eğer $\varepsilon_{4k} = 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ve $\varepsilon_{4k+r} = 0$ $(r = 1, 2, 3$ ve $k = 1, 2, \ldots)$ alırsak A_0-toplanabilir olmayan $\frac{1}{4}$'e $(C, 1)$-toplanan dizi elde ederiz.

Eğer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında C-sürekli ise f fonksiyonunun lineer bir fonksiyon olduğundan daha önce bahsetmiştik (Buck 1948). Bu iddiayı Teorem 4.3.2 ile karşılaştırırsak f fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerindeki her noktada A-sürekliliği varsayımı yerine bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasındaki A-sürekliliği varsayımının alınıp alınamayacağı sorusu ortaya çıkar. Aşağıdaki örnek bu soruya negatif bir cevap verir.

Örnek 4.3.2 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$ matrisinin regüler olduğu açıktır.

Gerçekten $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix} \Rightarrow (Ax)_n = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$ olup

$x_n \to L \Rightarrow (Ax)_n = \frac{L+L}{2} \to L$, $(n \to \infty)$ gerçeklenir.

$x \leq -1$ için $f(x) = -1$

$-1 < x < 1$ için $f(x) = x$

$x \geq 1$ için $f(x) = 1$

yazalım. O halde f sürekli fakat lineer olmayan bir fonksiyondur (Antoni-Šalát 1980).

f fonksiyonunun $x = 0$ noktasında A-sürekli, ancak $x \neq 0$ için $\mathbb{R}$ üzerinde hiçbir noktada A-sürekli olmadığını gösterebiliriz.

$A - \lim x_n = 0$ olsun. O halde $A - \lim f(x_n) = 0$ $(= f(0))$ olduğunu gösterelim.

Kısaca $y_n = \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$, $t_n = \frac{1}{2}(f(x_n) + f(x_{n+1}))$, $n = 1, 2, ...$ yazalım.

$y_n \to 0$, $(n \to \infty)$ için her $n \geq n_0$ için bir n_0 vardır öyle ki

$$|x_n + x_{n+1}| < 1 \tag{4.6}$$

elde ederiz.

$n \geq n_0$ için aşağıdaki 4 durum vardır.

a) $|x_n| \geq 1$, $|x_{n+1}| \geq 1$

b) $|x_n| \geq 1$, $|x_{n+1}| < 1$

c) $|x_n| < 1$, $|x_{n+1}| \geq 1$

d) $|x_n| < 1$, $|x_{n+1}| < 1$

Bu durumlara göre (t_n) dizisinin yakınsaklığına bakalım.

a) (4.6)'ya göre $x_n \geq 1$, $x_{n+1} \leq -1$ veya $x_n \leq -1$, $x_{n+1} \geq 1$ elde ederiz. Her durumda $(t_n) = 0$ buluruz $(n \to \infty)$.

b) $x_n \geq 1$, $|x_{n+1}| < 1$ olsun. (4.6)'ya göre $-1 < x_{n+1} < 0$ buluruz ve böylece $t_n = \frac{1}{2}(1 + x_{n+1})$ elde ederiz. Bu nedenle

$$|t_n - y_n| = \frac{1}{2}|1 - x_n| \leq \frac{1}{2}|x_n + x_{n+1}| = |y_n|$$

elde edilir. Benzer bir yolla eğer $x_n \leq -1$ (ve $|x_{n+1}| < 1$) ise o zaman $|t_n - y_n| \leq |y_n|$ buluruz. Gerçekten

$$t_n = \frac{1}{2}(-1 + x_{n+1}) \Rightarrow |t_n - y_n| = \frac{1}{2}|-1 - x_n| \leq \frac{1}{2}|x_n + x_{n+1}| = y_n$$

elde edilir.

c) $x_{n+1} \leq -1$ olsun. (4.6)'ya göre $0 < x_n < 1$ olup $t_n = \frac{1}{2}(x_n - 1)$ elde edilir. Bu nedenle

$$|t_n - y_n| = \frac{1}{2}|1 + x_{n+1}| \leq |y_n|$$

gerçeklenir. Benzer bir yolla eğer $x_{n+1} \geq 1$ (ve $|x_n < 1|$) ise $|t_n - y_n| \leq |y_n|$ elde edilir.

d) $t_n = y_n$ bulunur. $(t_n = \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}))$

Bu nedenle her durumda $n \geq n_0$ için $t_n = 0$ veya $|t_n - y_n| \leq |y_n|$ elde edilir. $y_n \to 0$ $(n \to \infty)$ olduğu için $t_n \to 0$ $(n \to \infty)$ bulunur.

f fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde $x \neq 0$ için hiçbir noktada A-sürekli olmadığını gösterelim. $x \neq 0$ olmak üzere $x \in \mathbb{R}$ alalım. $(k-2)|x| > 1$ olacak biçimde bir k pozitif tam sayısı seçelim. $x_{2n-1} = kx$, $x_{2n} = -(k-2)x$, $n = 1, 2, \ldots$ yazalım. O halde açıkça $A - \lim x_n = x$ ve aynı zamanda $t_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ elde edilir. Bu nedenle $A - \lim f(x_n) = 0 \neq f(x)$ bulunur. Gerçekten
$(Ax)_1 = \frac{x_1+x_2}{2}$, $(Ax)_2 = \frac{x_2+x_3}{2}$, ..., $(Ax)_n = \frac{x_n+x_{n+1}}{2}$
$x_{2n-1} = kx$, $x_{2n} = -(k-2)x$ olup
$(x_n) = (kx, -(k-2)x, kx, -(k-2)x, \ldots)$ yazılır ve $(Ax)_n = (x, x, x, \ldots) \to x$ elde edilir.
Böylece $A - \lim x_n = x \neq 0$ bulunur.
$(A(f(x_n)))_n = t_n = \frac{1}{2}(f(x_n) + f(x_{n+1})) = 0$, $(n = 1, 2, \ldots)$ olup f, $x \neq 0$ için A-sürekli değildir.

Tanım 4.3.3 "$a \in (0,1)$, $b \neq 0$, $b \neq 1$, sıfır olmayan tüm p, q tamsayıları için $\left(\frac{a}{1-a}\right)^p \neq \left(\frac{b}{1-b}\right)^q$ olmak üzere sırasıyla a, b sayılarına A-yakınsak olan 0 ve 1'lerin $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizileri mevcutsa A regüler matris toplanabilme metodu (G) özelliğine sahiptir denir" (Antoni 1986).

Lemma 4.3.2 $a \neq 0$, $a \neq 1$ olmak üzere T, bir a sayısına 0 ve 1'lerin en az bir dizisini toplayan regüler bir matris toplanabilme metodu olsun. f, en az bir noktada T-sürekli bir fonksiyon olsun. O halde f sürekli bir fonksiyondur (Antoni 1986).

İspat. f fonksiyonu bir z_0 noktasında T-sürekli olsun. f fonksiyonunun bir x noktasında sürekli olmadığını varsayalım. Böylece bir $u_n \to 0$ dizisi vardır öyle ki $f(x+u_n) = y \neq f(x)$ (aynı zamanda y $+\infty$ veye $-\infty$ olsun).

$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $T - \lim \alpha_n = a$ olacak biçimde 0 ve 1'lerin bir dizisini göstersin. $t_n \to 0$ olmak üzere her $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için

$$x_n = \alpha_n(x+t_n) + (1-\alpha_n)\left(\frac{z_0 - ax}{1-a}\right)$$

dizisi z_0'a T-toplanabilen bir dizidir. Özellikle $x_n^{'} = \alpha_n(x+u_n) + (1-\alpha_n)\left(\frac{z_0-ax}{1-a}\right)$ için

$$T - \lim f(x_n^{'}) = ay + (1-a)f\left(\frac{z_0 - ax}{1-a}\right)$$

elde edilir.

Ancak $x_n^{''} = \alpha_n x + (1-\alpha_n)\left(\frac{z_0-ax}{1-a}\right)$ için

$$T - \lim f(x_n^{''}) = af(x) + (1-a)f\left(\frac{z_0 - ax}{1-a}\right)$$

elde edilir.

f fonksiyonu z_0 noktasında T-sürekli olduğu için her iki limit de aynı ($f(z_0)$) değerine sahiptir. Buradan $f(x) = y$ olduğunu çıkarabiliriz. Ancak bu durum varsayımla çelişir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Aşağıdaki teoremi ispatsız olarak vereceğiz.

Teorem 4.3.3 A, G özelliğine sahip regüler bir toplanabilme metodu olsun ve f fonksiyonu en az bir noktada A-sürekli olsun. O halde f lineer bir fonksiyondur (Antoni 1986).

Aşağıdaki örnekte en az bir noktada A-sürekli lineer olmayan fonksiyon için G özelliği olmayan toplanabilme metodunun bir örneği verilmiştir.

Örnek 4.3.3 $b_{2k+1,4k+1} = b_{2k+1,4k+4} = \frac{1}{2}$, $b_{2k,4k+3} = b_{2k,4k+4} = \frac{1}{2}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ ve $b_{mn} = 0$ olmak üzere $B = (b_{mn})$ matrisi verilsin. Bu matrisin regüler bir toplanabilme matrisi olduğu açıktır.

$t_{2k+1} = \frac{1}{2}(x_{4k+1} + x_{4k+4})$ ve $t_{2k} = \frac{1}{2}(x_{4k+3} + x_{4k+4})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ olmak üzere bir $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi B matrisi tarafından $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine dönüştürülür. Her bir 0 ve 1'lerin B-toplanabilir bir $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ kümesinin bir elemanına B-limitlenebilirdir. $4k+2$ formundaki yerlerdeki terimler B-limit üzerinde hiçbir etkiye sahip olmadığı için B-limit değerleri $\frac{1}{2}$'ye eşit olan 0 ve 1'lerin sonsuz çoklukta dizileri vardır. Ama her iki p, q tamsayıları için $1^p = 1^q$ eşitliği geçerlidir. Bu düzgün sürekli ve $f(0) = 0$ olan lineer olmayan keyfi bir f tek fonksiyonu olmak için yeterlidir. Böyle bir fonksiyon $x = 0$ noktasında süreklidir fakat lineer bir fonksiyon değildir (Antoni 1986).

Aşağıda verilenler Tanım 4.3.1'in basit sonuçlarıdır.

Uyarı 4.3.2 Bir A Toeplitz metodu verilsin. Tüm A-sürekli fonksiyonların kümesi tüm lineer fonksiyonları içerir.

Uyarı 4.3.3 Eğer f birim metod anlamında sürekli (yani I-sürekli) ise f fonksiyonu süreklidir.

Dahası Toeplitz metodlarının geniş bir sınıfı için A-süreklilik sürekliliği gerektirir.

Şimdi burada Iwiński'nin A-sürekliliğe ilişkin iki sonucunu vereceğiz.

Teorem 4.3.4 A regüler bir Toeplitz metodu olsun. Eğer f fonksiyonu A-sürekli ise o halde f fonksiyonu alışılmış anlamda süreklidir (Iwiński 1972).

İspat. Aksini varsayalım. f fonksiyonu bir x_0 noktasında sürekli olmasın. İlk olarak (x_0) noktasına yakınsak (x_n) ve (y_n) dizileri mevcut olsun öyle ki $f(x_n) \to a$ ve $f(y_n) \to b$, $a \neq b$ olsun. Uyarı 4.3.2'den genelliği kaybetmeden $a = 0$ ve $b = 1$ varsayabiliriz.

Doğal sayıların (n_k) ve $(n_{k'})$ alt dizileri $\{n_k : k \in \mathbb{N}_0\} \cup \left\{n_{k'} : k' \in \mathbb{N}_0\right\} = \mathbb{N}_0$ olacak biçimde seçilsin. Bir regüler A Toeplitz metodu için A-toplanabilir olmayan bir (ε_n) dizisi vardır öyle ki

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 0, & n = n_k \text{ için} \\ 1, & n = n_{k'} \text{ için} \end{cases}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

olur (Mazur-Orlicz 1954).

Şimdi (t_n) dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$t_n = \begin{cases} x_k, \, n = n_k \text{ için} \\ y_k, \, n = n_{k'} \text{ için} \end{cases}, \, k = 0, 1, ...$$

(t_n) dizisi yakınsak olduğu için (limiti x_0) aynı zamanda A-toplanabilirdir.

$(f(t_n))$ dizisi $c_n \to 0$ için $f(t_n) = \varepsilon_n + c_n$ formunda yazılabilir. Bu nedenle $(f(t_n))$ dizisi A-toplanabilir değildir. Bu da hipotezle çelişkilidir.

İspatı tamamlamak için şimdi bir (x_n) dizisi varsayalım öyle ki $x_n \to x_0$ ve $f(x_n) \to \infty$ olsun. A metodu regüler olduğundan $(f(t_n))$ dizisi A-toplanabilir olmayacak şekilde (sonsuza A-toplanabilir)

$$x_0, ..., x_0, x_1, ..., x_1, ..., x_k, ..., x_k, ...$$

formunda yakınsak olan bir (t_n) dizisini bulmak kolaydır. Bu nedenle f, x_0 noktasında sürekli olmalıdır. ■

Teorem 4.3.5 Eğer bir f fonksiyonu her regüler Toeplitz metodu için A-sürekli ise o halde f lineer bir fonksiyondur (Iwiński 1972).

İspat. Aşağıda yer alan örnek teoremi gerektirir. ■

Örnek 4.3.4 Öyle bir regüler bir A Toeplitz metodu vardır ki sadece A-sürekli fonksiyonlar lineer fonksiyonlardır. A aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{array}{l} A_{3k}((t_n)) = -rt_{3k} = rt_{3k+1} + t_{3k+2} \\ A_{3k+1}((t_n)) = A_{3k+2}((t_n)) = t_{3k+1} \end{array}, \, k = 0, 1, ...; \; 0 \neq r \neq 1$$

Eğer (t_n) dizisi $k = 0, 1, \ldots$ için $t_{3k} = s_k$, $t_{3k+1} = b_k$, $t_{3k+2} = (1-r)b_k + rs_k + d_k$ formunda yazılabilirse A-toplanabilir olduğunu doğrulamak kolaydır.

(s_k) keyfi bir dizi, (b_k) yakınsak bir dizi ve (d_k) 0'a yakınsak bir dizi olsun. f fonksiyonu A-sürekli olduğundan her (s_k), (b_k), (d_k) dizisi için bir $(d_{k'}) \to 0$ dizisi bulabiliriz öyle ki

$$f((1-r)b_k + rs_k + d_k) = (1-r)f(b_k) + rf(s_k) + d_{k'}$$

ifadesi gerçeklenir.

Özellikle $b_k = b$ ve $d_k = 0$ $(k = 0, 1, ...)$ olsun ve (s_k) dizisi $\mathbb{R}$ üzerinde yoğun olsun. Her reel s için (n_k) indislerinin bir dizisini bulabiliriz öyle ki $s_{n_k} \to s$ gerçeklenir.

Teorem 4.3.4'den f fonksiyonunun sürekli olduğu ve $d_{n'_k} \to 0$ olduğu bilindiğinden

$$f((1-r)b + rs) = (1-r)f(b) + rf(s)$$

elde edilir. Genelliği kaybetmeden $f(0) = 0$ alabiliriz. Basit tümevarımlar sonuçlandırıyor ki keyfi reel x, y'ler için $f(x+y) = f(x) + f(y)$ özdeşliği geçerlidir. f fonksiyonu sürekli olduğu için lineer olmalıdır (Iwiński 1972).

5. REEL FONKSİYONLARIN HEMEN HEMEN SÜREKLİLİĞİ

Bu bölümde ilk olarak reel fonksiyonlarda süreklilik için bazı yeni kavramlar verilecektir. Daha sonra bu süreklilik kavramları arasındaki ilişkiler incelenecektir.

5.1 Temel Bilgiler

Bu kısımda hemen hemen süreklilik ve hemen hemen A-süreklilik kavramları verilecektir.

Tanım 5.1.1 "$A = (a_{nk})$ reel terimli sonsuz bir matris olsun. Eğer A regüler ve

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - a_{n,k+1}| = 0$$

gerçekleniyorsa A kuvvetli regülerdir denir" (Lorentz 1948).

Bu bölüm boyunca $\mathbb{R}$ reel sayılar ve $\mathbb{N}$ pozitif tamsayılar kümesini gösterecektir.

Tanım 5.1.2 (Hemen Hemen Yakınsaklık) "m reel terimli tüm sınırlı dizilerin lineer uzayını göstersin. Eğer bir x dizisinin her bir L *Banach* limiti için $L(x) = s$ ise $x \in m$ dizisi *hemen hemen yakınsaktır* denir ve s değeri x dizisinin genelleştirilmiş limitidir denir" (Lorentz 1948).

Hemen hemen yakınsak dizilerin F sınıfı,

"Bir $x = (x_k)$ dizisinin hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\lim_p \frac{x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+p-1}}{p} = s$ (n'e göre düzgün) olmasıdır."

ifadesini ispatlayan Lorentz tarafından karakterize edilmiştir (Lorentz 1948).

Kısaca $F - \lim x = s$ veya $Limx = s$ yazılabilir.

$\left(\frac{1}{p} \sum_{J=n}^{n+p-1} x_j\right)$ dizisini Lx ile gösterelim.

Eğer A metodu bütün hemen hemen yakınsak dizileri toplarsa o halde A kuvvetli regülerdir denir (Lorentz 1948). Yakınsak bir dizi hemen hemen yakınsaktır ve dizinin limiti ile genelleştirilmiş limiti eşittir.

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi alışılmış metrikle bir metrik uzay olduğu için dizisel süreklilik ve süreklilik kavramları $\mathbb{R}$ üzerinde denktir.

Şimdi bazı yeni kavramları vereceğiz.

Tanım 5.1.3 (Hemen Hemen Süreklilik) "$x = (x_n)$ reel terimli bir dizi olsun. Eğer $F - \lim x = x_0 \Rightarrow F - \lim(f(x)) = f(x_0)$ ise $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında hemen hemen süreklidir denir" (Öztürk 1983).

Tanım 5.1.4 (A-Hemen Hemen Süreklilik) "$A = (a_{nk})$ reel sayıların regüler bir matrisi ve $x = (x_n)$ reel terimli bir dizi olsun.
Eğer $A - \lim(Lx) = x_0 \Rightarrow A - \lim(Lf(x)) = f(x_0)$ ise $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında A-hemen hemen süreklidir denir" (Öztürk 1983).

Tanım 5.1.5 "$A = (a_{nk})$ reel terimli regüler bir matris ve $x = (x_n)$ reel terimli bir dizi olsun.
Eğer $F - \lim(Ax) = x_0 \Rightarrow F - \lim(A(f(x))) = f(x_0)$ ise $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında A-hemen hemen süreklidir denir" (Öztürk 1983).

5.2 Süreklilik Kavramları Arasındaki İlişkiler

Bu kısımda hemen hemen süreklilik ve A-hemen hemen süreklilik arasındaki ilişki ifade edilecektir.

Teorem 5.2.1 Eğer bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında A-hemen hemen sürekli ise o halde f fonksiyonu aynı noktada hemen hemen süreklidir (Öztürk 1983).

İspat. $x = (x_n)$ dizisi $\mathbb{R}$ üzerinde bir dizi olsun öyle ki Lx dizisi x_0 noktasına yakınsak olsun. f fonksiyonu $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında A-hemen hemen sürekli olduğu için $A - \lim(Lx) = x_0$ iken $A - \lim(Lf(x)) = f(x_0)$
gerçeklenir ve böylece

$Limx = x_0$ ise $A - \lim(Lx) = x_0$ olup bu da

$$A - \lim(Lf(x)) = f(x_0)$$

olmasını gerektirir.

Yani x_0 noktasına yakınsak her Lx dizisi için $A - \lim(Lf(x)) = f(x_0)$ elde edilir. Diğer taraftan Lx dizisi x_0 noktasına yakınsadığı için Lx dizisinin her alt dizisi de x_0 noktasına yakınsar. Böylece $Lf(x)$ dizisinin her bir alt dizisine Lx dizisinin x_0 noktasına yakınsak olan bir alt dizisi karşılık gelir. Böylece A, $Lf(x)$ dizisinin her alt dizisini toplar. Teorem 4.1.1'den $Lf(x)$ dizisi yakınsak olmak zorundadır.

A regüler ve $A-\lim(Lf(x)) = f(x_0)$ olduğu için $Lf(x)$ dizisi $f(x_0)$ değerine yakınsak olmalıdır. Yani f fonksiyonu hemen hemen süreklidir. ■

Teorem 5.2.2 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında hemen hemen sürekli bir fonksiyon olsun. O halde f fonksiyonunun x_0 noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart x_0 noktasına yakınsayan her bir $x = (x_n)$ dizisi için

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) \to 0 \ (n \to \infty) \tag{5.1}$$

gerçeklenmesidir (Öztürk 1983).

İspat. Gereklilik: f fonksiyonu $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında sürekli olsun. O halde, $x_n \to x_0 \ (n \to \infty)$ olduğunda $f(x_n) \to f(x_0) \ (n \to \infty)$ gerçeklenir. Bu nedenle her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0(\varepsilon)$ vardır öyle ki her $n > n_0(\varepsilon)$ için

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gerçeklenir. Bu nedenle her $n > n_0(\varepsilon)$ için

$$|f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq |f(x_{n+1}) - f(x_0)| + |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$$

elde edilir.

Yeterlilik: $x = (x_n)$ dizisi x_0 noktasına yakınsak olsun ve f, $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında hemen hemen sürekli bir fonksiyon olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ için yeteri kadar büyük bir p sayısı seçebiliriz öyle ki tüm $n \in \mathbb{N}$'ler için

$$\left| \frac{1}{p}(f(x_n) + f(x_{n+1}) + ... + f(x_{n+p-1})) - f(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.2}$$

gerçeklenir.

$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{p-1}$, $(p > 1)$ alalım. (5.1)'den $\varepsilon_1 > 0$ için yeteri kadar büyük bir n_0 seçelim öyle ki tüm $n > n_0$ için $|f(x_n) - f(x_{n+1})| < \varepsilon_1$ olur. Bu nedenle $n > n_0$ için

$$|f(x_n) - f(x_{n+p-1})| \leq (p-1)\varepsilon_1 \tag{5.3}$$

gerçeklenir.

$maks(n_0, p) = M$ olsun. (5.2) ve (5.3)'den $n > M$ için

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(x_0)| &\leq \left| f(x_n) - \tfrac{f(x_n)+\ldots+f(x_{n+p-1})}{p} \right| + \left| \tfrac{f(x_n)+\ldots+f(x_{n+p-1})}{p} - f(x_0) \right| \\ &\leq \tfrac{1}{p} \left| pf(x_n) - \sum_{j=n}^{n+p-1} f(x_j) \right| + \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \tfrac{1}{p} \sum_{j=n}^{n+p-1} |f(x_n) - f(x_j)| + \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \tfrac{1}{p}(1 + 2 + \ldots + (p-1))\varepsilon_1 + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar. ■

5.3 Reel Fonksiyonların F-Sürekliliği

Bu kısımda süreklilik ve F-süreklilik arasındaki ilişki incelenecektir.

Reel fonksiyonların F-sürekliliği kavramı reel sayı dizilerinin hemen hemen yakınsaklığı kavramına dayanmaktadır. Bir fonksiyonun bir noktadaki F-sürekliliğinden bu fonksiyonun lineerliği elde edilir. Bu durum Öztürk'ün (1983) bir sonucunu güçlendirmektedir.

Öztürk (1983) reel fonksiyonların hemen hemen süreklilik kavramını vermiştir. Bu kavram Lorentz (1948), Petersen (1966) ve Petersen-Zame (1969) tarafından ele alınan F-yakınsaklık kavramına dayanmaktadır. Hemen hemen süreklilik terimi reel fonksiyonlar teorisinde farklı bir anlama sahip olduğu için bu kısımda Öztürk'ün (1983) makalesinden hemen hemen süreklilik yerine F-süreklilik kavramını kullanacağız.

Eğer reel sayıların bir $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi alışılmış anlamda yakınsak bir dizi ise o halde bu dizi aynı zamanda hemen hemen yakınsaktır ve $F - \lim x_n = \lim\limits_{n} x_n$ sağlanır.

Hemen hemen yakınsak her dizinin sınırlı olduğu bilinmektedir (Lorentz 1948).

Yukarıda verdiğimiz Tanım 5.1.3'ü bir defa daha tekrarlayacağız.

Tanım 5.3.1 "Eğer $F - \lim x_n = x_0$ olacak biçimdeki her (x_n) dizisi için $F - \lim f(x_n) = f(x_0)$ gerçekleniyor ise $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında F-süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu her bir $x \in \mathbb{R}$ noktasında F-sürekli ise f fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde F-süreklidir denir" (Borsík-Šalát 1993).

Daha önce f fonksiyonu bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında C-sürekli ise o halde f fonksiyonunun lineer olduğu ispatlanmıştı (Buck 1948). Şimdi amaç fonksiyonların F-sürekliliği için benzer sonucu ispatlamaktır.

Teorem 5.2.2'yi bir noktada F-sürekli olan her bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde lineer olduğunu, yani a ve b sabitleri için $f(x) = ax + b$ formunda olduğunu göstererek kuvvetlendireceğiz.

Bu yüzden aşağıdaki teoremin ifade ve ispatını vereceğiz. Teoremin ispatında Robbins (1946) tarafından ortaya atılan problemin Buck (1948) tarafından verilen çözümündeki bazı düşünceleri ve aşağıdaki Lemma'yı kullanacağız.

Aşağıdaki sonuç Teorem 5.2.2'nin sonucunu hafifletmektedir.

Lemma 5.3.1 Eğer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında F-sürekli ise o halde f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir (Borsík-Šalát 1993).

İspat. İlk olarak f fonksiyonunun x_0 noktasında sınırlı olduğunu ispatlayalım. Yani bir $d > 0$ mevcut öyle ki f, $(x_0 - d, x_0 + d)$ aralığında sınırlıdır. Bunu ispatlamak için $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ iken $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ dizisinin sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir.
$x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ olsun. O halde $F - \lim x_n = x_0$ olduğundan ve Lemma'nın hipotezinden $F - \lim f(x_n) = f(x_0)$ elde ederiz. Bundan dolayı hemen hemen yakınsak bir dizi olan $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ sınırlıdır.
Şimdi f fonksiyonunun x_0 noktasındaki sürekliliğini ispatlayabiliriz. Kabul edelim ki f fonksiyonu x_0 noktasında sürekli olmasın. f fonksiyonu $d > 0$ olmak üzere bir $(x_0 - d, x_0 + d)$ aralığında sınırlı olduğu için $(x_0 - d, x_0 + d)$ elemanlarının bir $(y_n)_{y=1}^{\infty}$ dizisi vardır öyle ki $y_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ gerçeklenir ve $(f(y_n))_{n=1}^{\infty}$ dizisi bir $b \neq f(x_0)$ sayısına yakınsaktır. Buradan

$$F - \lim f(y_n) = b \tag{5.4}$$

elde ederiz.
Diğer taraftan $y_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ olduğundan $F - \lim y_n = x_0$ buluruz ve Lemmanın hipotezinden $F - \lim f(y_n) = f(x_0) \neq b$ elde ederiz. Bu da (5.4) ile çelişir. O halde f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Uyarı 5.3.1 Lemma 5.3.1'in karşıtının doğru olmadığı aşağıdaki Teorem 5.3.1'in bir sonucudur.

Teorem 5.3.1 Eğer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında F-sürekli ise o halde f lineer bir fonksiyondur (Borsík-Šalát 1993).

İspat. İlk olarak Teoremin aşağıdaki özel durumunu ispatlayacağız.

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında F-sürekli ve $g(0) = 0$ olacağını varsayacağız.

Şimdi a, b, c reel sayılarını $a + b + c = 0$ olacak biçimde seçelim. $(x_n)_{n=1}^{\infty} = (a, b, c, a, b, c, \ldots)$ dizisini inşa edelim. Bu dizinin 0'a hemen hemen yakınsak olduğunu gösterelim. Gerçekten

$$A_{n,p} = \frac{x_{n+1} + ... + x_{n+p}}{p} = \frac{B_{n,p}}{p} \ (n, p \in \mathbb{N})$$

olsun. $p > 3$ olsun. O halde p sayısı; q, r tamsayı ve $q \geq 1$, $0 \leq r \leq 2$ olmak üzere $p = 3q + r$ formunda yazılabilir.

Eğer $x_{n+1} = a$ ise o halde $B_{n,p}$ için aşağıdaki olasılıklar elde edilir.

$r = 0$ için $B_{n,p} = q(a + b + c) = 0$,

$r = 1$ için $B_{n,p} = q(a + b + c) + a = a$,

$r = 2$ için $B_{n,p} = q(a + b + c) + a + b = a + b$.

Eğer $x_{n+1} = b$ ise o halde

$r = 0$ için $B_{n,p} = (q - 1)(a + b + c) + (b + c) + a = 0$

$r = 1$ için $B_{n,p} = (q - 1)(a + b + c) + (b + c) + a + b = b$

$r = 2$ için $B_{n,p} = (q - 1)(a + b + c) + (b + c) + (a + b + c) = b + c$

elde edilir.

Son olarak eğer $x_{n+1} = c$ ise o halde

$r = 0$ için $B_{n,p} = c + (q - 1)(a + b + c) + a + b = 0$

$r = 1$ için $B_{n,p} = c + q(a + b + c) = c$

$r = 2$ için $B_{n,p} = c + q(a + b + c) + a = a + c$

elde edilir.

Bu yüzden $A_{n,p}$ her bir $n \geq 0$ ve $p > 3$ için

$\frac{0}{p}, \frac{a}{p}, \frac{a+b}{p}, \frac{b}{p}, \frac{b+c}{p}, \frac{c}{p}, \frac{a+c}{p}$

değerlerinden birini alır. O halde $\lim_{p\to\infty} A_{np} = 0$ (n'e göre düzgün) olduğu açıktır.

Teoremin hipotezinden $F - \lim g(x_n) = g(0) = 0$ elde edilir. Yani

$$(g(x_n))_{n=1}^{\infty} = (g(a), g(b), g(c), g(a), g(b), g(c), \ldots)$$

dizisi 0'a hemen hemen yakınsaktır. Ama doğrudan bir hesaplama gösteriyor ki

$$F - \lim g(x_n) = \frac{g(a) + g(b) + g(c)}{3}$$

ifadesi gerçeklenir. Bu nedenle

$$g(a) + g(b) + g(c) = 0 \tag{5.5}$$

elde edilir. $c = -a - b$ olduğundan $g(-a - b) = -g(a) - g(b)$ elde edilir.
$b = 0$ alınırsa

$$g(-a) = -g(a),\ (a \in \mathbb{R}) \tag{5.6}$$

elde edilir.
Şimdi keyfi $x, y \in \mathbb{R}$ alalım. $c = x + y$, $a = -x$, $b = -y$ olsun. O halde $a + b + c = 0$ olur ve (5.5) ve (5.6)'dan $g(x + y) = -g(-x) - g(-y) = g(x) + g(y)$ elde edilir.
Böylece $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $g(x + y) = g(x) + g(y)$ Cauchy fonksiyonel eşitliğini sağlar ve Lemma 5.3.1 'den g, $x = 0$'da süreklidir. Cauchy eşitliğinden $x \in \mathbb{R}$ için a sabit olmak üzere $g(x) = ax$ elde edilir.
Şimdi genel durumu tartışacağız. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında F-sürekli olsun. $x' = x - x_0$, $y' = y - f(x_0)$ olmak üzere yeni koordinatlar tanımlayalım.
$g(x') = f(x) - f(x_0)$ olsun. f fonksiyonunun x_0 noktasındaki F-sürekliliğinden g fonksiyonunun 0'daki F-sürekliliğini doğrulamak kolaydır. İspatın önceki bölümüne dayanarak g fonksiyonu $g(x') = ax'$ formuna sahiptir, yani $b = f(x_0) - ax_0$ olmak üzere $f(x) - f(x_0) = a(x - x_0) = ax - ax_0$ olup $f(x) = ax + (f(x_0) - ax_0) = ax + b$ gerçeklenir. Bu da ispatı tamamlar. ■

6. REEL FONKSİYONLAR İÇİN SÜREKLİLİĞİN DİZİSEL TANIMLARI

6.1 Giriş

Bir $x = (x_n)$ dizisi verilsin. Eğer $\lim x = u$ olması $\lim f(x) = f(u)$ olmasını gerektiriyor ise $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu u noktasında dizisel süreklidir denir. Metrik uzaylarda bu kavramın sürekliliğe denk olduğu bilinmektedir. Bu tanım limit yerine keyfi bir G lineer fonksiyoneli alınarak değiştirilebilir. Literatürde ortaya çıkan çeşitli tanımları genelleştirerek, eğer $G(x) = u$ olması $G(f(x)) = f(u)$ olmasını gerektiriyorsa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu u noktasında G-süreklidir diyebiliriz. Buck (1948) $G(x) = \lim_n n^{-1} \sum_{k=1}^{n} x_n$ olduğunda f fonksiyonu tek bir noktada G-sürekli ise o zaman f fonksiyonunun lineer olduğunu, yani a ve b sabitleri için $f(u) = au + b$ olduğunu göstermiştir (bkz: Problem 3.2.1). Diğer yazarlar aritmetik ortalamadaki yakınsaklık yerine A-toplanabilirlik, hemen hemen yakınsaklık ve istatistiksel yakınsaklık alarak süreklilik kavramını incelemişlerdir. Bu bölümde lineerliği gerektirmesi için G-süreklilik için yeterli bir şart verilirken sürekli fonksiyonların G-sürekli olması için gerekli bir şart verilecektir. Böylece literatürde bilinen çeşitli sonuçlar genelleştirilecektir. Bu aynı zamanda birçok durumda G-sürekli fonksiyonların ya tamamen lineer fonksiyon ya da tamamen sürekli fonksiyon olmak zorunda olduğunu göstermektedir.

Yukarıda belirtildiği gibi reel değişkenli reel değerli fonksiyonlar için sürekliliğin standart $\varepsilon - \delta$ tanımı bir dizisel süreklilik tanımı ile değiştirilebilir. Sürekli fonksiyonların özelliklerinin çoğu dizisel argümanlar kullanılarak da elde edilebilir.

Bu bölümde dizilerin yakınsaklık tanımını değiştirmenin sürekli fonksiyonların kümesinin yapısı üzerine etkisini araştıracağız. Böylece Robbins (1946) tarafından ortaya atılan problem ile başlayan araştırmaya devam edilecektir. Robbins (1946) tek bir $u = u_0$ noktasında

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = u \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) = f(u) \tag{6.1}$$

özelliğini sağlayan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun lineer olmak zorunda olduğunu, yani a, b sabit reel sayılar olmak üzere tüm u'lar için $f(u) = au + b$ formunda olduğunu göstermek için problemi ortaya atmıştır. Diğer bir deyişle sürekliliğin alışılmış tanımı söz konusu olduğunda dizisel yakınsaklık aritmetik ortalama yakınsaklık ile yer değiştirirse, o halde bu yeni durumda sadece lineer fonksiyonlar sürekli kalır. Aynı problemde Robbins (1946) (6.1)'i sağlayan fonksiyonlar için Cesàro Süreklilik terimini kullanmıştır. Probleme ilişkin Buck'ın çözümü 1948'de yayımlanmış olup ayrıca problem beş kişi tarafından daha çözülmüştür.

O zamandan beri dizisel yakınsaklığın alışılmış tanımını diğer tanımlardan biriyle değiştirmek için benzer araştırmalar yapıldı ki bunlar toplanabilme matrisi, hemen hemen yakınsaklık ve istatistiksel yakınsaklık ile ilgilidir. Bunlar aşağıda tartışılacaktır. Bu araştırmaların tamamında sonuç sürekli fonksiyonların ya tam olarak lineer fonksiyon ya da tam olarak alışılmış anlamda sürekli fonksiyonlar olmasıdır. Bu bölüm yakınsaklığın yeni tanımı belli kısıtlamalar sağladığı sürece bunun her zaman böyle olduğunu gösterir.

Başlamadan önce bazı tanım ve notasyonları vermek gerekli olacaktır. Reel sayıların $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}, \ldots$ dizileri için $\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{z}, \ldots$ harflerini kullanacağız. Eğer f reel değişkenli reel değerli bir fonksiyon ise o halde $f(x) = (f(x_n))_n$ olarak tanımlanır. Bir dizisel yakınsaklık metodunu (veya kısaca bir metodu), tüm reel değerli dizilerin vektör uzayının lineer bir c_G alt lineer uzayı üzerinde tanımlı bir G lineer fonksiyoneli olarak tanımlayacağız. Bir $x = (x_n)$ dizisi verildiğinde eğer $x \in c_G$ olmak üzere $G(x) = l$ ise x dizisi l'ye G-yakınsaktır denir. Özellikle limit, yakınsak dizilerin c uzayında $\lim x = \lim\limits_{n} x_n$ limit fonksiyonelini gösterir. Eğer her yakınsak $x = (x_n)$ dizisi, $G(x) = \lim x$ olmak üzere G-yakınsak ise G metodu regülerdir denir. Bu bölüm boyunca $\mathbb{R}$ üzerinde dejenere olmamış bir aralığı I ile göstereceğiz. Şimdi bir fonksiyonun G-sürekliliğini tanımlayacağız.

Tanım 6.1.1 "G bir dizisel yakınsaklık metodu ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. I değerli bir $x = (x_n)$ dizisi u değerine G-yakınsak olduğunda $f(x) = (f(x_n))$ dizisi $f(u)$ değerine G-yakınsak oluyor ise o halde f fonksiyonu $u \in I$ noktasında G-süreklidir denir. I aralığının bir D altkümesi için eğer f fonksiyonu her $u \in D$

noktasında G-sürekli ise f fonksiyonu D üzerinde G-süreklidir denir. Eğer I tanım kümesi üzerinde f fonksiyonu G-sürekli ise f fonksiyonu G-süreklidir denir" (Connor ve Grosse-Erdmann 2003).

f fonksiyonunun G-sürekliliği kısaca aşağıdaki şekilde ifade edilebilir. Eğer x dizisi I-değerli G-yakınsak bir dizi ise o halde

$$G(f(x)) = f(G(x))$$

sağlanır.

f fonksiyonunun bir J alt aralığında G-sürekliliği ile $f\mid_J$ kısıtlama fonksiyonunun G-sürekliliğini ayırt etmek önemlidir. Eğer f fonksiyonu J üzerinde G-sürekli ise $f\mid_J$ fonksiyonu G-süreklidir. Ancak karşıtı her zaman doğru değildir çünkü ikinci durumda x dizileri J kümesinden alınmıştır.

Alışılmış süreklilik için bilinmeyen bir başka fenomen G-sürekliliğin lokal bir özelliği gerektirmemesidir. Antoni-Šalát (1980) regüler bir G metodu ve bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyon örneği vermiştir öyle ki f fonksiyonu $[-1, 1]$ aralığında lineer ve dolayısıyla G-sürekli fonksiyonla çakışmasına rağmen sadece $x = 0$ noktasında G-süreklidir.

Bazı yazarlar G-sürekliliği regüler bir A toplanabilme matrisi ile tanımlamıştır (Posner 1961, Iwiński 1972, Srinivasan 1980, Antoni-Šalát 1980, Spigel-Krupnik 1994). Bu durumda G-süreklilik genellikle A-süreklilik olarak adlandırılır. Buck'ın sonucunda sadece Cesàro matrisi alınmıştır.

Şimdi önceki iki sınıfla ilgili olmayan metotların bir sınıfını düşünelim. Fast 1951'de istatistiksel yakınsaklığın tanımını yapmıştır.

6.2 İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda istatistiksel yakınsaklık kavramı verilecektir.

Tanım 6.2.1 (İstatistiksel Yakınsaklık) "$B \subseteq \mathbb{N}$ alt kümesinin kardinalitesi $|B|$ ile gösterilmek üzere, $E \subseteq \mathbb{N}$ olsun. Eğer

$$\delta(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in E\}|$$

limiti mevcutsa bu değere E kümesinin asimptotik yoğunluğu (kısaca yoğunluğu) denir ve $\delta(E)$ ile gösterilir. Eğer

$$\text{her } \varepsilon > 0 \text{ için } \delta(\{n : |x_n - L| > \varepsilon\}) = 0$$

gerçekleniyor ise bir $x = (x_n)$ dizisi L değerine istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda L sayısına x dizisinin istatistiksel limiti denir" (Fast 1951).

İstatistiksel yakınsak diziler tüm reel değerli diziler uzayının lineer bir altuzayını oluşturur ve istatistiksel limit bu uzayda lineer bir fonksiyoneldir. Yakınsak diziler aynı limit değerine istatistiksel yakınsaktır (Connor 1988).

Aşağıdaki teorem istatistiksel yakınsaklığı karakterize eder.

Teorem 6.2.1 Bir (x_k) dizisinin L değerine istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart (x_k) dizisinin bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır öyle ki $x_{n_k} \to L$ ve $\delta(\{n_k : k \in \mathbb{N}\}) = 1$ olmasıdır (Connor 1988, Fridy 1985, Šalát 1981).

Tanım 6.2.2 "$A = (a_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ negatif olmayan bir matris olmak üzere $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} < \infty$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \nrightarrow 0$ için her $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_n a_{nk} = 0$ olsun. Eğer her n için $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} |x_k - l| < \infty$ ve $n \to \infty$ için $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} |x_k - l| \to 0$ gerçekleniyor ise x dizisi l değerine kuvvetli A-yakınsaktır (veya kuvvetli A-toplanabilirdir) denir. Bu durumda l değerine x dizisinin kuvvetli A-limiti denir" (Connor-Erdmann 2003). Belirtilen varsayımlar altında bu limit tektir ve kuvvetli A-yakınsaklık kuvvetli matris metodu denilen regüler bir metodu tanımlar. Eğer A negatif olmayan regüler bir matris ise A üzerindeki varsayımlar özellikle sağlanır.

6.3 G=$\mathcal{L}$ İçin Yeterli Bir Şart

G kuvvetli matris metodu için G-süreklilik burada ilk defa çalışılacaktır.
$\mathcal{L}(I)$, $\mathcal{G}(I)$ ve $\mathcal{C}(I)$ sırasıyla lineer, G-sürekli ve sürekli $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonların kümelerini göstersin. $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbb{R})$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathbb{R})$ ve $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ alalım. Eğer sabit a ve b değerleri için $f(u) = au + b$ formunda ise f fonksiyonu lineerdir denir.

Şimdi bu 3 durum arasındaki ilişkiyi araştıracağız.

Önerme 6.3.1 Eğer G regüler bir metot ise o halde her lineer $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu G-süreklidir, yani $\mathcal{L}(I) \subset \mathcal{G}(I)$ sağlanır (Connor-Erdmann 2003).

Bu eğer G regülerse $\mathcal{L}$'nin G-sürekli fonksiyonların mümkün olan en küçük uzayı olduğunu gösterir. Buck (1948) her Cesàro sürekli fonksiyonun lineer bir fonksiyon olduğunu göstermiştir, yani Cesàro toplanabilirliğin G metodu için $\mathcal{G} = \mathcal{L}$ gerçeklenir.

Antoni ve Šalát (1980) Cesàro matrisi tarafından sağlanan bir özelliği ayırmıştır ve bu keyfi bir G regüler matris metodu için $\mathcal{G} = \mathcal{L}$ olmasını gerektirir. Bu sonuç genel regüler metotlara genişletilmeye çalışılırken bir problemle karşılaşılır.

Aşağıda verilen Lemma bu problemi çözmek için bize yardımcı olacaktır.

Lemma 6.3.1 $\alpha \neq 0, 1$ olsun. Eğer u, v elemanları $\alpha u + (1-\alpha)v \in I$ olmak üzere bir $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$f(\alpha u + (1-\alpha)v) = \alpha f(u) + (1-\alpha)f(v) \tag{6.2}$$

ifadesi gerçekleniyor ise f fonksiyonunun lineer olduğu I'nın yoğun bir altkümesi vardır (Connor-Erdmann 2003).

İspat. İlk olarak $\alpha \in (0, 1)$ varsayalım. Çünkü
eğer $\alpha > 1$ ise α yerine $\frac{1}{\alpha}$ ve $\alpha u + (1-\alpha)v$ yerine u alabiliriz;
eğer $\alpha < 0$ ise α yerine $\frac{\alpha}{\alpha-1}$ ve $\alpha u + (1-\alpha)v$ yerine v alabiliriz.
Şimdi I'daki farklı u_0 ve v_0 noktalarını sabitleyelim. O halde $u = u_0$ ve $v = v_0$ için $f(u) = au + b$ olacak biçimde a, $b \in \mathbb{R}$ mevcuttur. $D = \{u \in I : f(u) = au + b\}$ olsun. D'nin $\overline{D}$ kapanışının bir aralık olduğunu iddia ediyoruz. Aksi takdirde u_1, $v_1 \in \overline{D}$ olacak biçimde bir $J = (u_1, v_1)$ aralığı vardır öyle ki $\overline{D}$ kümesinin hiçbir noktasıyla kesişmez. Ama (6.2)'den u_1, $v_1 \in \overline{D}$ olması $\alpha u_1 + (1-\alpha)v_1 \in \overline{D} \cap J$ olmasını gerektirir. Bu da çelişkidir. Bundan dolayı $\overline{D}$ bir aralıktır ve benzer bir şekilde $\overline{D} = I$ olduğu görülür. ■

Bu Lemmayı kullanarak Antoni-Šalát (1980) teoreminin genel metotlara genelleştirilmesini elde ederiz. G metotları için aşağıdaki özelliği ele alalım.

$(L_1) : 0-1$ dizilerinin G-yakınsak bir z dizisi vardır öyle ki $\alpha \neq 0,\ 1$ için $G(z) = \alpha$ olur.

Teorem 6.3.1 G, (L_1) özelliğine sahip regüler bir metot olsun. O halde her G-sürekli $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu lineerdir, yani $\mathcal{G}(I) = \mathcal{L}(I)$ olur (Connor-Erdmann 2003).

İspat. İspatın ilk kısmı Antoni ve Šalát'ın ispatıyla aynıdır. Burada bütünlük adına veriyoruz.

$f : I \to \mathbb{R}$, G-sürekli bir fonksiyon ve $u,\ v \in I$ olsun. $0-1$'lerin G-yakınsak bir $z = (z_n)$ dizisi ve (L_1) özelliğindeki gibi bir α skaleri alalım. $z_n = 1$ için u değerine ve $z_n = 0$ için v değerine eşit olan

$$x_n = z_n u + (1 - z_n)v$$

tanımlayalım. Lineerlikten ve G'nin regülerliğinden

$$G(x) = \alpha u + (1 - \alpha)v$$

olacak biçimde $x = (x_n) \in C_G$ elde ederiz.

Diğer taraftan $z_n = 1$ için $f(x_n) = f(u)$ ve $z_n = 0$ için $f(x_n) = f(v)$ olur. Bu yüzden

$$f(x_n) = z_n f(u) + (1 - z_n)f(v)$$

olup aynı zamanda

$$G(f(x)) = \alpha f(u) + (1 - \alpha)f(v)$$

elde ederiz.

f fonksiyonu G-sürekli olduğundan u, v elemanları $\alpha u + (1 - \alpha)v \in I$ olmak üzere

$$f(\alpha u + (1 - \alpha)v) = f(G(x)) = G(f(x)) = \alpha f(u) + (1 - \alpha)f(v)$$

elde ederiz. Bu noktada Lemma 6.3.1'den I aralığının yoğun bir D altkümesi vardır ve $a,\ b \in \mathbb{R}$ olmak üzere her $u \in D$ için $f(u) = au + b$ gerçeklenir.

Şimdi $u \in I$ ve $x_n \in D$ olmak üzere $x_n \to u$ olsun. O halde $u = G(x)$ olur. Böylece lineerlik ve G'nin regülerliğinden $G(f(x)) = G((ax_n + b)_n) = au + b$ bulunur. f fonksiyonu G-sürekli olduğundan

$$f(u) = G(f(x)) = au + b$$

elde edilir. ■

6.4 G-Sürekliliğin Topolojik Bir Bakış Açısı ve $\mathcal{G}$=$\mathcal{C}$ İçin Gerekli Bir Şart

Bu kısımda altdizisel bir metot olan G yardımıyla $\mathcal{G}$ ile $\mathcal{C}$'nin karşılaştırılması arasındaki bağlantıyı inceleyeceğiz.

Tanım 6.4.1 "$G(x) = l$ olmak üzere x dizisi G-yakınsak olduğunda $\lim_k x_{n_k} = l$ olacak biçimde x dizisinin bir (x_{n_k}) altdizisi mevcutsa G metoduna bir altdizisel metot denir" (Connor-Erdmann 2003).

Sabit bir (n_k) altdizisi için $G = I_{(n_k)}$ metodu tanımlamasını "x dizisinin $G-$yakınsak olması için gerek ve yeter şart $G(x) := \lim_k x_{n_k}$ mevcut olmasıdır." anlamında alacağız. $I_{(n_k)}$ metodu açıkça altdiziseldir.

Şimdi $\mathcal{G}$ boyutu ile altdiziselliği bağlamak amacıyla aşağıdaki topolojik tanımı veriyoruz.

Tanım 6.4.2 "$U \subset \mathbb{R}$ ve $l \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $G(x) = l$ olacak biçimde U kümesindeki noktaların bir $x = (x_n)$ dizisi mevcutsa l, U kümesinin G-örtüsündedir denir. Eğer U kümesi G-örtüsündeki noktaların tümünü içeriyorsa U, G-kapalı bir kümedir denir" (Connor-Erdmann 2003).

$\overline{U}^G$ ile U kümesinin G-örtüsünü gösterelim. Eğer G regüler ise $U \subset \overline{U} \subset \overline{U}^G$ olduğu açıktır; böylece U kümesinin G-kapalı olması için gerek ve yeter şart $U = \overline{U}^G$ olmasıdır.

Önerme 6.4.1 G regüler bir metot olsun. O halde "$\mathbb{R}$ kümesinin her U alt kümesi için $\overline{U} = \overline{U}^G$ gerçeklenmesi için gerek ve yeter şart G'nin altdizisel bir metot olmasıdır." ifadesi gerçeklenir (Connor-Erdmann 2003).

Lemma 6.4.1 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu G-sürekli ve U kümesi G-kapalı olsun. O halde $f^{-1}(U)$ kümesi G-kapalıdır (Connor-Erdmann 2003).

İspat. $V = f^{-1}(U)$ olsun. $l \in \overline{V}^G$ olduğunu varsayalım. O halde $G(x) = l$ olacak biçimde V-değerli bir x dizisi mevcuttur. Ayrıca $G(f(x)) = f(l)$, $f(x)$ ifadesi

U-değerli ve U kümesi G-kapalı olduğu için $f(l) \in U$ elde edilir. Böylece $l \in V$ olur ve $\overline{V}^G \subset V$ elde edilir. ■

Bu lemma ile aşağıdakini elde ederiz. Farklı bir metot kullanarak sonraki bölümde daha güçlü bir sonuç elde edeceğiz (Teorem 6.5.1'in sonucu).

Önerme 6.4.2 Eğer G regüler bir altdizisel metot ise o halde her G-sürekli fonksiyon süreklidir, yani $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}$ gerçeklenir (Connor-Erdmann 2003).

İspat. Her kapalı kümenin ters görüntüsünün de kapalı olduğunu göstereceğiz. $U \subset \mathbb{R}$ kapalı olsun. G altdizisel olduğu için U, aynı zamanda G-kapalıdır. f, G-sürekli olduğundan Lemma 6.4.1'den $f^{-1}(U)$ kümesi G-kapalıdır ve böylece kapalıdır. ■

Aşağıdaki teoremi ispatsız vereceğiz.

Teorem 6.4.1 G regüler bir metot olsun. Eğer her sürekli fonksiyon G-sürekli ise, yani $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ ise G altdizisel bir metotdur (Connor-Erdmann 2003).

Önceki iki sonuçtan regüler bir G metodu için $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ olması için gerek ve yeter şartın $\mathcal{G} = \mathcal{C}$ olduğu görülür. Bu da $\mathcal{G}$'nin $\mathcal{C}$'yi düzenli olarak içeremediğini gösterir. Eğer $\mathcal{G}$'nin $\mathcal{C}$'de olmayan fonksiyonları içeren bir G metodu varsa o halde burada G-sürekli olmayan sürekli fonksiyonlar da olmak zorundadır.

Özel metotlar için $\mathcal{G} = \mathcal{C}$ olduğunda karakterize etmek mümkündür. Alışılmış matris metotları için böyle bir sonuç Iwiński'nin (1972) aşağıda verilen teoreminden hemen sonra gelir (Burada kullanılan G-süreklilik kavramı bizimkinden daha zayıftır.). $I_{(nk)}$ metodunun tanımı daha önce verilmişti; regüler bir matris metodunun $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$'yi sağladığı açıktır ve bu yüzden $\mathcal{G} = \mathcal{C}$ olur.

Teorem 6.4.2 Eğer G regüler bir matris metodu ise o halde aşağıdaki iddialar denktir:

(**i**) $u \to u^2$ fonksiyonu G-süreklidir,

(**ii**) $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$,

(**iii**) $\mathcal{G} = \mathcal{C}$,

(**iv**) $G = I_{(n_k)}$ (bazı (n_k) dizileri için) (Iwiński 1972).

6.5 $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}$ İçin Yeterli Bir Şart

Lineer fonksiyonların $\mathcal{L}$ uzayı, eğer G regüler ise G-sürekli fonksiyonların mümkün olan en küçük uzayıdır ve $\mathcal{G} = \mathcal{L}$ olabilir. Şimdi $\mathcal{G}$'nin ne kadar büyük olabileceğini araştıralım. Bu ilk olarak Posner (1961) tarafından ele alınmıştır ve Posner'in ispatında bir fonksiyon bir noktada G-sürekli ise o halde aynı noktada sürekli olduğu gösterilir. G regüler matris metotları için her zaman $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}$ elde edilir, yani her G-sürekli fonksiyon alışılmış anlamda süreklidir. Bu kısımda Posner'in sonucu metotların geniş bir sınıfına genişletilecektir. G metotları için aşağıdaki özelliği ele alalım:

(S) : Her bir (x_{n_k}) alt dizisi G-yakınsak olan ve $x_n \to \infty$ olacak biçimde hiçbir x dizisi yoktur.

Örneğin hemen hemen yakınsaklık ve istatistiksel yakınsaklık (S) özelliğine sahiptir.

Teorem 6.5.1 G, (S) özelliğine sahip regüler bir metot olsun. O halde $u_0 \in I$ noktasında G-sürekli olan her $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aynı noktada süreklidir (Connor-Erdmann 2003).

İspat. f, u_0 noktasında G-sürekli olsun fakat sürekli olmasın. O halde I üzerindeki bir x dizisi için $x_n \to u_0$ iken $f(x_n) \nrightarrow f(u_0)$ gerçeklenir. Bazı $\delta > 0$ için $|f(y_n) - f(u_0)| \geq \delta$ olacak biçimde x dizisinin bir y alt dizisini seçelim. Her n için $f(y_n) \geq f(u_0) + \delta$ olduğunu kabul edebiliriz. Eğer $f(y)$ sınırlı bir dizi ise o halde $f(w_n) \to a \geq f(u_0) + \delta$ olacak biçimde y dizisinin bir w alt dizisi vardır. Bu da $G(w) = u_o$ ve $G(f(w)) = a \neq f(u_0)$ olmasını gerektirir. Bu da f fonksiyonunun u_0 noktasındaki G-sürekliliği ile çelişir. Bu yüzden $f(y)$ sınırsızdır, böylece $f(w'_n) \to \infty$ olacak biçimde y dizisinin bir w' alt dizisi vardır. w' alt dizisinin her alt dizisi u_0 noktasına yakınsak olduğu için G-süreklilikten $f(w')$ dizisi ve tüm alt dizilerinin G-yakınsak olduğu görülür. Bu da G metodunun (S) özelliğine sahip olması hipotezi ile çelişir. ■

Sonuç 6.5.1 G regüler bir metot olsun. Eğer

(**a**) G alışılmış bir matris metodu (Posner)

(**b**) G kuvvetli bir matris metodu

(**c**) G tamamen regüler, yani $x_n \to \infty$ olacak biçimdeki hiçbir x dizisi G-yakınsak değil

(**d**) G altdizisel

ifadelerinden biri sağlanıyorsa o halde $u_0 \in I$ noktasında G-sürekli olan her $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aynı noktada süreklidir (Connor-Erdmann 2003).

Önerme 6.5.1 G bir istatistiksel yakınsaklık metodu olsun. O halde bir $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $u_0 \in I$ noktasında $G-$sürekli olması için gerek ve yeter şart $u_0 \in I$ noktasında sürekli olmasıdır (Connor-Erdmann 2003).

İspat. İstatistiksel yakınsaklık metodu tamamen regüler bir G metodudur. Sonuç 6.5.1 gereğince bir $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun u_0 noktasında sürekli iken aynı noktada G-sürekli olduğunu göstermemiz yeterlidir. Bu yüzden $st - \lim x_n = u_0$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. f fonksiyonunun u_0 noktasındaki sürekliliğinden bir $\eta > 0$ vardır öyle ki $|v - u_0| \leq \eta$ olacak biçimde her v, u_0 için $|f(v) - f(u_0)| \leq \varepsilon$ gerçeklenir.

O halde $\{n : |f(x_n) - f(u_0)| > \varepsilon\} \subseteq \{n : |x_n - u_0| > \eta\}$ içerirliği gerçeklenir. Böylece

$$\delta\left(\{n : |f(x_n) - f(u_0)| > \varepsilon\}\right) \leq \delta\left(\{n : |x_n - u_0| > \eta\}\right) = 0$$

elde edilir. Bu da gösterir ki $(f(x_n))$ dizisi $f(u_0)$ değerine istatistiksel yakınsaktır. O halde f fonksiyonu u_0 noktasında G-süreklidir. ■

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Süreklilik kavramları arasındaki ilişkilerin incelendiği bu tez çalışmasında kaynaklar bölümünde verilen bir çok makale ve kitaptan yararlanılmıştır. İlk olarak Cesàro süreklilik kavramı tanımlanıp süreklilik ile ilişkisi incelenmiştir. Daha sonra Cesàro süreklilik kavramında Cesàro matrisi yerine genel bir regüler $A = (a_{nk})$ matrisi alınarak çeşitli incelemeler yapılmıştır. Devamında bu kavram F-süreklilik ve G lineer fonksiyoneli ile modifiye edilmiştir. Son olarak G lineer fonksiyoneli yerine A-toplanabilme, hemen hemen yakınsaklık veya istatistiksel yakınsaklık alarak f fonksiyonunun lineerliği ve sürekliliği arasındaki bazı ilişkiler elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

Aczél, J., 1961. *Vorlesungen über Funkcionalgleichungen und ihre Anwendungen*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 68-70, Berlin.

Antoni, J. and Šalát, T., 1980. *On the A-continuity of real functions*. Universitas Comeniana Acta Mathematica Universitatis Comenianae, 39, 159-164.

Antoni, J., 1986. *On the A-continuity of real function II*. Math. Slovaca, 36, 283-288.

Banach, S., 1932. *Théorie des opérations linéaires*. Mono. Mat. I, Warsaw.

Borsík, J. and Šalát, T., 1993. *On F-continuity of real functions*. Tatra Mountains Math. Publ., 2, 37-42.

Buck, R.C., 1943. *A note on subsequences*. Bull. Amer. Math. Soc., 49, 898.

Buck, R.C., 1948. *Solution of problem 4216*. Amer. Math. Monthly, 55, 36.

Buck, R.C., 1956. *An addendum to "a note on subsequences"*. Proc. Amer. Math. Soc., 7, 1074-1075.

Connor, J., 1988. *The statistical and strong p-Cesàro convergence of sequences*. Analysis 8, 47-63.

Connor, J. and Grosse-Erdmann, K.-G., 2003. *Sequential definitions of continuity for real functions*. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 33(1), 93-121.

Çakar, Ö., 2010. *Fonksiyonel Analize Giriş I*. A.Ü. Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları No:13. Ankara.

Fast, H., 1951. *Sur la convergence statistique*. Colloq. Math., 2, 241-244.

Fridy, J.A., 1985. *On Statistical Convergence*. Analysis, 5, 301-313.

Iwiński, T.B., 1972. *Some remarks on Toeplitz methods and continuity*. Commentationes Mathematicae, Prace Matematyczne, 16, 37-43.

Lorentz, G.G., 1948. *A contribution to the theory of divergent sequences*. Acta Math., 80, 167-190.

Maddox, I.J., 1970. *Elements of functional analysis*. Cam. Univ. Press, 52.

Mazur, S. and Orlicz, W., 1954. *On linear methods of summability*. Studia Math., 14, 129-160.

Öztürk, E., 1983. *On almost-continuity and almost-A continuity of real functions*. Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara Sér. A_1 Math., 32, 25-30.

Petersen, G.M., 1966. *Regular matrix transformations*. McGraw-Hill, 27, New York-Toronto-Sydney.

Petersen, G.M. and Zame, A., 1969. *Summability properties for the distribution of sequences*. Monatsh. Math., 73, 147-158.

Posner, E.C., 1961. *Summability-preserving functions*. Proc. Amer. Math. Soc., 12, 73-76.

Robbins, H., 1946. *Cesàro Continuity Problem 4216*. Amer. Math. Monthly, 53, 470.

Šalát, T., 1980. *On statistically convergent sequences of real numbers*. Math Solvaca, 30(2), 139–150

Spigel, E. and Krupnik, N., 1994. *On the A-continuity of real functions*. J. Anal., 2, 145-155.

Srinivasan, V.K., 1980. *An equivalent condition for the continuity of a function*. The Texas Journal of Science, 32, 176-177.

Wilansky, A., 1984. *Summability Through Functional Analysis*. North-Holland, Amsterdam.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Burçin EMİNOĞLU

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 09/05/1992

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Cumhuriyet Lisesi (2010)

Lisans : Ankara Üniversitesi, Matematik Bölümü (2015)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2021)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl: Küçük ve Orta Ölçekli İşletmeleri Geliştirme ve Destekleme İdaresi Başkanlığı (2018-...)