ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

STOKASTİK DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN PARAMETRE TAHMİNİ

Cem TOPUZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2021

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

STOKASTİK DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN PARAMETRE TAHMİNİ

Cem TOPUZ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Arzu ÜNAL

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde sonraki bölümlerde sıklıkla kullanılacak olan rasgele değişkenler, olasılık uzayı, olasılık dağılımı, beklenen değer, rasgele değişkenlerin Hilbert Uzayı, rasgele değişkenler dizisinin yakınsaklığı, Monte Carlo tahmini gibi temel istatistiksel kavramlara değinilmiştir. Üçüncü bölümde stokastik süreçlere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde ise stokastik diferensiyel denklemlerin çözümlerinde önemli bir rol oynayan stokastik integrasyon kavramı ele alınmıştır. Bu kısımda Itô stokastik integrali, stokastik diferensiyel ve Itô formülü gibi önemli kavramlar kapsamlı bir şekilde ele alınmıştır. Beşinci kısımda ise stokastik diferensiyel denklemler yer almaktadır. Bu bölümde stokastik diferensiyel denklemlerde Itô formülünün uygulanarak tam çözümün elde edilmesi anlatılmış ve örnekler verilmiştir. Nihayet bu bölümde Itô stokastik diferensiyel denklemleri için parametre tahmini ele alınmış ve yöntemler örnekler üzerinden incelenmiştir.

Ocak 2021, 99 sayfa

Anahtar kelimeler: rasgele değişken, stokastik integrasyon, Itô formülü, Itô stokastik diferensiyel denklemi, parametre tahmini

ABSTRACT

Master Thesis

PARAMETER ESTIMATION FOR STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

Cem TOPUZ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Arzu ÜNAL

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, basic statistical concepts such as random variables, probability space, probability distribution, expected value, Hilbert space of random variables, convergence of random variables, Monte Carlo prediction, which will be frequently used in the following chapters, are discussed. Stochastic processes are given in the third chapter. In the fourth chapter, the concept of stochastic integration, which plays an important role in the solutions of stochastic differential equations, is discussed. In this section, important concepts such as Itô stochastic integral, stochastic differential and Itô formula are discussed comprehensively. In the fifth part, stochastic differential equations are included. In this section, obtaining the exact solution by applying Itô formula in stochastic differential equations is explained and examples are given. Finally, in this section, parameter estimation for Itô stochastic differential equations is discussed and methods are examined through examples.

January 2021, 99 pages

Key Words: random variables, stochastic integration, Itô formula, Itô stochastic differential equation, parameter estimation

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında, yardım ve katkılarından dolayı danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Arzu ÜNAL'a; üzerimde emeği olan bütün bölümümüz öğretim üyelerine gönülden sonsuz teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim süresi boyunca desteklerini benden esirgemeden yol gösteren, ev ve iş hayatımda eksiklerimi görmezden gelen ailem ve çalışma arkadaşlarıma içten teşekkürlerimi, saygılarımı ve minnettarlığımı sunarım.

Ayrıca dolaylı yollarla araştırmalarım ve çalışmalarımda bana fayda sağlayan bütün teknolojik gelişmeler, uygulamalar, kaynaklar vb. farkında olmadan bugünlere taşınmasında emeği olan bütün insanlara teşekkürü borç bilirim.

Cem TOPUZ
Ankara, Ocak 2021

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI
ETİK i
ÖZET..... ii
ABSTRACT iii
TEŞEKKÜR..... iv
SİMGELER DİZİNİ vii
ŞEKİLLER DİZİNİ ix
ÇİZELGELER DİZİNİ x
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 4
2.1 Olasılık Uzayı 4
2.2 Rasgele Değişken, Olasılık Dağılımı 8
2.3 Beklenen Değer 12
2.4 Moment 13
2.5 Rasgele Değişkenlerin Hilbert Uzayı 15
2.6 Rasgele Değişkenler Dizisinin Yakınsaklığı 20
2.7 Monte Carlo 25
3. STOKASTİK SÜREÇLER 28
3.1 Ayrık (Kesikli) Stokastik Süreçler 28
3.2 Sürekli Stokastik Süreçler 32
3.2.1 Browniyan Hareketi 33
3.3 Stokastik Sürecin Bir Hilbert Uzayı 40
3.4 Stokastik Süreçlerin Bilgisayarla Üretimi 46
3.5 Örnekler 49
4. STOKASTİK İNTEGRASYON 53
4.1 $\int_a^t f(s,\omega)ds$ Formundaki İntegraller 53
4.2 Itô Stokastik İntegralleri 57
4.3 Stokastik İntegrallerde Yaklaşım 63
4.4 Stokastik Diferensiyeller ve Itô Formülü 65
4.5 Stratonovich Stokastik İntegrali 69
5. STOKASTİK DİFERENSİYEL DENKLEMLER 71
5.1 Tek Çözümün Varlığı 72
5.2 Stokastik Diferensiyel Denklemlerin Çözümlerinin Özellikleri 75
5.3 Itô Formülü ve Tam Çözüm 77
5.4 Stokastik Diferensiyel Denklemlere Yaklaşım 84
5.5 Stokastik Diferensiyel Denklem Sistemleri 88
5.6 Stokastik Diferensiyel Denklemler için Parametre Tahmini 90
5.6.1 Maksimum olabilirlik tahmin yöntemi 90
5.6.2 Parametrik olmayan bir tahmin yöntemi 94

KAYNAKLAR 97
ÖZGEÇMİŞ.....99

SİMGELER DİZİNİ

$\sum$	Toplam
$\prod$	Çarpım
$\int$	İntegral
∂	Kısmi türev
$\approx$	Yaklaşık
$\in$	Eleman
$(.\,,.)$	İç çarpım
$\subset$	Alt küme
$\times$	Kartezyen çarpım
$\cap$	Kesişim
$\cup$	Birleşim
$\leq$	Küçük eşit
$\geq$	Büyük eşit
σ-cebiri	Sigma cebiri
Ω	Örnek uzay
A^c	A'nın tümleyeni
$\mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R})$	Sonsuz mertebeden türevlenebilen reel değerli fonksiyonlar uzayı
$F_X(x)$	X rasgele değişkeninin olasılık dağılım fonksiyonu
g^{-1}	g fonksiyonunun tersi
$\|\|x\|\|$	x'in normu
H_{RD}	Rasgele değişkenlerin Hilbert uzayı

H_{SS}	Stokastik süreçlerin Hilbert uzayı
I_A	Gösterge fonksiyonu
N_A	A olayının meydana gelme sayısı
$P = [p_{i,j}]$	Geçiş olasılıkları matrisi
P(A)	A olayının olasılığı
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
S_{RD}	Rasgele değişkenlerin vektör uzayı
S_{SS}	S kümesindeki stokastik süreçlerin kümesi

Kısaltmalar:

RD	Rasgele değişken
SS	Stokastik süreç
SDD	Stokastik diferensiyel denklem

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3. 1 Poisson sürecinin tek örnek yolu (sürekli) ve 200 poisson sürecinin ortalaması (kesikli) 35
Şekil 3. 2 [0,10]'da iki Wiener örnek yolu 45
Şekil 3. 3 Aransas-wood buffalo'daki turna nüfusu 51
Şekil 3. 4 Lubbock'daki yıllık yağış miktarı (inç) 51
Şekil 3. 5 Best buy ve mattel şirket hisse senedi fiyatları 52
Şekil 5. 1 Ortalama çözüm ve örnek yol 87
Şekil 5. 2 Gerçek turna popülasyonu, ortalama popülasyon (kesik çizgi) ve iki simüle turna nüfusu 94

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4. 1 Itô stokastik integrallerinin bazı özellikleri 61
Çizelge 4. 2 Örnek 4.11 için tahminlemelerin hesaplanması 65
Çizelge 5. 1 Örnek 5.9 için hesaplanan Euler ve Milstein hataları 85
Çizelge 5. 2 $E(X(1))$'i n yaklaşım hesaplamaları 86
Çizelge 5. 3 $E(X^2(1))$'in yaklaşım hesaplamaları 86
Çizelge 5. 4 Aransas bizon ormanındaki boğmaca turnaların nüfusu 93

1. GİRİŞ

Diferensiyel denklemler, matematiğin doğa ve mühendislik bilimlerine uygulanmasında merkezi bir rol oynar. Bununla birlikte, gerçek hayattaki pek çok olay stokastik (rasgele) etkiler barındırmaktadır (Henderson ve Plaschko 2006). En bilinen örnek muhtemelen, bir akışkan içerisindeki polenin davranışının tamamen rassal olduğunu ortaya koyan Browniyan hareketidir (Langevin 1903, Uhlenbeck 1930, Freedman 1983, Karatzas ve Shreve 1988). Buna ek olarak akışkan ya da plazma dinamik türbülansları (Ikeda ve Watanabe 1981), optik (O'Neill 1991), nüfus artışı (Allen ve Allen 2003, Kirupaharan ve Allen 2004)ve hisse senedi fiyatları (Harrison ve Pliska 1983, Mikosch 1908) problemleri verilebilir. Ölçümlerdeki hatalar ve bu olguların doğuştan gelen rastlantısallığı nedeniyle, bu tip olaylar çoğunlukla deterministik bir diferensiyel denklem ile ifade edilemezler. Bir deterministik modelde sistemin zamana göre nasıl bir gelişim göstereceği net olarak belirlidir. Ancak stokastik modellerde sistemin gelişimi tamamen rassaldır. Bu yüzden sürecin birden fazla tekrarlaması durumunda model doğal olarak farklı sonuçlar üretecektir.

Stokastik diferensiyel denklemler (SDD) ile ilgili çalışmalar 1900'lerin başlarına kadar dayanmaktadır. İlk olarak İskoçyalı botanikçi Robert Brown 1827'de, sıvı içerisinde salınan bir polen parçacığının mikroskobik seviyedeki yer değiştirmelerinin çok düzensiz, çok hızlı ve zigzag benzeri hareketler izlediğini not etmiştir. Daha sonraki çalışmalarda parçacıkların bu türlü rassal hareketleri adına ithafen Browniyan Hareket olarak anılmıştır. 1905'de Albert Einstein'ın atomlarla ilgili olan ünlü makalesinde ve yine 1906'da Polonyalı fizikçi Smoluchowski, bir parçacığın içinde bulunduğu ortamdaki daha küçük moleküllerin sürekli bombardımanına maruz kalarak izlediği yörüngenin başka bir deyişle difüzyonun (Difüzyon: herhangi bir molekülün sıvı, katı veya gaz içerisinden pasif geçişi) aslında bir Brownian hareketi olduğunu ortaya koymuşlardır. Bununla birlikte, Browniyan hareketiyle ilgili daha önceki çalışmalardan biri, hisse senedi fiyatları için hazırlamış olduğu 'Spekülasyon Teorisi' tezi ile Bachelier'e (1900) aittir. 1908'de Langevin (Lemons ve Gythiel 1997), bir serbest Browniyan parçacığın hızı V_t'nin

$$dV_t = \beta V_t dt + \sigma dB$$

diferensiyel denklemine göre hareket ettiğini öne sürmüştür. Burada β sürtünme sabiti, $\sigma > 0$ dalgalanma sabiti ve dB, $(B_t)_{t\geq 0}$ da standart Browniyan harekettir. Bu denklem aslında bir stokastik diferensiyel denklem olup aynı zamanda Newton'un ikinci kanunu $F = ma$ ile aynı anlama sahiptir. Ardından Norbert Wiener (1923) Browniyan hareketin matematiksel temellerini oluşturan çalışmalar ortaya koymuştur. Browniyan hareket ile aynı anlama gelen sürekli bir stokastik süreç olan Wiener süreci'nin isim babasıdır. 1931'de Kolmogorov Browniyan hareket için ileriye ve geriye doğru Kolmogorov denklemlerini ortaya koymuştur. Daha sonra Itô (1944, 1946) ve Stratonovich (1966), SDD'leri daha güçlü bir matematiksel zemine koymayı başarmışlardır.

Stokastik diferensiyel denklemler genel olarak iki sınıfa ayrılmaktadırlar: Birinci sınıf; rasgele katsayı fonksiyonları ya da rasgele başlangıç ya da sınır koşulları içeren adi diferensiyel denklemlerdir. Bu denklemlerde stokastik diferensiyel söz konusu değildir. Bu tezde ele alınacak ikinci sınıf ise Browniyan hareketin stokastik diferensiyelini içeren

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dB(t) \quad , \quad X(0) = X_0$$

biçimindeki stokastik başlangıç değer problemleri olacaktır. Burada $B(t)$, $t \geq 0$ Browniyan hareketi süreci (ya da Wiener süreci), $\mu(x, t)$ ve $\sigma(x, t)$ verilen katsayı fonksiyonları ve X'de bilinmeyen stokastik bir süreçtir. Bu da

$$X(t) = X_0 + \int_0^t b(X(s), s)ds + \int_0^t B(X(s), s)dB$$

anlamına gelmektedir. Yukarıdaki eşitlikte ilk integral bir Riemann integrali iken ikinci integral Itô stokastik integrali temsil etmektedir. Bu integralin hesabında bilinen klasik kalkülüs metodları geçerli olamayacaktır. Bunun nedeni de Browniyan hareketin hiç bir yerde diferensiyellenemez oluşudur. Bu alanda, Kiyoshi Itô (1944, 1946), stokastik diferansiyel ve integral denklemler için ilgili kuralları ve formülleri sıradan hesaplardan genelleştirerek tanımlayan ilk matematikçi olmuştur. Itô stokastik integrali günümüzde de en iyi bilinen stokastik integrallerden biri olup, stokastik diferensiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılan önemli bir araç niteliğindedir. Diğer taraftan, Itô stokastik analizi, finansal matematiğin hisse senedi ve opsiyon fiyatlarının modellenmesinde veya bir biyolojik popülasyondaki popülasyonun büyümesini belirlemede önemli bir rol oynamaktadır (Allen 2010).

Bu tezde ilk olarak stokastik diferansiyel denklem teorisinde önemli yere sahip rasgele değişken, olasılık yoğunluk fonksiyonu, rasgele değişkenlerin Hilbert uzayı gibi bazı temel kavramlar örneklerle birlikte verilecektir. Sonraki bölümde stokastik diferansiyel denklemlerin çözümlerinde karşılaşılacak olan stokastik süreçlere değinilmiştir. 4. bölümde ise stokastik diferensiyel denklemlerin çözümlerinde önemli bir yere sahip olan stokastik integral, stokastik diferensiyel, stokastik $X = \{X(t),\ 0 \leq t\}$ süreci için

$$\int_0^T X(t)dB(t)$$

Ito integrali ve özellikleri, Ito formülü ve benzeri kavramlar üzerinde ayrıntılı bir şekilde durulmuştur. Son olarak 5. Bölümde, Ito stokastik diferensiyel denklemlerin çözümlerinden bahsedilmiştir. Stokastik diferensiyel denklemlerin çoğunlukla tam çözümleri bulunamamaktadır. Bununla birlikte literatürde birçok sayısal yönteme rastlamak mümkündür. Son olarak stokastik diferensiyel denklemlerin parametre tahmininde kullanılan bir yöntem ele alınmış ve örnekler verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde stokastik diferensiyel denklemlerin tanımlanmasında ihtiyaç duyulacak olan temel bazı istatistiksel kavramlar verilmiştir.

İlk olarak, olasılık uzayları, rasgele değişkenler ve beklenen değerler tanımları verilmiş sonra da, rasgele değişkenlerin bir Hilbert uzayı ele alınmıştır. Daha sonra, rasgele değişkenlerin yakınsaklık kavramı ortaya konmuştur. Rasgele değişkenlerin Hilbert uzaylarını kullanmanın bir avantajı, Hilbert uzayındaki rasgele değişkenlerin herhangi bir Cauchy dizisinin, bu uzayda tek bir rastgele değişkene yakınsamasıdır. Hilbert uzaylarının bu tamlık özelliği, stokastik diferensiyel denklemlerin anlaşılmasını kolaylaştırmaktadır. Bu kısmın sonunda, problem çözmede rastgele sayıları kullanmak için ilgili Monte Carlo süreçleriyle birlikte rastgele sayı üretimi açıklanmaktadır.

Rastgele bir değişken, rastgele bir deneyin çıktılarının kümesinde tanımlı reel değerli bir fonksiyondur. Rasgele değişkenler stokastik integrasyon ve stokastik diferensiyel denklemlerde önemlidir. Stokastik integral ve stokastik diferensiyel denklemin çözümleri rasgele bir değişkendir. Bu bölümün temel amaçlarından biri rasgele değişkenlerin Hilbert uzaylarını tanımlamaktır. Hilbert uzayları stokastik integrasyon ve stokastik diferensiyel denklemlerin özelliklerini tanımlamak için kullanılmaktadır. Örneğin, 4. Bölümde, bir Hilbert uzayındaki belirli rasgele değişkenlerin bir özel dizisinin rasgele bir değişkene yakınsadığı ve bu rasgele değişkenin stokastik bir integral tanımlayacağı gösterilecektir. Rasgele değişkenlerin bir Hilbert uzayını tanımlamak için rasgele deney kavramını anlamak gerekir. Özellikle, rasgele bir deneyin olası çıktılarını ve bu çıktıların olasılıklarını anlamak önemlidir. Ayrıca, rasgele değişkenlerin Hilbert uzayı üzerinde bir metrik tanımlamak için beklenen değerlere ihtiyaç vardır.

2.1 Olasılık Uzayı

Rasgele sonuçları olan bir süreç rasgele deney olarak adlandırılır. Rasgele bir deneyin tüm olası sonuçlarının kümesine örnek uzay denir ve Ω ile gösterilir. Ω'nın bir alt kümesi olan çıktıların bir kombinasyonu da bir "olay" olarak adlandırılır. Olayların kümesi ise $\mathcal{A}$ ile gösterilir. $\mathcal{A}$ 'nın aşağıdaki özellikleri sağlayan bir σ-cebir olduğu kabul edilir. $\Omega \neq \emptyset$ ve $\mathcal{A}$ olaylar kümesi Ω'da bir sınıf olmak üzere

(a) $\Omega \in \mathcal{A}$

(b) Eğer $A \in \mathcal{A}$ ise $A^c \in \mathcal{A}$, A^c kümesi A'nın tümleyeni

(c) Eğer $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}\ ise\ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Rasgele deneyin N kez tekrarlandığını ve N_A'nın A olayının meydana gelme sayısı olduğunu varsayalım. $f_A = N_A/N$, A olayının göreli frekansı olsun. A $\in \mathcal{A}$ olayının olasılığı $P(A)$ şeklinde gösterilir. f_A değeri artan sayıda denemeyle $P(A)$ olasılığının değerine yaklaşım gösterir. P olasılığı $\mathcal{A}$ 'dan [0,1] e eşleyen bir fonksiyon kümesidir ve $\mathcal{A}$, Ω'da bir σ-cebir olmak üzere P aşağıdaki şartları sağlaması halinde olasılık ölçüsü olarak adlandırılır.

(d) $P(\Omega) = 1$

(e) $P(A^c) = 1 - P(A)$

(f) Eğer $i \neq j\ için\ A_i \cap A_j \neq \emptyset$ ise $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$'dir.

Ω örnek uzayı, Ω'nın alt kümesi $\mathcal{A}$ σ-cebirini ve P olasılık ölçüsünü içeren $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ üçlüsü, $\mathcal{A}$'da olasılık uzayı olarak adlandırılır.

Aşağıdaki dört örnek bir olasılık uzayı kavramını göstermektedir.

Örnek 2.1: Bir madeni paranın iki kere atılması; σ-cebir kümesi oluşturma

Bir parayı iki kez atma rasgele deneyini ele alalım. Olası sonuçlar

$$\omega_1 = YY, \omega_2 = YT, \omega_3 = TY, \omega_4 = TT$$

olsun. Bu nedenle örnek uzay;

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

dir. Bununla birlikte, bir σ-cebirinin özelliklerini sağlayan birçok olası $\mathcal{A}$ kümesi vardır. En küçük $\mathcal{A}$ = {φ, Ω} 'dir. Eğer $\{\omega_1\}, \{\omega_2\} \in \mathcal{A}$ olduğu kabul edilirse, bu durumda $\{\omega_1\}$ ve $\{\omega_2\}$ içeren en küçük σ-cebiri;

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \Omega\}$$

şeklindedir. Bu kümeye ω_1 ve ω_2 çıktıları tarafından üretilen küme denir. En büyük σ-cebiri;

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_4\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_4\},$$

$$\{\omega_3, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \Omega\}$$

şeklindedir. N farklı sonuç için en küçük σ-cebirinin $\emptyset$ ve Ω olmak üzere iki elemanı vardır, ve en büyük σ-cebirinin $C_i^N = N!/(N-i)!\,i!$ olmak üzere $\sum_{i=0}^{N} C_i^N = 2^N$adet elemanı vardır.

Bu örnek için, $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = P(\{\omega_3\}) = P(\{\omega_4\}) = \frac{1}{4}$ olasılık ölçüsü tanımlansın. (d)-(f) özellikleri kullanılarak, herhangi bir olayın olasılığı hesaplanabilir. Örneğin, $\{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}$ olayının olasılığı $P(\{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}) = 1 - P(\{\omega_2\}) = \frac{3}{4}$ olur. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ üçlüsü bu örnek için olasılık uzayıdır.

Örnek 2.2. Bir paranın tura gelene kadar atılması; sonsuz sayıda sonuç

Tekrar bir para atma rasgele deneyini ele alalım. Ancak bu deneyde, parayı tura gelene kadar atalım. Bu durumda ω_1'ler $i-1$ atışta yazı ve i.tura olan sonuçlar olmak üzere $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$ dir. Örneğin B tek sayıdaki atışlardan sonra turanın gerçekleştiği olay olsun. Bu durumda, $B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \dots\}$ kümesi Ω'nın alt kümelerinin sonsuz bir birleşimidir. A, $i = 1,2, \dots$ için $\{\omega_i\} \in \mathcal{A}$'lar tarafından üretilen $A = \{\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \dots\}$ şeklinde, Ω'nın bir σ-cebiri olsun. Son olarak, $P(\{\omega_i\}) = (\frac{1}{2})^i$, A nın bir olasılık ölçüsü olarak tanımlansın. Bu durumda $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ üçlüsü bir olasılık uzayıdır. Örnek olarak tek sayıdaki atışların olasılığı $P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\{\omega_{2i-1}\} = \sum_{i=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{2i-1} = \frac{2}{3}$ dür.

Örnek 2.3. Sonuçların sürekli bir kümesi; Lebesgue ölçüsü

[0,1] aralığından rasgele bir x sayısının seçilmesi deneyini ele alalım.

$$\Omega = \{x: 0 \le x \le 1\}$$

dır. (a,b], [0,1] da bulunan bir aralık olsun. $x \in (a, b]$ olmak üzere A olayını tanımlayalım. $\mathcal{A}$ σ-cebiri (a,b] formundaki tüm aralıklar tarafından üretilen küme olsun. Böylece, (a,b] formundaki tüm aralıklar, bu aralıkların birleşimleri ve sonuçta ortaya çıkan tüm kümelerin tümleyenleri $\mathcal{A}$ σ-cebirinde bulunur. Bu $\mathcal{A}$ σ-cebiri Borel kümesinin σ-cebiri olarak adlandırılır. Şimdi A olayı üzerinde P olasılık ölçüsünü $P(A) = b - a$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $P(A)$, bir $x \in [0,1]$ elemanının A'ya ait olma olasılığıdır. Bu

olasılık ölçüsü $\mathcal{A}$ σ-cebirinde Lebesgue ölçüsü olarak adlandırılır. (b) ve (c) özellikleri sayılabilir birleşimler ve tümleyenlere olanak sağladığından A'da çok sayıda küme bulunduğunu da belirtelim. Örneğin, $(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(a, b-\frac{1}{n}\right]$ olmak üzere $(a,b) \in \mathcal{A}$'dır. De Morgan kuralından sayılabilir kesişimler ayrıca $\mathcal{A}$'dadır. Özellikle $\{\omega\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}(x-\frac{1}{n}, x]$ iken tek elemanlı $\{\omega\} = \{x\}$ $\mathcal{A}$'dadır. Aşağıdaki üç ayrı örneği inceleyelim.

$B_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty}(2^{1-2n}, 2^{2-2n})$ olmak üzere $B_1 \in \mathcal{A}$ olsun. Bu durumda $P(B_1) = \frac{2}{3}$.

$B_2 = \left\{\frac{n-1}{n}, n = 1,2,3, \dots \text{için}\right\}$ olsun. Buradan $B_2 \in \mathcal{A}$ ve $P(B_2) = 0$.

Son olarak, $B_3 = \{[0,1]$ deki rasyonel sayılar$\} \in \mathcal{A}$ ve $P(B_3) = 0$'dır.

Örnek 2.4. Gözlem sayısı; Poisson dağılımı

Poisson dağılımı kesikli bir olasılık dağılımı olup bir olayın belli bir sabit zaman birim aralığında meydana gelme sayısının olasılığını ifade eder. $[0,t]$ zaman aralığındaki bir sonucun gözlem sayıları ile ilgilenen bir deney göz önüne alalım. Herhangi bir zaman aralığında sonucun gözlem sayısının $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ olasılığına sahip olduğu ve olasılığın zamandan bağımsız olduğu kabul edilmektedir. Örneğin, uzun ömürlü bir izotopun radyoaktif bozunmasında, küçük bir Δt zaman aralığında bozulma olasılığı bu varsayımı karşılar. Veya belli bir kavşaktan belli bir Δt anında geçen otomobillerin olasılığı yine bu varsayımı karşılayabilir. Δt zaman aralığıyla karşılaştırıldığında t'nin büyük olduğu sonuçların sayısını göz önüne alalım. ω_n [0,t] aralığında n tane sonuç gerçekleştiğindeki çıktıya eşit olsun. Bu durumda $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots\}$ olduğu açıktır. $i = 0,1,2, \dots$ için $\{\omega_i\} \in \mathcal{A}$ olmak üzere $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\omega_0\}, \{\omega_1\}, \dots, \Omega\}$ olayların kümesi σ_cebiri olsun. Ω için bir olasılık ölçüsü belirlenebilir. Gösterim kolaylığı olması amacıyla, $[0,t]$ aralığında $P(\{\omega_n\}) = P_n(t)$ n tane sonucun olasılığı olsun. Yukarıdaki varsayımları kullanarak $n \geq 1$ için $P_0(0) = 1$ ve $P_n(0) = 0$ olduğu açıktır. Ek olarak, $n \geq 1$ için $1 - \lambda\Delta t$, Δt zaman aralığında sonuçsuzların olasılığı ve λt ise Δt zaman aralığında bir sonucun olasılığı olmak üzere

$$P_0(t + \Delta t) = (1 - \lambda\Delta t)P_0(t) + o(\Delta t)$$

ve

$$P_n(t+\Delta t) = (1-\lambda\Delta t)P_n(t) + \lambda\Delta t P_{n-1}(t) + o(\Delta t)$$

dir. Yukarıdaki ifade $\Delta t \to 0$ iken

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t), \qquad P_0(0) = 1$$

ve $n \geq 1$ için

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t), \qquad P_n(0) = 1$$

diferensiyel denklemine dönüşür. Bu denklemin çözülmesiyle $n = 0,1,2,\ldots$ için t zamanında n sonucunun olasılığı olarak

$$P(\{\omega_n\}) = P_n(t) = \exp(-\lambda t)\,(\lambda t)^n/n!$$

elde edilir. Olasılık ölçüsüyle $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bir olasılık uzayıdır. Olasılık ölçüsünü kontrol etmek için, $t \geq 0$ için

$$P(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\{\omega_n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\lambda t)\frac{(\lambda t)^n}{n!} = 1$$

dir. Bu rasgele deney için sonuç sayısı Poisson dağılımına sahiptir.

2.2 Rasgele Değişken, Olasılık Dağılımı

Bir X rasgele değişkeni her $\omega \in \Omega$ çıktısını $X(\omega) \in \mathbb{R}$ değerine atayan bir reel değerli fonksiyondur. Yani $X: \Omega \to \mathbb{R}$ dir.

$$F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq x\})$$

fonksiyonu X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu veya olasılık dağılımı olarak adlandırılır. X'in ölçülebilir olduğu varsayılmaktadır, özellikle, her $x \in \mathbb{R}$ için X, $A(x) = \{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$ özelliğine sahiptir. Bu teknik durum, dağılım fonksiyonunun tanımlanabilmesi için gereklidir. Dağılım fonksiyonunun

$$F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq x\}) = P(A(x))$$

ifadesinde $P\big(A(x)\big)$'yı içerdiğine ve $A(x) \in \mathcal{A}$ olmadıkça belirlenemeyeceğine dikkat edelim.

Rasgele bir değişken kesikli veya sürekli olabilir. Bir rasgele değişken

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots\} \subset \mathbb{R}$$

sayılabilir kümesinde değer alıyorsa kesikli olarak adlandırılır. Burada her $\omega \in \Omega$ için $X(\omega) \in \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ dır. X kesikli rasgele değişkeninin p olasılık kütle fonksiyonu $p(x) = P(X = x)$ ile verilen $p: \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \to [0,1]$ fonksiyonudur. Kesikli rasgele değişken için $F_X(x) = \sum_{x_i<x} p(x_i)$ dir. Rasgele değişken parçalı sürekli negatif olmayan $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p(s)ds$ gibi bir $p(x)$ fonksiyonuna sahipse sürekli rasgele değişken olarak adlandırılır. Bu durumda, $p(x)$, X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu olarak adlandırılır. Bu fonksiyon her zaman belirlenemeyebilir. Belirtelim ki,

$$P(a \le X \le b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b p(s)ds$$

dir.

Eğer X rasgele değişken ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel ölçülebilir ise bu durumda $Y = g(X)$'in de rasgele değişken olduğunun bilinmesi faydalıdır. Eğer $X(\omega) = x$ ise $Y(\omega) = g\big(X(\omega)\big) = g(x)$ dir. Ek olarak, eğer X kesikli rasgele değişkeni için olasılık kütle fonksiyonu $p(x)$ ve g^{-1} mevcutsa bu durumda

$$P\big(Y = y = g(x)\big) = P(X = x) = p(x) = p\big(g^{-1}(y)\big)$$

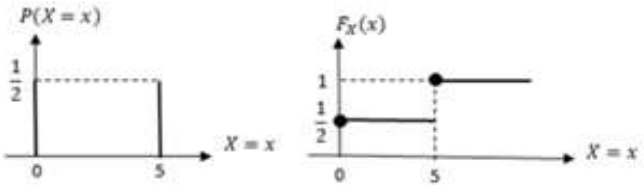
dir. Böylece $q(y) = p\big(g^{-1}(y)\big)$ de Y nin olasılık kütle fonksiyonudur. İlave olarak, Eğer X, $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ kesikli değerlerini alırsa Y de $y_i = g(x_i)$ olmak üzere $\{y_1, y_2, y_3, \dots\}$ kesikli değerlerini alır.

Aşağıda rastgele değişkenlere ilişkin örnekler ele alınmıştır. X tanımlı ve $F_X(X)$ belirli iken, rastgele değişkenin özelliklerinin çoğunu anlamak için üzerinde çalışılan olasılık uzayının açık olarak gerekli olmadığına dikkat edilmelidir.

Örnek 2.5. Parayı Bir Defa Havaya Atma

Bir parayı bir defa havaya atma rasgele deneyini ele alalım. Bu durumda $\Omega = \{Y, T\}$ dir. $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{Y\}, \{T\}, \Omega\}$ ve $P(\{Y\}) = P(\{T\}) = \frac{1}{2}$ olsun. Ω üzerinde kesikli rasgele X değişkeni $X(Y) = 0$ ve $X(T) = 5$ olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda $F_X(x)$ fonksiyonu,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/2, & 0 \le x < 5 \\ 1, & x \ge 5 \end{cases}$$



formundadır.

Örnek 2.6. Poisson Dağılımı

Δt zaman aralığındaki sonuçların olasılığı $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ olan Örnek 2.4.'deki rasgele olayı göz önüne alalım. Burada $\gamma = \lambda t$ ve $[0, t]$ aralığında gerçekleşen n tane sonucun çıktısının ω_n olduğunu anımsayalım. X Rasgele değişkeni $X(\omega_n) = n$ olarak tanımlansın. X'in kesikli rasgele değişken ve tamsayı değerli olduğunu belirtelim. Bu örnek için, olasılık kütle fonksiyonu $n = 0, 1, 2, \ldots$ için $p(n) = P(\omega_n) = \exp(-\gamma)\,\gamma^n/n!$ dir ve bunun olasılık dağılım fonksiyonu $n = 0, 1, 2, \ldots$ için

$$F_X(x) = \exp(-\gamma) \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma^k}{k!} \quad ; \quad n \le x \le n + 1$$

olur. X rasgele değişkenine λ yoğunluklu Poisson dağılımı denir.

Örnek 2.7. $[0, 1]$ de Düzgün Dağılım

Örnek 2.3'de tanımlanan A olayını yeniden ele alalım. $[0,1]$ aralığında seçilen rasgele bir x sayısı ile $A = \{x \in [0,1]: c < x \le d\}$ olmak üzere olasılık ölçüsü $P(A) = d - c$ olmak üzere $\mathcal{A}$'nın $[0,1]$'deki bütün aralıkları ve birleşimlerini içerdiğini tekrar hatırlayalım. Bu örnek için, X_1 ve X_2 rasgele değişkenini $X_1(x) = x$ ve $X_2(x) = \exp(x)$ olarak tanımlansın. X_1 ve X_2 nin sürekli rasgele değişkenler olduğu açıktır. Bu durumda,

$$p_1(s) = \begin{cases} 0, & s < 0 \\ 1, & 0 \le s \le 1 \\ 0, & s > 1 \end{cases}$$

için

$$F_{X_1}(x) = \int_{-\infty}^{x} p_1(s)ds$$

ve

$$p_2(s) = \begin{cases} 0, & s < 1 \\ 1/s, & 0 \le s \le e \\ 0, & s > e \end{cases}$$

için

$$F_{X_2}(x) = \int_{-\infty}^{x} p_2(s)ds$$

dir. Eğer $p, r \in [0,1]$ ise bu durumda $P(p \le X_1 \le r) = \int_p^r p_1(s)ds = r - p$ ve $P(e^p \le X_2 \le e^r) = \int_{e^p}^{e^r} p_2(s)ds = r - p$ olduğu görülür. Bununla beraber, eğer $y, z \in [1, e]$ ise bu durumda $P(y \le X_2 \le z) = \ln z - \ln y$ elde edilir. Bu örnek için, X_1 'in $[0,1]$ üzerinde düzgün dağılıma sahip olduğu söylenebilir, çünkü $X_1(x)$ 'in $[0,1]$ 'in herhangi bir alt aralığının içinde yer alması, alt aralığın genişliği ile orantılıdır. Bu durum $X_1 \sim U[0,1]$ olarak gösterilir.

Örnek 2.8. [u, v]'de Düzgün Dağılım

Örnek 2.7 deki rasgele olay herhangi bir $[u, v]$ aralığına genişletilebilecek biçimde tanımlanabilir. Özel olarak, sayılar $[0, 1]$ aralığı yerine $[u, v]$ aralığından rasgele seçilir. Önceki örnekte olduğu gibi, rasgele değişken $X(x) = x$ olarak tanımlansın. Bu durumda,

$$p(s) = \begin{cases} 0, & s < u \text{ veya } s > v \\ \dfrac{1}{v-u}, & u \le s \le v \end{cases}$$

için

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p(s)ds$$

dir. Eğer $a, b \in [u, v]$ ise

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b p(s)ds = (b-a)/(v-u)$$

olduğu anlaşılır. Bu örnekte, X'in $[u, v]$ üzerinde düzgün dağılıma sahip olduğu söylenebilir ve $X_1 \sim U[u, v]$ olarak gösterilir.

Örnek 2.9. $(-\infty, \infty)$ üzerinde Normal Dağılım

$\Omega = \{x: -\infty < x < \infty\}$ olay kümesini ele alalım. $\mathcal{A}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $(a, b]$ aralıklarının ürettiği ve yine bu aralıkların sayılabilir birleşimlerini ve tümleyenlerini içeren bir σ_cebir olsun. $\mathcal{A}$, Örnek 2.3'te tanımlanan σ_cebir ile benzerdir fakat burada $[0, 1]$ aralığı yerine $(-\infty, \infty)$ alınmıştır. X rasgele değişkeni $X(x) = x$ olarak tanımlansın. $A \subset \mathcal{A}$, $\mu \in \mathbb{R}$ ve $\sigma > 0$ sabitler olsun.

$$p(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-(s-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

için

$$P(A) = \int_A p(s)ds$$

dir. Buradan

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-(s-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) ds$$

olur. Bu örnek için, μ ortalama ve σ^2 varyansı için X normal dağılıma sahiptir ve $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ile gösterilir. Örneğin

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-(s-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) ds$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-s^2}{2}\right) ds$$

$$= 0{,}6826$$

elde edilir. Eğer $\mu = 0$ ve $\sigma^2 = 1$ ise bu durumda X standart normal dağılıma sahiptir ve $X \sim N(0,1)$ ile gösterilir.

2.3 Beklenen Değer

$\omega \in \Omega$ için $X(\omega) \in \{x_1, x_2, \dots\}$ olmak üzere X'in kesikli bir rasgele değişken olduğu kabul edelim. $p(x)$, X'in olasılık kütle fonksiyonu olsun, burada $p(x) = P(X = x)$ dir. X'in beklenen değeri, toplam yakınsak olduğunda;

$$\mu = E(X) = \sum_i x_i p(x_i) = \sum_i X(\omega_i) P(\{\omega_i\})$$

olarak tanımlanır. $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $Y = g(X)$ bir rasgele değişken olmak üzere, $g(X)$ in beklenen değeri

$$E\big(g(X)\big) = \sum_i g(x_i) p(x_i)$$

dir.

2.4 Moment

Bir dağılımın momentleri rasgele değişkeninin kuvvetlerinin beklenen değeridir. Özel olarak X'in orjine göre k-ıncı momenti

$$E(X^k) = \sum_i x_i^k p(x_i)$$

ve k-ıncı merkez momenti

$$E((X - \mu)^k) = \sum_i (x_i - \mu)^k p(x_i), \quad k = 1,2, \dots için$$

olarak tanımlanır. X'in varyansı ikinci merkez moment olarak tanımlanır:

$$Var(X) = E((X - \mu)^2).$$

a ve b sabitleri için,

$$E\big(ag(X) + bh(X)\big) = aE\big(g(X)\big) + bE\big(h(X)\big)$$

kullanışlı bir özelliktir. Örneğin,

$$Var(X) = E((X - \mu)^2) = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2$$
$$= E(X^2) - 2\mu\mu + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$$

dir.

Sürekli rasgele değişkenin fonksiyonlarının beklenen değerlerini vermeden önce aşağıdaki örneği inceleyelim;

Örnek 2.10. Poisson dağılımlı değişken için ortalama ve varyans

$\gamma = \lambda t$ olmak üzere Örnek 2.6 daki Poisson dağılımlı değişken için ortalama ve varyansı inceleyelim. Açık olarak,

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kp(k) = \sum_{k=0}^{\infty} ke^{-\gamma}\frac{\gamma^k}{k!} = e^{-\gamma}\gamma\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma^{k-1}}{(k-1)!} = \gamma$$

ve

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p(k) = e^{-\gamma}\gamma^2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(k-1)\gamma^{k-2}}{(k-1)!} + \frac{\gamma^{k-2}}{(k-1)!}\right) = \gamma^2 + \gamma$$

dir. Böylece $E(X) = \gamma$ ve $Var(X) = \gamma$ dır.

Beklenen değer sürekli rasgele değişkende tanımlandığına benzer biçimde kesikli rasgele değişken için de tanımlanır. $X(x) = x$ olmak üzere X sürekli rasgele değişkenini ve $p(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunu ele alalım. X 'in $\left(x - \frac{\Delta x}{2}, x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ aralığında bir değer aldığı yaklaşık olasılığının $p(x)\Delta x$ olduğuna dikkat edelim. Buradan X'in beklenen değeri için $E(X) \approx \sum xp(x)\Delta x$ olup $\Delta x \to 0$ iken,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

elde edilir. X'in bir g fonksiyonunun beklenen değeri ise

$$E\big(g(X)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p(x)dx$$

dir. X in k-ıncı moment için beklenen değeri;

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x)dx$$

Olup, $\mu = E(X)$ olduğunda X in varyansı ikinci merkez moment olarak tanımlanır ve yine

$$Var(X) = E((X-\mu)^2) = E(X^2) - \mu^2$$

dir.

Örnek 2.11. Düzgün Dağılımlı Rasgele Değişkenin Ortalaması ve Varyansı

$X \sim U[a,b]$ olsun. Bu durumda $a \le c \le d \le b$ olarak alınırsa $P(c \le X \le d) = \int_c^d p(x)\,dx = \int_c^d \frac{dx}{b-a} = \frac{d-c}{b-a}$ olur. Bu durumda

$$E(X) = \int_a^b x \frac{dx}{b-a} = \frac{b+a}{2}$$

ve

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{dx}{b-a} = \frac{1}{3}(b^2 + ab + a^2)$$

olduğu görülür. Buradan, $Var(X) = \frac{1}{12}(b-a)^2$ dir. Ayrıca, örnek olarak $E(e^x) = \int_a^b e^x \frac{dx}{b-a} = \frac{e^b - e^a}{b-a}$ olur. Daha genel olarak, $E\big(f(X)\big) = \int_a^b f(x)\frac{dx}{b-a}$ dır.

Örnek 2.12. Normal dağılımlı değişkenin merkezi momenti

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ olsun. Bu durumda, herhangi bir k pozitif tamsayısı için

$$E((X-\mu)^{2k+1}) = 0 \text{ ve } E((X-\mu)^{2k}) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)\sigma^{2k}$$

olur.

2.5 Rasgele Değişkenlerin Hilbert Uzayı

Bu bölümde Hilbert uzaylarının bazı özellikleri ele alınmıştır. Rasgele değişkenlerin Hilbert uzayları ve stokastik süreçler, stokastik integrasyon ve stokastik diferensiyel denklemlerin gelişimini basitleştirir ve birleştirir. Üzerinde tanımlanmış bir metrik veya norm tanımlı bir vektör uzayına bir metrik uzay veya normlu bir lineer uzay denir. Eğer bir metrik uzay tamsa, başka bir ifadeyle uzaydaki bütün Cauchy dizileri yakınsaksa, metrik uzay Banach uzayı olarak adlandırılır. Tam bir iç çarpım uzayı, özel bir Banach uzayı türüdür. Tam bir iç çarpım uzayında, $||.||$ metriği $(.,.)$ iç çarpımı ile tanımlanır,

özel olarak herhangi bir f fonksiyonu için $||f|| = (f,f)^{\frac{1}{2}}$ dir. Tam iç çarpım uzayları çok kullanışlıdır ve Hilbert uzayı olarak adlandırılır.

H $f,g \in H$ için $(f,g) \in \mathbb{R}$ iç çarpımlı ve $\|f\| = (f,f)^{\frac{1}{2}}$ normlu bir Hilbert uzayı olsun. Hilbert uzayları için iki önemli eşitsizlik, üçgen eşitsizliği ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğidir:

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

$$|(f,g)| \leq \|f\|\|g\|$$

S'nin bir iç çarpım uzayı olduğunu ancak tam olmadığını kabul edelim. S'ye eleman ekleyerek tam bir H Hilbert uzayı oluşturmak mümkündür. Ayrıca, bu durum $S \subset H$ nin H'de yoğun olmasını sağlar. Böylelikle eğer, S, H Hilbert uzayına tamlaştırılırsa bu durumda, herhangi bir $f \in H$ ve verilen her $\epsilon > 0$ için $\|f-g\| < \epsilon$ olacak biçimde bir $g \in S$ vardır.

Şimdi $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bir olasılık uzayı olsun. $A \in \mathcal{A}$ ve I_A, A'nın gösterge fonksiyonu olsun. Bu durumda I_A fonksiyonu,

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & diğer \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan rasgele değişkendir. Örneğin, $E(I_A) = P(A)$ dır. Gösterge fonksiyonlarının sonlu lineer kombinasyonları basit rasgele değişkenler olarak adlandırılır. Eğer X basit rasgele değişken ise bu durumda

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} c_i I_{A_i}(\omega) \quad ve \quad E(X) = \sum_{i=1}^{n} c_i P(A_i)$$

dir.

Şimdi S_{RD} olasılık uzayın üzerinde tanımlı basit rasgele değişkenlerin kümesi olsun. Özel olarak, $S_{RD} = \{ X : X, (\Omega, \mathcal{A}, P)$ olasılık uzayında tanımlı basit rasgele değişken $\}$ olsun. S_{RD} kümesi rasgele değişkenlerin vektör uzayıdır. $X, Y \in S_{RD}$ olsun. (X,Y) iç çarpımı S_{RD} üzerinde,

$$X, Y \in S_{RD} \quad \text{için} \quad (X,Y) = E(XY)$$

olarak tanımlanır. $X, Y \in S_{RD}$ olduğunda

$$(X,Y) = E(XY) = E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i I_{A_i} d_j I_{B_j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i d_j P(A_i \cap B_j)$$

olduğuna dikkat edilmelidir ve norm

$$\|X\|_{RD} = (X,X)^{\frac{1}{2}} = (E|X|^2)^{\frac{1}{2}}$$

biçimindedir. Genel olarak, basit rasgele değişkenlerin bu iç çarpım uzayı tam değildir. Bununla beraber, S_{RD}'nin H_{RD}'de yoğun olduğu bir H_{RD} Hilbert uzayı oluşturmak için S_{RD} tamlaştırılabilir. S_{RD}'yi tamlaştırmak amacıyla, H_{RD}'yi oluşturmak için S_{RD} 'ye birçok rasgele değişken eklenebilir. Bu nedenle, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin H_{RD}'de bulunan rasgele değişkenlerin bir dizisi olduğunu kabul edersek $\epsilon > 0$ olmak üzere öyle bir N tam sayısı vardır ki $m, n > N$ olduğunda $\|X_n - X_m\|_{RD} < \epsilon$ dur. Bu durumda H_{RD} tam olduğundan $n \to \infty$ iken $\|X_n - X\|_{RD} \to 0$ olacak biçimde $X \in H_{RD}$ vardır. Bununla birlikte, $S_{RD} \subset H_{RD}$ yoğun olduğundan, verilen $\epsilon > 0$ için $\|X - Y\| < \epsilon$ olacak biçimde basit $Y \in S_{RD}$ rasgele değişkeni vardır.

Yeni inşa edilen H_{RD} Hilbert uzayı, önümüzdeki üç bölümde sıklıkla kullanılmaktadır. Özellikle, bu uzayda iç çarpım $(X,Y) = E(XY)$ biçimindedir, bu Hilbert uzayı için ise norm $\|X\|_{RD} = (E(|X|^2)^{\frac{1}{2}}$ dir, S_{RD} basit fonksiyonların kümesi H_{RD} de yoğundur, ve H_{RD}, E beklenen değerindeki olasılık dağılımına bağlıdır. Bu Hilbert uzayının kullanışlılığını göstermek için bazı örnekler aşağıda verilmiştir. İlk olarak vurgulamak amacıyla;

H_{RD}, $\|X\|_{RD} = (E(|X|^2)^{\frac{1}{2}}$ normu ile Rasgele Değişkenlerin Hilbert uzayıdır.

Örnek 2.13 Hilbert uzayı $L_2[0,1]$

Örnek 2.3 deki $[0,1]$ aralığındaki noktaların kümesinden oluşan $\Omega = \{x: 0 \le x \le 1\}$ örnek uzayını yeniden ele alalım. Bu örnek için $\mathcal{A}$ olay uzayı $(a,b] \subset [0,1]$ biçimindeki aralıkların tamamı tarafından üretilen kümelerin σ_cebiridir. P olasılık ölçüsü, eğer $A = (a,b] \in \mathcal{A}$ ise $P(A) = b - a$ biçimindeki Lebesgue ölçüsüdür. S_{RD}, $\mathcal{A}$ daki basit rasgele değişkenlerin tamamı olsun. Eğer $X \in S_{RD}$ ise X rasgele değişkeni her bir i için $A_i \in \mathcal{A}$ olmak üzere,

$$X(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i I_{A_i}(x).$$

biçimindedir ve burada

$$I_{A_i}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_i \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

dir. H_{RD}, S_{RD} nin tamlanmışı olsun. H_{RD} Hilbert uzayı [0,1] aralığındaki sürekli olan rasgele değişkenlerin tamamını içerir. Bu sürekli rasgele değişkenlerin H_{RD} de yer aldığını göstermek için, $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $i = 1,2, \dots, n$ için $x_i = (i-1)/n$ olsun ve

$$I_{n,i}(x) = \begin{cases} 1, & \dfrac{i-1}{n} \le x < i/n \\ 0, & diğer \end{cases}$$

için

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) I_{n,i}(x)$$

olarak tanımlansın. Daha sonra $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ basit rasgele değişkenler dizisinin H_{RD}'de Cauchy dizisi olduğu gösterilebilir. İlave olarak, $n \to \infty$ iken $\|f_n - f\|_{RD} \to 0$ ise bu durumda H_{RD} de $f_n \to f$ dir. Buradan f fonksiyonu H_{RD} de basit rasgele değişkenler dizisinin limitidir ve $f \in H_{RD}$ dir. $X(x) = x$ ise, bu durumda X'in $[0,1]$ de düzgün dağılıma sahip olduğu görülebilir, diğer bir deyişle $X \sim U[0,1]$ dir.

Bu örnek için en çok bilinen H_{RD} Hilbert uzayı $L_2[0,1]$ uzayıdır. Başka bir ifadeyle,

$$H_{RD} = L_2[0,1] = \{ [0,1] \text{ deki Lebesgue ölçülebilir } f \text{ fonksiyonları} \mid \int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty \}$$

Özellikle H_{RD} nin tam olması için ihtiyaç duyulan fonksiyonlar çoğunlukla süreksiz olabilir. Bu nedenle, Riemann anlamında integrasyon bu fonksiyonların çoğu için mümkün değildir ve integrasyon Lebesgue anlamında tanımlanır. Bununla birlikte, eğer Riemann integrali varsa, o zaman Lebesgue integrali mevcuttur ve iki integral eşittir. Ayrıca $L_2[0,1]$ deki kare integrallenebilen parçalı sürekli fonksiyonlar yoğundur ve bu

Hilbert uzayı kabaca [0,1] de kare integrallenebilen parçalı sürekli fonksiyonlar kümesi olarak kabul edilebilir. $X, Y \in H_{RD}$ için

$$(X,Y) = \int_0^1 X(x)Y(x)dx \quad ve \quad \|X\|_{RD}^2 = \int_0^1 |X(x)|^2 dx$$

olduğu görülür.

Örnek 2.14 $H_{RD} = L_2[0,1]$ Hilbert uzayında Yakınsama örneği

H_{RD} önceki örnekte olduğu gibi tanımlansın. $Y \sim U[0,1]$ ve rasgele değişkenlerin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi

$$X_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}Y(x), & \frac{1}{n} \le Y(x) \le 1 \\ 0 & diğer \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Daha sonra, $m, n \to \infty$ iken $\|X_n - X_m\|_{RD} \to 0$ olduğu aşikardır. Buradan, $\{X_n\} \subset H_{RD}$, H_{RD} de Cauchy dizisidir. Gerçekten, X_n , $n \to \infty$ iken H_{RD} de $X = \frac{1}{2}Y$ ye yakınsaktır.

Örnek 2.15 Yakınsak olmayan bir örnek

H_{RD} Örnek 2.14. deki gibi tanımlansın. $n = 1,2,...$ için $Y_n \sim U[0,1]$ bağımsız düzgün dağılımlı rasgele değişkenler olsun. Bu durumda her n için,

$$\|Y_n\|_{RD} = \left(\int_0^1 x^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$X = 1$ ve $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ rasgele değişkenlerinin dizisi

$$X_n(x) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{\sqrt{n}} \le Y_n(x) \le 1 \\ 1 + nY_n(x), & diğer \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Buradan

$$\|X_n - X\|_{RD} = \left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} n^2 x^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \to \infty, \qquad n \to \infty \; iken$$

Sonuç olarak $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi H_{RD} Hilbert uzayında Cauchy dizisi değildir.

Örnek 2.16 Bir ağırlıklı normlu Hilbert Uzayı

Örnek 2.9 da tanımlanan olasılık uzayını ele alalım. Örnek uzay $\Omega = \{x: -\infty < x < \infty\}$ ve sonuç (olay) uzayı $\mathcal{A}$, $(a, b] \in \mathbb{R}$ biçimindeki aralıklar tarafından oluşturulan σ_cebiridir. $\mu \in \mathbb{R}$ ve $\sigma > 0$ sabitleri verilsin.

$$p(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(\frac{-(s-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

iken

$$P(A) = \int_A p(s)ds$$

dir.

X rasgele değişkeni $X(x) = x$ biçiminde tanımlandığında ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan X'e normal dağılımlı denir, diğer bir deyişle $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dir. S_{RD} uzayı

$$(f, g) = E(fg) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(s)p(s)ds, \qquad f, g \in S_{RD}$$

iç çarpımı ile tanımlanan bu olasılık uzayındaki basit fonksiyonların iç çarpım uzayı olsun ve Örnek 2.13 de olduğu gibi, yukarıdaki integral bir Lebesgue integralidir. H_{RD} uzayı S_{RD} nin tamlanmışı olsun. Bu durumda H_{RD} uzayı normu $\mathbb{R}$ de

$$\|f\|_{RD}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(s)|^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(\frac{-(s-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) ds, \qquad f \in H_{RD} \text{ için}$$

biçiminde tanımlanan rasgele değişkenlerin Hilbert uzayıdır.

Ek olarak, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(s)|^2 p(s)ds < \infty$ biçiminde olan f parçalı sürekli rasgele değişkenlerinin kümesi H_{RD} de yoğundur.

2.6 Rasgele Değişkenler Dizisinin Yakınsaklığı

Rasgele değişkenlerin dizilerinin yakınsaklığı, stokastik diferensiyel denklemler konusu için önemlidir. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ olasılık uzayında tanımlanan rasgele değişkenlerin bir $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi ele alınsın. Burada ilgilenilen, $n \to \infty$ iken dizinin yakınsadığı bir X rasgele

değişkeninin var olmasıdır. $n \to \infty$ iken X_n'in X'e yakınsaklık durumunu doğru bir şekilde karakterize etmek önemlidir.

Rasgele değişkenleri anlamak için yararlı olabilecek birkaç farklı yakınsama kriteri türü vardır. Önemli bir yakınsama türü, ortalama kare yakınsamadır. Ortalama kare yakınsaklıkta gösterilmek istenen, $\lim_{n\to\infty} E(X_n - X)^2 = 0$ dır.. Bununla beraber, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H_{RD}$ olmak üzere bu yakınsaklık $n \to \infty$ için $\|X_n - X\|_{RD}$'ye denktir. Dahası H_{RD}Hilbert uzayında $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi bir Cauchy dizisi ise başka bir deyişle, $\epsilon > 0$ olmak üzere her $m, n > N$ için $\|X_n - X_m\|_{RD} < \epsilon$ olacak biçimde N pozitif tamsayısı varsa bu $X \in H_{RD}$ rasgele değişkenin varlığını garanti eder.. Yakınsaklık kriterinin farklı bir türü bu bölümde ayrıca değerlendirilecektir.

İlk olarak güçlü yakınsaklığı ele alalım. Eğer $\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|) = 0$ ise $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ rasgele değişkenler dizisi X'e kuvvetli yakınsaktır denir. Bu sonuç $X \in H_{RD}$ için Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden veya Lyapunov eşitsizliğinden gelmektedir.

Lyapunov Eşitsizliği: $0 < p < r$ için $(E(|X|^p))^{1/p} \leq (E(|X|^r))^{1/2}$ dir.

Özellikle, $p = 1$ ve $r = 2$ için, Lyapunov eşitsizliği $E(|X|) \leq (E(|X|^2))^{1/r}$ halini alır.

Üçüncü bir yakınsaklık türü olasılıkta yakınsaklıktır. Eğer verilen herhangi bir $\epsilon > 0$ için $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$ ise $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ rasgele değişkenler dizisi olasılık olarak X'e yakınsaktır denir. Ortalama kare yakınsama, olasılıkta yakınsama anlamına da gelir. Bu sonuç aşağıda belirtilen Chebyshev-Markov eşitsizliğinden kaynaklanmaktadır.

Chebyshev-Markov Eşitsizliği: $p, \epsilon > 0$ için $P(\{\omega: |X(\omega)| \geq \epsilon\}) \leq \frac{1}{\epsilon^p} E(|X|^p)$ dir.

Chebyshev-Markov eşitsizliği, $p = 2$ için, $P(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2} E(|X|^2)$ halini alır. Ortalama kare yakınsama olasılıkta yakınsamada olduğu kadar kuvvetli yakınsaklık anlamına gelse de, olasılıkta yakınsaklık veya kuvvetli yakınsama daima ortalama kare yakınsama anlamına gelmez.

Başka bir yakınsama türü, bir olasılıkla yakınsak (w.p.1) veya neredeyse kesin yakınsak olan yakınsamadır. Eğer $P\left(\left\{\omega \in \Omega: \lim_{n\to\infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| = 0\right\}\right) = 1$ ise $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$

rasgele değişkenler dizisi w.p.1 yakınsaktır denir. Aşağıdaki sonuç, neredeyse kesin yakınsamaların belirlenmesinde yararlı olabilir.

Neredeyse Kesin Yakınsaklık Üzerine Lemma: Eğer her $\epsilon > 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) < \infty$ ise bu durumda X_n, X'e neredeyse kesin yakınsaktır denir.

Olasılıkta neredeyse kesin yakınsaklık, yakınsaklık haline dönüşür. Bununla birlikte, ortalama kare yakınsama, neredeyse kesin yakınsama anlamına gelmez ve neredeyse kesin yakınsama, kare yakınsama anlamına gelmez.

İşimize yarayabilecek iki zayıf yakınsama formu daha vardır. Bu yakınsama biçimlerinden herhangi biri, neredeyse kesin yakınsama veya ortalama kare yakınsama anlamına gelir. Birincisi dağılımdaki yakınsamadır. Eğer F_X dağılım fonksiyonunun bütün süreklilik noktalarında

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

ise $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ rasgele değişkenler dizisi X dağılıma göre yakınsaktır denir. Yakınsaklığın ikinci formu, zayıf yakınsaklık olarak bilinir, eğer bütün düzgün f fonksiyonları için

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dF_{X_n}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dF_X(y)$$

ise $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ rasgele değişkenler dizisi X'e zayıf yakınsaktır denir. Bir dizi, ancak ve ancak dağılıma göre yakınsaksa zayıf yakınsaktır.

Bu yakınsama biçimlerini göstermek için birkaç örnek verilmiştir.

Örnek 2.17 Neredeyse Kesin ve Ortalama Kare Yakınsaklığı

X rasgele değişkeni $[0,1]$ aralığında düzgün dağılıma sahip olsun, diğer bir deyişle, $X \sim U[0,1]$, ve $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ rasgele değişkenler dizisi $n = 1, 2, \ldots$ için

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 \leq X(\omega) \leq 1/n^2 \\ X(\omega), & 1/n^2 < X(\omega) \leq 1 \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Buradan her $\epsilon > 0$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

dir. Bu nedenle, $X_n \to X$ neredeyse kesin (daima) yakınsaktır. Ayrıca

$$E(|X_n - X|^2) = \int_0^{1/n^2} x^2 dx = \frac{1}{3n^6} \to 0 \qquad n \to \infty \; için$$

Dolayısıyla, X_n aynı zamanda ortalama kare anlamında X 'e yakınsaktır.

Örnek 2.18 Zayıf Fakat Ortalama Kare Yakınsak Değil

Örnek 2.13 alınarak [0,1] aralığında $(a, b]$ biçimindeki aralıklar tarafından üretilen Borel kümelerinin σ_cebir olay uzayı $\mathcal{A}$ ile örnek uzay $\Omega = \{x: 0 \leq x \leq 1\}$ olsun.

$$p_n(s) = \begin{cases} \frac{n}{n-2}, & s \in [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] \\ 0, & diğer \end{cases} \qquad n \geq 3 \; için$$

olmak üzere

$$F_{X_n}(s) = \int_0^x p_n(s) ds$$

olsun ve

$$p(s) = f(x) = \begin{cases} 1, & s \in [0,1] \\ 0, & diğer \end{cases}$$

olmak üzere

$$F_X(x) = \int_0^x p(s) ds$$

olsun. Yani, X ve X_n bağımsız iken $X \sim U[0,1]$ ve $X_n \sim U[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$ dır. Daha sonra her $f \in C[0,1]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^{1-1/n} f(x) p_n(x) dx = \int_0^1 f(x) p(x) dx$$

dir, böylece X_n, X 'e zayıf yakınsaktır. Her n için X_n ve X bağımsız olduğundan

$$E(|X - X_n|^2) = E(X^2 - 2XX_n + X_n^2) \to 1/6 \qquad n \to \infty \; iken$$

olduğundan X_n, X 'e ortalama kare yakınsak değildir.

Rasgele değişkenlerin dizilerini içeren iki önemli sonuç Büyük Sayılar Yasası ve Merkezi Limit Teoremi'dir:

Büyük (Güçlü) Sayılar Yasası: $X_1, X_2, \ldots$ bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler olsun. $\mu = E(X_n)$ ve $\sigma^2 = Var(X_n)$ olsun. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ olarak tanımlansın. Bu durumda $S_n/n \to \mu$ neredeyse kesin ve ortalama kare anlamında yakınsaktır. Bu da

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right|^2\right) = 0 \quad ve \quad \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu \qquad w.p.1$$

dir.

Merkezi Limit Teoremi: S_n yukarıdaki gibi tanımlansın ve $Z_n = (S_n - n\mu)/(\sigma\sqrt{n})$ olsun. Diğer yandan Z_n, $Z \sim N(0,1)$'ye yakınsaktır. Buradan, F_{Z_n}, Z_n'in dağılım fonksiyonu ve F_z standart normal dağılım fonksiyonu olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(x) = F_z(x)$$

dir.

Merkezi limit teoremi, çok genel koşullar altında, çok sayıda rassal değişkenin toplamının normal dağılmış olduğunu ifade eder. Normal dağılımın bu denli önemli olmasının nedeni de budur (Önalan, 2010)

Örnek 2.19 Poisson Dağılımlı Değişkenlerin Toplamı

$i = 1,2, \ldots$ için X_i ler γ parametresiyle verilen Poisson dağılımlı değişkenler olsun. Burada, $E(X_i) = Var(X_i) = \gamma$ veya $\mu = \sigma^2 = \gamma$ dır. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ olsun. Daha sonra gibi S_n, $n\gamma$ ortalaması ve $n\gamma$ varyansı ile Poisson dağılımına sahiptir (gösterilmedi). Bununla beraber, Merkezi Limit Teoreminden, 0 ortalama ve 1 varyansı ile $\frac{S_n - n\gamma}{\sqrt{n\gamma}}$ dağılımsal olarak normal dağılımlı bir rasgele değişkene yakınsaktır. Şimdi $\lambda = n\gamma$ ve $R_\lambda = S_n$ olsun. Daha sonra R_λ, λ parametresiyle Poisson dağılımına sahiptir. Yukarıda verilenlere göre λ arttıkça dağılımsal olarak 0 ortalaması ve 1 varyansı ile normal dağılımlı rasgele

bir değişkene yakınsaktır. Bu, λ parametresiyle Poisson dağılımına sahip bir değişkeninin, dağılımda λ değeri arttıkça ortalama λ ve varyans λ olan normal dağılıma sahip bir değişkene yakınsadığı anlamına gelir.

2.7 Monte Carlo

Monte Carlo yöntemleri sayısal deneyler yapmak için rasgele sayıların kullanıldığı sayısal yöntemlerdir. Stokastik diferensiyel denklemlerin sayısal çözümü, bir Monte Carlo hesaplaması türü olarak görülebilir.

Örnek 2.20. Bir İntegrale Monte Carlo Yaklaşımı

Bir integralin değerini tahmin etme konusundaki klasik Monte Carlo problemini göz önüne alalım. Tek boyutlu bir problem bu örnekte açıklanmıştır, ancak yöntem kolayca çoklu integrallere genelleştirilebilir.

$f \in C[0,1]$ olmak üzere

$$I(f) = \int_0^1 f(x)dx$$

integralinin hesaplanmasını ele alalım.

$$p(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & diğer \end{cases}$$

olmak üzere

$$I(f) = E(f) = \int_0^1 f(x)p(x)dx$$

olduğuna dikkat edilmelidir. Bu nedenle, x, $[0,1]$ de normal dağılıma sahip olmak üzere $I(f)$, Örnek 2.13 de ele alınan Hilbert uzayındaki f rasgele değişkeninin beklenen değeridir. x_i ler $[0,1]$ de normal dağılıma sahip olmak üzere

$$I_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

dir. Buradan $n \to \infty$ olmak üzere $I_n(f) \to I(f)$ elde edilir. Hata Merkezi limit teoremi kullanılarak hesaplanmaktadır. İlk olarak,

$$E(f) = \int_0^1 f(x)dx \qquad \text{ve} \qquad E(f^2) = \int_0^1 |f(x)|^2 dx.$$

Buradan,

$$\mu = E(f) \qquad \text{ve} \qquad \sigma^2 = E(f^2) - \big(E(f)\big)^2.$$

Merkezi Limit Teoremi, örneklem ortalama $I_n(f)$ yaklaşık olarak $I(f)$ ortalaması ve σ^2/n varyansı ile normal dağılımlıdır. Bu da

$$P\left(I_n(f) - \frac{\lambda\sigma}{\sqrt{n}} \le I(f) \le I_n(f) + \frac{\lambda\sigma}{\sqrt{n}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

biçimine dönüşür. Buradan, örneğin, $|I(f) - I_n(f)| \le \frac{1{,}96\sigma}{\sqrt{n}}$ olasılığı 0,95 e eşit çıkar. Bu örnek Monte Carlo Metodunun önemli bir özelliğini gözler önüne sermektedir. Yani, bir Monte Carlo hesaplamasındaki hata istatistikseldir ve hata $1/\sqrt{n}$ ile orantılıdır. Burada n, örneklem büyüklüğüdür. Bu özellik aynı zamanda stokastik diferensiyel denklemlerin sayısal çözümü için de geçerlidir.

Örnek 2.21 Monte Carlo Yaklaşımı ile İki Nokta Arasındaki Ortalama Mesafe

[0, 1] aralığında rastgele seçilen iki nokta arasındaki ortalama mesafe tam olarak $1/3$ tür. Bu örnekte, [0, 1] aralığındaki iki rastgele nokta arasındaki ortalama mesafenin yanısıra [0, 1] × [0, 1] kartezyen bölgesinde iki nokta arasındaki ortalama mesafe hesaplanacaktır. Bu sorunların her biri bir integral biçiminde ortaya çıkabilir. İlk durumda, [0,1] aralığındaki rasgele seçilen iki nokta arasındaki ortalama mesafe

$$I = \int_0^1 \int_0^1 |x_1 - x_2| dx_1 dx_2$$

dir, halbuki diğer durumda [0,1]x[0,1] deki rasgele alınan iki nokta arasındaki uzaklık

$$J = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2} dx_1 dx_2 dy_1 dy_2$$

dir. Bu değerlerin Monte Carlo tahminleri toplamlar kullanılarak hesaplanır: $x_{1,i}, x_{2,i}$ [0,1] de düzgün dağılımlı olmak üzere

$$I_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_{1,i} - x_{2,i}\right|$$

olur ve $x_{1,i}, x_{2,i}, y_{1,i}, y_{2,i}$ [0,1] de düzgün dağılımlı olmak üzere

$$J_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_{1,i} - x_{2,i})^2 + (y_{1,i} - y_{2,i})^2}$$

olur. Monte Carlo hesaplamaları için katlı integrallerin kurulmasının, tek katlı integraller kadar kolay olduğu görülebilir. Katlı bir integral hala sadece tek bir toplamı içerir. Ek olarak, aynı hata tahminlerinin önceki örnekte belirtildiği şekilde geçerli olduğunu göstermek kolaydır. Özellikle, istatistiksel hata her iki durumda da $1/\sqrt{n}$ ile orantılıdır. Bu örnek için bir Fortran programı yardımıyla (Allen 2007), önceki bölümde açıklanan doğrusal uyumlu rasgele sayı üretecisi ile bir milyon örnek kullanılarak, yani $n = 10^6$ için, $I_n = 0.33335$ ve $J_n = 0.52163$ olarak hesaplanır. Karşılaştıracak olursak, *I* ve *J* nin virgülden sonraki 5 haneye kadar tam değeri sırasıyla $I = 0.33333$ ve $J = 0.52141$ dir.

3. STOKASTİK SÜREÇLER

Bu bölümde stokastik diferensiyel denklemleri tanımlamada ve bunları modellemede ihtiyaç duyulan stokastik süreçlere temel bir giriş yapılmıştır. Bir stokastik süreç, bir $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ olasılık uzayında tanımlanan ve bir τ kümesi üzerinde değişen bir t parametresi ile indekslenen $\{x(t), t \in \tau\}$ rasgele değişkenlerin bir ailesidir. τ kümesi ayrık ise, stokastik süreç ayrık olarak adlandırılır. Ele alınan τ sürekli ise, stokastik sürece sürekli denir. t parametresi genellikle zamanın rolünü oynar ve rastgele değişkenler t'nin her bir değerinde kesikli değerli veya sürekli değerli olabilir. Örneğin, sürekli bir stokastik süreç ayrık değerli olabilir. Modelleme amacıyla, sürekli ve kesikli stokastik süreçleri ve bunların nasıl ilişkili olduklarını anlamak önemlidir.

Stokastik süreçler, stokastik diferensiyel denklemlerde önemi bir yere sahiptir. Stokastik diferensiyel denklemlerin çözümleri stokastik süreçlerdir. Rastgele değişkenler ve stokastik süreçler için bir Hilbert uzay özelliği, stokastik integrasyon ve stokastik diferensiyel denklemlerin temsilini birleştirir ve basitleştirir.

Bu bölümde, ayrık ve sürekli stokastik modeller anlatılmaktadır. Daha sonra, stokastik süreçlerin bir Hilbert uzayı tanımlanacaktır. Wiener sürecinin önemine değinilerek stokastik süreçlerin bilgisayarla üretilmesi ele alınacak ve son olarak, iyi bilinen birkaç stokastik süreç verilecektir. Stokastik süreçlerin kapsamlı açıklamaları literatürde mevcuttur (Bailey 1964, Chung 1979, Önalan 2010)

3.1 Ayrık (Kesikli) Stokastik Süreçler

Bu bölümde, ayrık stokastik süreçler ele alınmaktadır. Bu süreç için, kesik zamanlı $\tau = \{t_0, t_1, t_2, \dots\}$ kümesini ele alalım. $X(t_0), X(t_1), X(t_2), \dots$ rasgele değişkenler dizisinin her biri Ω örnek uzayında tanımlansın. Bu dizi örnek olarak, $t_0, t_1, t_2, \dots$ kesik zaman aralıklarında fiziksel, biyolojik veya finansal sistem gelişimi olabilir. X_{n+1}'in gelecekteki değerini belirlemek için sadece $X(t_n) = X_n$ rasgele değişkeninin mevcut değerine ihtiyaç duyulursa, $\{X_n\}$ dizisinin bir Markov işlemi olduğu söylenir. Bu bölüm boyunca anlatılan ayrık stokastik süreçler Markov süreçleridir. Ayrık değerli bir Markov sürecine Markov zinciri adı verilir. $P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)$ Markov zinciri için tek adımlı geçiş olasılıklarını tanımlasın. Bu da,

$$P(X_{n+1} = x_{n+1}\, ve\, X_n = x_n\} = P(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n)P(X_n = x_n)$$

dir. t_n zamanından bağımsız olan geçiş olasılıklarına Markov zincirinin durağan geçiş olasılıkları denir ve Markov zincirine homojen Markov zinciri denir. Şimdi, aşağıdaki iki örneği ele alalım.

Örnek 3.1 Sürekli Değerli bir Markov Süreci

$t_i = i\Delta t$ ve $i = 0,1,2,\dots,N$ için $\Delta t = 1/N$ olmak üzere $\eta_i \sim N(0,1)$. $X_i = X(t_i)$, $i = 0,1,\dots,N-1$ için $X_0 = 0$ olmak üzere

$$X_{i+1} = X_i + \eta_i\sqrt{\Delta t}$$

biçiminde tanımlanır. Buradan, $\{X_i\}_{i=0}^{N}$, sürekli X_i rasgele değişkenleri ve kesikli t_i leri ile bir Markov sürecidir. $X_N = \sum_{i=0}^{N-1}\eta_i\sqrt{1/N}$ yani $X_N \sim N(0,1)$ olduğu unutulmamalıdır.

Örnek 3.2 Homojen Markov Zinciri

$i = 0,1,\dots,N$ için $t_i = i\Delta t$ ile $\Delta t = 1/N$ ve $X_0 = 0$ olmak üzere $X_i = X(t_i)$ olsun. δ kesikli rasgele değişkeninin olasılık dağılımı tanımlansın, böylece δ, $-\alpha, 0, \alpha$ deki olasılıkları $1 - 2\gamma\Delta t > 0$ olduğu kabul edilirse

$$p(\delta = -\alpha) = \gamma\Delta t,\;\; p(\delta = \alpha) = \gamma\Delta t \;\; ve \;\; p(\delta = 0) = 1 - 2\gamma\Delta t$$

dir. δ_i, δ ile aynı dağılıma sahip bağımsız özdeş dağılımlı değerler olmak üzere

$$X_{i+1} = X_i + \delta_i, \qquad i = 0,1,\dots,N-1\; için$$

olsun. Buradan, $E(\delta_i) = 0$ ve $Var(\delta_i) = 2\alpha^2\gamma\Delta t = 2\alpha^2\gamma/N$ dir. X_i stokastik sürecinin kesikli değer aldığını ve ayrıca zamanın kesikli olduğuna dikkat edilmelidir. Bu örnek için, geçiş olasılıkları

$$P(X_{n+1} = l\alpha|X_n = k\alpha) = \begin{cases} 1 - 2\gamma\Delta t, & l = k \\ \gamma\Delta t, & l = k-1 \;\; or\; l = k+1 \\ 0, & diğer \end{cases}$$

dir. Ayrıca, $\widehat{\delta_i} = \delta_i\sqrt{N}$, $E(\widehat{\delta_i}) = 0$ ve $Var(\widehat{\delta_i}) = 2\alpha^2\gamma$ olmak üzere

$$X_N = \sum_{i=0}^{N-1} \widehat{\delta}_\iota / \sqrt{N}$$

olduğu unutulmamalıdır. Daha sonra, Merkezi Limit Teoreminden, yeterince büyük N değeri için,

$$X_N \sim N(0, 2\alpha^2\gamma)$$

dir. Özellikle, yeterince büyük N değeri için eğer $2\alpha^2\gamma = 1$ ise $X_N \sim N(0,1)$ dir. Böylece, N arttıkça, X_N dağılımı önceki örnekteki rasgele değişkenle aynı dağılıma yaklaşır.

Homojen olmayan Markov zincirlerini düşünmeden önce, homojen Markov zincirlerinin bazı özelliklerini kısaca tartışmak faydalıdır. $\tau = \{t_0, t_1, t_2, \dots\}$ ayrık zamanda tanımlı $t_n = n\Delta t$ dolayısıyla $t_{n+k} = t_n + t_k$ olmak üzere $\{X_n, n \geq 0\}$ homojen Markov zinciri olsun. $n = 0,1,2, \dots$ olmak üzere her bir t_n için X_n, negatif olmayan ve tamsayı değerli olsun. Buradan $X_n \in \{0,1,2, \dots\}$ dir. Geçiş olasılığı

$$p_{i,j} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\}, \qquad i \geq 0, j \geq 0$$

olarak tanımlansın. Geçiş olasılık matrisi $P = [p_{i,j}]$ ve $i = 0,1,2, \dots$ için $\sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} = 1$ olarak tanımlansın.

$n \geq 1$ için X_n in olasılık dağılımı P geçiş olasılık matrisi kullanılarak hesaplanabilir. P'nin k _ıncı kuvveti $P^k = \left[p_{i,j}^{(k)}\right]$ olarak tanımlanır. $P^{l+n} = P^l P^n$ olduğundan matris çarpımından $P^0 = I$ olarak tanımlanmak üzere

$$p_{i,j}^{(l+n)} = \sum_{m=0}^{\infty} p_{i,m}^{(l)} p_{m,j}^{(n)} \qquad l, n \geq 0 \; için$$

dir. Bu ilişki, homojen bir Markov zinciri için Chapman-Kolmogorov formülü olarak bilinir. $i = 0,1,2, \dots$ için $p_i(t_k) = P(X(t_k) = i)$, X_k'nın olasılık dağılımı olsun. $(\mathbf{p}(t_0)_i = P(X(t_0) = i)$, $X(t_0)$ ın başlangıç olasılık dağılımı olmak üzere $\mathbf{p}(t_k) = [p_0(t_k), p_1(t_k), \dots, p_r(t_k), \dots]^T$ olsun.

$$\left(\mathbf{p}(t_1)\right)^T = \left(\mathbf{p}(t_0)\right)^T P$$

$$\left(\mathbf{p}(t_2)\right)^T = \left(\mathbf{p}(t_1)\right)^T P = \left(\mathbf{p}(t_0)\right)^T P^2$$

...

$$\left(\mathbf{p}(t_n)\right)^T = \left(\mathbf{p}(t_{n-1})\right)^T P = \left(\mathbf{p}(t_0)\right)^T P^n$$

olduğu açıktır. Buradan, $p_i(t_n) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(t_{n-1}) p_{m,i} = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(t_0) p_{m,i}^{(n)}$ dir.

Örnek 3.3. Bir Poisson süreci yaklaşımı

$$p_{i,k} = \begin{cases} 1 - \lambda\Delta t, & k = i \; için \\ \lambda\Delta t, & k = i+1 \; için \\ 0, & diğer \end{cases}$$

geçiş olasılığı ile tanımlanan kesikli homojen stokastik sürecini ele alalım. $\mathbf{p}(0) = [1,0,0,\dots]^T$ olduğunu kabul edelim. Bu örnekte, P geçiş olasılık matrisi ikili-köşegen ve $(\mathbf{p}(t+\Delta t))^T = (\mathbf{p}(t))^T P$ bileşenleri ile görünen hali

$$p_0(t+\Delta t) = p_0(t)(1-\lambda\Delta t)$$

ve

$$p_i(t+\Delta t) = p_i(t)(1-\lambda\Delta t) + p_{i-1}(t)\lambda\Delta t \quad i \geq 1 \; için$$

dir. Yeniden düzenlenirse, $i \geq 1$ için $p_0(0) = 1$ ve $p_i(0) = 0$ olmak üzere

$$\frac{p_0(t+\Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda p_0(t)$$

ve

$$\frac{p_i(t+\Delta t) - p_i(t)}{\Delta t} = -\lambda p_i(t) + \lambda p_{i-1}(t) \qquad i \geq 1 \; için$$

olur. $\Delta t \to 0$ iken, yukarıdaki Markov zinciri olasılığı Poisson süreci ile yakınsak olur. Buradan yeterince küçük Δt için,

$$p_i(t) \approx \frac{\exp(-\lambda t)\,(\lambda t)^i}{i!}$$

dir.

Şimdi kesinlikle homojen olmayan Markov zincirlerini ele alalım. $t_n = n\Delta t$ olmak üzere $\tau = \{t_0, t_1, \dots\}$ olsun. m yeterince büyük olduğunda

$$X_n \in M = \{z_{-m}, z_{-m+1}, \dots, z_0, z_1, \dots, z_m\}$$

olmak üzere ve Δx pozitif tamsayısı için her i için $z_i = i\Delta x$ olmak üzere $\{X_n, n \geq 0\}$, Markov zinciri olsun. t_n zamanına bağlı olan geçiş olasılıkları matrisi

$$p_{i,j}^{(n)} = P_n\{X_{n+1} = z_j | X_n = z_i\}, \qquad -m \leq i, j \leq m$$

Şeklinde tanımlansın. Geçiş olasılıkları matrisi her i ve n için $\sum_{j=-m}^{m} p_{i,j}^{(n)} = 1$ olmak üzere $(2m+1)x(2m+1)$ biçimindeki $P_n = [p_{i,j}^{(n)}]$ matrisi ile tanımlanır.

Benzer biçimde homojen Markov zincirleriyle de, $n \geq 1$ olduğunda X_n için olasılık dağılımı P_n olasılık geçiş matrisiyle hesaplanabilir. $i = -m, -m+1, \dots, m$ için t_n anında $p_i(t_n) = P(X_n = z_i)$ olasılık dağılımı tanımlansın. $\mathbf{p}(t_0) = [p_{-m}(t_0), p_{-m+1}(t_0), \dots, p_m(t_0)]^T$ başlangıç olasılık dağılımı olmak üzere $\mathbf{p}(t_n) = [p_{-m}(t_n), p_{-m+1}(t_n), \dots, p_m(t_n)]^T$ olsun. $i = -m, -m+1, \dots, m$ için $p_i(t_1) = \sum_{l=-m}^{m} p_l(t_0) p_{l,i}^{(0)}$ olduğu görülür ve

$$(\mathbf{p}(t_1))^T = (\mathbf{p}(t_0))^T P_0$$

$$(\mathbf{p}(t_2))^T = (\mathbf{p}(t_1))^T P_1 = (\mathbf{p}(t_0))^T P_0 P_1$$

…

$$(\mathbf{p}(t_n))^T = (\mathbf{p}(t_{n-1}))^T P_1 = (\mathbf{p}(t_0))^T P_0 P_1 \dots P_{n-1}$$

olduğu açık bir şekilde görülür. Eğer P_n geçiş matrisi t_n zamanından bağımsız ise, yukarıdaki ifadeler homojen Markov zinciri için türetilmiş ifadelere indirgenir, örneğin, $(\mathbf{p}(t_n))^T = (\mathbf{p}(t_0))^T P^n$ dir.

3.2 Sürekli Stokastik Süreçler

$\tau = [0, T]$ zaman aralığı ve süreç zaman aralığındaki tüm zamanlarda tanımlı olmak üzere $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ olasılık uzayında $\{X(t), t \in \tau\}$ sürekli stokastik süreci tanımlansın. Sürekli-zaman stokastik süreci τ ve ω gibi iki değişkene sahip $X: \tau x \Omega \to \mathbb{R}$ şeklinde bir fonksiyondur ve X kesikli değerli veya sürekli değerli olabilir. Özellikle, $X(t) = X(t, \cdot)$ fonksiyonu $t \in \tau$ nin herbir değeri için rasgele değişkendir ve $X(\cdot, \omega)$ dönüşümü τ'yu $\mathbb{R}$'ye götürür ve her bir $\omega \in \Omega$ için stokastik sürecin bir yoluveya bir yörüngesi olarak

adlandırılır. ω hakkında özel bilginin genellikle gerekli olmadığına, ancak her $\omega \in \Omega$ farklı bir yörüngeye neden olduğu için önemli olduğuna dikkat edilmelidir. Sonuç olarak, normal kullanım genellikle ω değişkeninin yazılmamasıdır, yani $X(t)$ her t değeri için rastgele bir değişkeni temsil eder ve $X(\cdot)$, $\tau = [0, T]$ aralığında bir yörüngeyi temsil eder. Burada, ω X'in iki değişkenli bir fonksiyon olduğunu vurgulamak için dahil edilmiştir.

Sürecin herhangi bir $t_n \in \tau$ zamanında sürecin gelecekteki durumunu belirlemesi halinde, X stokastik süreci bir Markov sürecidir. Özel olarak, $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1}$ iken $P(X(t_{n+1}) \leq x_{n+1} | X(t_n) = x_n) = P(X(t_{n+1}) \leq x_{n+1} | X(t_1) = x_1, \ldots, X(t_n) = x_n)$ dir. Markov süreçleri yaygın stokastik süreçlerdir ve burada ele alınan stokastik süreçlerin çoğu Markov stokastik süreçlerdir. Aşağıdaki iki örnek sürekli Markov süreçlerini göstermektedir.

3.2.1 Browniyan Hareketi

İskoçyalı botanikçi Robert Brown 1827'de, sıvı içerisinde gezinen bir polen parçacığının mikroskobik seviyedeki yer değiştirmelerinin çok düzensiz, çok hızlı ve zigzag benzeri hareketler sergilediğini not etmiştir. Daha sonraki çalışmalarda parçacığın bu düzensiz hareketine, çok daha küçük olan ve rassal bir şekilde hareket eden sıvı moleküller ile polen parçacığı arasındaki çarpışmaların sebep olduğu kabul edilmiştir. Sonrasında bu tür hareketler R. Brown'a ithafen Browniyan Hareket olarak adlandırılmıştır. Albert Einstein'ın atomlarla ilgili olan ünlü makalesinde (1905) ve Polonyalı fizikçi Smoluchowski (1906), birbirlerinden bağımsız olarak, bir parçacığın içinde bulunduğu ortamdaki daha küçük moleküllerin sürekli bombardımanına maruz kalarak izlediği yörüngenin başka bir deyişle difüzyonun (Difüzyon: herhangi bir molekülün sıvı, katı veya gaz içerisinden pasif geçişi) aslında bir Brownian hareketi olduğunu ortaya koymuşlardır.

Tanım: Browniyan hareketi $\{B(t)\}$ (ya da Wiener süreci) aşağıdaki özellikleri sağlayan stokastik bir süreçtir:

i. $B(0) = 0$ ve $B(t), t \geq 0$ t'nin sürekli bir fonksiyonudur (yolların sürekliliği).

ii. $0 \leq s \leq t$ için $B(t) - B(s) \sim N(0, t-s)$'dir (0 ortalamalı, t-s varyanslı Normal dağılımlıdır).

iii. Bütün $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ ler için $B(t_1), B(t_2) - B(t_1), \ldots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ bağımsızdırlar (farkların bağımsızlığı)

Yukarıdaki (i) koşulu sürecin başlangıç anında sıfır pozisyonundan başladığını ve B sürecinin örneklem eğrilerinin tümünün sürekli olduğunu, (ii) koşulu B sürecinin durağan artımlara sahip olduğunu, yani $B(t) - B(s) = B(t-s)$, (iii) ise $B(t) - B(s)$ artımının geçmişinden bağımsız olduğunu, başka bir deyişle B'nin bağımsız artışlara sahip olduğunu ifade eder (Klebaner 2006, Önalan 2010).

Browniyan hareketi süreci $B(t)$, saf gürültünün toplam etkisi için temel bir model sunar. Eğer $B(t)$, t anında bir parçacığın konumunu temsil ediyorsa, bu durumda $B(t) - B(0)$ da bir akışkandaki moleküllerin rastgele bombardıman etkisini ya da t zamanına göre gürültünün etkisini temsil etmektedir.

Örnek 3.4. λ yoğunluklu Poisson Süreci

$X(t), t$ zamanındaki gözlem sayısına eşit olsun. Δt zaman aralığında bir gözlem olasılığının $\lambda \Delta t + (\Delta t)$ ' ye eşit olduğunu varsayalım. Örnek 2.4'e referansla, bunun sürekli bir stokastik süreç olduğu ve t zamanında n gözlem olasılığının

$$P(X(t) = n) = P_n(t) = \exp(-\lambda t)\,(\lambda t)^n / n!$$

olduğu açıktır. $X(t)$ süreci ayrık değerli sürekli zamanlı stokastik sürecidir. Özel olarak, $X(t)$, $\lambda > 0$ yoğunluklu Poisson sürecidir. $X(0) = 0$ olduğu açıktır ve herhangi bir t anındaki gözlem sayısı λt ortalaması ile Poisson dağılımlıdır. Bu da, her $s \geq 0$ için

$$P(X(t+s) - X(s) = n) = P_n(t) = \exp(-\lambda t)\,(\lambda t)^n / n!$$

dir. Aslında süreç bir Markov sürecidir ve

$$P(X(t + \Delta t) \leq m + \Delta m | X(t) = m) = \sum_{l=0}^{\Delta m} \exp(-\lambda t)\,(\lambda t)^l / l!$$

ve $t + \Delta t$ anındaki olasılık dağılımı sadece sistemin t anındaki durumuna bağlı olup sistemin geçmişine bağlı değildir. Ayrıca, Örnek 2.4'te görüldüğü gibi,

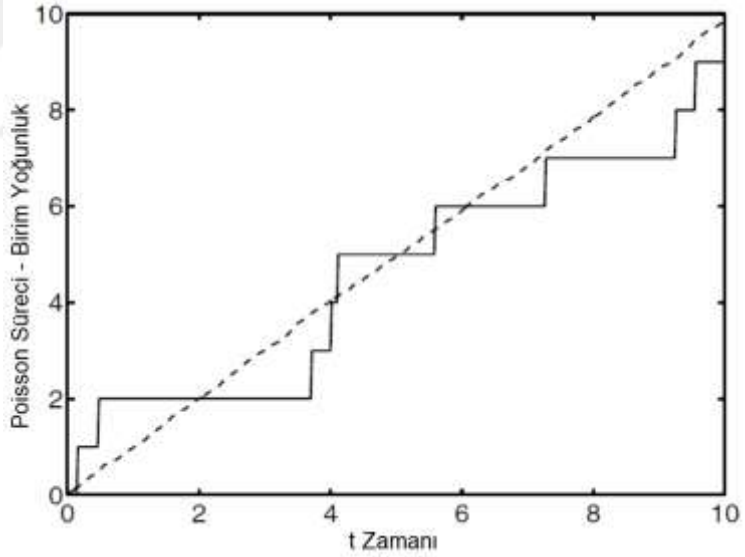
$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda P_0(t),$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \quad n \geq 1,$$

$$E\big(X(t)\big) = \lambda t,$$

$$Var\big(X(t)\big) = \lambda t$$

dir. Örnek 3.3 için ayrık stokastik sürecin olasılıkları ile sağlanan ilişki, yukarıdaki diferensiyel denklemlere sonlu fark yaklaşımları olduğu ve bu diferensiyel denklemlere $\Delta t \to 0$ iken yaklaşıldığı kolayca görülmektedir. İlaveten herhangi bir $s \geq 0$ için $Y(t) = X(t+s) - X(s)$ ise bu durumda λ yoğunluklu $Y(t)$ ayrıca Poisson dağılımlıdır ve $Y(0) = 0$ dır. Şekil 3.1, bir Poisson sürecinde ayrık sıçramaların rastgele davranışını göstermektedir. Şekilde verilen ortalama eğri 200 örnek yolu içindir. Ortalamanın λt çizgisini yakından takip ettiği görülmektedir. (Allen 2010)



Şekil 3. 1 Poisson sürecinin tek örnek yolu (sürekli) ve 200 Poisson Sürecinin ortalaması (kesikli)

Sürekli bir Markov süreci için s anındaki x den t anındaki y ye geçiş için geçiş olasılığı yoğunluk fonksiyonunu dikkate almak gerekir. Ayrık Markov süreçlerine benzer şekilde, geçiş olasılık yoğunluk fonksiyonu Chapman-Kolmogorov denklemi ile sağlanır:

$$p(y,t,x,s) = \int_{\mathbb{R}} p(y,t,z,u)p(z,u,x,s)dz.$$

Eğer bir $X(t)$ Markov sürecinin geçiş olasılıkları

$$p(y, t+u, x, s+u) = p(y, t, x, s)$$

sağlarsa bu $X(t)$ Markov süreci homojen denebilir. Yani, geçiş olasılıkları yalnızca geçen süreye bağlıdır.

Örnek 3.5 Yaklaşık bir Wiener süreci

$i = 1,2, \dots, N$ için $X_i(t)$, Örnek 3.4 de tanımlanan λ yoğunluklu bağımsız Poisson süreci olsun. $Y_N(t)$ ise

$$Y_N(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{X_i - \lambda t}{\sqrt{\lambda N}}$$

ile tanımlanan diğer stokastik sürecimiz olsun. Merkezi Limit Teoreminden, N artarken $Y_N(t)$ sıfır ortalamalı ve t varyanslı normal dağılımlı bir rasgele değişkene yakınsar. Aslında Örnek 3.4 düşünüldüğünde $Y_N(t+s) - Y_N(t)$ her $s, t \in \tau$ için 0 ortalamalı ve s varyanslı normal dağılımlı bir değişkene yakınsar.

Önceki örnekte, $Y_N(t)$, N artarken Wiener sürecine veya $W(t)$ Brown hareketine yakınsar.

$\{W(t), t \geq 0\}$ Wiener süreci durağan bağımsız artışlı sürekli bir stokastik süreçtir, öyle ki

$$W(0) = 0 \quad ve \quad W(t) - W(s) \sim N(0, t-s) \quad 0 \leq s \leq t \; için$$

dir. Buradan $0 \leq s \leq t$ için $E(W(t)) = 0$, $Var\big(W(t) - W(s)\big) = t - s$ ve özellikle, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 < t_4$ için

$$W(t_2) - W(t_1) \sim N(0, t_2 - t_1) \; ve \; W(t_4) - W(t_3) \sim N(0, t_4 - t_3)$$

bağımsız Gauss rasgele değişkenidir. Bir Wiener sürecinin homojen bir Markov süreci olduğu unutulmamalıdır. Ayrıca, genellikle ω yazılmadan $W(t) = W(t, \omega)$ olarak ifade edilir. Bu nedenle $W(t)$, t'nin her bir değerinde rastgele bir değişkeni temsil eder.

Bir $W(t)$ Wiener sürecinin bir örnek yolunun sınırlı sayıda noktada ne kadar kolay üretilebileceğini görmek, pratik değerin yanı sıra kavramsal bir değerdir. $t_0 = 0$

olduğunda $[t_0, t_N]$ aralığında $\{t_i\}$ noktalarında bir Wiener süreç yörüngesinin olduğunu varsayalım. O zaman $W(t_0) = 0$ dır ve $i = 1,2, \dots, N$ için bağımsız normal dağılıma $N(0,1)$ sahip sayılar η_{i-1} olmak üzere $t_0, t_1, \dots, t_N$ noktalarındaki Wiener süreci yörünge değerlerini veren yinelenme ilişkisi

$$W(t_i) = W(t_{i-1}) + \eta_{i-1}\sqrt{t_i - t_{i-1}} \tag{3.1}$$

dir. $W(t_i)$ değerleri, $i = 1,2, \dots, N$ için $\{t_i\}_{i=0}^{N}$ noktalarında bir Wiener örnek yolunu temsil eder. Daha sonraki örneklerde tartışıldığı gibi, bu $N + 1$ değerlerini kullanarak, Wiener süreci örnek yolu artık $[t_0, t_N]$ aralığın her yerinde yaklaşık olarak tahmin edilebilir.

Sayılabilecek sayıda normal dağıtılmış rasgele değişken kullanan bir Wiener süreci oluşturmanın bir başka ilginç yolu Karhunen-Lo`eve genişlemesidir. Karhunen-Lo`eve genişlemesi bir Wiener sürecinin Fourier serileri genişlemesinden türetilmektedir ve $t \in [0, T]$ için η_n bağımsız olarak aynı dağılıma sahip standart normal rasgele değişkenler yani $n = 0,1, \dots$ için $\eta_n \sim N(0,1)$ olmak üzere

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\sqrt{2T}}{(2n+1)} \eta_n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi t}{2T}\right) \tag{3.2}$$

biçimindedir. Aslında burada bahsi geçen η_n açıkça $n = 0,1,2, \dots$ için

$$\eta_n = \frac{(2n+1)\pi}{2^{1/2}T^{3/2}} \int_0^T W(t) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi t}{2T}\right) dt$$

biçiminde verilir. Bu integral bir sonraki bölümde Örnek 3.4'te ele alınacaktır. Şimdi (3.2) serisinin $W(t)$ Wiener sürecinin gerekli özelliklerine sahip olduğunu görelim. Bu serinin N-inci kısmi toplamı

$$S_N(t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{2\sqrt{2T}}{(2n+1)} \eta_n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi t}{2T}\right)$$

olsun. $t \in [0, T]$ için $S_N(t) \in H_{RD}$ olduğunu görmek kolaydır ve $\{S_N(t)\}$ H_{RD} Hilbert uzayında Cauchy dizisidir. Bu nedenle, her $t \in [0, T]$ için H_{RD} Hilbert uzayında $N \to \infty$ iken $S_N(t) \to S(t)$ dir. Gerçekten de, her n için $\eta_n \sim N(0,1)$ olduğunda $0 < t < T$ için

$$t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8T}{(2n+1)^2\pi^2} \sin^2\left(\frac{(2n+1)\pi t}{2T}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4T}{(2n+1)^2\pi^2} \left(1 - \cos\left(\frac{(2n+1)\pi t}{2T}\right)\right)$$

dir ve buradan

$$\sigma_N^2(t) = t - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{8T}{(2n+1)^2\pi^2} \sin^2\left(\frac{(2n+1)\pi t}{2T}\right)$$

olmak üzere $S_N(t) \sim N(0, \sigma_N^2(t))$ dir. Ek olarak, trigonometrik özellikler kullanılarak

$$\sin(at)\sin(as) - \sin^2(at) = \frac{1}{2}\cos(at - as) - \frac{1}{2}\cos(at + as) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2at)$$

$s \geq t$ için

$$E\left(\big(S(s) - S(t)\big)S(t)\right) = 0$$

olduğu gösterilebilir.

Her bir $t \in [0, T]$ de, $W(t) \in H_{RD}$ olduğuna dikkat ediniz. Ek olarak, W ortalama kare anlamında süreklidir ancak türevi de yoktur. Şimdi W'nın sürekliliğini gösterelim;

$$\|W(t + \Delta t) - W(t)\|_{RV}^2 = E(W(t + \Delta t) - W(t)^2 = \Delta t$$

dir. Bu nedenle $\|W(t + \Delta t) - W(t)\|_{RD} = \sqrt{\Delta t}$, $\epsilon > 0$ verildiğinde, $\Delta t < \delta$ olduğunda $\|W(t + \Delta t) - W(t)\|_{RD} < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. Bununla birlikte,

$$\left\| \frac{W(t + \Delta t) - W(t)}{\Delta t} \right\|_{RD}^2 = \frac{1}{\Delta t}$$

olduğunda $\Delta t \to 0$ için

$$\left\| \frac{W(t + \Delta t) - W(t)}{\Delta t} - F(t) \right\|_{RD}^2 \to 0$$

olacak biçimde $F(t) \in H_{RD}$ yoktur. $0 \leq t \leq T$ için $W(t)$ fonksiyonunun beklenen değerlerini araştıralım. İlk olarak, hatırlayalım ki, $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$p(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi|t|)^{1/2}} exp\left(\frac{-(x-y)^2}{2|t|}\right)$$

$|t|$ varyanslı ve y ortalamalı normal dağılımlı rasgele değişkenlerin olasılık yoğunluğudur. $W(t)$, $[0,T]$ de Wiener süreci olsun. Açıkça, $t_1 \in [0,T]$ ve $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ için,

$$E(G(W(t_1))) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x_1)p(t_1,x_1,0)dx_1$$

dir. Ek olarak,

$$P(W(t_1) \le z_1) = \int_{-\infty}^{z_1} p(t_1,x_1,0)dx_1$$

dir. Şimdi $[0,T]$ aralığının $0 = t_0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_k \le T$ olarak bölünmesini ele alalım. $G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ için

$$E\left(G(W(t_1),W(t_2))\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x_1,x_2)p(t_1,x_1,0)p(t_2-t_1,x_2,x_1)dx_1dx_2$$

dir. Ayrıca $G: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ için

$$E(G(W(t_1),W(t_2),\dots,W(t_k))) = \int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} G(x_1,\dots,x_k)p(t_1,x_1,0)\dots p(t_k-t_{k-1},x_k,x_{k-1})dx_1\dots dx_k$$

dir. $m = 1,2,3,\dots,k$ için $p(t_m - t_{m-1}, x_m, x_{m-1})$ yoğunlukları $\mathbb{R}^k$ da sonlu boyutlu olasılık ölçülerinin bir kümesini tanımlar. Bu bölünmenin olasılık dağılımı

$$F_{t_1t_2\dots t_k}(z_1,z_2,\dots,z_k) = P(W(t_1) \le z_1,\dots,W(t_k) \le z_k) = \int_{-\infty}^{z_k}\int_{-\infty}^{z_{k-1}}\dots\int_{-\infty}^{z_1} p(t_1,x_1,0)\dots p(t_k-t_{k-1},x_k,x_{k-1})dx_1\dots dx_k \qquad (3.3)$$

denklemini sağlar. Bu olasılık ölçümünün daha ince ve daha ince bölünmeler yoluyla, ölçünün $[0,T]$'nin herhangi $0 = t_0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_k \le T$ bir bölünmesi için sonlu boyutlu ölçümle özdeş olduğu tüm $[0,T]$ 'ye genişletilebildiğine dikkat ediniz. Bu sonlu boyutlu olasılık ölçüleri belirli simetri ve uyumluluk koşullarını karşıladığından, sonlu boyutlu olasılık dağılımları yukarıda tanımlananlarla aynı olacak şekilde bir olasılık uzayı ve stokastik bir süreç olduğunu söyleyen Kolmogorov'un genişleme teoremi

uygulanabilir. Stokastik süreç, Wiener süreci veya Brownian hareketi $W(t)$ dir ve $[0,T]$ 'nin herhangi bir bölümünün üzerinde, $W(t)$'nin sonlu boyutlu dağılımları (3.3) ifadesine indirgenir.

Son olarak, s anındaki x den t anındaki y ye kadar olan Wiener süreci için $p(y,t,x,s)$. geçiş olasılık yoğunluğunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$p(y,t,x,s) = \frac{1}{(2\pi|t-s|)^{1/2}} exp\left(\frac{-(x-y)^2}{2|t-s|}\right)$$

dir ve açık olarak $p(y,t,x,s) = p(y,x,|t-s|)$ olduğundan Wiener süreci sürekli homojen bir Markov sürecidir. Buna ek olarak, bu geçiş olasılığı için Chapman-Kolmogorov denklemini, doğrudan doğrulayabiliriz, yani $s < u < t$ için

$$p(y,t,x,s) = \int_{-\infty}^{\infty} p(z,u,x,s)p(y,t,z,u)dz$$

dir.

3.3 Stokastik Sürecin Bir Hilbert Uzayı

Stokastik süreçlerin bir Hilbert uzayını tanımlamakta fayda vardır. Bu uzay, stokastik integralleri ve stokastik diferensiyel denklemleri değerlendirmek için Bölüm 4 ve 5'te gereklidir. Örneğin, bir dizi bir Hilbert uzayındaysa, bir dizi stokastik işlemin yakınsamasının gösterilmesi kolaylaştırılabilir. Özellikle, Hilbert uzayındaki Cauchy dizileri, uzayda yakınsak olur. Bu bölümde, ilk olarak temel stokastik süreçlerden oluşan bir metrik uzay tarif edilecektir. Bu uzay daha sonra bir Hilbert uzayına kadar tamamlanacak ve temel stokastik süreçler kümesi Hilbert uzayında yoğun olacaktır.

$[0,T]$ aralığı ve $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ olasılık uzayı üzerinde tanımlanan sürekli stokastik süreçleri ele alınsın. $f(t) = f(t,\omega)$, $[0,T] \times \Omega$ üzerinde tanımlanan rastgele bir adım fonksiyonu olan temel bir stokastik süreç olsun. Yani, $[0,T]$ nin bir bölünmesi $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_N = T$ için f fonksiyonu

$$f(t,\omega) = \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i,\omega) I_i(t)$$

biçimindedir ve $I_i(t)$ karakteristik fonksiyonu

$$I_i(t) = \begin{cases} 1 & t_i \le t \le t_{i+1} \\ 0 & diğer \end{cases} \qquad i = 0,1,2,\dots,N-1 \quad için$$

dir. Bölüm 2.6 dan hatırlayalım ki H_{RD} rasgele değişkenlerin Hilbert uzayıdır. t_i için $f(t_i,\cdot) \in H_{RD}$ özellikle de her bir i için de $E\big(f^2(t_i)\big) < \infty$ olduğu varsayılmaktadır. Şimdi, S_{SS} metrik uzayı

$$S_{SS} = \{[0,T] \times \Omega \text{ de tanımlanan } f(t,\omega) \text{ rasgele adım fonksiyonları ;}$$
$$\int_0^T E\big(f(t)\big)^2 dt = \sum_{i=0}^{N-1} E\big(f^2(t_i)\big)(t_{i+1} - t_i) < \infty\}$$

olacak biçimde tanımlanır. S_{SP} üzerinde $(\cdot\ ,\ \cdot)_{SP}$ iç çarpımı;

$$(f,g)_{SS} = \int_0^T E\big(f(t)g(t)\big)dt$$

ve norm da

$$\|f\|_{SS} = (f,f)_{SS}^{1/2} = \left(\int_0^T E|f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

biçiminde tanımlanır. S_{SS}, $\|\cdot\|_{SP}$ metriğiyle bir metrik uzaydır. Bununla beraber, S_{SS} tam değildir ve S_{SS} de bütün Cauchy dizilerinin yakınsak olmadığını göstermek kolaydır. Bu uzay, ek stokastik süreçler ekleyerek tamlaştırılabilir. Tamlanan uzay H_{SS} olarak tanımlanır ve S_{SS}, H_{SS} de yoğundur. Verilen bir $f \in H_{SS}$ ve $\epsilon > 0$ için $\|f - g\|_{SS} < \epsilon$ olacak biçimde bir $g \in S_{SS}$ vardır. S_{SS}'yi tamlaştırma işleminde, H_{SS}'yi oluşturmak için S_{SS}'ye birçok stokastik süreç eklenebilir.

Örneğin, $f(t,\omega)$ 'nin bazı k_1 ve k_2 sabitleri ve her $t_1, t_2 \in [0,T]$ için $\|f(0)\|_{RD}^2 \le k_1$ ve $\|f(t_2) - f(t_1)\|_{RD}^2 \le k_2|t_2 - t_1|$ eşitsizliklerini sağladığını göz önüne alalım. Bu durumda $f \in H_{SS}$ ve $f_N(t,\omega) = \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i,\omega)I_i(t)$, $S_{SS} \subset H_{SS}$ de f e yakınsak olan bir Cauchy dizisi oluşturur. Aslında,

$$\|f\|_{SD}^2 \le 2\int_0^T E|f(t) - F(0)|^2 dt + 2\int_0^T E|f(0)|^2\, dt \le k_2 T^2 + 2k_1 T$$

dir. Ek olarak Fubini Teoreminden

$$\int_0^T E|f(t)|dt = E\int_0^T |f(t)|\,dt \;\; ve \;\; \int_0^T E|f(t)|^2\,dt = E\int_0^T |f(t)|^2 dt$$

dir. $f \in H_{SP}$ için, Cauchy-Schwarz eşitsizliği, $|(f,g)_{SS}| \leq \|f\|_{SS}\|g\|_{SS}$ 'den

$$\left|\int_0^T E(f(t)g(t))\,dt\right| \leq \left(\int_0^T E|f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^T E|g(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

dir. Böylece, örneğin, Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve Fubini teoremi uygulanarak

$$E\int_0^T |f(t)|\,dt = \int_0^T E|f(t)|dt \leq T^{1/2}\left(\int_0^T E|f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

elde edilir. Ayrıca, $\|f+g\|_{SS} \leq \|f\|_{SS} + \|g\|_{SS}$ üçgen eşitsizliği, $f, g \in H_{SS}$ için açıkça

$$\left(\int_0^T E|f(t)+g(t)|^2 dt\right)^{1/2} \leq \left(\int_0^T E|f(t)|^2 dt\right)^{1/2} + \left(\int_0^T E|g(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

dir.

Bazen S_{SS}'dekilerden bile daha temel olan bir dizi stokastik süreç uygulamak yararlı olabilir. $\hat{S}_{SS} \subset S_{SS}$ basit rasgele adım fonksiyonlarının kümesi olsun. Burada, $f \in \hat{S}_{SS}$

$$f(t,\omega) = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M} f_{ij}(\omega) I_{A_j} I_i(t)$$

formuna sahiptir. Basit fonksiyonlar, H_{RD} de yoğun olduğundan, $\hat{S}_{SS}$ de H_{SS}'de yoğundur. Birkaç örnek H_{SS} Hilbert uzayını netleştirmeye yardımcı olur. Sonuç olarak;

H_{SS}, $\|f\|_{SS} = \left(\int_0^T E|f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$ normu ile Stokastik Süreçlerin bir Hilbert uzayıdır.

Örnek 3.6 Stokastik süreçlerin yakınsak bir dizisi

$f_N(t)$ stokastik süreci $h = \frac{T}{N}$ ve $i = 0,1,\ldots,N$ için $t_i = ih$ olmak üzere

$$f_N(t) = \sum_{i=0}^{N-1} I_i(t) W(t_i)$$

tanımlansın. Her bir N için $f_N \in H_{SS}$ olduğu açıktır. Ayrıca,

$$\|f_N - W\|_{SS}^2 = \int_0^T E\left(\sum_{i=0}^{N-1}(W(t) - W(t_i))I_i(t)\right)^2 dt = \int_0^T \sum_{i=0}^{N-1}(t - t_i)I_i(t)\,dt$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}(t - t_i)dt = \sum_{i=0}^{N-1}\frac{h^2}{2} = \frac{T^2}{2N}$$

olur. $N \to \infty$ iken $\|f_N - W\|_{SS} \to 0$ olduğundan, $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$ stokastik süreç dizisi H_{RD} 'de W ya yakınsar.

Örnek 3.7 Stokastik süreçlerin yakınsak başka bir dizisi

$W \in H_{SS}$, [0,T] de bir Wiener süreci olsun. $X_n(t)$ stokastik sürecini, aşağıdaki biçimde giderek tanımlayalım:

$n = 1,2,$ ... için

$$X_n(t) = \frac{n-1}{n}W(t)$$

Daha sonra,

$$\|X_n - W\|_{SP}^2 = \int_0^T E(X_N(t) - W(t))^2 dt = \int_0^T E(W(t))^2 \frac{1}{n^2} dt = \frac{T^2}{2n^2}$$

dir. Buradan, $n \to \infty$ iken H_{SS} de X_n, W ya yakınsar.

Örnek 3.8 Bir Poisson Sürecinin bir fonksiyonunun integrasyonu

X, [0,T] aralığında λ yoğunluklı bir Poisson süreci olmak üzere $J(e^{-X}) = \int_0^T \exp\big(-X(t)\big)\,dt$ ele alalım. $X(t)$ olayının birim artışlarının [0,T] de $t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_{N-1}$ olduğunu varsayalım ve $t_0 = 0$ ve $t_N = T$ olsun. Bu durumda $X(t)$,

$$i = 0,1,\ldots,N-1 \text{ için } t_i \le t \le t_{i+1} \text{ olmak üzere } X(t) = i$$

formunda yazılabilir. Buradan,

$$J(e^{-X}) = \int_0^T \exp\big(-X(t)\big)\,dt = \sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \exp(-i)\,dt = \sum_{i=0}^{N-1}\exp(-i)(t_{i+1} - t_i)$$

olduğu kolayca görülebilir. Üstelik, $B_i(\lambda T) = \int_0^{\lambda T}(x)^i \exp(-x)\,dx$ olmak üzere

$$E\big(J(e^{-X})\big) = E\int_0^T \exp\big(-X(t)\big)\,dt = \int_0^T \sum_{i=0}^{\infty} \exp(-i)\,\frac{(\lambda t)^i \exp(-\lambda t)}{i!}\,dt$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\exp(-i)}{i!} \int_0^T (\lambda t)^i \exp(-\lambda t)\,dt$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\exp(-i)}{i!\,\lambda} \int_0^{\lambda T} (x)^i \exp(-x)\,dx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\exp(-i) B_i(\lambda T)}{i!\,\lambda}$$

dir. Ayrıca, $T \to \infty$ iken $B_i(\lambda T) \to i!$ dir ve $E\big(\int_0^{\infty} \exp(-X(t)dt\big) = \frac{e}{\lambda(e-1)}$

Örnek 3.9 Wiener sürecine yaygın olarak kullanılan bir yaklaşım

$0 \le t \le T$, $h = \frac{T}{N}$ ve $i = 0,1,\dots,N$ için $t_i = ih$ olsun. $W(t) \sim N(0,t)$ bir Wiener sürecini göz önüne alalım. $X_N(t)$ parçalı sürekli doğrusal stokastik süreci [0,T] deki bu bölünme ile $i = 0,1,\dots,N-1$ ve $t_i \le t \le t_{i+1}$ için

$$X_N(t) = W(t_i)\frac{t_{i+1} - t}{h} + W(t_{i+1})\frac{t - t_i}{h}$$

tarafından tanımlanır. $i = 0,1,\dots,N$ için $X_N(t_i) = W(t_i)$ dir ve $X_N(t)$, [0,T] de süreklidir. Ayrıca,

$$\|X_n - W\|_{SS}^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} E\left(W(t_i)\frac{t_i - t}{h} + W(t_{i+1})\frac{t - t_i}{h} - W(t)\right)^2 dt$$

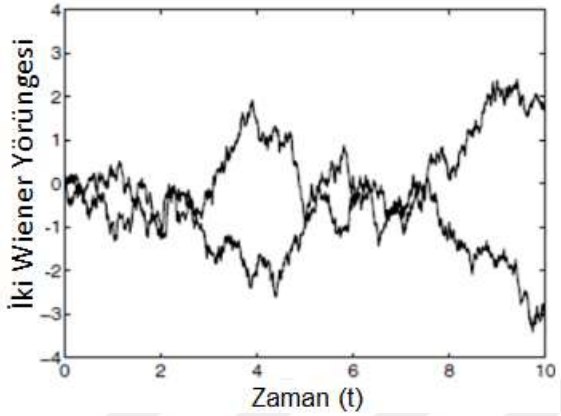
$$= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} E\left((W(t_i) - W(t))\frac{t_i - t}{h} + (W(t_{i+1}) - W(t)\frac{t - t_i}{h} - W(t)\right)^2 dt$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{2(t - t_i)(t_{i+1} - t)}{h}\,dt$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h^2}{3} = \frac{T^2}{3N}$$

dir. Buradan $N \to \infty$ iken $\|X_n - W\|_{SS}^2 \to 0$ dir, yani H_{SS} de $N \to \infty$ iken $X_N \to W$ dir. N nin yeterince büyük değeri için, $X_N(t)$ in örnek yolunun grafiği, karşılık gelen $W(t)$ örnek yolunun grafiğinden ayırt edilemez. Şekil 3.2'de iki Wiener süreci örnek yolu [0,

10] aralığında çizilmiştir. (Bu şekilde, (3.1) rekürans bağıntısı kullanılarak iki $X_{1000}(t)$ örnek yolu herbir Wiener süreci yörüngesi için $i = 1,2,\dots,1000$ olmak üzere $W(t_i)$ nin 1000 değeri üretilip çizilmiştir.)



Şekil 3. 2 [0,10]'da iki Wiener örnek yolu

H_{SS} Hilbert uzayında stokastik süreçlerin birkaç ek özelliği yararlıdır. İlk olarak eğer $X \in H_{SS}$ ise bu durumda neredeyse her $t \in [0,T]$ için $X(t) \in H_{SS}$ anlamına gelen $\int_0^T E|X(t)|^2 dt < \infty$ dir. Ek olarak, eğer $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H_{SP}$, $X \in H_{SS}$ stokastik sürecine yakınsaksa, bu durumda $n \to \infty$ iken $\|X_n - X\|_{SS} \to 0$ dır. Bundan dolayı, neredeyse her $t \in [0,T]$ için $E|X_n(t) - X(t)|^2 \to 0$ dır. Yani, H_{SP} Hilbert uzayındaki yakınsama $[0,T]$ üzerinde olasılıksal yakınsama anlamına gelir. Özel olarak, $n \to \infty$ iken $\|X_n - X\|_{SS} \to 0$ olması neredeyse her $t \in [0,T]$ için her $\epsilon > 0$ olmak üzere $n \to \infty$ iken $P(\{\omega: |X_n(t,\omega) - X(t,\omega)|\}) \to 0$ anlamına gelir.

Şimdi, herhangi bir $t_1, t_2 \in [0,T]$ ve $K > 0$ sabiti için $X(0) \in H_{RD}$ ve $X \in H_{SS}$ nin

$$\|X(t_2) - X(t_1)\|_{RD}^2 = E|X(t_2) - X(t_1)|^2 \leq K|t_2 - t_1|$$

sağladığını varsayalım. Daha sonra $\|X\|_{SS}$ üzerinde bir sınır bulunabilir ve X, $[0,T]$ üzerinde H_{RD} normuna göre süreklidir. İlk olarak, eğer $X(0) \in H_{RD}$ ise bu durumda $X(0) \in H_{SS}$ ve

$$\|X\|_{SS} \leq \|X - X(0)\|_{SS} + \|X(0)\|_{SS} \leq \left(\frac{KT^2}{2}\right)^{1/2} + T^{1/2}\|X(0)\|_{RD}$$

dir. Böylece, $\|X\|_{SS}$, $\left(\frac{KT^2}{2}\right)^{1/2} + T^{1/2}\|X(0)\|_{RD}$ ile sınırlıdır. Ayrıca, X in $[0,T]$ üzerinde H_{RV} normuna göre sürekli olduğunu görmek kolaydır. $\epsilon > 0$, verilsin, bu durumda $|t_1 - t_2| \leq \epsilon^2/K$ olduğunda

$$\|X(t_2) - X(t_1)\|_{RD} \leq K^{1/2}|t_1 - t_2|^{1/2} \leq \epsilon$$

dir.

Sonuç olarak, literatürde Itô stokastik integralleri ve diferensiyel denklemler için Bölüm 4 ve 5'te uygulanan H_{SS} Hilbert uzayı ile ilgili bazı terminolojilerin sunulması yararlı olacaktır. $W(t,\omega)$, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ olasılık uzayında tanımlı bir Wiener süreci olsun. $\{\mathcal{A}(t): 0 \leq t \leq T\}$, $t_1 < t_2$ olduğunda $\mathcal{A}(t_1) \subset \mathcal{A}(t_2)$ sağlayan $\mathcal{A}$ alt σ_cebirinin bir ailesi olsun, $W(t)$, $\mathcal{A}(t)$-ölçülebilir, ve $W(t+s) - W(t)$, $\mathcal{A}(t)$ den bağımsız. $\mathcal{A}(t)$, Wiener sürecinin değerleri t zamanına kadar üretilen olayların σ − cebiridir. f $(t,\cdot)$ nin hemen hemen tüm $t \in [0,T]$ için $\mathcal{A}(t)$-ölçülebilir olması durumunda, stokastik bir işleminin $\mathcal{A}(t)$ 'e adapte edildiği söylenir. Eğer f, $[0,T] \times \Omega$ de ölçülebilir ise bu durumda f'nin beklenmedik (nonanticipative) olduğu söylenir. Beklenmedik bir $f(t)$ fonksiyonu, $s > 0$ için $W(t+s) - W(t)$ Wiener artışından bağımsızdır. Ayrıca, H_{SS} Hilbert uzayı beklenmedik $\int_0^T E|f(t)|^2 dt < \infty$ durumunu sağlayan f stokastik süreçlerinin kümesidir.

3.4 Stokastik Süreçlerin Bilgisayarla Üretimi

Stokastik süreçlerin takma-rasgele (pseudo-random) sayılar kullanılarak hesaplanabilir şekilde nasıl simüle edilebileceğini (canlandırılabileceğini) anlamaya çalışalım. İlk olarak, ayrık bir stokastik sürecin simülasyonunu, özellikle de $X_0 = z_0$ ve X_n in $n = 0,1,\dots,N$ olmak üzere her bir t_n anı için kesikli bir rasgele değişken olduğu $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = T$ üzerinde bir $\{X_n\}$ Markov zincirini ele alalım. Özellikle, $X_n \in M = \{z_{-m}, z_{-m+1}, \dots, z_m\}$ dir. Geçiş olasılık matrisi

$$p_{i,j}^{(n)} = P\{X_{n+1} = z_j | X_n = z_i\} \text{ olmak üzere } P_n = \left[p_{i,j}^{(n)}\right]$$

nin t_n anına bağlı olduğunu kabul edelim. Bir $\{X_n, 0 \leq n \leq N\}$ yörüngesinin veya örnek yolunun üretilmesini göz önüne alalım. t_0 anında, $X_0 = z_0$ dır. X_1 i bulmak için, ilk olarak

$j = -m, -m+1, \ldots, m$ için $p_{0,j}^{(0)}$ in hesaplanır. Sonra, [0,1] aralığında düzgün dağılımlı η_0 takma-rasgele(pseudo-random) sayısı üretilir. Daha sonra,

$$\sum_{j=-m}^{r_0-1} p_{0,j}^{(0)} < \eta_0 < \sum_{j=-m}^{r_0} p_{0,j}^{(0)}$$

olacak biçimdeki r_0 hesaplanır. Son olarak, X_1, z_{r_0} ye eşit olarak ayarlanır. X_2 yi bulmak için, $j = -m, -m+1, \ldots, m$ için $p_{r_0,j}^{(1)}$ in hesaplanır. Sonra, [0,1] aralığında düzgün dağılımlı η_1 üretilir ve

$$\sum_{j=-m}^{r_1-1} p_{r_0,j}^{(1)} < \eta_1 < \sum_{j=-m}^{r_1} p_{r_0,j}^{(1)}$$

olacak biçimde r_1 hesaplanır. Daha sonra, X_2, z_{r_1} ye eşit olarak ayarlanır. Bu adımlar kesikli stokastik sürecin bir $\{X_k\}_{k=0}^{N}$ gerçekleşmesini vermek için N defa tekrarlanır.

Şimdi sürekli bir $\{X(t), t \in [0,T]\}$ Markov süreci için bir yörünge oluşturmayı inceleyelim. Genel olarak, bu bölümde açıklanan örneklerde gösterildiği gibi, sürekli süreçlerin yörüngeleri kesikli bir zaman kümesinde belirlenir. Özel olarak, bir $X(t)$ yörünge, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = T$ olacak biçimde $t_0, t_1, \ldots, t_N$ anlarında hesaplanır. Daha sonra, $X(t)$ bu noktalar arasında, örneğin parçalı doğrusal interpolasyon yardımıyla yaklaşıklaştırılabilir.

Örnek 3.10 Bir Poisson Sürecinin Simülasyonu

Bir λ yoğunluklu $X(t)$ Poisson sürecini ele alalım. X(t) sürecinin t zamanındaki gözlem sayısına eşit olduğunu hatırlayalım. Burada Δt zamanındaki bir gözlemin olasılığı $\lambda\Delta t + o((\Delta t)^2)$ ye eşittir. Örnek 2.4. den,

$$P(X(t) = n) = \exp(-\lambda t)\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi, $h = T/N$ olmak üzere $k = 0,1,2, \ldots, N$ için ayrık $t_k = kh$ anında bu sürekli stokastik sürecin simülasyonunu inceleyelim. $X_{t_0} = 0$ olmak üzere $k = 0,1, \ldots, N-1$ için

$$X(t_{k+1}) = X(t_k) + \hat{\eta}_k$$

olsun ve $n = 0,1,2, \ldots$ için

$$P(\hat{\eta}_k = n) = \exp(-\lambda h)\frac{(\lambda h)^n}{n!}$$

olacak biçimdeki rasgele $\hat{\eta}_k$ sayıları seçilsin. Böylece, $X(t_k)$, λ yoğunluklu $t_0, t_1, \ldots, t_N$ kesikli zamanlarında Poisson dağılımlıdır. $[0,1]$ üzerinde verilen düzgün dağılımlı η_k ile $\hat{\eta}_k$ bulmak için,

$$\sum_{j=0}^{\hat{\eta}_k - 1} \exp(-\lambda h)\frac{(\lambda h)^j}{j!} < \eta_k < \sum_{j=0}^{\hat{\eta}_k} \exp(-\lambda h)\frac{(\lambda h)^j}{j!}$$

ilişkisi kullanılır.

Örnek 3.11 Bir Wiener Sürecinin örnek yolunun simülasyonu

$[0, T]$ de $W(t)$ Wiener sürecini ele alalım. $h = T/N$ olmak üzere $k = 0,1,2, \ldots, N$ için ayrık $t_k = kh$ anında bu sürekli stokastik sürecin simülasyonunu inceleyelim. $X_{t_0} = 0$ olmak üzere $k = 0,1, \ldots, N-1$ için η_k, h varyansı ve 0 ortalamalı normal dağılımlı

$$X(t_{k+1}) = X(t_k) + \eta_k$$

olsun. Önceki örnekte olduğu gibi, sürekli stokastik sürecin her bir örnek yolu kesikli $t_0, t_1, \ldots, t_N$ zamanlarında hesaplanır. Böylece, $k = 0,1,2, \ldots, N$ için $W(t_k) = X(t_k)$ dir. $t \neq t_k$ anında herhangi bir k için, Örnek 2.11. de gösterildiği gibi sürekli doğrusal bir interpolasyon kullanılabilir. Özel olarak,

$$W(t) \approx X(t_k)\frac{t_{k+1} - t}{h} + X(t_{k+1})\frac{t_{k+1} - t}{h}$$

alınabilir.

Örnek 3.12 Bir Wiener sürecinin kesikli bir süreçle simülasyonu

$h = T/N$ olmak üzere $k = 0,1,2, \ldots, N$ için $t_k = kh$ olsun. Aşağıdaki yoldaki $0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ bölünmesi üzerinde $\{X_k\}_{k=0}^{N}$kesikli stokastik süreci tanımlansın. $X_0 = 0$ olsun ve $\frac{\lambda \Delta t}{2\delta^2} < 1$ olduğu kabul edildiğinde geçiş olasılıkları $p_{i,k} = P\{X_{n+1} = k\delta | X_n = i\delta\}$

$$p_{i,k}(t) = \begin{cases} \lambda\Delta t/2\delta^2 & k = i-1 \;\; için \\ 1 - \lambda\Delta t/\delta^2 & k = i \;\; için \\ \lambda\Delta t/2\delta^2 & k = i+1 \;\; için \end{cases}$$

olur. Daha sonra, Bölüm 3.2'de açıklandığı üzere, $\Delta t \to 0$ iken X_k için olasılık dağılımı $k \neq 0$ için $p_0(0) = 1$ ve $p_k(0) = 0$ olmak üzere

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{p_{k+1}(t) - 2p_k(t) + p_{k-1}(t)}{\delta^2}\right)$$

ileri Kolmogorov denklemini(forward Kolmogorov equation) sağlar. Küçük δ için, $p_k(t_n) = P(X(t_n) = k\delta)$, yaklaşık olarak $p(t_n, k\delta)\delta$ eşittir. Burada $p(t,x)$,

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = \frac{\lambda}{2}\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2} \qquad p(0,x) = \delta(x-0)\; ile$$

Kısmi diferensiyel denklemini sağlar. Kısmi diferensiyel denklemi çözerek,

$$p(t,x) = \frac{1}{(2\pi\lambda t)^{1/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\lambda t}\right)$$

bulunur. Özellikle, $\lambda = 1$, $\frac{\Delta t}{\delta^2} < 1$, ve küçük Δt için, X_n yaklaşık olarak $n\Delta t$ varyanslı ve 0 ortalamalı yakaşık normal dağılımlıdır. Ayrıca, $X_n - X_j$, $(n-j)\Delta t$ varyanslı ve 0 ortalamlı yaklaşık olarak normal dağılımlıdır ve $j > l$ için $X_l - X_m$ den bağımsızdır. Aslında,
$0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ bölünmesinde $\{X_k\}_{k=0}^N$, bir Wiener sürecine yaklaşır(benzer).

3.5 Örnekler

Stokastik süreçler fizik, biyoloji, meteoroloji ve finansta yaygındır. Gerçekten de, dinamik sistemler rastgele etkiler yaşadığında stokastik süreçler meydana gelir. Klasik bir fiziksel stokastik süreç, kararsız izotop atomlarının kendiliğinden diğer izotoplara dönüştüğü radyoaktif bozunmadır. Bir radyoaktif izotopun başlangıçta mevcut n_0 atomları olduğunu varsayalım. λ izotopun bozulma sabiti olsun. Bu, bir atomun küçük zaman aralığı Δt de dönüşüm olasılığının $\lambda\Delta t + O((\Delta t)^2)$'e eşit olduğu anlamına gelir. $N(t)$, t zamanındaki atom sayısı olsun. t anındaki beklenen atom sayısını yani $E\big(N(t)\big)$

yi bulmaya çalışalım. $p_n(t)$, t zamanında n atomun olma olasılığı olsun. Daha sonra, t zaman aralığında olası geçişleri dikkate alarak,

$$p_n(t+\Delta t) = p_{n+1}(t)\lambda(n+1)\Delta t + p_n(t)(1-\lambda n\Delta t) + O((\Delta t)^2)$$

elde edilir. Böylece, $\Delta t \to 0$ alındığında

$$\begin{cases} \dfrac{dp_{n_0}(t)}{dt} = -\lambda n_0 p_{n_0}(t) & p_n(0) = 1 \quad ile \\ \dfrac{dp_n(t)}{dt} = -\lambda n_0 p_n(t) + \lambda(n+1)p_{n+1}(t) & 0 \le n < n_0 \quad için \quad p_n(0) = 0 \quad ile \end{cases}$$

dir. Beklenen atom sayısı şimdi

$$E\big(N(t)\big) = \sum_{n=0}^{n_0} n p_n(t)$$

ve buradan

$$\frac{dE\big(N(t)\big)}{dt} = \sum_{n=0}^{n_0} n\frac{dp_n(t)}{dt}$$

olarak elde edilir. Böylece,

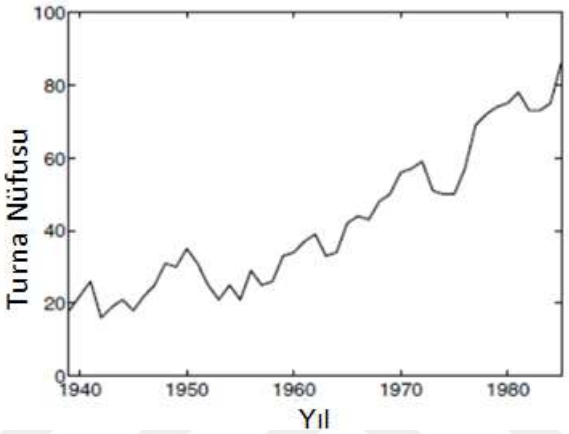
$$\begin{aligned} \frac{dE\big(N(t)\big)}{dt} = \sum_{n=0}^{n_0} n\frac{dp_n(t)}{dt} &= \sum_{n=0}^{n_0} -\lambda n^2 p_n(t) + \sum_{n=0}^{n_0-1} \lambda n(n+1)p_{n+1}(t) \\ &= \sum_{n=0}^{n_0} -\lambda n^2 p_n(t) + \sum_{n=1}^{n_0} \lambda(n-1)np_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^{n_0} \lambda n p_n(t) = -\lambda E(N(t)) \end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$\frac{dE\big(N(t)\big)}{dt} = -\lambda E\big(N(t)\big), \qquad E\big(N(0)\big) = n_0 \; ile$$

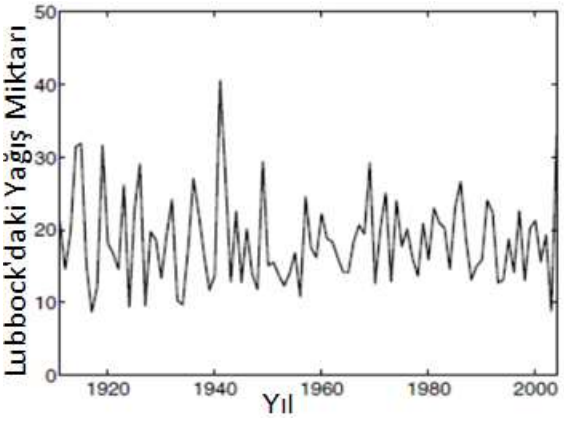
diferensiyel denklemi elde edilir. Bu nedenle, $E\big(N(t)\big) = n_0 \exp(-\lambda t)$, t zamanında beklenen atom sayısıdır.

Nüfus biyolojisi stokastik süreçler açısından zengindir. Matematiksel modeller bu rastgele biyolojik süreçleri anlamak için önemli araçlardır. Doğum-ölüm süreci kendi içinde rastgele bir süreçtir. Ayrıca, ortamdaki değişkenlik zaman ve mekansal olarak değişen ek rastgele etkiler getirir. Sonuç olarak, bir popülasyonun büyümesi rastgele davranış gösterir. Bu rastgele davranış boğmaca turnalarının Aransas-Wood Buffalo popülasyonunda da gözlenmektedir. 1939-1985 yılları arasındaki nüfus büyüklüğü, Şekil 3.3'te verilmektedir (Boyce 1987).



Şekil 3. 3 Arkansas-Wood Buffalo'daki turna nüfusu

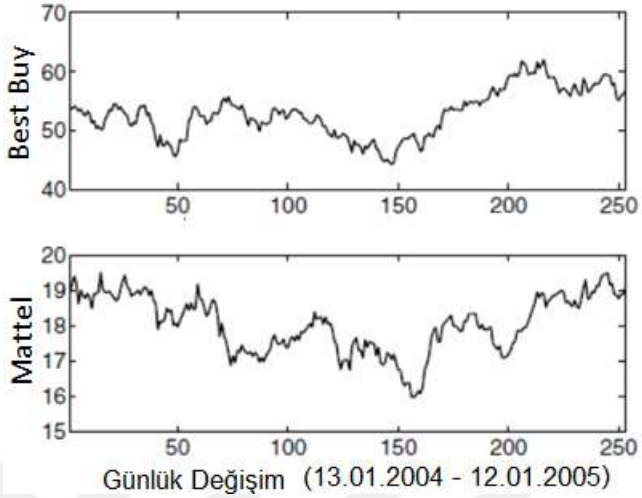
Yine birçok farklı etken nedeniyle, hava oldukça değişkendir ve iklimsel değişiklikler stokastik süreçler olarak düşünülebilir. Lubbock, Teksas'taki 1911-2004 arasındaki yıllık yağış miktarları Şekil 3.4'de verilmektedir. Bu veriler Wiener benzeri bir davranış sergilemektedir.



Şekil 3. 4 Lubbock'daki yıllık yağış miktarı (inç)

Fiziksel ve biyolojik olaylara ek olarak, nicel ve birçok belirsizlik içeren hisse senedi faaliyetleri gibi finans modelleri de rastgele bir davranış sergileyebilir. Şekil 3.5'te Best

Buy ve Mattel şirketlerinin hisse senedi fiyatları verilmiştir. Hisse senedi fiyatları, 13 Ocak 2004'ten 12 Ocak 2005'e kadar işlem gününün bir fonksiyonu olarak gösterilmektedir. (Allen 2010)



Şekil 3. 5 Best Buy Co. ve Mattel Inc. hisse senedi fiyatları

4. STOKASTİK İNTEGRASYON

Bu bölümde f ve g, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ üzerinde stokastik bir süreç olmak üzere $a \leq t \leq b$ için $\int_a^t f(s,\omega)ds$ ve $\int_a^t g(s,\omega)dW(s,\omega)$ integral formları ele alınacaktır. Eğer f ve g belirli koşulları karşılarsa ve H_{SS} Hilbert uzayında stokastik süreçler ise, integraller de bu Hilbert uzayında stokastik süreçler olacaktır. Bu integrallerin özellikleri, stokastik diferensiyel denklemlerin tartışıldığı bir sonraki bölümde incelenecektir.

Stokastik diferensiyel denklemler stokastik integraller şeklinde yazıldığından, stokastik integraller stokastik diferensiyel denklemlerin incelenmesinde önemlidir ve stokastik integrallerin özellikleri stokastik diferensiyel denklemlerin özelliklerini belirler. Bu bölümde integrallerin H_{SS} Hilbert uzayının elemanları olduğu varsayılmaktadır. Bu varsayım, stokastik integraller ve stokastik diferensiyel denklemler arasındaki ilişkinin kurulmasına yardımcı olur.

Bu tezde Itô stokastik integraller üzerinde durulmuş (Itô 1944, 1946) ve bazı önemli özellikler incelenmiştir. Itô stokastik integrallerine yaklaşan bir yöntem verilmiştir. Ardından stokastik diferensiyeller tanımlanmış ve bunun yardımıyla Itô formülü türetilmiştir. Itô formülü, bazı stokastik diferensiyel denklemlerin tam çözümlerinin elde edilmesini sağlayan önemli bir araçtır. Yine Itô formülü, stokastik diferensiyel denklemler için ilave önemli sonuçların elde edilmesine imkan sağlamaktadır. Son olarak, bir diğer yaygın olarak kullanılan stokastik integral olan Stratanovich stokastik integraline kısaca değinilmiştir (Stratanovich, 1966).

4.1 $\int_a^t f(s,\omega)ds$ Formundaki İntegraller

Bu kısımda, $a \leq t \leq b$ için

$$J(f) = J(f)(\omega) \equiv \int_a^b f(s,\omega)ds$$

ve

$$J(f)(t) = J(f)(t,\omega) \equiv \int_a^t f(s,\omega)ds$$

formundaki integralleri üzerinde durulacaktır. Bu integraller sırasıyla H_{SS} den H_{RD} ye ve H_{SS} den H_{SS} ye dönüşümlerdir. $f \in H_{SS}$ için ikinci integral H_{SS}'de bir stokastik süreç iken ilk integral H_{RD}'de bir rasgele değişkendir.

> ***Koşul (c1):*** *$f(a) \in H_{RD}$ olsun. Bu durumda, pozitif bir k_1 sabiti için $\|f(a)\|_{RD}^2 = E|f(a)|^2 \leq k_1$ dir.*
>
> ***Koşul (c2):*** *pozitif bir k_2 sabiti ve herhangi bir $t_1, t_2 \in [a,b]$ için $\|f(t_2) - f(t_1)\|_{RD}^2 = E|f(t_2) - f(t_1)|^2 \leq k_2|t_2 - t_1|$ dir.*
>
> ***Koşul (c3):*** *f, $[a,b]$ de öngörülemeyendir(nonanticipating).*

Eğer $f \in H_{SS}$ (c1) ve (c2) yi sağlarsa, bu durumda herhangi bir $t \in [a,b]$ için $\|f(t)\|_{RD} \leq k_2^{1/2}(b-a)^2 + \|f(a)\|_{RD}$ dir. $\|f(t)\|_{RD} \leq \|f(t) - f(a)\|_{RD} + \|f(a)\|_{RD}$ üçgen eşitsizliğinden sınırlılık özelliği elde edilir. Üçüncü durum, yani f'in $[a,b]$ de beklenmeyen (nonanticipating) olması esasen, $f(t,\omega)$ nın $t' > t$ olmak üzere t' anına bağlı olmadığı anlamına gelir. Bundan dolayı bütün $a \leq t \leq t' \leq b$ için

$$E\big(f(t)(W(t') - W(t)\big) = E\big(f(t)\big)E\big(W(t') - W(t)\big) = 0$$

dır. Örneğin, $a < t < b$ için $f_2(t) = W((t+b)/2)$ beklenmeyen iken $f_1(t) = 3\cos\big(W^2(t)\big) + 4W(t) - 5t$ beklenmeyendir. Aslında, $t' > t$ için

$$E\big(f(t)(W(t') - W(t)\big) = \begin{cases} t' - t & t < t' \leq (t+b)/2 \\ (b-t)/2 & (t+b)/2 \leq t' \leq b \end{cases}$$

iken

$$E\left(f_1(t)\big(W(t') - W(t)\big)\right) = 0$$

dir.

$f \in H_{SS}$ olmak üzere $J(f) = J(f)(\omega) \equiv \int_a^b f(s,\omega)ds$ in tanımını devam ettirmek için integralin f'e bir adım fonksiyonu ile yaklaştığı kabul edilecektir. Bilindiği üzere, $S_{SS} \subset H_{SS}$ adım foksiyonunun kümesinin H_{SS} de yoğundur. $m \to \infty$ iken $\max_{1 \leq i \leq m} |t_i - t_{i-1}| \to 0$ olmak üzere $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = b$, [a,b] nin parçalanmış ailesi olsun ve $i = 0,1,2,\ldots,N-1$ için

$$I_i(t) = \begin{cases} 1, & t_i \le t < t_{i+1} \\ 0, & diğer \end{cases}$$

olsun. Ayrıca, her bir i ve m için $f_i^{(m)} \in H_{RD}$ olmak üzere

$$f_m(t,\omega) = \sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)}(\omega) I_i(t)$$

S_{SS} de adım fonksiyonunun f'e yakınsak olan bir dizisi olsun. Burada, verilen bir $\epsilon > 0$ için $m \ge M$ olduğunda

$$\|f - f_m\|_{SS} < \epsilon$$

olacak biçimde bir $M > 0$ vardır. Öncelikle, $f_m(t,\omega)$ adım fonksiyonunun integrali, standart bir biçimde tanımlanır.

Tanım 4.1 $f_m(t,\omega) = \sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)}(\omega) I_i(t)$, S_{SS} nin bir elemanı olsun. $\int_a^b f_m(s)ds$ integrali $J(f_m)$ olarak ifade edilir ve

$$J(f_m) = \int_a^b f_m(s)ds = \sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)}(t_{i+1} - t_i)$$

olarak tanımlanır. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden $J(f_m) \in H_{RD}$ olduğu görülebilir ve

$$\|J(f_m)\|_{RD}^2 = E\left|\int_a^b f_m(s)ds\right|^2 \le \sum_{i=0}^{m-1}(t_{i+1} - t_i)\, E \sum_{i=0}^{m-1}\left|f_i^{(m)}\right|^2 (t_{i+1} - t_i)$$

$$= (b-a)E\int_a^b |f_m(s)|^2 ds = (b-a)\|f_m\|_{SS}^2$$

dir. Ayrıca,

$$\|J(f_m) - J(f_n)\|_{RD}^2 = E\left|\int_a^b (f_m(t) - f_n(t))dt\right|^2 \le (b-a)\|f_m - f_n\|_{SS}^2$$

$\{J(f_m)\}_{m=1}^{\infty}$ nin H_{RD} de bir Cauchy dizisi olup, bu nedenle H_{RD} de bir limiti vardır. $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$, H_{SS} de bir Cauchy dizisi olduğundan (*) ifadesinin sağ tarafı keyfi olarak

küçültülebilir. Buradan, $m \to \infty$ olduğunda $J(f_m)$, H_{SS} de yakınsaktır. Bu limit $J(f)$ olarak tanımlanır. Bu sonuçlar aşağıdaki tanımda özetlenmiştir.

Tanım 4.2 S_{SS} de $f \in H_{SS}$ ve $m \to \infty$ olmak üzere $\|f - f_m\|_{SS} \to 0$ olacak biçimdeki $\{J(f_m)\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi verildiğinde $\int_a^b f(s)ds$ integrali $J(f)$ olarak gösterilir ve

$$J(f) = \int_a^b f(s)ds = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)}(t_{i+1} - t_i)$$

ile tanımlanır.

Bu tanım ile oldukça faydalı bir eşitsizlik elde edilmiş olur. Tanımdan, eğer $\|f - f_m\|_{SS} \to 0$ ise bu durumda $\int_a^b f(s)ds = \lim_{m\to\infty} \int_a^b f_m(s)ds$ dir. Bununla birlikte, Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden, $E\left(\int_a^b f_m(s)ds\right)^2 \leq T\int_a^b E|f_m(s)|^2 ds$ dir. Bundan dolayı, $f \in H_{SS}$ için

$$E\left(\int_a^b f(s)ds\right)^2 \leq T\int_a^b E|f(s)|^2 ds$$

dir.

Ayrıca, $f \in H_{SS}$ nin (c2) eşitsizliğini sağladığını belirtelim, yani, herhangi bir $t_1, t_2 \in [a, b]$ olmak üzere pozitif k_2 sabiti için

$$\|f(t_2) - f(t_1)\|_{RD}^2 = E|f(t_2) - f(t_1)|^2 \leq k_2|t_2 - t_1|$$

dir, buradan $\Delta t = \frac{b-a}{m}$, $t_i = i\Delta t + a$ olmak üzere

$$\int_a^b f(s)ds = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m-1} f(t_i)\Delta t$$

olur ve limit H_{RD}'dedir. Bu sonuç $f_m(t) = \sum_{i=0}^{m-1} f(t_i)\, I_i(t)$ olduğunu gösterir. $m \to \infty$ için $\|f - f_m\|_{SS} \to 0$ olduğu anlaşılmaktadır.

Şimdi $a \leq t \leq b$ için $f \in H_{SS}$ olmak üzere $J(f) = J(f)(t, \omega) \equiv \int_a^t f(s, \omega)ds$ formundaki integrali göz önüne alalım. Bu durumda, $a \leq t \leq b$ deki her bir t değeri için bu integral Tanım 3.2. deki şekilde tanımlanır. Bununla birlikte bu integral H_{SS} 'deki

stokastik bir süreci H_{SS} 'deki başka bir stokastik sürece dönüştürür. Aslında, $\|J(f)\|_{SS} \leq (b-a)\|f\|_{SS}/\sqrt{2}$ dir. Bunu görmek için, Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve Fubini Teoremi aşağıdaki biçimde uygulanır.

$$\|J(f)\|_{SS}^2 = \int_a^b E\left|\int_a^t f(s)ds\right|^2 dt \leq \int_a^b E\left(\int_a^t |f(s)|^2 ds\right)(t-a)dt$$
$$\leq \int_a^b (t-a)\left(\int_a^b E|f(s)|^2 ds\right)dt = \frac{(b-a)^2}{2}\|f\|_{SS}^2.$$

Ek olarak, $[a,b]$ üzerinde t'ye bağlı olarak $J(f)(t) = \int_a^t f(s)ds$ integralinin H_{RD}'de sürekli olduğunun bilinmesi yararlı olacaktır. Bunu görmek için

$$\|J(f)(t_1) - J(f)(t_2)\|_{RD}^2 = E\left(\int_{t_1}^{t_2} f(s)ds\right)^2 \leq |t_2 - t_1|\|f\|_{SS}^2$$

olduğuna dikkat ediniz. Aşağıdaki iki örnek ele alınsın.

Örnek 4.3 Bir Wiener süreç fonksiyonunun integrasyonu

$W(t)$, $[0,T]$ aralığında bir Wiener süreci olmak üzere $J(e^{-W}) = \int_0^T \exp\big(-W(t)\big)\,dt$ ele alalım. Bu örnek için,

$$E\big(J(e^{-W})\big) = E\int_0^T \exp\big(-W(t)\big)\,dt = E\int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-W(t))^k}{k!}dt$$
$$= \int_0^T E\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-W(t))^k}{k!}dt = \int_0^T \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\frac{t}{2})^j}{j!}dt = \int_0^T e^{t/2}dt = 2\big(e^{T/2}-1\big)$$

olduğuna dikkat edilmelidir.

4.2 Itô Stokastik İntegralleri

Bu kısımda, $a \leq t \leq b$ için $I(f) = I(f)(\omega) = \int_a^b f(s,\omega)dW(s,\omega)$ ve $I(f) = I(f)(t,\omega) = \int_a^t f(s,\omega)dW(s,\omega)$ şeklindeki integraller ele alınacaktır. Bu integraller, sırasıyla H_{SS}'den H_{RD}'ye ve H_{SS}'den H_{SS}'ye dönüşümlerdir. Önceki bölümde olduğu gibi, $f \in H_{SS}$ stokastik sürecinin (c1), (c2) ve (c3) koşullarını sağladığı varsayılmıştır.

$I(f) = I(f)(\omega) = \int_a^b f(s,\omega)dW(s,\omega)$ stokastik integralini ele alalım. Önceki bölümde açıklanan $J(f)$ stokastik integralleri için yapıldığı gibi, $I(f)$ ilk olarak $f_m \in S_{SS} \subset H_{SS}$ temel fonksiyonları için tanımlanmıştır. Özel olarak, $a \le c \le d \le b$ için $\int_a^b dW(t)$ integrali $W(d) - W(c)$ olacak biçimde tanımlanır. $\int_a^b f_m(t)dW(t)$ integrali Tanım 4.5'te verilmiştir. $[a,b]$ nin bir parçalanması $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = b$ bölünmesi olsun.

$$I(f_m) = I(f_m)(\omega) = \int_a^b f_m(t,\omega)dW(t,\omega) = \int_a^b \sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)}(\omega)I_i(t)dW(t,\omega)$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)}(\omega)(W(t_{i+1},\omega) - W(t_i,\omega)) = \sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)}(\omega)\Delta W_i$$

dir. Burada $i = 0,1,2,\dots,N-1$ için,

$$\Delta W_i = \Delta W_i(\omega) = W(t_{i+1},\omega) - W(t_i,\omega)$$

ve

$$I_i(t) = \begin{cases} 1, & t_i \le t \le t_{i+1} \\ 0, & diğer \end{cases}$$

dir.

Tanım 4.5 Adım fonksiyonları için stokastik integral

$f_m(t,\omega) = \sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)}(\omega)I_i(t)$ için olmak üzere $f_m \in S_{SS}$ beklenmeyen ve her i ve m için $f_i^{(m)} \in H_{RV}$ olsun. Bu durumda $\int_a^b f_m(s)dW(s)$ integrali

$$I(f_m) = \int_a^b f_m(s)dW(s) = \sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)}\Delta W_i$$

ile tanımlıdır. Burada $\Delta W_i = W(t_{i+1}) - W(t_i)$ dir.

$I(f_m) \in H_{RD}$ ve $i = 0,1,\dots,m-1$ için $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ olmak üzere

$$\|I(f_m)\|_{RD}^2 = E\left|\sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)}\Delta W_i\right|^2 = \sum_{i=0}^{m-1}\left\|f_i^{(m)}\right\|_{RD}^2 \Delta t_i = \int_a^b E|f_m(t)|^2 dt = \|f_m\|_{SS}^2$$

olduğunu ifade edelim. Bu nedenle, $f_m \in S_{SS}$ için, $\|I(f_m)\|_{RD} = \|f_m\|_{SS}$ dir.

Şimdi f, (c1) -(c3) koşullarını sağlamak üzere $f \in H_{SS}$ olduğunu göz önüne alalım. $i = 0,1,\dots,m$ ve $\Delta t = (b-a)/m$ için $t_i^{(m)} = i\Delta t + a$ olmak üzere $[a,b]$ nin bir parçalanma ailesini $a = t_0^{(m)} < t_1^{(m)} < \cdots < t_m^{(m)} = b$ biçiminde tanımlayalım. $\{f_m\}_{m=0}^{\infty} \subset S_{SS}$ dizisini de

$$I_i^{(m)}(t) = \begin{cases} 1, & t_i^{(m)} \le t \le t_{i+1}^{(m)} \\ 0, & diğer \end{cases}$$

olmak üzere

$$f_m(t,\omega) = \sum_{i=0}^{m-1} f(t_i^m, \omega) I_i^{(m)}(t)$$

biçiminde tanımlansın. (c2) den,

$$\|f - f_m\|_{SP}^2 = \int_a^b E|f(t) - f_m(t)|^2 dt = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i^{(m)}}^{t_{i+1}^{(m)}} E|f(t) - f_m(t)|^2 dt$$

$$\le k_2 \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i^{(m)}}^{t_{i+1}^{m}} \left(t - t_i^{(m)}\right) dt = \frac{k_2}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{b-a}{m}\right)^2 = \frac{k_2 (b-a)^2}{2m}$$

dir. Buradan, $m \to \infty$ iken $f_m \to f$ dir. $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$ dizisi S_{SS} de $f \in H_{SS}$ ye yakınsak olan bir Cauchy dizisidir. $m = 0,1,2,\dots$ için $I(f_m) \in H_{RD}$ ele alalım. Özellikle, $m, n \to \infty$ iken

$$\|I(f_m) - I(f_n)\|_{RD}^2 = E\left(\int_a^b (f_m(t) - f_n(t))\, dW(t)\right)^2 = \|f_m - f_n\|_{SS}^2 \to 0$$

olur. $\{I(f_m)\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi H_{RD} de bir Cauchy dizisidir, bu nedenle H_{RD} de bir limiti vardır. Buradan $f \in H_{SS}$ için $\int_a^b f(t)dW(t)$ 'in aşağıdaki şekilde verilir.

Tanım 4.6 $\int_a^b f(s)dW(s)$ Itô stokastik integrali

$f \in H_{SS}$ (c1)-(c3) koşullarını sağlasın. $\int_a^b f(t)dW(t)$ integrali $t_i^{(m)} = a + i\left(\frac{b-a}{m}\right)$ ve H_{RD} de yakınsak olmak üzere

$$I(f) = \lim_{m\to\infty} \int_a^b f_m(t)dW(t) = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m-1} f(t_i^{(m)}) \left(W\left(t_{i+1}^{(m)}\right) - W\left(t_i^{(m)}\right) \right)$$

olarak tanımlanır.

Şimdi de $f \in H_{SS}$ olmak üzere $a \leq t \leq b$ için

$$I(f) = I(f)(t,\omega) = \int_a^t f(s,\omega)dW(s,\omega)$$

biçimindeki stokastik integralini ele alalım. Burada yine f'in (c1)-(c3) koşullarını sağladığı kabul edilmektedir. $J(f)$ integralinde olduğu gibi, bu integral $[a,b]$ 'deki her bir t değeri için Tanım 4.6'da olduğu gibi tanımlanabilir. Bu durumda, I, H_{SS} Hilbert uzayından yine H_{SS}'ye bir dönüşümdür (yani $I: H_{SS} \to H_{SS}$). Çizelge 4.1. deki (d) özelliğinden,

$$\|I(f)\|_{SP}^2 = \int_a^b E\left|\int_a^t f(s)dW(s)\right|^2 dt = \int_a^b \int_a^t E|f(s)|^2 ds\, dt \leq (b-a)\|f\|_{SP}^2.$$

Ek olarak, Her bir $t \in [a,b]$ için $I(f)(t) \in H_{RD}$ $[a,b]$ üzerindeki t değişkenine göre H_{RV} de süreklidir. Bunu görmek için (c2) koşulundan, $\|f(t)\|_{RD} \leq k_2^{1/2}(b-a)^{1/2} + \|f(a)\|_{RD}$ kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|I(f)(t_2) - I(f)(t_1)\|_{RD}^2 &= E\left|\int_{t_1}^{t_2} f(s)dW(s)\right|^2 = \int_{t_1}^{t_2} E|f(s)|^2 ds \\
&\leq 2\int_{t_1}^{t_2} E|f(s) - f(t_1)|^2 ds + 2\int_{t_1}^{t_2} E|f(t_1)|^2 ds \\
&\leq k_2(t_2 - t_1)^2 + 2|t_2 - t_1|\|f(t_1)\|_{RD}^2 \\
&\leq |t_2 - t_1|(5k_2(b-a) + 4\|f(a)\|_{RD}^2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Özet olarak, $\int_a^t f(s)dW(s)$ aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 4.7. $\int_a^t f(s)dW(s)$ Itô stokastik integrali

$f \in H_{SS}$ (c1)-(c3) koşullarını sağlasın. $\int_a^t f(t)dW(t)$ integrali $t_i^{(m)} = a + i\left(\frac{t-a}{m}\right)$ ve H_{RD} de yakınsak olmak üzere

$$I(f) = I(f)(t) = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m-1} f\left(t_i^{(m)}\right)\left(W\left(t_{i+1}^{(m)}\right) - W\left(t_i^{(m)}\right)\right)$$

olarak tanımlanır.

$f \in H_{SS}$ için $J(f) = \int_a^b f(t,\omega)dt$ ve $I(f) = \int_a^b f(t,\omega)dW(t,\omega)$ integrallerinin bazı önemli ve kullanışlı özellikleri Çizelge 4.1 de listelenmiştir. $J(f)$ integrali (a) ve (b) özelliklerini sağlayıp (c) ve (d) özelliklerini sağlamazken $I(f)$, (a)-(d) özelliklerinin tamamını sağlar. (a)-(d) özelliklerinde, $f, g \in H_{SS}$'nin (c1)-(c3) şartlarını sağladıkları ve c'nin bir sabit olduğu kabul edilmektedir.

Çizelge 4. 1 Ito stokastik integrallerinin bazı özellikleri

	Özellik
(a)	$I(f+g) = I(f) + I(g)$
(b)	$I(cf) = cI(f)$
(c)	$E\big(I(f)\big) = 0$
(d)	$E\lvert I(f)\rvert^2 = \int_a^b E\lvert f(t)\rvert^2 dt$

İspat: (c) özelliğini ispatlamak için,

$$f_m(t) = \sum_{i=0}^{m-1} f\left(t_i^{(m)}\right) I_i^{(m)}(t) \quad \text{olmak üzere} \quad I(f) = \lim_{m\to\infty} I(f_m)$$

ve

$$I_i^{(m)}(t) = \begin{cases} 1, & t_i^{(m)} \le t \le t_{i+1}^{(m)} \\ 0, & di\check{g}er \end{cases}$$

olsun. Bu durumda, verilen bir $\epsilon > 0$ için $m > M$ olduğunda $\|I(f) - I(f_m)\|_{RD} < \epsilon$ olacak biçimde bir M vardır. Lyapunov eşitsizliğinden, $m > M$ için

$$\left|E\big(I(f) - I(f_m)\big)\right| \le (E|I(f) - I(f_m)|^2)^{1/2} < \epsilon$$

sağlanır. İlave olarak, m nin her değeri için

$$E\big(I(f_m)\big) \le E\left(\sum_{i=0}^{m-1} f\big(t_i^{(m)}\big)\Delta W_i\right) = 0$$

olduğu görülür. Yukarıdakiler özetlenirse, $m > M$ için

$$|E(I(f))| \le \big|E\big(I(f) - I(f_m)\big)\big| + \big|E\big(I(f_m)\big)\big| < \epsilon$$

dir. ϵ keyfi olmak üzere, $E\big(I(f)\big) = 0$'dır.

(d) özelliğini kanıtlamak için, üçgen eşitsizliğinden,

$$\|I(f_m)\|_{RD} - \|I(f) - I(f_m)\|_{RD} \le \|I(f)\|_{RD} \le \|I(f_m)\|_{RD} + \|I(f) - I(f_m)\|_{RD}$$

dir. Buradan, $m > M$ için

$$\|I(f_m)\|_{RD} - \epsilon \le \|I(f)\|_{RD} \le \|I(f_m)\|_{RD} + \epsilon$$

olur. Bununla birlikte, $m \to \infty$ iken

$$\|I(f_m)\|_{RD} = \left(\sum_{i=0}^{m-1} E\left|f\big(t_i^{(m)}\big)\right|^2 \frac{b-a}{m}\right)^{1/2} \to \left(\int_a^b E|f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

olduğunu görmek kolaydır. ϵ keyfi olduğundan,

$$\|I(f)\|_{RD}^2 = E\left|\int_a^b f(t)dW(t)\right|^2 = \int_a^b E|f(t)|^2 dt$$

elde edilip ispat tamamlanır.

Örnek 4.8 Stokastik integralin ortalaması ve kare ortalaması

$I(f) = \int_0^1 tdW(t)$ olsun. Itô integralinin (c) ve (d) özelliklerinden,

$$E(I(f)) = 0 \quad \text{ve} \quad E(|I(f)|^2) = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

elde edilir.

Örnek 4.9 Stokastik integralin ortalaması ve kare ortalaması

$I(f) = \int_0^1 W(t)dW(t)$ olsun. Itô integralinin (c) ve (d) özelliklerinden,

$$E(I(f)) = 0 \quad ve \quad E(|I(f)|^2) = \int_0^1 E|W(t)|^2 dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

dir.

4.3 Stokastik İntegrallerde Yaklaşım

Stokastik integrallere nasıl yaklaşım sağlanabileceğini anlamak hem kavramsal hem de pratik açısından gereklidir. İlk olarak (c1)-(c3) şartlarını sağlayan bir $f \in H_{SS}$ için, $J(f) = \int_a^b f(t)dt$ nin bir yaklaşımını göz önüne alalım. $i = 0,1,\dots,N$ için $t_i = a + i\Delta t$ ve $\Delta t = (b-a)/N$ olmak üzere [a,b] nin bir parçalanması $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$ olsun.

$$J(f) \approx J_N(f) = \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i)\Delta t$$

olmak üzere $J_N(f), J(f)$ e bir yaklaşım olsun. Buradan,

$$\|J(f) - J_N(f)\|_{RD}^2 = E\left|\int_a^b f(t)\,dt - \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i)\Delta t\right|^2 = E\left|\sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \big(f(t) - f(t_i)\big)dt\right|^2$$

$$\leq (b-a)\sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} E|f(t) - f(t_i)|^2 dt$$

$$\leq k_2(b-a)\sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} (t - t_i)dt = \frac{(b-a)^3 k_2}{2N}$$

$\|J_N(f) - J(f)\|_{RD} = O\big(1/\sqrt{N}\big)$ sonucu elde edilir.

Şimdi (c1) ve (c3) şartlarını sağlayan $f \in H_{SS}$ için, $J(f) = \int_a^b f(t)dWt$ nin bir yaklaşımını ele alalım. $i = 0,1,\dots,N$ için $t_i = a + i\Delta t$ olmak üzere [a,b] nin bir parçalanması $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$ olsun.

$$I(f) \approx I_N(f) = \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i)\eta_i \quad \text{ve} \quad \eta_i = W(t_{i+1}) - W(t_i)$$

olmak üzere $I_N(f), I(f)$ ye bir yaklaşım olsun. Bu yaklaşımdaki hata hesaplandığında

$$\|I(f)-I_N(f)\|_{RD}^2 = E\left|\int_a^b f(t)\,dWt - \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i)\eta_i\right|^2$$

$$= E\left|\sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\big(f(t)-f(t_i)\big)dWt\right|^2 = \sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} E|f(t)-f(t_i)|^2 dt$$

$$\le k_2\sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}(t-t_i)dt = \frac{(b-a)^2k_2}{2N}.$$

elde edilir. Bu integralin yaklaşımı da H_{RD} normuna göre $O\big(1/\sqrt{N}\big)$ dir.

Yaklaşımda, $J_N(f)$ veya $I_N(f)$ 'de ilgili integralin yalnızca bir örnek yolu için tahmin edildiğine dikkat edilmelidir. Stokastik integralleri içeren beklentileri tahmin etmek için birçok örnek yola ihtiyaç vardır. Örneğin, $g(I(f))$ fonksiyonunun beklenen değerinin tahmin edileceğini varsayarsak, bu durumda $I_N^{(j)}(f)$ ifadesi $j = 1,2,\dots,M$ için j-inci örnek yol olmak üzere

$$E\left(g\big(I(f)\big)\right) \approx \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} g\left(I_N^{(j)}(f)\right)$$

şeklindedir. Şimdi aşağıdaki örneği ele alalım.

Örnek 4.10 Bir Itô integralinin yaklaşımı

Bu örnekte, $\int_0^1 tW(t)dW(t)$ stokastik integralini ele alalım. İntegralin beklenen değerini ve integralin karesinin beklenen değerini M=1.000.000 örnek yollarını alınarak tahmin edelim. $N = 4,8,16,\dots,256$ olmak üzere, [0,1] de kullanılan aralıkların sayısı N dir. Bu problem için önceki yaklaşık yöntem kullanılarak, $i = 0,1,2,\dots,N$ olmak üzere $t_i^{(N)} = i/N$ ve $\alpha = 1$ veya 2 için açıkça

$$E((I(f))^\alpha) = E\left(\int_0^1 tW(t)dW(t)\right)^\alpha$$

$$\approx \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\left(\sum_{i=0}^{N-1} t_i^{(N)}W^{(j)}\left(t_i^{(N)}\right)\left(W^{(j)}\left(t_{i+1}^{(N)}\right)-W^{(j)}\left(t_i^{(N)}\right)\right)\right)^\alpha$$

dir. $\eta_i^{(j)} \sim N(0,1)$ olmak üzere $\left(W^{(j)}\left(t_{i+1}^{(N)}\right) - W^{(j)}\left(t_i^{(N)}\right)\right) = \eta_i^{(j)}/\sqrt{N}$ olduğuna dikkat edilmelidir ve ayrıca $W^{(j)}\left(t_i^{(N)}\right) = W^{(j)}\left(t_{i-1}^{(N)}\right) + \eta_{i-1}^{(j)}/\sqrt{N}$ dir. Hesaplama sonuçları $M = 1.000.000$ örnek yolu için Çizelge 4.2'de verilmiştir. N arttıkça sonuçların iyileştiğine dikkat edilmelidir. Tam sonuçlar ise $E\big(I(f)\big) = 0$ ve $E\left(\big(I(f)\big)^2\right) = 0{,}25$ dir. (Allen 2010)

Çizelge 4. 2 Örnek 4.11 için tahminlemelerin hesaplanması

N nin değeri	$\lvert E(I(f))\rvert$	$E\left(\big(I(f)\big)^2\right)$
2^2	0.00107	0.14071
2^3	0.00012	0.19151
2^4	0.00069	0.21906
2^5	0.00038	0.23508
2^6	0.00007	0.24209
2^7	0.00001	0.24486
2^8	0.00002	0.24821

4.4 Stokastik Diferensiyeller ve Itô Formülü

Bu kısımda,

$$X(t) = X(a) + \int_a^t f(s)ds + \int_a^t g(s)dW(s) \quad ; \quad a \le t \le b \tag{4.1}$$

stokastik süreci ele alınacaktır. Burada f ve g (c1)-(c3) koşullarını sağlayan fonksiyonlar ve $f, g \in H_{SS}$, $X(a) \in H_{RD}$'dir.

İlk olarak, $\int_a^t f(s)ds \in H_{SS}$ ve $\int_a^t g(s)dW(s) \in H_{SS}$ olduğunda bu durumda $X \in H_{SS}$ olduğuna dikkat edilmelidir. Diğer taraftan, f (veya g), (c1)-(c3) şartlarını sağladığında, $a \le t \le b$ için

$$\|f(t)\|_{RD} \le \|f(t) - f(a)\|_{RD} + \|f(a)\|_{RD} \le k_2^{1/2}(b-a)^{1/2} + \|f(a)\|_{RD}$$

olduğundan, herhangi bir $t \in [a, b]$ için,

$$E|f^2(t)| \leq 2k_2(b-a) + 2\|f(a)\|_{RD}^2$$

dir. Son olarak, $X(t)$ 'nin H_{RD}'da $a \leq t \leq b$ için sürekli stokastik bir süreç olduğunu görmek mümkündür. Yani, verilen bir $\epsilon > 0$ ve $t_1, t_2 \in [a,b]$ için $|t_1 - t_2| < \delta$ olduğunda $\|X(t_1) - X(t_2)\|_{RD} < \epsilon$ olacak biçimde $\delta > 0$ vardır. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
\|X(t_1) - X(t_2)\|_{RD}^2 &= E\left|\int_{t_1}^{t_2} f(s)\,ds + \int_{t_1}^{t_2} g(s)dW(s)\right|^2 \\
&\leq 2E\left|\int_{t_1}^{t_2} f(s)\,ds\right|^2 + 2E\left|\int_{t_1}^{t_2} \big(g(s) - g(t_1) + g(t_1)\big)dW(s)\right|^2 \\
&\leq 2(t_2 - t_1)\int_{t_1}^{t_2} E|f(s)|^2 ds + 4\int_{t_1}^{t_2} E|g(s) - g(t_1)|^2 ds \\
&\quad + 4\int_{t_1}^{t_2} E|g(t_1)|^2 ds \\
&\leq 2(t_2 - t_1)\|f\|_{SS}^2 + 2k_2(t_2 - t_1)^2 + 4(t_2 - t_1)E|g(t_1)|^2 \\
&\leq 2(t_2 - t_1)(\|f\|_{SS}^2 + 5k_2(b-a)^2 + 4\|g(a)\|_{RD}^2).
\end{aligned}$$

Ayrıca, önceki eşitsizlikten $|t_2 - t_1| \to 0$ olduğunda $P(|X(t_1) - X(t_2)| \geq \epsilon) \to 0$ 'dir. Yani X, olasılıkla [a, b] üzerinde sürekli örnek yollarına sahiptir.

Eğer X, (4.1) denklemini sağlıyorsa $a < t < b$ için

$$dX(t) = f(t)dt + g(t)dW(t) \tag{4.2}$$

stokastik diferensiyel denklemini sağlar denir.

Önemli bir sonuç, $X(t)$ stokastik sürecinin düzgün bir fonksiyonu olan $F(t, X(t))$ ' nin de stokastik bir diferensiyeli karşıladığını söyleyen Itô formülüdür. $G: [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu üzerindeki aşağıdaki iki koşul, bu teoremi belirleme ve kanıtlamada gereklidir:

> ***Koşul (c4):*** $G: [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için, her $t_1, t_2 \in [a,b]$ ve her $X \in H_{SS}$ için
>
> $$E\big|G\big(t_2, X(t_2)\big) - G\big(t_1, X(t_1)\big)\big|^2 \leq k_3(|t_2 - t_1| + E|X(t_2) - X(t_1)|^2)$$
>
> olacak biçimde negatif olmayan bir k_3 sabiti vardır.

Koşul (c5): $G:[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için, $X(a)\in H_{RD}$ ise bu durumda $G(a,X(a))\in H_{RD}$ dir.

Teorem 4.12 (Itô Formülü)

f ve g (c1)-(c3) koşullarını, ve $t\in[a,b]$ için $X\in H_{SS}$ (4.1)'i sağlasın ve

$$\|f^2(t)\|_{RD},\|g^2(t)\|_{RD}\le k_4$$

olsun. F, t ve x in

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t},\frac{\partial F(t,x)}{\partial x},\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x^2},\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial t^2},\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x\partial t}\quad t\in[a,b]\ \ ve\ \ x\in\mathbb{R}$$

sürekli kısmi türevlerine sahip bir fonksiyonu olsun. F'in ve bu türevlerin (c4) ve (c5) koşullarını sağladığını ve ayrıca

$$f(t)\frac{\partial F(t,x)}{\partial x},\ \frac{1}{2}g^2(t)\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x^2},\ g(t)\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}$$

fonksiyonlarının da (c4) ve (c5) koşullarını sağladığını kabul edelim.

$$\tilde{f}(t,x)=\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}+f(t)\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}+\frac{1}{2}g^2(t)\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x^2}$$

ve

$$\tilde{g}(t,x)=g(t)\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}$$

olsun. Bu durumda, F'in stokastik diferensiyeli,

$$dF\big(t,X(t)\big)=\tilde{f}\big(t,X(t)\big)dt+\tilde{g}\big(t,X(t)\big)dWt \tag{4.3}$$

ile tanımlıdır.

Aşağıda Itô formülünün uygulamalarına ilişkin bazı örnekler verilmiştir. Sonraki bölümde de ilave örnekler verilecektir.

Örnek 4.11 Bir Itô integralinin basitleştirilmesi

$\int_0^t sdW(s)$ stokastik integralini ele alalım. $dX(t)=dW(t)$ olsun, böylece $g=1$ ve $f=0$ dır. $F(t,x)=tx$ olsun. Itô formülünü kullanarak,

$$\int_0^t d\big(sW(s)\big) = \int_0^t W(s)ds + \int_0^t sdW(s).$$

Böylece,

$$\int_0^t sdW(s) = -\int_0^t W(s)ds + tW(t).$$

Örnek 4.12. Bir Itô integralinin hesaplanması

$\int_0^t W(s)dW(s)$ stokastik integralini ele alalım. $dX(t) = dW(t)$ olsun. Buradan $g = 1$ ve $f = 0$'dır. $F(t,x) = \frac{1}{2}x^2$ olsun. Itô formülünden,

$$\int_0^t d\left(\frac{1}{2}W^2(s)\right) = \int_0^t \frac{1}{2}ds + \int_0^t W(s)dW(s)$$

Böylece,

$$\int_0^t W(s)dW(s) = \frac{1}{2}\big(W^2(t) - W^2(0)\big) - \frac{t}{2}.$$

Örnek 4.13. İki katlı stokastik integralin basitleştirilmesi

$dX(t) = W(t)dt$ ve $X(0) = 0$ olsun. Bu durumda $f = W$ ve $g = 0$ dır. $F(t,x) = tx$ olsun. Itô formülünden,

$$d\big(tX(t)\big) = \big(X(t) + tW(t)\big)dt.$$

Böylece,

$$tX(t) = \int_0^t X(s)ds + \int_0^t sW(s)ds.$$

Diğer taraftan $X(t) = \int_0^t W(s)ds$. Böylece, Örnek 4.11'i kullanarak,

$$\int_0^t \int_0^s W(z)dzds = t\int_0^t W(s)ds - \int_0^t sW(s)ds = (t+1)\int_0^t W(s)ds - tW(t)$$

elde edilir.

4.5 Stratonovich Stokastik İntegrali

$j = 0,1,2,\dots,m$ için $t_i^{(m)} = a + \left(\frac{b-a}{m}\right) j$ olmak üzere, Itô stokastik integrali;

$$\int_a^b f(t,\omega)dW(t,\omega) = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m-1} f\left(t_i^{(m)},\omega\right)\left(W\left(t_{i+1}^{(m)},\omega\right) - W\left(t_i^{(m)},\omega\right)\right)$$

ile tanımlıdır ve bu toplamın H_{RD} de yakınsak olduğu önceki kısımdan bilinmektedir. Ayrıca, $f\left(t_i^{(m)}\right)$ ve $\Delta W_i^{(m)} = \left(W\left(t_{i+1}^{(m)}\right) - W\left(t_i^{(m)}\right)\right)$ bağımsız olduğundan,

$$E\left|\int_a^b f(t)dW(t)\right|^2 = \int_a^b E|f(t)|^2 dt$$

gibi kullanışlı sonuçlar da mevcuttur. Bununla birlikte, stokastik integralleri tanımlamanın alternatif yolları olduğunu belirtmekte fayda vardır. Itô stokastik integralinin yanında, en iyi bilinen stokastik integral Stratonovich stokastik integralidir. Stratonovich integrali, ("∘" işareti Stratonovich integrali olduğunu belirtmek üzere)

$$\int_a^b f(t) \circ dW(t) = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{2}\left(f\left(t_i^{(m)}\right) + f\left(t_{i+1}^{(m)}\right)\right)\left(W\left(t_{i+1}^{(m)}\right) - W\left(t_i^{(m)}\right)\right)$$

biçiminde tanımlanır. Toplamdaki, $f\left(t_i^{(m)}\right) + f\left(t_{i+1}^{(m)}\right)$ ve $W\left(t_{i+1}^{(m)}\right) - W\left(t_i^{(m)}\right)$ nin bağımsız olması muhtemel değildir. Sonuç olarak, Itô ve Stratonovich integralleri genellikle farklı değerlere sahiptir.

Örneğin,

$$\int_0^t W(s)dW(s) \quad \text{ve} \quad \int_0^t W(s) \circ dW(s)$$

integrallerini ele alalım. Örnek 4.12'den, bu Itô integralinin değerinin

$$\int_0^t W(s)dW(s) = \frac{1}{2}(W^2(t) - W^2(0)) - \frac{t}{2}$$

olduğu bilinmektedir. Şimdi Stratonovich integrali ele alınacaktır. Stratonovich integralinin yukarıdaki tanımı ele alındığında,

$$\int_0^t W(s) \circ dW(s) = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{2}\left(W\left(t_{i+1}^{(m)}\right) + W\left(t_i^{(m)}\right)\right)\left(W\left(t_{i+1}^{(m)}\right) - W\left(t_i^{(m)}\right)\right)$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{2}\left(W^2\left(t_{i+1}^{(m)}\right) - W^2\left(t_i^{(m)}\right)\right) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2}\left(W^2(t) - W^2(0)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(W^2(t) - W^2(0)\right)$$

elde edilir. Böylece

$$\int_0^t W(s)dW(s) - \int_0^t W(s) \circ dW(s) = -\frac{t}{2}$$

elde edilir.

Sonraki bölümde Itô stokastik diferensiyel denklemleri incelenecektir. Itô stokastik diferensiyel denklemleri doğal olarak Itô integralini içerir. Bölüm 5'te açıklanan modelleme süreçleri, doğal bir şekilde, bir Itô stokastik diferensiyel denklem modeli üretmektedir. Bununla birlikte, Stratonovich stokastik diferensiyel denklemler, Itô integralinden ziyade Stratonovich integralleri kullanılarak tanımlanabilir. Itô ve Stratonovich stokastik diferensiyel denklemlerinin yakından ilişkili oldukları da belirtilmelidir. Özellikle,

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f\left(s, X(s)\right)ds + \int_0^t g\left(s, X(s)\right) \circ dW(s)$$

Stratonovich stokastik diferensiyel denklemini sağlayan X(t),

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \left(f\left(s, X(s)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial g(s\left(X(s)\right)}{\partial x} g\left(s, X(s)\right) \right) ds$$

$$+ \int_0^t g\left(s, X(s)\right)dW(s)$$

Itô stokastik diferensiyel denklemini de sağlar.

5. STOKASTİK DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Bu bölümde, Itô stokastik diferensiyel denklemleri ele alınacaktır. H_{SS} Hilbert uzayında stokastik diferensiyel denklemin belirli koşullar altında bir tek çözümünün varlığı kanıtlanmıştır. Bu bölüm boyunca stokastik diferensiyel denklemlerin gösterimini basitleştirmek için H_{RD} ve H_{SS} Hilbert uzayları kullanılacaktır. İlk olarak stokastik diferensiyel denklemlerin çeşitli özellikleri elde edilecek ve daha sonra, bu özellikler ve Itô formülü yardımıyla belirli stokastik diferensiyel denklemlerin kesin çözümleri ve çözümlerin momentleri elde edilecektir. Ardından, stokastik diferensiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek için çeşitli sayısal yöntemler verilmiş ve hesaplama örnekleri sunulmuştur. Son olarak, ayrık bir zaman kümesinden veriler yardımıyla, bir stokastik diferensiyel denklemdeki parametreleri tahmin etmek için bir prosedür tanımlanmıştır. Stokastik diferensiyel denklemler için teori, uygulama ve sayısal yöntemler alanında literatürde birçok önemli çalışma mevcuttur (Arnold 1974, Kloeden ve Platen, E. 1992, Protter P. E. 2004, Oksendahl B. 1998, Henderson D. ve Plaschko P. 2006, Allen E. 2007, Pazdziorek 2014, Liu ve Pan 2018).

$[0,T]$ aralığındaki bir Itô stokastik diferensiyel denklem, $0 \leq t \leq T$ için $X(0,\cdot) \in H_{RV}$ olmak üzere;

$$X(t,\omega) = X(0,\omega) + \int_0^t f\big(s, X(s,\omega)\big)ds + \int_0^t g\big(s, X(s,\omega)\big)dW(s,\omega) \qquad (5.1)$$

veya diferensiyel formda,

$$dX(t,\omega) = f\big(t, X(t,\omega)\big)dt + g\big(t, X(t,\omega)\big)dW(t,\omega) \qquad (5.2)$$

şeklindedir. f fonksiyonu genellikle stokastik diferensiyel denklemin sapma katsayısı olarak adlandırılırken, g difüzyon katsayısı olarak adlandırılır. f ve g fonksiyonlarının öngörülemeyen oldukları (nonanticipating) ve bazı sabit $k \geq 0$ için aşağıdaki koşulları (c6) ve (c7) sağladığı varsayılmaktadır.

Koşul (c6): $0 \leq s,t \leq T$ ve $x,y \in \mathbb{R}$ için

$$|f(t,x) - f(s,y)|^2 \leq k(|t-s| + |x-y|^2).$$

Koşul (c7): $0 \le t \le T$ ve $x \in \mathbb{R}$ için $|f(t,x)|^2 \le k(1+|x|^2)$.

(5.1) 'in çözümlerinin varlığını ve tekliğini incelemeden önce, f ve g fonksiyonlarının (c6) ve (c7) koşullarını karşılayan bazı özelliklerini araştırmak faydalı olacaktır. İlk olarak, $u(t) = f\big(t, X(t)\big)$ ve (c7) koşulunun $X \in H_{SS}$ olduğunda $u \in H_{SS}$ anlamına geldiğine dikkat edilmelidir, ve elbette aynı durum g fonksiyonu için de geçerlidir. Aslında, $X \in H_{SS}$ için

$$\|u\|_{SP}^2 = \int_0^T E|f(t,X(t)|^2 dt \le \int_0^T k(1+E|X(t)|^2)dt \le kT + k\|X\|_{SP}^2$$

dir. Şimdi (c6) koşulunu ele alalım. (c6) koşulu verilen $t_1 \in [0,T]$ ve $\epsilon > 0$ için $\|X-Y\|_{SS} < \delta = \epsilon/k^{1/2}$ olduğunda $\|f(t_1,X) - f(t_1,Y)\|_{SS} < \epsilon$ olduğu anlamına gelir. Ek olarak, verilen $X \in H_{SS}$ ve $\epsilon > 0$ için $|t_2 - t_1| < \delta = \epsilon^2/kT$ olduğunda $\|f(t_1,X) - f(t_2,X)\|_{SS} < \epsilon$ dir. İlk eşitsizliği görmek için,

$$\begin{aligned}\|f(t_1,X) - f(t_1,Y)\|_{SS}^2 &= \int_0^T E\big|f\big(t_1,X(t)\big) - f\big(t_1,Y(t)\big)\big|^2 dt \\ &\le \int_0^T kE|X(t)-Y(t)|^2 dt = k\|X-Y\|_{SS}^2\end{aligned}$$

ele alalım. Böylece, $\|X-Y\|_{SS} < \epsilon/k^{1/2}$ ise bu durumda $\|f(t_1,X) - f(t_1,Y)\|_{SS} < \epsilon$ olur. İkinci eşitsizliği görmek için,

$$\begin{aligned}\|f(t_1,X) - f(t_2,X)\|_{SS}^2 &= \int_0^T E\big|f\big(t_1,X(t)\big) - f\big(t_2,X(t)\big)\big|^2 dt \le \int_0^T kE|t_2-t_1|dt \\ &= kT|t_2-t_1|\end{aligned}$$

dir. Böylece, $|t_2 - t_1| < \epsilon^2/kT$ ise bu durumda $\|f(t_1,X) - f(t_2,X)\|_{SS} < \epsilon$ olur. Ayrıca, $X \in H_{SS}$ olduğunda, (c6) ve (c7) koşulları Itô formülünü (5.2)'ye uygulamada kolaylık sağlar.

5.1 Tek Çözümün Varlığı

Bu bölümde, f ve g (c6) ve (c7) koşullarını sağladığında (5.1) 'i sağlayan $X \in H_{SS}$ çözümünün varlık ve teklik ispatı verilecektir. Bu çözüm güçlü bir çözüm olarak adlandırılır ve tek bir örnek yola sahiptir. Buna karşılık, buradaki çözümlerin örnek yolları farklı olsa bile, aynı olasılık dağılımına sahiplerse, çözümler zayıf anlamda

tektirler. Varlık ve tekliği göstermek için, H_{SS}'de bir Cauchy fonksiyon dizisi oluşturulacaktır. Bu dizinin limiti (5.1)'in çözümü olacaktır. Süreçte bir Picard iteratif dizisi kullanılmaktadır.

$X(0) \in H_{RD}$ başlangıç koşulu olmak üzere dizinin ilk elemanı $X_0(t) = X(0)$ olsun. $X_0 \in H_{SS}$'dir. $X_1(t)$,

$$X_1(t) = X_0(t) + \int_0^t f\big(s, X_0(s)\big)ds + \int_0^t g\big(s, X_0(s)\big)dW(s)$$

ile tanımlansın. f ve g (c6) ve (c7) koşullarını sağladığından ve $X_0 \in H_{SS}$ olduğundan, $X_1 \in H_{SS}$ ve

$$\|X_1 - X_0\|_{SS} \leq \big(k(2T^2 + 2T^3)\big)^{1/2}(1 + \|X_0\|_{RD}^2)^{1/2}$$

dir ve bu eşitsizlik aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
\|X_1 - X_0\|_{SS}^2 &= \int_0^T E\left|\int_0^t f\big(s, X_0(s)\big)ds + \int_0^t g\big(s, X_0(s)\big)dW(s)\right|^2 dt \\
&\leq 2\int_0^T \left(E\left|\int_0^t f\big(s, X_0(s)\big)ds\right|^2 + E\left|\int_0^t g\big(s, X_0(s)\big)dW(s)\right|^2\right)dt \\
&\leq 2\int_0^T \left(t\int_0^t E\big|f\big(s, X_0(s)\big)\big|^2 ds + \int_0^t E\big|g\big(s, X_0(s)\big)\big|^2 ds\right)dt \\
&\leq 2\int_0^T (T + T^2)k(1 + \|X_0\|_{RD}^2)dt = k(2T^2 + 2T^3)(1 + \|X_0\|_{RD}^2)
\end{aligned}$$

Bu prosedür devam ettirilerek, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H_{SS}$ dizisi $n \geq 1$ için tekrarlandığında

$$X_n(t) = X_0(t) + \int_0^t f\big(s, X_{n-1}(s)\big)ds + \int_0^t g\big(s, X_{n-1}(s)\big)dW(s)$$

olur. H_{SS}'de bu dizinin Cauchy dizisi olduğunu görmek için

$$\begin{aligned}
&X_{n+1}(t) - X_n(t) \\
&\qquad = \int_0^t \Big(f\big(s, X_n(s)\big) - f\big(s, X_{n-1}(s)\big)\Big)ds \\
&\qquad + \int_0^t \Big(g\big(s, X_n(s)\big) - g\big(s, X_{n-1}(s)\big)\Big)dW(s)
\end{aligned}$$

olduğuna dikkat edilmelidir. Bu nedenle, $L = 2Tk + 2k$ olmak üzere

$$E|X_{n+1}(t) - X_n(t)|^2$$

$$\leq 2t \int_0^t E\left|f\left(s, X_n(s)\right) - f\left(s, X_{n-1}(s)\right)\right|^2 ds$$

$$+ 2 \int_0^t E\left|g\left(s, X_n(s)\right) - g\left(s, X_{n-1}(s)\right)\right|^2 ds$$

$$\leq 2tk \int_0^t E|X_n(s) - X_{n-1}(s)|^2 ds + 2k \int_0^t E|X_n(s) - X_{n-1}(s)|^2 ds$$

$$\leq (2Tk + 2k) \int_0^t E|X_n(s) - X_{n-1}(s)|^2 ds$$

$$= L \int_0^t E|X_n(s) - X_{n-1}(s)|^2 ds$$

dir. $a_n(t) = E|X_{n+1}(t) - X_n(t)|^2$ olsun. Bu durumda yukarıdaki eşitsizlikten,

$$a_n(t) \leq L \int_0^t a_{n-1}(s_1) ds_1 \leq L^2 \int_0^t \int_0^{s_1} a_{n-2}(s_2) ds_2 ds_1 \leq \cdots$$

$$\leq L^n \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{n-1}} a_0(s_n) ds_n \dots ds_2 ds_1$$

olur ve bu nedenle,

$$a_n(t) \leq L^n \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{n-1}} a_0(s_n) ds_n \dots ds_2 ds_1$$

dir. Bu son eşitsizlik

$$a_n(t) \leq \frac{L^n t^{n-1}}{(n-1)!} \|X_1 - X_0\|_{SS}^2$$

anlamına gelir ve buradan

$$\|X_{n+1} - X_n\|_{SS}^2 \leq \frac{L^n T^n}{n!} \|X_1 - X_0\|_{SS}^2$$

elde edilir. $m > n$ olsun. Üçgen eşitsizliğinin tekrar uygulanmasıyla,

$$\begin{aligned}\|X_m - X_n\|_{SS} &\le \|X_m - X_{m-1}\|_{SS} + \|X_{m-1} - X_n\|_{SS} \\ &\le \|X_m - X_{m-1}\|_{SS} + \|X_{m-1} - X_{m-2}\|_{SS} + \cdots + \|X_{n+1} - X_n\|_{SS} \\ &\le \left[\left(\frac{L^n T^n}{n!}\right)^{1/2} + \left(\frac{L^{n+1} T^{n+1}}{(n+1)!}\right)^{1/2} + \cdots + \left(\frac{L^m T^m}{m!}\right)^{1/2}\right] \|X_1 - X_0\|_{SS} \\ &\le \left(\frac{L^n T^n}{n!}\right)^{1/2} \left[1 + \cdots + \left(\frac{L^{m-n} T^{m-n}}{(n+1)(n+2)\ldots m}\right)^{1/2}\right] \|X_1 - X_0\|_{SS} \\ &\le 2\left(\frac{L^n T^n}{n!}\right)^{1/2} \|X_1 - X_0\|_{SS}\end{aligned}$$

$n, m \ge 4LT$ olduğu varsayılarak elde edilmiş olur. $\|X_1 - X_0\|_{SS}$ sınırlı olduğunda, önceki eşitsizlikten, verilen bir $\epsilon > 0$ ve $n, m > N$ için $\|X_1 - X_0\|_{SS} < \epsilon$ olacak biçimde bir $N > 0$ vardır. Bundan dolayı $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi H_{SS}'de Cauchy dizisidir ve $n \to \infty$ iken X_n tek bir X'e yakınsar. Y aşağıdaki

$$Y(t) = -X(t) + X(0) + \int_0^t f\big(s, X(s)\big)ds + \int_0^t g\big(s, X(s)\big)dW(s)$$

bağıntısını sağlamak üzere $Y \in H_{SS}$ olsun.

$$0 = -X_n(t) + X(0) + \int_0^t f\big(s, X_{n-1}(s)\big)ds + \int_0^t g\big(s, X_{n-1}(s)\big)dW(s)$$

ve $n \to \infty$ iken $\|X - X_n\|_{SS} \to 0$ olduğunda, $\|Y\|_{SS} = 0$ olduğu açıktır. Bu nedenle $X(t)$, (5.1) denkleminin H_{SS}'deki tek çözümüdür.

5.2 Stokastik Diferensiyel Denklemlerin Çözümlerinin Özellikleri

Bu kesimde stokastik diferensiyel denklemlerin çözümlerinin bazı özellikleri verilmiştir. İlk teorem (5.1)'in çözümünün $\|X\|_{SS}^2 \le 3T(\|X(0)\|_{RD}^2 + kT^2 + kT)\exp\big(3k(T + T^2)\big)$ eşitsizliğini sağladığını göstermektedir. İkinci teorem (5.1)'in çözümünün $\|\cdot\|_{RD}$ normuna göre $[0, T]$ de sürekli olduğunu belirtmektedir. Özel olarak, verilen bir $\epsilon > 0$ için $|t - r| < \delta$ olduğunda $\|X(t) - X(r)\|_{RD} < \epsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ vardır.

Teorem 5.1. (Çözümlerin sınırlılığı)

f ve g fonksiyonlarının (c6) ve (c7) koşullarını sağladığını ve $X \in H_{SS}$ nin (5.1)'in çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$E|X(t)|^2 \leq 3(E|X(0)|^2 + kT^2 + kT)\exp\big(3k(T+T^2)\big) \qquad 0 \leq t \leq T \; için$$

dir.

İspat:

$$\begin{aligned} E|X(t)|^2 &\leq E\left|X(0) + \int_0^t f\big(s,X(s)\big)ds + \int_0^t g\big(s,X(s)\big)dW(s)\right|^2 \\ &\leq 3E|X(0)|^2 + 3E\left|\int_0^t f\big(s,X(s)\big)ds\right|^2 + 3E\left|\int_0^t g\big(s,X(s)\big)dW(s)\right|^2 \\ &\leq 3E|X(0)|^2 + 3t\int_0^t E\big|f^2\big(s,X(s)\big)\big|ds + 3\int_0^t E\big|g^2\big(s,X(s)\big)\big|ds \\ &\leq 3E|X(0)|^2 + (3t+3)k\int_0^t E|1+X^2(s)|ds \\ &\leq 3E|X(0)|^2 + (3t^2+3t)k + (3T+3)k\int_0^t E|X^2(s)|ds \end{aligned}$$

$a(t) = E|X^2(t)|$ ve $b(t) = 3E|X^2(0)| + (3t^2+3t)k$ alınırsa yukarıdaki eşitsizlik

$$a(t) \leq b(t) + (3T+3)k\int_0^t a(s)ds$$

biçiminde yazılır. Bellman-Gronwall eşitsizliği kullanılarak,

$$a(t) \leq b(t) + (3T+3)k\int_0^t \exp\big(k(3T+3)(t-s)\big)b(s)ds$$

elde edilir. $b(t)$, $[0,T]$ de arttıkça,

$$a(t) \leq b(t) + b(t)(3T+3)k\int_0^t \exp\big(k(3T+3)(t-s)\big)ds$$

olur. Böylece $0 \leq t \leq T$ için

$$E|X(t)|^2 \leq 3(E|X(0)|^2 + kT^2 + kT)\exp\big(3k(T+T^2)\big)$$

dir.

Teorem 5.2. (Çözümlerin $[0,T]$ üzerinde sürekliliği)

f ve g fonksiyonlarının (c6) ve (c7) koşullarını sağladığını ve $X \in H_{SS}$ nin (5.1)'in çözümü olduğunu kabul edelim. $c \geq 0$ bir sabit olsun, $0 \leq r,\ t \leq T$ için

$$E|X(t) - X(r)|^2 \leq c|t - r|$$

dir. Özellikle, verilen bir $\epsilon < 0$ için $|t - r| < \delta$ olduğunda $\|X(t) - X(r)\|_{RD} < \epsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ vardır.

İspat:

$$X(t) - X(r) = \int_r^t f\big(s, X(s)\big)ds + \int_r^t g\big(s, X(s)\big)dW(s)$$

olduğu açıktır. Bununla birlikte önceki teorem $0 \leq s \leq T$ için $E|X(s)|^2 \leq M$ olacak biçimde $M > 0$ olduğunu söyler. Bu eşitsizlik ve (c7) koşulu kullanılarak,

$$\begin{aligned} E|X(t) - X(r)|^2 &\leq 2|t - r| \int_r^t E\big|f\big(s, X(s)\big)\big|^2 ds + 2\int_r^t E\big|g\big(s, X(s)\big)\big|^2 ds \\ &\leq 2|t - r|k\int_r^t (1 + E|X(s)|^2)ds + 2k\int_r^t (1 + E|X(s)|^2)ds \\ &\leq |t - r|\big(2k|t - r|(1 + M) + 2k(1 + M)\big) \leq c|t - r| \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $c = 2k(T + 1)(1 + M)$'dir.

Uyarı 5.3. Bellman-Gronwall eşitsizliği:

Eğer $a(t) \leq b(t) + c\int_0^t a(s)ds$ ise $a(t) \leq b(t) + c\int_0^t \exp\big(c(t - s)\big)\, b(s)ds$ dir.

5.3 Itô Formülü ve Tam Çözüm

Bu bölümde, (5.2) stokastik diferensiyel denklemi için Itô formülü açıklanmıştır. Ardından, Itô formülünü göstermek için birkaç örnek verilmiştir. Bu formül yardımıyla bazı stokastik diferensiyel denklemlerin tam çözümleri elde edilebilmektedir. Ayrıca, tam çözüm bulunamasa da, bazı problemler için çözümün tam momentlerinin belirlenmesinde Itô formülünün nasıl kullanılabileceği gösterilmiştir.

$0 \leq t \leq T$ ve $X(0) \in H_{RD}$ için

$$dX(t) = f\big(t, X(t)\big)dt + g\big(t, X(t)\big)dW(t)$$

diferensiyel formdaki Itô stokastik diferensiyel denklemini ele alalım. F'in düzgün bir fonksiyon olduğunu ve Teorem 4.12 koşullarının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, Itô formülü, X'in (5.2) stokastik diferensiyelini sağladığı $F(t, X)$'e uygulanabilir. Bu da bize F için, aşağıdaki

$$dF\big(t, X(t)\big) = \left(\frac{\partial F(t,X)}{\partial t} + f(t,X)\frac{\partial F(t,X)}{\partial x} + \frac{1}{2}g^2(t,X)\frac{\partial^2 F(t,X)}{\partial x^2}\right)dt + g(t,X)\frac{\partial F(t,X)}{\partial x}dW(t)$$

stokastik diferensiyel denklemini verir. Burada $\frac{\partial F(t,X)}{\partial x} = \frac{\partial F(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=X}$ dir.

Itô formülü, bazı stokastik diferensiyel denklemler için çözümün momentlerinin belirlenmesini sağlar. Bu momentleri bulmak için, önceki bölümde elde edilen

$$E\left(\int_0^t G\big(t, X(t)\big)dW(t)\right) = 0$$

bağıntısı kullanışlı olacaktır. İki ilginç örneği ele almadan önce, stokastik diferensiyel denklemlerde aşağıdaki durumların göz önüne alınması gerektiğine dikkat edelim. Örneğin, (5.2)'yi sağlayan X için $F(t, X) = X^2$ fonksiyonuna Itô formülü uygulandığında,

$$d\big(X^2(t)\big) = \big[2X(t)f\big(t, X(t)\big) + g^2\big(t, X(t)\big)\big]dt + \big[2X(t)g\big(t, X(t)\big)\big]dW(t)$$

dir. Dikkat edilmelidir ki, özel olarak

$$d\big(X^2(t)\big) \neq 2X(t)dX(t) = 2X(t)\big[f\big(t, X(t)\big)dt + g\big(t; X(t)\big)dW(t)\big]$$

dir. Şimdi iki farklı stokastik diferensiyel denklem için çözümlerin tam momentlerini belirlemek üzere Itô formülünün kullanıldığı aşağıdaki örnekleri ele alalım.

Örnek 5.4. Lineer katsayılı bir SDD için tam momentlerin bulunması

$$dX(t) = dt + X(t)dW(t), \quad X(0) = 0$$

stokastik diferensiyel denklemini ele alalım. Burada

$$X(t) = t + \int_0^t X(s)dW(s)$$

dir. Diğer yandan

$$E\big(X(t)\big) = t$$

dir. $F(t,X) = X^2$ ye Itô formülü uygulanırsa $\big(f(t) = 1,\ g(t) = X(t)\big)$

$$d\big(X^2(t)\big) = [2X(t) + X^2(t)]dt + 2X^2(t)dW(t)$$

olup, buradan

$$E\big(X^2(t)\big) = E\int_0^t \big(2X(s) + X^2(s)\big)ds$$

elde edilir. Bu ise, $E\big(X^2(t)\big)$ için $E\big(X^2(0)\big) = 0$ başlangıç koşulu olmak üzere

$$\frac{dE\big(X^2(t)\big)}{dt} = 2E\big(X(t)\big) + E\big(X^2(t)\big) = 2t + E\big(X^2(t)\big)$$

formunda düz türevli bir lineer diferensiyel denklemdir. Bu diferensiyel denklemin çözümü $X(t)$'nin ikinci momentini verir:

$$E\big(X^2(t)\big) = -2t - 2 + 2e^t.$$

Ek olarak, $Var\big(X(t)\big) = E\big(X^2(t)\big) - \Big(E\big(X(t)\big)\Big)^2 = 2e^t - 2 - 2t - t^2$ olduğu açıktır. Daha yüksek dereceli momentler bulmak için bu yöntemle devam edilebilir. Eğer Itô formülü $F(t,X) = X^3$ 'e uygulanırsa

$$d\big(X^3(t)\big) = [3X^2(t) + 3X^3(t)]dt + 3X^3(t)dW(t)$$

elde edilir. Bu, $E\big(X^3(t)\big)$ için $E\big(X^3(0)\big) = 0$ olmak üzere

$$\frac{dE(X^3(t))}{dt} = 3E\big(X^2(t)\big) + 3E\big(X^3(t)\big) = -6t - 6 + 6e^t + 3E\big(X^3(t)\big)$$

biçimindeki diferensiyel denklemi verir. Bu diferensiyel denklem çözülerek $X(t)$'nin üçüncü momenti aşağıdaki şekilde elde edilir;

$$E\big(X^3(t)\big) = 2t + \frac{8}{3} - 3e^t + \frac{1}{3}e^{3t}.$$

Örnek 5.5 Lineer olmayan bir Stokastik Diferensiyel Denklemin tam momentlerinin bulunması

$$dX(t) = -\frac{1}{4}X^3(t)dt + \frac{1}{2}X^2(t)dW(t)\,, \qquad X(0) = \frac{1}{2}$$

stokastik diferensiyel denklemini ele alalım. Bu örnekte, $E\big(X(t)\big)$ ve $E\big(X^3(t)\big)$ tam olarak belirlenecektir. İlk olarak,

$$dE\big(X(t)\big) = -\frac{1}{4}E\big(X^3(t)\big)dt\,, \qquad E\big(X(0)\big) = \frac{1}{2}$$

Burada $E\big(X(t)\big)$ yi bulmak için $E\big(X^3(t)\big)$ gereklidir. Bununla birlikte, Itô formülünü stokastik diferensiyel denkleme uygulayarak, $E\big(X^3(0)\big) = \frac{1}{8}$ olmak üzere,

$$dX^3(t) = \left[-\frac{3}{4}X^5(t) + \frac{3}{4}X^5(t)\right]dt + \frac{3}{2}X^4(t)dW(t) = \frac{3}{2}X^4(t)dW(t)$$

elde edilir. Böylece, $E\big(X^3(t)\big) = \frac{1}{8}$ ve ardından $E\big(X(t)\big) = \frac{1}{2} - \frac{1}{32}t$ bulunur.

Örnek 5.6 Lineer Olmayan bir Stokastik Diferensiyel Denklemin Momenti

$$dX(t) = \left[\frac{1}{3}X^{1/3}(t) + 6X^{2/3}(t)\right]dt + X^{2/3}(t)dW(t), \quad X(0) = 1$$

stokastik diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Bu örnekte, yine $E\big(X(t)\big)$ ve $E\big(X^3(t)\big)$ tam olarak hesaplanmaya çalışılacaktır. İlk olarak,

$$dE\big(X(t)\big) \neq \left[\frac{1}{3}\Big(E\big(X(t)\big)\Big)^{1/3} + 6\Big(E\big(X(t)\big)\Big)^{2/3}\right]dt$$

olduğundan uygun bir değişken değişimi gerekli olduğuna dikkat edilmelidir. $n = 0,1,2,\dots,6$ için

$$Y_n(t) = \big(X(t)\big)^{n/3}$$

olsun. Daha sonra, Itô formülü uygulanarak, stokastik diferensiyeller $n = 0,1,2,\dots,6$ için $Y_n(0) = 1$ olmak üzere

$$dY_n(t) = \left[\frac{1}{18}(n^2 - n)X^{\frac{n-2}{3}}(t) + 2nX^{\frac{n-1}{3}}(t)\right]dt + \left[\frac{n}{3}X^{\frac{n-1}{3}}(t)\right]dW(t)$$

elde edilir. $X^{\frac{n-2}{3}}(t) = Y_{n-2}(t)$ ve $X^{\frac{n-1}{3}}(t) = Y_{n-1}(t)$'in yerine yazılmasıyla, $n = 0,1,2, \dots ,6$ için

$$dY_n(t) = \left[\frac{1}{18}(n^2 - n)Y_{n-2}(t) + 2nY_{n-1}(t)\right]dt + \left[\frac{n}{3}Y_{n-1}(t)\right]dW(t)$$

elde edilir. Son olarak, $Z_n(t) = E\big(Y_n(t)\big) = E\left(\big(X(t)\big)^{n/3}\right)$ alınarak, başlangıç-değer sistemi $n = 1,2, \dots 6$ için $Z_n(0) = 1$ ve $Z_0(t) = 1$ olmak üzere

$$\frac{dZ_n(t)}{dt} = \frac{1}{18}(n^2 - n)Z_{n-2}(t) + 2nZ_{n-1}(t)$$

olarak elde edilir. $n = 1,2,3$ ve $n = 6$ için sistem çözümlenirse

$$Z_1(t) = E\left(\big(X(t)\big)^{1/3}\right) = 2t + 1$$

$$Z_2(t) = E\left(\big(X(t)\big)^{2/3}\right) = 4t^2 + \frac{37}{9}t + 1$$

$$Z_3(t) = E\big(X(t)\big) = 8t^3 + \frac{38}{3}t^2 + \frac{19}{3}t + 1$$

$$Z_6(t) = E\left(\big(X(t)\big)^2\right) = 64t^6 + \frac{656}{3}t^5 + \frac{2660}{9}t^4 + \frac{49145}{243}t^3 + \frac{665}{9}t^2 + \frac{41}{3}t + 1$$

sonuçları elde edilir. Özel olarak, $E(X(1)) = 28$ ve $E\big(X^2(1)\big) = 869{,}0206$ dir.

Itô stokastik diferensiyel denklemlerinin tam çözümlerini bulmak çoğunlukla zordur, fakat Itô formülünü uygun şekilde uygulamak kolaylık sağlar. Aşağıdaki iki örnekte, Itô formülü yardımıyla tam çözümler elde edilmiştir.

Örnek 5.7 Bir stokastik diferensiyel denklemin tam çözümü

$\alpha, \sigma \; ve \; X_0$ sabitler olmak üzere

$$dX(t) = -\alpha X(t)dt + \sigma dW(t), \quad X(0) = X_0$$

stokastik diferensiyel denklemini ele alalım. $F(t, X) = e^{\alpha t}X(t)$ olsun. Itô formülünden,

$$d\big(e^{\alpha t}X(t)\big) = [\alpha e^{\alpha t}X(t) - \alpha e^{\alpha t}X(t)]dt + \sigma e^{\alpha t}dW(t)$$

elde edilir. Böylece,

$$e^{\alpha t}X(t) - X(0) = \int_0^t e^{\alpha s}\sigma dW(s)$$

dir. Buradan tam çözüm

$$X(t) = X(0)e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s}\sigma dW(s)$$

bulunur.

Örnek 5.8 Bir stokastik diferensiyel denklemin tam çözümü

X_0 sabit olmak üzere

$$dX(t) = f(t)X(t)dt + g(t)X(t)dW(t), \quad X(0) = X_0$$

stokastik diferensiyel denklemini ele alalım. Bu problem için tam çözüm

$$X(t) = X_0 \exp\left(\int_0^t \left(f(s) - \frac{1}{2}g^2(s)\right)ds + \int_0^t g(s)dW(s)\right)$$

biçimindedir. Bunu görmek için, $F(t,X) = \ln\big(X(t)\big)$ alalım. Itô formülü uygulanarak,

$$d\big(\ln\big(X(t)\big)\big) = \left[f(t) - \frac{1}{2}g^2(t)\right]dt + g(t)dW(t)$$

olup, buradan

$$\ln\big(X(t)\big) - \ln(X_0) = \int_0^t \left(f(s) - \frac{1}{2}g^2(s)\right)ds + \int_0^t g(s)dW(s)$$

çözümü elde edilir.

Örnek 5.9 Stokastik diferensiyel denklemin tam çözümü

$$dX(t) = \left(\frac{2}{5}X^{3/5}(t) + 5X^{4/5}(t)\right)dt + X^{4/5}(t)dW(t), \quad X(0) = 1$$

stokastik diferansiyel denklemini ele alalım. $F\big(t,X(t)\big) = \big(X(t)\big)^{1/5}$ için tam çözümü bulalım. Burada,

$$f\big(t,X(t)\big) = \frac{2}{5}X^{3/5}(t) + 5X^{4/5}(t)$$

$$g\big(t, X(t)\big) = X^{4/5}(t)$$

olarak Ito formülüne uygulanırsa,

$$d\left(X^{1/5}\right) = \left(\frac{1}{5}X^{-4/5}\left(\frac{2}{5}X^{3/5} + 5X^{4/5}\right) + \frac{1}{2}X^{8/5}\left(-\frac{4}{25}X^{-9/5}\right)\right)dt$$
$$+ X^{4/5}\left(\frac{1}{5}X^{-4/5}\right)dW = dt + \frac{1}{5}dW$$

Buradan,

$$X(t)^{1/5} = t + \frac{1}{5}W(t) + C$$

elde edilir. $X(0) = 1$ olduğundan yerine konursa $C = 1$ bulunur ki, tam çözüm,

$$X(t) = \left(t + 1 + \frac{1}{5}W(t)\right)^5$$

olur.

Örnek 5.10 Stokastik diferensiyel denklemin tam çözümü

a, b, c reel sabitler ve $t \geq 0$ için $X(t)'$nin

$$dX(t) = \big(a + bX(t)\big)dt + cdW(t) \qquad X(0) = X_0$$

stokastik diferansiyel denklemini sağladığını kabul edelim. α'nın hangi değeri için

$$d(X(t)e^{\alpha t}) = ae^{\alpha t}dt + ce^{\alpha t}dW(t) \tag{5.3}$$

denklemini sağladığını bulup tam çözümü elde edelim.

$F(t, X) = e^{\alpha t}X$ alınsın. $f(t, X) = a + bX$ ve $g(t, X) = c$ dir.

$\frac{\partial F(t,X)}{\partial t} = \alpha e^{\alpha t}X$, $\frac{\partial F(t,X)}{\partial x} = e^{\alpha t}$ ve $\frac{\partial^2 F(t,X)}{\partial x^2} = 0$

bulunur, Ito formülü uygulanırsa,

$$d(Xe^{\alpha t}) = \left(\alpha e^{\alpha t}X + (a + bX)e^{\alpha t} + \frac{1}{2}c^2.0\right)dt + ce^{\alpha t}dW$$
$$= (\alpha e^{\alpha t}X + ae^{\alpha t} + be^{\alpha t}X)dt + ce^{\alpha t}dW$$
$$= \big((\alpha + b)e^{\alpha t}X + ae^{\alpha t}\big)dt + ce^{\alpha t}dW$$

Burada $\alpha = -b$ alındığında (5.3) denklemini sağlar. Genel çözüm,

$$Xe^{\alpha t} = \frac{a}{\alpha}e^{\alpha t} + c\int_0^t e^{\alpha s}dW(s) + K$$

$$X = \frac{a}{\alpha} + ce^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s}dW(s) + Ke^{-\alpha t}$$

dir. $X(0) = X_0$ ise

$$X_0 = \frac{a}{\alpha} + c\int_0^0 e^{\alpha s}dW(s) + K$$

olduğundan $K = X_0 - \frac{a}{\alpha}$ bulunur. Bu durumda tam çözüm,

$$X(t) = \frac{a}{\alpha} + \left(X_0 - \frac{a}{\alpha}\right)e^{\alpha t} + ce^{\alpha t}\int_0^t e^{\alpha t}dW(s)$$

$$= X_0e^{\alpha t} + \frac{a}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) + ce^{\alpha t}\int_0^t e^{\alpha t}dW(s)$$

şeklinde elde edilir.

5.4 Stokastik Diferensiyel Denklemlere Yaklaşım

Stokastik bir diferensiyel denklemin kesin çözümünün elde edilmesi genellikle zor olduğundan, sayısal olarak yaklaşık çözümler aramak çoğunlukla tercih edilir. Euler (veya Euler-Maruyama) yöntemi basit bir sayısal yöntemdir. (5.2) ye uygulandığında, $i = 0,1,2,\dots,N-1$ için ω örnek yolu temsil ettiğinde $X_i(\omega) \approx X(t_i,\omega),\ t_i = i\Delta t,\ \Delta t = \frac{T}{N}$, $\Delta W_i(\omega) = \big(W(t_{i+1},\omega) - W(t_i,\omega)\big) \sim N(0,\Delta t)$ olmak üzere Euler yöntemi,

$$X_{i+1}(\omega) = X_i(\omega) + f\big(t_i, X_i(\omega)\big)\Delta t + g\big(t_i, X_i(\omega)\big)\Delta W_i(\omega), \quad X_0(\omega) = X(0,\omega)$$

biçimine sahiptir. Kolaylık açısından, burada incelenen örneklerde yalnızca eşit zaman aralıkları dikkate alınacaktır.

Stokastik diferensiyel denklemler için yüksek mertebeden sayısal yöntemler, adi diferensiyel denklemlerdekine benzer şekillerde geliştirilebilir. Örneğin, Stokastik diferensiyel denklemler için açık (veya kapalı) çok adımlı yöntemler ve Runge-Kutta yöntemleri mevcuttur. Popüler bir ikinci dereceden yöntemi Milstein yöntemidir.

Milstein yöntemi, Δt yerine $(\Delta t)^2$ ile orantılı ortalama Kare hataya sahiptir. Bir boyut için, Milstein metodu

$$X_{i+1}(\omega) = X_i(\omega) + f\big(t_i, X_i(\omega)\big)\Delta t + g\big(t_i, X_i(\omega)\big)\Delta W_i(\omega) + \frac{1}{2} g\big(t_i, X_i(\omega)\big) \frac{\partial g\big(t_i, X_i(\omega)\big)}{\partial x} \Big[\big(\Delta W_i(\omega)\big)^2 - \Delta t\Big]$$

dir. Burada $X_0(\omega) = X(0, \omega)$ ile $i = 0,1,2, \dots, N-1$ için $X_i(\omega) \approx X(t_i, \omega)$, $\Delta W_i(\omega) = \big(W(t_{i+1}, \omega) - W(t_i, \omega)\big) \sim N(0, \Delta t)$, $t_i = i\Delta t$, $\Delta t = T/N$'dir ve ω, örnek yolu göstermektedir. Milstein yönteminin her adımda Euler yöntemine kıyasla ek bir terim daha içerdiği görülebilir.

Örnek 5.9 Euler ve Milstein yöntemleri kullanılarak stokastik bir diferensiyel denkleme yaklaşım

$$dX(t) = \left[\frac{1}{3} X^{1/3}(t) + 6X^{2/3}(t)\right] dt + X^{2/3}(t) dW(t)$$

stokastik diferensiyel denklemini gözönüne alalım. Burada $X(0) = 1$'dir. Örnek 5.6'da, $E\big(X(1)\big) = 0{,}28$ ve $E\big(X^2(1)\big) = 869{,}0206$ olduğu gösterilmişti. Bu problem için, Euler yöntemi $X_0 = 1$ ve $i = 0,1,2, \dots, N-1$ için $t_i = i\Delta t$, $\Delta t = 1/N$ olmak üzere

$$X_{i+1} = X_i + \left[\frac{1}{3} X_i^{1/3} + 6X_i^{2/3}\right] \Delta t + X_i^{2/3} \sqrt{\Delta t} \eta_i$$

dir. Burada $\eta_i \sim N(0,1)$'dir. Milstein yöntemi ise $\eta_i \sim N(0,1)$ olmak üzere

$$X_{i+1} = X_i + \left[\frac{1}{3} X_i^{1/3} + 6X_i^{2/3}\right] \Delta t + X_i^{2/3} \sqrt{\Delta t} \eta_i + \frac{1}{3} X_i^{1/3} (\eta_i^2 - 1) \Delta t$$

biçimindedir. $E|X(1) - X_N|^2$ için ortalama kare hatası hesaplama sonuçları Çizelge 5.1'de verilmiştir.

Çizelge 5. 1 Örnek 5.9 için hesaplanan Euler ve Milstein hataları

N nin değeri	**Euler Hatası**	**Milstein Hatası**
2^9	2.80×10^{-2}	$1{,}61 \times 10^{-2}$
2^{10}	$1{,}04 \times 10^{-2}$	$4{,}03 \times 10^{-3}$
2^{11}	$4{,}20 \times 10^{-3}$	$1{,}01 \times 10^{-3}$

2^{12}	1,89 x10^{-3}	2,53 x10^{-4}
2^{13}	8,76x10^{-4}	6,24 x10^{-5}
2^{14}	4,12x10^{-4}	1,60 x10^{-5}

Çizelge 5.1'de, Euler ve Milstein yöntemleri için N aralık sayısı kullanılmış ve N'nin her bir değeri için seçilen 2^9, 2^{10}, 2^{11}, 2^{12}, 2^{13} ve 2^{14} sayılarına karşılık 10.000 örnek yol hesaplanmıştır. Her örnek yol için, Wiener süreci [0, 1] aralığında $2^{15} = 32768$ eşit aralıklı noktalarda hesaplandı ve bu noktalar 2^9 ila 2^{14} aralık kullanılarak hesaplanan Wiener sürecinin gerekli değerlerini sağladı. $X(1)$ değeri örnek yola bağlı olduğundan ve bilinmediğinden, hata tahmininde kullanılan $X(1)$ değeri, n=2^{15} aralıklarla Milstein yaklaşımına dayanarak her örnek yol için hesaplanmıştır. Çizelge 5.1'de, hataların hesaplanan değeri $\frac{1}{10.000}\sum_{j=1}^{10.000}\left|X^{(j)}(1) - X_N^{(j)}\right|^2 \approx E|X(1) - X_N|^2$ her bir nümerik yöntem için verilmiştir ve N'nin her bir değeri için $X_N^{(j)}$, N aralığı kullanılarak j_inci örnek yol için verilen $X^{(j)}(1)$'e yaklaşım değeridir. Ortalama kare hatasının Euler yöntemi için yaklaşık $\Delta t = 1/N$ ve Milstein yöntemi için $(\Delta t)^2 = 1/N^2$ ile orantılı olduğuna dikkat ediniz.

Çizelge 5. 2 E(X(1))'in yaklaşım hesaplamaları

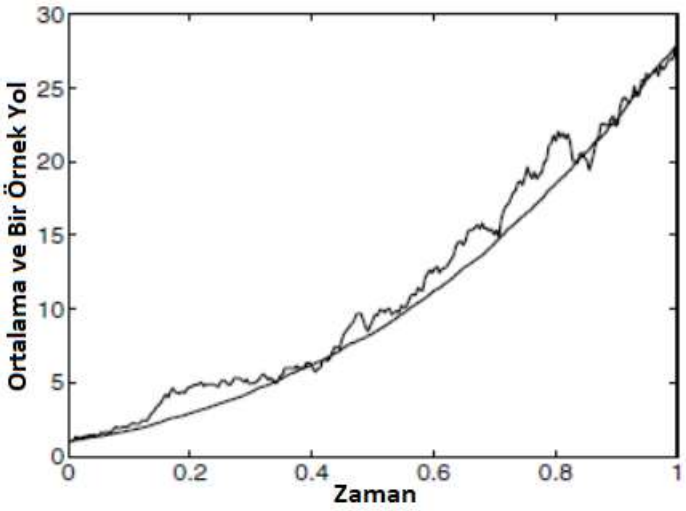
N'nin değeri	**Euler Yaklaşımı**	**Milstein Yaklaşımı**
2^6	27,07 (0,93)	27,08 (0,92)
2^7	27,56 (0,44)	27,56 (0,44)
2^8	27,79 (0,21)	27,79 (0,21)

Çizelge 5. 3 $E\left(X^2(1)\right)$'in yaklaşım hesaplamaları

N'nin değeri	**Euler Yaklaşımı**	**Milstein Yaklaşımı**
2^6	810,15 (58,87)	810,18 (58,84)
2^7	840,89 (28,13)	840,93 (28,09)
2^8	855,33 (13,69)	855,31 (13,71)

Daha sonra, bu örnek için bu hesaplamalar $E\left(X(1)\right) \approx \sum_{j=1}^{100.000} X_N^{(j)}/100.000$ ve $E\left(X(1)\right)^2 \approx \sum_{j=1}^{100.000}\left(X_N^{(j)}\right)^2/100.000$ yaklaşmak amacıyla N=64, 128 ve 256 olmak

üzere 100.000 örnek yol için tekrar edilebilir. Burada, $X_N^{(j)}$, N aralığı kullanılarak j-inci örnek yol için verilen $X^{(j)}(1)$'e yaklaşım değeridir. Hesaplanmış değerler Çizelge 5.2 ve Çizelge 5.3 de verilmiştir. Her değerin bitişiğinde hata parantez içinde verilmektedir. Tam değerlerin $E\big(X(1)\big) = 0{,}28$ ve $E\big(X^2(1)\big) = 869{,}0206$ olduğunu hatırlayalım. Ek olarak, bu örnek için, ortalama ve bir örnek yol gösterimi Şekil 5.1 de verilmiştir.



Şekil 5. 1 Ortalama çözüm ve örnek yol

Çizelge 5.2 ve 5.3, her iki sayısal yöntem için ortalama değerlerdeki hataların Δt ile orantılı olduğuna dikkat edilmelidir. Özellikle, ortalama değerleri tahmin ederken Euler yöntemindeki hatalar $(\Delta t)^{1/2}$ yerine Δt ile orantılıdır. Gerçekten de, stokastik diferensiyel denklemlerin çözümlerinin hesaplanmasında yaygın olarak tartışılan iki tür yaklaşım vardır (Kloeden ve Platen 1992, 1994). $c > 0$ sabiti için

$$\|X(T) - X_N\|_{RD} \leq c(\Delta t)^{\gamma}$$

ise sayısal yöntemin, γ kuvvetli bir yaklaşımı olduğu söylenir; burada $X(T)$, T zamanındaki kesin çözümdür ve X_N, $\Delta t = T/N$ adım uzunluğunu kullanan yaklaşık çözümdür. Euler ve Milstein yöntemleri sırasıyla $\frac{1}{2}$ ve 1 dereceden kuvvetlere sahiptir. Son olarak, yuvarlama hatalarının, adi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin hesaplanmasında olduğu gibi, stokastik diferensiyel denklemlerin çözümlerinin hesaplanmasında da önemli olabileceğini belirtmek gerekir (Kloeden ve Platen 1994). Özellikle, Δt yöntem hatasını azaltmak için çok çok küçük alındığında, bilgisayar aritmetiğinde kullanılan sonlu basamak sayısı nedeniyle yuvarlama hataları artmaya

başlar. Önemli bir hesaplama için veya Δt'nin çok küçük olduğu bir hesaplamada, yuvarlama hatalarının büyüklüğü, daha yüksek hassasiyetli aritmetik kullanılarak bilgisayarda aynı hesaplama yapılarak kontrol edilebilir (ve azaltılabilir).

5.5 Stokastik Diferensiyel Denklem Sistemleri

Stokastik diferensiyel denklem sistemleri geniş bir uygulama alanına sahiptir. Itô formülü ve sayısal yöntemler sistemlere genişletilebilir. $1 \leq i \leq m$ için $W_i(t,\omega)$ bağımsız Wiener süreci olmak üzere

$$\mathbf{X}(t,\omega) = [X_1(t,\omega), X_2(t,\omega), \dots, X_d(t,\omega)]^T$$

$$\mathbf{W}(t,\omega) = [W_1(t,\omega), W_2(t,\omega), \dots, W_m(t,\omega)]^T$$

$$\mathbf{f}\colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

ve

$$g\colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times m}$$

olsun. Bu durumda, stokastik diferensiyel denklemler sistemi

$$d\mathbf{X}(t,\omega) = \mathbf{f}\big(t,\mathbf{X}(t,\omega)\big)dt + g\big(t,\mathbf{X}(t,\omega)\big)d\mathbf{W}(t,\omega) \tag{5.4}$$

biçimindedir. Bileşen formunda $i = 1,2,\dots,d$ için sistem

$$X_i(t) = X_i(0) + \int_0^t f_i\big(s,\mathbf{X}(s)\big)ds + \sum_{j=1}^{m}\int_0^t g_{i,j}\big(s,\mathbf{X}(s)\big)dW_j(s)$$

dir.

Itô formülü sistemlere genelleştirilebilir.

$$\mathbf{F}\colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \quad \text{ve} \quad \mathbf{Y}(t,\omega) = \mathbf{F}\big(t,\mathbf{X}(t,\omega)\big)$$

olsun. Bu durumda $\mathbf{Y}(t,\omega)$'nin p_inci bileşeni: $p = 1,2,\dots,k$ için

$$dY_p(t) = \left[\frac{\partial F_p}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} f_i\frac{\partial F_p}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{2}g_{i,l}g_{j,l}\frac{\partial^2 F_p}{\partial x_i \partial x_j}\right]dt + \sum_{l=1}^{m}\sum_{i=1}^{d} g_{i,l}\frac{\partial F_p}{\partial x_i}dW_l(t) \tag{5.5}$$

denklemini sağlar.

Örnek 5.12 $d = 1$ ve $m = 2$ ile verilen stokastik bir problem için Itô formülü

$d = 1$ ve $m = 2$ olmak üzere

$$\begin{cases} dX(t) = t^2X(t)dt + tdW_1(t) + X(t)dW_2(t), & 0 \le t \le T \\ X(0) = 1, \end{cases}$$

stokastik diferensiyel denklemini ele alalım. Bu problem için, $f_1 = t^2X, g_{1,1} = t$ ve $g_{1,2} = X$ 'dir. $F = X^2$ stokastik diferensiyel denklemini bulmak için Itô formülü kullanılmalıdır. Itô formülü yardımıyla,

$$\begin{cases} d(X^2(t)) = [2t^2X^2(t) + t^2 + X^2(t)]dt + 2tX(t)dW_1(t) + 2X^2(t)dW_2(t) \\ X^2(0) = 1 \end{cases}$$

elde edilir.

Euler yöntemi ve Milstein'ın yöntemi de stokastik diferensiyel denklemler sistemine genelleştirilebilir. Sistemler için Euler yöntemi basittir ve $n = 0,1,2, \dots, N$ için $\mathbf{X}_n(\omega) \approx \mathbf{X}(t_n, \omega)$, $\Delta t = T/N$, $\Delta \mathbf{W}_n = \mathbf{W}(t_{n+1}) - \mathbf{W}(t_n)$ olmak üzere

$$\mathbf{X}_{n+1}(\omega) = \mathbf{X}_n(\omega) + \mathbf{f}\big(t_n, \mathbf{X}_n(\omega)\big)\Delta t + g\big(t_n, \mathbf{X}_n(\omega)\big)\Delta \mathbf{W}_n(\omega) \qquad (5.6)$$

forma sahiptir. Euler yöntemi bileşen formunda ise $i = 1,2, \dots, d$ ve her bir j ve n için $\Delta W_{j,n} \sim N(0, \Delta t)$ olmak üzere

$$X_{i,n+1}(\omega) = X_{i,n}(\omega) + f_i\big(t_n, \mathbf{X}_n(\omega)\big)\Delta t + \sum_{j=1}^{m} g_{i,j}\big(t_n, \mathbf{X}_n(\omega)\big)\Delta W_{j,n}(\omega) \qquad (5.7)$$

şeklindedir. Çok boyutlu stokastik diferensiyel denklemler için Milstein yöntemi,

$$I_n(j_1, j_2) = \int_{t_n}^{t_n+\Delta t} \int_{t_n}^{s} dW_{j_1}(r) dW_{j_2}(s)$$

iki katlı stokastik integrali ile ifade edilir. Milstein yönteminin bileşen formu $i = 1,2, \dots, d$ için

$$X_{i,n+1}(\omega) = X_{i,n}(\omega) + f_i\big(t_n, \mathbf{X}_n(\omega)\big)\Delta t + \sum_{j=1}^{m} g_{i,j}\big(t_n, \mathbf{X}_n(\omega)\big)\Delta W_{j,n}(\omega) + \sum_{j_1=1}^{m}\sum_{j_2=1}^{m}\sum_{l=1}^{d} g_{l,j_1}\frac{\partial g_{i,j_2}}{\partial x_l} I_n(j_1, j_2) \qquad (5.8)$$

şeklindedir.

Örnek 5.13. $d = 1$ ve $m = 2$ ile verilen stokastik bir probleme yaklaşım

$d = 1$ ve $m = 2$ olmak üzere

$$\begin{cases} dX(t) = t^2X(t)dt + tdW_1(t) + X(t)dW_2(t), & 0 \le t \le T \\ X(0) = 1, \end{cases}$$

stokastik diferensiyel denklemini ele alalım. Bu problem için Euler yöntemi $n = 0,1,2, \ldots$ için $\Delta W_{1,n}, \Delta W_{2,n} \sim N(0, \Delta t)$ ve $t_n = n\Delta t$ olmak üzere

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + t_n^2 X_n \Delta t + t_n \Delta W_{1,n} + X_n \Delta W_{2,n} \\ X_0 = 1 \end{cases}$$

biçimindedir. Ek olarak, $n = 1,2, \ldots$ için Milstein yöntemi,

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + t_n^2 X_n \Delta t + t_n \Delta W_{1,n} + X_n \Delta W_{2,n} + t_n I_n(1,2) + X_n I_n(2,2) \\ X_0 = 1 \end{cases}$$

biçimindedir.

5.6 Stokastik Diferensiyel Denklemler için Parametre Tahmini

Bu bölümde, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^m$ bilinmeyen parametrelerin bir vektörü olmak üzere stokastik bir

$$dX(t) = f(t, X(t); \boldsymbol{\theta})dt + g(t, X(t); \boldsymbol{\theta})dW(t) \qquad (5.9)$$

diferensiyel denklemi ele alınacaktır. $X(t)$'nin düzgün dağılıma sahip sırasıyla $i = 0,1, \ldots, N$ için $\Delta t = T/N$ olmak üzere $t_i = i\Delta t$ anlarında gözlenen değerlerinin

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N$$

olduğunu kabul edelim. Problem ise, bu verilen $N + 1$ noktaları göz önüne alındığında $\boldsymbol{\theta}$ vektörünün tahmin edilmesidir. Bu bölümde iki tahmin yöntemi ele alınmıştır: ilki maksimum olabilirlik tahmin yöntemi ve diğeri parametrik olmayan bir tahmin yöntemidir.

5.6.1 Maksimum olabilirlik tahmin yöntemi

$p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \boldsymbol{\theta})$, verilen $\boldsymbol{\theta}$ vektörünün (t_{k-1}, x_{k-1})'dan başlayarak (t_k, x_k)'ya kadar olan geçiş olasılık yoğunluğu olsun. Başlangıç koşul yoğunluğunun $p_0(x_0, \boldsymbol{\theta})$ olduğunu kabul edelim.

$\boldsymbol{\theta}$'nın maksimum olasılık tahmini için ortak yoğunluğu

$$D(\boldsymbol{\theta}) = p_0(x_0|\boldsymbol{\theta}) \prod_{k=1}^{N} p(t_k, x_k|t_{k-1}, x_{k-1}; \boldsymbol{\theta})$$

$\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^m$ üzerinde maksimize edilir. $D(\boldsymbol{\theta})$ 'yi maksimize eden $\boldsymbol{\theta}$ değeri bu bölümde $\boldsymbol{\theta}^*$ olarak gösterilecektir. Bununla birlikte, bilgisayarda küçük sayılardan kaçınmak için,

$$L(\boldsymbol{\theta}) = -\ln\big(p_0(x_0|\boldsymbol{\theta})\big) - \sum_{k=1}^{N} \ln\big(p(t_k, x_k|t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)\big)$$

formuna sahip olan $L(\boldsymbol{\theta}) = -\ln\big(D(\boldsymbol{\theta})\big)$ fonksiyonunu minimize etmek daha uygundur. Optimal (en iyi) θ^* değerinin bulunmasındaki zorluklardan biri, geçiş yoğunluklarının genellikle bilinmiyor oluşudur. Bununla birlikte (5.9) denklemine Euler yaklaşımı uygulandığında ve $t = t_{k-1}$ anında $X(t_{k-1}) = x_{k-1}$ olduğunda

$$X(t_k) \approx x_{k-1} + f(t_{k-1}, x_{k-1}; \boldsymbol{\theta})\Delta t + g(t_{k-1}, x_{k-1}; \boldsymbol{\theta})\sqrt{\Delta t}\eta_k$$

dir. Burada $\eta_k \sim N(0,1)$ dir. Bu da $\mu_k = x_{k-1} + f(t_{k-1}, x_{k-1}; \boldsymbol{\theta})\Delta t$ ve $\sigma_k = g(t_{k-1}, x_{k-1}; \boldsymbol{\theta})\sqrt{\Delta t}$ olmak üzere

$$p(t_k, x_k|t_{k-1}, x_{k-1}; \boldsymbol{\theta}) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} \exp\left(\frac{-(x_k - \mu_k)^2}{2\sigma_k^2}\right)$$

olduğunu gösterir. Bu geçiş yoğunluğu, daha sonra $\mathbb{R}^m$ üzerinde minimize edilebilen $L(\boldsymbol{\theta})$ ifadesi yerine kullanılabilir. İkinci zorluk şimdi $L(\boldsymbol{\theta})$ ifadesini minimize ederek optimal (en uygun) $\boldsymbol{\theta}^*$ vektörünü hesaplamaktır. Bu önemsiz görülmemesi gereken bir hesaplamadır. Nelder-Mead yöntemi gibi bir sayısal optimizasyon algoritması, minimum $L(\boldsymbol{\theta})$ değerinin hesaplanması için yararlı olabilir.

Yukarıdaki prosedürde, geçiş yoğunlukları Euler formülü kullanılarak yaklaşık olarak hesaplandı. $p(t_k, x_k|t_{k-1}, x_{k-1}; \boldsymbol{\theta})$ geçiş yoğunluğunu farklı yöntemlerle hesaplamak da mümkündür. İlk olarak, $\boldsymbol{\theta}$'nin belirli bir değeri için, (5.9) denklemi t_{k-1}'de x_{k-1}'den başlayarak sayısal olarak çözülür. Euler yöntemi veya Milstein yöntemi gibi bir veya daha fazla adımla standart bir yöntem kullanılabilir. $X(t)$'nin $t = t_k$ anında M adet $y_1, y_2, \dots, y_M$ yaklaşımlarını elde etmek için hesaplama M defa tekrarlanır. $y_1, y_2, \dots, y_M$ değerlerini bulmak için kullanılan Wiener artışlarının kaydedildiğine dikkat edilmelidir.

Bu aynı Wiener artışları, test edilen $\boldsymbol{\theta}$'nın her bir değeri için t_k'da $y_1, y_2, \ldots, y_M$ değerlerini bulmada uygulanır. $\boldsymbol{\theta}^*$ optimal değerini bulma sorunu deterministiktir, yani raslantısallıktan uzak belli bir değere sahiptir. Daha sonra $p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \boldsymbol{\theta})$ geçiş yoğunluğuna

$$p^{(M)}(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{Mh} \sum_{j=1}^{M} K\left(\frac{x_k - y_j}{h}\right)$$

denklemi kullanılarak yaklaşılabilir. Burada K negatif olmayan bir çekirdek fonksiyonudur ve h bir bant genişliğidir. Uygun bir K çekirdek fonksiyonu ve h bant genişliği

$$s^2 = \frac{1}{M-1}\left[\sum_{j=1}^{M} y_j^2 - \frac{1}{M}\left(\sum_{j=1}^{M} y_j\right)^2\right]$$

örnek standart sapma için bir formül olmak üzere,

$$K(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) \quad \text{ve} \quad h = 0{,}9sM^{-1/5}$$

dir. Daha sonra, $\boldsymbol{\theta}^*$ optimal değerine bir yaklaşım bulmak için

$$L^{(M)}(\boldsymbol{\theta}) = -\ln\left(p_0(x_0|\boldsymbol{\theta})\right) - \sum_{k=1}^{N} \ln\left(p^{(M)}(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)\right)$$

minimize edilir.

Örnek 5.15 Nufüs verilerinin bir SDD'ye uygulanması

Aransas Bizon Ormanlarındaki boğmaca turnalarının nüfusunu ele alalım (Boyce 1987, Dennis v.d. 1991). Boğmaca turnaları için nüfus verileri Çizelge 5.5 te verilmiştir. Nüfus büyüklüğü, 1939-1985 yılları boyunca Şekil 3.3'te grafik olarak gösterilmektedir. Bu bölümde, $X(t)$ nüfus büyüklüğü ve $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2]^T$ belirli olmak üzere bu veriler

$$dX(t) = \theta_1 X(t)dt + \sqrt{\theta_2 X(t)}dW(t), \quad X(0) = 18$$

stokastik diferensiyel denklemine uygulanır. Bir sonraki bölümde bunun nüfus dinamikleri için makul bir model olduğu gösterilmiştir. Burada t zamanı, 1939 yılından sonraki yılları temsil eder, örneğin 1941, $t = 2$'ye karşılık gelmektedir.

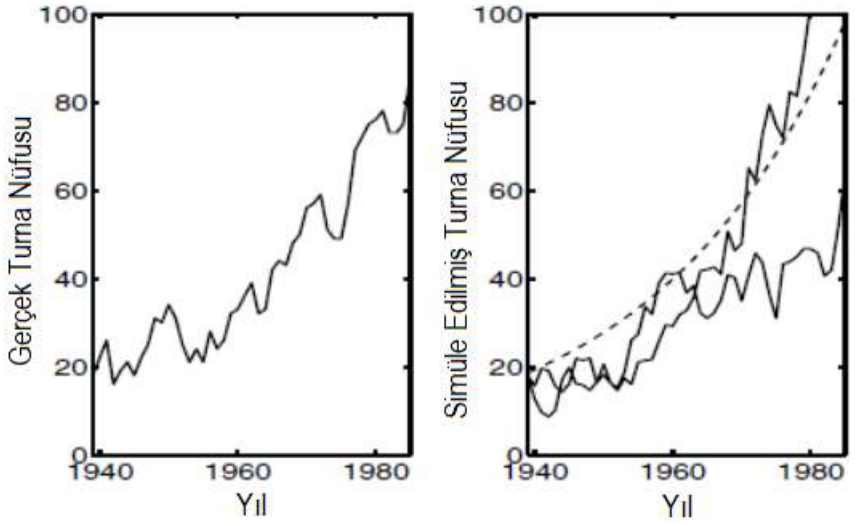
Çizelge 5. 4 Arkansas Bizon ormanındaki boğmaca turnaların nüfusu

Yıl	Nüfus	Yıl	Nüfus	Yıl	Nüfus	Yıl	Nüfus
1939	18	1951	31	1963	32	1975	49
1940	22	1952	25	1964	33	1976	57
1941	26	1953	21	1965	42	1977	69
1942	16	1954	24	1966	44	1978	72
1943	19	1955	21	1967	43	1979	75
1944	21	1956	28	1968	48	1980	76
1945	18	1957	24	1969	50	1981	78
1946	22	1958	26	1970	56	1982	73
1947	25	1959	32	1971	57	1983	73
1948	31	1960	33	1972	59	1984	75
1949	30	1961	36	1973	51	1985	86
1950	34	1962	39	1974	49		

Bu bölümde açıklanan her iki hesaplama yöntemi yaklaşık $\theta_1^* = 0{,}0361$ ve $\theta_2^* = 0{,}609$ optimal değerlerini vermiştir. Bu bölümde açıklanan prosedürleri kullanarak bu optimum değerleri hesaplayan bilgisayar programları kaynaklarda verilmektedir (Allen 2010). Böylece, boğmaca turna popülasyonunun boyutuna ilişkin verilere dayanan makul bir stokastik diferensiyel denklem

$$dX(t) = 0{,}0361X(t)dt + \sqrt{0{,}609X(t)}dW(t), \qquad X(0) = 18$$

şeklinde elde edilir. Bu stokastik diferensiyel denklem için ortalama popülasyon büyüklüğü ve iki farklı yörünge Şekil 5.2'de gösterilmiştir. Buna ek olarak, gerçek boğmaca turna nüfusu bu şekilde çizilmiştir. Grafikler, stokastik diferensiyel denklem modelinin verilere uyum sağladığını göstermektedir.



Şekil 5. 2 Gerçek turna popülasyonu, ortalama popülasyon (kesik çizgi) ve iki simüle turna popülasyonu

5.6.2 Parametrik olmayan bir tahmin yöntemi

Bu bölümde, basit bir parametrik olmayan tahmin prosedürü açıklanmaktadır. Tahminler sadece yaklaşık olarak doğrudur, ancak yaklaşımın uygulanması kolaydır ve makul sıklıkta veri bulunması kaydıyla yaklaşık hataların küçük olması muhtemeldir. Ayrıca, bu prosedürle tahmin edilen değerler, parametreleri hesaplamak için diğer hesaplama yöntemlerinde başlangıç değerleri olarak da kullanılabilir.

Önceki bölümde de olduğu gibi,

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$$

değerlerinin $\Delta t = T/N$ olmak üzere $i = 0,1, \dots, N$ için sırasıyla normal dağılıma sahip $t_i = i\Delta t$ anlarında $X(t)$'nin gözlenen değerleri olduğu varsayılmaktadır. Problem, bu $N + 1$ veri noktaları göz önüne alındığında $\boldsymbol{\theta}$ parametre vektörünün bir tahminini bulmaktır. Bu tahmin prosedüründe, işlemin her bir $i = 0,1, \dots, N$ için $\eta_i \sim N(0,1)$ olmak üzere

$$X_{i+1} - X_i = f(t_i, X_i, \boldsymbol{\theta})\Delta t + g(t_i, X_i, \boldsymbol{\theta})\eta_i\sqrt{\Delta t} \qquad (5.10)$$

ayrık-zaman süreci tarafından yaklaşık olarak modellenebileceği varsayılmaktadır. Yöntem,

$$E[(X_{i+1} - X_i)/\Delta t - f(t_i, X_i, \boldsymbol{\theta})] = O(\Delta t) \qquad (5.11)$$

$$E\left[\frac{(X_{i+1}-X_i)^2}{\Delta t}-g^2(t_i,X_i,\boldsymbol{\theta})\right]=O(\Delta t) \tag{5.12}$$

tarafından verilen ayrık zamanlı süreç için gözlenen Xi değerine bağlı olarak yaklaşık beklenen değerlere dayanmaktadır. Eğer $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^2$ ise (5.11) ve (5.12) denklemleri $\boldsymbol{\theta}$ parametre vektörünü tahmin etmek için kullanılabilir. Eğer $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^m$ ise (5.11) ve (5.12) denklemleri

$$E[(X_{i+1}-X_i)X_i/\Delta t-f(t_i,X_i,\boldsymbol{\theta})X_i]=O(\Delta t)$$

$$E[(X_{i+1}-X_i)^2X_i/\Delta t-g^2(t_i,X_i,\boldsymbol{\theta})X_i]=O(\Delta t)$$

biçimindeki ek denklemlerle desteklenebilir. $\boldsymbol{\theta}$ parametre vektörü, önceki denklemlerin örnek(sample) emsalleri kullanılarak tahmin edilir. Örneğin, $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^2$ için, $\boldsymbol{\theta}$ parametre vektörü

$$\sum_{i=0}^{N-1}f(t_i,X_i,\boldsymbol{\theta})=\frac{1}{\Delta t}\sum_{i=0}^{N-1}(x_{i+1}-x_i) \tag{5.13}$$

$$\sum_{i=0}^{N-1}g^2(t_i,X_i,\boldsymbol{\theta})=\frac{1}{\Delta t}\sum_{i=0}^{N-1}(x_{i+1}-x_i)^2 \tag{5.14}$$

kullanılarak tahmin edilebilir. Ayrıca, önceki bölümde açıklanan maksimum olasılık prosedürü gibi bu parametrik olmayan tahmin yöntemi, stokastik diferensiyel denklem sistemlerini içeren modeller için parametrelerin tahminine genişletilebilir. Parametre tahmini ve tahmincilerin istatistiksel özelliklerini incelemek için sayısal yöntemler kullanıma hakkında ek bilgi için referanslardaki örnekler incelenebilir.

Örnek 5.16. Nüfus verilerinin bir SDD'e uygulanması

Parametrik olmayan tahmin yönteminin bir örneği olarak, $X(t)$ popülasyonun büyüklüğü olmak üzere

$$dX(t)=\theta_1X(t)dt+\sqrt{\theta_2X(t)}dW(t),\quad X(0)=18$$

stokastik diferensiyel denklem modeli için θ_1 ve θ_2'nin tahmin edileceği bir önceki bölümde açıklanan boğmaca turnalarının popülasyon verilerini ele alalım. Bu problem

için, birbirini izleyen 47 yılda popülasyon büyüklükleri Çizelge 5.5'te verilmiştir. Özellikle, $N = 46$ ve $\Delta t = 1$. (5.13)-(5.14) denklemleri bu modele uygulanarak, maksimum olasılık prosedürü kullanılarak önceki bölümde elde edilen θ_1 ve θ_2 değerlerine yakın olan:

$$\theta_1 = \frac{\sum_{i=0}^{45}(x_{i+1} - x_i)}{\sum_{i=0}^{45} x_i} = 0{,}0361 \quad \text{ve} \quad \theta_2 = \frac{\sum_{i=0}^{45}(x_{i+1} - x_i)^2}{\sum_{i=0}^{45} x_i} = 0{,}579$$

tahminleri elde edilir. Bu örnekte boğmaca turna popülasyonu büyüklüğü için elde edilen model

$$dX(t) = 0{,}0361X(t)dt + \sqrt{0{,}579X(t)}dW(t), \qquad X(0) = 18$$

dir.

KAYNAKLAR

Allen, E. 2007. Modelling with Ito Stochastic Differential Equations. Mathematical Modelling-Theory and Applications, Vol 22, Springer, Netherlands.

Allen, L. J. S. An Introduction to Stochastic Processes with Applications to Biology, Chapman and Hall/CRC, New Jersey, 2010.

Allen, L.J.S., Allen, E.J. 2003. A comparison of three different stochastic population models with regard to persistence time. Theoretical Population Biology, 68.

Arnold, L. 1974. Stochastic Differential Equations: Theory and Applications. John Wiley and Sons, New York.

Bailey, N.T.J. 1964. The Elements of Stochastic Processes With Applications to the Natural Sciences. John Wiley and Sons, New York.

Boyce, M.S. 1987. Time-series analysis and forecasting of the Aransas-Wood Buffalo whooping crane population. Lewis, J.C., Ziewitz, J.W. (eds) Proceedings of the 1985 Crane Workshop, Platte River Whooping Crane Habitat Maintenance Trust and USFWS, Grand Island, Nebraska.

Brown, R. 1828. A brief account of microscopical observations made on the particles contained in the pollen of plants. London and Edinburgh philosophical magazine and journal of science (4). London.

Chung, K.L. 1979. Elementary Probability Theory with Stochastic Process. Springer-Verlag, New York.

Dennis, B. Munholland, P.L. ve Scott, J.M. 1991. Estimation of growth and extinction parameters for endangered species. Ecological Monographs, 61.

Einstein, A. 1905 On the movement of small particles suspended in a stationary liquid demanded by the molecular-kinetic theory of heat. Annln Phys.

Freedman D. 1983. Brownian Motion and Diffusion. Springer-Verlag, New York.

Harrison J.M. ve Pliska S.R. 1983. A stochastic model of continuous trading: Complete markets. Stoch. Proc. Appl.

Henderson, D. ve Plaschko, P. 2006. Stochastic Differential Equations in Science and Engineering. World Scientific, Singapore.

Ikeda, N. ve Watanabe, S. 1981. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. North-Holland, Kodansha.

Ito, K. 1944. Stochastic integral. Proc. Imp. Acad., Tokyo.

Ito, K. 1946. On a Stochastic Integral Equation. Imp. Acad., Tokyo.

Karatzas I. and Shreve S.E. 1988. Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer-Verlag, New York.

Kirupaharan, N., Allen, L.J.S. 2004. Coexistence of multiple pathogen strains in stochastic epidemic models with density-dependent mortality. Bulletin of Mathematical Biology, 66.

Klebaner, F. C. 2006. Introduction to Stochastic Calculus with Applications. Imperial Colllege Prress, Singapore.

Kloeden, P.E. ve Platen, E. 1992. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer-Verlag, New York.

Kloeden, P.E., Platen, E. ve Schurz, H. 1994. Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments. Springer-Verlag, Berlin.

Langevin, P. 1908. On the theory of Brownian motion. C R Acad Sci, Paris.

Lemons, D. S. ve Gythiel, A. 1908. 1997 Paul Langevin's 1908 paper “on the theory of Brownian motion” [“Sur la théorie du mouvement brownien” C. R. Acad. Sci. Paris.

Liu, X. Li, Q. Pan. J. 2018. A deterministic and stochastic model for the system dynamics of tumor-immune responses to chemotherapy, Physica A.

Maruyama, G. 1955. Continuous Markov processes and stochastic equations. Rend Circ Math Palermo, Palermo.

Mikosch, T. 1998. Elementary Stochastic Calculus with Finance in View. World Scientific, Singapore.

Milstein, G. 1975. Approximate integration of stochastic differential equations. Theory Probab. Appl.

O'Neill, E.L. 1991. Introduction to Statistical Optics. Dover Publications, USA.

Oksendal, B. 1998. Stochastic Differential Equations. An Introduction with applications. Springer-Verlag, New York.

Önalan, Ö. 2010. Stokastik Süreçler, Avcıol Basım Yayın, İstanbul.

Pazdziorek, P. R. 2014. Mathematical model of stem cell differentiation and tissue regeneration with stochastic noise, Bull. Math. Biol.

Protter, P. E. 2004. Stochastic Integration and Differential Equations, Springer-Verlag, Germany.

Stratonovich R.L. 1966. A new representation for stochastic integrals and equations SIAM J. Comput., 4 (2)

Uhlenbeck, G.E. ve Ornstein, L. 1930. On the theory of Brownian motion. Phys Rev.

Wiener, N. 1923. Differential-space. J. Math. Phys., 2. Issue 1-4, 131-174.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Cem TOPUZ
Doğum Yeri	: Ankara
Doğum Tarihi	: 18/03/1985
Medeni Hali	: Evli
Yabancı Dili	: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Merzifon Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi
Lisans	: Ankara Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektronik Mühendisliği Bölümü (2008)
Lisans	: Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2009)
P. Formasyon	: Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi (2013)
Yüksek Lisans	: Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Ekim 2017-Ocak 2021)

İş Deneyimi

Türk Telekom	: Uzman (2008-devam ediyor)