**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

# GENELLEŞTİRİLMİŞ HARMONİK SAYILARI VE BAZI ÖZEL SAYILARI İÇEREN KOMBİNATORYAL ÖZDEŞLİKLER

**ÖMER DURAN**

**KOCAELİ 2020**

**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

# GENELLEŞTİRİLMİŞ HARMONİK SAYILARI VE BAZI ÖZEL SAYILARI İÇEREN KOMBİNATORYAL ÖZDEŞLİKLER

**ÖMER DURAN**

**Prof. Dr. Neşe ÖMÜR**
**Danışman, Kocaeli Üniv.** .....

**Prof. Dr. Öznur GÖLBAŞI**
**Jüri Üyesi, Sivas Cumhuriyet Üniv.** .....

**Doç. Dr. Yücel TÜRKER ULUTAŞ**
**Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv.** .....

**Tezin Savunulduğu Tarih: 08.07.2020**

## ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Yapılmış çalışmalar üzerine düşünerek ve araştırarak yeni çalışmalar elde etmek sayı teorisi için önemli yer teşkil eder. Bu çalışmada bu ilke benimsenmiş, bazı özel sayı aileleri tanıtılarak üreteç fonksiyonları ve Riordan ışınları kullanılarak özdeşlik elde etmek amaçlanmıştır.

Haziran, 2020 Ömer DURAN

## İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR ..... i
İÇİNDEKİLER ..... ii
TABLOLAR DİZİNİ ..... iii
SİMGELER VE KISALTMALAR ..... iv
ÖZET ..... v
ABSTRACT ..... vi
GİRİŞ ..... 1
1. GENEL BİLGİLER ..... 3
1.1. Bazı Özel Sayılar ..... 3
1.2. Üreteç Fonksiyonlar ..... 10
1.3. Riordan Işınları ve Riordan Grubu ..... 15
2. ÜRETEÇ FONKSİYONLARIYLA ELDE EDİLEN ÖZDEŞLİKLER VE GENELLEŞTİRİLMİŞ KADEMELİ HARMONİK SAYILAR ..... 26
3. RIORDAN IŞINLARIYLA ELDE EDİLEN ÖZDEŞLİKLER ..... 39
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER ..... 53
KAYNAKLAR ..... 55
KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER ..... 57
ÖZGEÇMİŞ ..... 58

## TABLOLAR DİZİNİ

Tablo 2.1. $H(5,2,2)$ için durumlar ..... 27
Tablo 2.2. $H(n,r,2)$ değerleri ..... 27
Tablo 2.3. Üreteç fonksiyonları ..... 28
Tablo 3.1. Riordan ışınları ..... 39

## SİMGELER VE KISALTMALAR

$\in$ : Eleman
$\sum$ : Toplam sembolü
$\prod$ : Çarpım sembolü
$\binom{n}{k}$ : Binom katsayısı
$H_n$ : Harmonik sayı
$H_n^r$ : Hiperharmonik sayı
$H(n,r)$ : Kademeli harmonik sayı
$H_n(\alpha)$ : Genelleştirilmiş harmonik sayı
$H_n^r(\alpha)$ : Genelleştirilmiş hiperharmonik sayı
$H(n,r,\alpha)$ : Genelleştirilmiş kademeli harmonik sayı
$s(n,r)$ : Birinci tür Stirling sayısı
$\left[{n \atop k}\right]$ : Stirling sayısının mutlak değeri
$S(n,r)$ : İkinci tür Stirling sayısı
$d_n$ : Düzensizlik sayısı
$B_n$ : Bernoulli sayısı
$D_n$ : Daehee sayısı
$D_n^r$ : r mertebeli Daehee sayısı
$C_n$ : Cauchy sayısı
$C_n^r$ : r mertebeli Cauchy sayısı
$\mathbb{N}$ : Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$ : Tamsayılar kümesi
$\mathbb{R}$ : Reel sayılar kümesi
$\Re$ : Riordan ışınları kümesi
$\sigma_n(x)$ : Stirling polinomu
$f^{(n)}(x)$ : f fonksiyonunun n-inci türevi
$\bar{f}(x)$ : f fonksiyonunun tersi
$x^{\underline{n}}$ : x'in azalan faktöriyeli
$[x^n]$ : $x^n$ teriminin katsayısı

## GENELLEŞTİRİLMİŞ HARMONİK SAYILARI VE BAZI ÖZEL SAYILARI İÇEREN KOMBİNATORYAL ÖZDEŞLİKLER


## ÖZET

Bu çalışmada ilk olarak bazı özel sayılar, üreteç fonksiyonları ve Riordan ışınları tanıtılmıştır. Ayrıca $H(n,r,\alpha)$ genelleştirilmiş r kademeli harmonik sayılar ilk kez bu tezde tanıtılmıştır. Genelleştirilmiş kademeli harmonik sayılar ve bazı özel sayı aileleri arasında üreteç fonksiyonları ve Riordan ışınlarının özellikleri yardımıyla yeni özdeşlikler elde edilmiştir.



**Anahtar Kelimeler:** Genelleştirilmiş Harmonik Sayılar, Riordan Işınları, Üreteç Fonksiyonlar.

**COMBINATORIAL IDENTITIES INVOLVING GENERALIZED HARMONIC NUMBERS AND SOME SPECIAL NUMBERS**


## ABSTRACT

In this study, firstly, it is introduced some special numbers, generating functions and Riordan arrays. Also, generalized harmonic number of rank r, $H(n,r,\alpha)$ is defined in this thesis first time. New identities between generalized harmonic number of rank r and some numbers have been obtained using generating functions and Riordan arrays.



**Keywords:** Generalized Harmonic Numbers, Riordan Arrays, Generating Functions.

## GİRİŞ

Matematiğin birçok alanında ihtiyaç duyulduğu için tanımlanan özel sayılar mevcuttur. Zaman, teknoloji ve bilim ilerledikçe bazı sayılara olan ihtiyaç artmış ve zamanla yeni sayılar tanımlanmıştır. Stirling sayıları, Bernoulli sayıları, harmonik sayılar bunlardan sadece bazılarıdır.

Bilimsel çalışmaların artmasıyla keşfedilen özel sayılarla beraber bu sayıların genelleştirilmiş halleri de ortaya çıkmıştır. Örneğin harmonik sayılar birkaç farklı şekilde genelleştirilmiştir: Genelleştirilmiş harmonik sayılar $H_n(\alpha)$; r mertebeli hiperharmonik sayılar $H_n^r$ gibi. Çalışmalar ilerledikçe bu gibi sayılara olan ihtiyaç artmış ve birçok çalışma için önemli bir hale gelmiştir. Güncel olarak yayınlanan kaynaklarda bu sayıların sıkça kullanıldığını görmek mümkündür. Çalışmalardan doğan ihtiyaçlarla beraber harmonik sayıların yeni bir genellemesi olan r kademeli genelleştirilmiş harmonik sayı $H(n,r,\alpha)$ ilk kez bu tezde tanıtılmıştır.

Temel bilimlerde ve mühendislikte sıkça kullanılan terimlerden biri fonksiyondur. Temel olarak basit tanıma sahip olsa da bazı fonksiyonlar üzerinde işlem yapmak her zaman kolay olmayabilir. Ancak polinomlar üzerinde işlem yapmak birçok fonksiyona göre daha kolay ve basittir. Bu yüzden bir fonksiyonun belli kurallar altında polinom olarak ifade edilebildiği üreteç fonksiyonları önem kazanır. Bununla beraber, üreteç fonksiyonları ve matrislerin kullanıldığı bir cebirsel yapı olan Riordan ışını kavramı da mevcuttur. Üreteç fonksiyonları ve Riordan ışını, özdeşlik elde etmek için kullanılabilen önemli konulardandır.

Bu tez, genel bilgiler, üreteç fonksiyonlar kullanılarak elde edilen özdeşlikler ve genelleştirilmiş kademeli harmonik sayılar, Riordan ışınları kullanılarak elde edilen özdeşlikler ve son olarak sonuçlar ve öneriler olmak üzere toplam dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, ihtiyaç duyulan özel sayıların tanımları, bazı özellikleri, üreteç fonksiyonları, Riordan ışını ve Riordan grubu tanıtılarak daha öncesinde yapılan bazı çalışmalar aktarılmış ve bazı örnekler verilmiştir. İkinci bölümde ise genelleştirilmiş kademeli harmonik sayılar tanıtılmış, ardından bazı özel

sayıları katsayı kabul eden üreteç fonksiyonlarına, üreteç fonksiyonlarının bazı özelliklerine ve bu özellikler kullanılarak bulunan yeni özdeşliklere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, birinci bölümde tanıtılan özel sayıların elde edilebileceği Riordan ışınları verilmiş, ardından Riordan ışınlarının ve Riordan grubunun bazı özellikleri kullanılarak yeni özdeşlikler bulunmuştur. Son bölümde ise, bu çalışmayı araştıran okurlara elde edilen bulgularla ilgi fikirlere ve önerilere yer verilmiştir.

Bu çalışmada matematikte, özellikle cebir ve sayılar teorisindeki çalışmalara katkı sağlayan bazı özel sayılar tanıtılmış, tanımlanmış ve bazı matematiksel yöntemler kullanılarak bu özel sayıların arasında yeni özdeşlikler elde edilmiştir. Ayrıca özel sayıların yanı sıra önceden bulunmuş özdeşliklerin, üreteç fonksiyonlarının ve Riordan ışınlarının özelliklerinden faydalanılmıştır. Tüm bunlarla, ilgili alanlarda çalışanlara ya da araştırma yapacak olanlara bir takım katkı sağlanması hedeflenmiştir.

# 1. GENEL BİLGİLER

## 1.1. Bazı Özel Sayılar

Tanım 1.1. $H_0=0$ ve $n\geq 1$ doğal sayısı için

$$H_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

sonlu toplamına n-inci harmonik sayı denir.

Harmonik sayılar için

$$H_n=\frac{1}{n}+H_{n-1}$$

özelliğinin sağlandığı açıktır. Ayrıca harmonik sayıların integral kullanılarak gösterimi mevcut olup

$$H_n=\int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\,dx$$

şeklindedir.

Harmonik sayıların bir genellemesi olan hiperharmonik sayılar da aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 1.2. $n,r\geq 1$ olacak şekilde iki doğal sayı olmak üzere

$$H_n^r=\sum_{i=1}^{n}H_i^{r-1} \tag{1.1}$$

sayısına n-inci r mertebeli hiperharmonik sayı denir (Conway & Guy, 1995). Burada $H_n^0=\frac{1}{n}$ ve $r<0$ veya $n\leq 0$ için $H_n^r=0$ olarak tanımlanır.

Eğer (1.1)'de r=1 alınırsa $H_n^1=H_n$ elde edilir. Ayrıca Tanım 1.2 kullanılırsa

$$H_n^r=H_{n-1}^r+H_n^{r-1}$$

bağıntısının var olduğu görülür.

Teorem 1.3. Pozitif bir n tamsayısı için

$$\sum_{i=0}^{n-1} H_i = nH_n-n$$

özdeşliği vardır (Graham ve diğ., 1994).

İspat. Harmonik sayıların tanımı ve elementer işlemler kullanılırsa

$$\sum_{i=0}^{n-1} H_i = \sum_{i=1}^{n} H_i-H_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{k}-H_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{k}-H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k+1)}{k}-H_n$$

$$=n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-H_n=nH_n-n$$

elde edilir.

Lemma 1.4. $n,m\geq 1$ şeklindeki doğal sayılar olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{i+m}{m}H_{i+m} = \binom{n+m+1}{m+1}H_{n+m+1}-\binom{n+m+1}{m+1}\frac{1}{m+1}-H_m$$

özdeşliği sağlanır (Cereceda, 2015).

Hiperharmonik ve harmonik sayıların ikisini içeren aşağıdaki özdeşlik aşağıda verilmiştir.

Teorem 1.5. r>1 olmak üzere

$$H_n^r=\binom{n+r-1}{r-1}(H_{n+r-1}-H_{r-1})$$

özdeşliği sağlanır (Conway & Guy, 1995).

İspat. İspat için r üzerinde tümevarım yöntemi kullanılmıştır. İlk adım olarak r=2 için iddianın doğru olduğu gösterilmelidir. Hiperharmonik sayıların tanımından

$$H_n^2=\sum_{i=1}^{n} H_i \tag{1.2}$$

yazılabilir. Ayrıca Lemma 1.4'te m=0 olarak seçilirse

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = \binom{n+1}{1}(H_{n+1}-H_1) \tag{1.3}$$

elde edilir. O halde (1.2) ve (1.3) kullanılırsa

$$H_n^2=\binom{n+1}{1}(H_{n+1}-H_1)$$

bulunur. Böylece tümevarımın ilk adımı tamamlanmış olur.

İkinci adım olarak, r≥3 olmak üzere r-1 için iddianın doğru olduğunu varsayılsın. Başka bir deyişle

$$H_n^{r-1}=\binom{n+r-2}{r-2}(H_{n+1}-H_1)$$

olduğu kabul edilsin. Son olarak r doğal sayısı için hipotezin doğru olduğu gösterilmelidir. O halde

$$H_n^r=\sum_{i=1}^{n} H_i^{r-1} = \sum_{i=1}^{n}\left(\binom{i+r-2}{r-2}H_{k+r-2}-\binom{i+r-2}{r-2}H_{r-2}\right)$$

yazılabilir. Şimdi Lemma 1.4'te m=r-2 alınırsa

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{i+r-2}{r-2}H_{k+r-2} = \binom{n+r-1}{r-1}H_{n+r-1}-\binom{n+r-1}{r-1}\frac{1}{r-1}-H_{r-2}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{i+r-2}{r-2}=\binom{n+r-1}{r-1}-1$$

olduğu da kullanılırsa,

$$H_n^r=\binom{n+r-1}{r-1}H_{n+r-1}-\binom{n+r-1}{r-1}\frac{1}{r-1}-\binom{n+r-1}{r-1}H_{r-2}$$
$$=\binom{n+r-1}{r-1}\left(H_{n+r-1}-\left(\frac{1}{r-1}+H_{r-2}\right)\right)$$
$$=\binom{n+r-1}{r-1}(H_{n+r-1}-H_{r-1})$$

şeklinde bulunur. Bu ise ispatı tamamlamış olur.

Hiperharmonik sayıların, binom katsayıları kullanılarak elde edilişini veren özdeşlik ispatsız bir şekilde aşağıda okurlara sunulmuştur.

Teorem 1.6. Pozitif bir r tam sayısı için,

$$H_n^r=\sum_{i=1}^{n}\binom{n-i+r-1}{r-1}\frac{1}{i}$$

olur (Benjamin ve diğ., 2003).

Hiperharmonik sayılarla ilgili verilen bu bilgilerden sonra yine harmonik sayıların bir genellemesi olan genelleştirilmiş harmonik sayılar aşağıda tanıtılmıştır (Genčev, 2011).

Tanım 1.7. Pozitif bir $\alpha$ reel sayısı ve n doğal sayısı için genelleştirilmiş harmonik sayılar

$$H_n(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i\alpha^i}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, harmonik sayılara benzer şekilde $H_0(\alpha)=0$ olarak tanımlanır. Ayrıca bu tanımda eğer $\alpha=1$ alınırsa $H_n(1)=H_n$ olduğu görülür.

Tanım 1.7'deki genelleştirilmiş harmonik sayılardan yararlanılarak elde edilen genelleştirilmiş hiperharmonik sayıların tanımı da aşağıdaki gibidir (Ömür & Bilgin, 2018).

Tanım 1.8. $\alpha$ bir pozitif reel sayı ve $n,r\geq 1$ olacak şekilde $n,r$ tamsayıları için

$$H_n^r(\alpha)=\sum_{i=1}^{n} H_i^{r-1}(\alpha)$$

sayısına r mertebeli genelleştirilmiş n-inci hiperharmonik sayı adı verilir.

Eğer $r=0$ ise $H_n^0(\alpha)=\frac{1}{n\alpha^n}$ ve $r<0$ veya $n\leq 0$ ise $H_n^r(\alpha)=0$ şeklinde tanımlanır. Bu tanımda $r=1$ alınırsa $H_n(\alpha)$; $\alpha=1$ alınırsa $H_n^r$; her ikisi birden uygulanırsa $H_n$ elde edilir. Ayrıca

$$H_n^r(\alpha)=H_{n-1}^r(\alpha)+H_n^{r-1}(\alpha)$$

bağıntısının var olduğu açıktır.

Bu bölümden sonraki her aşamada $\alpha$ pozitif bir reel sayı olarak varsayılmıştır.

Tanım 1.9. $n>r\geq 0$ olacak şekilde $n,r$ tamsayıları için r kademeli n-inci harmonik sayı

$$H(n,r)=\sum_{1\leq k_0+k_1+\cdots+k_r\leq n} \frac{1}{k_0 k_1 \cdots k_r}$$

şeklinde tanımlanır (Santmyer, 1997). $n\leq r$ için $H(n,r)=0$ olarak tanımlanır. Bu tanımda $r=0$ alınırsa $H(n,0)=H_n$ elde edilir.

Tanım 1.10. x bir reel sayı ve $n\geq 1$ olacak şekilde bir tamsayı olmak üzere, azalan faktöriyel

$$x^{\underline{n}}=\prod_{i=1}^{n}(x-i+1)$$

şeklinde tanımlanır ve $x^{\underline{0}}=1$ olarak varsayılır.

Tanım 1.11. $n \geq k$ doğal sayıları için binom katsayısı

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

şeklindedir. Eğer $n<k$ oluyorsa binom katsayıları 0 olarak tanımlanır.

Tanım 1.12. Negatif olmayan bir n tamsayısı için n-inci Daehee sayısı

$$D_n = \frac{(-1)^n n!}{n+1}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.13. n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere $x^{\underline{n}}$'nin oluşturduğu polinomun katsayılarını oluşturan sayılara (birinci tür) Stirling sayıları denir. Başka bir deyişle, Stirling sayıları

$$x^{\underline{n}} = \sum_{i=0}^{n} s(n,i)x^i$$

eşitliğindeki $s(n,i)$ sayılarıdır. Bu tanımdan $s(0,0)=1$ olduğu görülür. Ayrıca Stirling sayıları için

$$(-1)^{n-k}s(n,k) = |s(n,k)| = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

gösterimi mevcuttur.

Tanım 1.14. Pozitif bir n tamsayısı için Stirling polinomu

$$\sigma_n(x) = \frac{|s(x,x-n)|}{x^{\underline{n+1}}}$$

şeklindedir. Stirling polinomunun ilk birkaç terimi

$$\sigma_0(x) = \frac{1}{x},$$

$$\sigma_1(x) = \frac{1}{2},$$

$$\sigma_2(x)=\frac{3x-1}{24},$$

$$\sigma_3(x)=\frac{x^2-x}{48},$$

$$\sigma_4(x)=\frac{15x^3-30x^2+5x+2}{5760},$$

şeklindedir (Graham ve diğ., 1994).

Tanım 1.15. n,r doğal sayıları için $\rho(n,r)$ fonksiyonu

$$\rho(n,r)=r!r\sigma_n(r)$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak $r>n$ alınırsa

$$\rho(n,r)=\begin{bmatrix} r \\ r-n \end{bmatrix}\binom{r-1}{n}^{-1}$$

olduğu görülür.

Tanım 1.16. n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$x^n=\sum_{i=0}^{n} S(n,i)x^{\underline{i}}$$

olacak şekildeki $S(n,i)$ sayısına ikinci tür Stirling sayısı denir. Bu tanımda dikkat edilirse $S(0,0)=1$ olduğu görülür.

Tanım 1.17. Negatif olmayan bir n tamsayısı için n-inci düzensizlik sayısı[1]

$$d_n=n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}$$

şeklinde tanımlanır (Rosen, 2012).

[1]Uluslararası kaynaklarda derangement number olarak adlandırılır.

## 1.2. Üreteç Fonksiyonlar

Tanım 1.18. c sabit bir reel sayı ve $\{a_n\}_{n\geq 0}$ bir reel dizi olmak üzere

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+\cdots$$

şeklindeki bir seriye kuvvet serisi ve $\{a_n\}$ dizisinin her bir elemanına ise serinin katsayısı adı verilir. Eğer her $k>n$ için $a_k=0$ oluyorsa bu kuvvet serisine bir polinom denir. Alınacak x değerleri için $A(x)$'in yakınsaklığı ya da ıraksaklığı önemli değilse bu kuvvet serisi formal kuvvet serisi olarak adlandırılır.

Bir sonraki tanımda verilmiş olan üreteç fonksiyonları, seriyi bilinen bir kuvvet serisindeki x değişkeninin kuvvetlerinin katsayıları olarak verimli bir şekilde temsil etmek için kullanılır. Üreteç fonksiyonlar tekrarlama bağıntılarını çözmek için kullanılabilir. Önce onları içinde üreteç fonksiyon olan eşitliklere çevirerek, daha sonra da bu eşitliği üreteç fonksiyonu için kapalı bir form bulmak için çözmek gerekebilir. Bu kapalı form ile üreteç fonksiyon için kuvvet serisinin katsayıları bulunmuş olunur ki bu da ilk tekrarlama bağıntısını çözmek anlamına gelir. Üreteç fonksiyonlar ayrıca seri terimlerini içeren nesnelerin yer aldığı fonksiyonlar arasındaki nispeten basit ilişkilerden faydalanarak kombinatoryal ifadelerin ispatında da kullanılabilir (Rosen, 2012).

Verilen bir üreteç fonksiyonundan bir dizinin bulunabilmesi gibi, verilen bir dizinin oluşturduğu formal kuvvet serisine tekabül eden üreteç fonksiyonunu da bulmak mümkündür. Bunların örnekleri aşağıdaki tanımdan itibaren verilmiştir.

Tanım 1.19. $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ reel sayılarından oluşan serinin üreteç fonksiyonu

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

şeklindeki sonsuz formal kuvvet serisidir. Bu sonsuz serinin yazılışı $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$ şeklinde ise üstel üreteç fonksiyon, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n}$ ise de logaritmik üreteç fonksiyon adını alır.

Örnek 1.20. {1} dizisinin katsayı olduğu üreteç fonksiyonunu araştırmak için $f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n$ seçilsin. Buradan

$$f(x)-xf(x)=1-x^{n+1}$$

$$f(x)=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

elde edilir. Seçilen f(x) fonksiyonu için $n$ büyüdükçe $|x|<1$ ise $x^{n+1}$ sayısı 0'a yaklaşır. O halde x'in bu aralıktaki değerleri için

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{n\mapsto\infty} f(x) = \lim_{n\mapsto\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} \tag{1.4}$$

şeklinde elde edilir. Buradaki $\lim_{n\mapsto\infty} f(x) = \frac{1}{1-x}$ fonksiyonunun oluşturduğu seriye geometrik seri adı verilir.

Örnek 1.21. $\ln(1+x)$ fonksiyonunun kuvvet serisi için

$$\ln(1+x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots a_nx^n+\cdots$$

şeklinde yazılabildiği kabul edilsin. O halde $a_0=\ln 1=0$ olduğu görülebilir. Şimdi her iki tarafın x'e göre türevi alınırsa

$$\ln'(1+x) = a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots$$

olduğu görülür. Böylece $a_1=\ln'(1+x)|_{x=0}=1$ olduğu görülür. Benzer şekilde ilerlenirse $a_2=\frac{\ln''(1+x)}{2}\Big|_{x=0}=\frac{-1}{2}$, $a_3=\frac{\ln'''(1+x)}{6}\Big|_{x=0}=\frac{1}{3}$, $\cdots$ olduğu görülür. Böylece

$$\ln(1+x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots a_nx^n+\cdots$$

$$=0+1x+\frac{-1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

olarak bulunur. Burada dikkat edilmesi gereken nokta, x=-1 değeri için bu ifadenin doğru olamayacağıdır. Çünkü x=-1 için $\ln 0$ tanımsızdır. Dolayısıyla böyle bir değer olamayacağı için üreteç fonksiyonundaki değişkenin bazı koşullar altındayken, başka bir deyişle kuvvet serisi üreteç fonksiyona yakınsıyorken bu eşitlikleri sağlandığına dikkat edilmelidir. Burada $-1<x\leq 1$ için bu seri yakınsar. Bulunan sonuçta x değişkeni -x olarak değiştirilirse ve eşitliğin her iki tarafı -1 ile çarpılırsa

$$-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \tag{1.5}$$

elde edilir.

Örnek 1.21'de bahsedilen ve üreteç fonksiyonunu elde etmek için kullanılan yöntemin mantığı, bir genelleme olarak aşağıdaki tanıma dayanır.

Tanım 1.22. Bir f(x) fonksiyonu x=c noktası civarında tanımlı ise, bu civardaki Taylor serisi

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 1.23. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n x^n$ ve $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}g_n x^n$ olsun. Bu iki elemanın toplama ve çarpma işlemleri sırasıyla

$$f(x)+g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(f_n+g_n)x^n$$

$$f(x)g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}f_i g_{n-i}\,x^n$$

şeklinde olur. Eğer iki formal kuvvet serisi için f(x)=g(x) ise her $i\geq 0$ için $f_i=g_i$ olur.

Örnek 1.24. Harmonik sayıları katsayı kabul eden üreteç fonksiyonunu araştırmak için $\{H_n\}_{n\geq 0}$ dizisi seçilsin. Eğer harmonik sayıların tanımı ve kuvvet serilerinin yer değiştirme özelliği kullanılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} x^n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \sum_{n=i}^{\infty} x^n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} x^i \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

elde edilir. Eğer (1.4), (1.5) ve $H_0=0$ olduğu kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n x^n = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$$

olarak bulunur.

Tanım 1.25. Daha önce verilen Tanım 1.9'daki $H(n,r)$ sayısı

$$\frac{(-\ln(1-x))^{r+1}}{1-x}$$

üreteç fonksiyonunun katsayısını oluşturan sayılardır (Santmyer, 1997).

Yukarıdaki tanımda olduğu gibi, bazen özel sayıların tanımı üreteç fonksiyonları yardımıyla verilebilir. Aşağıdaki üç tanım bu şekilde verilmiş sayılar bulundurmaktadır.

Tanım 1.26. n-inci Bernoulli sayısı $B_n$,

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

şeklinde tanımlanır. Bernoulli sayıları, $B_0=1$ başlangıç koşuluyla beraber bir $r\geq 1$ tamsayısı için

$$(r+1)B_r = -\sum_{i=0}^{r-1} \binom{r+1}{i} B_i$$

bağıntısıyla elde edilebilir (Agoh & Dilcher, 2009).

Tanım 1.27. Bir $r\geq 1$ sayısı için

$$\left(\frac{x}{\ln(1+x)}\right)^r=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n^r}{n!}x^n$$

şeklinde oluşan $C_n^r$ sayısına r mertebeli n-inci Cauchy sayısı denir. Eğer $r=1$ olursa $C_n^1:=C_n$ sayısına n-inci Cauchy sayısı denir (Rim ve diğ., 2018).

Tanım 1.28. Bir $r\geq 1$ sayısı için

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^r=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_n^r}{n!}x^n$$

şeklinde oluşan $D_n^r$ sayısına r mertebeli n-inci Daehee sayısı denir. Eğer $r=1$ olursa Tanım 1.12'deki $D_n^1=D_n$ sayısı elde edilir (Rim ve diğ., 2018).

Bu çalışmada kullanılan ve önemli olan tüm üreteç fonksiyonlarının listesi Bölüm 2'de okuyucuya sunulmuştur. Teorem 1.30'dan önce okurun Tablo 2.3'ten $D_n$ ve $H_n^r$ sayılarının üreteç fonksiyonlarına bakması faydalı olacaktır.

Lemma 1.29. (Binom Teoremi) Bir r doğal sayısı için

$$(y+x)^r=\sum_{n=0}^{r}\binom{r}{n}y^{r-n}x^n$$

olur. Burada $y=1$ alınırsa ve $r<n$ olduğunda $\binom{r}{n}=0$ olduğu için

$$(1+x)^r=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{r}{n}x^n$$

yazılabilir.

Teorem 1.30. Negatif olmayan n ve r tamsayıları için

$$D_n=n!\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{r}{n-i}H_{i+1}^r$$

elde edilir (Rim ve diğ., 2018).

İspat. Daehee ve r-mertebeli hiperharmonik sayıların üreteç fonksiyonları sırasıyla $\frac{\ln(1+x)}{x}$ ve $\frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^r}$ şeklindedir. O halde Teorem 1.23 kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_n}{n!}x^n=\frac{\ln(1+x)}{x}$$
$$=\frac{-\ln(1+x)}{(1+x)^r}\frac{(1+x)^r}{-x}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}H_n^r x^{n-1}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{r}{n}x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}H_{n+1}^r x^{n}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{r}{n}x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{r}{n-i}H_{i+1}^r x^n$$

bulunur. Formal kuvvet serilerinin eşitliği kullanılır ve eşitliğin her iki tarafı n! ile çarpılırsa

$$D_n=n!\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{r}{n-i}H_{i+1}^r$$

elde edilir. öylece ispat tamamlanmış olur.

### 1.3. Riordan Işınları ve Riordan Grubu

Riordan ışınlarını tanımlamadan önce ihtiyaç duyulan bazı cebirsel yapıları tanıtmak yararlı olacaktır. G bir küme olsun ve bu küme üzerinde $\circ: G\times G\to G$ fonksiyonu alınsın. Buradaki $\circ$ fonksiyonuna bir (ikili) işlem adı verilir. Her $a,b\in G$ için $\circ(a,b)$ görüntü elemanı $a\circ b$ şeklinde gösterilir. Buna dair örnekleri tam sayılar üzerindeki toplama işlemi, matrislerdeki çarpma işlemi gibi çeşitlendirilebilir. Verilen $\circ$ işleminin tanımlandığı kümede birleşme özelliği varsa, yani her $a,b,c\in G$ için $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$ oluyorsa ve G'nin birim elemanı varsa $(G,\circ)$ ikilisine monoid denir. Örneğin pozitif tamsayılar üzerinde çarpma işlemi düşünülürse $(\mathbb{Z}^+,\cdot)$ bir monoid olur. Eğer bir

monoid yapısında her elemanın tersi mevcut ise bu yapıya grup adı verilir. Örneğin sıfır hariç tüm reel sayılar çarpma işlemiyle beraber $(\mathbb{R}\backslash\{0\},\cdot)$ grubunu oluşturur.

Tanım 1.31. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ ve $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n$ şeklinde iki fonksiyon olsun. $[x^n]$ katsayı operatörü, yani $[x^n]f(x)=f_n$ olmak üzere

$$r_{n,k}=[x^n]g(x)\big(xf(x)\big)^k \tag{1.6}$$

şeklinde elemanlar tanımlansın. Bu durumda $R=\left[r_{n,k}\right]_{n,k\geq 0}=\big(g(x),f(x)\big)$ ikilisine bir Riordan ışını (sıralısı) adı verilir. Burada $\left[r_{n,k}\right]_{n,k\geq 0}$ sıfırıncı satır ve sıfırıncı sütundan başlayan bir sonsuz alt üçgensel matrisidir. Eğer $f_0\neq 0\neq g_0$ olursa bu Riordan ışınına temel Riordan ışını adı verilir. Temel Riordan elemanlarının kümesini $\mathfrak{R}$ ile, temel olmayan Riordan ışınlarının kümesini $\mathfrak{R}^*$ ile gösterilecektir. $\mathfrak{R}$ kümesi, $\big(g(x),f(x)\big)$, $\big(v(x),u(x)\big)\in R$ olmak üzere

$$\big(g(x),f(x)\big)*\big(v(x),u(x)\big)=\Big(g(x)v\big(xf(x)\big),f(x)u\big(xf(x)\big)\Big) \tag{1.7}$$

işlemiyle beraber bir grup oluşturur (Shapiro ve diğ., 1991). $(\mathfrak{R},*)$ grubunda seçilen bir $\big(g(x),f(x)\big)$ ikilisinin tersi aşağıda tanıtılmıştır. Eğer $xf(x)=\varphi(x)$ şeklinde verilirse bir Riordan ışının tersi

$$\big(g(x),f(x)\big)^{-1}=\left(\frac{1}{g\big(\overline{\varphi}(x)\big)},\frac{1}{f\big(\overline{\varphi}(x)\big)}\right) \tag{1.8}$$

şeklindedir. Burada $\overline{\varphi}(x)$ fonksiyonu $\varphi(x)$'in fonksiyon tersidir. Riordan grubunda seçilen bir elemana ve tersinin elde edilişine dair açıklamalar Örnek 1.32'de okuyucuya sunulmuştur. Ayrıca $*$ işleme göre $\mathfrak{R}^*$ kümesinin oluşturduğu $(\mathfrak{R}^*,*)$ cebirsel yapısı bir monoid oluşturur.

Riordan matrisinin oluşturulması için Tanım 1.31 altındaki koşullarda olan fonksiyonlar göz önüne alınsın. $\sum_{k=0}^{n} r_{n,k}=r_n$ olmak üzere $r_n$'ye $R=\big(g(x),f(x)\big)$ matrisinin n-inci satır toplamı denir ve üreteç fonksiyonu

$$r(x)=\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n = \frac{g(x)}{1\text{-}xf(x)} \tag{1.9}$$

şeklindedir. Ayrıca R Riordan ışınının oluşturduğu matrisin k-ıncı sütununu oluşturan fonksiyon $r_k(x)$ ile gösterilirse

$$r_k(x)=g(x)\big(xf(x)\big)^k$$

şeklinde olur. Buradan hareketle Riordan matrisi oluşurken k-ıncı sütunun elemanlarını $r_k(x)$'in ürettiği dizi oluşturur.

Örnek 1.32. Riordan ışını için alınacak fonksiyonlar $f(x)=g(x)=\frac{1}{1\text{-}x}$ olarak seçilsin ve ardından $r_{n,k}$ elemanları araştırılırsa

$$r_{n,0}=[x^n]\frac{1}{1\text{-}x}\left(\frac{x}{1\text{-}x}\right)^0=[x^n]\sum_{n=0}^{\infty} x^n=1,$$

$$r_{n,1}=[x^n]\frac{1}{1\text{-}x}\left(\frac{x}{1\text{-}x}\right)^1=[x^n]\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{1}x^n=\binom{n}{1}$$

$$r_{n,2}=[x^n]\frac{1}{1\text{-}x}\left(\frac{x}{1\text{-}x}\right)^2=[x^n]\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{2}x^n=\binom{n}{2},$$

$$\vdots$$

$$r_{n,k}=[x^n]\frac{1}{1\text{-}x}\left(\frac{x}{1\text{-}x}\right)^k=[x^n]\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^n=\binom{n}{k}$$

$$\vdots$$

olup

$$[r_{n,k}]_{n,k\geq 0}=\begin{bmatrix} r_{0,0} & & & & & & \\ r_{1,0} & r_{1,1} & & & & & \\ r_{2,0} & r_{2,1} & r_{2,2} & & & & \\ r_{3,0} & r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ r_{n,0} & r_{n,1} & r_{n,2} & \cdots & r_{n,n-1} & r_{n,n} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$=\left[\binom{n}{k}\right]_{n,k\geq 0}$$

elde edilir. Böylece $[r_{n,k}]_{n,k\geq 0}=\left[\binom{n}{k}\right]_{n,k\geq 0}=\left(\frac{1}{1-x},\frac{1}{1-x}\right):=\mathcal{P}\in\Re$ olduğu görülür. Bu matrise Pascal matrisi denir. $\mathcal{P}$ matrisinin n-inci satır toplamı $p_n$ olmak üzere

$$p_n=\sum_{k=0}^{n} r_{n,k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

şeklindedir. $p_n$'yi üreten üreteç fonksiyonu $p(x)$ olmak üzere

$$p(x)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n=\frac{1}{1-2x}$$

şeklindedir. Bu üreteç fonksiyonunu (1.9)'dan da bulunabilir.

Eğer $\mathcal{P}^{-1}\in\Re$ elemanı (1.8)'deki formülden bulunmak istenirse $\varphi(x)=xf(x)=\frac{x}{1-x}$ olup, bu fonksiyonun tersi $\overline{\varphi}(x)=\frac{x}{1+x}$ şeklinde bulunur. O halde,

$$\mathcal{P}^{-1}=\left(\frac{1}{1-x},\frac{1}{1-x}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{\frac{1}{1-\frac{x}{1+x}}},\frac{1}{\frac{1}{1-\frac{x}{1+x}}}\right)=\left(\frac{1}{1+x},\frac{1}{1+x}\right)$$

olarak elde edilir. Böylece öncekiyle benzer şekilde işlemler yapılırsa $\mathcal{P}^{-1}=\left[(-1)^{n+k}\binom{n}{k}\right]_{n,k\geq 0}$ elde edilmiş olur.

Riordan ışınlarını kullanmak, özdeşlik elde etmek için son dönemlerde sıkça kullanılan kullanışlı bir yöntem haline gelmiştir. Riordan ışınlarının kullanılmasıyla özdeşlik elde etme yöntemlerinden biri Teorem 1.33 itibariyle okurlara sunulmuştur.

Teorem 1.33. $R=\left[r_{n,k}\right]=\left(g(x),f(x)\right)$ bir Riordan ışını ve $\{h_n\}_{n\geq 0}$ dizisinin üreteç fonksiyonu $h(x)$ olsun. O halde

$$\sum_{k=0}^{n} r_{n,k}h_k=[x^n]g(x)h\left(xf(x)\right) \tag{1.10}$$

özelliği sağlanır (Sprugnoli, 1994).

İspat. Eğer bir $\left[r_{n,k}\right]$ Riordan ışını için $k>n$ olduğunda $r_{n,k}=0$ olduğuna dikkat edilirse

$$\sum_{k=0}^{n} r_{n,k}h_k=\sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k}h_k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}[x^n]g(x)\left(xf(x)\right)^k h_k$$

$$=[x^n]g(x)\sum_{k=0}^{\infty} h_k\left(xf(x)\right)^k$$

$$=[x^n]g(x)h\left(xf(x)\right)$$

olur. Böylece istenilen özellik elde edilir.

Örnek 1.34. Eğer Teorem 1.33'te $R=\left(\frac{-1}{1-x},\frac{-1}{1-x}\right)=\left[(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\right]$ ve $h_n=H_n$, başka bir deyişle $h(x)=\frac{-\ln(1-x)}{1-x}$ seçilirse

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}H_k=[x^n]\frac{-1}{1-x}h\left(\frac{-x}{1-x}\right)=[x^n]\ln\frac{1}{1-x}=[x^n]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=\frac{1}{n},\quad n\geq 1$$

özdeşliği elde edilir (Cheon & El-Mikkawy, 2008).

Teorem 1.35. $n,m\geq 0$ tamsayıları için

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{m}{i} iH_i = m\binom{n+m-1}{n+1}(H_n - H_{n+m-1} - H_{m-2}),\ m\geq 0$$

özdeşlikleri vardır (Wang, 2010).

Teorem 1.36. $n,m,r\geq 0$ tamsayıları için

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}H_{i+m}^2 = \binom{n+m}{m}^{-1}\frac{1}{n}(2H_{n-1} - H_{n+m} - H_m),$$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n+m-i-1}{n-i}\binom{i+r}{i}H_{i+r} = \binom{n+m+r}{m+r}\frac{1}{n}(H_{n+m+r} - H_{m+r} + H_r)$$

özdeşlikleri sağlanır (Wuyungaowa, 2015).

Teorem 1.37. $n,m\geq 0$ tamsayıları için

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} i^m x^{n-i} = \sum_{i=0}^{m} i!\binom{n}{i} S(m,i)(1+x)^{n-i},$$

$$S(m,n) = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{m}(-1)^{n-i}\binom{n}{i} i^m$$

özdeşlikleri sağlanır (Cheon ve diğ., 2006).

Tanım 1.38. $R=[r_{n,k}]=(g(x),f(x))$ bir Riordan ışını olsun. Verilen $h(x)=\sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n$ şeklindeki bir fonksiyon için $T_R$ operatörü

$$T_R h(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} r_{n,k} h_k x^n = g(x)h(xf(x)) \qquad (1.11)$$

şeklinde tanımlanır.

Daha önce Örnek 1.24'te verildiği üzere

$$\frac{-\ln(1-x)}{1-x}=x\left(1+\frac{3}{2}x+\frac{11}{6}x^2+\cdots\right):=\hat{g}(x)$$

olduğu biliniyor. $xg(x)=\hat{g}(x)$ şeklinde bir $g(x)=\frac{-\ln(1-x)}{x(1-x)}$ fonksiyonu ve $f(x)=\frac{-\ln(1-x)}{x}=\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+\cdots\right)$ fonksiyonu tanımlansın. Buradan

$$\big(g(x),f(x)\big)=\left(\frac{-\ln(1-x)}{x(1-x)},\frac{-\ln(1-x)}{x}\right):=\mathcal{H}\in\Re$$

şeklinde bir Riordan ışını oluşturulsun. Bu Riordan ışınını oluşturduğu matrisin genel terimi $\left[h_{n,k}\right]$ olmak üzere r kademeli harmonik sayıların üreteç fonksiyonu kullanılırsa $n,k\geq 0$ için

$$h_{n,k}=[x^n]\frac{-\ln(1-x)}{x(1-x)}(-\ln(1-x))^k=[x^{n+1}]\frac{(-\ln(1-x))^{k+1}}{1-x}$$
$$=H(n+1,k) \qquad (1.12)$$

elde edilir.

Teorem 1.39. r kademeli $H(n,r)$ sayısı için

(i.) $\sum_{i=0}^{n-1}\frac{H(n,i)}{(i+1)!}=n,$

(ii.) $\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^iH(n,i)}{(i+1)!}=1,$

(iii.) $\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}H(n+1,i)}{i!}=H_n$

özdeşlikleri sağlanır (Cheon & El-Mikkawy, 2008).

İspat. Eğer (1.10)'da $h(x)=\frac{e^x-1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}x^n$ seçilirse, Riordan ışını $\mathcal{H}$ alınırsa ve n yerine n-1 yazılırsa

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{H(n,i)}{(i+1)!}=[x^{n-1}]\frac{-\ln(1-x)}{x(1-x)}\frac{x}{(1-x)\ln(1-x)}=[x^{n-1}]\frac{1}{(x-1)^2}\ =n$$

elde edilir ve bu (i.)'yi kanıtlar. Diğer ispatlar için benzer şekilde sırasıyla $h(x)=\frac{1-e^{-x}}{x}$ ve $h(x)=1-e^{-x}$ seçilirse ispat tamamlanır.

Teorem 1.40. $n\geq 2$ tamsayısı için

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}iH_{n-i+1}^{i}=\frac{1}{n(n-1)}$$

özdeşliği sağlanır (Cheon & El-Mikkawy, 2008).

İspat. Eğer $h(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$ seçilirse

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}iH_{n-i+1}^{i}=[x^n]\frac{(1-x)\ln(1-x)}{x}=\frac{1}{n(n-1)}$$

elde edilir.

Tanım 1.41. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n x^n$ şeklinde bir fonksiyon olsun. Bu $f(x)$ fonksiyonu için fark operatörü

$$\mathcal{R}f(x)=\frac{f(x)-f_0}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}f_{n+1}x^n$$

şeklinde tanımlanır.

Verilen bir $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n x^n$ fonksiyonunu logaritmik üreteç fonksiyonuna çevirmek için fark operatörü

$$\int_0^x \mathcal{R}f(t)dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}f_{n+1}t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}f_{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\frac{x^n}{n} \qquad (1.13)$$

şeklinde kullanılabilir.

Teorem 1.42. $R=[r_{n,k}]=(g(x),f(x))$ bir Riordan ışını ve bu ışının oluşturduğu matrisin n-inci satır toplamı $\sum_{k=0}^{n}r_{n,k}=r_n$ olsun. O zaman

$$\mathcal{R}s(x)=\frac{\left(xf(x)\right)'}{1\text{-}xf(x)}$$

olacak şekilde bir $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ fonksiyonu için

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{s_k}{k}r_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}r_{n,k}\,H_k \tag{1.14}$$

özdeşliği sağlanır (Munarini, 2011).

İspat. İstenilen toplamı elde etmek için önce $s(x)$ fonksiyonunun logaritmik üreteç fonksiyonu bulunur. (1.13) kullanılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty}s_n\frac{x^n}{n}=\int_0^x\mathcal{R}s(t)dt=\int_0^x\frac{\left(xf(x)\right)'}{1\text{-}xf(x)}dt=\ln\frac{1}{1\text{-}xf(x)}$$

elde edilir. Şimdi ispatlanmaya çalışılan kısmın sol tarafının üreteç fonksiyonuyla hareket edilirse ve (1.9) kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{s_k}{k}r_{n-k}\,x^n=\sum_{n=0}^{\infty}r_n x^n\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_n}{n}x^n$$
$$=\frac{g(x)}{1\text{-}xf(x)}\ln\frac{1}{1\text{-}xf(x)}$$
$$=g(x)h\left(xf(x)\right)$$
$$=T_R h(x)$$

elde edilir. Burada $h(x)$ fonksiyonu harmonik sayıları üreten $\frac{-\ln(1-x)}{1-x}$ fonksiyonudur. Böylece (1.11) ve üreteç fonksiyonlarının eşitliğinden istenen elde edilir.

Eğer $r_n$ kapalı formda yazılamıyorsa o zaman (1.14) denklemi iki toplamlı olarak

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{s_k}{k}\sum_{i=0}^{n-k}r_{n-k,i}=\sum_{k=0}^{n}r_{n,k}\,H_k$$

şeklinde ifade edilebilir.

Sonuç 1.43. $R=[r_{n,k}]=\left(\left(xf(x)\right)',f(x)\right)$ bir Riordan ışını ve bu Riordan ışınının satır toplamı $r_n$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{r_{k-1}}{k}r_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}r_{n,k}\,H_k$$

özdeşliği sağlanır (Munarini, 2011).

İspat. Eğer Teorem 1.42'de $g(x)=\left(xf(x)\right)'$ alınırsa (1.9) gereği

$$\sum_{n=0}^{\infty}r_n x^n=r(x)=\frac{\left(xf(x)\right)'}{1-xf(x)}=\mathcal{R}s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}s_{n+1}x^n$$

elde edilir. Bu ise $n\geq 1$ için $s_n=r_{n-1}$ olması demektir. Böylece (1.14) gereği ispat tamamlanmış olur.

Teorem 1.44. Her $q\in\mathbb{R}^+$, $q\neq 1$ için

$$\sum_{k=0}^{n}q^{n-k}H_k=\frac{q^{n+1}H_n(q)-H_n}{q-1},\ q\neq 0$$

$$\sum_{k=0}^{n}q^{k}H_k=\frac{H_n(1/q)-q^{n+1}H_n}{1-q},\ q\neq 0$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}H_k=\frac{H_n+(-1)^n\widetilde{H}_n}{2}$$

özdeşlikleri sağlanır (Munarini, 2011). Burada $\widetilde{H}_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^i}{i}$ şeklindedir.

İspat. $\left[q^{n-k}\right]_{n,k\geq 0}$ matrisini oluşturan Riordan ışını $\left(\frac{1}{1-qx},1\right)$ şeklindedir. Bu matrise karşılık gelen n-inci satır toplamı $q_n$ olmak üzere

$$q_n=1+q+q^2+\ldots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

şeklindedir. Teorem 1.42'de $\mathcal{R}s(x)=\frac{1}{1-x}$ olup $n\geq 0$ için $s_n=1$ olarak elde edilir. $q\neq 0$ için (1.14) kullanılırsa

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\frac{1-q^{n-k+1}}{1-q}=\frac{1}{q-1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{q^{n-k+1}}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=\frac{q^{n+1}H_n(q)-H_n}{q-1}$$

elde edilir. Bu ise ilk özdeşliğin ispatını tamamlar. İkinci özdeşlik, birinci özdeşlikte $q$ yerine $1/q$ alınırsa; üçüncü özdeşlik ise, birinci özdeşlikte $q$ yerine $-1$ alınırsa elde edilir.

# 2. ÜRETEÇ FONKSİYONLARIYLA ELDE EDİLEN ÖZDEŞLİKLER VE GENELLEŞTİRİLMİŞ KADEMELİ HARMONİK SAYILAR

Bu bölümde, daha önce tanıtılmış olan üreteç fonksiyonlarının özellikleri kullanılarak bazı özdeşliklerin elde edilmesi amaçlanmıştır. Bu bölümdeki özdeşliklerin bulunması için ihtiyaç duyulan üreteç fonksiyonları ve formal kuvvet serilerine ait bilgiler Tablo 2.3'te verilmiştir. Bu çalışmalar yapılmadan önce okurlara bu tezde ilk defa tanımlanmış olan genelleştirilmiş r kademeli harmonik sayılar tanıtılmıştır. Bu sayılar, Tanım 1.9'daki r kademeli harmonik sayıların genelleştirilmiş hali olup tanımı aşağıdaki gibidir.

Tanım 2.1. Verilen $\alpha$ pozitif reel sayısı ve $n>r\geq 0$ olacak şekildeki tamsayılar için

$$H(n,r,\alpha)=\sum_{1\leq k_0+k_1+\cdots+k_r\leq n}\frac{1}{k_0k_1\cdots k_r\alpha^{k_0+k_1+\cdots+k_r}}$$

şeklindeki sayıya genelleştirilmiş r kademeli n-inci harmonik sayı adı verilir. $n=0$ ya da $n\leq r$ için $H(n,r,\alpha)=0$ olduğu varsayılır. Bu tanımda dikkat edilirse $H(0,0,\alpha)=0$ olduğu görülür. Eğer bu tanımda $\alpha=1$ seçilirse r kademeli harmonik sayı $H(n,r)$; $r=0$ seçilirse genelleştirilmiş harmonik sayı $H_n(\alpha)$; $\alpha=1$ ve $r=0$ seçilirse harmonik sayı $H_n$ elde edilir.

Genelleştirilmiş kademeli harmonik sayıların nasıl elde edileceğinin gösterilmesi için örnek olarak $H(5,2,2)$ sayısının elde edilişi verilmiştir. Tanım gereği bu sayı

$$H(5,2,2)=\sum_{1\leq k_0+k_1+k_2\leq 5}\frac{1}{k_0k_1k_2 2^{k_0+k_1+k_2}}$$

şeklinde olmalıdır. Burada $i=0, 1, 2$ için $k_i$ sayılarından birinin sıfır olmasının ifadeyi tanımsız yapacağına dikkat edilmelidir. Toplamları 5'ten küçük eşit olan $i=0, 1, 2$ için $k_i$ sayıları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 2.1. $H(5,2,2)$ için durumlar

| $k_0$ | $k_1$ | $k_2$ | Toplam değerleri |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 4 |
| 1 | 2 | 1 | 4 |
| 2 | 1 | 1 | 4 |
| 1 | 2 | 2 | 5 |
| 2 | 1 | 2 | 5 |
| 2 | 2 | 1 | 5 |
| 1 | 1 | 3 | 5 |
| 1 | 3 | 1 | 5 |
| 3 | 1 | 1 | 5 |

şeklindedir. O halde

$$H(5,2,2)=\frac{1}{1\times1\times1\times2^{1+1+1}}+\frac{3}{1\times1\times2\times2^{1+1+2}}+\frac{3}{1\times2\times2\times2^{1+2+2}}$$

$$+\frac{3}{1\times1\times3\times2^{1+1+3}}=\frac{35}{128}$$

şeklinde elde edilir.

Aşağıda $\alpha=2$ için genelleştirilmiş kademeli harmonik sayıların bazı değerlerini içeren bir tablo verilmiştir.

Tablo 2.2. $H(n,r,2)$ değerleri

| n \ r | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{2}$ | | | | | |
| 2 | $\frac{5}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | | | | |
| 3 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | | | |
| 4 | $\frac{131}{192}$ | $\frac{83}{192}$ | $\frac{7}{32}$ | $\frac{1}{16}$ | | |
| 5 | $\frac{661}{960}$ | $\frac{11}{24}$ | $\frac{35}{128}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{32}$ | |
| 6 | $\frac{1327}{1920}$ | $\frac{5417}{11520}$ | $\frac{155}{512}$ | $\frac{65}{384}$ | $\frac{9}{128}$ | $\frac{1}{64}$ |

Aşağıdaki tabloda, bu bölümde kullanılacak olan üreteç fonksiyonlarının ve bunlara ait formal kuvvet serilerinin listesi aşağıda okurlara sunulmuştur. Bu listede $r$ bir doğal sayı olarak varsayılmıştır.

Tablo 2.3. Üreteç fonksiyonları

| Üreteç fonksiyon | Formal kuvvet serisi | Üreteç fonksiyon | Formal kuvvet serisi |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{1-x}$ | $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ | $\frac{\left[-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right]^{r+1}}{1-x}$ | $\sum_{n=0}^{\infty} H(n,r,\alpha)x^n$ |
| $-\ln(1-x)$ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ | $\frac{x}{e^x-1}$ | $\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$ |
| $e^x$ | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ | $\frac{\ln(1+x)}{x}$ | $\sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{x^n}{n!}$ |
| $(1+x)^r$ | $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n$ | $\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^r$ | $\sum_{n=0}^{\infty} D_n^r \frac{x^n}{n!}$ |
| $\frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$ | $\sum_{n=r}^{\infty} \binom{n}{r} x^n$ | $\frac{(\ln(1+x))^r}{r!}$ | $\sum_{n=r}^{\infty} s(n,r) \frac{x^n}{n!}$ |
| $\frac{-\ln(1-x)}{1-x}$ | $\sum_{n=0}^{\infty} H_n x^n$ | $\frac{(e^x-1)^r}{r!}$ | $\sum_{n=r}^{\infty} S(n,r) \frac{x^n}{n!}$ |
| $\frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^r}$ | $\sum_{n=0}^{\infty} H_n^r x^n$ | $\frac{x}{\ln(1+x)}$ | $\sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{x^n}{n!}$ |
| $\frac{[-\ln(1-x)]^{r+1}}{1-x}$ | $\sum_{n=0}^{\infty} H(n,r)x^n$ | $\left(\frac{x}{\ln(1+x)}\right)^r$ | $\sum_{n=0}^{\infty} C_n^r \frac{x^n}{n!}$ |
| $\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{1-x}$ | $\sum_{n=0}^{\infty} H_n(\alpha)x^n$ | $\frac{e^{-x}}{1-x}$ | $\sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{x^n}{n!}$ |
| $\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{(1-x)^r}$ | $\sum_{n=0}^{\infty} H_n^r(\alpha)x^n$ | $\left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right)^r$ | $\sum_{n=0}^{\infty} \rho(n,r) \frac{x^n}{n!}$ |

r doğal sayısı için, Tablo 2.3'te verilen $\binom{n}{r}$, $s(n,r)$ ve $S(n,r)$ sayılarının tanımı gereği $n<r$ olduğunda bu sayılar 0 olacaktır. Bu sebeple bu sayılara ait formal kuvvet serileri $n=r$ yerine $n=0$'dan başlatılabilir.

Lemma 2.2. Pozitif bir n tamsayısı için

$$H_n(\alpha)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i}{i!}\frac{D_i}{\alpha^{i+1}} \tag{2.1}$$

özdeşliği sağlanır.

İspat. Daehee sayılarının tanımını kullanılarak

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i}{i!}\frac{D_i}{\alpha^{i+1}}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i}{i!}\frac{(-1)^i!}{(i+1)\alpha^{i+1}}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(i+1)\alpha^{i+1}}=H_n(\alpha)$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 2.3. Pozitif n, r tamsayıları için

$$D_n=\alpha^{n+1}n!\sum_{i=0}^{n}\binom{r}{n-i}(-1)^i H_{i+1}^r(\alpha) \tag{2.2}$$

özdeşliği sağlanır.

İspat. Daehee sayısının üreteç fonksiyonu kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_n}{\alpha^{n+1}}\frac{x^n}{n!}=\frac{\ln\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)}{x}$$
$$=\frac{-\ln\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)}{(1+x)^r}\frac{-1}{x}(1+x)^r$$

yazılabilir. Genelleştirilmiş hiperharmonik sayıların üreteç fonksiyonu, üreteç fonksiyonlarının çarpımı ve binom teoreminden

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_n}{\alpha^{n+1}}\frac{x^n}{n!}=\frac{-1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n H_n^r(\alpha)x^n\sum_{i=0}^{\infty}\binom{r}{i}x^i=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\binom{r}{n-i}(-1)^i H_{i+1}^r(\alpha)x^n$$

bulunur. Bu iki formal kuvvet serisi birbirine eşit olduğundan katsayıları da eşittir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 2.4. Pozitif n, r tamsayıları için

$$H_n(\alpha)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i}\binom{r}{i-j}(-1)^{i+j}H_{j+1}^{r}(\alpha)$$

özdeşliği sağlanır.

İspat. Eğer (2.2)'de bulunan sonuç (2.1)'de yerine yazılırsa

$$H_n(\alpha)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i}{i!}\frac{D_i}{\alpha^{i+1}}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i}{i!}i!\sum_{j=0}^{i}\binom{r}{i-j}(-1)^{j}H_{j+1}^{r}(\alpha)$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i}\binom{r}{i-j}(-1)^{i+j}H_{j+1}^{r}(\alpha)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.5. n bir doğal sayı ve $k>0$, $r>1$ olacak şekilde tamsayılar olmak üzere

$$D_n^r=n!\alpha^{n+1}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^j k^{\underline{n-i}}}{\alpha^{i-j}(i-j)!(n-i)!}D_{i-j}^{r-1}H_{j+1}^{k}(\alpha)$$

özdeşliği sağlanır.

İspat. $D_n^r$'nin üstel üreteç fonksiyonu kullanılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_n^r}{\alpha^n}\frac{x^n}{n!}=\left(\frac{\ln\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)}{\frac{x}{\alpha}}\right)^r=\alpha\frac{-\ln\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)}{(-x)(1+x)^k}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)}{\frac{x}{\alpha}}\right)^{r-1}(1+x)^k$$

yazılabilir. O halde binom teoremi ve üreteç fonksiyonları çarpımından

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_n^r}{\alpha^n}\frac{x^n}{n!}=\alpha\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n H_{n+1}^{k}(\alpha)x^n\sum_{j=0}^{\infty}\frac{D_j^{r-1}}{\alpha^j}\frac{x^j}{j!}\sum_{i=0}^{\infty}k^{\underline{i}}\frac{x^i}{i!}$$

$$=\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j H_{j+1}^{k}(\alpha)\frac{D_{n-j}^{r-1}}{\alpha^{n-j}(n-j)!}x^n\sum_{i=0}^{\infty}k^{\underline{i}}\frac{x^i}{i!}$$

$$=\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^j k^{\underline{n-i}}}{\alpha^{i-j}(n-i)!(i-j)!}H_{j+1}^{k}(\alpha)\,D_{i-j}^{r-1}x^n$$

elde edilir. Gerekli elementer işlemler yapılarak ve iki kuvvet serisinin eşitliği tanımından istenen elde edilir.

Teorem 2.6. n, r>1 tamsayıları için

$$n!H_n^r(\alpha)=(-1)^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}\frac{(n-i)(-r)^{\underline{n-i-1}}}{\alpha^{i+1}}D_i$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-i-1}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\frac{(-1)^{n-1}(-r)^{\underline{n-i-j-1}}(n-i-j)}{\alpha^{i+j+1}}D_i^r C_j^{r-1}$$

olur.

İspat. Genelleştirilmiş hiperharmonik sayıların üreteç fonksiyonu ve binom teoremi kullanılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty}H_n^r(\alpha)\,x^n=\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{(1-x)^r}=\frac{1}{\alpha}\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{-\frac{x}{\alpha}}\frac{x}{(1-x)^r}$$

$$=\frac{1}{\alpha}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i D_i}{\alpha^i}\frac{x^i}{i!}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-r)^{\underline{n}}\frac{x^{n+1}}{n!}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i D_i}{\alpha^{i+1}}\frac{x^i}{i!}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(-r)^{\underline{n-1}}n\frac{x^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i D_i}{\alpha^{i+1}i!}\frac{(-1)^{n-i-1}(n-i)(-r)^{\underline{n-i-1}}}{(n-i)!}x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}\frac{(-1)^{n-1}(n-i)(-r)^{\underline{n-i-1}}}{\alpha^{i+1}n!}D_i x^n$$

bulunur. Benzer şekilde, $C_n^r$'nin formal kuvvet serisi kullanılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty}H_n^r(\alpha)\,x^n=\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{(1-x)^r}=\left(\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{-\frac{x}{\alpha}}\right)^r\left(\frac{-\frac{x}{\alpha}}{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}\right)^{r-1}\frac{-\frac{x}{\alpha}}{(1-x)^r}$$

$$=\frac{1}{\alpha}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i D_i^r}{\alpha^i}\frac{x^i}{i!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j C_j^{r-1}}{\alpha^j}\frac{x^j}{j!}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(-r)^{\underline{n-1}}n\frac{x^n}{n!}$$

bulunur. Buradan üreteç fonksiyonlarının çarpımı kullanılırsa ve gerekli elementer işlemler uygulanırsa ikinci eşitlik de önceki eşitlik ile benzer şekilde gösterilmiş olur.

Teorem 2.7. Pozitif n, r tamsayıları için

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}}{(n-i)!}H_i^r(\alpha)=\sum_{i=0}^{n}\frac{d_{n-i}}{(n-i)!}H_i^{r-1}(\alpha)$$

özdeşliği vardır.

İspat. İstenilen eşitliği elde etmek için genelleştirilmiş hiperharmonik sayıların üreteç fonksiyonuyla $e^{-x}$ fonksiyonu çarpılırsa

$$\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{(1-x)^r}e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n^r(\alpha)\,x^n\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!}x^i=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}H_i^r(\alpha)\frac{(-1)^{n-i}}{(n-i)!}x^n \tag{2.3}$$

ve

$$\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{(1-x)^r}e^{-x}=\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{(1-x)^{r-1}}\frac{e^{-x}}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n^{r-1}(\alpha)\,x^n\sum_{i=0}^{\infty}\frac{d_i}{i!}x^i$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{d_{n-i}}{(n-i)!}H_i^{r-1}(\alpha)x^n \tag{2.4}$$

şeklinde iki eşitlik elde edilir. Böylece (2.3) ve (2.4) eşitliklerinin sol tarafları aynı olduğundan istenen özdeşlik elde edilir.

Teorem 2.8. n,r doğal sayıları için

$$H(n,r,\alpha)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i-r}s(n-i,r)r!}{\alpha^{n-i}(n-i)!}H_i(\alpha)$$
$$=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{i-r-1}s(i,r+1)(r+1)!}{\alpha^i i!}$$

özdeşlikleri sağlanır.

İspat. Stirling ve genelleştirilmiş kademeli harmonik sayıların üreteç fonksiyonları ile

$$\sum_{n=0}^{\infty} H(n,r,\alpha)\, x^n = \frac{\left[-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right]^{r+1}}{1-x}$$
$$= \frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{1-x}\left[-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right]^{r}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} H_n(\alpha) x^n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i-r} s(i,r) r!}{\alpha^i i!} x^i$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i-r} s(n-i,r) r!}{\alpha^{n-i}(n-i)!} H_i(\alpha) x^n$$

yazılabilir. Böylece ilk özdeşlik elde edilmiş olur. Diğer özdeşlik için geometrik seri kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} H(n,r,\alpha)\, x^n = \frac{1}{1-x}\left[-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right]^{r+1}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i-r-1} s(i,r+1)(r+1)!}{\alpha^i i!} x^i$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{i-r-1} s(i,r+1)(r+1)!}{\alpha^i i!} x^n$$

elde edilir. Böylece istenen iki özdeşlik ispatlanmış olur.

Teorem 2.9. Pozitif n,r,k tamsayıları için

$$H(n,r,\alpha) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} \binom{k-1}{n-i} (-1)^{n-j-r} \frac{H_j^k(\alpha) s(i-j,r) r!}{\alpha^{i-j}(i-j)!}$$

özdeşliği sağlanır.

İspat. Genelleştirilmiş kademeli harmonik sayıların üreteç fonksiyonu ve binom teoremi kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} H(n,r,\alpha)\, x^n = \frac{\left[-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right]^{r+1}}{1-x}$$

$$=\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{(1-x)^k}\left[-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right]^r(1-x)^{k-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}H_n^k(\alpha)\,x^n\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j-r}s(j,r)r!}{\alpha^j j!}x^j\sum_{i=0}^{\infty}\binom{k-1}{i}(-1)^i x^i$$

elde edilir. Ardından üreteç fonksiyonların çarpımı kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}H(n,r,\alpha)\,x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{n-j-r}s(n-j,r)r!}{\alpha^{n-j}(n-j)!}H_j^k(\alpha)x^n\sum_{i=0}^{\infty}\binom{k-1}{i}(-1)^i x^i$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{k-1}{n-i}(-1)^{n-j-r}\frac{H_j^k(\alpha)s(i-j,r)r!}{\alpha^{i-j}(i-j)!}$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 2.10. n, r, k doğal sayılar olmak üzere

$$D_n^{r+1}=n!\alpha^{n+1}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{k}{n-i}\frac{(-1)^j D_{i-j}^r H_{j+1}^k(\alpha)}{\alpha^{i-j}(i-j)!}$$

özdeşliği sağlanır.

İspat. $D_n^{r+1}$'in üreteç fonksiyonu kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_n^{r+1}}{\alpha^n n!}x^n=\left(\frac{\ln\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)}{\frac{x}{\alpha}}\right)^{r+1}$$

$$=\alpha\frac{-\ln\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)}{-x(1+x)^k}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)}{\frac{x}{\alpha}}\right)^r(1+x)^k$$

$$=\alpha\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n H_n^k(\alpha)x^n\sum_{i=0}^{\infty}\frac{D_i^r}{\alpha^i i!}x^i\sum_{j=0}^{\infty}\binom{k}{j}x^j$$

$$=\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{k}{n-i}\frac{(-1)^j D_{i-j}^r H_{j+1}^k(\alpha)}{\alpha^{i-j}(i-j)!}x^n$$

bulunur. Her iki taraf da $\alpha^n n!$ ile çarpılırsa, iki üreteç fonksiyonun eşitliği tanımından istenen elde edilir.

Teorem 2.11. Pozitif n, r tamsayıları için

$(-1)^{n+1-r}s(n+1,r)r!=\alpha^{n+1}(n+1)!(H(n+1,r-1,\alpha)-H(n,r-1,\alpha))$

özdeşliği sağlanır.

İspat. Stirling sayılarının ve genelleştirilmiş kademeli harmonik sayıların üreteç fonksiyonlarından

$$\sum_{n=r}^{\infty}\frac{(-1)^{n-r}s(n,r)r!}{\alpha^n n!}\,x^{n-1}=\frac{\left[-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right]^r}{x}=\frac{\left[-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right]^r}{1-x}\left(\frac{1}{x}-1\right)$$

$$=\frac{\left[-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right]^r}{x(1-x)}-\frac{\left[-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right]^r}{1-x}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}H(n,r-1,\alpha)\,x^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}H(n,r-1,\alpha)\,x^n$$

yazabiliriz. $H(0,r,\alpha)=0$ olduğu kullanılırsa gerekli cebirsel işlemlerle

$$\sum_{n=r}^{\infty}\frac{(-1)^{n-r}s(n,r)r!}{\alpha^n n!}\,x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}H(n,r-1,\alpha)\,x^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}H(n,r-1,\alpha)\,x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}H(n+1,r-1,\alpha)\,x^n-\sum_{n=0}^{\infty}H(n,r-1,\alpha)\,x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(H(n+1,r-1,\alpha)-H(n,r-1,\alpha))x^n$$

elde edilir. Ayrıca Stirling sayıların tanımı gereği $0\leq k<r$ için $s(k,r)=0$ olduğu kullanılırsa

$$\sum_{n=r}^{\infty}\frac{(-1)^{n-r}s(n,r)r!}{\alpha^n n!}x^{n-1}=\sum_{n=r-1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1-r}s(n+1,r)r!}{\alpha^{n+1}(n+1)!}x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1-r}s(n+1,r)r!}{\alpha^{n+1}(n+1)!}x^n$$

bulunur. Böylece üreteç fonksiyonlarının eşitliğinden istenilen elde edilir.

Teorem 2.12. Pozitif n, r tamsayıları için

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n-i+r}{r}(-1)^{i-r-1}\frac{s(i,r+1)(r+1)!}{\alpha^i i!}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n-i+r-1}{r-1}H(i,r,\alpha)$$

özdeşliği sağlanır.

İspat. Stirling sayılarının ve binom katsayılarının üreteç fonksiyonlarından

$$\left(\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{1-x}\right)^{r+1}=\left[-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right]^{r+1}\frac{1}{(1-x)^{r+1}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-r-1}s(n,r+1)(r+1)!}{\alpha^n n!}x^n\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+r}{r}x^i$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\binom{n-i+r}{r}\frac{(-1)^{i-r-1}s(i,r+1)(r+1)!}{\alpha^i i!}x^n \qquad (2.5)$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$\left(\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{1-x}\right)^{r+1}=\frac{\left[-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right]^{r+1}}{1-x}\frac{1}{(1-x)^{r}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}H(n,r,\alpha)x^n\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+r-1}{r-1}x^i$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\binom{n-i+r-1}{r-1}H(i,r,\alpha)x^n \qquad (2.6)$$

elde edilir. Böylece (2.5) ve (2.6) gereği istenen elde edilir.

Teorem 2.13. Pozitif n, r tamsayıları için

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{(-1)^r s(i,r)r!}{\alpha^i i!}d_{n-i}=n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^n}{(n-i)!}H(i,r-1,\alpha)$$

özdeşliği sağlanır.

İspat. Eğer Stirling, düzensizlik ve genelleştirilmiş kademeli harmonik sayılara ait verilen üreteç fonksiyonları kullanılırsa

$$\frac{\left[-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right]^r}{1-x}e^{-x}=\left(-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right)^r\frac{e^{-x}}{1-x}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-r}s(n,r)r!}{\alpha^n n!}x^n\sum_{i=0}^{\infty}\frac{d_i}{i!}x^i$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{i-r}s(i,r)r!}{\alpha^i i!}\frac{d_{n-i}}{(n-i)!}x^n$$

ve

$$\frac{\left[-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right]^r}{1-x}e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}H(n,r-1,\alpha)x^n\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!}x^i$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}}{(n-i)!}H(i,r-1,\alpha)x^n$$

elde edilir. Bulunan eşitliklerde her iki taraf n! ile çarpılırsa istenen özdeşlik bulunur.

Teorem 2.14. Pozitif n, r tamsayıları için

$$\sum_{i=0}^{n}H(i,r,\alpha)H(n-i,r,\alpha)=\sum_{i=0}^{n}\left\{(1+i)H(i+1,r,\alpha)\frac{(-1)^{n-i-r-1}s(n-i,r+1)(r+1)!}{\alpha^{n-i}(n-i)!}\right.$$
$$\left.-\frac{r+1}{\alpha}\sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^{j-r}s(j,r)r!}{\alpha^{n-i+j}j!}H(i-j,r,\alpha)\right\}$$

özdeşliği sağlanır.

İspat. İstenilenin elde edilmesi için

$$A(x):=\sum_{n=0}^{\infty}H(i,r,\alpha)x^n=(-1)^{r+1}\left(\frac{1-x}{\left[\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right]^{r+1}}\right)^{-1}$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlansın. Her iki tarafın x'e göre türevi alınırsa

$$A'(x)=(-1)^r\left(A(x)\right)^2\left(\frac{-1}{\left[\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right]^{r+1}}+\frac{(-1)^{r+1}(r+1)\left(A(x)\right)^{-1}}{(\alpha-x)\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}\right)$$

$$=\frac{(-1)^{r+1}\left(A(x)\right)^2}{\left[\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right]^{r+1}}+\frac{(r+1)A(x)}{(\alpha-x)\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}$$

bulunur. Buradan $\left(A(x)\right)^2$ ifadesi yalnız bırakılırsa

$$\left(A(x)\right)^2=\left(A'(x)+\frac{(r+1)A(x)}{(\alpha-x)\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}\right)\left[-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right]^{r+1}$$

$$=A'(x)\left[-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right]^{r+1}-\left[-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right]^{r}\frac{(r+1)A(x)}{(\alpha-x)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)H(n+1,r,\alpha)x^n\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i-r-1}s(i,r+1)(r+1)!}{\alpha^i i!}x^i$$

$$-\frac{r+1}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-r}s(n,r)r!}{\alpha^n n!}x^n\sum_{j=0}^{\infty}H(j,r,\alpha)x^j\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha^i}x^j$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\left\{(1+i)H(i+1,r,\alpha)\frac{(-1)^{n-i-r-1}s(n-i,r+1)(r+1)!}{\alpha^{n-i}(n-i)!}\right.$$

$$\left.-\frac{r+1}{\alpha}\sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^{i-r}s(j,r)r!}{\alpha^{n-i+j}(n-i+j)!}H(i-j,r,\alpha)\right\}x^n$$

bulunur. Diğer taraftan, iki kuvvet serisinin çarpımı kullanılırsa

$$\left(A(x)\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}H(i,r,\alpha)H(n-i,r,\alpha)\,x^n$$

şeklinde bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

## 3. RIORDAN IŞINLARIYLA ELDE EDİLEN ÖZDEŞLİKLER

Bu bölümde, Riordan ışınları kullanılarak önceki bölümlerde tanıtılan bazı özel sayılar arasında özdeşliklerin elde edilmesi amaçlanmıştır. Bu özdeşlikler elde edilmeden önce kullanılacak olan Riordan ışınlarını içeren bilgiler Tablo 3.1'de sunulmuş, ardından $\big(g(x),f(x)\big)=[H(n,k,\alpha)]_{n,k\geq 0}$ matrisine ait Riordan ışını bulunmuştur. Diğer Riordan ışınları da benzer şekilde bulunur.

Tablo 3.1. Riordan ışınları

| Genel terim | Riordan ışını |
|---|---|
| $\left[\frac{(-1)^{n-k}s(n,k)k!}{\alpha^n n!}\right]_{n,k\geq 0}$ | $\left(1,\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{x}\right)$ |
| $[H_{n-k}(\alpha)]_{n,k\geq 0}$ | $\left(\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{1-x},1\right)$ |
| $\left[H^k_{n-k}(\alpha)\right]_{n,k\geq 0}$ | $\left(-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right),\frac{1}{1-x}\right)$ |
| $[H(n,k,\alpha)]_{n,k\geq 0}$ | $\left(\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{1-x},\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{x}\right)$ |

$H(n,k,\alpha)$ için (1.6) tanımı gereği $H(n,k,\alpha)=[x^n]g(x)\big(xf(x)\big)^k$ olmalıdır. Eğer genelleştirilmiş kademeli harmonik sayıların formal kuvvet serisi kullanılırsa

$$H(n,k,\alpha)=[x^n]\sum_{n=0}^{\infty}H(n,k,\alpha)x^n$$
$$=[x^n]\frac{\left[-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right]^{k+1}}{1-x}$$
$$=[x^n]\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{1-x}\left(x\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{x}\right)^k$$

yazılabilir. Buradan hareketle

$$g(x)=\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{1-x}$$

ve

$$f(x)=\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{x}$$

seçilirse $[H(n,k,\alpha)]_{n,k\geq 0}=\left(\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{1-x},\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{x}\right)$ olarak bulunur.

Teorem 3.1. $R=[r_{n,k}]=(g(x),f(x))$ bir Riordan ışını ve bu ışının oluşturduğu matrisin n-inci satır toplamı $\sum_{k=0}^{n} r_{n,k}=r_n$ olsun.

$$\mathcal{R}s(x)=\frac{(xf(x))'}{\alpha-xf(x)}$$

olacak şekilde bir $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ fonksiyonu için

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{s_k}{k}r_{n-k}=\sum_{k=0}^{n} r_{n,k}\,H_k(\alpha) \tag{3.1}$$

özdeşliği sağlanır.

İspat. İstenilen toplamı elde etmek için önce $s(x)$ fonksiyonunun logaritmik üreteç fonksiyonu araştırılsın. (1.13) kullanılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n\frac{x^n}{n}=\int_0^x \mathcal{R}s(t)dt=\int_0^x\frac{(xf(x))'}{\alpha-xf(x)}dt=\ln\frac{\alpha}{\alpha-xf(x)}$$

elde edilir. Şimdi ispatlamaya çalışılan kısmın sol tarafının üreteç fonksiyonuyla hareket edilir ve (1.9) kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{s_k}{k}r_{n-k}\,x^n=\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_n}{n}x^n$$
$$=\frac{g(x)}{1-xf(x)}\ln\frac{\alpha}{\alpha-xf(x)}$$

$$=g(x)\frac{-\ln\left(1-\frac{xf(x)}{\alpha}\right)}{1-xf(x)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} r_{n,k}\,H_k(\alpha)x^n$$

elde edilir. Kuvvet serilerinin eşitliğinden istenen elde edilir.

Sonuç 3.2. $R=[r_{n,k}]=\left(\left(xf(x)\right)',f(x)\right)$ bir Riordan ışını ve bu Riordan ışınının satır toplamı $r_n$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{r_{k-1}}{k}r_{n-k}=\sum_{k=0}^{n} r_{n,k}\,H_k(\alpha)$$

özdeşliği sağlanır.

İspat. Eğer Teorem 3.1'de $g(x)=\left(xf(x)\right)'$ alınırsa (1.9) gereği $\mathcal{R}s(x)=r(x)$ olarak elde edilir. Bu ise $n\geq 1$ için $s_n=r_{n-1}$ olması demektir. Buradan hareketle (3.1) denkleminde $s_k=r_{k-1}$ yazılırsa istenen elde edilmiş olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3. $q\neq 1$ olacak şekilde bir pozitif reel sayı ve n doğal sayısı için

$$\sum_{k=0}^{n} q^{n-k}H_k(\alpha)=\frac{q^{n+1}H(\alpha q)-H_n(\alpha)}{q-1}$$

özdeşliği sağlanır.

İspat. $q^n$ için satır toplamı $q_n$ ve üreteç fonksiyonu $q(x)$ olmak üzere

$$q_n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\frac{1}{(1-qx)(1-x)}$$

olur. Buradan da hareketle $R=[q^{n-k}]=\left(\frac{1}{1-qx},1\right)$ şeklinde olduğu söylenebilir. Teorem 3.1 koşulundaki $s_n$ dizisi, $\mathcal{R}$ operatörü yardımıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_{n+1}x^n = \mathcal{R}s(x) = \frac{\left(xf(x)\right)'}{\alpha - xf(x)} = \frac{1}{\alpha - x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{n+1}} x^n$$

şeklinde elde edilir. Buradan $s_n = \frac{1}{\alpha^n}$ olduğu görülür. Şimdi (3.1) kullanılırsa

$$\sum_{k=0}^{n} q^{n-k} H_k(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\alpha^k} \frac{1-q^{n-k+1}}{1-q}$$
$$= \frac{1}{q-1}\left( q^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\alpha^k q^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\alpha^k} \right)$$
$$= \frac{q^{n+1}H(\alpha q) - H_n(\alpha)}{q-1}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.4. Bir $q \in \mathbb{R}^+$ sayısı ve bir n doğal sayısı için

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^{n-k} H_k(\alpha) = (1+q)^n \left( H\left( \frac{\alpha(1+q)}{1+\alpha q} \right) - H_n\left( \frac{1+q}{q} \right) \right)$$

özdeşliği sağlanır.

İspat. $\left[\binom{n}{k} q^{n-k}\right]$ için Riordan ışını $\left(\frac{1}{1-qx}, \frac{1}{1-qx}\right)$ ve satır toplamı $q_n$ olmak üzere $q_n = (1+q)^n$ şeklindedir. Satır toplamının üreteç fonksiyonu $q(x)$ olmak üzere

$$q(x) = \frac{1}{1-(1+q)x}$$

olur ve

$$\mathcal{R}s(x) = \frac{\left(xf(x)\right)'}{\alpha - xf(x)}$$
$$= \frac{1}{(\alpha - (1+\alpha q)x)(1-qx)}$$
$$= \frac{1+\alpha q}{\alpha - (1+\alpha q)x} - \frac{q}{1-qx}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+\alpha q}{\alpha}\right)^{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}q^{n+1}x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left[\left(\frac{1+\alpha q}{\alpha}\right)^{n+1}-q^{n+1}\right]}_{s_{n+1}}x^n$$

elde edilir. Bu ise $s_n=\left(\frac{1+\alpha q}{\alpha}\right)^n-q^n$ olması anlamına gelir. Şimdi (3.1) numaralı özdeşlik kullanılırsa

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^{n-k}H_k(\alpha)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\left(\frac{1+\alpha q}{\alpha}\right)^k-q^k\right)(1+q)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\alpha^k}(1+\alpha q)^k(1+q)^{n-k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}q^k(1+q)^{n-k}$$

$$=(1+q)^n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{1+\alpha q}{\alpha(1+q)}\right)^k-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{q}{1+q}\right)^k\right)$$

$$=(1+q)^n\left(H\left(\frac{\alpha(1+q)}{1+\alpha q}\right)-H_n\left(\frac{1+q}{q}\right)\right)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.5. $n>r+1$ olacak şekildeki n, r tamsayılar için

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k+r}{r}(-1)^kH_{n-k}^{k}(\alpha)=\sum_{k=0}^{r+1}\binom{r+1}{k}(-1)^k\frac{1}{(n-k)\alpha^{n-k}}$$

özdeşliği sağlanır.

İspat. Eğer (1.10)'da Riordan ışını olarak $R=\left(-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right),\frac{1}{1-x}\right)$ ve $h(x)=\frac{1}{(1+x)^{r+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+r}{r}(-x)^n$ seçilir ve uygulanırsa

$$\sum_{k=0}^{n}H_{n-k}^{k}(\alpha)(-1)^k\binom{k+r}{r}=[x^n]\left(-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right)\frac{1}{\left(1+\frac{x}{1-x}\right)^{r+1}}$$

$$=[x^n]\left(-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right)(1-x)^{r+1}$$

$$=[x^n]\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^i}\frac{x^i}{i}\sum_{k=0}^{r+1}\binom{r+1}{k}(-1)^k x^k$$

$$=\sum_{k=0}^{r+1}\binom{r+1}{k}(-1)^k[x^{n-k}]\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^i}\frac{x^i}{i}$$

$$=\sum_{k=0}^{r+1}\binom{r+1}{k}(-1)^k\frac{1}{(n-k)\alpha^{n-k}}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 3.6. $n\geq 3$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(k+1)H_{n-k}^k(\alpha)=\frac{1}{n\alpha^n}-\frac{2}{(n-1)\alpha^{n-1}}+\frac{1}{(n-2)\alpha^{n-2}},$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k H_{n-k}^k(\alpha)=\frac{1}{n\alpha^n}-\frac{1}{(n-1)\alpha^{n-1}}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k H_{n-k}^k(\alpha)=\frac{-1}{(n-1)\alpha^{n-1}}+\frac{1}{(n-2)\alpha^{n-2}}$$

özdeşlikleri sağlanır.

İspat. Eğer Teorem 3.5'te sırasıyla $r=1$ ve $r=0$ alınırsa birinci ve ikinci özdeşlikler elde edilir. Birinci özdeşlik ve ikinci özdeşlik taraf tarafa çıkarılırsa üçüncü özdeşlik elde edilir.

Teorem 3.7. n, r pozitif tamsayıları için

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k+r}{r}H_{n-k}(\alpha)=H_n^{r+2}(\alpha)$$

özdeşliği sağlanır.

İspat. Genelleştirilmiş harmonik sayılara ait Riordan ışını, genelleştirilmiş hiperharmonik sayıların üreteç fonksiyonu kullanılırsa ve (1.10)'da $h(x)=\frac{1}{(1-x)^{r+1}}$ seçilirse

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k+r}{r}H_{n-k}(\alpha)=[x^n]\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{(1-x)}\frac{1}{(1-x)^{r+1}}$$

$$=[x^n]\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{(1-x)^{r+2}}$$

$$=[x^n]\sum_{n=0}^{\infty}H_n^{r+2}(\alpha)x^n$$

$$=H_n^{r+2}(\alpha)$$

bulunur. Böylece istenen elde edilir.

Teorem 3.8. Bir n pozitif tamsayısı için

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k H(n,k,\alpha)}{k!}=H_n(\alpha)-\frac{1}{\alpha}H_{n-1}(\alpha)$$

özdeşliği sağlanır.

İspat. Eğer (1.10)'da $h(x)=e^{-x}$ seçilirse

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}H(n,k,\alpha)=[x^n]\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{1-x}e^{-\left(-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right)}$$

$$=[x^n]\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{1-x}\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)$$

$$=[x^n]\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{1-x}-\frac{1}{\alpha}[x^{n-1}]\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{1-x}$$

elde edilir. Buradan ve genelleştirilmiş harmonik sayıların üreteç fonksiyonundan

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k H(n,k,\alpha)}{k!}=[x^n]\sum_{n=0}^{\infty}H_n(\alpha)x^n-\frac{1}{\alpha}[x^{n-1}]\sum_{n=0}^{\infty}H_n(\alpha)x^n$$

$$=H_n(\alpha)-\frac{1}{\alpha}H_{n-1}(\alpha)$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.9. n bir doğal sayı olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} H(n,k,\alpha) = \alpha H(n+1,1,\alpha) - H(n,1,\alpha)$$

özdeşliği vardır.

İspat. Eğer (1.10)'da $h(x)$ olarak $\frac{x}{e^x-1}$ ve $r_{n,k}=H(n,k,\alpha)$ seçilirse

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} H(n,k,\alpha) = [x^n] \frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{1-x} \; \frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{\frac{x}{\alpha-x}}$$

$$= [x^n] \frac{\left[-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right]^2}{x(1-x)} (\alpha-x)$$

$$= \alpha [x^{n+1}] \frac{\left[-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right]^2}{1-x} - [x^n] \frac{\left[-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right]^2}{1-x}$$

$$= \alpha H(n+1,1,\alpha) - H(n,1,\alpha)$$

bulunur. Böylece istenen özdeşlik elde edilir.

Teorem 3.10. $n \geq r \geq 0$ olacak şekildeki tamsayılar için

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} S(r,k) H(n,k,\alpha) = \frac{H_{n-r}(\alpha)}{(-\alpha)^r r!}$$

özdeşliği sağlanır.

İspat. Eğer (1.10)'da $h(x)=(e^{-x}-1)^r$ seçilirse

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} r! S(r,k) H(n,k,\alpha) = [x^n] \frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{1-x} \left(-\frac{x}{\alpha}\right)^r$$

$$= \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^r [x^{n-r}] \frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{1-x}$$

$$= \frac{H_{n-r}(\alpha)}{(-\alpha)^r r!}$$

elde edilir. Böylece istenen elde edilmiş olur.

Teorem 3.11. n, r doğal sayıları için

$$\sum_{k=0}^{n} H(n,k,\alpha)\frac{\rho(k,r)}{k!}=\alpha^{r}H(n+r,r,\alpha)$$

özdeşliği vardır.

İspat. Eğer (1.10)'da $h(x)=\left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right)^{r}$ alınırsa, $\rho(n,k)$ sayısına ait üreteç fonksiyonu ve genelleştirilmiş kademeli harmonik sayıların Riordan ışını kullanılırsa

$$\sum_{k=0}^{n} H(n,k,\alpha)\frac{\rho(k,r)}{k!}=[x^{n}]\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{1-x}\frac{\left(-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right)^{r}}{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{r}}$$

$$=\alpha^{r}[x^{n+r}]\frac{\left(-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right)^{r+1}}{1-x}$$

$$=\alpha^{r}[x^{n+r}]\sum_{n=0}^{\infty} H(n,r,\alpha)x^{n}$$

$$=\alpha^{r}H(n+r,r,\alpha)$$

elde edilir. Bu ise istenen özdeşliği gösterir.

Teorem 3.12. Pozitif bir n tamsayısı için

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}s(n,k)B_{k}=D_{n}+\alpha D_{n-1}$$

özdeşliği sağlanır.

İspat. Tablo 3.1'deki Stirling sayısıyla bağlantılı Riordan ışını kullanılırsa ve (1.10)'da $h(x)=\frac{x}{e^{x}-1}$ seçilirse

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}s(n,k)k!}{\alpha^{n}n!}\frac{B_{k}}{k!}=[x^{n}]\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{\frac{x}{\alpha-x}}$$

$$=[x^{n}]\frac{\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{-\frac{x}{\alpha}}(\alpha-x)$$

$$=\frac{1}{\alpha}\left\{[x^n]\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n D_n}{\alpha^n n!}x^n - [x^{n-1}]\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n D_n}{\alpha^n n!}x^n\right\}$$

$$=\frac{(-1)^n D_n}{\alpha^n n!} - \frac{(-1)^{n-1} n D_{n-1}}{\alpha^n n!}$$

elde edilir. Buradan elementer işlemlerle istenen özdeşlik elde edilir.

Teorem 3.13. n, r doğal sayıları için

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k s(n,k)\rho(k,r) = \binom{n+r}{r}^{-1} s(n+r,r) = D_n^r$$

özdeşliği sağlanır.

İspat. (1.10)'da $h(x)=\left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right)^r$ seçilirse

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}s(n,k)k!}{\alpha^n n!}\frac{\rho(k,r)}{k!} = [x^n]\frac{\left(-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right)^r}{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^r} = \frac{(-1)^n D_n^r}{\alpha^n n!}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}s(n,k)k!}{\alpha^n n!}\frac{\rho(k,r)}{k!} = [x^n]\frac{\left(-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right)^r}{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^r}$$

$$=\alpha^r[x^{n+r}]\left(-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right)^r$$

$$=\alpha^r\frac{(-1)^n s(n+r,r)r!}{(n+r)!\alpha^{n+r}}$$

şeklinde iki eşitlik bulunur. Burada gerekli elementer işlemler yapılırsa teoremde istenen özdeşlikler bulunur.

Teorem 3.14. Bir n pozitif tamsayısı için

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)!}H(n,k,\alpha) = \frac{\alpha^n-1}{\alpha^n(\alpha-1)}, \quad \alpha\neq 1,$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} H(n,k,\alpha) = \frac{1}{\alpha},$$

ve

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} H(n+1,k,\alpha) = \frac{H_n(\alpha)}{\alpha}$$

özdeşlikleri sağlanır.

İspat. Eğer genelleştirilmiş kademeli harmonik sayıların Riordan ışını kullanılırsa ve (1.10)'da

$$h(x) = \frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} x^n$$

fonksiyonu seçilip yerine koyulursa

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{H(n,k,\alpha)}{(k+1)!} = [x^{n-1}] \frac{\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{x(x-1)} \frac{x}{(x-\alpha)\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}$$

$$= [x^{n-1}] \frac{1}{(x-1)(x-\alpha)}$$

$$= \frac{\alpha^n - 1}{\alpha^n(\alpha-1)}$$

elde edilir. Bu ise ilk özdeşliği kanıtlar. Benzer şekilde ikinci özdeşlik için $h(x) = \frac{1-e^{-x}}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} x^n$ seçilirse

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} H(n,k,\alpha) = [x^n] \frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{1-x} \frac{\frac{x}{\alpha}}{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)} = \frac{1}{\alpha} [x^{n-1}] \frac{1}{1-x} = \frac{1}{\alpha}$$

elde edilir. Son özdeşlik için $h(x) = 1-e^{-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} x^n$ seçilsin. Bu toplamda dikkat edilirse $h_0 = 0$ yazılabilir. O halde (1.10) denklemi k=1'den başlatılarak kullanılırsa

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} H(n+1,k,\alpha) = [x^{n+1}] \frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{1-x} \frac{x}{\alpha} = \frac{H_n(\alpha)}{\alpha}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.15. $n > r$ olacak şekildeki n,r pozitif tamsayıları için

$$H(n,r,\alpha)=(-1)^r\sum_{k=r}^{n-1}\frac{(-1)^k s(k,r)r!}{\alpha^k k!}H_{n-k}(\alpha),$$

$$H(n,r,\alpha)=\sum_{k=r}^{n-1}\frac{H(k,r-1,\alpha)}{(n-k)\alpha^{n-k}}$$

ve

$$H_{n-r}^{r+1}(\alpha)=\sum_{k=r}^{n-1}\binom{k}{r}\frac{1}{(n-k)\alpha^{n-k}}$$

özdeşlikleri vardır.

İspat. İstenilen özdeşlikleri kullanmak için Riordan grubunun işlemi kullanılmıştır. Eğer (1.7) numaralı işlem kullanılırsa

$$\underbrace{\left(\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{1-x},\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{x}\right)}_{[H(n,r,\alpha)]}=\underbrace{\left(\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{1-x},1\right)}_{[H_{n-r}(\alpha)]}*\underbrace{\left(1,\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{x}\right)}_{\left[\frac{(-1)^{n-r}s(n,r)r!}{n!\alpha^n}\right]}$$

yazılabilir. Riordan ışınlarının oluşturduğu alt üçgensel matrisin sıfırıncı satır ve sıfırıncı sütundan başladığı göz önüne alınırsa, matris çarpımından

$$H(n,r,\alpha)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k-r}s(k,r)r!}{k!\alpha^k}H_{n-k}(\alpha)$$

yazılabilir. Eğer $H_0(\alpha)=0$ ve $k<r$ iken $s(k,r)=0$ olduğu kullanılırsa ilk özdeşlik kolaylıkla elde edilir.

$$l_{n,r}=\begin{cases}0 & n\le r\\ \dfrac{1}{(n-r)\alpha^{n-r}} & n>r\end{cases}$$

şeklinde bir sayı tanımlansın. O halde

$$\underbrace{\left(\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{1-x},\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{x}\right)}_{[H(n,r,\alpha)]}=\underbrace{\left(-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right),1\right)}_{[l_{n,r}]}*\underbrace{\left(\frac{1}{1-x},\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{x}\right)}_{[H(n,r-1,\alpha)]},$$

ve

$$\underbrace{\left(\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{1-x},\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{x}\right)}_{[H_{n-r}^{r+1}(\alpha)]}=\underbrace{\left(-\ln\left(1-\frac{x}{\alpha}\right),1\right)}_{[l_{n,r}]}*\underbrace{\left(\frac{1}{1-x},\frac{1}{1-x}\right)}_{[\binom{n}{k}]}$$

yazılabilir. $n\leq r$ iken $l_{n,r}=0$ olduğu göz önüne alınıp toplam n-1'e kadar açılırsa $l_{n,r}$ yerine $\frac{1}{(n-r)\alpha^{n-r}}$ alınabilir. $n\leq r-1$ olmak üzere $H(n,r-1,\alpha)=0$ ve $\binom{n}{r}=0$ olduğu göz önüne alınırsa, matris çarpımından istenen özdeşlikler elde edilir.

Lemma 3.16. n bir doğal sayı olmak üzere

$$(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k}{k+1}=\frac{(1+x)^{n+1}-1}{x} \tag{3.2}$$

olur (Şimşek, 2018).

Lemma 3.17. Bir n doğal sayısı için

$$H_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k+1}\frac{1}{k+1} \tag{3.3}$$

özdeşliği sağlanır (Furdui, 2011).

Teorem 3.18. Pozitif bir n tamsayısı için

$$H_{n+1}(\alpha)-H_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\frac{1}{k+1}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^{k+1}$$

özdeşliği sağlanır.

İspat. Eğer (3.2) eşitliğinde her iki tarafın sınırları $-1$ ile $\lambda=-1+1/\alpha$ arasında olacak şekilde önce eşitliğin sağ tarafının sonra da sol tarafının x'e göre belirli integrali alınırsa

$$\int_{-1}^{\lambda} \frac{(1+x)^{n+1}-1}{x}\,dx = \int_{-1}^{\lambda} \sum_{k=0}^{n} (1+x)^k\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(1+x)^{k+1}}{k+1}\Bigg|_{-1}^{\lambda}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)\alpha^{k+1}}$$

$$= H_{n+1}(\alpha),$$

$$\int_{-1}^{\lambda} (n+1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{k+1}\,dx = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}\Bigg|_{-1}^{\lambda}$$

$$= (n+1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{(k+1)^2} \left[ \left(-1+\frac{1}{\alpha}\right)^{k+1} - (-1)^{k+1} \right]$$

elde edilir. Buradan cebirsel işlemler ve (3.3) özdeşliği kullanılırsa

$$H_{n+1}(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} \frac{1}{k+1} \left(-1+\frac{1}{\alpha}\right)^{k+1} + H_{n+1}$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

# 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

İlk olarak bu çalışma, içeriğinde verilmiş olan özdeşliklerle, sayılarla ve sonuçlarla matematikte, özellikle sayı teorisinde, gelecekte yapılacak olan çalışmaların ilerletilmesi ve geliştirilmesi için çalışacak bilim insanlarına yardımcı olması umularak yazılmıştır. Elde edilen bulgular son dönemlerde yapılan çalışmaların uygulanması ve yakın gelecekte benzer özdeşliklerin de bulunabileceğini göstermektedir.

Bu çalışmanın içeriğinde bilinen bazı özel sayı aileleriyle beraber yeni tanıtılmış olan özel sayı aileleri arasında özdeşlikler keşfedilmiştir. Bu sayılar arasındaki ilişkiler gözetilerek bundan sonra ilgili alanda yapılacak çalışmalarda araştırmacılara klasik yöntemlerin yanı sıra matematiğin son zamanlarında özdeşlik elde etmek için sıkça kullanılan yöntemlerinden biri olan Riordan ışınları da tanıtılmış ve kullanılmıştır. Bununla beraber üreteç fonksiyonları üzerinde de birtakım uygulamalar yapılmış ve sonuçlar okurlara sunulmuştur. Bu tezde yapılan çalışmalardan görüldüğü gibi, aralarında bağlantı yok gibi görünen sayılar arasında bile bazen bağlantı kurulabileceğini, klasik yöntemlerle beraber sürekli gelişen matematiğin yeniliklere açıklığının sınırının olmadığını ve duraksamadan ilerleyeceğini, bir bulguyu elde etmek için birden çok yol olduğunu bizlere göstermektedir.

Bu çalışma belli bir sayıda özel sayı aileleri arasındaki ilişkileri içermektedir. Tabii ki matematikte çok fazla sayı ailesi olduğu bilinir. Bu çalışmayı inceleyen araştırmacılar, bu tezin içinde verilmiş olan sayı ailelerinin yanı sıra bahsi geçmeyen ancak araştırmacı ya da bir başka özdeşlik için değerli olduğu düşünülebilecek bir sayı ailesini de araştırmaya koyabilir. Örneğin bu tezde bahsedilmeyen Fibonacci sayıları, Lucas sayıları, Euler sayıları, trinomial sayıları ve bunların genelleştirilmiş halleri üzerine uygulamalar ve birtakım farklı çalışmalar yapılabilir. Bunlara ait üreteç fonksiyonları arasındaki değerlere ait ilişkiler incelenebilir. Bununla beraber yine bu sayılara ait Riordan ışınları araştırılıp birbirleri arasında farklı ilişkilerin kurulup kurulamayacağı incelenebilir, yeni özdeşlikler elde etmek için kullanılabilir.

Riordan ışınları belirli koşullar altında bir grup yapısı oluşturur. Bu koşullar tezde okurlara sunulmuştur. Eğer bir araştırmacı bu konu üzerinde uygulamalar geliştirmek yerine soyut çalışmak isterse de Riordan grup yapısıyla ilgili veya çoklu boyutlu Riordan ışınları ile ilgili güncel yayınlar bulunmaktadır. Bu konuda soyut çalışmak isteyen araştırmacıların bu konuları irdelemeleri kendileri için faydalı ve ufuk açıcı olacaktır.

İçerikte verilen özdeşlikler sayı teorisinde yer alan önemli sayı aileleri arasında ilişkiler barındırmaktadır. Ancak matematiğin genelinde olduğu gibi, yapılan bu çalışmaların elde ediliş yöntemleri, en az elde edilen bu sonuçlar kadar değerlidir. Bu sebeple okurlar özdeşliklere olduğu kadar özdeşliklerin elde ediliş yöntemlerine de önem göstermeli ve titizlikle uygulamaya çalışmalıdır.

## KAYNAKLAR


Agoh T., Dilcher K., Shortened recurrence relations for Bernoulli numbers, *Discrete Mathematics*, 2009, **309**(4), 887-898.

Benjamin A. T., Gaebler D., Gaebler R., A combinatorial approach to hyperharmonic numbers, *Integers*, 2003, **3**(A15), 1-9.

Benjamin A. T., Preston G. O., Quinn J. J., A Stirling encounter with harmonic numbers, *Mathematics Magazine*, 2002, **75**(2), 95-103.

Cereceda J. L., An introduction to hyperharmonic numbers, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 2015, **46**(3), 461-469.

Cheon G.-S., El-Mikkawy M. E., Generalized harmonic numbers with Riordan arrays, *Journal of Number Theory*, 2008, 413-425.

Cheon G.-S., El-Mikkawy M. E., Seol H.-G., New identities for Stirling numbers via Riordan arrays, *The Pure and Applied Mathematics*, 2006, **13**(4), 311-318.

Conway J. H., Guy R. K., *The book of numbers*, New York: Springer Science, 1995.

Furdui O., Series involving products of two harmonic numbers, *Mathematics Magazine*, 2011, **84**(5), 371-377.

Genčev M., Binomial sums involving harmonic numbers, *Mathematica Slovaca*, 2011, **61**(2), 215-216.

Graham R. L., Knuth D. E., Patashnik O., *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

Munarini E., Riordan matrices and sums of harmonic numbers, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 2011, 176-200.

Ömür N., Bilgin G., Some applications of the generalized hyperharmonic numbers of order r, $H_n^r(\alpha)$, *Advances and Applications in Mathematical Sciences*, 2018, **17**(9), 617-627.

Rim S.-H., Kim T., Pyo S.-S., Identities between harmonic, hyperharmonic and Daehee numbers, *Journal of Inequalities and Applications*, 2018, 1, 1-12.

Rosen K. H., *Discrete mathematics and its applications*, 7th ed., McGraw-Hill, New York, 2012.

Santmyer J. M., A Stirling like sequence of rational numbers, *Discrete Mathematics*, 1997, **171**(1-3), 229-235.

Shapiro L. W., Getu S., Woan W.-J., Woodson L. C., The Riordan group, *Discrete Applied Mathematics,* 1991, **34**(1-3), 229-239.

Sprugnoli R., Riordan arrays and combinatorial sums, *Discrete Mathematics*, 1994, **132**(1-3), 267-290.

Şimşek Y., Combinatorial sums and binomial identities associated with the Beta-type polynomials, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 2018, **47**(5), 1144-1155.

Wang W., Riordan arrays and harmonic number identities. *Computers & Mathematics with Applications*, 2010, **60**(5), 1494-1509.

Wuyungaowa S. W., Sums of involving the harmonic numbers and the binomial coefficients, *American Journal of Computational Mathematics*, 2015, **5**, 96-105.

## KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

Ömür N., **Duran Ö.**, On binomial triple sums involving Fibonacci and Lucas numbers, *Honam Mathematical Journal,* 2020, **42**(1), 49-62.

**Duran Ö.**, Koparal S., Ömür N., On umbral methods and generalized harmonic numbers $H_n(\alpha)$, *International Marmara Sciences Congress*, Kocaeli, Türkiye, 1-3 Kasım 2019.

**Duran Ö.**, Koparal S., Ömür N., On generalized hyperharmonic numbers of order r, $H_n^r(\alpha)$ with Riordan arrays, *International Marmara Sciences Congress*, Kocaeli, Türkiye, 1-3 Kasım 2019.

## ÖZGEÇMİŞ

Ömer DURAN, 1995 yılında Gölcük'te dünyaya geldi. İlk ve orta öğretimini Kocaeli'de tamamladıktan sonra lisans eğitimini Yıldız Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümünde aldı. Yüksek lisans eğitimini Kocaeli Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda almaktadır.