T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİ DEĞİŞKENLİ BETA OPERATÖRLERİ İÇİN VORONOVSKAJA VE GRÜSS-VORONOVSKAJA TİPİ KESTİRİMLER

AYDENİZ KARAKÜLAH

EYLÜL 2020

Matematik Anabilim Dalında Aydeniz Karakülah tarafından hazırlanan İKİ DEĞİŞKENLİ BETA OPERATÖRLERİ İÇİN VORONOVSKAJA VE GRÜSS- VORONOVSKAJA TİPİ KESTİRİMLER adlı Yüksek Lisans tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylıyorum.

Prof. Dr. ALİ OLGUN

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin Yüksek Lisans Tezi olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. ALİ OLGUN

Danışman

Jüri Üyeleri:

Başkan : Prof. Dr. H. GÜL İNCE İLARSLAN

Üye(Danışman) : Prof. Dr. ALİ OLGUN

Üye : Doç. Dr. RECEP ŞAHİN

…/…/…

Bu Tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans Derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. RECEP ÇALIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

İKİ DEĞİŞKENLİ BETA OPERATÖRLERİ İÇİN VORONOVSKAJA VE GRÜSS-VORONOVSKAJA TİPİ KESTİRİMLER

KARAKÜLAH, Aydeniz
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. Ali OLGUN
Eylül 2020, 56 sayfa

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Giriş ve tezde kullanılan tanımlar ve temel teoremler verilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde iki değişkenli Beta operatörleri için bazı Lemmalar ve bu lemmalar kullanılarak operatörün yakınsaklık özellikleri ile ilgili bazı teoremler verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümü ise Tartışma ve Sonuç kısmı için ayrılmıştır.

Anahtar kelimeler: İki değişkenli Beta operatörleri, Voronovskaja teoremi, Grüss-Voronovskaja teoremi.

ABSTRACT

VORONOVSKAJA AND GRÜSS-VORONOVSKAJA TYPE ESTIMATES FOR BIVARIATE BETA OPERATORS

KARAKÜLAH, Aydeniz
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, M. Sc. Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Ali OLGUN
SEPTEMBER 2020, 56 pages

This thesis consists of three chapters. In the first chapter, definitions and basic theorems used in introduction and thesis are given.

In the second part of the thesis, some Lemmas for bivariate Beta operators and some theorems about the convergence properties of the operator are given by using these lemmas.

The third part of the thesis is reserved for the conclusion and discussion part.

Key Words: Bivariate Beta operators; Voronovskaja type theorem; Grüss-Voronovskaja type theorem.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana vererek, çalışmalarım boyunca yakın ilgisini eksik etmeyen, güler yüzü ve destek veren sözleriyle çalışma azmimi perçinleyen değerli hocam Prof. Dr. Ali OLGUN' a, tez çalışmalarım esnasında yardımlarından dolayı Araş. Gör. Dr. İlker GENÇTÜRK' e ve Araş. Gör. Fırat ÖZSARAÇ 'a, maddi ve manevi olarak büyük fedakarlıklarla bana her zaman destek olan eşim Erdinç KARAKÜLAH' a ve son olarak benden desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ iv
SİMGELER DİZİNİ v

1. GİRİŞ 1
1.1. Kaynak Özetleri 2
1.2. Temel Kavramlar Ve Teoremler 3

2. BÖLÜM 2 12
2.1. İki Değişkenli Beta Operatörleri İçin Kestirimler 12
2.2. Yardımcı Sonuçlar 16
2.3. Bazı Sonuçlar 43

3. TARTIŞMA VE SONUÇ 53
KAYNAKLAR 56

SİMGELER DİZİNİ

$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığındaki sürekli fonksiyonlar uzayı
$\omega(f;\delta)$	süreklilik modülü
$\overline{\omega}(f,t)$	ω süreklilik modülünün konkav majorantı
$L_n(f,x)$	Lineer pozitif operatörler
$\Gamma(x)$	Gamma Fonksiyonu
$B(x,y)$	Beta Fonksiyonu
$B(x,y;p)$	Genişletilmiş Beta Fonksiyonu
$\binom{n}{k}$	$\frac{n!}{k!(n-k)!}$
$B_n(f;x)$	Bernstein operatörü

1.GİRİŞ

Yaklaşımlar teorisi için önemli çalışmalar 1900 lü yıllarda verilmeye başlanmıştır ve gelişerek günümüzde yoğun bir şekilde çalışılmaya devam etmektedir.

Pozitif yaklaşım metodları yaklaşımlar teorisinde önemli bir rol oynar ve sürekli fonksiyonların yaklaşımı ile ilgili birçok problemde kullanışlı sonuçlar vermektedir.

Özellikle monotonluk, dışbükeylik, şekil koruma vs. gibi daha fazla niteliksel özellik gerektiren durumlarda önemli kolaylıklar sağlar.

Bununla beraber Yaklaşımlar teorisi için en önemli teorem 1950 li yılların başında P. P. Korovkin tarafından verilmiştir. Korovkinin yaptığı çalışmaların ışığında daha sonra Korovkinin öğrencileri olan E. N. Morozov ve V. I. Volkov bu teoriyi daha ileri seviyelere taşımıştır.

Esas olarak Korovkin teoremi sürekli fonksiyonlar uzayında Lineer pozitif operatörleri kullanarak kompak bir metrik uzaydaki sürekli fonksiyonların düzgün olarak yakınsaması için gerekli sonuçları veren soyut bir kavramdır.

Bu teorideki temel teoremler Weierstrass' ın düzgün yakınsaklık üzerine verdiği teorem ve Korovkin teoremidir. Aslında bu teoremin bir benzeri aynı yıllarda birbirinden habersiz olarak Bohman tarafından verilmiştir. Bu teoremler baz alınarak Lineer pozitif operatörler yardımıyla karmaşık bir fonksiyona ondan daha basit olan bir fonksiyon kullanılarak yaklaşılmaya çalışmıştır. Bunu yaparkende temel araç olarak Bernstein polinomları kullanılmıştır.

Yaklaşımlar teorisi Reel Analiz, Fonksiyonel Analiz, Harmonik Analiz, Ölçü Teorisi, Toplanabilme Teorisi, ve Kısmi Türevli denklemlerde dağılım problemlerindeki kullanışlı sonuçlar vermektedir. Ancak en önemli çalışmalar Analizde düzgün yakınsama ile ilgili konularda elde edilmiştir.

Düzgün yakınsaklık ile ilgili elde edilen sonuçların yanı sıra noktasal yakınsaklıkta Yaklaşımlar teorisinde önemli kavramlardan birisidir.

Noktasal yakınsaklık ile ilgili önemli teoremlerden birisi de Voronovskaya tarafından verilmiştir. Lineer pozitif operatör dizileri için verilen Voronovskaya teoremi esas olarak Taylor teoremine dayanır. Bunun içinde Taylor teoreminde kalan terimin yakınsaklığı için elde edilen bir sonuca dayanarak Lineer pozitif operatörlerin noktasal yakınsaklığı için nicel formda bir sonuç elde edilir.

Voronovskaya teoreminde f nin sürekli ve türevlenebilir olması önemli gerekçelerden birisidir. Grüss tarafından verilen eşitsizlikte ise integrallenebilen iki fonksiyonun çarpımının integralleri ile kendilerinin integrallerinin çarpımı arasındaki fark için bir sonuç elde edilmiştir.

Biz bu tezde G. Başcanbaz Tunca, A. Erençin ve H. G. İnce İlarslan tarafından yapılan bir çalışmayı temel alarak bu çalışmada verilen teoremleri geniş bir şekilde inceleyerek okuyucu için kaynak oluşturacak şekilde bir çalışma hazırlamaya çalışacağız. Bunu yaparken çalışmada verilen teoremleri benzer çalışmaları da göz önüne alarak ve konu bütünlüğü sağlayarak basit, kolay ve anlaşılır bir çalışma ortaya koyacağız.

1.1 Kaynak Özetleri

Bu tezde iki değişkenli Beta operatörleri için Voronovskaya ve Grüss-Voronovskaya tipi teoremler verilmiştir. Kaynak olarak Gülen Başcanbaz Tunca, Ayşegül Erençin, Hatice Gül İnce İlarslan tarafından hazırlanan bir çalışma temel olarak alınmış ve teoremlerin ispatları için daha önce yapılmış referans kısmında belirtilen çeşitli kaynaklardan faydalanılmıştır.

1.2.TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Çalışmanın bu kısmında ileride ihtiyaç duyulacak bazı tanım, teorem ve eşitsizlikler verilecektir.

Tanım(Norm) $\mathbb{N}$, bir lineer uzay olsun. $\|.\|:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterilsin. Eğer

i) $\|x\|\geq 0$

ii) $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$

iii) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$

iv) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

şartları sağlanıyorsa $\|\ \|$ fonksiyonuna N üzerinde bir **norm** denir. Eğer bir lineer uzay üzerinde norm tanımlanmışsa bu uzaya **normlu uzay** denir.

Tanım(Lineer Operatör) X ve Y lineer normlu fonksiyon uzayları olsun.

$L:\mathrm{X}\longrightarrow\mathrm{Y}$ operatörü, her $f,g\epsilon X$ ve her $\alpha,\beta\epsilon\mathbb{R}$ için

$$L(\alpha f+\beta g)=\alpha L(f)+\beta L(g)$$

eşitliğini sağlarsa L operatörüne X den Y ye bir **lineer operatör** denir.

Tanım(Lineer Pozitif Operatör) $L:X\longrightarrow Y$ lineer operatör ve

$X^{+}=\{f\in X:f(t)\geq 0\}$, $Y^{+}=\{g\in Y:g(t)\geq 0\}$

olmak üzere, L lineer operatörü X^{+}kümesindeki her bir f fonksiyonu Y^{+} kümesinde bir g fonksiyonuna dönüştürüyorsa, L operatörüne **lineer pozitif operatör** denir.

Teorem(Ortalama Değer Teoremi) $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve $\forall x\in(a,b)$ noktasında türevlenebilir olsun. Bu taktirde (a,b) aralığında

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

olacak şekilde en az bir x_0 noktası vardır.

Birbirinden habersiz olarak 1952 yılında Bohman,1953 yılında da Korovkin tarafından verilen yaklaşımlar teorisinde önemli bir yere sahip olan Korovkin Teoremi 1953 yılında P. P. Korovkin tarafından ispatlanmıştır.

Teorem(Bohman- Korovkin Teoremi) $L_n: C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun.$\alpha_n(x), \beta_n(x), \gamma_n(x), [a,b]$ aralığı üzerinde düzgün olarak sıfıra yakınsak diziler olmak üzere, $\forall x \in [a,b]$için

$$L_n(1;x) = 1 + \alpha_n(x)$$

$$L_n(t;x) = x + \beta_n(x)$$

$$L_n(t^2;x) = x^2 + \gamma_n(x)$$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda $L_n(f;x)$, $[a,b]$ aralığı üzerinde $f(x)$ sürekli fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar. Yani;

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f;x) - f(x)\|_{C[a,b]} = \lim_{n\to\infty} max|L_n(f;x) - f(x)| = 0$$

dır.

Tanım(Lineer Uzay) N boş olmayan bir cümle ve R , reel sayılar cismi olsun. Eğer aşağıdaki şartalar sağlanıyorsa N ye R üzerinde **lineer uzay** veya **vektör uzayı** denir.

(i) N , $+$ işlemine göre değişmeli gruptur. Yani,
  (a) Her $x, y \epsilon N$ için $x + y \epsilon N$ dir.
  (b) Her $x, y, z \epsilon N$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir.
  (c) Her $x \epsilon N$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \epsilon N$ vardır.
  (d) Her $x \epsilon N$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \epsilon N$ vardır.
  (e) Her $x, y \epsilon N$ için $x + y = y + x$ dir.

(ii) $x, y \epsilon N$ ve $\alpha, \beta \epsilon R$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.
  (a) $ax \epsilon N$ dir.
  (b) $a(x + y) = ax + ay$ dir.
  (c) $(\alpha + \beta)x = ax + \beta x$ dir.
  (d) $1x = x$ dir. Burada 1 , R nin birim elemanıdır.

Teorem(Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve q , $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şartını sağlayan bir sayı olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

dir.

Hölder eşitsizliğinde $p = 2$, $q = 2$ alınırsa aşağıdaki Cauchy-Schwartz eşitsizliği yazılır.

Tanım(Cauchy- Schwartz Eşitsizliği)

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

dir.

Süreklilik Modülü Ve Özellikleri

Yaklaşımlar teorisinde operatörün yakınsaklığı kadar, yakınsama hızı da önemlidir. Bu sebeple operatörün yakınsama hızını veren bir fonksiyon olan ve süreklilik modülü olarak bilinen ifade aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

Tanım Kabul edelim ki f, $[a, b]$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun.

$x, y \in [a, b]$ için $|x - y| \leq \delta$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde $\delta > 0$ sayısı için $|f(x) - f(y)|$ ifadesinin en küçük üst sınırına

$$\omega(\delta) = sup_{|x-y|\leq\delta}|f(x) - f(y)|$$

denirse, $\omega(\delta)$ değerine f nin **süreklilik modülü** denir. Bazen bu gösterim yerine $\omega_f(\delta)$veya $\omega(\delta; f)$gösterimleri de kullanılabilir. $\omega(\delta; f)$, değişkenler farkının en fazla δ olması durumunda iki fonksiyon değerinin en fazla ne kadar fark edeceğini belirler. ω, δ' nın bir fonksiyonu durumundadır ve $\delta > 0$ için $\omega(\delta; f)$negatif olmayan bir fonksiyondur.

Süreklilik modülü fonksiyonu aşağıdaki önemli özellikleri gerçekleyen bir fonksiyondur.

Lemma 1. ω fonksiyonu monoton artandır. Yani, $0 < \delta_1 \leq \delta_2$ için

$$\delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow \omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$$

dır.

İspat. $0 < \delta_1 \leq \delta_2$ olsun. Bu durumda $|x-y| \leq \delta_2$ koşulunu sağlayan (x,y)sayı çiftlerinin kümesi $|x-y| \leq \delta_1$ koşulunu sağlayan sayı çiftlerinin kümesinden daha kapsamlıdır. Kümelerdeki supremum kavramı göz önüne alınarak süreklilik modülünün tanımından dolayı

$$\omega(f;\delta_1) \leq \omega(f;\delta_2)$$

yazılabilir.

Lemma 2. $m \in \mathrm{N}$ için

$$\omega(f;m\delta) \leq m\omega(f;\delta)$$

dır.

İspat.

$$\omega(f;m\delta) = sup_{\substack{|x-y|\leq m\delta \\ x,y\in[a,b]}} |f(x)-f(y)|$$

ifadesinde $x = y + mh$ seçilirse, $m \in \mathrm{Z}^+$için

$$\omega(f;m\delta) = sup_{\substack{h\leq\delta \\ x,y\in[a,b]}} |f(y+mh)-f(y)|$$

$$= sup_{\substack{h\leq\delta \\ x,y\in[a,b]}} |f(y+mh)-f(y+(m-1)h)+f(y+(m-2)h)-\cdots$$
$$+f(y+h)-f(y)|$$

$$= sup_{\substack{h\leq\delta \\ x,y\in[a,b]}} \left|\sum_{k=1}^{m} f(y+kh)-f(y+(k-1)h)\right|$$

yazılabilir. Buradan da

$$\omega(f;m\delta) \leq \sum_{k=1}^{m} sup_{\substack{h\leq\delta \\ x,y\in[a,b]}} |f(y+kh)-f(y+(k-1)h)|$$

olur. Yukarıdaki toplamın içindeki ifade süreklilik modülü ile toplananların sayısı m tane olduğundan

$$\omega(f;m\delta) \leq m\omega(f;\delta)$$

eşitsizliği elde edilir.

Lemma 3. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(f;\delta)=0$$

dır.

İspat. f fonksiyonu **s**ürekli olduğundan süreklilik tanımı nedeniyle her $\varepsilon>0$ için bir $\eta>0$ vardır öyle ki $|x-y|<\eta$ olduğunda $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ dır. Süreklilik modülünde $\delta<\eta$ alındığında $\omega(f;\delta)<\varepsilon$ dır. Yani

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(f;\delta)=0$$

olur.

Lemma 4. $\lambda>0$ reel sayısı için

$$\omega(f;\lambda\delta)\leq(1+\lambda)\omega(f;\delta)$$

dır.

İspat. m, λ nın tam kısmı olsun. O taktirde $m\leq\lambda<m+1$ olur. ω süreklilik modülünün monotonluk özelliği ve Lemma (2.3.2) den

$$\omega(f;\lambda\delta)\leq\omega(f;(m+1)\delta)$$

$$\omega(f;(m+1)\delta)\leq(m+1)\,\omega(f;\delta)\leq(\lambda+1)\omega(f;\delta)$$

olur. Dolayısı ile

$$\omega(f;\lambda\delta)\leq(1+\lambda)\omega(f;\delta)$$

olarak elde edilir.

Lemma 5. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlı ise, her $x,y\in[a,b]$ için

$$|f(x)-f(y)|\leq\left(1+\frac{|x-y|}{\delta}\right)\omega(f;\delta)$$

dır.

İspat. Süreklilik modülünün tanımı ve Lemma (2.3.4) den

$$|f(x)-f(y)| \leq \omega\left(f;\frac{|x-y|}{\delta}\delta\right)$$

$$\leq \left(1+\frac{|x-y|}{\delta}\right)\omega(f;\delta)$$

sonucu elde edilir.

Taylor serisi adını İngiliz matematikçi Brook Taylor'dan almıştır. Eğer seri sıfır merkezli ise $(a=0)$, Taylor serisi daha basit bir biçime girer ve bu özel seriye İskoç matematikçi Colin Maclaurin'e istinaden **Maclaurin serisi** denir.

Tanım(Taylor serisi) Her basamaktan türevli, gerçel ya da karmaşık bir $f(x)$ fonksiyonunun a gerçel ya da karmaşık sayı olmak üzere $(a-r,a+r)$ aralığındaki Taylor serisi

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem(Taylor Formülü) f fonksiyonu α noktasını ihtiva eden bir aralıkta $(n+1)$ inci mertebeden sürekli türevlere sahip olsun. Bu aralıkta her x için Taylor formülü,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

olur ve $K_n(x)$ ifadesine kalan terim, fark veya hata denirse

$$K_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

olmak üzere

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+K_n(x)$$

yazılabilir. Bu ifadeye kalan terimli **Taylor Formülü** adı verilir.

Tanım(Gamma Fonksiyonu) $\Gamma(x)$ ile gösterilen Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \qquad (2.1)$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır. Gamma fonksiyonuna bazen genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu da denir. Neden böyle denildiğini görmek için,

$$F(u)=\int_0^\infty e^{-ut}\,dt=\frac{1}{u} \qquad (2.2)$$

integrali ile tanımlanan fonksiyonu ele alınsın. $c>0$ olmak üzere bu integral

$c\le u\le d$ sonlu aralığında $\frac{1}{u}$ ya düzgün yakınsaktır. (2.2)'de u ya göre türevler alarak elde edilen genelleştirilmiş integraller yine düzgün yakınsak olacağından aşağıdakiler yazılabilir.

$$-F'(u)=\int_0^\infty te^{-ut}dt=\frac{1}{u^2}$$

$$F''(u)=\int_0^\infty t^2e^{-ut}dt=\frac{2!}{u^3}$$

$$-F'''(u)=\int_0^\infty t^3e^{-ut}dt=\frac{3!}{u^4}$$

$$F^{(4)}(u)=\int_0^\infty t^4e^{-ut}dt=\frac{4!}{u^5}$$

Böylece u ya göre türev almaya devam ettiğimizde n - yinci türev için

$$(-1)^nF^{(n)}(u)=\int_0^\infty t^ne^{-ut}dt=\frac{n!}{u^{n+1}}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlikte $u=1$ alınırsa;

$$\int_0^\infty t^ne^{-t}dt=n!=\int_0^\infty t^{(n+1)-1}e^{-t}dt=\Gamma(n+1)$$

olur. Burada n değerleri pozitif tamsayılar olarak alınmıştır. Halbuki n nin

$n>-1$ olan herhangi bir reel sayı olması halinde de bu genelleştirilmiş integral tanımlıdır.

Yani yakınsaktır. O halde $x>-1$ olan herhangi bir x reel sayısı için,

$$x!=\int_0^\infty t^xe^{-t}dt=\Gamma(x+1) \qquad (2.3)$$

yazılabilir. Buradan görülüyor ki, -1 den büyük olan tüm reel sayıların faktöriyel değerlerini sonlu bir reel sayı olarak tanımlamak mümkündür. Bundan dolayı

$$\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

genelleştirilmiş integraline genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu denir.

$x = 0$ olduğu zaman faktöriyel fonksiyonunun değeri ,

$$0! = \int_0^{\infty} e^{-t}dt = -e^{-t}\,|_0^{\infty} = -(0-1) = 1$$

dir. Bu sonuç $0!$ in neden 1 olarak tanımlanması gerektiğini açıklar.

Elemanter matematikte n faktöriyelin $n! = n(n-1)! = n\Gamma(n)$

yazılabilmelidir. Gerçekten aşağıda görüleceği gibi Γ fonksiyonu ,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

eşitliğini tüm $x > 0$ değerleri içi gerçekler. Bunu görelim:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^{\infty} e^{-t}dt$$

$$= \lim_{b\to\infty}(-t^x e^{-t})\,|_0^{\infty} + x\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x)$$

bulunur. Buradan da $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ eşitliği elde edilir.

Tanım(Beta Fonksiyonu) $B(x,y)$ ile gösterilen ve genelleştirilmiş bir integral yardımıyla tanımlanan iki değişkenli fonksiyona **Beta Fonksiyonu** denir. x ve y nin sadece pozitif değerleri için tanımlanan bu fonksiyon birkaç değişik biçimde ifade edilebilir [7] . $B(x,y)$ nin tanımı için verilen dört ayrı ifade şunlardır:

1) $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$

2) $B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2x-1}\,(\cos\theta)^{y-1}d\theta$

3) $B(x,y) = \int_0^{\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}du$

4) $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

Tanım(Konveks ve Konkav Fonksiyon) $\forall x_i, \lambda_i \in \mathbb{R}\ \ i = 0,1,2,\dots,n$ için

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$$

olmak üzere

$$f\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna **konveks fonksiyon** denir.

Eğer

$$f\left(\sum_{r=0}^{n} \lambda_r x_r\right) \geq \sum_{r=0}^{n} \lambda_r f(x_r)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna **konkav fonksiyon** denir.

Tanım (Bernstein Operatörü) $f \in C[0,1]$ için

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \qquad 0 \leq x \leq 1,$$

şeklinde tanımlanan operatöre **Bernstein operatörü** adı verilir.

Bernstein operatörü pozitif ve lineer bir operatördür.

BÖLÜM 2

2.1. İKİ DEĞİŞKENLİ BETA OPERATÖRLERİ İÇİN KESTİRİMLER

Bernstein Operatörleri kullanılarak yaklaşımlar teorisinde tanımlanan birçok farklı operatör için çeşitli yaklaşım metodları ve yaklaşımın derecesi hakkında bilgiler verilmiştir

B_n Bernstein lineer pozitif operatörleri ile yakınsamanın derecesi için güçlü teknikler vardır, öyle ki ikinci basamaktan türevlenebilen fonksiyonlar için Taylor açılımı kullanılarak yaklaşım bunlardan biridir. Bu teknik ilk olarak Voronovskaya tarafından verildi [30].

Bu kısımda Voronovskaya tarafından verilen bu tekniği ve yardımcı bazı eşitsizlikleri kullanarak iki değişkenli Beta operatörleri için bazı sonuçlar elde edilecektir. Bu sonuçlar elde edilirken daha önceden tanımlanan operatörler için yakınsamanın derecesini veren bazı tekniklerden faydalanılacaktır. Bunun için önce temel olarak kullanılacak Voronovskaya teoremini verelim.

Teorem A. Eğer f; $[0,1]$ de sınırlı, $x \in [0,1]$ için x in herhangi bir komşuluğunda $f''(x)$ var ve $f \in C^2[0,1]$ ise; o taktirde

$$\lim_{n\to\infty} n[B_n(f;x) - f(x)] = \frac{x(1-x)}{2} f''(x)$$

olup, yakınsaklık düzgündür.

Voronovskaya tarafından verilen bu teorem daha sonra birçok operatör için yakınsaklık derecesini kestirimde temel yol göstericilerden birisi olmuştur. Daha sonra Videnskij bir çalışmasında [29] Voronovskaya tarafından verilen bu teoremi genişleterek $f \in C^2[0,1]$ için

$$\left| n[B_n(f;x)] - \frac{x(1-x)}{2} f''(x) \right| \leq x(1-x)\omega\left(f''; \sqrt{\frac{2}{n}} \right)$$

şeklinde f'' türev fonksiyonunun süreklilik modülünü kullanarak üsten sınırlılık için kullanışlı bir sonuç verdi. Bu konuda diğer önemli bir sonuçta f'' nün süreklilik

modülünün en küçük konkav majorantı $\widetilde{\omega}$ kullanılarak Bernstein operatörleri için Gonska , Pitul ve Raşa tarafından verildi [17] , öyle ki bu sonuç

$$\left|n[B_n(\mathfrak{f};x)]-\frac{x(1-x)}{2}\mathfrak{f}''(x)\right| \leq \frac{x(1-x)}{2}\widetilde{\omega}\left(\mathfrak{f}'',\frac{1}{3\sqrt{n}}\right)$$

şeklindedir. Yazarlar bu sonucu [17] de verdikleri Teorem 6.2 nin bir uygulaması olarak elde ettiler.

Bu çalışmada verilen Teorem 6.2 nin başka bir uygulaması aşağıda ki şekilde Lupaş tarafından tanımlanan [25] β_n Beta operatörleri için verildi.

$$\beta_n(\mathfrak{f},x)=\left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{f}(0), & x=0 \\ \dfrac{1}{B\left(nx,n(1-x)\right)}\displaystyle\int_0^1 t^{nx-1}(1-t)^{n(1-x)-1}\mathfrak{f}(t)dt, & x\in(0,1) \\ \mathfrak{f}(1), & x=1 \end{array}\right\}$$

Burada $B(x,t)$ iyi bilinen tek değişkenli Beta fonksiyonu olup $f\in C[0,1]$ ve $n\in N$ dir.

Bu sonuç

$$\left|(n+1)[\beta_n(\mathfrak{f};x)-\mathfrak{f}(x)]-\frac{x(1-x)}{2}\mathfrak{f}''(x)\right| \leq \frac{x(1-x)}{2}\widetilde{\omega}\left(\mathfrak{f}'',\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{n+3}}\right)$$

şeklindedir.

Grüss 1935 [20] yılında integrallenebilen iki fonksiyonun çarpımının integrali ile fonksiyonların integrallerinin çarpımları arasındaki fark için aşağıdaki Teoremi verdi.

Teorem B. Kabul edelim ki $f;g:[a,b]\to R$ integrallenebilen ve türevlenebilen iki fonksiyon ve her $x\in[a,b]$ için $m_{\mathfrak{f}}\leq f(x)\leq M_{\mathfrak{f}}$, $m_g\leq g(x)\leq M(g)$ olsun.

O taktirde;

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b \mathfrak{f}(x)g(x)dx-\frac{1}{b-a}\int_a^b \mathfrak{f}(x)dx\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right|$$

$$\leq\frac{1}{4}(M_{\mathfrak{f}}-m_{\mathfrak{f}})\left(M_g-m_g\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

[6] numaralı referansta Acu, Gonska ve Raşa $H_n: C[a,b] \to C[a,b]$ bir lineer pozitif operatör, öyle ki $H_n(e_0: x) = e_0,\ \ e_v(x) = x^v : v = 0,1,2$ olmak üzere H_n ile tanımladıkları lineer pozitif operatör için alışılmış süreklilik modülünün $\widetilde{\omega}$ konkav majorantını kullanarak Grüss tipi eşitsizlikleri aşağıdaki teorem ile verdiler.

Teorem C. Eğer $f, g \in C[a,b]$ ve $x \in [a,b]$ bir sabit ise, o taktirde

$$|H_n(fg,x) - H_n(f,x)H_n(g,x)| \leq \frac{1}{4}\widetilde{\omega}\left(f; 2\sqrt{2H_n((e_1-x)^2,x)}\right)\widetilde{\omega}\left(g; 2\sqrt{2H_n((e_1-x)^2,x)}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

Sonrasında Gonska ve Tachev [18] bir çalışmalarında birinci mertebeden süreklilik modülünün en küçük konkav majorantı yerine ikinci mertebeden düzgün süreklilik modülünü kullanarak Bernstein operatörleri ve lineer pozitif operatörler için Grüss tipi eşitsizlikler elde ettiler.Daha sonra Gal ve Gonska bunların Bernstein polinomları ile bağlantılarını elde ettiler [16]ve bununla ilgili aşağıdaki teoremi verdiler ve Grüss-Voronovskaya tipi kestirimler olarak adlandırdılar.

Teorem D. $\widetilde{\omega}$ süreklilik modülünün en küçük konkav majorantı ve $C[0,1]$ üzerindeki norm $\|\,.\,\|$ olmak üzere; eğer $f, g \in C^2[0,1]$ ve n$\in \mathbb{N}$ ise $[0,1]$ deki tüm x ler için

$$n\left|B_n(fg,x) - B_n(f,x)B_n(g,x) - x\left(\frac{1-x}{2}\right)f'(x)g'(x)\right| \leq \frac{x(1-x)}{2}\left[\widetilde{\omega}\left((fg)'';\frac{1}{3\sqrt{n}}\right) + \|g'\|\widetilde{\omega}\left(f'';\frac{1}{3\sqrt{n}}\right) + \|f'\|\widetilde{\omega}\left(g'';\frac{1}{3\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{2n}\|f''\|\|g''\|\right]$$

eşitsizliği sağlanır.

Yukarıda verilen çalışmalardan sonra birçok araştırmacı Grüss-Voronovskaya tipi eşitsizlikler için çalışmalar yapmışlardır. Bunlar için [3], [5], [10], [12], [15], [28] referanslarına başvurabiliriz.

2009 yılında, Başcanbaz-Tunca ve Tuncer [9] n-değişkenli beta operatörlerini tanımladı ve bu operatörlerin modül süreklilik modülü fonksiyonun özelliklerini ve

Lipschitz sürekli fonksiyonlar için Lipschitz sabitini koruduğunu göstermiştir. Ayrıca, bunların yaklaşım özelliklerini ve sıralı genellemelerini de incelediler.

Şimdi bu tezde incelenecek operatörler için bazı gösterimler ve tanımlamaları verelim.

Δ ile

$\Delta = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : s,t \geq 0, s+t \leq 1\}$ simpleksi,

$\dot{\Delta} = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : s,t > 0,\ s+t < 1\}$ ile de açık simpleksi gösterilsin.

Bu çalışmada [9] da $f \in C(\Delta)$ için tanımlanan lineer pozitif Beta operatörlerinin $n = 2$ olması haline karşılık gelen Δ üzerinde tanımlı tüm reel değerli sürekli fonksiyonlar kümesi üzerinde tanımlı

$$\varphi_{n,x,y}(s,t) = \frac{\Gamma(n)s^{nx-1}t^{ny-1}(1-s-t)^{n(1-x-y)-1}}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)}$$

olmak üzere

$$\beta_{n,2}(f;x,y) = \begin{cases} \int_0^1 \int_0^{1-x} \varphi_{n,x,y}(s,t) f(s,t)\,dtds & ,(x,y) \in \dot{\Delta} \\ f(x,y) & ,(x,y) \in \Delta/\dot{\Delta} \end{cases}$$

iki değişkenli Beta operatörlerinin özellikleri incelenecektir. Bu operatör aynı zamanda iki değişkenli Dirichlet dağılımı olarak da bilinmektedir[31].

Tek değişkenli veya çok değişkenli beta operatörleriyle ilgili çeşitli çalışmalar vardır. Bunlardan bazıları [2], [7], [9], [13], [19], [22] de ve referanslarda bulunabilir.[10] numaralı referansta ise tek değişkenli Beta operatörler için birinci mertebeden Ditzian-Totik düzgün pürüzsüzlük modülü kullanılarak Voronovskaya ve Grüss-Voronovkaya tipi kestirimler verilmiştir.

[1], [11], [21], [23], [26] ve [8] numaralı referanslarda ise iki değişkenli lineer pozitif operatörler için Voronovskaya teoreminin asimtotik ve nicel olarak sonuçları verilmiştir.

Buradan itibaren yukarıda tanımlanan, iki değişkenli beta operatörleri olan $\beta_{n,2}$ için Grüss-Voronovskaya tipi teoremlerin yanı sıra nicel olarak Voronovskaya teoreminin $f \in C(\Delta)$ olması halinde süreklilik modülü açısından bir sonucu verilecektir. Bunun için önce bazı yardımcı sonuçlar elde edilecektir.

2.2.Yardımcı Sonuçlar

Bu lemmaları vermeden önce bazı tanımlamaları verelim.

Kabul edelim ki $u = s - x$ ve $v = t - y$ olsun. Bu durumda $f \in C(\Delta)$ için süreklilik modülü

$\omega(f, \delta) = sup\{|f(s,t) - f(x,y)|, \sqrt{u^2 + v^2} < \delta\}$, $\delta > 0$ şeklinde tanımlanır [23].

Δ üzerinde tüm reel değerli fonksiyonları $f \in C(\Delta)$ ve Δ üzerinde ikinci basamaktan sürekli türevlenebilen fonksiyonları da $f \in C^2(\Delta)$ ile gösteriyoruz.Bu durumda aşağıdaki Lemmayı verebiliriz.

Lemma 1. Her $(x, y) \in \dot{\Delta}$, $n \in N$ için aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur.

i. $\beta_{n,2}(1; x, y) = 1$

ii. $\beta_{n,2}(s; x, y) = x$

iii. $\beta_{n,2}(t; x, y) = y$

iv. $\beta_{n,2}(s^2; x, y) = \frac{nx^2+x}{n+1}$

v. $\beta_{n,2}(t^2; x, y) = \frac{ny^2+y}{n+1}$

İspat. İspat için $\beta_{n,2}(f; x, y)$ operatörünün tanımı ve

$$\beta(\alpha, \beta, \gamma) = \int_0^1 \int_0^{1-s} s^{\alpha-1} t^{\beta-1}(1 - s - t)^{\gamma-1} dtds = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha + \beta + \gamma)}$$

α , β , $\gamma > 0$ eşitliğinden yararlanılacaktır.

i. $\beta_{n,2}(f; x, y) = \left\{\int_0^1 \int_0^{1-s} \varphi_{n,x,y}(s,t) f(s,t) dtds \;\; ; \;\; x, y \in \dot{\Delta}\right\}$

operatörleri için $f(s,t) = 1$ alınırsa

$$\beta_{n,2}(1; x, y) = \int_0^1 \int_0^{1-s} \frac{\Gamma(n) s^{nx-1} t^{ny-1}(1 - s - t)^{n(1-x-y)-1}}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1 - x - y)\big)} 1 dtds$$

olup,

$\mathrm{B}(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1 - x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

olduğunu biliyoruz. Şimdi

$$\int_0^{1-s} t^{ny-1}\,(1-s-t)^{n(1-x-y)-1}dt$$

integralinde

$t=(1-s)u$ dönüşümü yapılırsa $dt=(1-s)du$ olup

$t=0\Rightarrow u=0\,,\,t=1-s\Rightarrow u=1$

olacaktır. Buna göre

$$\int_0^{1-s} t^{ny-1}\,(1-s-t)^{n(1-x-y)-1}dt$$

$$=\int_0^1 [(1-s)u]^{ny-1}[1-s-(1-s)u]^{n(1-x-y)-1}(1-s)\,du$$

$$=\int_0^1 (1-s)^{ny-1}u^{ny-1}[(1-s)(1-u)]^{n(1-x-y)-1}\,(1-s)du$$

$$=\int_0^1 (1-s)^{ny+n-nx-ny-1}\,u^{ny-1}(1-u)^{n(1-x-y)-1}du$$

$$=(1-s)^{n(1-x)-1}\int_0^1 u^{ny-1}\,(1-u)^{n(1-x-y)-1}du$$

$$=(1-s)^{n(1-x)-1}\mathrm{B}\big(ny,n(1-x-y)\big)$$

olur. Bu değer yukarıda yerine yazılıp $B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ eşitliği kullanılırsa

$$\Rightarrow \beta_{n,2}(1;x,y)=\int_0^1\int_0^{1-s}\frac{\Gamma(n)s^{nx-1}t^{ny-1}(1-s-t)^{n(1-x-y)-1}}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)}\,1dtds$$

$$=\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)}\int_0^1 s^{nx-1}\int_0^{1-s} t^{ny-1}\,(1-s-t)^{n(1-x-y)-1}dtds$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)} \times \int_0^1 s^{nx-1}(1-s)^{n(1-x)-1} \frac{\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)}{\Gamma(ny+n-nx-ny)} ds$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma\big(n(1-x)\big)} \int_0^1 s^{nx-1}\,(1-s)^{n(1-x)-1} ds$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma\big(n(1-x)\big)} B\big(nx, n(1-x)\big)$$

$$= \frac{\Gamma(n)\Gamma(nx)\Gamma\big(n(1-x)\big)}{\Gamma(nx)\Gamma\big(n(1-x)\big)\Gamma(nx+n-nx)}$$

$$= 1$$

elde edilir.

ii. Şimdi $f(s,t) = s$ olsun. Buna göre

$$\beta_{n,2}(s;x,y) = \int_0^1 \int_0^{1-s} \frac{\Gamma(n) s^{nx-1} t^{ny-1} (1-s-t)^{n(1-x-y)-1}}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)} s\,dt\,ds$$

olur. Biliyoruz ki

$$\int_0^{1-s} t^{ny-1}(1-s-t)^{n(1-x-y)-1}\,dt,$$

integralinin değeri

$$= (1-s)^{n(1-x)-1} B\big(ny, n(1-x-y)\big)$$

olarak elde edilmişti. Bu değer yerine yazılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\beta_{n,2}(s;x,y) = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)} \times \int_0^1 \int_0^{1-s} s^{nx} t^{ny-1}\,(1-s-t)^{n(1-x-y)-1} dt\,ds$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)} \int_0^1 s^{nx}(1-s)^{n(1-x)-1} B\big(ny, n(1-x-y)\big)\, ds$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)} \int_0^1 s^{nx}(1-s)^{n(1-x)-1} \frac{\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)}{\Gamma(n-nx)}\, ds$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma\big(n(1-x)\big)} \int_0^1 s^{nx}\,(1-s)^{n(1-x)-1} ds$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma\big(n(1-x)\big)} \int_0^1 s^{nx+1-1}\,(1-s)^{n(1-x)-1} ds$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma\big(n(1-x)\big)} B\big(nx+1, n(1-x)\big)$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma\big(n(1-x)\big)} \frac{\Gamma(nx+1)\Gamma\big(n(1-x)\big)}{\Gamma(nx+1+n-nx)}$$

$$= \frac{\Gamma(n)\Gamma(nx+1)}{\Gamma(nx)\Gamma(n+1)}$$

$$= \frac{(n-1)!\,nx!}{(nx-1)!\,n!}$$

$$= \frac{(n-1)!\,nx(nx-1)!}{(nx-1)!\,n(n-1)!}$$

$$= x$$

olarak bulunur.

iii. Şimdi de $f(s,t) = t$ olsun. Bu değer yerine yazılırsa

$$\beta_{n,2}(t;x,y) = \int_0^1 \int_0^{1-s} \frac{\Gamma(n) s^{nx-1} t^{ny-1} (1-s-t)^{n(1-x-y)-1}}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)}\, t dt ds$$

olur. Şimdi de

$\mathrm{I} = \int_0^{1-s} t^{ny-1}\,(1-s-t)^{n(1-x-y)-1} t dt = \int_0^{1-s} t^{ny}\,(1-s-t)^{n(1-x-y)-1}\mathrm{dt}$

integralinde

$t = (1 - s\ )u$ dönüşümü yapılırsa

$$I = \int_0^1 [(1-s)u]^{ny}\,[(1-s-(1-s)u)]^{n(1-x-y)-1}(1-s)du$$

$$= \int_0^1 (1-s)^{ny}\,u^{ny}[(1-s)(1-u)]^{n(1-x-y)-1}(1-s)du$$

$$= \int_0^1 (1-s)^{ny+n-nx-ny-1}\,u^{ny}(1-u)^{n(1-x-y)-1}(1-s)du$$

$$= (1-s)^{n(1-x)-1}\int_0^1 u^{ny+1-1}(1-u)^{n(1-x-y)-1}\,du$$

$$= (1-s)^{n(1-x)}B\big(ny+1, n(1-x-y)\big)$$

$$= (1-s)^{n(1-x)}\frac{\Gamma(ny+1)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)}{\Gamma(n(1-x)+1)}$$

olur. Bu değer yerine yazılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\Rightarrow \beta_{n,2}(t;x,y) = \int_0^1\int_0^{1-s} \frac{\Gamma(n)s^{nx-1}t^{ny-1}(1-s-t)^{n(1-x-y)-1}}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)}\,tdtds$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)}\int_0^1 s^{nx-1}\int_0^{1-s} t^{ny}\,(1-s-t)^{n(1-x-y)-1}dtds$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)} \times \int_0^1 s^{nx-1}(1-s)^{n(1-x)}\frac{\Gamma(ny+1)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)}{\Gamma(n-nx+1)}ds$$

$$= \frac{\Gamma(n)\Gamma(ny+1)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma(n(1-x)+1)}B(nx, n(1-x)+1)$$

$$= \frac{\Gamma(n)\Gamma(ny+1)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma(n(1-x)+1)} \frac{\Gamma(nx)\Gamma(n(1-x)+1)}{\Gamma(n+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(n)\Gamma(ny+1)}{\Gamma(ny)\Gamma(n+1)}$$

$$= \frac{(n-1)!\, ny!}{(ny-1)!\, n!}$$

$$= \frac{(n-1)!\, ny(ny-1)!}{(ny-1)!\, n(n-1)!}$$

$$= y$$

olarak bulunur

iv. $f(s,t) = s^2$ ise, bu durumda gerekli işlemler yapıldığında

$$\Rightarrow \beta_{n,2}(s^2;x,y) = \int_0^1 \int_0^{1-s} \frac{\Gamma(n) s^{nx-1} t^{ny-1} (1-s-t)^{n(1-x-y)-1}}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)} s^2 dtds$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)} \int_0^1 \int_0^{1-s} s^{nx+1}\, t^{ny-1} (1-s-t)^{n(1-x-y)-1} dtds$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)} \times \int_0^1 s^{nx+1} (1-s)^{n(1-x)-1} \frac{\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)}{\Gamma\big(n(1-x)\big)} ds$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma\big(n(1-x)\big)} \int_0^1 s^{nx+1+1-1} (1-s)^{n(1-x)-1} ds$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma\big(n(1-x)\big)} B\big(nx+2, n(1-x)\big)$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma\big(n(1-x)\big)} \frac{\Gamma(nx+2)\Gamma\big(n(1-x)\big)}{\Gamma(n+2)}$$

$$= \frac{\Gamma(n)\Gamma(nx+2)}{\Gamma(nx)\Gamma(n+2)}$$

$$= \frac{(n-1)!\,(nx+1)!}{(nx-1)!\,(n+1)!}$$

$$= \frac{(n-1)!\,(nx+1)(nx)(nx-1)!}{(nx-1)!\,(n+1)n(n-1)!}$$

$$= \frac{(nx+1)nx}{n(n+1)}$$

$$= \frac{nx^2+x}{n+1}$$

olarak elde edilir.

v. Eğer $f(s,t) = t^2$ ise bu durumda

$$\beta_{n,2}(t^2;x,y) = \int_0^1 \int_0^{1-s} \frac{\Gamma(n)s^{nx-1}t^{ny-1}(1-s-t)^{n(1-x-y)-1}}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)} t^2 dtds$$

$$\int_0^{1-s} t^{ny-1}\,(1-s-t)^{n(1-x-y)-1} t^2 dt$$

olup, burada yine

$t = (1-s)u$ dönüşümü uygulanırsa

$$= \int_0^1 [(1-s)u]^{ny+1}\,[(1-s-(1-s)u)]^{n(1-x-y)-1}(1-s)du$$

$$= (1-s)^{n(1-x)+1} \int_0^1 u^{ny+1+1-1}\,(1-u)^{n(1-x-y)-1} du$$

$$= (1-s)^{n(1-x)+1} B\big(ny+2, n(1-x-y)\big)$$

olarak bulunur. Bu değer yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\Rightarrow \beta_{n,2}(t^2;x,y) = \int_0^1 \int_0^{1-s} \frac{\Gamma(n)s^{nx-1}t^{ny-1}(1-s-t)^{n(1-x-y)-1}}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)} t^2 dtds$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)}$$

$$\times \int_0^1 s^{nx-1}\,(1-s)^{n(1-x)+1}\,\frac{\Gamma(ny+2)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)}{\Gamma(n(1-x)+2)}\,ds$$

$$= \frac{\Gamma(n)\Gamma(ny+2)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma(n(1-x)+2)}\,\frac{\Gamma(nx)\Gamma(n(1-x)+2)}{\Gamma(n+2)}$$

$$= \frac{\Gamma(n)\Gamma(ny+2)}{\Gamma(ny)\Gamma(n+2)}$$

$$= \frac{(n-1)!\,(ny+1)!}{(ny-1)!\,(n+1)!}$$

$$= \frac{(n-1)!\,(ny+1)!}{(ny-1)!\,(n+1)!}$$

$$= \frac{(n-1)!\,(ny+1)ny(ny-1)!}{(ny-1)!\,(n+1)n(n-1)!}$$

$$= \frac{(ny+1)ny}{n(n+1)}$$

$$= \frac{ny^2+y}{n+1}$$

olarak elde edilir.

İki değişkenli beta fonksiyonunun tanımından

$B(\alpha,\beta,\gamma) = \int_0^1 \int_0^{1-s} s^{\alpha-1}t^{\beta-1}\,(1-s-t)^{\gamma-1}dtds = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}, \alpha,\beta,\gamma > 0,$

elde edilebileceğini yukarıda gördük. Bu eşitlik yardımı ve Γ(.) fonksiyonunun tanımını kullanarak aşağıdaki Lemmalar verilebilir.

Lemma 2. Her bir $(x,y)\epsilon\dot{\Delta}$ ve n$\epsilon\mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

i. $\beta_{n,2}(st;x,y) = \frac{nxy}{n+1}$,

ii. $\beta_{n,2}(s^2t;x,y) = \frac{n^2x^2y+nxy}{(n+1)(n+2)}$,

iii. $\beta_{n,2}(st^2;x,y) = \frac{n^2xy^2+nxy}{(n+1)(n+2)}$,

iv. $\beta_{n,2}(s^2t^2;x,y)=\frac{n^3x^2y^2+n^2x^2y+n^2xy^2+nxy}{(n+1)(n+2)(n+3)}$,

v. $\beta_{n,2}(s^3;x,y)=\frac{n^2x^3+3nx^2+2x}{(n+1)(n+2)}$,

vi. $\beta_{n,2}(t^3;x,y)=\frac{n^2y^3+3ny^2+2y}{(n+1)(n+2)}$,

vii. $\beta_{n,2}(s^4;x,y)=\frac{n^3x^4+6n^2x^3+11nx^2+6x}{(n+1)(n+2)(n+3)}$,

viii. $\beta_{n,2}(t^4;x,y)=\frac{n^3y^4+6n^2y^3+11ny^2+6y}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

İspat.

i. $\beta_{n,2}(st;x,y)=\int_0^1\int_0^{1-s}\frac{\Gamma(n)s^{nx-1}t^{ny-1}(1-s-t)^{n(1-x-y)-1}}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\left(n(1-x-y)\right)}stdtds$

$$\int_0^{1-s} t^{ny-1}\,(1-s-t)^{n(1-x-y)-1}tdt\;=(1-s)^{n(1-x)}B\big(ny+1,n(1-x-y)\big)$$

olduğunu biliyoruz. Bunu yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\Rightarrow\beta_{n,2}(st;x,y)=\int_0^1\int_0^{1-s}\frac{\Gamma(n)s^{nx-1}t^{ny-1}(1-s-t)^{n(1-x-y)-1}}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\left(n(1-x-y)\right)}stdtds$$

$$=\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\left(n(1-x-y)\right)}\int_0^1 s^{nx-1}\int_0^{1-s}t^{ny-1}\,(1-s-t)^{n(1-x-y)-1}stdtds$$

$$=\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\left(n(1-x-y)\right)}\times\int_0^1 s^{nx+1-1}(1-s)^{n(1-x)+1-1}\frac{\Gamma(ny+1)\Gamma\left(n(1-x-y)\right)}{\Gamma(n(1-x)+1)}ds$$

$$=\frac{\Gamma(n)\Gamma(ny+1)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma(n(1-x)+1)}B(nx+1,n(1-x)+1)$$

$$=\frac{\Gamma(n)\Gamma(ny+1)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma(n(1-x)+1)}\frac{\Gamma(nx+1)\Gamma(n(1-x)+1)}{\Gamma(n+2)}$$

$$=\frac{\Gamma(n)\Gamma(ny+1)\Gamma(nx+1)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma(n+2)}$$

$$=\frac{(n-1)!\,ny!\,nx!}{(nx-1)!\,(ny-1)!\,(n+1)!}$$

$$= \frac{(n-1)!\, ny(ny-1)!\, nx(nx-1)!}{(nx-1)!\,(ny-1)!\,(n+1)n(n-1)!}$$

$$= \frac{nynx}{(n+1)n}$$

$$= \frac{nxy}{n+1}$$

olarak elde edilir.

ii.

$$\beta_{n,2}(s^2t;x,y) = \int_0^1 \int_0^{1-s} \frac{\Gamma(n)s^{nx-1}t^{ny-1}(1-s-t)^{n(1-x-y)-1}}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)} s^2 t dt ds$$

$$\int_0^{1-s} t^{ny-1}\,(1-s-t)^{n(1-x-y)-1} t dt = (1-s)^{n(1-x)} B\big(ny+1, n(1-x-y)\big)$$

değeri yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\Rightarrow \beta_{n,2}(s^2t;x,y) = \int_0^1 \int_0^{1-s} \frac{\Gamma(n)s^{nx-1}t^{ny-1}(1-s-t)^{n(1-x-y)-1}}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)} s^2 t dt ds$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)} \int_0^1 s^{nx-1} s^2 \int_0^{1-s} t^{ny-1}\,(1-s-t)^{n(1-x-y)-1} t dt ds$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)} \int_0^1 s^{nx+1}\,(1-s)^{n(1-x)} \frac{\Gamma(ny+1)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)}{\Gamma(n(1-x)+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(n)\Gamma(ny+1)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma(n(1-x)+1)} \int_0^1 s^{nx+1+1-1}\,(1-s)^{n(1-x)+1-1} ds$$

$$= \frac{\Gamma(n)\Gamma(ny+1)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma(n(1-x)+1)} B(nx+2, n(1-x)+1)$$

$$= \frac{\Gamma(n)\Gamma(ny+1)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma(n(1-x)+1)} \frac{\Gamma(nx+2)\Gamma(n(1-x)+1)}{\Gamma(n+3)}$$

$$= \frac{(n-1)!\, ny!\, (nx+1)!}{(nx-1)!\,(ny-1)!\,(n+2)!}$$

$$= \frac{(nx+1)nxny}{(n+2)(n+1)n}$$

$$= \frac{n^2x^2y + nxy}{(n+1)(n+2)}$$

olarak elde edilir.

iii.

$$\beta_{n,2}(st^2;x,y) = \int_0^1 \int_0^{1-s} \frac{\Gamma(n)s^{nx-1}t^{ny-1}(1-s-t)^{n(1-x-y)-1}}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)} st^2 dtds$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)} \times \int_0^1 s^{nx}(1-s)^{n(1-x)+1} \frac{\Gamma(ny+2)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)}{\Gamma(n(1-x)+2)} ds$$

$$= \frac{\Gamma(n)\Gamma(ny+2)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma(n(1-x)+2)} \int_0^1 s^{nx+1-1}(1-s)^{(1-x)+1+1-1} ds$$

$$= \frac{\Gamma(n)\Gamma(ny+2)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma(n(1-x)+2)} B(nx+1, n(1-x)+2)$$

$$= \frac{\Gamma(n)\Gamma(ny+2)\Gamma(nx+1)\Gamma(n(1-x)+2)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma(n(1-x)+2)\Gamma(n+3)}$$

$$= \frac{(n-1)!\,(ny+1)!\,nx!}{(nx-1)!\,(ny-1)!\,(n+2)!}$$

$$= \frac{(ny+1)(ny)(nx)}{(n+2)(n+1)n}$$

$$= \frac{(n^2y^2+ny)x}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{n^2xy^2 + nxy}{(n+1)(n+2)}$$

olarak elde edilir.

iv.

$$\beta_{n,2}(s^2t^2;x,y)=\int_0^1\int_0^{1-s}\frac{\Gamma(n)s^{nx-1}t^{ny-1}(1-s-t)^{n(1-x-y)-1}}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)}s^2t^2dtds$$

$$=\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)}$$

$$\times\int_0^1 s^{nx+1}\,(1-s)^{n(1-x)+1}\frac{\Gamma(ny+2)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)}{\Gamma(n(1-x)+2)}ds$$

$$=\frac{\Gamma(n)\Gamma(ny+2)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma(n(1-x)+2)}B(nx+2,n(1-x)+2)$$

$$=\frac{\Gamma(n)\Gamma(ny+2)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma(n(1-x)+2)}\frac{\Gamma(nx+2)\Gamma(n(1-x)+2)}{\Gamma(n+4)}$$

$$=\frac{\Gamma(n)\Gamma(ny+2)\Gamma(nx+2)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma(n+4)}$$

$$=\frac{(n-1)!\,(ny+1)!\,(nx+1)!}{(nx-1)!\,(ny-1)!\,(n+3)!}$$

$$=\frac{(n-1)!\,(ny+1)ny(ny-1)!\,(nx+1)nx(nx-1)!}{(nx-1)!\,(ny-1)!\,(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)!}$$

$$=\frac{(ny+1)ny(nx+1)nx}{(n+3)(n+2)(n+1)n}$$

$$=\frac{(n^2y^2+ny)(nx^2+x)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{n^3x^2y^2+n^2x^2y+n^2xy^2+nxy}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

olarak elde edilir.

v.

$$\beta_{n,2}(s^3;x,y)=\int_0^1\int_0^{1-s}\frac{\Gamma(n)s^{nx-1}t^{ny-1}(1-s-t)^{n(1-x-y)-1}}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)}s^3dtds$$

$$\Rightarrow\beta_{n,2}(s^3;x,y)=\int_0^1\int_0^{1-s}\frac{\Gamma(n)s^{nx-1}t^{ny-1}(1-s-t)^{n(1-x-y)-1}}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)}s^3dtds$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)} \times \int_0^1 \int_0^{1-s} s^{nx-1}\, s^3 t^{ny-1}(1-s-t)^{n(1-x-y)-1} dtds$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)} \times \int_0^1 s^{nx+2}\,(1-s)^{n(1-x)-1} \frac{\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)}{\Gamma\big(n(1-x)\big)} ds$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma\big(n(1-x)\big)} B\big(nx+3, n(1-x)\big)$$

$$= \frac{(n-1)!\,(nx+2)!}{(nx-1)!\,(n+2)!}$$

$$= \frac{(n-1)!\,(nx+2)(nx+1)nx(nx-1)!}{(n+2)(n+1)n(n-1)!\,(nx-1)!}$$

$$= \frac{(n^2x^2+3nx+2)x}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2x^3+3nx^2+2x}{(n+1)(n+2)}$$

olarak bulunur.

vi.

$$\beta_{n,2}(t^3;x,y) = \int_0^1 \int_0^{1-s} \frac{\Gamma(n) s^{nx-1} t^{ny-1}(1-s-t)^{n(1-x-y)-1}}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)} t^3 dtds$$

$$\int_0^{1-s} t^{ny+2}\,(1-s-t)^{n(1-x-y)-1} dt$$

integralinde $t = (1-s)u$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$= (1-s)^{n(1-x)+2} B\big(ny+3, n(1-x-y)\big)$$

olur. Bu değer yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\Rightarrow \beta_{n,2}(t^3;x,y) = \int_0^1 \int_0^{1-s} \frac{\Gamma(n)s^{nx-1}t^{ny-1}(1-s-t)^{n(1-x-y)-1}}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)} t^3 dtds$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)} \times \int_0^1 s^{nx-1}(1-s)^{n(1-x)+3-1} \frac{\Gamma(ny+3)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)}{\Gamma(n(1-x)+3)} ds$$

$$= \frac{\Gamma(n)\Gamma(ny+3)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma(n(1-x)+3)} \frac{\Gamma(nx)\Gamma(n(1-x)+3)}{\Gamma(n+3)}$$

$$= \frac{\Gamma(n)\Gamma(ny+3)}{\Gamma(ny)\Gamma(n+3)}$$

$$= \frac{(n-1)!\,(ny+2)!}{(ny-1)!\,(n+2)!}$$

$$= \frac{(n-1)!\,(ny+2)(ny+1)ny(ny-1)!}{(ny-1)!\,(n+2)(n+1)n(n-1)!}$$

$$= \frac{(ny+2)(ny+1)y}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{(n^2y^2+3ny+2)y}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2y^3+3ny^2+2y}{(n+1)(n+2)}$$

olarak bulunur.

vii.

$$\beta_{n,2}(s^4;x,y) = \int_0^1 \int_0^{1-s} \frac{\Gamma(n)s^{nx-1}t^{ny-1}(1-s-t)^{n(1-x-y)-1}}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)} s^4 dtds$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)} \int_0^1 \int_0^{1-s} s^{nx-1}s^4t^{ny-1}\,(1-s-t)^{n(1-x-y)-1} dtds$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)} \int_0^1 \int_0^{1-s} s^{nx+3} t^{ny-1} (1-s-t)^{n(1-x-y)-1} dtds$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)} \int_0^1 s^{nx+3} (1-s)^{n(1-x)-1} \frac{\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)}{\Gamma\big(n(1-x)\big)} ds$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma\big(n(1-x)\big)} \int_0^1 s^{nx+3+1-1} (1-s)^{n(1-x)-1} ds$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma\big(n(1-x)\big)} \frac{\Gamma(nx+4)\Gamma\big(n(1-x)\big)}{\Gamma(n+4)}$$

$$= \frac{(n-1)!\,(nx+3)!}{(nx-1)!\,(n+3)!}$$

$$= \frac{(n-1)!\,(nx+3)(nx+2)(nx+1)nx(nx-1)!}{(nx-1)!\,(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)!}$$

$$= \frac{(nx+3)(nx+2)(nx+1)x}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{(nx^2+3x)(n^2x^2+3nx+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{n^3x^4+3n^2x^3+2nx^2+3n^2x^3+9nx^2+6x}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{n^3x^4+6n^2x^3+11nx^2+6x}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

olarak elde edilir.

viii.

$$\beta_{n,2}(t^4;x,y) = \int_0^1 \int_0^{1-s} \frac{\Gamma(n)s^{nx-1}t^{ny-1}(1-s-t)^{n(1-x-y)-1}}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)} t^4 dtds$$

$$\int_0^{1-s} t^{ny+3} (1-s-t)^{n(1-x-y)-1} dt$$

integralinde $t = (1-s)u$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$= (1-s)^{n(1-x)+3} B\big(ny+4, n(1-x-y)\big)$$

olur.

$$\Rightarrow \beta_{n,2}(t^4;x,y)=\int_0^1\int_0^{1-s}\frac{\Gamma(n)s^{nx-1}t^{ny-1}(1-s-t)^{n(1-x-y)-1}}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)}t^4dtds$$

$$=\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)}$$

$$\times\int_0^1 s^{nx-1}(1-s)^{n(1-x)+3}\frac{\Gamma(ny+4)\Gamma\big(n(1-x-y)\big)}{\Gamma(n(1-x)+4)}ds$$

$$=\frac{\Gamma(n)\Gamma(ny+4)}{\Gamma(nx)\Gamma(ny)\Gamma(n(1-x)+4)}\frac{\Gamma(nx)\Gamma(n(1-x)+4)}{\Gamma(n+4)}$$

$$=\frac{(n-1)!\,(ny+3)!}{(ny-1)!\,(n+3)!}$$

$$=\frac{(n-1)!\,(ny+3)(ny+2)(ny+1)ny(ny-1)!}{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)!\,(ny-1)!}$$

$$=\frac{(ny+3)(ny+2)(ny+1)y}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{(n^2y^2+5ny+6)(ny^2+y)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{n^3y^4+n^2y^3+5n^2y^3+5ny^2+6ny^2+6y}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{n^3y^4+6n^2y^3+11ny^2+6y}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

olarak elde edilir.

Şimdi ilerideki işlemlerde kolaylık olması bakımından aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3. Her $(x,y)\in\dot{\Delta}$ ve $n\in\mathbb{N}$ ve $u=s-x$, $v=t-y$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i. $\beta_{n,2}(u;x,y)=0,$

ii. $\beta_{n,2}(v;x,y)=0,$

iii. $\beta_{n,2}(u^2;x,y)=\frac{x(1-x)}{n+1}$,

iv. $\beta_{n,2}(v^2;x,y)=\frac{y(1-y)}{n+1}$,

v. $\beta_{n,2}(uv;x,y)=-\frac{xy}{n+1}$,

vi. $\beta_{n,2}(u^4;x,y)=\frac{3(n-6)x^2(1-x)^2+6x(1-x)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$,

vii. $\beta_{n,2}(v^4;x,y)=\frac{3(n-6)y^2(1-y)^2+6y(1-y)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$,

viii. $\beta_{n,2}(u^2v^2;x,y)=\frac{nxy+(6-n)(x+y-3xy)xy}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

ix. $\beta_{n,2}((u^2+v^2)^2;x,y)=\frac{3(n-6)[x^2+(1-x)^2+y^2(1-y)^2]}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\frac{6[x(1-x)+y(1-y)]}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\frac{2[n+(6-n)(x+y-3xy)]xy}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

İspat. İspat için $\beta_{n,2}(f;x,y)$ operatörünün lineerlik özelliğinden yararlanılacaktır. Ayrıca Lemma 1 ve Lemma 2 de elde edilen sonuçlar doğrudan kullanılacaktır.

i.

$$\beta_{n,2}(u;x,y)=\beta_{n,2}(s-x;x,y)=\beta_{n,2}(s;x,y)-\beta_{n,2}(x;x,y)$$
$$=\beta_{n,2}(s;x,y)-x\beta_{n,2}(1;x,y)$$
$$=x-x=0$$

olur.

ii.

$$\beta_{n,2}(v;x,y)=\beta_{n,2}(t-y;x,y)=\beta_{n,2}(t;x,y)-\beta_{n,2}(y;x,y)$$
$$=\beta_{n,2}(t;x,y)-y\beta_{n,2}(1;x,y)$$
$$=y-y=0$$

olur.

iii.

$$\beta_{n,2}(u^2;x,y)=\beta_{n,2}((s-x)^2;x,y)$$
$$=\beta_{n,2}(s^2-2sx+x^2;x,y)$$

$$= \beta_{n,2}(s^2; x, y) - 2\beta_{n,2}(sx; x, y) + \beta_{n,2}(x^2; x, y)$$

$$= \beta_{n,2}(s^2; x, y) - 2x\beta_{n,2}(s; x, y) + x^2\beta_{n,2}(1; x, y)$$

$$= \frac{nx^2 + x}{n+1} - 2x^2 + x^2$$

$$= \frac{nx^2 + x}{n+1} - x^2$$

$$= \frac{nx^2 + x - nx^2 - x^2}{n+1}$$

$$= \frac{x(1-x)}{n+1}$$

olur.

iv.

$$\beta_{n,2}(v^2; x, y) = \beta_{n,2}((t-y)^2; x, y)$$

$$= \beta_{n,2}(t^2 - 2ty + y^2; x, y)$$

$$= \beta_{n,2}(t^2; x, y) - \beta_{n,2}(2ty; x, y) + \beta_{n,2}(y^2; x, y)$$

$$= \beta_{n,2}(t^2; x, y) - 2y\beta_{n,2}(t; x, y) + y^2\beta_{n,2}(1; x, y)$$

$$= \frac{ny^2 + y}{n+1} - 2y^2 + y^2$$

$$= \frac{ny^2 + y}{n+1} - y^2$$

$$= \frac{ny^2 + y - ny^2 - y^2}{n+1}$$

$$= \frac{y(1-y)}{n+1}$$

olur.

v.

$$\beta_{n,2}(uv; x, y) = \beta_{n,2}\big((s-x)(t-y); x, y\big)$$

$$= \beta_{n,2}(st - sy - xt + xy; x, y)$$

$$= \beta_{n,2}(st; x, y) - \beta_{n,2}(sy; x, y) - \beta_{n,2}(xt; x, y) + \beta_{n,2}(xy; x, y)$$

$$= \beta_{n,2}(st; x, y) - y\beta_{n,2}(s; x, y) - x\beta_{n,2}(t; x, y) + xy\beta_{n,2}(1; x, y)$$

$$= \frac{nxy}{n+1} - xy - xy + xy$$

$$= \frac{nxy}{n+1} - xy$$

$$= \frac{nxy - nxy - xy}{n+1}$$

$$= -\frac{xy}{n+1}$$

vi.

$$\beta_{n,2}(u^4; x, y) = \beta_{n,2}((s-x)^4; x, y)$$

$$= \beta_{n,2}(s^4 - 4s^3x + 6s^2x^2 - 4sx^3 + x^4; x, y)$$

$$= \beta_{n,2}(s^4; x, y) - 4x\beta_{n,2}(s^3; x, y) + 6x^2\beta_{n,2}(s^2; x, y)$$

$$-4x^3\beta_{n,2}(s; x, y) + x^4\beta_{n,2}(1; x, y)$$

$$= \frac{n^3x^4 + 6n^2x^3 + 11nx^2 + 6x}{(n+1)(n+2)(n+3)} - 4x\left[\frac{n^2x^3 + 3nx^2 + 2x}{(n+1)(n+2)}\right] + 6x^2\left[\frac{nx^2 + x}{n+1}\right]$$

$$- 4x^3x + x^4$$

$$= \frac{n^3x^4 + 6n^2x^3 + 11nx^2 + 6x}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{(4n^2x^4 + 12nx^3 + 8x^2)(n+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$+ \frac{(6nx^4 + 6x^3)(n+2)(n+3)}{(n+2)(n+3)} - 3x^4$$

$$= \frac{n^3x^4 + 6n^2x^3 + 11nx^2 + 6x - 3x^4(n+1)(n+2)(n+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$- \frac{(4n^3x^4 + 12n^2x^3 + 8nx^2 + 12n^2x^4 + 36nx^3 + 24x^2)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$+ \frac{(6nx^4 + 6x^3)(n^2 + 5n + 6)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{n^3x^4 + 6n^2x^3 + 11nx^2 + 6x}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{-3n^3x^4 - 18n^2x^4 - 33nx^4 - 18x^4}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$
$$+ \frac{-4n^3x^4 - 12n^2x^3 - 8nx^2}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{-12n^2x^4 - 36nx^3 - 24x^2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$
$$+ \frac{6n^3x^4 + 30n^2x^4 + 36nx^4 + 6n^2x^3 + 30nx^3 + 36x^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{n^3x^4(1-3-4+6) + n^2x^3(6-12+6) + nx^2(11-8)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$
$$+ \frac{6x + n^2x^4(-18-12+30)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$
$$+ \frac{nx^4(-33+36) - 18x^4 + nx^3(-36+30) - 24x^2 + 36x^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{3nx^2 + 6x + 3nx^4 - 18x^4 - 6nx^3 - 24x^2 + 36x^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{3nx^2 - 6nx^3 + 3nx^4 - 24x^2 + 36x^3 - 18x^4 + 6x}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{(3nx^2 - 18x^2)(1 - 2x + x^2) + 6x - 6x^2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{(3n-18)x^2(1-2x+x^2) + 6x - 6x^2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{3(n-6)x^2(1-x)^2 + 6x(1-x)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

olarak elde edilir.

vii.

$$\beta_{n,2}(v^4; x, y) = \beta_{n,2}((t-y)^4; x, y)$$

$$= \beta_{n,2}(t^4 - 4t^3y + 6t^2y^2 - 4ty^3 + y^4; x, y)$$

$$= \beta_{n,2}(t^4; x, y) - 4y\beta_{n,2}(t^3; x, y) + 6y^2\beta_{n,2}(t^2; x, y) - 4y^3\beta_{n,2}(t; x, y)$$
$$+ y^4\beta_{n,2}(1; x, y)$$

$$= \frac{n^3y^4 + 6n^2y^3 + 11ny^2 + 6y}{(n+1)(n+2)(n+3)} - 4y\left[\frac{n^2y^3 + 3ny^2 + 2y}{(n+1)(n+2)}\right] + 6y^2\left[\frac{ny^2 + y}{(n+1)}\right]$$
$$- 4y^3y + y^4$$

$$= \frac{n^3y^4 + 6n^2y^3 + 11ny^2 + 6y}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{(4n^2y^4 + 12ny^3 + 8y^2)(n+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$
$$+ \frac{(6ny^4 + 6y^3)(n+2)(n+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)} - 3y^4$$

$$= \frac{n^3y^4 + 6n^2y^3 + 11ny^2 + 6y}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$
$$- \frac{4n^3y^4 + 12n^2y^3 + 8ny^2 + 12n^2y^4 + 36ny^3 + 24y^2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$
$$+ \frac{(6ny^4 + 6y^3)(n^2 + 5n + 6)}{(n+1)(n+2)(n+3)} - 3y^4$$

$$= \frac{n^3y^4 + 6n^2y^3 + 11ny^2 + 6y - 4n^3y^4 - 12n^2y^3 - 8ny^2 - 12n^2y^4 - 36ny^3 - 24y^2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$
$$+ \frac{(6n^3y^4 + 6n^2y^3 + 30n^2y^4 + 30ny^3 + 36ny^4 + 36y^3) - 3y^4(n+1)(n+2)(n+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{n^3y^4 + 6n^2y^3 + 11ny^2 + 6y - 4n^3y^4 - 12n^2y^3 - 8ny^2 - 12n^2y^4 - 36ny^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$
$$+ \frac{-24y^2 + 6n^3y^4 + 6n^2y^3 + 30n^2y^4 + 30ny^3 + 36ny^4}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$
$$+ \frac{36y^3 - 3y^4n^3 - 18n^2y^4 - 33ny^4 - 18y^4}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{n^3y^4(1 - 4 + 6 - 3) + n^2y^3(6 - 12 + 6) + ny^2(11 - 8) + 6y + n^2y^4(-12 + 30 - 18)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$
$$+ \frac{ny^3(-36 + 30) - 24y^2 + ny^4(36 - 33) + 36y^3 - 18y^4}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{3ny^2 + 6y - 6ny^3 - 24y^2 + 3ny^4 + 36y^3 - 18y^4}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{3ny^2 - 6ny^3 + 3ny^4 - 18y^2 + 36y^3 - 18y^4 + 6y - 6y^2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{3ny^2(1 - 2y + y^2) - 18y^2(1 + y^2 - 2y) + 6y - 6y^2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{(3ny^2 - 18y^2)(1 - 2y + y^2) + 6y - 6y^2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{(3n - 18)y^2(1 - 2y + y^2) + 6y - 6y^2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{3(n-6)y^2(1-y)^2 + 6y(1-y)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

olarak elde edilir.

viii.

$$\beta_{n,2}(u^2v^2; x, y) = \beta_{n,2}((s-x)^2(t-y)^2; x, y)$$

$$= \beta_{n,2}\big((s^2 - 2sx + x^2)(t^2 - 2ty + y^2); x, y\big)$$

$$= \beta_{n,2}(s^2t^2 - 2tys^2 + y^2s^2 - 2sxt^2 + 4stxy - 2sxy^2 + x^2t^2 - 2x^2ty + x^2y^2; x, y)$$

$$= \beta_{n,2}(s^2t^2; x, y) - 2y\beta_{n,2}(s^2t; x, y) + y^2\beta_{n,2}(s^2; x, y) - 2x\beta_{n,2}(st^2; x, y) + 4xy\beta_{n,2}(st; x, y) - 2xy^2\beta_{n,2}(s; x, y) + x^2\beta_{n,2}(t^2; x, y) - 2x^2y\beta_{n,2}(t; x, y) + x^2y^2\beta_{n,2}(1; x, y)$$

$$= \frac{n^3x^2y^2 + n^2x^2y + n^2xy^2 + nxy}{(n+1)(n+2)(n+3)} - 2y\left[\frac{n^2x^2y + nxy}{(n+1)(n+2)}\right] + y^2\left[\frac{nx^2 + x}{(n+1)}\right] - 2x\left[\frac{n^2xy^2 + nxy}{(n+1)(n+2)}\right] + 4xy\left[\frac{nxy}{(n+1)}\right] - 2x^2y^2 + x^2\left[\frac{ny^2 + y}{(n+1)}\right] - 2x^2y^2 + x^2y^2$$

$$= \frac{n^3x^2y^2 + n^2x^2y + n^2xy^2 + nxy}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{(4n^2x^2y^2 + 2nxy^2 + 2nx^2y)(n+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{(6nx^2y^2 + xy^2 + x^2y)(n+2)(n+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)} - 3x^2y^2$$

$$= \frac{n^3x^2y^2 + n^2x^2y + n^2xy^2 + nxy - 3x^2y^2(n^3 + 6n^2 + 11n + 6)}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{4n^3x^2y^2 + 2n^2xy^2 + 2n^2x^2y + 12n^2x^2y^2 + 6nxy^2 + 6nx^2y}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{(6nx^2y^2 + xy^2 + x^2y)(n^2 + 5n + 6)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{n^3x^2y^2 + n^2x^2y + n^2xy^2 + nxy - 3n^3x^2y^2 - 18n^2x^2y^2 - 33nx^2y^2 - 18x^2y^2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$+ \frac{-4n^3x^2y^2 - 2n^2xy^2 - 2n^2x^2y - 12n^2x^2y^2 - 6nxy^2 - 6nx^2y}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$+ \frac{6n^3x^2y^2 + n^2xy^2 + n^2x^2y + 30n^2x^2y^2 + 5nxy^2 + 5nx^2y + 36nx^2y^2 + 6xy^2 + 6x^2y}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{n^3x^2y^2(1-3-4+6) + n^2x^2y(1-2+1) + n^2xy^2(1-2-1) + nxy}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$+ \frac{n^2x^2y^2(-18-12+30) + n^2x^2y^2(-33+36) + x^2y^2(-18)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$+ \frac{nxy^2(-6+5) + nx^2y(-6+5) + 6xy^2 + 6x^2y}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{nxy + 3nx^2y^2 - 18x^2y^2 - nxy^2 - nx^2y + 6xy^2 + 6x^2y}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{nxy - nxy(-3xy + y + x) + 6xy(-3xy + y + x)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{nxy + (6-n)xy(-3xy + y + x)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{nxy + (6-n)(x + y - 3xy)xy}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

olarak elde edilir.

ix.

$$\beta_{n,2}((u^2+v^2)^2; x, y) = \beta_{n,2}(u^4 + 2u^2v^2 + v^4; x, y)$$

$$= \beta_{n,2}(u^4; x, y) + 2\beta_{n,2}(u^2v^2; x, y) + \beta_{n,2}(v^4; x, y)$$

$$= \frac{3(n-6)x^2(1-x)^2 + 6x(1-x)}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{2nxy + 2(6-n)(x + y - 3xy)xy}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$+ \frac{3(n-6)y^2(1-y)^2 + 6y(1-y)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{3(n-6)[x^2+(1-x)^2+y^2(1-y)^2]}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{6[x(1-x)+y(1-y)]}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{2[n+(6-n)(x+y-3xy)]xy}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

Şimdi yakınsama ile ilgili aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 4. Herhangi bir $f \in C^2(\Delta)$, $(x,y) \in \dot{\Delta}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left|\beta_{n,2}(f;x,y) - f(x,y)\right| \leq \frac{\varphi(x,y)}{2(n+1)}\{\|f_{xx}\| + \|f_{xy}\| + \|f_{yy}\|\}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Buradaki $\varphi(x,y) = \left(\sqrt{x(1-x)} + \sqrt{y(1-y)}\right)^2$ ve $\|.\|$, $C(\Delta)$ üzerindeki sup-normu belirtir.

İspat: İki değişkenli $f(x,y)$ fonksiyonunun Taylor açılımı

$$f(s,t) = f(x,y) + uf_x(x,y) + vf_y(x,y) + \frac{1}{2}\left\{\left(u^2 f_{xx}(x,y) + 2uvf_{xy}(x,y) + v^2 f_{yy}(x,y)\right)\right\} + R(s,t)$$

olup, burada $0 < \theta < 1$ olmak üzere $\xi_x = x + \theta_u$, $\xi_y = y + \theta_y$ gösterimleri kullanılırsa

$$R(s,t) = \frac{1}{2}\{u^2[f_{xx}(\xi_x,\xi_y) - f_{xx}(x,y)] + 2uv[f_{xy}(\xi_x,\xi_y) - f_{xy}(x,y)] + v^2[f_{yy}(\xi_x,\xi_y) - f_{yy}(x,y)]\}$$

$$\begin{aligned} f(s,t) = {} & f(x,y) + uf_x(x,y) + vf_y(x,y) \\ & + \frac{1}{2}\left\{\left(u^2 f_{xx}(x,y) + 2uvf_{xy}(x,y) + v^2 f_{yy}(x,y)\right)\right\} \\ & + \frac{1}{2}\{u^2[f_{xx}(\xi_x,\xi_y) - f_{xx}(x,y)] + 2uv[f_{xy}(\xi_x,\xi_y) - f_{xy}(x,y)] \\ & + v^2[f_{yy}(\xi_x,\xi_y) - f_{yy}(x,y)]\} \end{aligned}$$

$$= f(x,y) + uf_x(x,y) + vf_y(x,y) + \frac{1}{2}u^2\{f_{xx}(x,y) + f_{xx}(\xi_x,\xi_y) - f_{xx}(x,y)\}$$
$$+ \frac{1}{2}2uv\{f_{xy}(x,y) + f_{xy}(\xi_x,\xi_y) - f_{xy}(x,y)\}$$
$$+ \frac{1}{2}v^2\{f_{yy}(x,y) + f_{yy}(\xi_x,\xi_y) - f_{yy}(x,y)\}$$

$$= f(x,y) + uf_x(x,y) + vf_y(x,y) + \frac{1}{2}u^2\{f_{xx}(x+\theta_u, y+\theta_v)\}$$
$$+ uv\{f_{xy}(x+\theta_u, y+\theta_v)\} + \frac{1}{2}v^2\{f_{yy}(x+\theta_u, y+\theta_v)\}$$

$$f(s,t) = f(x,y) + uf_x(x,y) + vf_y(x,y)$$
$$+ \frac{1}{2}\{u^2 f_{xx}(x+\theta_u, y+\theta_v) + 2uvf_{xy}(x+\theta_u, y+\theta_v)$$
$$+ v^2 f_{yy}(x+\theta_u, y+\theta_v)\}$$

Bu son eşitliğin her iki yanına $\beta_{n,2}$ operatörü uygulanıp, daha sonra Lemma 3 kullanılırsa;

$$\beta_{n,2}(f(s,t);x,y) = f(x,y)\beta_{n,2}(1;x,y) + f_x(x,y)\beta_{n,2}(u;x,y)$$
$$+ f_y(x,y)\beta_{n,2}(v;x,y) + \frac{1}{2}f_{xx}(\xi_x,\xi_y)\beta_{n,2}(u^2;x,y) + f_{xy}(\xi_x,\xi_y)\beta_{n,2}(uv;x,y)$$
$$+ \frac{1}{2}f_{yy}(\xi_x,\xi_y)\beta_{n,2}(v^2;x,y)$$

$$\beta_{n,2}(f;x,y) - f(x,y)$$
$$= f_x(x,y)(x-x) + f_y(x,y)(y-y)$$
$$+ \frac{1}{2}\{\beta_{n,2}(u^2 f_{xx}(\xi_x,\xi_y);x,y) + 2\beta_{n,2}(uvf_{xy}(\xi_x,\xi_y);x,y)$$
$$+ \beta_{n,2}(v^2 f_{yy}(\xi_x,\xi_y);x,y)\}$$

olur.

Bu eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$|\beta_{n,2}(f;x,y) - f(x,y)|$$
$$= \frac{1}{2}\{|\beta_{n,2}(u^2 f_{xx}(\xi_x,\xi_y);x,y)| + 2|\beta_{n,2}(uvf_{xy}(\xi_x,\xi_y);x,y)|$$
$$+ |\beta_{n,2}(v^2 f_{yy}(\xi_x,\xi_y);x,y)|\}$$

$$\leq \frac{1}{2}\{|f_{xx}(\xi_x,\xi_y)|\beta_{n,2}(|u^2|;x,y)+2|f_{xy}(\xi_x,\xi_y)\beta_{n,2}(|u||v|;x,y)| + |f_{yy}(\xi_x,\xi_y)|\beta_{n,2}(|v^2|;x,y)\}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafından supremum alınırsa

$$\leq \frac{1}{2}\{sup|f_{xx}(\xi_x,\xi_y)|\beta_{n,2}(u^2;x,y)+2sup|f_{xy}(\xi_x,\xi_y)|\beta_{n,2}(|u||v|;x,y) + sup|f_{yy}(\xi_x,\xi_y)|\beta_{n,2}(v^2;x,y)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{\|f_{xx}\|\beta_{n,2}(u^2;x,y)+2\|f_{xy}\|\beta_{n,2}(|u||v|;x,y)+\|f_{yy}\|\beta_{n,2}(v^2;x,y)\}$$

elde edilir.

Şimdi eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci terime Cauchy-Schwartz eşitsizliği uygulanır ve Lemma 3 ü göz önüne alınırsa

$$|\beta_{n,2}(f;x,y)-f(x,y)| \leq \frac{1}{2}\left\{\|f_{xx}\|\beta_{n,2}(u^2;x,y)+2\|f_{xy}\|\sqrt{\beta_{n,2}(u^2;x,y)}\sqrt{\beta_{n,2}(v^2;x,y)} + \|f_{yy}\|\beta_{n,2}(v^2;x,y)\right\}$$

$$= \frac{1}{2(n+1)}\left\{x(1-x)\|f_{xx}\|+2\sqrt{x(1-x)y(1-y)}\|f_{xy}\|+y(1-y)\|f_{yy}\|\right\}$$

elde edilir.

Yukarıdaki eşitsizlikten ve $\varphi(x,y)$ nin tanımından dolayı

$$x(1-x),\ 2\sqrt{x(1-x)y(1-y)},\ y(1-y) \leq \varphi(x,y)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu durum göz önüne alındığında

$$|\beta_{n,2}(f;x,y)-f(x,y)| \leq \frac{\varphi(x,y)}{2(n+1)}\left(\|f_{xx}\|+\|f_{xy}\|+\|f_{yy}\|\right)$$

eşitsizliği elde edilirki bu istenilendir.

2.3. Bazı Sonuçlar

Bu bölümde $\beta_{n,2}$ operatörler için Voronovskaya ve Grüss-Voronovskaya tipi teoremler süreklilik modülünün nicel değerleri kullanılarak verilecektir.

Öncelikle aşağıdaki Voronovskaya tipi teoremi verelim.

Teorem 1. Herhangi $f \in C^2(\Delta)$, $(x,y) \in \dot{\Delta}$ ve $n \in \mathrm{N}$ için

$$n\left|\beta_{n,2}(f;x,y) - f(x,y) - \frac{x(1-x)}{2(n+1)}f_{xx} + \frac{xy}{n+1}f_{xy} - \frac{y(1-y)}{2(n+1)}f_{yy}\right|$$
$$\leq (\varphi(x,y)+2)\left[\omega(f_{xx};\delta_n) + \omega\left(f_{xy};\delta_n\right) + \omega\left(f_{yy};\delta_n\right)\right]$$

eşitsizliği sağlanır.

Burada $\varphi(x,y)$ Lemma 4 te tanımlanan ifade olup ,

$$\delta_n = \left\{\frac{x(1-x)+y(1-y)}{(n+2)(n+3)}(3(n-6)[x^2(1-x)^2 + y^2(1-y)^2]\right.$$
$$\left. + 6[x(1-x)+y(1-y)] + 2xy[n+(6-n)(x+y-3xy)]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

dir.

İspat. İspat için

$f(x,y)$ nin Taylor açılımı olan

$$f(s,t) = f(x,y) + uf_x(x,y) + vf_y(x,y)$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{u^2 f_{xx}(x,y) + 2uvf_{xy}(x,y) + v^2 f_{yy}(x,y)\right\} + R(s,t)$$

ifadesinin her iki tarafına $\beta_{n,2}$ operatörü uygulanıp Lemma 3 te elde edilen sonuçlar kullanılırsa

$$\beta_{n,2}(f;x,y) - f(x,y)$$
$$= \frac{x(1-x)}{2(n+1)}f_{xx} - \frac{xy}{(n+1)}f_{xy} + \frac{y(1-y)}{2(n+1)}f_{yy} + \beta_{n,2}(R(s,t);x,y)$$

elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\left|\beta_{n,2}(f;x,y) - f(x,y) - \frac{x(1-x)}{2(n+1)}f_{xx} + \frac{xy}{(n+1)}f_{xy} - \frac{y(1-y)}{2(n+1)}f_{yy}\right|$$
$$= \left|\beta_{n,2}(R(s,t);x,y)\right|$$

$$\leq \beta_{n,2}(|R(s,t)|;x,y) \ldots (*)$$

yazılabilir.

$0 < \theta < 1$ için aşağıdaki süreklilik modülünün tanımı ve sağladığı özellikler göz önüne alınırsa

$$|f(s,t) - f(x,y)| \leq \left(1 + \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{\delta}\right)\omega(f,\delta)$$

yazılabilecektir.

Buna göre

$$|R(s,t)| \leq \frac{1}{2}\{u^2\left|f_{xx}(\xi_x,\xi_y) - f_{xx}(x,y)\right| + 2|u||v|\left|f_{xy}(\xi_x,\xi_y) - f_{xy}(x,y)\right| + v^2\left|f_{yy}(\xi_x,\xi_y) - f_{yy}(x,y)\right|\}$$

olup,

$u^2 < u^2\left(1 + \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{\delta}\right),\ uv < uv\left(1 + \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{\delta}\right),\ v^2 < v^2\left(1 + \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{\delta}\right)$

şeklinde yazılabileceklerinden

her tarafı $\left(1 + \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{\delta}\right)$ ile çarpılıp sağ tarafın supremumu alınırsa;

$$|R(s,t)| \leq u^2\left(1 + \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{\delta}\right)\omega(f_{xx};\delta) + 2|u||v|\left(1 + \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{\delta}\right)\omega(f_{xy};\delta)$$

$$+v^2\left(1 + \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{\delta}\right)\omega(f_{yy};\delta)$$

yazılabilecektir.

Şimdi bu eşitsizliğe Beta operatörü uygulanırsa;

$\beta_{n,2}(|R(s,t)|;x,y)$

$$\leq \left[\beta_{n,2}(u^2;x,y) + \frac{1}{\delta}\beta_{n,2}\left(u^2\sqrt{u^2+v^2};x,y\right)\right]\omega(f_{xx};\delta)$$

$$+2\left[\beta_{n,2}(|u||v|;x,y) + \frac{1}{\delta}\beta_{n,2}\left(|u||v|\sqrt{u^2+v^2};x,y\right)\right]\omega(f_{xy};\delta)$$

$$+\left[\beta_{n,2}(v^2;x,y)+\frac{1}{\delta}\beta_{n,2}\left(v^2\sqrt{u^2+v^2};x,y\right)\right]\omega(f_{yy};\delta)$$

eşitsizliği yazılabilir.

Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki

$\beta_{n,2}\left(u^2\sqrt{u^2+v^2};x,y\right)$, $\beta_{n,2}\left(|u||v|\sqrt{u^2+v^2};x,y\right)$ ve $\beta_{n,2}\left(v^2\sqrt{u^2+v^2};x,y\right)$ ifadelerine ayrı ayrı Cauchy-Schwartz eşitsizliği uygulanıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
&\beta_{n,2}(|R(s,t)|;x,y)\\
&\leq\left[\beta_{n,2}(u^2;x,y)+\frac{1}{\delta}\sqrt{\beta_{n,2}(u^4;x,y)}\sqrt{\beta_{n,2}(u^2+v^2;x,y)}\right]\omega(f_{xx};\delta)\\
&+2\left[\sqrt{\beta_{n,2}(u^2;x,y)}\sqrt{\beta_{n,2}(v^2;x,y)}\right.\\
&\left.+\frac{1}{\delta}\sqrt{\beta_{n,2}(u^2v^2;x,y)}\sqrt{\beta_{n,2}(u^2+v^2;x,y)}\right]\omega(f_{xy};\delta)\\
&+\left[\beta_{n,2}(v^2;x,y)+\frac{1}{\delta}\sqrt{\beta_{n,2}(v^4;x,y)}\sqrt{\beta_{n,2}(u^2+v^2;x,y)}\right]\omega(f_{yy};\delta)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son ifadede Lemma 3 te elde edilenler yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\beta_{n,2}(|R(s,t)|;x,y)\\
&\leq\left[\frac{x(1-x)}{n+1}+\frac{1}{\delta}\sqrt{\beta_{n,2}(u^4;x,y)}\sqrt{\beta_{n,2}(u^2+v^2;x,y)}\right]\omega(f_{xx};\delta)\\
&+\left[2\frac{\sqrt{x(1-x)y(1-y)}}{n+1}\right.\\
&\left.+\frac{2}{\delta}\sqrt{\beta_{n,2}(u^2v^2;x,y)}\sqrt{\beta_{n,2}(u^2+v^2;x,y)}\right]\omega(f_{xy};\delta)\\
&+\left[\frac{y(1-y)}{n+1}+\frac{1}{\delta}\sqrt{\beta_{n,2}(v^4;x,y)}\sqrt{\beta_{n,2}(u^2+v^2;x,y)}\right]\omega(f_{yy};\delta)
\end{aligned}$$

olur. $\varphi(x,y)$ göz önüne alındığında

$\beta_{n,2}(|R(s,t)|;x,y)$

$$\leq \left[\frac{\varphi(x,y)}{n+1}+\frac{1}{\delta}\sqrt{\beta_{n,2}(u^4;x,y)}\sqrt{\beta_{n,2}(u^2+v^2;x,y)}\right]\omega(f_{xx};\delta)$$

$$+\left[\frac{\varphi(x,y)}{n+1}+\frac{2}{\delta}\sqrt{\beta_{n,2}(u^2v^2;x,y)}\sqrt{\beta_{n,2}(u^2+v^2;x,y)}\right]\omega\left(f_{xy};\delta\right)$$

$$+\left[\frac{\varphi(x,y)}{n+1}+\frac{1}{\delta}\sqrt{\beta_{n,2}(v^4;x,y)}\sqrt{\beta_{n,2}(u^2+v^2;x,y)}\right]\omega\left(f_{yy};\delta\right)$$

eşitsizliği yazılabilir. Diğer taraftan

$$\sqrt{\beta_{n,2}(u^4;x,y)}\leq\sqrt{\beta_{n,2}((u^2+v^2)^2;x,y)}$$

$$\sqrt{\beta_{n,2}(u^2v^2;x,y)}\leq\sqrt{\beta_{n,2}((u^2+v^2)^2;x,y)}$$

ve

$$\sqrt{\beta_{n,2}(v^4;x,y)}\leq\sqrt{\beta_{n,2}((u^2+v^2)^2;x,y)}$$

eşitsizlikleri sağlanacağından

$$\beta_{n,2}(|R(s,t)|;x,y)\leq\left[\frac{\varphi(x,y)}{n+1}+\frac{2}{\delta}\sqrt{\beta_{n,2}((u^2+v^2)^2;x,y)}\sqrt{\beta_{n,2}(u^2+v^2;x,y)}\right]$$

$$\times\left[\omega(f_{xx};\delta)+\omega\left(f_{xy};\delta\right)+\omega\left(f_{yy};\delta\right)\right]$$

eşitsizliği yazılabilir. Ayrıca Lemma 3 ten dolayı

$$\sqrt{\beta_{n,2}((u^2+v^2)^2;x,y)}\sqrt{\beta_{n,2}(u^2+v^2;x,y)}$$

$$=\left\{\frac{3(n-6)[x^2(1-x)^2+y^2(1-y)^2]}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\frac{6[x(1-x)+y(1-y)]}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right.$$

$$\left.+\frac{2[n+(6-n)(x+y-3xy)]xy}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}^{\frac{1}{2}}\times\left\{\frac{x(1-x)+y(1-y)}{(n+1)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left\{\frac{x(1-x)+y(1-y)}{(n+2)(n+3)}(3(n-6)[x^2(1-x)^2+y^2(1-y)^2]\right.$$

$$\left.+6[x(1-x)+y(1-y)]+2xy[n+(6-n)(x+y-3xy)])\right\}^{\frac{1}{2}}$$

olup,

$$\delta := \delta_n = \left\{\frac{x(1-x)+y(1-y)}{(n+2)(n+3)}(3(n-6)[x^2(1-x)^2+y^2(1-y)^2]\right.$$

$$\left.+6[x(1-x)+y(1-y)]+2xy[n+(6-n)(x+y-3xy)])\right\}^{\frac{1}{2}}$$

olarak seçilirse

$$\beta_{n,2}(|R(s,t)|;x,y)$$

$$\leq \left[\frac{\varphi(x,y)}{n+1}+\frac{2}{\delta}\frac{1}{n+1}\left\{\frac{x(1-x)+y(1-y)}{(n+2)(n+3)}(3(n-6)[x^2(1-x)^2+y^2(1-y)^2]\right.\right.$$

$$\left.\left.+6[x(1-x)+y(1-y)]+2xy[n+(6-n)(x+y-3xy)])\right\}^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\times\left[\omega(f_{xx};\delta)+\omega\left(f_{xy};\delta\right)+\omega\left(f_{yy};\delta\right)\right]$$

ifadesi elde edilir. Burada δ yerine yzılırsa

$$\beta_{n,2}(|R(s,t)|;x,y) \leq \frac{1}{n+1}(\varphi(x,y)+2)\left[\omega(f_{xx};\delta_n)+\omega\left(f_{xy};\delta_n\right)+\omega\left(f_{yy};\delta_n\right)\right]$$

elde edilir. Bu sonuç $(*)$ eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\left|\beta_{n,2}(f;x,y)-f(x,y)-\frac{x(1-x)}{2(n+1)}f_{xx}+\frac{xy}{n+1}f_{xy}-\frac{y(1-y)}{2(n+1)}f_{yy}\right|$$

$$\leq \frac{1}{n+1}(\varphi(x,y)+2)\left[\omega(f_{xx};\delta_n)+\omega\left(f_{xy};\delta_n\right)+\omega\left(f_{yy};\delta_n\right)\right]$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her tarafı n ile çarpıldıktan sonra

$$n < n+1 \Rightarrow \frac{n}{n+1} < 1$$

olduğu göz önüne alınarak

$$n\left|\beta_{n,2}(f;x,y)-f(x,y)-\frac{x(1-x)}{2(n+1)}f_{xx}+\frac{xy}{n+1}f_{xy}-\frac{y(1-y)}{2(n+1)}f_{yy}\right|$$
$$\leq(\varphi(x,y)+2)\left[\omega(f_{xx};\delta_n)+\omega\left(f_{xy};\delta_n\right)+\omega\left(f_{yy};\delta_n\right)\right]$$

elde edilir.

Teorem 2. Herhangi $f,g\in C^2(\Delta)$ fonksiyonlar için, $(x,y)\in\dot{\Delta}$ ve $n\in\mathrm{N}$ olmak üzere;

$$\mathrm{n}\left|\beta_{n,2}(fg;x,y)-\beta_{n,2}(f;x,y)\beta_{n,2}(g;x,y)-\frac{x(1-x)}{n+1}f_xg_x+\frac{xy}{n+1}\left(f_xg_y+f_yg_x\right)-\frac{y(1-y)}{n+1}f_yg_y\right|$$

$$\leq(\varphi(x,y)+2)\{\left[\omega((fg)_{xx};\delta_n)+\omega\left((fg)_{xy};\delta_n\right)+\omega\left((fg)_{yy};\delta_n\right)\right]$$
$$+\|f\|\left[\omega(g_{xx};\delta_n)+\omega\left(g_{xy};\delta_n\right)+\omega\left(g_{yy};\delta_n\right)\right]$$
$$+\|g\|\left[\omega(f_{xx};\delta_n)+\omega\left(f_{xy};\delta_n\right)+\omega\left(f_{yy};\delta_n\right)\right]\}$$
$$+\frac{n\varphi^2(x,y)}{4(n+1)^2}\left(\|f_{xx}\|+\left\|f_{xy}\right\|+\left\|f_{yy}\right\|\right)\left(\|g_{xx}\|+\left\|g_{xy}\right\|+\left\|g_{yy}\right\|\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$\varphi(x,y)$ ve $\|\,.\,\|$ Lemma 4 deki tanımlandığı gibidir.

İspat. Çarpımın türevinin tanımı gereğince de

$$(fg)_{xx}=(f_xg+fg_x)$$
$$=(f_{xx}g+f_xg_x+f_xg_x+fg_{xx})$$
$$\Longrightarrow f_xg_x=\frac{1}{2}[(fg)_{xx}-f_{xx}g-fg_{xx}],$$
$$(fg)_{xy}=(f_xg+fg_x)_y$$
$$=\left(f_{xy}g+f_xg_y+f_yg_x+fg_{xy}\right)$$
$$\Longrightarrow f_xg_y+f_yg_x=(fg)_{xy}-f_{xy}g-fg_{xy},$$
$$(fg)_{yy}=f_{yy}g+f_yg_y+f_yg_y+fg_{yy}$$
$$\Longrightarrow f_yg_y=\frac{1}{2}\left[(fg)_{yy}-f_{yy}g-fg_{yy}\right]$$

şeklinde yazılabilecekleri bilinmektedir. Bu değerler

$$\beta_{n,2}(fg;x,y)-\beta_{n,2}(f;x,y)\beta_{n,2}(g;x,y)-\beta_{n,2}(u^2;x,y)f_x g_x \\ -\beta_{n,2}(uv;x,y)\big(f_x g_y+f_y g_x\big)-\beta_{n,2}(v^2;x,y)f_y g_y$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$\beta_{n,2}(fg;x,y)-\beta_{n,2}(f;x,y)\beta_{n,2}(g;x,y)-\beta_{n,2}(u^2;x,y)\frac{1}{2}[(fg)_{xx}-f_{xx}g-fg_{xx}] \\ -\beta_{n,2}(uv;x,y)\big((fg)_{xy}-f_{xy}g-fg_{xy}\big)-\beta_{n,2}(v^2;x,y) \\ \times\frac{1}{2}\big[(fg)_{yy}-f_{yy}g-fg_{yy}\big]$$

olur. Burada operatörün lineerliği de kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$=\beta_{n,2}(fg;x,y)-\beta_{n,2}(f;x,y)\beta_{n,2}(g;x,y)-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(u^2;x,y)(fg)_{xx} \\ +\frac{1}{2}\beta_{n,2}(u^2;x,y)f_{xx}g+\frac{1}{2}\beta_{n,2}(u^2;x,y)fg_{xx}-\beta_{n,2}(uv;x,y)(fg)_{xy} \\ +\beta_{n,2}(uv;x,y)f_{xy}g+\beta_{n,2}(uv;x,y)fg_{xy}-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(v^2;x,y)(fg)_{yy} \\ +\frac{1}{2}\beta_{n,2}(v^2;x,y)f_{yy}g+\frac{1}{2}\beta_{n,2}(v^2;x,y)fg_{yy}$$

$$=\beta_{n,2}(fg;x,y)-\beta_{n,2}(f;x,y)\beta_{n,2}(g;x,y)-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(u^2;x,y)(fg)_{xx}$$

$$+\frac{1}{2}g(x,y)\beta_{n,2}(u^2;x,y)f_{xx}+\frac{1}{2}f(x,y)\beta_{n,2}(u^2;x,y)g_{xx}-\beta_{n,2}(uv;x,y)(fg)_{xy}$$

$$+g(x,y)\beta_{n,2}(uv;x,y)f_{xy}+f(x,y)\beta_{n,2}(uv;x,y)g_{xy}-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(v^2;x,y)(fg)_{yy}$$

$$+\frac{1}{2}g(x,y)\beta_{n,2}(v^2;x,y)f_{yy}+\frac{1}{2}f(x,y)\beta_{n,2}(v^2;x,y)g_{yy}$$

$$=\beta_{n,2}(fg;x,y)-\beta_{n,2}(f;x,y)\beta_{n,2}(g;x,y)-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(u^2;x,y)(fg)_{xx}$$

$$-g(x,y)\left[-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(u^2;x,y)f_{xx}-\beta_{n,2}(uv;x,y)f_{xy}-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(v^2;x,y)f_{yy}\right]$$

$$-f(x,y)\left[-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(u^2;x,y)g_{xx}-\beta_{n,2}(uv;x,y)g_{xy}-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(v^2;x,y)g_{yy}\right]$$

$$-\beta_{n,2}(uv;x,y)(fg)_{xy}-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(v^2;x,y)(fg)_{yy}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlikte ekleme çıkarma yaparak

$$\left[g(x,y)-\beta_{n,2}(g;x,y)\right]\left[\beta_{n,2}(f;x,y)-f(x,y)\right]$$

$$=g(x,y)\beta_{n,2}(f;x,y)-g(x,y)f(x,y)-\beta_{n,2}(g;x,y)\beta_{n,2}(f;x,y)$$
$$+f(x,y)\beta_{n,2}(g;x,y)$$

eşitliği kullanılırsa

$$\beta_{n,2}(fg;x,y)-\beta_{n,2}(f;x,y)\beta_{n,2}(g;x,y)-\beta_{n,2}(u^2;x,y)f_xg_x$$
$$-\beta_{n,2}(uv;x,y)\left(f_xg_y+f_yg_x\right)-\beta_{n,2}(v^2;x,y)f_yg_y$$

$$=\beta_{n,2}(fg;x,y)-g(x,y)f(x,y)-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(u^2;x,y)(fg)_{xx}$$

$$-g(x,y)\left[\beta_{n,2}(f;x,y)-f(x,y)-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(u^2;x,y)f_{xx}-\beta_{n,2}(uv;x,y)f_{xy}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(v^2;x,y)f_{yy}\right]$$

$$-f(x,y)\left[\beta_{n,2}(g;x,y)-g(x,y)-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(u^2;x,y)g_{xx}-\beta_{n,2}(uv;x,y)g_{xy}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(v^2;x,y)g_{yy}\right]$$

$$-\beta_{n,2}(uv;x,y)(fg)_{xy}-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(v^2;x,y)(fg)_{yy}+g(x,y)\beta_{n,2}(f;x,y)$$

$$-g(x,y)f(x,y)-\beta_{n,2}(g;x,y)\beta_{n,2}(f;x,y)+f(x,y)\beta_{n,2}(g;x,y)$$

$$=\beta_{n,2}(fg;x,y)-(fg)(x,y)-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(u^2;x,y)(fg)_{xx}$$

$$-g(x,y)\left[\beta_{n,2}(f;x,y)-f(x,y)-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(u^2;x,y)f_{xx}-\beta_{n,2}(uv;x,y)f_{xy}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(v^2;x,y)f_{yy}\right]$$

$$-f(x,y)\left[\beta_{n,2}(g;x,y)-g(x,y)-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(u^2;x,y)g_{xx}-\beta_{n,2}(uv;x,y)g_{xy}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(v^2;x,y)g_{yy}\right]$$

$$-\beta_{n,2}(uv;x,y)(fg)_{xy}-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(v^2;x,y)(fg)_{yy}+g(x,y)\beta_{n,2}(f;x,y)$$

$$-g(x,y)f(x,y)-\beta_{n,2}(g;x,y)\beta_{n,2}(f;x,y)+f(x,y)\beta_{n,2}(g;x,y)$$

$$=\beta_{n,2}(fg;x,y)-(fg)(x,y)-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(u^2;x,y)(fg)_{xx}$$

$$-\beta_{n,2}(uv;x,y)(fg)_{xy}-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(v^2;x,y)(fg)_{yy}$$

$$-g(x,y)\left[\beta_{n,2}(f;x,y)-f(x,y)-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(u^2;x,y)f_{xx}-\beta_{n,2}(uv;x,y)f_{xy}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(v^2;x,y)f_{yy}\right]$$

$$-f(x,y)\left[\beta_{n,2}(g;x,y)-g(x,y)-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(u^2;x,y)g_{xx}-\beta_{n,2}(uv;x,y)g_{xy}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(v^2;x,y)g_{yy}\right]$$

$$+\left[g(x,y)-\beta_{n,2}(g;x,y)\right]\left[\beta_{n,2}(f;x,y)-f(x,y)\right]$$

eşitliği yazılabilir.

Bu eşitliğin her tarafının mutlak değeri alındıktan sonra n ile çarpılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$n\left|\beta_{n,2}(fg;x,y)-\beta_{n,2}(f;x,y)\beta_{n,2}(g;x,y)-\beta_{n,2}(u^2;x,y)f_xg_x\right.$$
$$\left.-\beta_{n,2}(uv;x,y)\left(f_xg_y+f_yg_x\right)-\beta_{n,2}(v^2;x,y)f_yg_y\right|$$

$$\leq n\left|\beta_{n,2}(fg;x,y)-(fg)(x,y)-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(u^2;x,y)(fg)_{xx}-\beta_{n,2}(uv;x,y)(fg)_{xy}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(v^2;x,y)(fg)_{yy}\right|$$

$$+|g(x,y)|n\left|\beta_{n,2}(f;x,y)-f(x,y)-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(u^2;x,y)f_{xx}-\beta_{n,2}(uv;x,y)f_{xy}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(v^2;x,y)f_{yy}\right|$$

$$+|f(x,y)|n\left|\beta_{n,2}(g;x,y)-g(x,y)-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(u^2;x,y)g_{xx}-\beta_{n,2}(uv;x,y)g_{xy}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\beta_{n,2}(v^2;x,y)g_{yy}\right|$$

$$+n\left|g(x,y)-\beta_{n,2}(g;x,y)\right|\left|\beta_{n,2}(f;x,y)-f(x,y)\right|$$

elde edilir.

Bu eşitliğin sağ tarafının supremumu alınıp Lemma 4 kullanılırsa;

$$n\left|\beta_{n,2}(fg;x,y)-\beta_{n,2}(f;x,y)\beta_{n,2}(g;x,y)-\tfrac{x(x-1)}{n+1}f_xg_x+\tfrac{xy}{n+1}\left(f_xg_y+f_yg_x\right)-\tfrac{y(1-y)}{n+1}f_yg_y\right|$$

$$\leq n\left|\beta_{n,2}(fg;x,y)-(fg)(x,y)-\frac{x(x-1)}{2(n+1)}(fg)_{xx}+\frac{xy}{n+1}(fg)_{xy}\right.$$
$$\left.-\frac{y(1-y)}{n+1}(fg)_{yy}\right|$$

$$+\|g\|n\left|\beta_{n,2}(f;x,y)-f(x,y)-\frac{x(x-1)}{2(n+1)}f_{xx}-\frac{xy}{n+1}f_{xy}-\frac{y(1-y)}{n+1}f_{yy}\right|$$

$$+\|f\|n\left|\beta_{n,2}(g;x,y)-g(x,y)-\frac{x(x-1)}{2(n+1)}g_{xx}-\frac{xy}{n+1}g_{xy}-\frac{y(1-y)}{n+1}g_{yy}\right|$$

$$+n\left|g(x,y)-\beta_{n,2}(g;x,y)\right|\left|\beta_{n,2}(f;x,y)-f(x,y)\right|$$

$$n\left|\beta_{n,2}(fg;x,y)-\beta_{n,2}(f;x,y)\beta_{n,2}(g;x,y)-\tfrac{x(x-1)}{n+1}f_xg_x+\tfrac{xy}{n+1}\left(f_xg_y+f_yg_x\right)-\tfrac{y(1-y)}{n+1}f_yg_y\right|$$

$$\leq(\varphi(x,y)+2)\left[\omega((fg)_{xx};\delta_n)+\omega\left((fg)_{xy};\delta_n\right)+\omega\left((fg)_{yy};\delta_n\right)\right]$$
$$+\|g\|(\varphi(x,y)+2)\left[\omega(f_{xx};\delta_n)+\omega\left(f_{xy};\delta_n\right)+\omega\left(f_{yy};\delta_n\right)\right]$$
$$+\|f\|(\varphi(x,y)+2)\left[\omega(g_{xx};\delta_n)+\omega\left(g_{xy};\delta_n\right)+\omega\left(g_{yy};\delta_n\right)\right]$$
$$+n\frac{\varphi(x,y)}{2(n+1)}\left(\|f_{xx}\|+\|f_{xy}\|+\|f_{yy}\|\right)\frac{\varphi(x,y)}{2(n+1)}\left(\|g_{xx}\|+\|g_{xy}\|\right.$$
$$\left.+\|g_{yy}\|\right)$$

$$= (\varphi(x,y)+2)\Big\{\big[\omega((fg)_{xx};\delta_n)+\omega\big((fg)_{xy};\delta_n\big)+\omega\big((fg)_{yy};\delta_n\big)\big]$$
$$+\|f\|(\varphi(x,y)+2)\big[\omega(g_{xx};\delta_n)+\omega\big(g_{xy};\delta_n\big)+\omega\big(g_{yy};\delta_n\big)\big]$$
$$+\|g\|(\varphi(x,y)+2)\big[\omega(f_{xx};\delta_n)+\omega\big(f_{xy};\delta_n\big)+\omega\big(f_{yy};\delta_n\big)\big]$$
$$+n\frac{\varphi^2(x,y)}{4(n+1)^2}\big(\|f_{xx}\|+\|f_{xy}\|+\|f_{yy}\|\big)\big(\|g_{xx}\|+\|g_{xy}\|+\|g_{yy}\|\big)\Big\}$$

olarak elde edilir. Bu da istenilendir.

3.TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde iki değişkenli Beta operatörleri için Voronouskaya ve Grüss-Voronouskaya tipi yakınsaklık özellikleri incelenmiştir. Sonuçlar elde edilirken okuyucunun anlayacağı şekilde gerekli açıklamalar yapılmıştır. Bu tezden yararlanarak tanımlanan başka tipten operatörler için benzer teoremlerin verilmesi durumunda ispatın anlaşılır şekilde verilebilmesi için çaba gösterilmiştir. Bu sebepten dolayı sonuç olarak tezin bir kaynak olarak kullanılabileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] U. Abel, On the asymptotic approximation with bivariate operators of Bleimann, Butzer and Hahn , J. Approx. Theory, **97** (1999), no.1, 181-198.

[2] U. Abel, V. Gupta and R.N. Mohapatra , Local approximation by Beta operators , Nonlinear Anal.,**62** (2005), no.1, 41-42.

[3]T.Acar , Asymptotic formulas for generalized Szasz-Mirakyan operators , Appl.Math. Comput., **263** (2015), 233-239.

[4] T. Acar, Quantitative q-Voronovskaya and q-Grüss-Voronovskaya –type results for q-Szάsz operators, Gergian Math . J.,**23**(2016), no.5,459-468.

[5]T.Acar, A. Aral and I.Raşa , The new forms of Voronovskaya's theorem in weighted spaces , Posotivity. **20**(2016), no.1, 25-40.

[6] A.M. Acu, H. Gonska and I. Raşa ,Grüss-type and Ostrowski-type inequalities in approximation theory, Ukrainian Math. J. ,**63**(2011**),** no.6, 843-864.

[7] J.A. Adell, F. G.Badia and J. De La Cal, Beta-type operatörs preserve shape properties, Stochastic Process. Appl., **48**(1993), no.1, 1-8.

[8] C.Bardaro,I.Mantellini, Bivariate Mellin convolution operators: Quantative approximation theorems, Math.Comput.Modelling, **53**(2011), no.5-6, 1197-1207.

[9] G.Başcanbaz-Tunca, y. Tuncer, Some properties of multivariate beta operatör, Fasc. Math., no.41, (2009), 31-43.

[10] G.Başcanbaz-Tunca, A.Erençin ,H. G. İnce-İlarslan, Quantative estimates for modified beta operatörs, (submitted).

[11] A.Ciupa, A Voronovskaya theorem for a positive linear operators, Soochow J. Math., **31**(2005), no.3, 375-387.

[12] E.Deniz, Quantitative estimates for Jain-Kantorovich operators, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Sér. A1 Math. Stat., **65**(2016), no.2, 121-132.

[13] N.Deo, M. A. Özarslan and N.Bhardwaj,Statistical convergence for general Beta operators, Korean J. Math., **22**(2014), no.4, 671-681.

[14] R. A. DeVore, G. G.Lorentz, Constructive Approximation, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1993.

[15]A.Erençin, I.Raşa, Voronovskaya type theorems in weighted spaces, Number. Funct. Anal. Optim., **37**(2016), no.12, 1517-1528.

[16] S.G.Gal, H.Gonska, Grüss and Grüss-Voronovskaya-type estimates for some Bernstein-typepolynomials of real and complex variables, Jean J.Approx., **7**(2015), no.1, 97-122.

[17] H. Gonska, P. Pitul and I. Raşa, On Peano's form of the Taylor remainder, Voronovskaya's theorem and the commutator of positive linear operators, Proc. Of the Int. Conf. On Numerical Analysis and Approximation Theory, Cluj-Napoca,(2006), 55-80.

[18] H. Gonska, G. Tachev, Grüss-type inequalities for positive linear operators with second order moduli, Mat. Vesnik, **63**(2011),no.4, 247-252.

[19] H. Gonska M. Heilmann and I. Raşa, Eigenstructure of the genuine beta operators of Lupaş and Mühlbach, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., **61**(2016), no.3, 383-388.

[20]G.Grüss, Uber das maximum des absoluten betrages von $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx, Math\ Z.$, **39**(1935), 215-226.

[21] A.Kajla, N.İspir, P.N. Agrawal, G. Meenu, q-Bernstein-schurer-Durrmeyer type operators for functions of one and two vareiables, Appl. Math. Compt., **275**(2016), 372-385.

[22] M. K. Khan, Approximation properties of beta operators, Progress in Approximation Theory, Academic Press, Boston, MA,(1991) 483-495.

[23]R. A. Hhan, A bivariate extension of Bleimann-Butzer-Hahn operatör, Approx. Theory Appl. (N.S.), **18**(2002), NO.1,90-100.

[24]Xin Li, R. N. Mohapatra, R. S. Rodriguez, Grüss-type inequalities , J. Math. Anal. Appl., **267**(2002), no.2,434-443

[25] A.Lupaş, Die Folge der Beta operatoren, Dissertation, Universität Stuttgart, 1972.

[26]L. Rempulska, M. Skorupka The Voronovskaya theorem for some linear positive operators of functions of two variables, Note Math., **16**(1996), no.1, 145-154.

[27] G. T. Tachev, The complete asymptotic expansion for Bernstein operators, J. Math. Anal. Appl**., 385**(2012), 1179-1183.

[28]G.Ulusoy,T.Acar, q-Voronovskaya type theorems for q-Baskakov operators, Math. Methods.Appl.Sci., **39**(2016), no. 12,3391-3401.

[29]V.S.Videnskij, Linear Positive Operators of Finite Rank, A.I. Gerzen State Pedagogical Inst., Leningrad, 1985(in Russian).

[30]E.Voronovskaya , Détermination de la forme asymtotique d'approximation des fonctions parles polynômes d M. Bernstein, C.R.Acad. Sci URSS (1932), 79-85.

[31]S.S. Wilks, Mathematical Statistics, Wiley, New-York, 1963.

[32]Başcanbaz -Tunca G, Erençin A, İnce- İlarslan HG. Voronovskaja and Grüss - Voronovskaja type estimates for bivariate beta operators.