**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# KABUK YAPILARIN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ KULLANILARAK YAPISAL OLARAK İNCELENMESİ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Hasan KIYIK**

**Uçak ve Uzay Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Uçak ve Uzay Mühendisliği Programı**

**TEMMUZ 2020**

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# KABUK YAPILARIN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ KULLANILARAK YAPISAL OLARAK İNCELENMESİ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Hasan KIYIK**

**(511161123)**

**Uçak ve Uzay Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Uçak ve Uzay Mühendisliği Programı**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Metin Orhan KAYA**

**TEMMUZ 2020**

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 511161123 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi Hasan KIYIK, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "KABUK YAPILARIN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ KULLANILARAK YAPISAL OLARAK İNCELENMESİ" başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

**Tez Danışmanı :** **Prof. Dr. Metin Orhan KAYA**
İstanbul Teknik Üniversitesi

**Jüri Üyeleri :** **Dr. Öğr. Üyesi Özge ÖZDEMİR**
İstanbul Teknik Üniversitesi
**Dr. Öğr. Üyesi Serhat YILMAZ**
Milli Savunma Üniversitesi

**Teslim Tarihi** **: 15 Haziran 2020**

**Savunma Tarihi** **: 13 Temmuz 2020**

***Aileme,***

## ÖNSÖZ

Öğrenim sürecim boyunca bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan ve akademik hayatımda bana yol gösteren tez danışmanım sayın Prof. Dr. Metin Orhan KAYA'ya, ayrıca tez çalışması süresi boyunca akademik anlamda ve manevi anlamda destek olan arkadaşım Buse Tuğçe TEMUÇİN'e ve desteklerini hiç bir zaman esirgemeyen sevgili aileme teşekkür ederim.

Temmuz 2020

Hasan KIYIK

Makina Mühendisi

**İÇİNDEKİLER**

**Sayfa**

**1. GİRİŞ ..... 1**
1.1. Tezin Amacı ve Genel Bakış ..... 1
1.2. Literatür Araştırması ..... 2
**2. HAREKET DENKLEMLERİ ..... 5**
2.1. Hareket Denklemleri ..... 5
2.2. Sanal Yer Değiştirme İlkesi ..... 6
2.3. Lagrange Denklemleri ..... 6
**3. ELEMAN ENERJİ FONKSİYONLARI ..... 11**
3.1. Eleman Enerji Fonksiyonları ..... 11
3.2. İnce Plaka Eğilme Elemanı ..... 12
3.3. Kalın Plaka Eğilme Elemanı ..... 14
**4. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ VE SONLU ELEMANLARDA YER DEĞİŞTİRME YÖNTEMİNE GİRİŞ ..... 17**
4.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi (FEM) ..... 17
4.2. Sonlu Elemanlarda Yer Değiştirme Yöntemine Giriş ..... 18
4.3. Rayleigh-Ritz Yöntemi ..... 18
4.4. Kirişlerin Eğilme Titreşimi ..... 19
**5. PLAKALARIN DÜZLEM İÇİ VE EĞİLME TİTREŞİMİ ..... 21**
5.1. Plakaların Düzlem İçi Titreşimi ..... 21
5.2. Doğrusal Dikdörtgen Elemanı ..... 22
5.3. Plakaların Eğilme Titreşimi ..... 27
5.4. İnce Dikdörtgen Eleman ..... 28
**6. PLAKA TEORİLERİ VE FORMÜLASYONLARI ..... 39**
6.1. Plakaların Sınıflandırılması ..... 39
6.1.1. Plakaların Sınır Koşullarına Göre Sınıflandırılması ..... 39
6.1.2. Plakaların Şekillerine Göre Sınıflandırılması ..... 39
6.1.3. Kalınlıklarına Göre Plakaların Sınıflandırılması ..... 39
6.2. Kirchhoff Plaka Teorisi (KLPT) ..... 40
6.3. Reissner-Mindlin Klasik Modeli (RMPT) ..... 41

**7. REISSNER-MINDLIN PLAKA ELEMANLARI (RMPT) ..... 43**
7.1. Dört Düğümlü Dört Kenarlı Plaka (Q4) ..... 43
7.2. Lineer Kayma Alanı İle Dört Düğümlü Plaka Dörtgenleri (QLLL) ..... 43
**8. DÜZ KABUK TEORİSİ ..... 47**
**9. KATLANMIŞ PLAKALAR İÇİN DÖNÜŞÜMLER ..... 51**
**10. YAPILAN ÇALIŞMALAR ..... 53**
10.1. Katlamalı Plaka Çalışmaları ..... 53
10.2. Kabuk Çalışmaları ..... 59
**11. SONUÇLAR VE ÖNERİLER ..... 69**
**KAYNAKLAR ..... 71**
**ÖZGEÇMİŞ ..... 75**

**KISALTMALAR**

**FEM** **:** Sonlu Elemanlar Yöntemi

**KLPT** **:** Kirchhoff-Love Plaka Teorisi

**QLLL** **:** Dört kenarlı, bi-lineer yer değiştirme, bi-lineer rotasyonlar ve lineer enine kesme gerinimi alanları için

**RMPT** **:** Reissner-Mindlin Plaka Teorisi

**SEMBOLLER**

| | |
|---|---|
| **A** | **:** Kesit Alanı |
| **E** | **:** Malzemenin Elastisite Modülü |
| **G** | **:** Malzemenin Kayma Modülü |
| **α** | **:** Krank Açısı |
| **β** | **:** Plaka Boyutlarının Y/X eksenindeki Boyutlarının oranı/Kesme Rijitliği Katsayısı |
| **γ** | **:** Kayma Gerinimi |
| **δ** | **:** Katsayı Matrisi |
| **ε** | **:** Gerinim |
| **η** | **:** Bir Elemanın Boyutsuz Y Ekseni |
| $\theta_x$ | **:** X ekseni etrafında dönme |
| $\theta_x$ | **:** Y ekseni etrafında dönme |
| $\theta_x$ | **:** Z ekseni etrafında dönme |
| **κ** | **:** Kayma Düzeltme Faktörü |
| **λ** | **:** Boyutsuz Doğal Frekans |
| **ν** | **:** Poisson Oranı |
| **ξ** | **:** Bir Elemanın Boyutsuz X Ekseni |
| **ρ** | **:** Malzemenin özkütlesi |
| **σ** | **:** Gerilme |
| **ϕ** | **:** Dönme Açısı |
| **ω** | **:** Doğal Frekans |
| **τ** | **:** Kayma Gerilmesi |

**TABLOLARIN LİSTESİ** **Sayfa**

**Tablo 7.1 :** Çeşitli Reissner-Mindlin plakası dörtgenleri için tam (F), seçici (S) ve indirgenmiş (R) kareleme [33]. ..... 43

**Tablo 10.1 :** 120 derece açılı tek katlamalı plaka için doğal frekans değerlerinin (boyutsuz frekans) literatürdeki çalışmalar ve Nastran paket programından elde edilen sonuçlar ile kıyaslanması. ..... 54

**Tablo 10.2 :** 90 derece çift katlamalı plaka için doğal frekans değerlerinin (boyutsuz frekans) literatürdeki çalışmalar ve Nastran paket programından elde edilen sonuçlar ile kıyaslanması. ..... 57

**Tablo 10.3 :** İki tarafından mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısının doğal frekans değerlerinin (Hertz) literatürdeki çalışmalardan ve Nastran paket programından elde edilen sonuçlar ile kıyaslanması. ..... 60

**Tablo 10.4 :** Basit mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısının doğal frekans değerlerinin (Hertz) literatürdeki çalışmalardan ve Nastran paket programından elde edilen sonuçlar ile kıyaslanması. ..... 64

**Tablo 10.5 :** İki ucundan mesnetlenmiş kalın silindirik tüp yapısı için doğal frekans değerlerinin (Hertz) Nastran paket programından elde edilen veriler ile kıyaslanması. ..... 67

**ŞEKİLLERİN LİSTESİ**

**Sayfa**

**Şekil 2.1 :** Bir kütlenin hareketi [16]. ..... 5

**Şekil 2.2 :** Bir kütle, yay ve sönümleme sistemi [16]. ..... 7

**Şekil 3.1 :** Plaka Eğilme Elemanı [16]. ..... 12

**Şekil 4.1 :** Rot eksenel bir kuvvete maruz kalırsa [16]. ..... 18

**Şekil 4.2 :** Tek kiriş elemanının geometrisi [16]. ..... 19

**Şekil 5.1 :** Dikdörtgen elemanın geometrisi $\xi = x/\alpha$ , $\eta = y/b$ [16]. ..... 22

**Şekil 5.2 :** Kare bir bölgede n = m = 2 için integral noktaları [16]. ..... 25

**Şekil 5.3 :** Eğilmeye maruz kalan dikdörtgen eleman: (a) Denklem (5.11) tarafından verilen deformasyon, (b) kesin deformasyon [16]. ..... 26

**Şekil 5.4 :** Dikdörtgen bir elemanın geometrisi. $\xi = x/\alpha$ , $\eta = y/b$ [16]..... 29

**Şekil 5.5 :** Eğilme ve burulma momentleri yönlerinin gösterimi [16]..... 36

**Şekil 6.1 :** Kalın levha, ince levha ve membran teorisini ayıran ayırt edici sınırlar.. 39

**Şekil 6.2 :** Bir plakanın diferansiyel dilim kesimi. ..... 41

**Şekil 6.3 :** Reissner-Mindlin Kinematiği. ..... 42

**Şekil 7.1 :** Dört düğümlü plaka dörtgen. a) Enine kayma gerilme alanı varsayılmıştır. b) Kesme terimlerini orijinal $K_s^{(e)}$ matrisine entegre etmek için indirgenmiş kareleme [33]. ..... 44

**Şekil 8.1 :** Katlanmış plaka yapılarına örnekler [33]. ..... 47

**Şekil 8.2 :** a) Kavisli bir yayın parçalar halinde ayrıklaştırılması. b) Silindirik bir yüzeyin düz dörtgen elemanlar ile ayrıklaştırılması [33]..... 48

**Şekil 8.3 :** Dikdörtgen düz kabuk yapısı. Lokal ve global eksenler [33]. ..... 48

**Şekil 8.4 :** Boeing ticari uçaklarında eğilme, kayma gerilmeleri ve yüzey yüklemeleri gibi kuvvetler tarafından meydana gelen yorulma yükleri için gövde bölümünün tam ölçekli üretilmiş hali [34]. ..... 49

**Şekil 8.5 :** Roket Modülü [35]. ..... 49

**Şekil 9.1 :** Tipik bir katlanmış plaka elemanı için lokal ve global eksen sistemi. Pozitif x´ ve x ekseni arasında bulunan en az açı şu şekilde gösterilir (x´,x) [36]..... 51

**Şekil 10.1 :** 120 derece açılı tek katlamalı plaka modeli. ..... 53

**Şekil 10.2 :** 120 derece açılı tek katlamalı plaka için birinci mod şekli. ..... 54
**Şekil 10.3 :** 120 derece tek katlamalı plaka için ikinci mod şekli. ..... 54
**Şekil 10.4 :** 120 derece tek katlamalı plaka için üçüncü mod şekli. ..... 55
**Şekil 10.5 :** 120 derece tek katlamalı plaka için dördüncü mod şekli. ..... 55
**Şekil 10.6 :** 120 derece tek katlamalı plaka için beşinci mod şekli. ..... 55
**Şekil 10.7 :** 90 derece açılı çift katlamalı plaka modeli. ..... 56
**Şekil 10.8 :** 90 derece çift katlamalı plaka için birinci mod şekli. ..... 57
**Şekil 10.9 :** 90 derece çift katlamalı plaka için ikinci mod şekli. ..... 57
**Şekil 10.10 :** 90 derece çift katlamalı plaka için üçüncü mod şekli. ..... 58
**Şekil 10.11 :** 90 derece çift katlamalı plaka için dördüncü mod şekli. ..... 58
**Şekil 10.12 :** 90 derece çift katlamalı plaka için beşinci mod şekli. ..... 58
**Şekil 10.13 :** İki tarafından mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısı modeli. ..... 59
**Şekil 10.14 :** İki tarafından mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısı için birinci mod şekli. ..... 60
**Şekil 10.15 :** İki tarafından mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısı için ikinci mod şekli. ..... 61
**Şekil 10.16 :** İki tarafından mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısı için üçüncü mod şekli. ..... 61
**Şekil 10.17 :** İki tarafından mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısı için dördüncü mod şekli. ..... 62
**Şekil 10.18 :** İki tarafından mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısı için beşinci mod şekli. ..... 62
**Şekil 10.19 :** (a) Koordinat Sistemi, (b) Çevresel, (c) Silindirik kabuk için eksenel ve radyal modlar, [40]. ..... 63
**Şekil 10.20 :** Basit mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısı modeli. ..... 63
**Şekil 10.21 :** Basit mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısı için birinci mod şekli. ..... 64
**Şekil 10.22 :** Basit mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısı için ikinci mod şekli. ..... 64
**Şekil 10.23 :** Basit mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısı için üçüncü mod şekli. ..... 65
**Şekil 10.24 :** Basit mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısı için dördüncü mod şekli. ..... 65
**Şekil 10.25 :** Basit mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısı için beşinci mod şekli. ..... 66
**Şekil 10.26 :** İki ucundan mesnetlenmiş kalın silindirik tüp yapısı modeli. ..... 66
**Şekil 10.27 :** İki ucundan mesnetlenmiş kalın silindirik tüp yapısı için birinci mod şekli. ..... 67
**Şekil 10.28 :** İki ucundan mesnetlenmiş kalın silindirik tüp yapısı için ikinci mod şekli. ..... 67
**Şekil 10.29 :** İki ucundan mesnetlenmiş kalın silindirik tüp yapısı için üçüncü mod şekli. ..... 68

**Şekil 10.30 :** İki ucundan mesnetlenmiş kalın silindirik tüp yapısı için dördüncü mod şekli. ..... 68

# KABUK YAPILARIN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ KULLANILARAK YAPISAL OLARAK İNCELENMESİ

## ÖZET

Bu yüksek lisans tezinin amacı katlanmış plakalar yardımıyla kabuk yapıların plaka teorileri ile sonlu elemanlar yöntemi uygulanarak serbest titreşim değerlerinin hesaplanıp elde edilen sonuçların literatürde elde edilen veriler ve NASTRAN paket programı ile kıyaslanarak kabuk yapıların en iyi hangi yöntemle modellenip çözüleceği konusunda bize yol göstermesidir.

Serbest titreşim değerlerinin yapılan analizler ile literatürde elde edilen değerler ve NASTRAN paket programı kadar iyi yakınsadığı görülmüştür. Dolayısıyla kabuk yapıların katlanmış plakalar yardımıyla modellenip plaka teorileri ile değerlendirilebildiği gösterilmiştir. Kabuk yapıları modellenirken farklı plaka teorileri ile analiz edilmiş olup serbest titreşim değerlerinin iyi sonuçlar verdiği belirlenmiştir. Yapılan çalışmada çok sayıda farklı plaka teorileri ve uygulama yöntemleri ile Mathematica programı yardımıyla bilgisayar kodu yazılmıştır.

Matematiksel modelleme gerçek dünyada karşılaşılan bir sorunun matematiksel olarak gerçeğe en yakın şekilde modellenip bu sorunu çözmek için matematiğin kullanılması sürecidir. Dolayısıyla doğru bir sonuç alınabilmesi için problemin gerçek dünyadaki özelliklerinin iyi bir şekilde belirlenip modelin sınırlamalarının ve özelliklerinin modele doğru bir şekilde yansıtılması gerekmektedir.

Başlangıçta düz olan plaka enine yüklere karşı koymak için kesme kuvvetleri, eğilme ve burulma momentleri üretir. Yükler genelde her iki yönde de taşındığı ve izotropik plakalardaki burulma rijitliği oldukça önemli olduğundan, bir plaka karşılaştırılabilir uzunluk ve kalınlıktaki bir kirişe göre daha serttir. Plaka yapıları hafif olması, yüksek yük taşıma kapasitesi ve ekonomik olması nedeniyle tercih edilir bir yapı konumundadır.

Plaka yapıları kullanılarak elde edilen katlamalı yapılar ve kabuklar üç boyutlu olarak düşünülüp ince ve kalın yapılar oluşturularak yapısal analizleri yapılmıştır.

Bu tezde Kirchhoff ve Reissner-Mindlin plaka teorileri kullanılarak elde edilen yapıların sonlu elemanlar yöntemi ile serbest titreşim analizleri yapılmış olup ince kabuk yapıları için Kirchhoff plaka yöntemi ve Reissner-Mindlin plaka yöntemi, kalın kabuk yapıları için ise Reissner-Mindlin plaka yöntemi kullanılmıştır.

Problemlerde sınır şartları belirlenirken literatürde yapılan çalışmalar göz önünde bulundurularak basit mesnetlenmiş ve her iki ucundan sabitlenmiş yapılar kullanılmıştır. Serbest titreşim frekans değerlerinin yanı sıra mod şekilleri de göz önünde bulundurularak yapıların davranışları incelenmiştir.

Yapılan çalışmalar ve elde edilen sonuçlar neticesinde gerçeğe yakın sonuçlar elde edebilmek için en uygun hangi teorilerin, modelleme yöntemlerinin, durumların ve sınır şartlarının kullanılması konusunda bilgiler elde edilmiştir.

## STRUCTURAL ANALYSIS OF SHELL STRUCTURES BY USING THE FINITE ELEMENT METHOD


### SUMMARY

The purpose of this master's thesis is to evaluate shell structures, which are accepted as folded plates and solve the shell structures by calculating the free vibration values by applying the plate theory with the help of the finite element method and comparing the datas with obtained in the literature and the NASTRAN package program. The result of this study will show us which method is the best method for solving the shell structures.

It was observed that the free vibration values converged as well as the values obtained in the literature and the NASTRAN package program. Therefore, it has been shown that shell structures can be modeled with the help of folded plates and evaluated with plate theories. While modeling shell structures, it was analyzed with different plate theories and it was determined that free vibration values gave good results. In the study, computer code was written with the help of Mathematica program with many different plate theories and application methods. Also, shell models are modeled in a cad program similar to the Mathematical model.

Finite element method; the approximate solution of a boundary value problem is to calculate the region by dividing the region into a certain number of sub-regions, assuming that the unknown function is approximately defined within each element. At common joint points of the functions of the said elements by collecting the values they receive, a solution for the whole region is obtained.

Mesh generation can be defined as the process of dividing a physical definition range into smaller definition intervals (elements). The aim is to facilitate the solution of a differential equation. Therefore, the approximation accuracy of the results to be obtained in the finite element method depends on the type of element and the number of elements.

Finite element method is a method that produces approximate solutions. The solution can be repeated by increasing the number of elements, changing the element type, changing the mesh production method. Thus, the difference between the results can be observed.

Apart from the finite element method, there are other approximate methods. These include finite difference method, weighted residual method, Rayleigh-Ritz method, Galerkin method. The most obvious difference between the finite element method and others is that the approximate solution is searched in very small sub-regions. In the finite element method, instead of using a function that will meet the boundary conditions for the entire solution region, the functions are defined on elements with simple geometries and boundary conditions are not considered on the basis of elements.

Mathematical modeling is the process of modeling a problem encountered in the real world in the most realistic way and using mathematics to solve this problem. Therefore, in order to get a correct result, the real world properties of the problem should be determined well and the limitations and properties of the model should be reflected on the model correctly.

The original flat plate produces shear forces, bending and twisting moments to withstand transverse loads. Since the loads are generally carried in both directions and the twisting rigidity of the isotropic plates is very important, a plate is stiffer than a beam of comparable length and thickness. Plate structures are a preferred structure due to their light weight, high load carrying capacity and economical structure.

A shell can be thought of as extending a plate to a non-planar surface. The non-planar state creates axial (membrane) forces in addition to the bending and shear forces, thus providing higher structural strength.

Shell structures are widely used in the aviation, automobile and ship industries, as they are very lightweight and easy to manufacture.

Unlike beams or plates, which are normally one or two-dimensional structures, shell structures can freely vibrate in three directions. This situation, complicated the movements of the shell structures at resonance frequencies. For this reason, besides the frequency behavior, the definition of modal with the amplitudes of the cylindrical shell structures is always of great importance. Areas such as engineering design, acoustic and sound radiation largely depend on the amplitude ratios of the cylindrical shell structures.

The folding structures and shells obtained by using plate structures are considered in three dimensions, and thin and thick structures are formed and their structural analyzes are made.

Although analytical methods are very important, the use of numerical models to solve mathematical models of complex shell structures has become an important component in the design process. Finite element method is used as the basic numerical method for the analysis of shells.

In this thesis, the free vibration analysis of the structures obtained by using Kirchhoff and Reissner-Mindlin plate theories was done, using the Kirchhoff plate method and Reissner-Mindlin plate method for thin shell structures, and the Reissner-Mindlin plate method for thick shell structures.

Shear lock occurs in Mindlin plate elements as the plate thickness decreases (closer to the thin plate limit). Because as the thickness decreases, the sliding effects are dominant besides the bending effects and the plate behaves more rigid than it actually is. As a result, bending energy terms are calculated as zero. In order to solve this problem, some stabilization techniques have been applied on the theory. This technique is called reduced integrations.

While determining the boundary conditions in the problems, structures that are simply supported and fixed at both ends are used by taking into consideration the studies in the literature.

The behaviors of the structures are examined by taking into account the mode shapes as well as the free vibration frequency values.

As a result of the studies carried out and the results obtained, information was obtained on which theories, modeling methods, situations and boundary conditions are most suitable for achieving realistic results.

As expected, the Kirchhoff theory gave better results than Reissner-Mindlin theory in thin cylindrical tube structures formed with thin plates. In addition, as it is known that Reissner-Mindlin theory converges better as a result of the previous studies for the thick cylindrical tube structure, analysis has been made for the thick cylindrical tube structure and the results have been obtained.

# 1. GİRİŞ

Plaka yapıları havacılıkta yapısal mekanik elemanlarında temel yük taşıyıcı elemanlardandır. Bu tür plakalar genellikle düzlem basma kuvvetleri ve/veya kesme kuvvetlerine maruz kalırlar. Bu tür plakaların statik ve dinamik davranışlarını incelemek için değişik plaka teorileri mevcuttur. Plaka geometrisine ve malzeme özelliklerine bağlı olarak bir plaka teorisi diğer bir teoriye göre daha doğru sonuçlar verebilir. Plaka teorilerinin farklılıkları ve uygulama alanlarındaki farklılıkları üzerinde mühendisler tarafından yeni araştırmalar yapılmaya devam etmekte olup plakalar üzerinde elde edilen yeni bilgiler ve yöntemlerin geliştirilmesi mühendisler için bir motivasyon kaynağı oluşturmaktadır.

Kabuk yapısı değişen açılarla birbiri ardına eklenmiş birçok plakadan oluşmaktadır. Bu çalışmada birbiri ardına eklenmiş plakalar kullanılarak oluşturulan kabuğun yapısal olarak incelenerek doğal titreşim frekanslarının belirlenmesi ve çalışmanın sonucunda elde edilen verilerin bir paket programdan elde edilen veriler ve literatürde yapılan çalışmalar ile kıyaslanarak havacılık sektörüne katkıda bulunması amaçlanmaktadır.

## 1.1. Tezin Amacı ve Genel Bakış

Sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak kabuk yapıların analizi yapılıp elde edilen sonuçların NASTRAN paket programı ve literatürde yapılan bir çalışma ile karşılaştırılıp kabuk yapıların en iyi hangi plaka teorisi ile çözüleceği konusunda bu çalışma bize yol gösterecektir. Kabuk yapılar için elde edilen sonuçlar neticesinde daha kompleks ve istenilen yapıda kabuk yapılar için en uygun modelleme yöntemlerinin belirlenmesine katkı sağlamıştır.

## 1.2. Literatür Araştırması

İnce plakaların serbest titreşimi ile ilgili ilk çalışmalar 1776'da Euler tarafından yapılmıştır [1]. Euler J. Bernoulli'yi temel alarak, karşılıklı dik olarak doğru açılarla konumlandırılmış şeritler halinde bulunan ve her bir şeridi bir kirişin fonksiyonu olarak ifade eden bir plaka sistemi sunmuştur [2]. Ancak, mevcut yaklaşımlardan farklı olarak, governing diferansiyel denklemi orta terimleri içermiyordu. Fransız matematikçi Germain, eğilme teriminden yoksun bir plaka diferansiyel denklemi geliştirdi [3]; bu arada, bu çalışma için 1816'da Paris Akademisi tarafından ödüllendirildi. Bu çalışmanın hakem olarak gözden geçirenlerinden biri olan Lagrange, eksik terimi ekleyerek Germain'in sonuçlarını (1813) düzeltti [4]; böylece genel plaka denklemini düzgün bir şekilde sunan ilk kişiydi. Cauchy [5] ve Poisson [6] elastisite teorisinin genel denklemleri temelinde plaka bükme problemini formüle eden ilk kişilerdir.

Bu çalışmalar daha sonra Bernoulli tarafından sadece membran etkileri dikkate alınarak geliştirilmiştir. Plakaların eğilmesi ile ilgili ilk teori Gustav R. Kirchoff tarafından 18. Yüzyılda Bernoulli kiriş denklemleri kullanılarak geliştirilmiştir.

Ayrıca aynı zamanda Love elastisite teorisi çalışmaktaydı. Reissner bu çalışmalara kayma etkisini katarak, Mindlin ise döner ataleti ekleyerek geliştirmiştir. Bu yöntemler nesilden nesile sonlu farklar yöntemi, sonlu şeritler yöntemi gibi farklı çözüm yöntemleri kullanılarak geliştirilmeye çalışılmıştır.

19. yüzyılın ortalarından bu yana plaka teorilerinin araştırılması ve geliştirilmesi devam etmektedir.

1850 yıllarında Kirchoff plaka teorisi (klasik plaka teorisi) üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Kirchoff plaka teorisi 1/10'dan daha küçük kalınlık/genişlik oranına sahip plakalar için daha doğru sonuçlar vermektedir. Ayrıca kesme etkilerini ihmal etmektedir.

1950 yıllarında Mindlin plaka teorisi üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Mindlin plaka teorisi birinci derece kesme deformasyon teorisi olarak adlandırılabilir. 1/10'dan fazla kalınlık/genişlik oranına sahip kalın plakalar için daha doğru sonuçlar vermektedir. Ayrıca kesme etkilerini dikkate almaktadır.

Mindlin teorisinden birkaç yıl önce Reissner, kesme etikilerini içeren ve kalın plakalar için uygun olan bir plaka teorisi geliştirdi. Mindlin ve Reissner teorileri benzer olması sebebiyle genellikle Reissner-Mindlin teorisi olarak adlandırılırlar. Wang ve arkadaşlarına göre bu iki teori farklı varsayımlara dayandığından bunun yanıltıcı bir tanım olduğunu söylemektedirler [7].

Reissner-Mindlin yaklaşımı yapılardaki kayma gerilmesinin baskın olması ve yüksek rijitlik sebebiyle bazı sapmalara sahiptir. Bir çalışmada kullanılan elemanlarda farklı bir ara değer bulmada kullanılan bir fonksiyon uygulanmasına rağmen kayma-kilitlenmesi durumu devam etmiştir. Bu problemin çözülebilmesi için teori üzerinde bazı stabilizasyon teknikleri uygulanmıştır. Bu teknik indirgenmiş integrasyonlar olarak adlandırılmaktadır [8].

Literatürde genellikle hesaplamalı sonuçlara dayanan araştırmalara göre Reissner-Mindlin plaka teorisi Kirchhoff plaka teorisine göre özellikle ince plakalarda ve kesme kuvvetleri önemli olduğunda daha doğru sonuçlar vermektedir [9].

Analitik yöntemler çok önemli olmasına rağmen, karmaşık kabuk yapılarının matematiksel modellerini çözmek için sayısal modellerin kullanılması tasarım sürecinde önemli bir bileşen haline gelmiştir. Sonlu elemanlar yöntemi, kabukların analizi için temel sayısal yöntem olarak kullanılmaktadır [10].

Doğal frekanslar ve mod şekilleri dahil olmak üzere kabuk teorilerinin kapsamlı olarak özeti ve tartışmaları Liessa tarafından 1973 yılında yapılmıştır [11]. Son zamanlarda, Amabili ve Paidoussis [12], Amabili [13] ve Kurylov ve Amabili [14] doğrusal olmayan bakış açısıyla dikkate değer çalışmalar sundular.

Normalde bir veya iki boyutlu yapı olan kirişlerin veya plakaların aksine kabuk yapıları üç yöndede serbestçe titreşebilir. Bu durum, rezonans frekanslarında kabuk yapıların hareketlerini karmaşıklaştırmıştır. Bu nedenle, frekans davranışları dışında silindirik kabuk yapıların genlikleriyle birlikte modal tanımlanması da her zaman büyük önem taşımaktadır. Mühendislik tasarımı, akustik ve ses radyasyonu gibi alanlar büyük ölçüde silindirik kabuk yapıların genlik oranlarına bağlıdır. Mod şekillerinin genlik oranlarını tanımlamak için çalışmalar yapılmıştır fakat bu çalışmalar tamamlanmamıştır [15].

# 2. HAREKET DENKLEMLERİ

## 2.1. Hareket Denklemleri

Herhangi bir dinamik sistemin hareket denklemleri, Newton'un ikinci hareket yasası kullanılarak yazılabilir, bu da “bir kütlenin momentum değişim oranının, ona etki eden kuvvete eşit olduğunu” belirtir. Bir m kütlesini ele aldığımızda bir f(t) kuvveti ile u(t) mesafesi boyunca hareket ettirilirse, her ikisi de Şekil 2.1'de gösterildiği gibi zamanın t fonksiyonlarıdır, Newton'un ikinci hareket yasası şunları sağlamaktadır:

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{du}{dt}\right) = f(t) \tag{2.1}$$

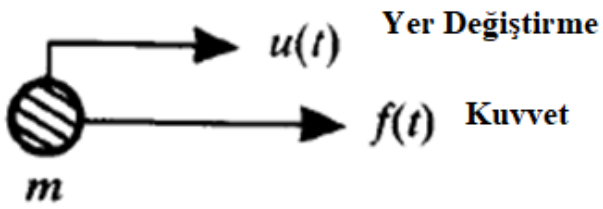
Bu çalışma boyunca varsayılacak sabit m kütlesi için, denklem (2.1):

$$m\frac{d^2u}{dt^2} = f \tag{2.2}$$

ya da

$$m\ddot{u} = f \tag{2.3}$$

Burada noktalar zamana göre türevi gösterir.




**Şekil 2.1 :** Bir kütlenin hareketi [16].

Denklem (2.3) aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$f - m\ddot{u} = 0 \tag{2.4}$$

$m\ddot{u}$ terimi bir kuvvet olarak kabul edilirse, denklem (2.4) bir denge denklemini temsil eder, yani kütle üzerine etki eden kuvvetlerin toplamı sıfıra eşittir. İvme $\ddot{u}$ ile ters yönde hareket eden bir atalet kuvveti olarak adlandırılan bu kurgusal kuvvetin $m\ddot{u}$ büyüklüğünün getirilmesi, statik denge kavramları kullanılarak bir dinamik denge denkleminin formüle edilmesine izin verir. Bu dinamik denge denklemi, yeniden düzenlendiğinde, sistemin hareket denklemini verir. Bu kavram d'Alembert prensibi olarak bilinir.

## 2.2. Sanal Yer Değiştirme İlkesi

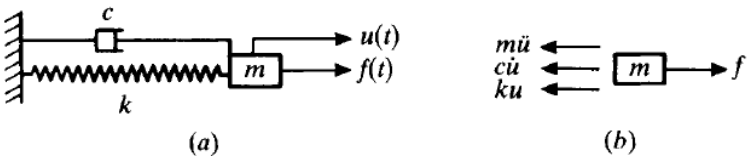
Analiz edilecek yapı karmaşık bir yapı ise, her bir kütle noktasında hareket edecek tüm kuvvetlerin vektörel olarak eklenmesi de bir o kadar zor olacaktır. Bu sorun, önce d'Alembert prensibi ve ardından sanal yer değiştirme prensibi kullanılarak aşılabilir. Bu sayede dinamik denge denklemleri ve dolayısıyla hareket denklemleri dolaylı olarak formüle edilebilir. Sanal yer değiştirme ilkesi, "bir dizi kuvvetin etkisi altında dengede olan bir sistemin sanal bir yer değiştirmeye tabi tutulması durumunda, kuvvetler tarafından yapılan toplam işin sıfır olacağını "belirtir. Bu bağlamda, sanal yer değiştirme fiziksel olarak mümkün olabilir, yani sistem kısıtlamaları ile uyumlu olan herhangi bir yer değiştirme olarak tanımlanabilir.

Bu prensibin uygulanması doğrudan herhangi bir sistem için hareket denklemlerine yol açar. Bu prensip hem ayrık, çok serbestlik dereceli sistemlere hem de sürekli sistemlere uygulanabilir. Bu formülasyonun avantajı, sayısal enerji değerlerini kullanmasıdır. Vektörel değerlere sadece korunumsuz kuvvetler tarafından yapılan işin hesaplanmasında ihtiyaç duyulabilmektedir. Daha önce belirtildiği gibi, bu çalışmada ilgilenilebilecek tek potansiyel enerji elastik gerinim enerjisi U'dur. Bu nedenle, Hamilton'un prensibi aşağıdaki gibi kullanılabilir:

$$\int_{t1}^{t2} (\delta(T - U) + \delta W_{nc}) dt = 0 \tag{2.5}$$

## 2.3. Lagrange Denklemleri

Hamilton prensibi ayrık sistemlere uygulandığında daha uygun bir biçimde ifade edilebilir. Bunu göstermek adına, Şekil 2.2'de gösterilen sistem ele alınabilir.




**Şekil 2.2 :** Bir kütle, yay ve sönümleme sistemi [16].

Kinetik ve gerinim enerjileri:

$$T = \frac{1}{2} m\dot{u}^2 = T(\dot{u})$$
$$U = \frac{1}{2} k u^2 = U(u) \tag{2.6}$$

korunumlu olmayan güçler tarafından yapılan sanal iş:

$$\delta W_{nc} = (f - c\dot{u})\delta u \tag{2.7}$$

Dolayısı ile denklem 2.5 aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \delta \dot{u} - \frac{\partial U}{\partial u} \delta u + (f - c\dot{u})\delta u \right) dt = 0 \tag{2.8}$$

İlk terimi parçalara entegre edersek,

$$\int_{t1}^{t2} \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \delta \dot{u} dt = \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \delta u \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t1}^{t2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) \delta u dt = - \int_{t1}^{t2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) \delta u dt \tag{2.9}$$

Denklem (2.9) denklem (2.8)'in içine yazılırsa:

$$\int_{t1}^{t2} \left\{ -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial U}{\partial u} + f - c\dot{u} \right\} \delta u dt = o \tag{2.10}$$

$\delta u$ terimi keyfi olduğundan,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) + \frac{\partial U}{\partial u} + c\dot{u} = f \tag{2.11}$$

Enerji kaybı fonksiyonu olan D aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$D = \frac{1}{2} c\dot{u}^2 \tag{2.12}$$

Sönümleme kuvveti,

$$c\dot{u} = \frac{\partial D}{\partial \dot{u}} \tag{2.13}$$

Enerji kaybı fonksiyonu anlık enerji kaybı oranını aşağıdaki gibi vermektedir:

$\frac{1}{2}$ × sönümleme kuvveti × sönümleyicinin uzama oranı

Denklem 2.13 denklem 2.11 içine yazılırsa:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}}\right)+\frac{\partial D}{\partial \dot{u}}+\frac{\partial U}{\partial u}= f \tag{2.14}$$

Denklem (2.14) Lagrange'ın tek serbestlik dereceli denklemidir. (2.6) ve (2.12) denklemleri (2.14) denkleminin içine yazılırsa sistemin hareket denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku= f \tag{2.15}$$

$\left(\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}}\right)$ teriminin atalet kuvvetini ve $\left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)$ teriminin ise yay nedeniyle sağlanan geri yükleme kuvvetini ifade ettiği görülebilir.

Çok serbestlik dereceli bir sistem söz konusu olduğunda, n bağımsız yer değiştirmeler ($q_1 q_{2,...,} q_n$) tarafından tarif edilirse, kinetik enerji "$\dot{q}_j$" hızlarının bir fonksiyonu olur; (j = 1, 2, ..., n) ve gerinim enerjisi q'nun ( $q_1, q_2, ..., q_n$ ) bir yer değiştirme fonksiyonu olur; (j = 1, 2, ..., n), dolayısıyla:

$$T = T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n) \tag{2.16}$$

$$U = U(q_1, q_2, ..., q_n) \tag{2.17}$$

Benzer şekilde, enerji kaybı fonksiyonu $\dot{q}_j$ hızlarının bir fonksiyonudur, dolayısıyla:

$$D = D(\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n) \tag{2.18}$$

Ayrıca, korunumu olmayan güçler tarafından yapılan iş, aşağıdaki denklemde görüleceği üzere Q'nun genelleştirilmiş kuvvetler olduğu şeklinde yazılabilir.

$$\delta W_{nc} = \sum_{j=1}^{n}\left(Q_j - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j \tag{2.19}$$

Lagrange denklemleri aşağıdaki şekilde yazılabilir (j=1,2,...,n):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j}+\frac{\partial U}{\partial q_j}= Q_j \tag{2.20}$$

Prosedür, matris notasyonu kullanılarak daha sistematik ve dolayısıyla hatalara daha az eğilimli hale getirilebilir. Kinetik enerji, enerji kaybı fonksiyonu ve gerinim enerjisi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{2}\{\dot{\boldsymbol{q}}\}^T[\boldsymbol{M}]\{\dot{\boldsymbol{q}}\}$$

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}\{\dot{\boldsymbol{q}}\}^T[\boldsymbol{C}]\{\dot{\boldsymbol{q}}\} \qquad (2.21)$$

$$\boldsymbol{U} = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{q}\}^T[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{q}\}$$

Burada:

{q} = sistem yer değiştirmelerinin sütun matrisi

$\{\dot{\boldsymbol{q}}\}$ = sistem hızlarının sütun matrisi

[M] = atalet katsayılarının kare simetrik matrisi

[C] = sönümleme katsayılarının kare simetrik matrisi

[K] = sertlik katsayılarının kare simetrik matrisi

Denklem 2.21'i kullanarak Lagrange denklemindeki ayrık terimler aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\left\{\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right)\right\} = [\boldsymbol{M}]\{\ddot{\boldsymbol{q}}\}$$

$$\left\{\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right\} = [\boldsymbol{C}]\{\dot{\boldsymbol{q}}\} \qquad (2.22)$$

$$\left\{\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{q}}\right\} = [\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{q}\}$$

Lagrange denklemleri (1.20) matris formunda aşağıdaki hareket denklemini verir:

$$[\boldsymbol{M}]\{\ddot{\boldsymbol{q}}\} + [\boldsymbol{C}]\{\dot{\boldsymbol{q}}\} + [\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{q}\} = \{\boldsymbol{Q}\} \qquad (2.23)$$

Denklem (2.21) ve denklem (2.23) hareket denklemlerindeki matris katsayılarını belirlemek için enerji ifadelerinin matris biçiminde elde edilmesinin gerekli olduğunu göstermektedir.

# 3. ELEMAN ENERJİ FONKSİYONLARI

## 3.1. Eleman Enerji Fonksiyonları

Türevler lineer elastisite teorisine dayanmaktadır. Bu, hem gerilim-gerinim hem de gerinim-yer değiştirme ilişkilerinin lineer olduğu anlamına gelmektedir. Üç boyutlu elastik bir cisimdeki gerilme durumu, gerilme bileşenleri tarafından tanımlanmaktadır (bunlar Kartezyen eksenleri x, y, z olarak adlandırılır).

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix} \tag{3.1}$$

$$\tau_{yx}=\tau_{xy},\ \tau_{zx}=\tau_{xz},\ \tau_{zy}=\tau_{yz} \tag{3.2}$$

Gerilmelerin gerinimler ile ilişkilendirilmesi sırasında sadece izotropik durum söz konusu olduğunda bir boyutlu elemanlar (eksenel,tork ve kiriş) kullanılırken, bir boyutlu elemanlar haricinde anizotropik, ortotropik ve izotropik malzemeler dikkate alınmaktadır.

Elastik bir cisimdeki gerinim durumu, gerinim bileşenleri tarafından tanımlanılır.

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix}\varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz}\\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z\end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Eksenlerin yönündeki yer değiştirme bileşenleri (u, $\upsilon$, w) ile gösterilirse, gerinim-yer değiştirme ilişkileri aşağıdaki gibi verilir:

$$\varepsilon_x=\frac{\partial U}{\partial x}\ ,\quad \varepsilon_y=\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\ ,\quad \varepsilon_z=\frac{\partial W}{\partial z} \tag{3.4}$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\ ,\quad \gamma_{xz}=\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial x}\ ,\quad \gamma_{yz}=\frac{\partial \upsilon}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial y}$$

Buradaki önemli nokta, tüm yer değiştirme bileşenlerinin zamana bağlı olmasıdır.

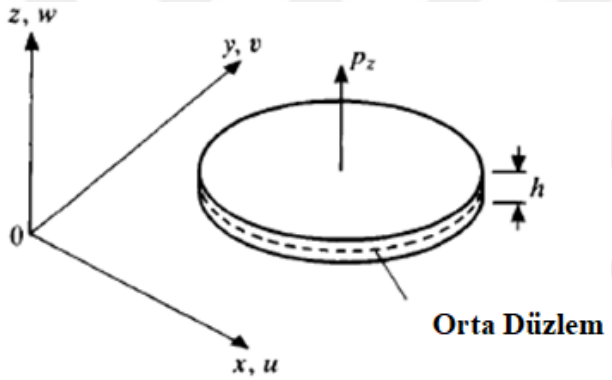
### 3.2. İnce Plaka Eğilme Elemanı

Şekil 3.1,yüzey üzerinde dağıtılmış yüzey yüklerine maruz kalan, sabit kalınlıkta (h) ince bir plakayı göstermektedir. Bu yükler, z = 0 düzlemi olan orta yüzeye normaldir. İnce bir plaka için enerji fonksiyonlarını türetirken, plakanın enine yönde oluşan gerilmenin ($\sigma_z$) sıfır olduğu varsayılır. Ayrıca, deforme olmamış plakanın orta yüzeyindeki normaller deformasyon sırasında orta yüzeye göre düz ve normal kalır. Böylece, deforme olmamış orta yüzeye paralel yer değiştirmeler şu şekilde verilir:

$$u(x,y,z) = -z\frac{\partial w}{\partial x}$$

(3.5)

$$\upsilon(x,y,z) = -z\frac{\partial w}{\partial y}$$




**Şekil 3.1 :** Plaka Eğilme Elemanı [16].

burada w (x, y), orta yüzeyin z-yönünde yer değiştirmesini belirtir. Gerinimin bileşenleri aşağıdaki gibi verilir:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \upsilon}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{3.6}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x} = -z2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

(3.7)

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \ , \ \gamma_{yz} = \frac{\partial \upsilon}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

$\sigma_z, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ sıfır olduğundan dolayı, depolanan gerinim enerjisi aşağıdaki gibi yazılır:

$$U = \frac{1}{2}\int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy})dV \tag{3.8}$$

$$\boldsymbol{U} = \frac{1}{2}\int_{V}\{\boldsymbol{\sigma}^{T}\}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}\boldsymbol{dV} \tag{3.9}$$

$\boldsymbol{\sigma}_{z} = 0$ eşitliğinden dolayı gerilim-gerinim ilişkisi aşağıdaki formu alır:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\boldsymbol{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \tag{3.10}$$

Denklem (3.10), denklem (3.9)'un içine yazılırsa,

$$\boldsymbol{U} = \frac{1}{2}\int_{V}\{\boldsymbol{\varepsilon}^{T}\}[\boldsymbol{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}\boldsymbol{dV} \tag{3.11}$$

Denklem (3.6) kullanılarak, gerinim matrisi aşağıdaki formda yazılabilir:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = -\boldsymbol{z}\{\boldsymbol{x}\} \tag{3.12}$$

$$\{\boldsymbol{x}\} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^{2}\boldsymbol{w}}{\partial \boldsymbol{x}^{2}} \\ \dfrac{\partial^{2}\boldsymbol{w}}{\partial \boldsymbol{y}^{2}} \\ \dfrac{2\partial^{2}\boldsymbol{w}}{\partial \boldsymbol{x}\partial \boldsymbol{y}} \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

Denklem (3.12), denklem (3.11)'in içine yazılıp z'ye göre integrali alınırsa,

$$\boldsymbol{U} = \frac{1}{2}\int_{A}\frac{\boldsymbol{h}^{3}}{12}\{\boldsymbol{x}^{T}\}[\boldsymbol{D}]\{\boldsymbol{x}\}\boldsymbol{dA} \tag{3.14}$$

Levhanın kinetik enerjisi aşağıdaki gibidir:

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{2}\int_{A}\boldsymbol{\rho h}\dot{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{dA} \tag{3.15}$$

Enine yüklemenin sanal işi,

$$\boldsymbol{\delta w} = \int_{A}\boldsymbol{p}_{z}\boldsymbol{\delta w}\boldsymbol{dA} \tag{3.16}$$

olarak hesaplanır.

### 3.3. Kalın Plaka Eğilme Elemanı

Derin kirişlerde olduğu gibi, dalga boyları plaka kalınlığının yaklaşık on katından az olduğu durumlarda, kesme deformasyonu ve döner atalet etkileri dahil edilmektedir. Kesme deformasyonu önemli olduğunda, orta yüzeye normal olanların normal kaldığı varsayılamaz. Bu durumda, orta yüzeye paralel yer değiştirmeler aşağıdaki şekilde verilir:

$$u(x,y,z) = z\theta_y(x,y)$$

$$\upsilon(x,y,z) = -z\theta_x(x,y) \tag{3.17}$$

burada $\theta_x$, $\theta_y$, deformasyondan önce başlangıçta orta düzleme normal olan çizgilerin x ve y eksenleri arasındaki dönme açılarını belirtmektedir.

Düzlem içi gerinimler aşağıdaki şekilde verilmektedir:

$$\{\varepsilon\} = -z\{x\} \tag{3.18}$$

$$\{x\} = \begin{bmatrix} \dfrac{-\partial\theta_y}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\theta_x}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\theta_x}{\partial x} - \dfrac{\partial\theta_y}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

Enine kayma gerinimleri $\gamma_{xz}$, $\gamma_{yz}$ ve yer değiştirme arasındaki ilişkiler aşağıdaki gibidir:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \ , \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial \upsilon}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \tag{3.20}$$

Denklem (3.17), denklem (3.20)'nin içine yazılırsa,

$$\{\gamma\} = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_y + \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ -\theta_x + \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

Enine kesmeler ihmal edilebilir olduğunda, denklem (3.21) $\theta_y = \dfrac{-\partial w}{\partial x}$ ve $\theta_x = \dfrac{\partial w}{\partial y}$ olarak yazılır. Bu ilişkilerle denklem (3.19), denklem (3.13)'e indirgenebilir.

Malzemede depolanan gerinim enerjisi, eğilme ve kesme deformasyonuna bağlı enerjilerin toplamıdır.

$$\boldsymbol{U} = \frac{1}{2}\int_{V} \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{T}[\boldsymbol{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}\boldsymbol{dV} + \frac{1}{2}\int_{V} \{\boldsymbol{\tau}\}^{T}\{\boldsymbol{\gamma}\}\boldsymbol{dV} \tag{3.22}$$

ancak, z = 0 düzlemi, malzeme için bir simetri düzlemidir. Denklem (3.21)'de verilen ortalama kayma gerinimleri ve kayma gerilimleri ($\tau$) arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde verilir:

$$\{\boldsymbol{\tau}\} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{xz} \\ \boldsymbol{\tau}_{yz} \end{bmatrix} = \boldsymbol{k}[\boldsymbol{D}^{s}]\{\boldsymbol{\gamma}\} \tag{3.23}$$

burada K, kesme gerilmelerinin ve gerinimlerinin kalınlık boyunca varyasyonunu hesaba katan bir sabittir. K genellikle $\pi^2$ / 12 veya 5/6 olarak alınmaktadır. Malzeme izotropik ise, o zaman,

$$[\boldsymbol{D}^{s}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{G} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{G} \end{bmatrix} = \frac{\boldsymbol{E}}{2(1+\boldsymbol{\upsilon})}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

Denklem (3.18) ve denklem (3.23), denklem (3.22) içine yazılırsa ve kalınlık boyunca integrali alınırsa,

$$\boldsymbol{U} = \frac{1}{2}\int_{A} \frac{\boldsymbol{h}^{3}}{12}\{\boldsymbol{x}\}^{T}[\boldsymbol{D}]\{\boldsymbol{x}\}\boldsymbol{dA} + \frac{1}{2}\int_{A} \boldsymbol{kh}\{\boldsymbol{\gamma}\}^{T}[\boldsymbol{D}^{s}]\{\boldsymbol{\gamma}\}\boldsymbol{dA} \tag{3.25}$$

Levhanın kinetik enerjisi,

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{2}\int_{V} \boldsymbol{\rho}(\dot{\boldsymbol{u}}^{2} + \dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{2} + \dot{\boldsymbol{w}}^{2})\boldsymbol{dV} \tag{3.26}$$

Denklem (3.17)'den u,ν'nin çekilip, z'ye göre integrali alındıktan sonra dV=dz.dA denklemine eklenirse,

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{2}\int_{A} \boldsymbol{\rho}\left(\boldsymbol{h}\dot{\boldsymbol{w}}^{2} + \frac{\boldsymbol{h}^{3}}{12}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{x}^{2} + \frac{\boldsymbol{h}^{3}}{12}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{y}^{2}\right)\boldsymbol{dA} \tag{3.27}$$

denklemi elde edilir.

# 4. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ VE SONLU ELEMANLARDA YER DEĞİŞTİRME YÖNTEMİNE GİRİŞ

## 4.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi (FEM)

Sonlu elemanlar yöntemi (FEM), fiziksel durumları modelleyen; diferansiyel denklemlerin çözümü için doğruya yakın ve çok yönlü sayısal bir araç olarak kabul edilen bir yöntemdir [17]. Bu yöntem, problemlerin kısmi diferansiyel denklemlerle modellendiği çeşitli mühendislik alanlarında kullanılmaktadır. Ayrıca, sonlu elemanlar yöntemi yapı mühendisliği ve ilgili disiplinlerde önemli uygulamalara da sahiptir. Sonlu elemanlar yöntemi Rayleigh-Ritz yönteminin klasik varyasyon kavramı ile yakından ilişkilidir [18], [19]. Modern sonlu elemanlar tekniği 1950 yılında Turner ve arkadaşları tarafından ortaya atıldı [19]. Bu teknik, Clough [20] tarafından "sonlu elemanlar yöntemi" olarak adlandırıldı ve Argyris [21] tarafından daha da geliştirildi. Yöntemin mühendis bakış açısından güçlü gelişimi Zienkiwicz ve Taylor tarafından gerçekleştirildi [22]. Sonlu elemanların matematiksel teorisi birçok bilim adamı tarafından geliştirilmiştir. Bunlar arasında Strang ve Fix [23], Babuska ve Aziz [24], Oden ve Reddy'den [25] bahsedilebilir.

Levha eğilme problemi, 1960'lı yılların başında sonlu elemanın uygulandığı ilk problemlerden biridir. Son yirmi yılda verimli ve doğru sonuç veren eğilme elemanları tasarlamak için büyük çaba sarf edilmiştir. Referanslar [26], [27], [28], [29], [30]'de yer alan incelemeler, konu üzerinde yapılan çalışmaların net bir göstergesidir. Ayrıca bu çalışmalar, doğru şekilde eğilme elemanlarını formüle etmenin zorluğunuda gösterirler.

O zaman karşılaşılan çeşitli zorluklar istenilen şekilde giderilemediği için bu durum günümüzde bu alandaki araştırmaları canlı hale getirmiştir. Başlangıçta, Kirchhoff'un, enine yer değiştirme "w" için elementler arası süreklilik gerekliliğinin sağlanması ile ilgili ince plaka elemanları geliştirilmeye çalışıldı.

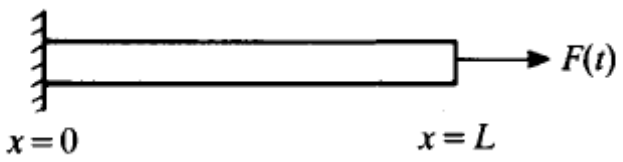
C1 enine yer değiştirmenin (w) sürekliliğini gerektirir, yani w ve türevleri iki eleman arasındaki ortak kenarlarda sürekli olmalıdır. Yine normal eğimin, mevcut olan düğüm bilinmeyenleri, yani $\frac{dw}{dx}$ ve $\frac{dw}{dy}$ ile sürekli yapılamayacağı tespit edilmiştir. Bu bağlamda, normal eğimin süreklilik gereksinimini karşılamayan bir takım uygun olmayan elemanlar geliştirilmiştir. Bu elemanlar yukarıdaki süreklilik gereksinimini bozsa da, bir çok durumda çok iyi olduğu bulunmuştur.

### 4.2. Sonlu Elemanlarda Yer Değiştirme Yöntemine Giriş

Düzgün eksenel, tork ve kiriş elemanları gibi basit yapıların tepkisi, türetilen uygun sınır koşullarıyla birlikte diferansiyel hareket denklemleri ile çözülerek elde edilebilir. Birçok pratik durumda, geometrik veya malzeme özellikleri değişiklik gösterir veya sınırların şekli bilinen fonksiyonlar ile tarif edilemeyebilir. Ayrıca, pratik yapılar kirişler, plakalar, kabuklar ve katılar gibi farklı tipteki bileşenlerin bir araya getirilmesinden oluşur. Bu durumlarda sınır koşullarını sağlayan hareket denklemleri için analitik çözümler elde etmek imkansızdır. Bu sorun, Hamilton prensibini sağlayan yaklaşık çözümler elde edilerek giderilebilir. Hamilton prensibine yaklaşık çözümler belirlemek için bir takım teknikler mevcuttur. En yaygın olarak kullanılan prosedürlerden biri, bir sonraki bölümde açıklanacak olan Rayleigh-Ritz yöntemidir. Bu yöntemin temel özellikleri rotlar, miller, kirişler ve çerçeveler dikkate alınarak açıklanmaktadır.

### 4.3. Rayleigh-Ritz Yöntemi

Rayleigh-Ritz yöntemi ilk olarak Şekil 4.1'de gösterilen rotun eksenel hareketini belirleme problemi için açıklanmıştır. Hamilton prensibi şunları gerektirir:




**Şekil 4.1 :** Rot eksenel bir kuvvete maruz kalırsa [16].

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta(T-U)+\delta w)dt = 0 \qquad (4.1)$$

Sistem sınırlı sayıda serbestlik derecesine indirgendiğinden, Hamilton prensibinin uygulanması Lagrange denklemlerinin uygulanmasına yol açar.

$$[\boldsymbol{M}]\{\ddot{\boldsymbol{q}}^n\}+[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{q}^n\}=\{\boldsymbol{Q}^n\} \tag{4.2}$$

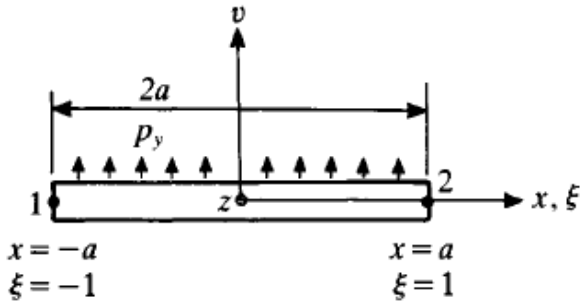
Kısıtlamalar sayesinde denklem aşağıdaki forma indirgenir.

$$[\boldsymbol{M}]\{\ddot{\boldsymbol{q}}^n\}+[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{q}^n\}=0 \tag{4.3}$$

$$\det[\boldsymbol{K}-\boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{M}]=[\boldsymbol{K}-\boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{M}]=0 \tag{4.4}$$

### 4.4. Kirişlerin Eğilme Titreşimi

Bir kiriş elemanının her bir düğümünde ν ve ∂ν / ∂x'in serbestlik derecesi olarak alınması gerektiği bilinmektedir. Bu nedenle, iki düğümü olan Şekil 4.2'de gösterilen elemanın toplam dört serbestlik derecesi vardır. Yer değiştirme fonksiyonu böylece dört sabitin bulunduğu bir polinom ile temsil edilebilir.




**Şekil 4.2 :** Tek kiriş elemanının geometrisi [16].

$$\boldsymbol{\upsilon}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{\xi}^2+\boldsymbol{a}_4\boldsymbol{\xi}^3 \tag{4.5}$$

Bu ifade aşağıdaki matris biçiminde yazılabilir:

$$\boldsymbol{\upsilon}=[1 \quad \boldsymbol{\xi} \quad \boldsymbol{\xi}^2 \quad \boldsymbol{\xi}^3]\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \boldsymbol{a}_2\\ \boldsymbol{a}_3\\ \boldsymbol{a}_4\end{bmatrix} \tag{4.6}$$

# 5. PLAKALARIN DÜZLEM İÇİ VE EĞİLME TİTREŞİMİ

## 5.1. Plakaların Düzlem İçi Titreşimi

Uçak, bina ve gemi tabanları, köprü güverteleri ve makinaları çevreleyen yapılar gibi düz plaka yapılar, kendi düzlemlerinde normal dinamik yüklere maruz kalırlar. Bu yüklemelerin sonucu ise eğilme titreşimlerinin oluşması ile sonuçlanır. Bu tür yapılar plaka yapısının plaka eğilme elemanları olarak adlandırılan iki boyutlu sonlu elemanların bir birleşimine bölünmesiyle analiz edilebilir. Bu elemanlar, üçgen, dikdörtgen ya da farklı dörtgen şekillerinde olabilir.

[D], malzemenin anizotropik, ortotropik veya izotropik olmasına bağlı olarak tanımlanan bir malzeme sabitleri matrisidir. Ayrıca enerji denklemleri aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\boldsymbol{T_e} = \frac{1}{2}\int_{A_e} \boldsymbol{\rho h(\dot{u}^2 + \dot{\upsilon}^2) dA} \tag{5.1}$$

$$\boldsymbol{U_e} = \frac{1}{2}\int_{A_e} \boldsymbol{h\{\varepsilon\}^T[D]\{\varepsilon\} dA} \tag{5.2}$$

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{\upsilon}}{\partial \boldsymbol{y}} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}} + \dfrac{\partial \boldsymbol{\upsilon}}{\partial \boldsymbol{x}} \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

$$\boldsymbol{\delta w_e} = \int_{s_e} \boldsymbol{(P_x \delta u + P_y \delta \upsilon) ds} \tag{5.4}$$

İzotropik malzemeler için malzeme sabitleri matrisi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$[D] = \begin{bmatrix} E' & E'\upsilon & 0 \\ & E' & 0 \\ Sym & & G \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

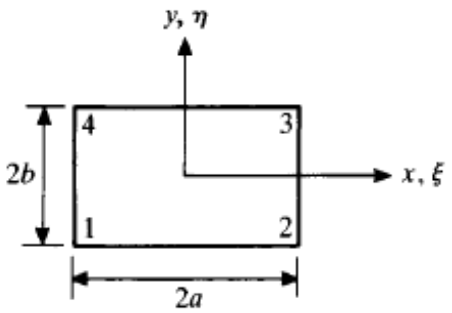
Bu ifadelerde ortaya çıkan en yüksek türev birinci derecedir. Bu nedenle, sürekliliği sağlamak için u ve v'yi her düğümde serbestlik derecesi olarak almak gerekmektedir. Ayrıca, en az birinci dereceden tam polinomlar kullanılmalıdır.

### 5.2. Doğrusal Dikdörtgen Elemanı

Analiz prosedürü mümkün olduğunca dikdörtgen elemanlar kullanılarak ve üçgenle doldurularak ki bu durum sınır şeklini daha önemli kılmaktadır, prosedürü verimli hale getirmektedir. Şekil 5.1, her köşede bir tane olmak üzere dört düğüm noktası olan dikdörtgen bir elemanı göstermektedir. Her bir düğümde, sırasıyla x ve y eksenlerinin yönlerinde $u$ ve $\upsilon$ yer değiştirme bileşenleri olmak üzere iki serbestlik derecesi vardır. Dolayısıyla her bileşen, her biri dört terimi olan polinomlarla temsil edilebilir. Üç kuadratik terimden birini seçmek gerekir. xy terimi, yer değiştirme fonksiyonlarının değişmez olmasını sağlamak için seçilir. Bu seçim, yer değiştirme varyasyonunun x = sabit ve y = sabit çizgileri boyunca doğrusal olmasına neden olur.

Bu nedenle yer değiştirme fonksiyonları aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \ , \ \upsilon = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \tag{5.6}$$




**Şekil 5.1 :** Dikdörtgen elemanın geometrisi $\xi = x/\alpha$ , $\eta = y/b$ [16].

$\alpha_1$'den $\alpha_8$'e kadar olan katsayılar dört düğüm noktasında denklem (5.6)'da değerlendirilerek ve elde edilen denklemleri çözerek dört düğümdeki yer değiştirme bileşenleri cinsinden ifade edilebilir. Ancak, böyle bir durumda yer değiştirme fonksiyonlarını kontrollu bir şekilde yazmak daha kolaydır.

$$u = \sum_{j=1}^{4} N_j u_j \ , \qquad \upsilon = \sum_{j=1}^{4} N_j \upsilon_j \tag{5.7}$$

$N_j$ fonksiyonunun, j düğümünde bir birim değerine ve diğer üç düğümünde sıfır değerine sahip olması gerekir. İfadelerin iki doğrusal fonksiyon olarak yani diğer bir deyişle $(\beta_1 + \beta_2 x)$ ve $(\beta_3 + \beta_4 x)$'nin bir ürünü şeklinde yazılabileceğine dikkat çekerek, dört fonksiyonun, $N_j$, doğrusal yer değiştirmenin ürünleri alınarak elde edilebileceği kolayca görülebilir. Rotların eksenel titreşimleri için türetilen yer değiştirme fonksiyonları:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta),\ N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta),\ N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta),\ N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \quad (5.8)$$

j düğümünün boyutsal olmayan koordinatlarını ( $\xi_j$ , $\eta_j$ ) ile belirterek, $N_j$ fonksiyonu aşağıdaki formda yazılabilir:

$$N_j = \frac{1}{4}(1+\xi_j\xi)(1+\eta_j\eta) \quad (5.9)$$

Doğrusal üçgen gibi, yer değiştirmeler elemanın her iki yanı boyunca doğrusal olarak değişir ve yan tarafın köşelerindeki düğümlerdeki yer değiştirmelerin değerleri ile benzersiz bir şekilde belirlenir. Bu nedenle, yer değiştirmeler elemanlar arasında sürekliliğe sahip olacaktır.

Denklem (5.7) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\{u\}_e^T = [u_1 \quad \upsilon_1 \quad u_2 \quad \upsilon_2 \quad u_3 \quad \upsilon_3 \quad u_4 \quad \upsilon_4] \quad (5.10)$$

ve

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Matris için tipik bir eleman:

$$phab\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} N_i N_j d\xi d\eta = \frac{phab}{16}\int_{-1}^{+1}(1+\xi_i\xi)(1+\xi_j\xi)d\xi \int_{-1}^{+1}(1+\eta_i\eta)(1+\eta_j\eta)d\eta \quad (5.12)$$

Birinci integral aşağıdaki değere sahiptir:

$$\int_{-1}^{+1}(1+\xi_i\xi)(1+\xi_j\xi)d\xi = 2(1+\frac{1}{3}\xi_i\xi_j) \quad (5.13)$$

İkinci integral de benzer şekilde değerlendirilebilir. Bu sonuçları kullanarak aşağıdaki atalet matrisi elde edilir:

$$[\boldsymbol{m}]_e = \frac{\boldsymbol{phab}}{9}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

Gerinim matrisi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$[\boldsymbol{B}] = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -\frac{(1-\eta)}{\alpha} & 0 & \frac{(1-\eta)}{\alpha} & 0 \\ 0 & -\frac{(1-\xi)}{b} & 0 & -\frac{(1+\xi)}{b} \\ -\frac{(1-\xi)}{b} & -\frac{(1-\eta)}{\alpha} & -\frac{(1+\xi)}{b} & \frac{(1-\eta)}{\alpha} \\ \frac{(1+\eta)}{\alpha} & 0 & -\frac{(1+\eta)}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{(1+\xi)}{b} & 0 & \frac{(1-\xi)}{b} \\ \frac{(1+\xi)}{b} & \frac{(1+\eta)}{\alpha} & \frac{(1-\xi)}{b} & -\frac{(1+\eta)}{\alpha} \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

Eleman rijitlik matrisi doğal koordinatlarda aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$[\boldsymbol{k}]_e = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \boldsymbol{abh}[\boldsymbol{B}]^T[\boldsymbol{D}][\boldsymbol{B}]\boldsymbol{d\xi d\eta} \tag{5.16}$$

Gauss-Legendre entegrasyonu kullanılarak -1 ile +1 arasındaki bir boyuttaki bir fonksiyon entegre edilebilir. Bu yöntem aşağıdaki gibi kare bölgelere genişletilebilir. İntegral aşağıdaki gibi düşünülebilir:

$$\boldsymbol{I} = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \boldsymbol{g}(\xi,\eta)\boldsymbol{d\xi d\eta} \tag{5.17}$$

Önce $\eta$'yi sabit tutarak $\int_{-1}^{+1} \boldsymbol{g}(\xi,\eta)\boldsymbol{d\xi}$ ifadesini hesaplarsak,

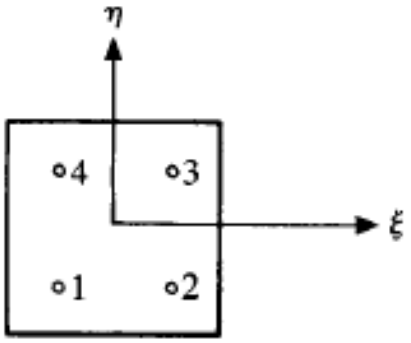
$$\int_{-1}^{+1} \boldsymbol{g}(\xi,\eta)\boldsymbol{d\xi} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{H}_i \boldsymbol{g}(\xi,\eta) = \boldsymbol{\psi}(\eta) \tag{5.18}$$

burada $H_i$ ağırlık katsayıları, $\xi_i$ örnekleme noktaları ve n örnekleme noktası sayısını belirtir. Daha sonra $\int_{-1}^{+1} \boldsymbol{\psi}(\eta)\boldsymbol{d\eta}$ hesaplanırsa,

$$\int_{-1}^{+1} \boldsymbol{\psi}(\eta)\boldsymbol{d\eta} = \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{H}_j \boldsymbol{\psi}(\eta_j) \tag{5.19}$$

Denklem (5.18), denklem (5.19)'un için yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$I = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} H_i H_j g(\xi_i, \eta_j) \tag{5.20}$$




**Şekil 5.2 :** Kare bir bölgede n = m = 2 için integral noktaları [16].

$\xi$ ve $\eta$ yönlerindeki n ve m integral noktalarının sayısı $\xi$ ve $\eta$'deki $g(\xi,\eta)$ fonksiyonunun derecesine bağlıdır. Örneğin, $\xi$ ve $\eta$, $g(\xi,\eta)$'de kübik ise, o zaman n = m = 2'dir. Bu nedenle, toplam dört integral noktası mevcuttur. Denklem (5.20), entegrasyon noktalarının $\left(\pm 1/3^{1/2}, \pm 1/3^{1/2}\right)$ ve tüm ağırlık katsayılarının 1 olduğunu gösterir. İntegral noktalarının pozisyonları Şekil 5.2'de gösterilmektedir.

Denklem (5.15), denklem (5.16) içine yazılırsa, $\xi$ veya $\eta$ ikinci dereceden olan terimlerin varlığını gösterir. Bu nedenle denklem (5.20)'yi kullanırken n = m = 2 almak gerekecektir. Bununla birlikte, bazı durumlarda, bu prosedür temsili olmayan özelliklere yol açar. Bu durum elemanın $\xi$ yönünde sadece eğilmeyle tutarlı olan düğüm yer değiştirmelerine tabi tutulmasıyla açıklanabilir, dolayısıyla:

$$u_1 = u_3 = u, \qquad u_2 = u_4 = -u$$

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon_3 = \upsilon_4 = 0 \tag{5.21}$$

Bu yer değiştirmeler neticesinde elemanın deformasyonu Şekil 5.3 (a) 'da gösterilmiştir. Gerinimin bileşenleri şu şekilde verilir:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\}_e \tag{5.22}$$

Burada (5.15) ve {u} ile verilen [B], denklem (5.10) ile tanımlanır. (5.21) denklemi (5.22) denkleminin içine yazılırsa gerinim aşağıdaki dağılımını verir:

$$\varepsilon_x = \frac{u}{\alpha}\eta\,, \qquad \varepsilon_y = 0\,, \quad \gamma_{xy} = \frac{u}{b}\xi \tag{5.23}$$

İnce kiriş teorisine göre kesin deformasyon, Şekil 5.3 (b) 'de gösterilmiştir ve karşılık gelen gerinim dağılımı aşağıdaki gibidir:

$$\varepsilon_x = \frac{u}{\alpha}\eta\,, \qquad \varepsilon_y = 0\,, \quad \gamma_{xy} = 0 \tag{5.24}$$




**Şekil 5.3 :** Eğilmeye maruz kalan dikdörtgen eleman: (a) Denklem (5.11) tarafından verilen deformasyon, (b) kesin deformasyon [16].

Bu nedenle eleman, direkt-gerinimi doğru tahmin edebilir. Ancak, $\xi$ = 0 boyunca doğru olan parazitik bir kesme gerinimi vardır. Benzer şekilde, $\eta$-yönünde eğilme göz önüne alındığında, $\eta$ = 0 boyunca doğru olan bir parazitik kesme olduğu gösterilebilir. Genel olarak, eleman $\xi$ = 0, $\eta$ = 0 noktasındaki doğru kesme gerinimini tahmin edecektir. Bu nedenle, denklem (5.15) 'de (0, 0) noktasındaki kesme gerinimi değerlendirilerek bir gelişme elde edilebilir. Bu aşağıdaki gerinimi verir:

$$[\boldsymbol{B}] = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -\frac{(1-\eta)}{a} & 0 & \frac{(1-\eta)}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{(1-\xi)}{b} & 0 & -\frac{(1+\xi)}{b} \\ -\frac{1}{b} & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & \frac{1}{a} \\ \frac{(1+\eta)}{a} & 0 & -\frac{(1+\eta)}{a} & 0 \\ 0 & \frac{(1+\xi)}{b} & 0 & \frac{(1-\xi)}{b} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & -\frac{1}{a} \end{bmatrix} \tag{5.25}$$

Denklem (5.25) kullanılarak denklem (5.16)'daki integral, Şekil 5.2'de gösterildiği gibi (2x2) bir integral noktaları dizisi kullanılarak hesaplanabilir. Bu nedenle rijitlik matrisi şu şekilde verilir:

$$[\boldsymbol{k}]_e = \sum_{j=1}^{4} \boldsymbol{abh}[\boldsymbol{B}(\xi_j,\eta_j)]^T[\boldsymbol{D}][\boldsymbol{B}(\xi_j,\eta_j)] \tag{5.26}$$

burada $(\xi_j,\eta_j)$, j'inci integrasyon noktasının koordinatlarıdır. Bu prosedürün uygulanması, uyumsuz bir elemanla sonuçlanır. Bu durumda, öz değerlerin yukarıdan yakınsamaları gerekmez.

Tek boyutlu elemanlar için gerilimler integral noktalarında daha doğrudur. En iyi konumun tek noktada (0,0) olduğu söylenebilir.

Eşdeğer düğüm kuvvetleri; örneğin, Şekil 5.1'de 2-3 kenarı boyunca birim uzunluk başına $P_x$ dağıtılmış bir yükü varsa, eşdeğer düğüm kuvveti matrisi $P_x$'in sabit olduğunu varsayarsak aşağıdaki gibidir:

$$\{\boldsymbol{f}\}_e = \boldsymbol{bp}_x \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.27}$$

Denklem (5.27), kenardaki her bir düğümdeki toplam kuvvetin yarısının uygulanmasını temsil eder.

### 5.3. Plakaların Eğilme Titreşimi

Uçak, bina ve gemi tabanları, köprü güverteleri ve makinaları çevreleyen yapılar gibi düz plaka yapılar, kendi düzlemlerinde normal dinamik yüklere maruz kalırlar. Bu yüklemelerin sonucu ise eğilme titreşimlerinin oluşması ile sonuçlanır. Bu tür yapılar plaka yapısının plaka eğilme elemanları olarak adlandırılan iki boyutlu sonlu elemanların bir birleşimine bölünmesiyle analiz edilebilir. Bu elemanlar, üçgen, dikdörtgen ya da farklı dörtgen şekillerinde olabilir.

İnce plaka eğilme elemanları için enerji denklemleri aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$T_e = \frac{1}{2}\int_A \rho h \dot{w}^2 dA \tag{5.28}$$

$$U_e = \frac{1}{2}\int_A \frac{h^3}{12}\{x\}^T[D]\{x\}dA \tag{5.29}$$

$$\{x\} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \dfrac{2\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \tag{5.30}$$

$$\delta w_e = \int_A P_z \delta w dA \tag{5.31}$$

Bu ifadelerde ortaya çıkan en yüksek türev ikinci derecedir. Bu nedenle yakınsama olabilmesi için, w ve ilk $\frac{\partial w}{\partial x}$ ve $\frac{\partial w}{\partial y}$ türevlerinin elemanlar arasında sürekli olmasını sağlamak gerekmektedir. Dolayısıyla bu üç değer, her bir düğümde serbestlik derecesi olarak alınır. Ayrıca, en az ikinci derece tam polinomlar kullanılmalıdır. Elemanın şekli ne olursa olsun, yer değiştirme fonksiyonunun varsayılan şekli:

$$w = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + \text{Yüksek dereceli terimler} \tag{5.32}$$

## 5.4. İnce Dikdörtgen Eleman

Şekil 5.4, her köşede bir tane olmak üzere dört düğüm noktası olan dikdörtgen bir elemanı göstermektedir. Plakanın düzlemine normal yer değiştirme bileşeni, w ve $\theta_x = \partial w / \partial y$ ve $\theta_y = -\partial w / \partial x$ dönmeleri olmak üzere her düğümde üç serbestlik derecesi vardır. $(\xi, \eta)$ koordinatlarına göre aşağıdaki denklem yazılabilir:

$$\theta_x = \frac{1}{b}\frac{\partial w}{\partial \eta}, \qquad \theta_y = -\frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial \xi} \tag{5.33}$$

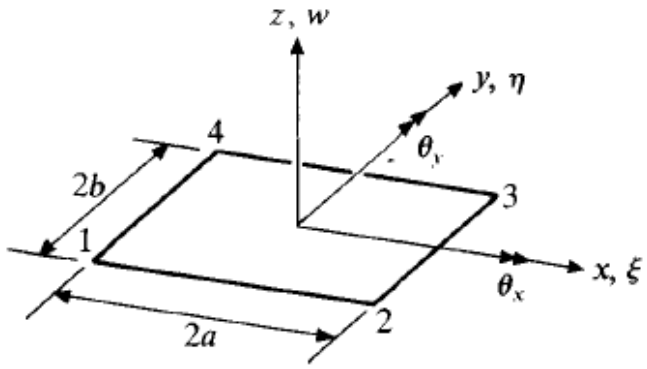
Eleman on iki serbestlik derecesine sahip olduğundan dolayı, yer değiştirme fonksiyonu on iki terime sahip bir polinom ile temsil edilebilir, dolayısıyla:

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi^2 + \alpha_5 \xi\eta + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^3 + \alpha_8 \xi^2\eta + \alpha_9 \xi\eta^2 + \alpha_{10}\eta^3 + \alpha_{11}\xi^3\eta + \alpha_{12}\xi\eta^3 \tag{5.34}$$

Bu fonksiyonun, Pascal üçgenine simetrik olarak yerleştirilmiş iki tane dördüncü dereceden olan $\xi^3\eta$ ve $\xi\eta^3$ terimlernin eklendiği tam bir kübik olduğunu görürüz.

Denklem (5.34) aşağıdaki matris formunda yazılabilir:

$$w = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \quad \xi^3 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \quad \eta^3 \quad \xi^3\eta \quad \xi\eta^3]\{\alpha\} = [P(\xi,\eta)]\{\alpha\} \tag{5.35}$$




**Şekil 5.4 :** Dikdörtgen bir elemanın geometrisi. $\xi = x/a$ , $\eta = y/b$ [16].

Burada:

$$\{\alpha\}^T = [\alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \ldots \quad \alpha_{12}] \tag{5.36}$$

Denklem (5.35)'in türevi alınırsa:

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 2\xi \quad \eta \quad 0 \quad 3\xi^2 \quad 2\xi\eta \quad \eta^2 \quad 0 \quad 3\xi^2\eta \quad \eta^3]\{\alpha\} \tag{5.37}$$

ve

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \xi \quad 2\eta \quad 0 \quad \xi^2 \quad 2\xi\eta \quad 3\eta^2 \quad \xi^3 \quad 3\xi\eta^2]\{\alpha\} \tag{5.38}$$

$\xi = \pm 1$, $\eta = \pm 1$'de denklem (5.35), (5.37) ve (5.38) hesaplanırsa aşağıdaki denklemi verir:

$$\{\bar{w}\}_e = [A]_e\{\alpha\} \tag{5.39}$$

Ayrıca

$$\{\bar{w}\}_e^T = [w_1 \quad b\theta_{x1} \quad \alpha\theta_{y1} \quad \ldots \quad w_4 \quad b\theta_{x4} \quad \alpha\theta_{y4}] \tag{5.40}$$

ve

$$[\boldsymbol{A}]_e = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -3 & -2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 & 0 & -3 & -2 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -2 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \tag{5.41}$$

{a} için (5.39) denklemi çözülürse:

$$\{\boldsymbol{\alpha}\} = [\boldsymbol{A}]_e^{-1}\{\bar{\boldsymbol{w}}\}_e \tag{5.42}$$

$$[\boldsymbol{A}]_e^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & -1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & -3 & -1 & -1 & 3 & -1 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & -4 & -1 & -1 & 4 & -1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.43}$$

Denklem (5.42), denklem (5.35)'in içine yazılırsa:

$$\boldsymbol{w} = [\boldsymbol{N}_1(\xi,\eta) \quad \boldsymbol{N}_2(\xi,\eta) \quad \boldsymbol{N}_3(\xi,\eta) \quad \boldsymbol{N}_4(\xi,\eta)]\{\boldsymbol{w}\}_e = [\boldsymbol{N}(\xi,\eta)]\{\boldsymbol{w}\}_e \tag{5.44}$$

Burada

$$\{\boldsymbol{w}\}_e^T = [\boldsymbol{w}_1 \quad \boldsymbol{\theta}_{x1} \quad \boldsymbol{\theta}_{y1} \quad \ldots \quad \boldsymbol{w}_4 \quad \boldsymbol{\theta}_{x4} \quad \boldsymbol{\theta}_{y4}] \tag{5.45}$$

ve

$$\boldsymbol{N}_j^T(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{8}(1+\xi_j\xi)(1+\eta_j\eta)(2+\xi_j\xi+\eta_j\eta-\xi^2-\eta^2) \\ \left(\boldsymbol{b}/8\right)(1+\xi_j\xi)(\eta_j+\eta)(\eta^2-1) \\ \left(\boldsymbol{a}/8\right)(\xi_j+\xi)(\xi^2-1)(1+\eta_j\eta) \end{bmatrix} \tag{5.46}$$

$(\xi_j,\eta_j)$, j düğümünün koordinatlarıdır.

$$N_1^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad N_2^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1-\eta)(2-\eta-\eta^2) \\ \left(\frac{b}{4}\right)(-1+\eta)(\eta^2-1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

(5.47)

$$N_3^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1+\eta)(2+\eta-\eta^2) \\ \frac{b}{4}(1+\eta)(\eta^2-1) \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad N_4^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bu, yer değiştirmenin ve dolayısıyla $\theta_x$ dönmesinin, düğüm 2 ve 3'deki w ve $\theta_x$ değerleri tarafından benzersiz bir şekilde belirlendiğini gösterir. Bu nedenle, eleman düğüm 2 ve 3'de başka bir dikdörtgen elemana bağlanırsa, w ve $\theta_x$ ortak kenar boyunca sürekli olacaktır. $\theta_y$ aşağıdaki gibi verilir:

$$\theta_y = -\frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial \xi} = -\frac{1}{a}\left(\frac{\partial N_1}{\partial \xi} .... \frac{\partial N_4}{\partial \xi}\right)\{w\}_e \tag{5.48}$$

Denklem (5.46) denklem (5.48)'in içine yazılırsa ve $\xi = +1$ için hesaplanırsa:

$$\frac{\partial N_j^T}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8}\xi_j\eta(1+\eta_j\eta)(\eta_j-\eta) \\ \left(\frac{b}{8}\right)\xi_j(\eta_j+\eta)(\eta^2-1) \\ -\left(\frac{a}{8}\right)(2+2\xi_j)(1+\eta_j\eta) \end{bmatrix} \tag{5.49}$$

j=1 ile 4 için denklem (5.49) hesaplanırsa:

$$\frac{\partial N_1^T}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8}\eta(1-\eta^2) \\ -\left(\frac{b}{8}\right)(-1+\eta)(\eta^2-1) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.50a}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{N}_2^T}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8}\boldsymbol{\eta}(1-\boldsymbol{\eta}^2) \\ \left(\frac{\boldsymbol{b}}{8}\right)(-1+\boldsymbol{\eta})(\boldsymbol{\eta}^2-1) \\ \left(\frac{\boldsymbol{a}}{2}\right)(1-\boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix} \tag{5.50b}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{N}_3^T}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8}\boldsymbol{\eta}(1-\boldsymbol{\eta}^2) \\ \left(\frac{\boldsymbol{b}}{8}\right)(1+\boldsymbol{\eta})(\boldsymbol{\eta}^2-1) \\ \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{2}\right)(1+\boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix} \tag{5.50c}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{N}_4^T}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8}\boldsymbol{\eta}(1-\boldsymbol{\eta}^2) \\ -\left(\frac{\boldsymbol{b}}{8}\right)(1+\boldsymbol{\eta})(\boldsymbol{\eta}^2-1) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.50d}$$

$\theta_y$'nin elemanlar arasında sürekli olması için, düğüm 2 ve 3'deki değeri ile benzersiz bir şekilde belirlenmelidir. Denklemler (5.48) ve (5.50)'ye bakarsak bu durumda $\theta_y$'in 1, 2, 3. ve 4. düğümlerindeki w ve $\theta_x$ değerlerinin yanı sıra 2. ve 3. düğümlerindeki $\theta_y$ değerleriyle belirlendiğini gösterir. Bu nedenle eleman, uygun olmayan bir elemandır. Buna rağmen eleman kullanılır ve bu süreksizlik hesaplamalarda göz önünde bulundurulur.

(5.44) denklemi (5.28) denkleminin içine yazılırsa,

$$\boldsymbol{T_e} = \frac{1}{2}\{\dot{\boldsymbol{w}}\}_e^T[\boldsymbol{m}]_e\{\dot{\boldsymbol{w}}\}_e \tag{5.51}$$

Burada

$$[\boldsymbol{m}]_e = \int_{A_e} \boldsymbol{\rho h}[N]^T[N]\boldsymbol{dA} = \boldsymbol{\rho hab}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}[N(\xi,\eta)]^T[N(\xi,\eta)]\boldsymbol{d\xi d\eta} \tag{5.52}$$

eleman atalet matrisidir. (5.46) denklemine $N_j(\xi,\eta)$ fonksiyonları yazılırsa ve integrali alınırsa:

$$[\boldsymbol{m}]_e = \frac{\boldsymbol{phab}}{6300}\begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_{11} & \boldsymbol{m}_{21}{}^T \\ \boldsymbol{m}_{21} & \boldsymbol{m}_{22} \end{bmatrix} \tag{5.53}$$

$$\boldsymbol{m}_{11}=\begin{bmatrix} 3454 & & & & & \\ 922\boldsymbol{b} & 320\boldsymbol{b}^2 & & & \boldsymbol{Sym} & \\ -922\boldsymbol{a} & -252\boldsymbol{ab} & 320\boldsymbol{a}^2 & & & \\ 1226 & 398\boldsymbol{b} & -548\boldsymbol{a} & 3454 & & \\ 398\boldsymbol{b} & 160\boldsymbol{b}^2 & -168\boldsymbol{ab} & 922\boldsymbol{b} & 320\boldsymbol{b}^2 & \\ 548\boldsymbol{a} & 168\boldsymbol{ab} & -240\boldsymbol{a}^2 & 922\boldsymbol{a} & 252\boldsymbol{ab} & 320\boldsymbol{a}^2 \end{bmatrix} \tag{5.54}$$

$$\boldsymbol{m}_{21}=\begin{bmatrix} 394 & 232\boldsymbol{b} & -232\boldsymbol{a} & 1226 & 548\boldsymbol{b} & 398\boldsymbol{a} \\ -232\boldsymbol{b} & -120\boldsymbol{b}^2 & 112\boldsymbol{ab} & -548\boldsymbol{b} & -240\boldsymbol{b}^2 & -168\boldsymbol{ab} \\ 232\boldsymbol{a} & 112\boldsymbol{ab} & -120\boldsymbol{a}^2 & 398\boldsymbol{a} & 168\boldsymbol{ab} & 160\boldsymbol{a}^2 \\ 1226 & 548\boldsymbol{b} & -398\boldsymbol{a} & 394 & 232\boldsymbol{b} & 232\boldsymbol{a} \\ -548\boldsymbol{b} & -240\boldsymbol{b}^2 & 168\boldsymbol{ab} & -232\boldsymbol{b} & -120\boldsymbol{b}^2 & -112\boldsymbol{ab} \\ -398\boldsymbol{a} & -168\boldsymbol{ab} & 160\boldsymbol{a}^2 & -232\boldsymbol{b} & -112\boldsymbol{ab} & -120\boldsymbol{a}^2 \end{bmatrix} \tag{5.55}$$

ve

$$\boldsymbol{m}_{22}=\begin{bmatrix} 3454 & & & & & \\ -922\boldsymbol{b} & 320\boldsymbol{b}^2 & & & \boldsymbol{Sym} & \\ 922\boldsymbol{a} & -252\boldsymbol{ab} & 320\boldsymbol{a}^2 & & & \\ 1226 & -398\boldsymbol{b} & 548\boldsymbol{a} & 3454 & & \\ -398\boldsymbol{b} & 160\boldsymbol{b}^2 & -168\boldsymbol{ab} & -922\boldsymbol{b} & 320\boldsymbol{b}^2 & \\ -548\boldsymbol{a} & 168\boldsymbol{ab} & -240\boldsymbol{a}^2 & -922\boldsymbol{a} & 252\boldsymbol{ab} & 320\boldsymbol{a}^2 \end{bmatrix} \tag{5.56}$$

Bu sonucu elde ederken, integrali aldıktan sonra w için denklem (5.35) ifadesini kullanmak ve {α} ifadesini denkleme yazmak daha kolaydır . Tipik bir integral aşağıdaki formda yazılır:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{d\xi d\eta}=\begin{cases} 0 & \boldsymbol{m}\ \ \boldsymbol{veya}\ \ \boldsymbol{n}\ \ \boldsymbol{tek} \\ \dfrac{4}{(\boldsymbol{m}+1)(\boldsymbol{n}+1)} & \boldsymbol{m}\ \ \boldsymbol{veya}\ \ \boldsymbol{n}\ \ \boldsymbol{\text{çift}} \end{cases} \tag{5.57}$$

$$\boldsymbol{U}_e=\frac{1}{2}\{\boldsymbol{w}\}_e^T[\boldsymbol{k}]_e\{\boldsymbol{w}\}_e \tag{5.58}$$

Burada

$$[\boldsymbol{k}]_e=\int_{A_e}\frac{\boldsymbol{h}^3}{12}[\boldsymbol{B}]^T[\boldsymbol{D}][\boldsymbol{B}]\boldsymbol{dA} \tag{5.59}$$

eleman rijitlik matrisidir ve

$$[\boldsymbol{B}]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{x}^2}\\ \dfrac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{y}^2}\\ 2\dfrac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{x}\partial \boldsymbol{y}}\end{bmatrix}[\boldsymbol{N}]=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\boldsymbol{a}^2} & \dfrac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\xi}^2}\\ \dfrac{1}{\boldsymbol{b}^2} & \dfrac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\eta}^2}\\ \dfrac{2}{\boldsymbol{ab}} & \dfrac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\xi}\partial \boldsymbol{\eta}}\end{bmatrix}[\boldsymbol{N}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})] \tag{5.60}$$

$\boldsymbol{N}_j(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ fonksiyonunu (5.46) denkleminin içine yazılırsa ve integrali alınırsa, izotropik durum için aşağıdaki denklemleri verir:

$$[\boldsymbol{k}]_e=\frac{\boldsymbol{Eh}^3}{48(1-\boldsymbol{\nu}^2)\boldsymbol{ab}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{k}_{11} & & & \\ \boldsymbol{k}_{21} & \boldsymbol{k}_{22} & \boldsymbol{Sym} & \\ \boldsymbol{k}_{31} & \boldsymbol{k}_{32} & \boldsymbol{k}_{33} & \\ \boldsymbol{k}_{41} & \boldsymbol{k}_{42} & \boldsymbol{k}_{43} & \boldsymbol{k}_{44}\end{bmatrix} \tag{5.61}$$

Burada,

$$\boldsymbol{k}_{11}=\begin{bmatrix}\left\{4(\boldsymbol{\beta}^2+\boldsymbol{\alpha}^2)+\frac{2}{5}(7-2\boldsymbol{\nu})\right\} & & \boldsymbol{Sym}\\ 2\left\{2\boldsymbol{\alpha}^2+\frac{1}{5}(1+4\boldsymbol{\nu})\right\}\boldsymbol{b} & 4\left\{\frac{4}{3}\boldsymbol{\alpha}^2+\frac{4}{15}(1-\boldsymbol{\nu})\right\}\boldsymbol{b}^2 & \\ 2\left\{-2\boldsymbol{\beta}^2-\frac{1}{5}(1+4\boldsymbol{\nu})\right\}\boldsymbol{\alpha} & -4\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{b} & 4\left\{\frac{4}{3}\boldsymbol{\beta}^2+\frac{4}{15}(1-\boldsymbol{\nu})\right\}\boldsymbol{\alpha}^2\end{bmatrix} \tag{5.62}$$

$$\boldsymbol{k}_{21}=\begin{bmatrix}-\left\{2(2\boldsymbol{\beta}^2-\boldsymbol{\alpha}^2)+\frac{2}{5}(7-2\boldsymbol{\nu})\right\} & 2\left\{\boldsymbol{\alpha}^2-\frac{1}{5}(1+4\boldsymbol{\nu})\right\}\boldsymbol{b} & 2\left\{2\boldsymbol{\beta}^2+\frac{1}{5}(1-\boldsymbol{\nu})\right\}\boldsymbol{\alpha}\\ 2\left\{\boldsymbol{\alpha}^2-\frac{1}{5}(1+4\boldsymbol{\nu})\right\}\boldsymbol{b} & 4\left\{\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}^2-\frac{4}{15}(1-\boldsymbol{\nu})\right\}\boldsymbol{b}^2 & 0\\ -2\left\{2\boldsymbol{\beta}^2+\frac{1}{5}(1-\boldsymbol{\nu})\right\}\boldsymbol{\alpha} & 0 & 4\left\{\frac{2}{3}\boldsymbol{\beta}^2-\frac{1}{15}(1-\boldsymbol{\nu})\right\}\boldsymbol{\alpha}^2\end{bmatrix} \tag{5.63}$$

$$\boldsymbol{k}_{31}=\begin{bmatrix}-\left\{2(\boldsymbol{\beta}^2+\boldsymbol{\alpha}^2)-\frac{2}{5}(7-2\boldsymbol{\nu})\right\} & 2\left\{-\boldsymbol{\alpha}^2+\frac{1}{5}(1-\boldsymbol{\nu})\right\}\boldsymbol{b} & 2\left\{\boldsymbol{\beta}^2-\frac{1}{5}(1-\boldsymbol{\nu})\right\}\boldsymbol{\alpha}\\ 2\left\{\boldsymbol{\alpha}^2-\frac{1}{5}(1-\boldsymbol{\nu})\right\}\boldsymbol{b} & 4\left\{\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}^2+\frac{1}{15}(1-\boldsymbol{\nu})\right\}\boldsymbol{b}^2 & 0\\ 2\left\{-\boldsymbol{\beta}^2+\frac{1}{5}(1-\boldsymbol{\nu})\right\}\boldsymbol{\alpha} & 0 & 4\left\{\frac{1}{3}\boldsymbol{\beta}^2+\frac{1}{15}(1-\boldsymbol{\nu})\right\}\boldsymbol{\alpha}^2\end{bmatrix} \tag{5.64}$$

$$\boldsymbol{k}_{41}=\begin{bmatrix}\left\{2(\boldsymbol{\beta}^2-2\boldsymbol{\alpha}^2)-\frac{2}{5}(7-2\boldsymbol{\nu})\right\} & 2\left\{-2\boldsymbol{\alpha}^2-\frac{1}{5}(1-\boldsymbol{\nu})\right\}\boldsymbol{b} & 2\left\{-\boldsymbol{\beta}^2+\frac{1}{5}(1+4\boldsymbol{\nu})\right\}\boldsymbol{\alpha}\\ 2\left\{2\boldsymbol{\alpha}^2+\frac{1}{5}(1-\boldsymbol{\nu})\right\}\boldsymbol{b} & 4\left\{\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}^2-\frac{1}{15}(1-\boldsymbol{\nu})\right\}\boldsymbol{b}^2 & 0\\ 2\left\{-\boldsymbol{\beta}^2+\frac{1}{5}(1+4\boldsymbol{\nu})\right\}\boldsymbol{\alpha} & 0 & 4\left\{\frac{2}{3}\boldsymbol{\beta}^2-\frac{4}{15}(1-\boldsymbol{\nu})\right\}\boldsymbol{\alpha}^2\end{bmatrix} \tag{5.65}$$

ve

$$\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}},\ \boldsymbol{\beta}=\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} \tag{5.66}$$

Aşağıdaki matrisleri tanımlamak gerekir ise:

$$\boldsymbol{I}_1=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{I}_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{I}_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \tag{5.67}$$

Denklem (5.61) 'in geri kalan alt matrisleri:

$$\boldsymbol{k}_{22}=\boldsymbol{I}_3^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{k}_{11}\boldsymbol{I}_3$$

$$\boldsymbol{k}_{32}=\boldsymbol{I}_3^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{k}_{41}\boldsymbol{I}_3\ ,\quad \boldsymbol{k}_{33}=\boldsymbol{I}_1^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{k}_{11}\boldsymbol{I}_1 \tag{5.68}$$

$$\boldsymbol{k}_{42}=\boldsymbol{I}_3^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{k}_{31}\boldsymbol{I}_3\ ,\quad \boldsymbol{k}_{43}=\boldsymbol{I}_1^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{k}_{21}\boldsymbol{I}_1\ ,\quad \boldsymbol{k}_{44}=\boldsymbol{I}_2^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{k}_{11}\boldsymbol{I}_2$$

Bu prosedür, anizotropik malzeme özelliklerine sahip bir dizi plaka elemanı için genelleştirilmiştir.

$$\boldsymbol{\delta W}_e=\{\boldsymbol{\delta W}\}_e^{\boldsymbol{T}}\{\boldsymbol{f}\}_e \tag{5.69}$$

Burada

$$\{\boldsymbol{f}\}_e=\int_A[\boldsymbol{N}]^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{p}_z\boldsymbol{dA} \tag{5.70}$$

Denklem (5.70) eleman eş değer düğüm kuvvet matrisidir.

$P_z$ sabit kabul edilir ise, [N] matrisi denklem (5.46)'nın içine yazılırsa ve integrali alınırsa:

$$\{\boldsymbol{f}\}_e=\boldsymbol{p}_z\frac{\boldsymbol{ab}}{3}\begin{bmatrix}3\\ \boldsymbol{b}\\ -\boldsymbol{a}\\ 3\\ \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{a}\\ 3\\ -\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{a}\\ 3\\ -\boldsymbol{b}\\ -\boldsymbol{a}\end{bmatrix} \tag{5.71}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \{\sigma\} = [D][\varepsilon] \tag{5.72}$$

Gerinim değerleri denklem (3.12)'nin içine yazılırsa,

$$\{\sigma\} = -z[D]\{X\} \tag{5.73}$$

w değerini denklem (5.44)'de kullanırsak:

$$\{\sigma\} = -z[D][B]\{w\}_e \tag{5.74}$$

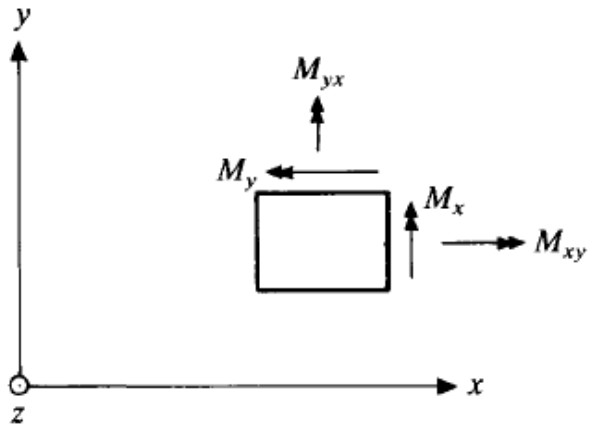
burada [B] denklem (5.60)'da ve $\{w\}_e$'de denklem (5.45) 'de tanımlanmıştır. [B], x ve y'nin (veya $\xi$ ve $\eta$) bir fonksiyonu olduğundan, denklem (5.74) düğüm yer değiştirmeleri açısından (x, y, z) düğümündeki gerilmeleri verir.

$M_x$ ve $M_y$ eğilme momentleri ve birim uzunluk başına $M_{xy}$ ve $M_{yx}$ burulma momentleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y z dz$$

$$M_{xy} = -\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz, \quad M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yx} z dz \tag{5.75}$$

$\tau_{yx} = \tau_{xy}$ olduğundan dolayı $M_{yx} = -M_{xy}$ denilebilir. Bu momentlerin yönleri Şekil 5.5'de verilmiştir.




**Şekil 5.5 :** Eğilme ve burulma momentleri yönlerinin gösterimi [16].

Denklem (5.74)'ün denklem (5.75)'in içine yazılması ile aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_x \\ \boldsymbol{M}_y \\ \boldsymbol{M}_{xy} \end{bmatrix} = -\frac{\boldsymbol{h}^3}{12}[\boldsymbol{I}]_3[\boldsymbol{D}][\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{w}\}_e \tag{5.76}$$

$[\boldsymbol{I}]_3$ terimi denklem (5.67)'de açıklanmıştır. Eğilme momentleri ve gerilmeler, (2 x 2) bir integrasyon noktasında daha doğru sonuçlar verecektir [16].

# 6. PLAKA TEORİLERİ VE FORMÜLASYONLARI

## 6.1. Plakaların Sınıflandırılması

### 6.1.1. Plakaların Sınır Koşullarına Göre Sınıflandırılması

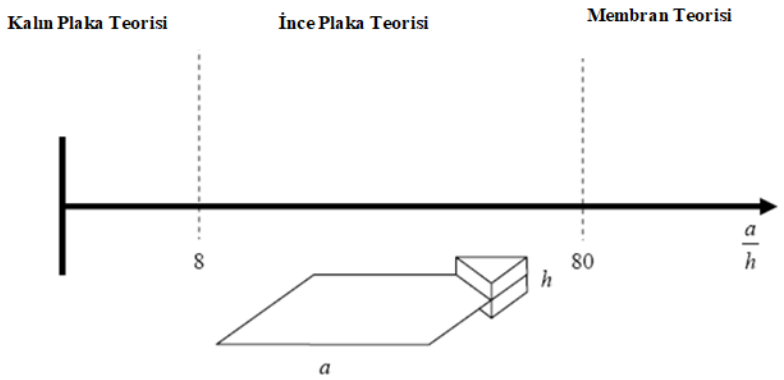
- Sabit kenarlı
- Basit mesnetlenmiş kenarlı
- Serbest kenarlı

### 6.1.2. Plakaların Şekillerine Göre Sınıflandırılması

- Dikdörtgen Plakalar
- Yuvarlak plakalar
- Eliptik Plakalar
- Dairesel şekilli plakalar
- Üçgen Plakalar
- Yamuk Plakalar

### 6.1.3. Kalınlıklarına Göre Plakaların Sınıflandırılması

Bir plakanın eğilmesini etkileyen özelliklerden biri, bir kenarın uzunluğu ile malzemenin kalınlığı arasındaki orandır. Bu oranlara dayanarak şekilde gösterildiği gibi aşağıdaki sınıflandırmalar tanımlanabilir:




**Şekil 6.1 :** Kalın levha, ince levha ve membran teorisini ayıran ayırt edici sınırlar.

Bir kenarın uzunluğu ile kalınlık arasındaki oran sekizden azsa, bir plaka kalın olarak kabul edilir. Benzer şekilde, oran sekiz ile seksen arasındaysa, ince plaka olarak kabul edilir ve bu oran 80'in üzerine çıkarsa, bir membran olarak kabul edilecektir. Bu farklı plaka tiplerinin tümü, karşılık gelen plaka teorisinin temel varsayımları ile karakterize edilir. Varsayımlar hakkında kısa bir açıklama yapmak gerekirse:

Kalın plaka teorisi plaka problemini üç boyutlu bir elastisite problemi olarak görmektedir. Sonuç olarak, çözüm yapılırken gerilme analizi probleme daha fazla dahil olur.

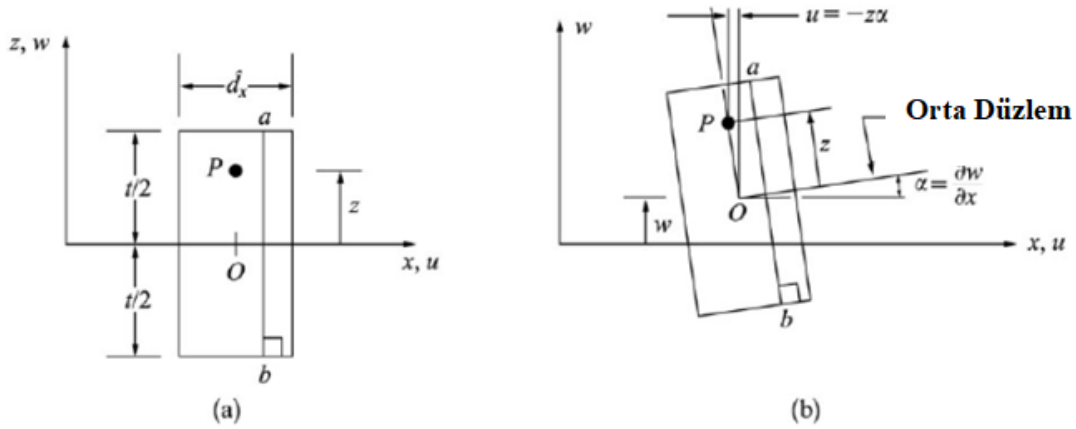
İnce plaka teorisinde bir plakanın yer değiştirmesi kalınlığına oranla küçükse Kirchhoff'un ince plaka teorisinin varsayımları kullanılabilir.

Membran teorisinde ise bir plakanın gerçek bir membran olarak kabul edilebilmesi için aşağıdaki koşullar yerine getirilmelidir:

- Sınıırlarda enine kesme kuvvetleri ve momentler yoktur. Sınırlara uygulanan yükler, orta yüzeye teğet olan düzlemlerde olmalıdır.
- Kenarlardaki normal yer değiştirmeler ve dönmeler sınırlandırılmamıştır. Bu kenarlar normalin orta yüzeyine doğru serbestçe yer değiştirebilir.
- Bir membranın düzgün değişen, sürekli bir yüzeyi olmalıdır.

### 6.2. Kirchhoff Plaka Teorisi (KLPT)

Klasik Kirchhoff'un plaka eğilme teorisi için temel varsayımlar, Euler-Bernoulli kiriş teorisi için olanlara çok benzemektedir. Aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi plakadan x eksenine dik düzlemler ile kesilmiş diferansiyel dilimi göz önünde bulunduralım: Şekil 6.2 bir plakanın diferansiyel dilim kesimi yani q yüklemesi altında, plakanın z yönünde yanal veya yukarı doğru deforme olmasına neden olur. Ayrıca, P noktasının w sapmasının sadece x ve y'nin bir fonksiyonu olduğu varsayılır; yani w = w (x, y)'dir ve plaka z yönünde uzama göstermez. Yüklemeden önce plaka yüzeyine dik olarak çizilen çizgi bağlantı noktası a ve b, yüklendikten sonra yüzeye dik kalmaktadır. Bu koşullar Kirchhoff varsayımlarıyla tutarlıdır:

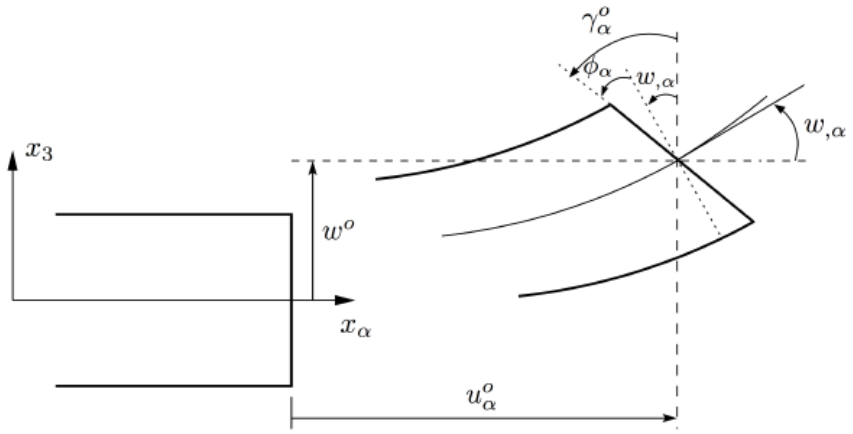



**Şekil 6.2 :** Bir plakanın diferansiyel dilim kesimi.

- Normaller normal kalır. Bu durum, enine kesme geriniminin $\gamma_{yz} = 0$ ve $\gamma_{xz} = 0$ olduğunu gösterir. Ancak $\gamma_{xy}$ sıfıra eşit değildir. Plakanın düzlemindeki dik açılar yüklendikten sonra dik açılar olarak kalmayabilir. Plaka düzlemde burkulabilir.
- Kalınlık değişiklikleri ihmal edilebilir ve normaller uzamaya mağruz kalmayabilir. Bu, $\varepsilon_z = 0$ anlamına gelir.
- Normal gerilim $\sigma_z$, gerilim-gerinim denklemlerinde düzlem içi $\varepsilon_x$ ve $\varepsilon_y$ gerinimleri üzerinde hiçbir etkiye sahip değildir ve önemsiz olarak kabul edilir.
- Plaka başlangıçta düzdür. Bu nedenle, orta yüzeydeki x ve y yönlerindeki düzlem içi sapmaların, t = 0 anında sıfır olduğu varsayılır; u (x, y, 0) = 0 ve v (x, y, 0) = 0.
- Plakanın malzemesi elastik, homojen ve izotropiktir. Bu varsayımlar, üç boyutlu bir plaka probleminin iki boyutlu bir probleme indirgenmesine olanak sağlamaktadır. Sonuç olarak, ana plaka denklemi kısa ve düz bir şekilde türetilebilmektedir.

### 6.3. Reissner-Mindlin Klasik Modeli (RMPT)

Enine kesmeyi tanıtmak için, kinematik varsayım yapılır [31], bu sayede kesit düz kalır, ancak deforme olmuş konfigürasyondaki orta bölüm için artık normal değildir Şekil 6.3.




**Şekil 6.3 :** Reissner-Mindlin Kinematiği.

Reissner-Mindlin plakasının yer değiştirme alanı aşağıdaki gibi yazılmıştır:

$$u_\alpha(x_1, x_2, z) = u^0{}_\alpha(x_1, x_2) + z\emptyset_\alpha(x_1, x_2),\ \alpha = 1; 2$$

$$u_3(x_1, x_2, z) = \omega(x_1, x_2) \qquad (6.1)$$

Burada;

$u^0{}_\alpha$, membranın yön değiştirmesi

$\omega$ plakanın sapması

$\emptyset_\alpha$ kesitin $x_\alpha$ ekseni etrafındaki dönüşü

Bu nedenle, enine kesme gerinimi sıfır değildir. $u_3$, z'de sabittir bu nedenle $\varepsilon_{13}$ ve $\varepsilon_{23}$ z'de aynı şekilde sabittir ve $\varepsilon_{33} = 0$'dır. Bu nedenle, $\sigma_{13}$ ve $\sigma_{23}$ tabakaya göre sabittir, bu kötü bir yaklaşımdır. Aslında $\sigma_{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ olarak tabaka tarafında düzeltilirse, $\sigma_{\alpha 3}$ denge denklemlerine göre ikinci derecede olmalıdır.

Ek olarak, $\varepsilon_{33} = 0$ modelde yapılan klasik plaka hipotezi ile uyumsuzdur, yani $\sigma_{33} = 0$'dır. Bütün bunlar, L = h incelik oranı azaldığında veya çok katmanlı (sandviçlerde) malzeme özelliklerinin önemli gradyanları olduğunda, modelin enine kesme davranışını kötü bir şekilde tahmin ettiği anlamına gelir. Böylece, enine kesmenin bu etkilerini daha iyi hesaba katmak için düzeltici katsayısı kavramı ortaya konmuştur [32]. Elde edilen sonuçlar esas olarak düzeltici katsayıların karmaşık durumlarındaki ampirik seçime bağlıdır ve kalın kompozitlerin incelenmesi bu tür kinematik yaklaşımla rastgele olarak kalır.

# 7. REISSNER-MINDLIN PLAKA ELEMANLARI (RMPT)

## 7.1. Dört Düğümlü Dört Kenarlı Plaka (Q4)

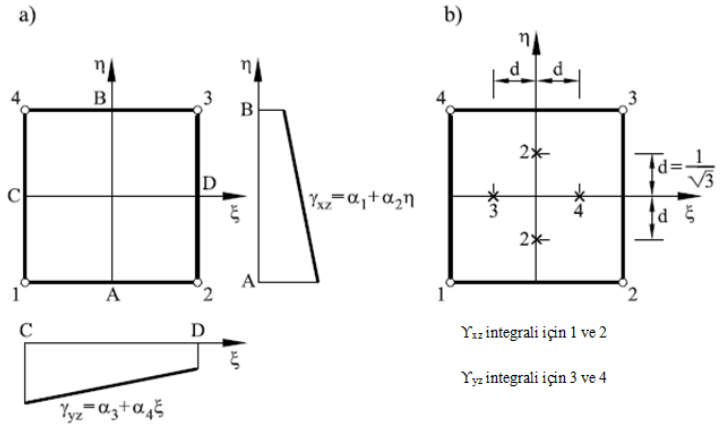
Q4 elemanı, dört düğümlü dörtgenin bilinen standart şekil fonksiyonlarına sahiptir. Dikdörtgen şekiller için tam entegrasyon $K_b^{(e)}$ ve $K_s^{(e)}$ için 2x2 Gauss kareleme gerektirir (Tablo 7.1). $K^{(e)}{}_s$ için bir dörtlü nokta bu matrisi tekil hale getirir ve CI ≥ 4'ün optimum değerinden uzak CI = 1 değerini verir. Tablo 7.1'de gösterilen dörtgenler hem dikdörtgen hem de dörtgen şekiller için geçerlidir.

**Tablo 7.1 :** Çeşitli Reissner-Mindlin plakası dörtgenleri için tam (F), seçici (S) ve indirgenmiş (R) kareleme [33].

| Eleman | Kareleme | Kareleme için integral | |
|---|---|---|---|
| | | $\mathbf{K}_b^{(e)}$ | $\mathbf{K}_s^{(e)}$ |
| Q4 | F | $2 \times 2$ | $2 \times 2$ |
| | S | $2 \times 2$ | $1 \times 1$ |
| | R | $1 \times 1$ | $1 \times 1$ |
| QS8,QL9 | F | $3 \times 3$ | $3 \times 3$ |
| QH9,QHG | S | $3 \times 3$ | $2 \times 2$ |
| QHET | R | $2 \times 2$ | $2 \times 2$ |
| | F | $4 \times 4$ | $4 \times 4$ |
| QS12, | S | $4 \times 4$ | $3 \times 3$ |
| QL16 | R | $3 \times 3$ | $3 \times 3$ |

## 7.2. Lineer Kayma Alanı İle Dört Düğümlü Plaka Dörtgenleri (QLLL)

Başlangıç noktası, yer değiştirmelerin ve rotasyonların bilinear interpolasyonu ile 4-nodlu Q4 elemanıdır. Şekil 7.1'deki gibi doğal koordinatlarda $\xi$, $\eta$ gibi enine kayma gerinmesi alanı tanımlarsak,




**Şekil 7.1 :** Dört düğümlü plaka dörtgen. a) Enine kayma gerilme alanı varsayılmıştır. b) Kesme terimlerini orijinal $K_s^{(e)}$ matrisine entegre etmek için indirgenmiş kareleme [33].

$$\gamma_\xi = a_1 + a_2\eta$$

$$\gamma_\eta = a_3 + a_4\xi \;; \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \xi \end{bmatrix} \tag{7.1}$$

$\alpha_i$ parametreleri, dört orta yan noktada doğal enine kesme gerinimlerinin $\gamma_{\bar{\xi}}$ örneklenmesiyle bulunur; Burada $\beta_i$ , $\bar{\xi}_i$ ve $\xi$ ekseni arasındaki açıyı ifade etmektedir.

$$\gamma_{\bar{\xi}_i} = (a_1 + a_2\eta)\cos\beta_i + (a_3 + a_4\xi)\sin\beta_i ; \quad i = 1,4 \tag{7.2}$$

Basit bir işlem örneği:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma\frac{1}{\xi} \\ \gamma\frac{2}{\xi} \\ \gamma\frac{3}{\xi} \\ \gamma\frac{4}{\xi} \end{Bmatrix} \qquad \text{ve} \qquad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{7.3}$$

$\gamma\frac{i}{\xi}$ gerinimleri, $\gamma_\xi^i, \gamma_\eta^i$ ile ilişkilendirilirse:

$$\begin{Bmatrix} \gamma\frac{1}{\xi} \\ \gamma\frac{2}{\xi} \\ \gamma\frac{3}{\xi} \\ \gamma\frac{4}{\xi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,0 & & & 0 \\ & 0\,1 & & \\ & & -1\,0 & \\ 0 & & & 0\,1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi}^{1} \\ \gamma_{\eta}^{1} \\ \vdots \\ \gamma_{\xi}^{4} \\ \gamma_{\pi}^{4} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{T}\hat{\boldsymbol{\gamma}}' \tag{7.4}$$

Örnekleme noktalarındaki kartezyen enine kesme gerinimleri, doğal enine kesme gerinimi ile ilişkilendirildiğinde:

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}^1 & & & 0 \\ & \boldsymbol{J}^2 & & \\ & & \boldsymbol{J}^3 & \\ 0 & & & \boldsymbol{J}^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\gamma}}^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{\boldsymbol{\gamma}}^4 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{\gamma}}\ ; \qquad \hat{\boldsymbol{\gamma}}^i = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^i \\ \gamma_{yz}^i \end{Bmatrix} \tag{7.5}$$

Dört örnekleme noktasındaki kartezyen enine kesme gerinimleri ile düğüm yer değiştirmeleri arasındaki ilişki,

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{B}_s^1 \\ \boldsymbol{B}_s^2 \\ \boldsymbol{B}_s^3 \\ \boldsymbol{B}_s^4 \end{Bmatrix} \boldsymbol{a}^{(e)} = \hat{\boldsymbol{B}}_s \boldsymbol{a}^{(e)} \tag{7.6}$$

Burada QLLL (Dört kenarlı, bi-lineer yer değiştirme, bi-lineer rotasyonlar ve lineer enine kesme gerinimi alanları için) olarak adlandırılmıştır. QLLL elemanı, 2x2'den fazla ağ yapısı koşullarını sağlar ve pratik uygulamalar için doğru sonuçlar verir. Rijitlik matrisi hesaplanırken tüm terimler için tam bir 2 × 2 kareleme gerektirir ve bu, elemanı yapay mekanizmalardan korur. Eğilme momentleri ve kesme kuvvetleri doğal koordinatların yönü boyunca sabittir. Bu nedenle, belirli uygulamalar için ince ağ yapıları gereklidir.

$$\boldsymbol{n}_{\theta} + \boldsymbol{n}_{w} \geq \boldsymbol{n}_{\gamma}$$
$$\boldsymbol{n}_{\gamma} \geq \boldsymbol{n}_{w}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{T} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (1-\eta) & 0 & 0 & 0 & | (1+\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1+\xi) & | 0 & 0 & 0 & (1-\xi) \end{bmatrix} \tag{7.7}$$

Bu matris, doğrudan varsayılan enine kesme gerinim alanı yazılarak aşağıdaki gibi tahmin edilebilirdi [33]:

$$\gamma_\xi = \frac{1}{2}(1-\eta)\gamma_\xi^1 + \frac{1}{2}(1+\eta)\gamma_\xi^3$$

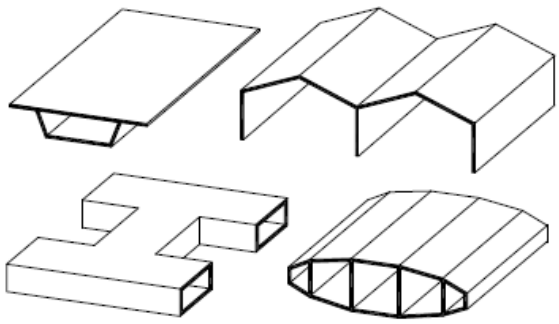
(7.8)

$$\gamma_\eta = \frac{1}{2}(1+\xi)\gamma_\eta^2 + \frac{1}{2}(1-\xi)\gamma_\eta^4$$

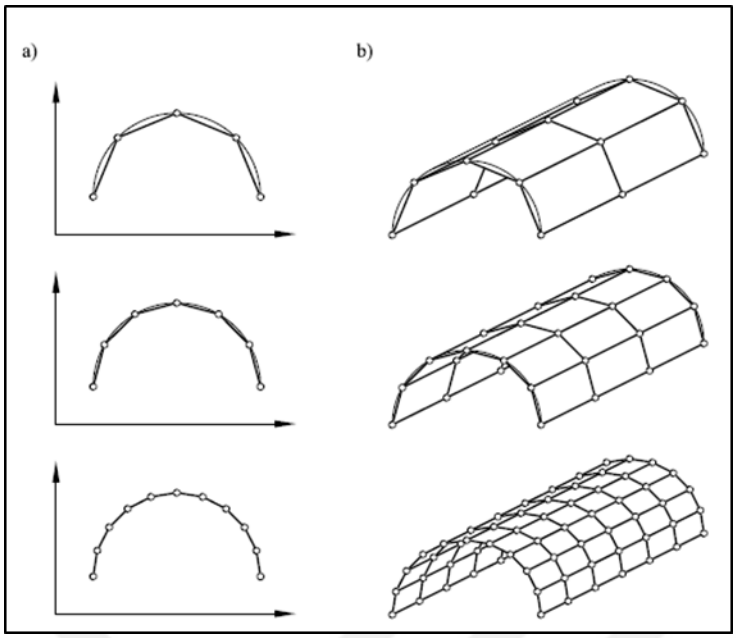
## 8. DÜZ KABUK TEORİSİ

"Kabuk elemanı" eğilme ve kesme davranışını ve "düzlem içi" (membran) davranışını içerir. Membran durumu, kabuk orta yüzeyinde bulunan eksenel kuvvetleri uyarır. Kabuk elemanı düz ise, eğilme, kesme ve düzlem içi durumlar tipik olarak eleman seviyesinde ayrılır. Kompozit lamina kabuklar için bir istisna söz konusudur. Bu ayrılma, eğilme, kesme ve membran katkılarının basit bir şekilde üst üste binmesi ile oluşturulan eleman rijitlik matrisinde bulunmaktadır.

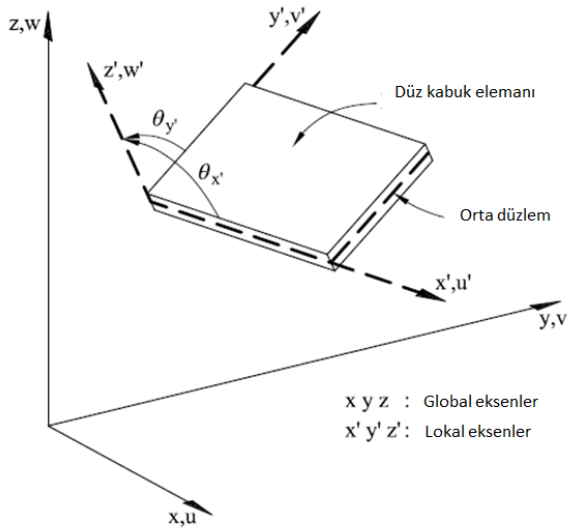
Tam bükülme membran bağlantısı farklı açılarda birbirine eklenen düz elemanlar, global rijitlik matrisinde birleştirildiğinde ortaya çıkar. Düz elemanlar, köprüler, düzlem çatılar ve bazı mekanik parçalar gibi katlanmış plaka yapıları için kullanılır. Şekil 8.1 ve ayrıca Şekil 8.2'de gösterildiği gibi kavisli bir kabuğu ayrıklaştırmak için kullanılabilir. Sonuç olarak, düz elemanlar gelişi güzel şekilli kabukların analizi için genel bir prosedür sunmaktadır. Düz kabuk elemanlarının, formülasyonları daha karmaşık kavisli kabuk elemanlarına karşı sergiledikleri sadeliği, onları pratik amaçlar için iyi ve popüler bir seçenek haline getirmiştir.



**Şekil 8.1 :** Katlanmış plaka yapılarına örnekler [33].




**Şekil 8.2 :** a) Kavisli bir yayın parçalar halinde ayrıklaştırılması. b) Silindirik bir yüzeyin düz dörtgen elemanlar ile ayrıklaştırılması [33].

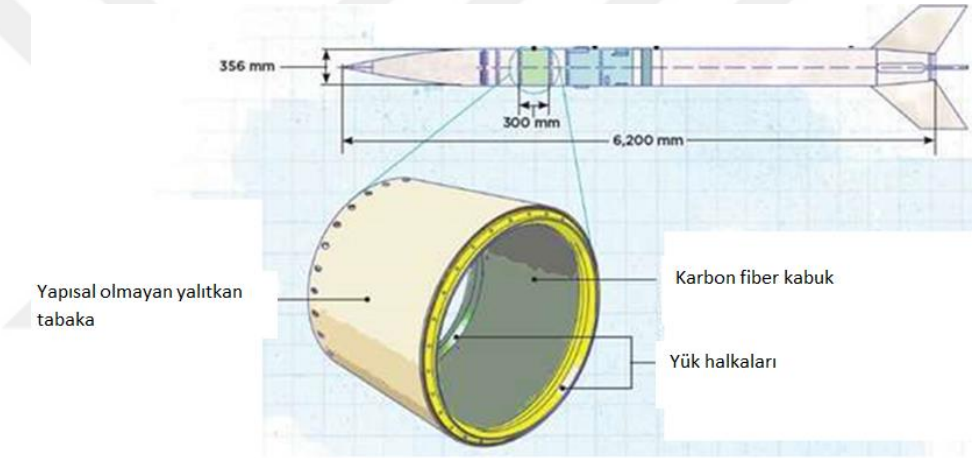



**Şekil 8.3 :** Dikdörtgen düz kabuk yapısı. Lokal ve global eksenler [33].

Şekil 8.3'de düz bir kabuk yapısı görülmektedir. Kabuk yapıları plaka yapılarını birbiri ardına ekleyerek istenilen geometriye sahip yapılar oluşturulup elde edilebilir. Daha sonra plaka teorileri yardımıyla kabuk yapıları analiz edilebilir.



**Şekil 8.4 :** Boeing ticari uçaklarında eğilme, kayma gerilmeleri ve yüzey yüklemeleri gibi kuvvetler tarafından meydana gelen yorulma yükleri için gövde bölümünün tam ölçekli üretilmiş hali [34].




**Şekil 8.5 :** Roket Modülü [35].

Şekil 8.4 ve Şekil 8.5'de görüldüğü üzere kabuk yapıları uçak yapılarında ve roket yapılarında önemli yük taşıyıcı elemanlar olarak kullanılmaktadırlar. Yapılan çalışmalarda katlamalı plaka yapılarından bir silindirik kabuk yapısı oluşturularak doğal frekans değerleri hesaplanmıştır.

Kirchhoff teorisine göre serbest titreşim için hareket denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{8.1}$$

u : kabuğun x yönündeki yer değiştirmesi, v : kabuğun θ yönündeki yer değiştirmesi, w : kabuğun z yönündeki yer değiştirmesidir. $L_{ij}$(i,j=1,2,3) x ve θ'ya göre diferansiyel operatörlerdir.

$$\begin{aligned} u &= U(x,\theta)\, f(t) \\ v &= V(x,\theta)\, f(t) \\ w &= W(x,\theta)\, f(t) \end{aligned} \tag{8.2}$$

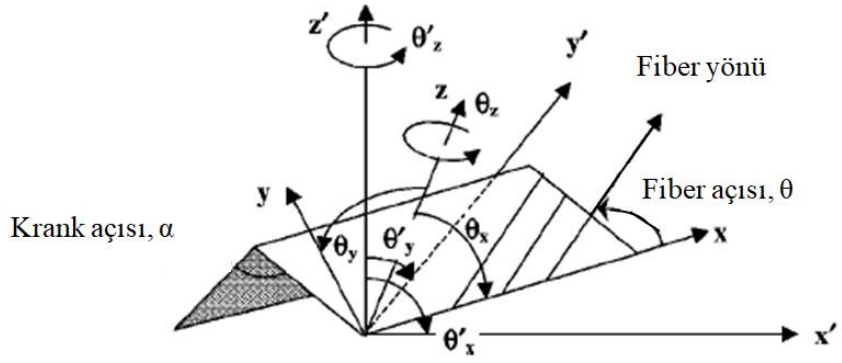
*f(t); U*(*x*,θ), *V*(*x*,θ) ve *W*(*x*,θ) mod şekillerine göre skaler model koordinatlarıdır.

$$(-w^2 M^{MN} + K^{MN})\phi^N = 0 \tag{8.3}$$

$M^{MN}$ *:* kütle matrisi, $K^{MN}$*:* rijitlik matrisi, $\varphi^N$: özvektör (titreşimin modu), M ve N serbestlik dereceleridir.

## 9. KATLANMIŞ PLAKALAR İÇİN DÖNÜŞÜMLER

Şekil 9.1'den görüleceği üzere, lokal ve global yer değiştirmeler arasındaki ilişkiler şu şekilde verilmektedir [36]:




**Şekil 9.1 :** Tipik bir katlanmış plaka elemanı için lokal ve global eksen sistemi. Pozitif x´ ve x ekseni arasında bulunan en az açı şu şekilde gösterilir (x´,x) [36].

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x',x) & \cos(y',x) & \cos(z',x) & 0 & 0 & 0 \\ \cos(x',y) & \cos(y',y) & \cos(z',y) & 0 & 0 & 0 \\ \cos(x',z) & \cos(y',z) & \cos(z',z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(x',x) & \cos(y',x) & \cos(z',x) \\ 0 & 0 & 0 & \cos(x',y) & \cos(y',y) & \cos(z',y) \\ 0 & 0 & 0 & \cos(x',z) & \cos(y',z) & \cos(z',z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ \theta'_x \\ \theta'_y \\ \theta'_z \end{Bmatrix} \tag{9.1}$$

veya

$$\{u\} = [T]\{u'\} \tag{9.2}$$

Global rijitlik, kütle matrisleri ve kuvvet vektörü şu şekilde ifade edilir:

$$[K']_e = [T]^T [K]_e [T] \tag{9.3}$$

$$[M']_e = [T]^T [M]_e [T] \tag{9.4}$$

$$\{f'\}_e = [T]^T \{f\}_e \tag{9.5}$$

Bununla birlikte, dönüşümü uygulamadan önce, eleman başına dokuz $\theta_z$ delme derecesini sağlamak için 45 × 45'lik rijitlik ve kütle matrisleri 54 × 54 boyuta kadar genişletilir. $\theta_z$ terimlerine karşılık gelen diyagonal olmayan terimler sıfıra ayarlanırken, karşılık gelen diyagonal terimlere çok küçük bir pozitif sayı verilir. Bu küçük sayı, genişlemeden önce karşılık gelen eleman matrisinin en küçük önde gelen diyagonal teriminden bin kat daha küçük olarak alınır [37]. Yük vektörü, $\theta_z$ pozisyonlarına boş terimler eklenerek benzer şekilde büyütülür.

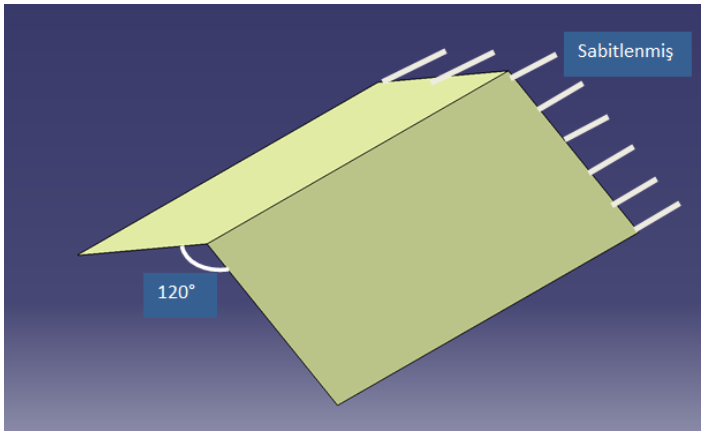
$$\left[\boldsymbol{M}'\right]\{\ddot{\boldsymbol{x}}'\}+\left[\boldsymbol{K}'\right]\{\boldsymbol{x}'\}=\{0\} \tag{9.6}$$

Serbest titreşim analizi (9.6) denkleminin çözümlerini ve özikililerini çıkarmak için uyarlanmış alt uzay iterasyonunu içerir [37]. Zorlanmış titreşim analizinde sönüm ihmal edilir ve kuvvet terimi (9.6) denkleminin sağ tarafındaki boş vektörün yerini alır. Süreksiz analiz için Newmark'ın açık entegrasyon tekniği [37] uygulanabilir.

# 10. YAPILAN ÇALIŞMALAR

## 10.1. Katlamalı Plaka Çalışmaları

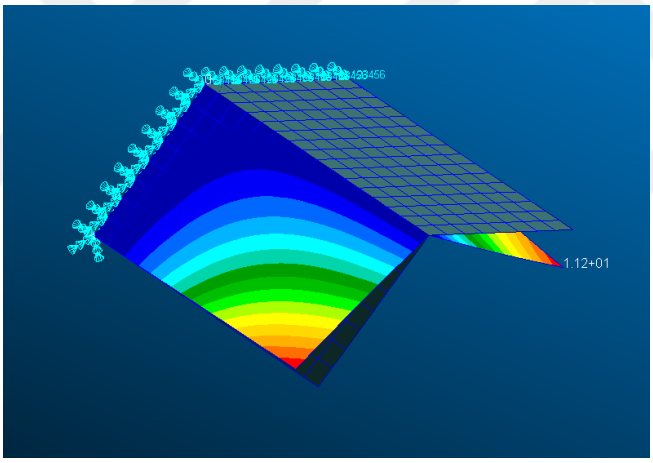
Tek katlamalı aralarında 120° açı bulunan iki plaka katlanmıştır ve bir ucundan basit mesnetlenmiştir. Her bir plaka için mesnetlenen kısımların uzunluğu 1.5 m, diğer kenar uzunluğu 0.75 m ve kalınlığı 0.02 x 1.5 m olarak alınmıştır. Malzeme özellikleri ise; elastisite modülü E=10.92 x $10^9$ $N/m^2$, poisson oranı 0.3 ve kütle yoğunluğu 1000 $kg/m^3$ olarak alınmıştır. Bu tek katlamalı plakaların analizi sonlu elemanlar yöntemi ile dört düğüm noktalı elemanlar kullanılarak yapılmıştır. Ayrıca ince plakanın çözüm yöntemi için Kirchhoff plaka teorisi ve Reissner-Mindlin plaka teorisi kullanılmıştır. Mathematica programında yazılan sonlu elemanlar kodu ile Kirchhoff yöntemi için 4 x 3'lük ve Reissner-Mindlin yöntemi için 6 x 4'lük eşit parçalar halinde ağ yapısı oluşturularak sonuçlar literatürden ve Nastran paket programından elde edilen veriler ile kıyaslanmıştır. Literatürde yapılan çalışmalarda ağ yapısı 4 x 3'lük eşit parçalar halinde oluşturulmuştur.



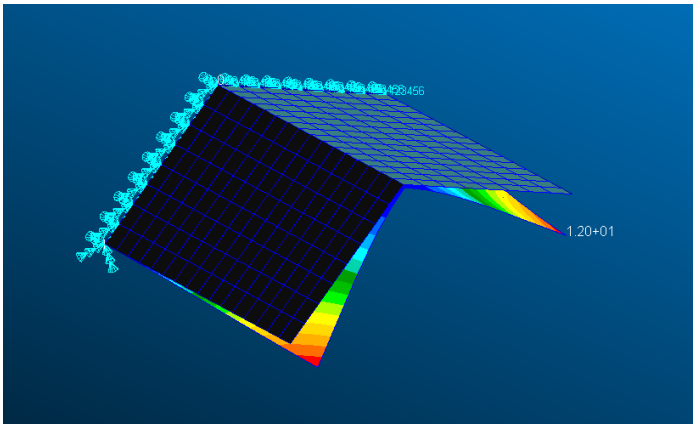

**Şekil 10.1 :** 120 derece açılı tek katlamalı plaka modeli.

**Tablo 10.1 :** 120 derece açılı tek katlamalı plaka için doğal frekans değerlerinin (boyutsuz frekans) literatürdeki çalışmalar ve Nastran paket programından elde edilen sonuçlar ile kıyaslanması.

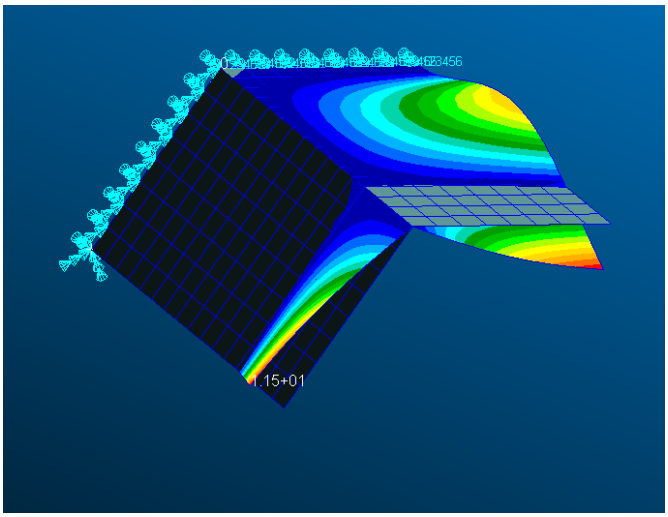
| Modlar | Kirchhoff | Reissner Mindlin | [36] | [38] | [39] | Nastran |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.0491 | 0.0485 | 0.0490 | 0.0491 | 0.0492 | 0.0484 |
| 2 | 0.0940 | 0.0940 | 0.0941 | 0.0943 | 0.0949 | 0.0932 |
| 3 | 0.1788 | 0.1835 | 0.1883 | 0.1787 | 0.1795 | 0.1750 |
| 4 | 0.2057 | 0.2115 | 0.216 | 0.2065 | 0.2082 | 0.2021 |
| 5 | 0.3021 | 0.3008 | 0.293 | 0.2971 | 0.2984 | 0.2867 |



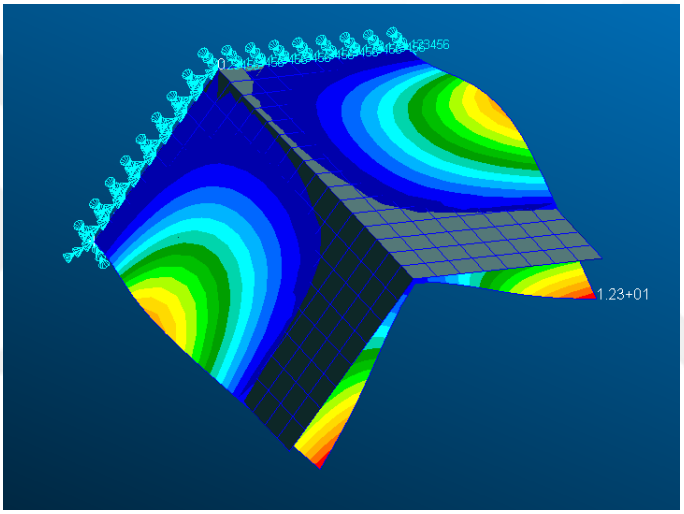

**Şekil 10.2 :** 120 derece açılı tek katlamalı plaka için birinci mod şekli.



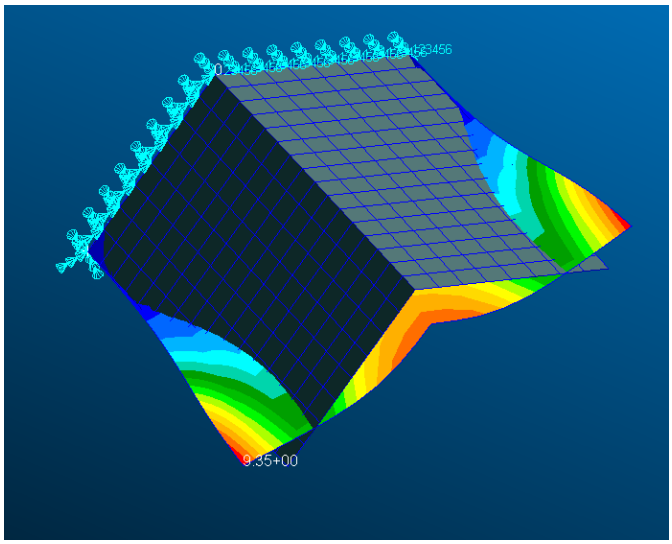

**Şekil 10.3 :** 120 derece tek katlamalı plaka için ikinci mod şekli.




**Şekil 10.4 :** 120 derece tek katlamalı plaka için üçüncü mod şekli.

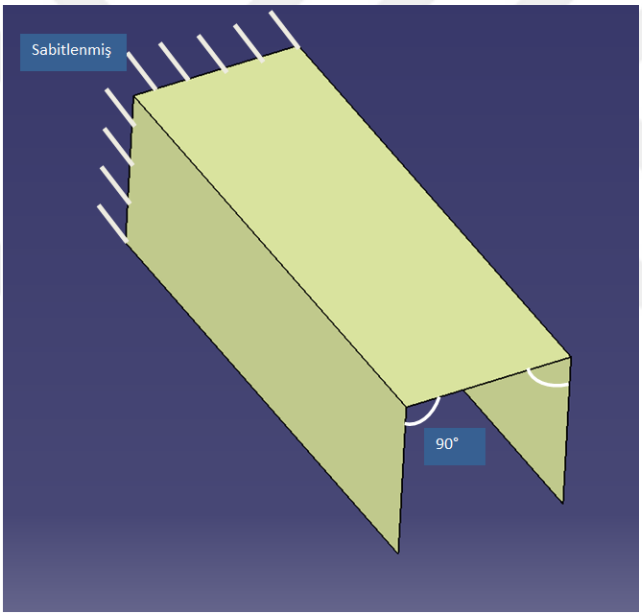



**Şekil 10.5 :** 120 derece tek katlamalı plaka için dördüncü mod şekli.




**Şekil 10.6 :** 120 derece tek katlamalı plaka için beşinci mod şekli.

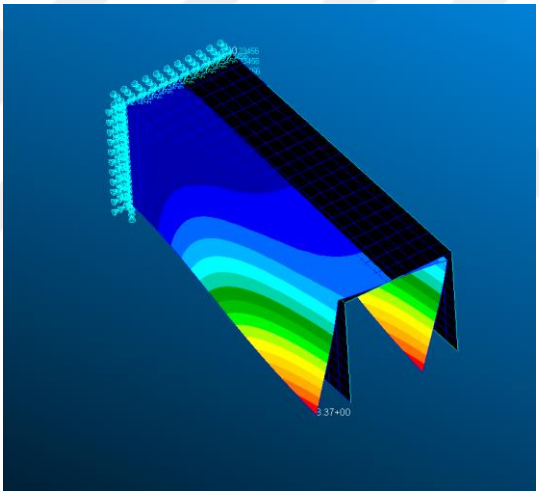
İki katlamalı aralarında 90° açı bulunan iki plaka katlanmıştır ve bir ucundan basit mesnetlenmiştir. Her bir plaka için mesnetlenen kısımların uzunluğu 2 m, diğer kenar uzunluğu 2/3 m ve kalınlığı 0.02 x 2 m olarak alınmıştır. Malzeme özellikleri ise; elastisite modülü E=10.92 x $10^9$ N/$m^2$, poisson oranı 0.3 ve kütle yoğunluğu 1000 kg/$m^3$ olarak alınmıştır. Bu iki katlamalı plakaların analizi sonlu elemanlar yöntemi ile dört düğüm noktalı elemanlar kullanılarak yapılmıştır. Ayrıca bu ince plakanın çözüm yöntemi için Kirchhoff plaka teorisi ve Reissner-Mindlin plaka teorisi kullanılmıştır. Mathematica programında yazılan sonlu elemanlar kodu ile 6 x 4'lük eşit parçalar halinde ağ yapısı oluşturularak sonuçlar literatürden ve Nastran paket programından elde edilen veriler ile kıyaslanmıştır. Literatürdeki çalışmalarda çözüm yöntemi için 3 x 2'lik eşit parçalar halinde ağ yapısı oluşturulup sonuçlar elde edilmiştir.



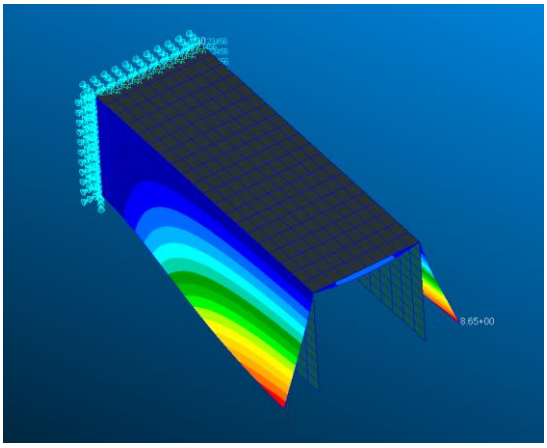

**Şekil 10.7 :** 90 derece açılı çift katlamalı plaka modeli.

**Tablo 10.2 :** 90 derece çift katlamalı plaka için doğal frekans değerlerinin (boyutsuz frekans) literatürdeki çalışmalar ve Nastran paket programından elde edilen sonuçlar ile kıyaslanması.

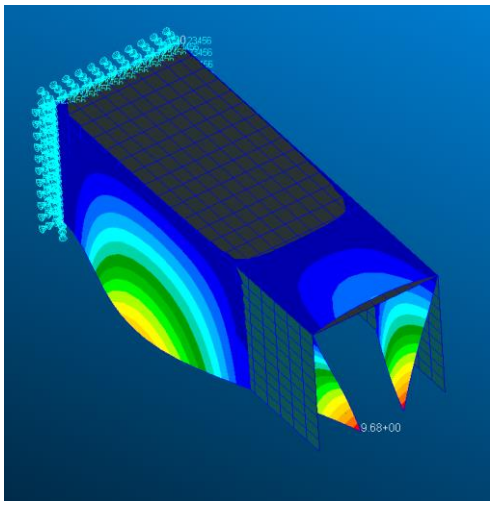
| Modlar | Kirchhoff | Reissner Mindlin | [36] | [38] | Nastran |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.1249 | 0.1238 | 0.1249 | 0.1249 | 0.1227 |
| 2 | 0.1257 | 0.1252 | 0.1252 | 0.1260 | 0.1244 |
| 3 | 0.2579 | 0.2599 | 0.2697 | 0.2579 | 0.2549 |
| 4 | 0.2691 | 0.2727 | 0.2830 | 0.2892 | 0.2667 |
| 5 | 0.3277 | 0.3285 | 0.3266 | 0.3286 | 0.3183 |



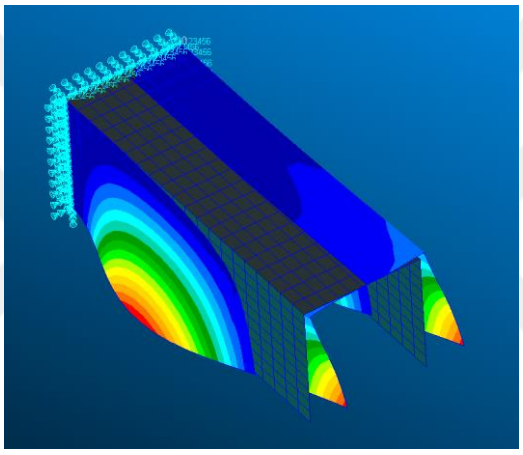
**Şekil 10.8 :** 90 derece çift katlamalı plaka için birinci mod şekli.



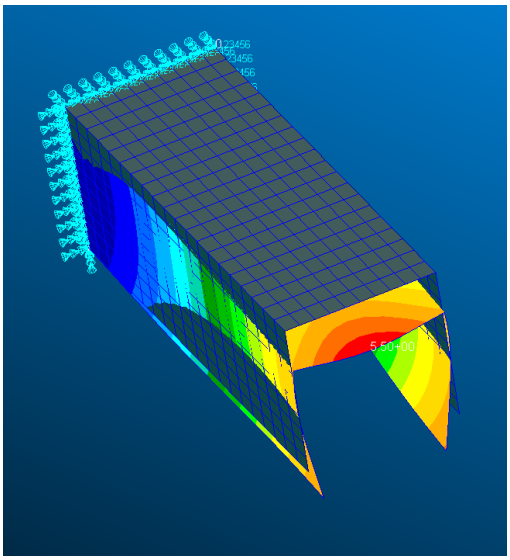
**Şekil 10.9 :** 90 derece çift katlamalı plaka için ikinci mod şekli.



**Şekil 10.10 :** 90 derece çift katlamalı plaka için üçüncü mod şekli.



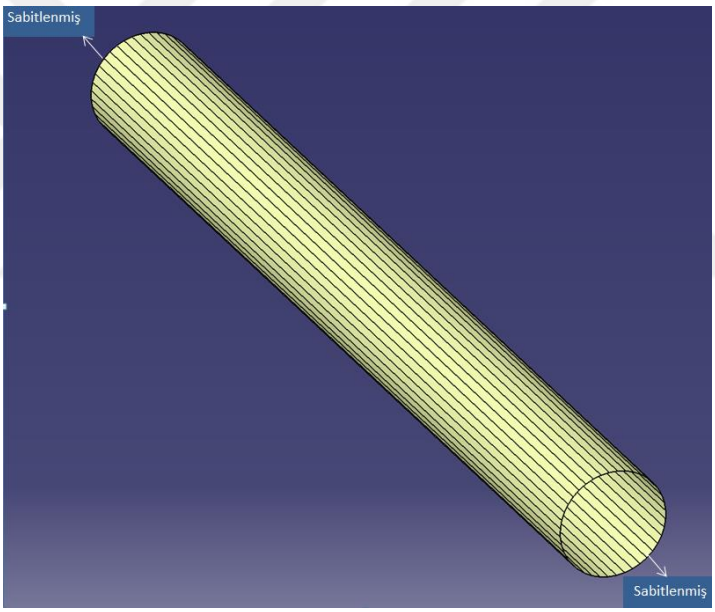
**Şekil 10.11 :** 90 derece çift katlamalı plaka için dördüncü mod şekli.



**Şekil 10.12 :** 90 derece çift katlamalı plaka için beşinci mod şekli.

## 10.2. Kabuk Çalışmaları

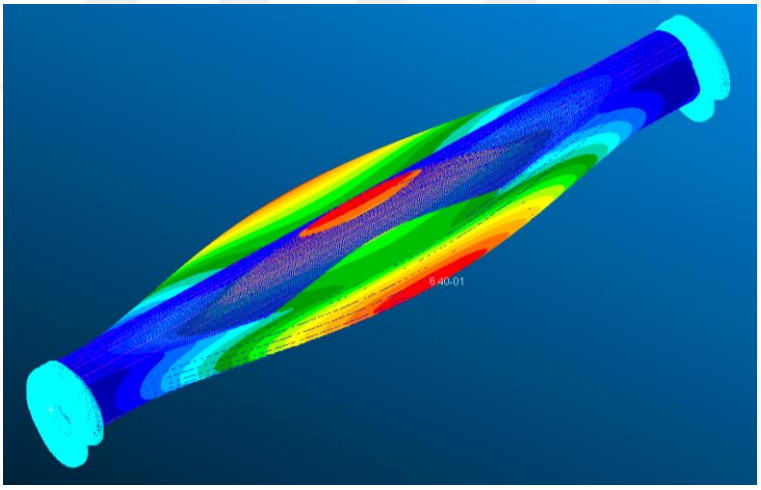
Otuz dokuz katlamalı aralarında 9° açı bulunan kırk plaka katlanmıştır ve iki ucundan mesnetlenmiştir. İçi boş ince cidarlı silindirik bir yapı modellenip silindirik yapının dış yarı çapı 1 m, uzunluğu 20 m ve cidar kalınlığı 0.01 m olarak alınmıştır. Malzeme özellikleri ise; elastisite modülü E = 2.1 x $10^{11}$ N/$m^2$, poisson oranı 0.3 ve kütle yoğunluğu 7850 kg/$m^3$ olarak alınmıştır. Bu otuz dokuz katlamalı plakaların analizi sonlu elemanlar yöntemi ile dört düğüm noktalı elemanlar kullanılarak yapılmıştır. Ayrıca bu ince silindirik tüpün çözüm yöntemi için Kirchhoff plaka teorisi ve Reissner-Mindlin plaka teorisi kullanılmıştır. Mathematica programında yazılan sonlu elemanlar kodu ile 20 x 2'lik eşit parçalar halinde ağ yapısı oluşturularak sonuçlar literatürden ve Nastran paket programından elde edilen veriler ile kıyaslanmıştır.




**Şekil 10.13 :** İki tarafından mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısı modeli.

**Tablo 10.3 :** İki tarafından mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısının doğal frekans değerlerinin (Hertz) literatürdeki çalışmalardan ve Nastran paket programından elde edilen sonuçlar ile kıyaslanması.

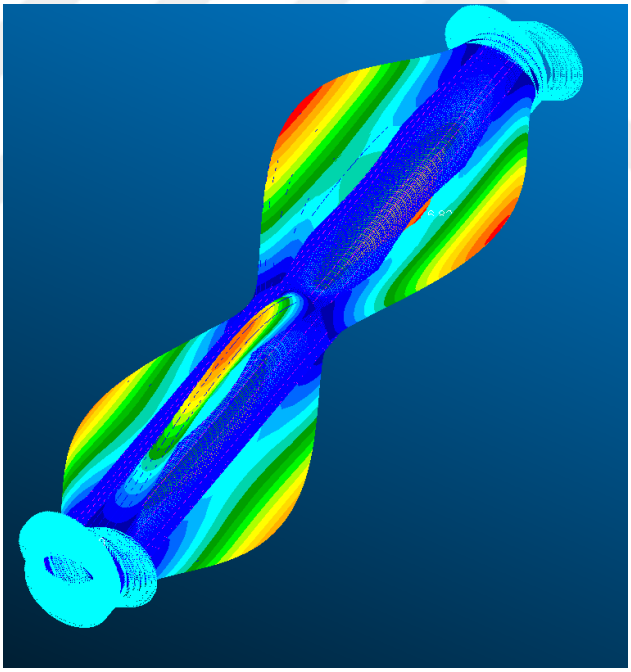
| Modlar | Reissner Mindlin | Kirchhoff | [40] | Dalga yayılımı, [41] | Sonlu Elemanlar Yöntemi, [41] | Nastran |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (1,2) | 12.58 | 12.53 | 12.16 | 12.17 | 12.25 | 11.92 |
| (1,3) | 19.88 | 19.72 | 19.65 | 19.61 | 19.64 | 19.239 |
| (2,3) | 24.37 | 24.01 | 23.30 | 23.28 | 23.18 | 22.81 |
| (2,2) | 28.86 | 27.52 | 27.80 | 28.06 | 27.69 | 27.051 |
| (3,3) | 29.067 | 27.52 | 31.92 | 31.98 | 31.60 | 28.212 |



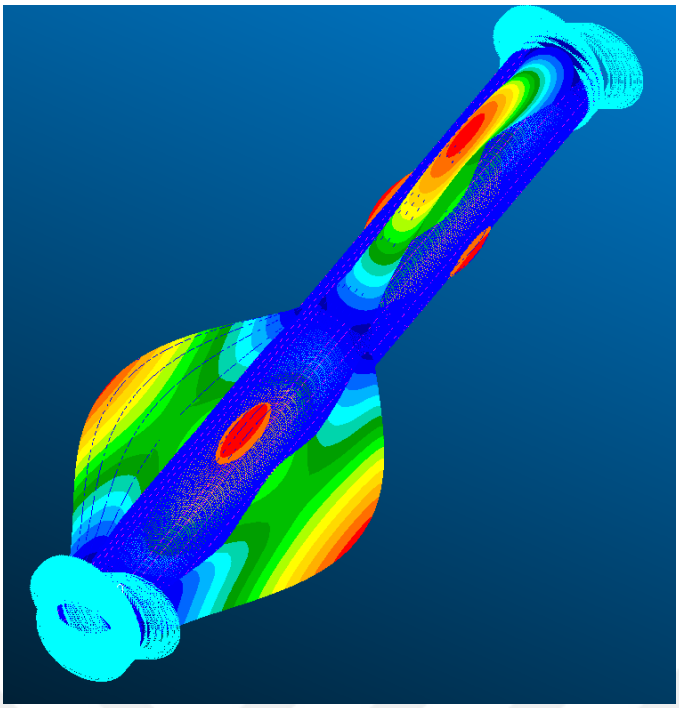
**Şekil 10.14 :** İki tarafından mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısı için birinci mod şekli.



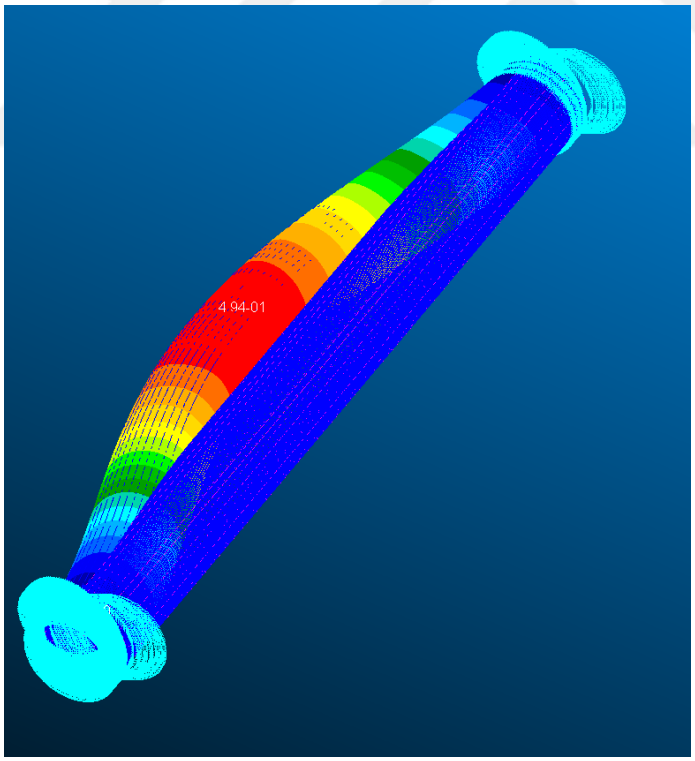
**Şekil 10.15 :** İki tarafından mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısı için ikinci mod şekli.



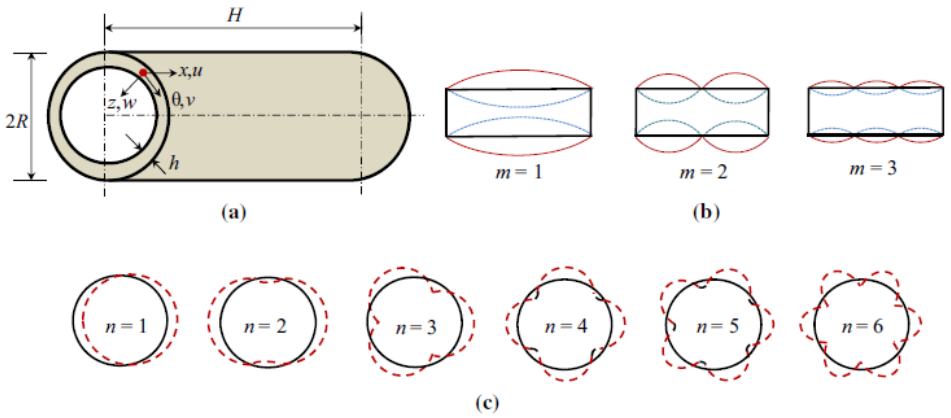
**Şekil 10.16 :** İki tarafından mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısı için üçüncü mod şekli.



**Şekil 10.17 :** İki tarafından mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısı için dördüncü mod şekli.

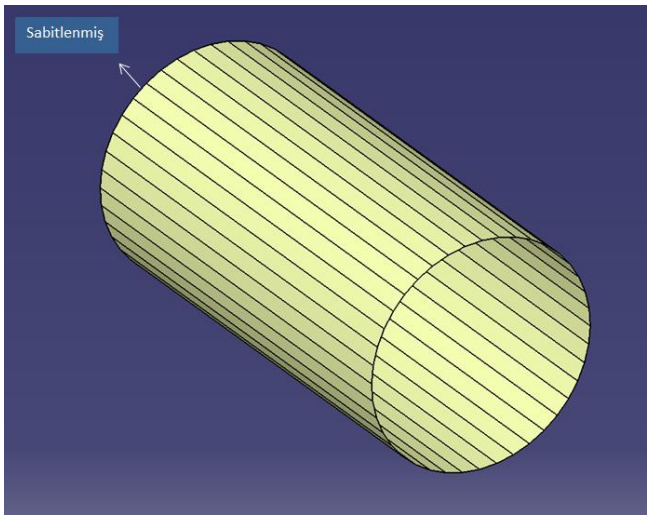



**Şekil 10.18 :** İki tarafından mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısı için beşinci mod şekli.




**Şekil 10.19 :** (a) Koordinat Sistemi, (b) Çevresel, (c) Silindirik kabuk için eksenel ve radyal modlar, [40].

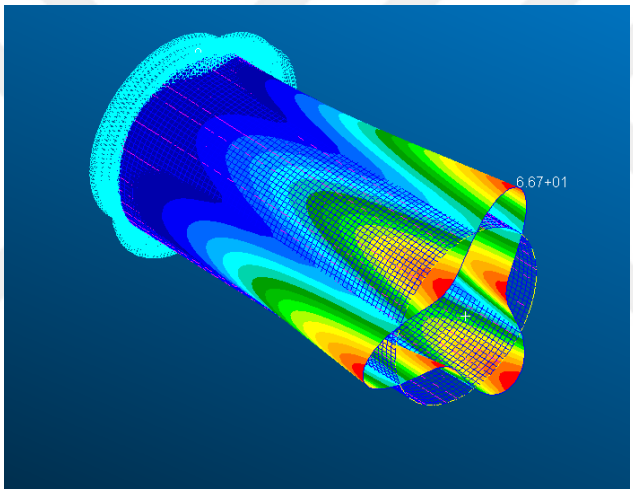
Otuz dokuz katlamalı aralarında 9° açı bulunan kırk plaka katlanmıştır ve bir ucundan basit mesnetlenmiştir. İçi boş ince cidarlı silindirik bir yapı modellenip silindirik yapının dış yarı çapı 150 mm, uzunluğu 600 mm ve cidar kalınlığı 1 mm olarak alınmıştır. Malzeme özellikleri ise; elastisite modülü E=7.1 x $10^{10}$ N/$m^2$, poisson oranı 0.33 ve kütle yoğunluğu 2770 kg/$m^3$ olarak alınmıştır. Bu otuz dokuz katlamalı plakaların analizi sonlu elemanlar yöntemi ile dört düğüm noktalı elemanlar kullanılarak yapılmıştır. Ayrıca bu ince silindirik tüpün çözüm yöntemi için Kirchhoff plaka teorisi ve Reissner-Mindlin plaka teorisi kullanılmıştır. Mathematica programında yazılan sonlu elemanlar kodu ile 20 x 2'lik eşit parçalar halinde ağ yapısı oluşturularak sonuçlar literatür ve Nastran paket programından elde edilen veriler ile kıyaslanmıştır.



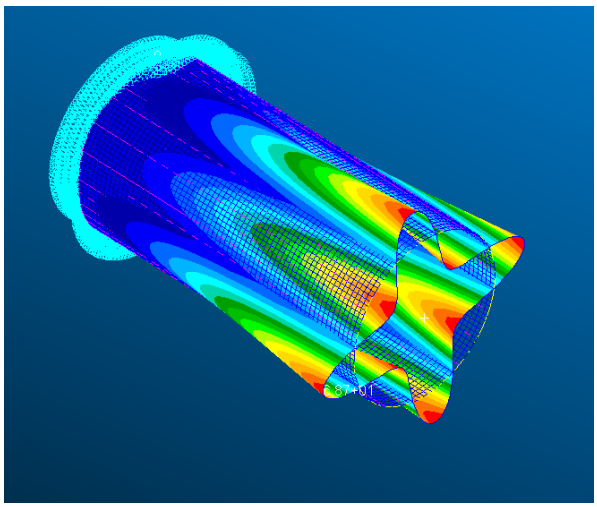

**Şekil 10.20 :** Basit mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısı modeli.

**Tablo 10.4 :** Basit mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısının doğal frekans değerlerinin (Hertz) literatürdeki çalışmalardan ve Nastran paket programından elde edilen sonuçlar ile kıyaslanması.

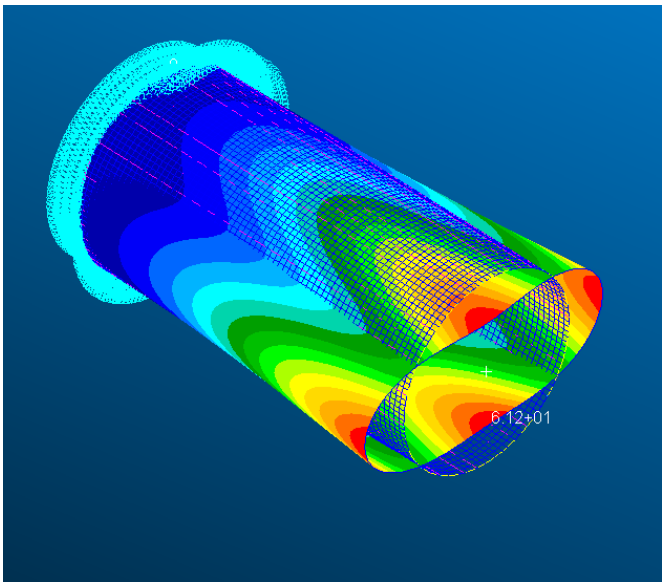
| Modlar | Reissner Mindlin | Kirchoff | [40] | [42] ANSYS | [42] FLH | [42] DM | Nastran |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1,3) | 147.52 | 146.82 | 146 | 146 | 146 | 153 | 146.16 |
| (1,4) | 177.78 | 175.98 | 175 | 174 | 175 | 185 | 175.56 |
| (1,2) | 242.70 | 242.15 | 242 | 243 | 242 | 243 | 241.46 |
| (1,5) | 268.37 | 263.90 | 263 | 261 | 263 | 274 | 263.48 |
| (1,6) | 390.17 | 381.91 | 382 | 378 | 381 | 391 | 380.79 |



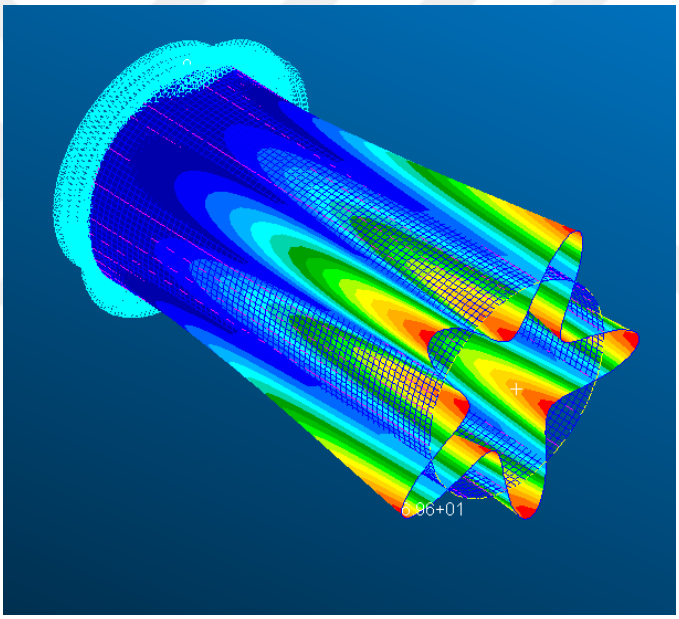

**Şekil 10.21 :** Basit mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısı için birinci mod şekli.



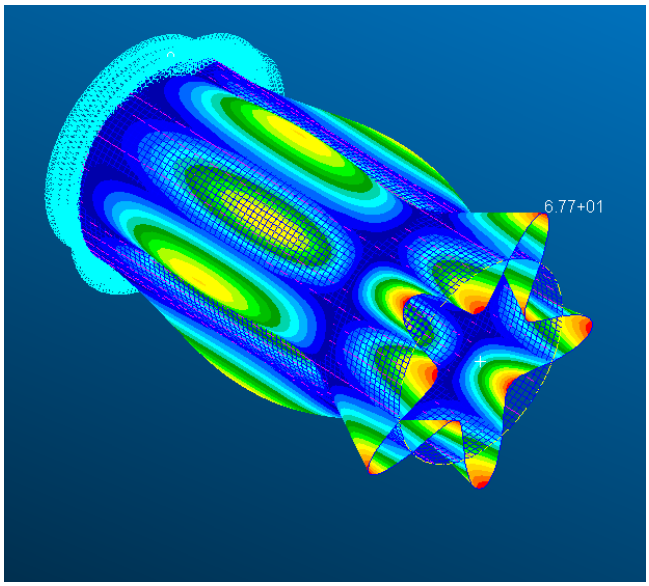
**Şekil 10.22 :** Basit mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısı için ikinci mod şekli.




**Şekil 10.23 :** Basit mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısı için üçüncü mod şekli.

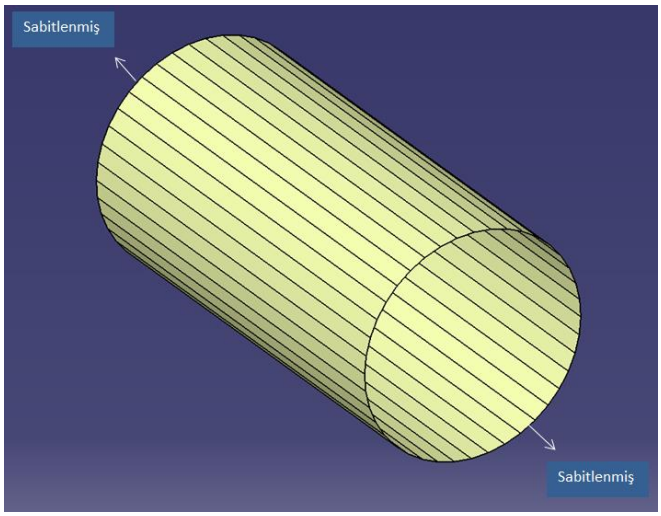


**Şekil 10.24 :** Basit mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısı için dördüncü mod şekli.




**Şekil 10.25 :** Basit mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısı için beşinci mod şekli.

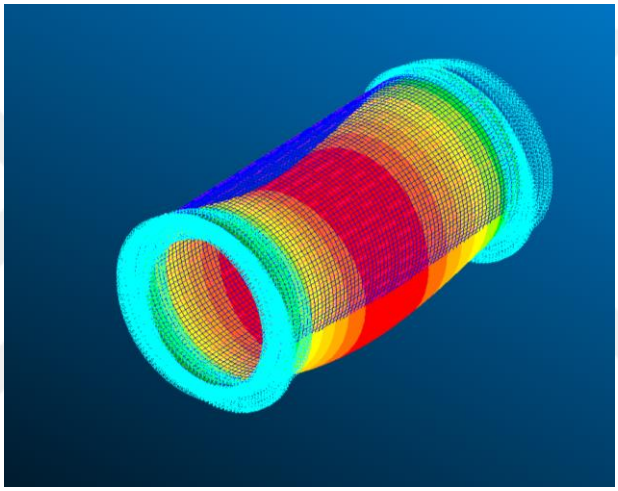
Otuz dokuz katlamalı aralarında 9° açı bulunan kırk plaka katlanmıştır ve iki ucundan mesnetlenmiştir. İçi boş kalın cidarlı silindirik bir tüp yapısı modellenip silindirik yapının dış yarı çapı 150 mm, uzunluğu 600 mm ve cidar kalınlığı 120 mm olarak alınmıştır. Malzeme özellikleri ise; elastisite modülü E=7.1 x $10^{10}$ N/$m^2$, poisson oranı 0.33 ve kütle yoğunluğu 2770 kg/$m^3$ olarak alınmıştır. Bu otuz dokuz katlamalı plakaların analizi sonlu elemanlar yöntemi ile dört düğüm noktalı elemanlar kullanılarak yapılmıştır. Ayrıca bu ince silindirik tüpün çözüm yöntemi için Reissner-Mindlin plaka teorisi kullanılmıştır. Mathematica programında yazılan sonlu elemanlar kodu ile 20 x 2'lik eşit parçalar halinde ağ yapısı oluşturularak sonuçlar Nastran paket programından elde edilen veriler ile kıyaslanmıştır.



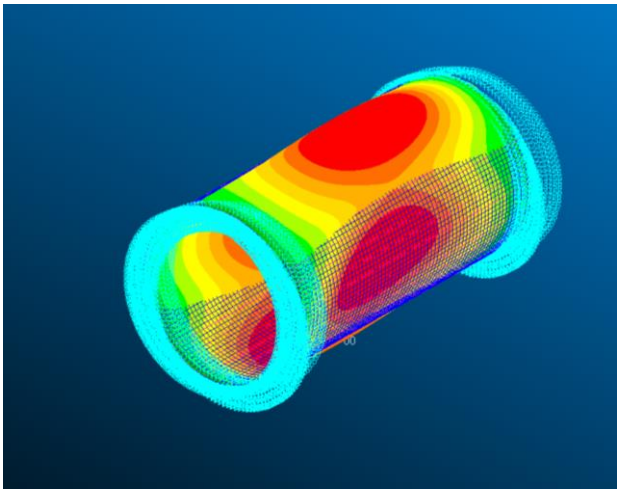

**Şekil 10.26 :** İki ucundan mesnetlenmiş kalın silindirik tüp yapısı modeli.

**Tablo 10.5 :** İki ucundan mesnetlenmiş kalın silindirik tüp yapısı için doğal frekans değerlerinin (Hertz) Nastran paket programından elde edilen veriler ile kıyaslanması.

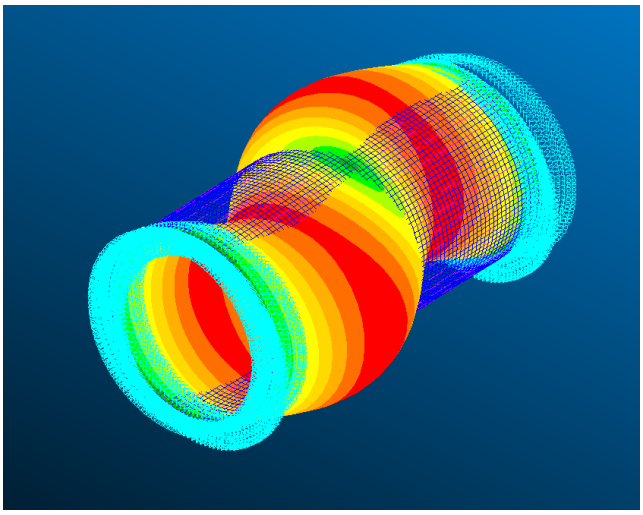
| Modlar | Reissner Mindlin | Nastran |
|---|---|---|
| 1 | 2032.5 | 2032.5 |
| 2 | 3066.9 | 3177.4 |
| 3 | 4065.2 | 4073.7 |
| 4 | 4464.5 | 4631.0 |



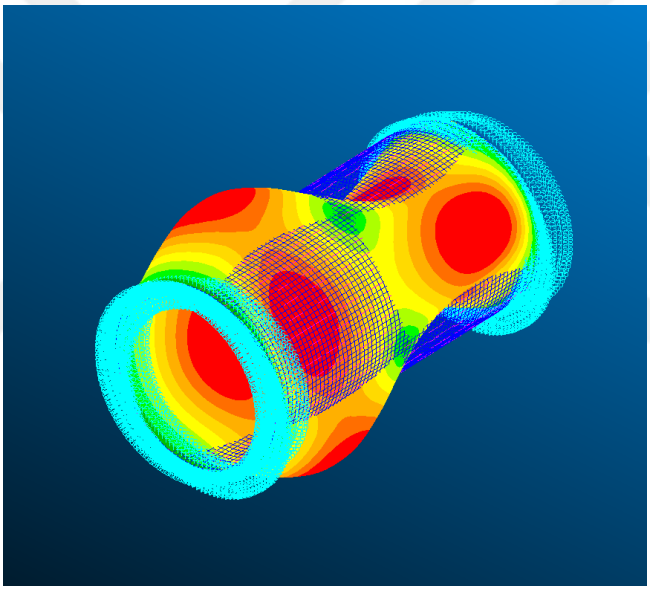
**Şekil 10.27 :** İki ucundan mesnetlenmiş kalın silindirik tüp yapısı için birinci mod şekli.



**Şekil 10.28 :** İki ucundan mesnetlenmiş kalın silindirik tüp yapısı için ikinci mod şekli.



**Şekil 10.29 :** İki ucundan mesnetlenmiş kalın silindirik tüp yapısı için üçüncü mod şekli.



**Şekil 10.30 :** İki ucundan mesnetlenmiş kalın silindirik tüp yapısı için dördüncü mod şekli.

# 11. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak katlamalı plaka yapıları ve kabuk yapıları modellenmiş ve farklı plaka teorileri kullanılarak analizleri yapılmıştır. Sonlu elemanlar kodları Mathematica programında yazılmış olup sınır şartları literatürde yapılan çalışmalara benzer şekilde verilmiştir. Elde edilen sonuçlar Nastran paket programı ve literatürde yapılan çalışmalar ile kıyaslanarak hangi teorilerin ve yöntemlerin daha efektif çalıştığı hakkında sonuçlar elde edilmiştir.

Silindirik kabuk yapıları ile yapılan analizleri incelersek beklendiği gibi Kirchhoff teorisi ince plakalarla oluşturulmuş ince silindirik tüp yapılarında Reissner-Mindlin teorisine göre daha iyi sonuçlar vermiştir. İnce plaka yapılarında Reissner-Mindlin teorisini kullanırken kayma kilitlenmesini engellemek amacıyla gauss integrasyon metodu kullanılmıştır. Ayrıca kalın silindirik tüp yapısı için önceden yapılan araştırmalar neticesinde Reissner-Mindlin teorisinin daha iyi yakınsadığı bilindiği üzere kalın silindirik tüp yapısı için analiz yapılmış olup sonuçlar elde edilmiştir. Reissner-Mindlin teorisinin kalın plakalarda ve kabuklarda Kirchhoff teorisine göre daha iyi sonuç verdiği görülmüştür.

Görüldüğü gibi kabuk yapıları çok sayıda birbiri ardına eklenen plaka yapıları ile modellenip plaka teorileri kullanılarak çözülebilmekte olup gerçeğe yakın sonuçlar vermektedir. Oluşturulan yapılar için gerekli ağ yapıları yazılan kodlarda uygun miktarda oluşturulduktan sonra analizleri yapılıp istenilen sonuçlar elde edilmiştir. Bu çalışma neticesinde daha kompleks şekilli kabuk yapıları, farklı malzeme türleri, farklı sınır şartları kullanılarak istenilen probleme göre uygun çözümler üretilebileceği görülmüştür. Yazılan sonlu elemanlar kodu ticarileştirilebilir olup farklı problemlere uygulanabilecektir, mühendisliğe ve havacılığa katkı sağlayabilecektir.

## KAYNAKLAR


[1] **Euler, L.** (1766). De motu vibratorio tympanorum. Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, 243-260...

[2] **Bernoulli, J. I.** (1789). Essai théoretique sur les vibrations des plaques élastiques, rectangulaires et libres. Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 1789, 197..

[3] **Germain, S.** (1826). Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques, et équation générale de ces surfaces.[With copious MS. additions by the authoress.]. Huzard-Courcier..

[4] **Lagrange, J. L.** (1828). Note communiquée aux Commissaires pour le prix de la surface élastique décembre 1811. Ann. Chimie Physique, 39(149151), 1828..

[5] **Cauchy, A. L.** (1828). Sur l'équilibre et le mouvement d'une plaque solide. Exercises de Matematique, 3, 328-355..

[6] **Poisson, S. D.** (1829). Addition au mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques. Mémoires de l'Académie Royal des Sciences de l'Institut de France, 8, 623-627..

[7] **Wang, C. M., Lim, G. T., Reddy, J. N., & Lee, K. H.** (2001). Relationships between bending solutions of Reissner and Mindlin plate theories. Engineering structures, 23(7), 838-849..

[8] **Thai, Chien H., et al.** (2012). Static, free vibration, and buckling analysis of laminated composite Reissner–Mindlin plates using NURBS-based isogeometric approach. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 91(6), 571-603..

[9] **Hughes, T. J. R.** The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987..

[10] **Bucalem, M. L., & Bathe, K. J.** (1997). Finite element analysis of shell structures. Archives of Computational Methods in Engineering, 4(1), 3-61..

[11] **Leissa, A. W.** (1973). Vibration of shells (Vol. 288). Scientific and Technical Information Office, National Aeronautics and Space Administration..

[12] **Amabili, M., & Paı¨ doussis, M. P.** (2003). Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction. Appl. Mech. Rev., 56(4), 349-381..

[13] **Amabili, M.** (2008). Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. Cambridge University Press..

[14] **Kurylov, Y., & Amabili, M.** (2010). Polynomial versus trigonometric

expansions for nonlinear vibrations of circular cylindrical shells with different boundary conditions. Journal of Sound and Vibration, 329(9), 1435-1449..

[15] **Soedel, W., & Qatu, M. S.** (2005). Vibrations of shells and plates..

[16] **Petyt, M.** (2010). Introduction to finite element vibration analysis. Cambridge university press..

[17] **Reddy, J. N.** (2006). An introduction to the finite element method. New York..

[18] **Chung, T. J.** (1978). Finite element analysis in fluid dynamics. NASA STI/Recon Technical Report A, 78..

[19] **Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., & Topp, L. J.** (1956). Stiffness and deflection analysis of complex structures. journal of the Aeronautical Sciences, 23(9), 805-823..

[20] **Clough, R. W.** (1960). The finite element method in plane stress analysis. In Proceedings of 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, Pittsburgh Pa., Sept. 8 and 9, 1960..

[21] **J.H. Argyris.** (1963). Recent advances in matrix methods of structural analysis, Pergamon Press..

[22] **Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L.** (1989). The finite element method, ; volume 1: basic formulation and linear problems..

[23] **Strang, G., Fix, G. J., & Griffin, D. S.** (1973). An analysis of the finite-element method..

[24] **Aziz, A. K. (Ed.).** (1972). The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations. Academic Press..

[25] **Oden, J. T., & Reddy, J. N.** (1976). An introduction to the mathematical theory of finite elements..

[26] **ASHWELL, D. G., & Gallagher, R. H.** (1976). Finite elements for thin shells and curved members(Book). London and New York, John Wiley and Sons, 1976. 279 p..

[27] **Batoz, J. L., Bathe, K. J., & Ho, L. W.** (1980). A study of three-node triangular plate bending elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 15(12), 1771-1812..

[28] **Holand, I.** (1969). Stiffness matrices for plate bending elements. In Finite element methods in stress analysis (pp. 159-178). TAPIR, Technical University of Norway Trondheim, Norway..

[29] **Hrabok, M. M., & Hrudey, T. M.** (1984). A review and catalogue of plate bending finite elements. Computers & Structures, 19(3), 479-495..

[30] **Parisch, H.** (1979). A critical survey of the 9-node degenerated shell element with special emphasis on thin shell application and reduced integration. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 20(3), 323-350..

[31] **R.D., M.,** 1951. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. Journal of Applied Mechanis 18, 31-38..

[32] **Whitney, J.M.,** 1973. Shear correction factors for orthotropic laminates under static load. Journal of Applied Mechanics 40, 302-304.

[33] **Oñate, E.** (2013). Structural analysis with the finite element method. Linear statics: volume 2: beams, plates and shells. Springer Science & Business Media..

[34] **7E7 fuselage becomes material issue**, Link : http://www.boeingteam.com/news/frontiers/archive/2003/may/i_tt.html, Son erişim tarihi : 15.07.2020.

[35] **CFRP module saves weight on rocket design**, Link : https://www.compositesworld.com/articles/a-giant-leap-in-rocket-weight-savings, Son erişim tarihi : 15.07.2020.

[36] **Guha Niyogi, A., Laha, M. K., & Sinha, P. K.** (1999). Finite element vibration analysis of laminated composite folded plate structures. Shock and Vibration, 6(5-6), 273-283..

[37] **Bathe, K. J.** (1982). Finite element procedures in Engineering Analysis, Prentice Hall, Englewood Cliffs..

[38] **Liu, W. H., & Huang, C. C.** (1992). Vibration analysis of folded plates. Journal of Sound and Vibration, 157(1), 123-137..

[39] **Irie, T., Yamada, G., & Kobayashi, Y.** (1984). Free vibration of a cantilever folded plate. The Journal of the Acoustical Society of America, 76(6), 1743-1748..

[40] **Rawat, A., Matsagar, V. A., & Nagpal, A. K.** (2019). Free vibration analysis of thin circular cylindrical shell with closure using finite element method. International Journal of Steel Structures, 20(1), 175-193..

[41] **Zhang, X. M., Liu, G. R., & Lam, K. Y.** (2001). Vibration analysis of thin cylindrical shells using wave propagation approach. Journal of sound and vibration, 239(3), 397-403..

[42] **Lee, H., & Kwak, M. K.** (2015). Free vibration analysis of a circular cylindrical shell using the Rayleigh–Ritz method and comparison of different shell theories. Journal of Sound and Vibration, 353, 344-377..

## ÖZGEÇMİŞ


**Ad-Soyad** : **Hasan KIYIK**

**Doğum Tarihi ve Yeri** : **19.04.1994, KONAK/İZMİR**

**E-posta** : hasankiyik@gmail.com


### ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2016, Dokuz Eylül Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makina Mühendisliği
- **Yükseklisans** : 2020, İstanbul Teknik Üniversitesi, Uçak ve Uzay Mühendisliği Anabilimdalı, Uçak ve Uzay Mühendisliği

### MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- 2018 – Türk Havacılık ve Uzay Sanayii, Yapısal Tasarım Mühendisi

### YÜKSEK LİSANS TEZİNDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Kıyık, H., Temuçin, B.T., Kaya, M.O. (2020).** Kabuk Yapıların Sonlu Elemanlar Yöntemi Kullanılarak Yapısal Olarak İncelenmesi, VIII. ULUSAL HAVACILIK VE UZAY KONFERANSI UHUK-2020-151 (Hakemlik aşamasında).

### DİĞER YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Temuçin, B.T., Kıyık, H., Özdemir, Ö., Kaya, M.O. (2020).** Katlanmış Kompozit Plakaların Yapısal Açıdan İncelenmesi, VIII. ULUSAL HAVACILIK VE UZAY KONFERANSI UHUK-2020-065 (Hakemlik aşamasında).
- **Ozden, A., Ercelik, M., Nalbant, Y., Kiyik, H., Colpan, C.O. (2016).** The Effects of Three Different Coating Techniques on the Performance of DMFCs. 8$^{th}$ International Exergy, Energy and Environment Symposium (IEES-8), Antalya, Turkey.