T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GÖZENEKLİ ORTAMDA TERS YÖNDE İLERLEYEN YANMA DALGALARININ VARLIĞI

Gamze BARLAS

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2020

Dr. Öğr. Üyesi Fatih ÖZBAĞ danışmanlığında Gamze BARLAS'ın hazırladığı **"Gözenekli Ortamda Ters Yönde İlerleyen Yanma Dalgalarının Varlığı"** konulu bu çalışma 07/07/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy çokluğu ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

İmza

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Fatih ÖZBAĞ ……..

Üye: Doç. Dr. Ali AKGÜL ……

Üye: Doç. Dr. Mahmut MODANLI ……...

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini onaylarım.

Doç. Dr. İsmail HİLALİ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Kanunu'ndaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
ŞEKİLLER DİZİNİ iv
1.GİRİŞ 1
1.1. Matematiksel Model 3
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR 5
2.1. Hızlı Yanma Dalgaları 6
2.2. Yavaş Yanma Dalgaları 7
2.3. Ara Yanma Dalgaları 8
3. MATERYAL ve YÖNTEM 10
3.1. Materyal 10
3.2. Yöntem 10
3.2.1. İndirgenmiş Model 10
3.2.2. Kritik Noktalar 12
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA 15
4.1. Ters Yönde İlerleyen Yanma Dalgaları 15
4.2. Ters Yönde İlerleyen Yanma Dalgalarının Varlığı 16
4.2.1. C Eğrisi 17
4.2.2. Bölge 1 26
4.2.3. Bölge 2 29
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER 33
5.1. Sonuçlar 33
5.2. Öneriler 33
KAYNAKLAR 34
ÖZGEÇMİŞ 36

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GÖZENEKLİ ORTAMDA TERS YÖNDE İLERLEYEN YANMA DALGALARININ VARLIĞI

Gamze BARLAS

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Fatih ÖZBAĞ
Yıl: 2020, Sayfa: 36

Bu çalışmada akışkan olmayan petrol çıkarma yöntemlerinde yaygın olarak kullanılan yanma dalgalarını ele aldık. Temel amacımız başlangıçta bir miktar yakıt bulunan gözenekli ortama oksijen enjekte edilmesiyle oluşan yanma dalgalarının varlığını ispatlamaktır. Yanma dalgaları sürekli ve basit olmayan ilerleyen dalgalardır. Bir ilerleyen dalga bir kısmi diferansiyel denklemin sabit hızla ilerleyen ve şeklini koruyan bir çözümüdür. Burada ele aldığımız yanma sistemi parçalı parabolik bir sistemdir. Bu sistemde denklemlerin birinde difüzyon vardır fakat diğerlerinde yoktur. Üç kısmi diferansiyel denklemden sıcaklık, oksijen ve yakıt değişkenlerinden oluşan modelimiz daha basit ve elverişli hale indirgenebilir, bu da bize ilerleyen dalgaların varlığını lineer olmayan sistemlerin davranışlarını incelemede kullanılan faz düzlemi analizi ile ispatlama imkânı sağlar. Daha önceki çalışmalarda oksijen ile sıcaklığın hızı aynı ve yanma dalgasının hızı pozitif kabul edilip, varlık ispatı yapılmıştır. Bu çalışmada oksijenin sıcaklıktan daha hızlı ilerlediğini ve yanma dalgasının hızını negatif olarak ele alıp ters yönde ilerleyen yanma dalgalarının varlığı ispatlandı.

ANAHTAR KELİMELER: Ters yönde ilerleyen yanma dalgası, ilerleyen dalga, gözenekli ortam.

ABSTRACT

Msc Thesis

EXISTENCE OF COUNTER-FLOW COMBUSTION WAVES IN POROUS MEDIA

Gamze BARLAS

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Fatih ÖZBAĞ
Year: 2020, Page: 36

In this work we consider combustion waves that are studied widely in heavy oil recovery techniques. Our main goal is to prove the existence of combustion waves that occur when air is injected into a porous medium containing initially some solid fuel. Combustion waves are continuous nontrivial traveling waves. A traveling wave is a solution of a partial differential equation that moves with constant velocity while maintaining its shape. Our analysis consists of showing existence of traveling waves and constructing possible generic wave sequences. We consider here a combustion system that is a partly parabolic system which has diffusion in one equation and no diffusion in others. Our model which has three partial differential equations that give temperature, oxygen and fuel balance laws can be simplified in a convenient form which allows us to prove the existence of traveling waves by a technique for studying the behavior of nonlinear systems that is called phase plane analysis. In previous work heat and oxygen had same velocity and combustion wave velocity was assumed positive and their existence was proved. In this study we consider negative combustion wave speed and oxygen is transported faster than temperature then we prove the existence of counterflow combustion waves.

KEYWORDS: Counterflow combustion wave, Traveling wave, Porous media.

TEŞEKKÜR

Tezin konusunun seçiminde, uygulanmasında ve çalışmamda yardımlarını esirgemeyen danışmanım sayın Dr. Öğr. Üyesi Fatih ÖZBAĞ'a teşekkür ederim. Yüksek lisans eğitim sürecinde tanıştığım Matematik öğretmenleri Mustafa ACAR, Serkan ÇELİK hocalarıma yardım ve destekleri için teşekkür ederim. Son olarak bana her koşulda ve her durumda destek olan çok değerli aileme teşekkür ederim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 4.1. C eğrisi, Bölge 1 ve Bölge 2 17
Şekil 4.2. (4.5)-(4.6)'nın faz diyagramı 19
Şekil 4.3. (4.11)-(4.12)'nin faz diyagramı 21
Şekil 4.4. (4.13)-(4.14)'ün faz diyagramı 23
Şekil 4.5. (4.1)-(4.2)'nin faz diyagramı 26
Şekil 4.6. (4.15)-(4.16)'nın faz diyagramı 27
Şekil 4.7. (4.19)-(4.20)' nin faz diyagramı 29
Şekil 4.8. (4.1)-(4.2)' nin faz diyagramı 30
Şekil 4.9. C ve C̃ eğrisi 30
Şekil 4.10. (4.23)-(4.24) ün faz diyagramı 32

1.GİRİŞ

Bu çalışmada akışkan olmayan petrol çıkarma yöntemlerinde yaygın olarak kullanılan yanma dalgalarını ele aldık. Temel amacımız başlangıçta bir miktar yakıt bulunan gözenekli ortama oksijen enjekte edilmesiyle oluşan yanma dalgalarının varlığını incelemektir. Bu dalgaların tanımlanması ve anlaşılması petrol üretimini maksimize etmeye yardımcı olacaktır. Gözenekli ortamdaki yanma dalgaları ile ilgili analitik çalışmalar (Akkutlu ve Yortos, 2003), (Aldushin ve ark., 1999), (Aldushin ve Seplyarksky, 1978), (Bruining ve ark., 2009), (Chapiro ve ark., 2012), (Chapiro ve ark., 2014), (Chapiro ve ark., 2015), (Mailybaev ve ark., 2011), (Marchesin ve Schecter, 2003), (Mota ve Schecter, 2006), (Schecter ve Marchesin , 2001), (Schult ve ark., 1996), (Wahle ve ark., 2003), (Özbağ ve ark., 2018), (Schult ve ark., 1998), (Zeldovich ve ark., 1985), (Souza, 2008), (Chapiro ve Souza, 2016), (Ghazaryan ve ark., 2010), (Chapiro ve Senos, 2016), (Schecter, 1987) bulunmaktadır.

Başlangıçta bir miktar katı yakıt içeren gözenekli bir ortama hava enjekte edildiğinde meydana gelen yanma dalgalarını göz önünde bulunduruyoruz. İncelediğimiz denklem sistemi, bir denkleminde difüzyon olan ve diğer denklemlerinde difüzyon olmayan kısmen parabolik bir sistemdir. Bölüm (1.1)'de sıcaklık, oksijen ve yakıt dengesi yasalarını ifade eden üç denklemden oluşan model tarif edilmektedir. Modelde oksijen difüzyonu ihmal edilmektedir ve ayrıca difüzyon olmayan katı bir reaktan da bulunmaktadır. (Chapiro ve ark., 2014)'de oksijen ve ısı aynı hızda taşınmaktadır. Bu çalışmada, fiziksel olarak daha gerçekçi olduğundan, oksijenin sıcaklıktan daha hızlı taşındığı varsayılmaktadır.

Bir boyutlu yanma modelleri için iki temel konfigürasyon bulunmaktadır: ortak-akış (co-flow) yanmasında yanma cephesine enjekte edilen gaz, akış yönünde hareket

ettiği varsayılmaktadır; ters-akış (counterflow) yanması sırasında yanma cephesine enjekte edilen gaz, akış ile zıt yöndedir ve yanma dalgası negatif bir hıza sahiptir.

Burada ele alınan model (Akkutlu ve Yortos, 2003) tarafından önerilmiştir ve daha sonra (Chapiro ve ark., 2012) tarafından üzerinde daha fazla çalışmalar gerçekleştirilmiştir. Bu model (Chapiro ve ark., 2014) tarafından katı yakıt içeren gözenekli bir ortama hava enjekte edildiğinde oluşan çeşitli bulguları gözlemlemek ve daha detaylı bir araştırmaya izin verebilecek düzeyde olması için basitleştirilmiştir. Bu sadeleştirme, faz düzlemi analizi ile ilerleyen dalgaların varlığını ispatlamaya olanak sağlamıştır. Bütün bu makalelerde oksijen ve ısı aynı hızda taşınmaktadır ve ortak-akış yanmasına değinilmektedir. (Özbağ ve ark., 2018)'de oksijenin hızının sıcaklığın hızından daha büyük kabul edilerek ortak-akış yanma dalgalarının varlığı ispatlanmıştır. Bu anlamda mevcut çalışmada ters yönde ilerleyen yanma dalgalarının varlığı ispatlanarak (Özbağ ve ark., 2018) daha da genişletilmiştir.

Bazı çalışmalarda da ters-akış yanması üzerinde çalışılmıştır. Örneğin, (Schult ve ark.,1998), reaksiyon hızındaki Arrhenius faktöründeki kuvvetli bir doğrusal-olmayan ilişkinin varlığını araştırmışlardır. Bu da, sıcaklık azaldığında (Zeldovich ve ark., 1985) reaksiyon hızının ihmal edilmesini sağlar. (Souza, 2008)'de; Riemann problemi araştırılmış ve ters-yönde ilerleyen yanma dalgası için gerekli bazı koşullar elde edilmiştir. (Chapiro ve Souza, 2016) ters yönde ileryen yanma dalgası çözümünü tekil pertürbasyon analizi kullanılarak daha da genişletmiştir.

(Chapiro ve ark., 2014)'de elde edilen model Bölüm (1.1)'de gözden geçirilmektedir. Model; sıcaklık, oksijen ve yakıt dengesi yasalarını ifade eden üç denklemden oluşmaktadır. Yanma bir eşik sıcaklık değerinde başlamaktadır. Bölüm 2'de daha önceki çalışmalarda varlığı ispatlanmış hızlı, yavaş ve ara yanma dalgalarına değinilmiştir. Bölüm 3'te ilerleyen yanma dalga sistemi iki boyuta indirgenip kritik

noktaları bulunmuştur. Bölüm 4'te ters yönde ilerleyen yanma dalgalarının varlığı ile ilgili ana teorem verilip ispatı yapılmıştır.

1.1. Matematiksel Model

Orijinal model (Akkutlu ve Yortos, 2003)'de ileri sürülmüştür. Modelimiz üç bağımlı değişkenden oluşur. Sıcaklık θ, oksijen Y, yakıt ρ:

$$\partial_t \theta + a\,\partial_x \theta = \partial_{xx}\theta + \rho Y \Phi, \tag{1.1}$$

$$\partial_t \rho = -\rho Y \Phi, \tag{1.2}$$

$$\partial_t Y + b\,\partial_x Y = -\rho Y \Phi, \tag{1.3}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} e^{\left(-\frac{1}{\theta}\right)} & , \quad \theta > 0 \\ 0 & \quad \theta \leq 0 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Burada a > 0 ve b > 0 ; sırasıyla sıcaklığın ve oksijenin taşınma hızlarıdır ve Φ birim reaksiyon hızıdır.

Gazın termal kapasitesi ortamın termal kapasitesinden çok daha düşük olduğu için gözenekli ortamlarda a < b varsayıyoruz. (Chapiro ve Senos, 2016)'de çalışılan; oksijen hızının kapasitesinin, sıcaklığın hız kapasitesine kıyasla önemsiz olduğu durumda, a = b yi vermektedir. Yanma işleminin belirli bir tutuşma sıcaklığının üzerinde gerçekleştiği varsayılmaktadır. Tutuşma sıcaklığı θ = 0 olması için normalize edilmektedir. Denklem (1.1) ısı dengesi denklemidir; ısının taşınmasını ve difüzyonunu ve ısının kimyasal tepkimede üretilmesini temsil etmektedir. Denklem (1.2) hareketsiz yakıt balansı denklemidir ve katı yakıt tüketimini temsil etmektedir. Denklem (1.3), oksijen balansı denklemidir ve oksijen taşınmasını ve tüketimini göstermektedir. Parametre sayısının azaltılması için denklemler boyutsuzlaştırılmıştır. Ayrıca hem yakıt hem de oksijen konsantrasyonun negatif olmadığı çözümler dikkate alınmıştır.

(1.1)–(1.3) denklemleri için $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$ koşullarında sabit sınır koşulları kullanılmaktadır;

$$(\theta, \rho, Y)(-\infty, t) = (\theta^L, \rho^L, Y^L), \qquad (\theta, \rho, Y)(\infty, t) = (\theta^R, \rho^R, Y^R).$$

Reaksiyonun sınırlarda olamayacağını varsayıyoruz. Bu durumda $x = \pm\infty$, olduğunda aşağıdakilerden herhangi birinin olması gerekmektedir:

- Düşük sıcaklık $\theta \leq 0$ (sıcaklık kontrolü veya TC),
- Yakıt eksikliği $\rho = 0$ (yakıt kontrolü veya FC),
- Oksijen eksikliği $Y = 0$ (oksijen kontrolü veya OC).

İki yada bu üç şartın hepsi aynı anda var olabilir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

$(\theta^-, \rho^-, Y^-) \xrightarrow{c} (\theta^+, \rho^+, Y^+)$; solda (θ^-, ρ^-, Y^-) ile sağda (θ^+, ρ^+, Y^+) yı birbirine bağlayan c hızı ile ilerleyen bir yanma dalgası bu şekilde gösterilir. Dalganın sağ ve sol durumlarında, (1.1) - (1.3)'deki reaksiyon terimleri ortadan kalkmaktadır. Reaksiyon terimlerinin ortadan kalktığı durumlar; TC, FC, OC, TC ∩ FC, TC ∩ OC, FC ∩ OC, veya TC ∩ FC ∩ OC olarak sınıflandırılmıştır. Durumların türü o durumda hangi koşulların geçerli olduğunu göstermektedir; örneğin, bir TC ∩ FC durumunda; $\theta \leq 0$, $\rho = 0$, ve $Y > 0$ olmaktadır. Sınır koşulları sadece FC, OC ve TC den biri olabilir. Bunların kesişimleri sınır koşullarında yer alamaz. Örneğin TC ∩ OC ilk ve son durumların türü olamaz ancak ara durumlarda sağ ve sol durum olarak bulunabilirler.

(Chapiro ve ark., 2014) çalışmasında, oksijen ve sıcaklığın hızı eşit kabul edilip pozitif hıza sahip (c>0), her iki son duruma üssel olarak yaklaşan, iki hızlı $(c_f > a > 0)$ ve iki yavaş $(0 < c_s < a)$ yanma dalgası olduğu belirlenmiştir: $FC \xrightarrow{c_f} TC$, $OC \xrightarrow{c_f} TC$, $FC \xrightarrow{c_s} OC$, $TC \xrightarrow{c_s} OC$.

(Chapiro ve Senos, 2017) çalışmasında, oksijen ve sıcaklığın hızı eşit kabul edilip negatif hıza sahip (c < 0), her iki son duruma üssel olarak yaklaşan iki tane ters yönde ilerleyen yanma dalgası belirlenmiştir: $TC \xrightarrow{c_c} OC$, $TC \xrightarrow{c_c} FC$.

(Özbağ ve ark., 2018) çalışmasında, oksijenin hızının sıcaklığın hızından büyük kabul edilip pozitif hıza sahip (c > 0), her iki son duruma üssel olarak yaklaşan iki hızlı $(c_f > b > a > 0)$, iki yavaş $(0 < c_s < a < b)$ ve iki ara $(a < c_m < b)$ yanma dalgası belirlenmiştir: $FC \xrightarrow{c_f} TC$, $OC \xrightarrow{c_f} TC$, $FC \xrightarrow{c_s} OC$, $TC \xrightarrow{c_s} OC$, $FC \xrightarrow{c_m} OC$, $FC \xrightarrow{c_m} TC$.

Bu yanma dalgalarına Bölüm 2.1., 2.2. ve 2.3'te kısaca değinilmiştir.

2.1. Hızlı Yanma Dalgaları

Hızlı yanma dalgasında yanma, düşük sıcaklıktaki bir bölgede hem yakıt hem de oksijenle başlar. Yanma, yakıt ve oksijenin bulunduğu sağa doğru ilerler. Isı daha düşük bir hızla ilerlediğinden, üretilen ısı yanma cephesinin arkasında kalır. Yanma cephesinin arkasında, yakıt ya da oksijen tükendiği için reaksiyon durur. Bu cepheler (Özbağ ve ark., 2018) çalışmasında ele alınmıştır.

Teorem 2.1 (Hızlı Yanma Dalgaları)

1. $FC \cap OC \xrightarrow{c_f} TC$ *dalgası. Burada* $\theta^+ \leq 0,\ \rho^+ > 0$ *ve* $(b-a)\theta^+ + b\,\rho^+ > 0$ *verilmiş olsun.* $(\theta^-, 0,0)$ *den* (θ^+, ρ^+, Y_*) *a giden* $\theta^- > 0,\ c_f > b$ *ve* $Y_* > 0$ *olacak şekilde* c_f *hızına sahip bir yanma dalgası vardır. Burada;*

$$\theta^- = \theta^+ + \frac{bY_*\,\rho^+}{(b-a)Y_* + a\rho^+}\ , \qquad c_f = \frac{bY_*}{Y_* - \rho^+}\ .$$

2. $FC \xrightarrow{c_f} TC$ *ve* $OC \xrightarrow{c_f} TC$ *dalgaları. Burada* $\theta^+ \leq 0,\ \rho^+ > 0$ *ve* $(b-a)\theta^+ + b\,\rho^+ > 0$ *verilmiş olsun. Eğer* $Y^+ > Y_*$ *ise,*

   a. $(\theta^-, 0, Y^-)$ *den* (θ^+, ρ^+, Y^+) *ya giden* $\theta^- > 0,\ Y^-$ *ve* $0 < Y^- < Y^+$ *olacak şekilde* $c_f > b$ *hızında bir yanma dalgası vardır. Buradaki* $FC \xrightarrow{c_f} TC$ *tipindeki yanma dalgasında,*

$$\theta^- = \theta^+ + \frac{c_f}{c_f - a}\rho^+\ ,\ \ Y^- = Y^+ - \frac{c_f}{c_f - b}\rho^+.$$

b. $(\theta^-,\ \rho^-, 0)$ *den* (θ^+, ρ^+, Y^+) *ya giden* $\theta^- > 0$, ρ^- *ve* $0 < \rho^- < \rho^+$ *olacak şekilde* $c_f > b$ *hızına sahip bir yanma dalgası vardır. Burada* $OC \xrightarrow{c_f} TC$ *tipindeki yanma dalgasında,*

$$\theta^- = \theta^+ + \frac{c_f - b}{c_f - a} Y^+ , \quad \rho^- = \rho^+ - \frac{c_f - b}{c_f} Y^+.$$

$\mathrm{FC} \cap \mathrm{OC} \xrightarrow{c_f} \mathrm{TC}, \mathrm{FC} \xrightarrow{c_f} \mathrm{TC}$ ve $\mathrm{OC} \xrightarrow{c_f} \mathrm{TC}$ yanma dalgalarının dışında $c_f > b$ tipinde yanma dalgaları yoktur.

2.2. Yavaş Yanma Dalgaları

Yavaş yanma dalgasında, hareket halindeki gaz oksijeni katı yakıtın bulunduğu fakat oksijenin bulunmadığı bölgeye getirir. Yanma sağa doğru ilerler ve daha yüksek hızda taşınan ısı yanma cephesinin önünde süpürülür. Reaksiyonda tüm oksijen tüketilir ve oksijen daha yüksek hızda taşınsa da hiçbiri önden süpürülmez. Yanma cephesinin arkasında katı yakıt tükenmiş olduğu için reaksiyon yoktur.

Teorem 2.2 (Yavaş Yanma Dalgaları)

1. $FC \xrightarrow{c_s} OC$ *ve* $FC \cap TC \xrightarrow{c_s} OC$ *dalgaları. Burada* $\theta^- \geq 0$ *ve* $Y^- > 0$ *dır. Her* $\rho^+ > 0$ *için* $a\,\rho^+ - (b-a)Y^- > 0$ *olacak şekilde* $\theta^+ > \theta^-$ *ve* c_s, $0 < c_s < a$ *vardır öyle ki,* $(\theta^-, 0, Y^-)$ *den* $(\theta^+, \rho^+, 0)$ *a giden* c_s *hızına sahip bir yanma dalgası vardır. Burada;*

$$\theta^+ = \theta^- + \frac{bY^-\rho^+}{a\rho^+ - (b-a)Y^-} \quad , \quad c_s = \frac{bY^-}{\rho^+ + Y^-}.$$

2. $TC \xrightarrow{c_s} OC$ *dalgası. Burada* $\theta^- < 0 \; ve \; \rho^+ > 0$ *dır. Her* Y^- *için* $a\theta^- + bY^- > 0$ *olacak şekilde* $\rho^-, 0 < \rho^- < \rho^+ \; ve \; c_s \,, \; 0 < c_s < a$ *vardır öyle ki* (θ^-, ρ^-, Y^-) *den,* $(\theta^+, \rho^+, 0)$ *a giden* c_s *hızına sahip bir yanma dalgası vardır. Burada;*

$$\rho^- = \rho^+ - \frac{b - c_s}{c_s} Y^-, \qquad \theta^+ = \theta^- + \frac{b - c_s}{a - c_s} Y^-.$$

2.3. Ara Yanma Dalgaları

Ara yanma dalgaları iki tiptedir. Birincisi, hareket halindeki gaz oksijeni katı yakıtın bulunduğu fakat oksijenin bulunmadığı bölgeye getirmesi ile yavaş yanma dalgasına benzer. Yanma sağa doğru ilerler, ancak yavaş yanma dalgalarının aksine üretilen ısı arka tarafta kalır. Tüm oksijen reaksiyonda tüketilir, bu nedenle oksijen daha yüksek hızla taşınsa bile önden hiçbiri süpürülmez. Katı yakıt tükendiği için yanma arkada sonlanır. Diğer ara yanma dalga tipi ise hareket halindeki gaz oksijeni yakıtın bulunduğu bölgeye getirir. Fakat sıcaklık çok düşüktür. Yanma sağa doğru ilerler ve üretilen ısı yanma cephesinin arkasında kalır. Bununla birlikte, reaksiyondaki bütün oksijen yanmaz; kalan oksijen daha yüksek hızda önden süpürülür. Yanma cephesinin arkasında reaksiyon durur, çünkü yakıt bitmiştir.

Teorem 2.3 (Ara Yanma Dalgaları)

1. $FC \xrightarrow{c_m} OC$ *ve* $FC \xrightarrow{c_m} TC \cap OC$ *dalgaları. Burada* $\theta^+ \geq 0 \; ve \; \rho^+ > 0$ *dır. Her* $Y^- > 0$ *için* $(b - a)Y^- - a\,\rho^+ > 0$ *olacak şekilde* $\theta^- > \theta^+ \; ve \; c_m \,,$ $a < c_m < b$ *vardır öyle ki,* $(\theta^-, 0, Y^-)$ *den,* $(\theta^+, \rho^+, 0)$ *ya giden* c_m *hızına sahip bir yanma dalgası vardır. Burada;*

$$\theta^- = \theta^+ + \frac{bY^-\rho^+}{(b-a)Y^- - a\rho^+} \quad , \qquad c_m = \frac{bY^-}{Y^- + \rho^+} \; .$$

2. *$FC \xrightarrow{c_m} TC$ dalgası. Burada $\theta^+ \leq 0$, $\rho^+ > 0$ ve $\theta^+ + \rho^+ \geq 0$ dır. Her $Y^- > 0$ için $(b-a)Y^- - a\,\rho^+ > 0$ olacak şekilde $\theta^- > 0$, Y^+, $0 < Y^+ < Y^-$ ve c_m, $a < c_m < b$ vardır öyle ki, $(\theta^-, 0, Y^-)$ den (θ^+, ρ^+, Y^+) ya giden c_m hızında bir yanma dalgası vardır. Burada;*

$$\theta^- = \theta^+ + \frac{c_m}{c_m - a}\rho^+ \quad , \qquad Y^+ = Y^- - \frac{c_m}{b - c_m}\rho^+.$$

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Materyal

Bu çalışmada konuyla ilgili makalelere, dergilere, daha önceden yayınlanmış yüksek lisans ve doktora tezlerine hem internet üzerinden hem de kütüphaneler aracılığıyla ulaşılmıştır, gerekli literatür taramaları yapılmıştır.

3.2. Yöntem

Yerli ve yabancı kaynaklardaki veriler incelenmiştir. İlgili konunun tarihçesi ve konuyla ilgili daha önceden yapılan çalışmalar farklı makale ve tezlerden araştırılmıştır. Araştırmalar sonucu elde edilen bulgular ışığında çalışmalar sürdürülmüştür.

Bu bölümde modelimizi daha basit ve elverişli hale getirmek için iki boyuta indirgenecektir. Bu da bize ilerleyen dalgaların varlığını lineer olmayan sistemlerin davranışlarını incelemede kullanılan faz düzlemi analizi ile ispatlama imkânı sağlar. Modelimizi iki boyuta indirgedikten sonra kritik noktalar bulunacaktır.

3.2.1. İndirgenmiş Model

Bu bölümde modelimizi iki boyuta indiriyoruz. Denklem (1.2)'yi (1.1)'e ekledikten sonra (1.2) ile değiştirilirse ve denklem (1.3)'ten (1.2)'yi çıkardıktan sonra (1.3) ile değiştirilirse,

$$\partial_t\theta + a\,\partial_x\theta = \partial_{xx}\theta + \rho Y\,\Phi(\theta), \tag{3.1}$$

$$\partial_t(\theta + \rho) + a\,\partial_x\theta = \partial_{xx}\theta, \tag{3.2}$$

$$\partial_t\,(Y-\rho)+b\,\partial_x Y=0, \tag{3.3}$$

denklem sistemi elde edilir. (3.1)-(3.3)'te $\xi = x - ct$ dönüşümü ile hareketli koordinata geçirilirse,

$$\partial_t\theta=(c-a)\,\partial_\xi\theta+\partial_{\xi\xi}\theta+\rho Y\Phi(\theta), \tag{3.4}$$

$$\partial_t(\theta+\rho)=(c-a)\,\partial_\xi\theta+\partial_{\xi\xi}\theta+c\,\partial_\xi\rho, \tag{3.5}$$

$$\partial_t\,(Y-\rho)=(c-b)\,\partial_\xi Y-c\,\partial_\xi\rho, \tag{3.6}$$

denklem sistemi elde edilir. (3.4)-(3.6)'nın sabit çözümleri adi diferansiyel denklem sistemini sağlar.

$$0=\ (c-a)\,\partial_\xi\theta+\partial_{\xi\xi}\theta+\rho Y\Phi(\theta), \tag{3.7}$$

$$0=\ (c-a)\,\partial_\xi\theta+\partial_{\xi\xi}\theta+c\,\partial_\xi\rho, \tag{3.8}$$

$$0=\ (c-b)\,\partial_\xi Y-c\,\partial_\xi\rho, \tag{3.9}$$

denklem sistemi elde edilir. (3.7)'de $v_1=\partial_\xi\theta$ olsun ve (3.8) – (3.9)'te integral alınırsa,

$$\dot{\theta}=\ v_1, \tag{3.10}$$

$$\dot{v}_1=(a-c)v_1-\rho Y\Phi(\theta), \tag{3.11}$$

$$w_1=(c-a)\theta+\ v_1+c\rho, \tag{3.12}$$

$$w_2=(c-b\,)Y-c\rho, \tag{3.13}$$

sistemini elde ederiz. w_1 ve w_2 sabittir. (3.12)'yi kullanarak v_1 i, (3.13)'ü kullanarak Y'yi (3.10)-(3.11)'de yerine yazarsak,

$$\dot{\theta}=(a-c)\theta-c\rho+w_1, \tag{3.14}$$

$$\dot{\rho} = \frac{c\rho+w_2}{c(c-b)}\rho\Phi(\theta), \tag{3.15}$$

indirgenmiş dalga sistemi elde edilir. Burada w_1 ve w_2 birer parametreler vektörüdür. (3.14)-(3.15) denklemlerinin iki değişmez doğrusu vardır. Bunlar $\rho = 0$ ve $\rho = \frac{-w_2}{c}$ dir. $\rho = \frac{-w_2}{c}$ değişmez doğrusu $Y = \frac{c\rho+w_2}{c-b}$ olduğundan Y=0 a karşılık gelir.

3.2.2. Kritik Noktalar

(3.14)-(3.15) denklemlerinde tüm kritik noktaları bulmak için $\dot{\theta} = 0$ ve $\dot{\rho} = 0$ alınır. Eğer kritik nokta FC tipindeyse yakıt yoktur ($\rho = 0$), oksijen vardır (Y > 0) ve pozitif sıcaklığa sahiptir ($\theta > 0$). Yani;

$$FC = \{(\theta,\rho):\ \theta > 0, \rho = 0,\ \frac{c\rho+w_2}{c-b} > 0 \text{ ve } (a-c)\theta - c\rho + w_1 = 0\ \}.$$

Eğer bir kritik nokta OC tipinde ise, o zaman oksijen yoktur (Y=0), yakıt vardır ($\rho > 0$) ve pozitif sıcaklığa sahiptir ($\theta > 0$). Yani;

$$OC = \{(\theta,\rho):\ \theta > 0,\ \rho > 0, c\rho + w_2 = 0 \text{ ve } (a-c)\theta - c\rho + w_1 = 0\ \}.$$

Eğer bir kritik nokta $FC \cap OC$ tipinde ise, o zaman oksijen (Y = 0) ve yakıt ($\rho = 0$) yoktur, ancak pozitif sıcaklığa sahiptir ($\theta > 0$).Yani;

$$FC \cap OC = \{(\theta,\rho): \theta > 0,\ \rho = 0,\ c\rho + w_2 = 0 \text{ ve } (a-c)\theta - c\rho + w_1 = 0\ \}.$$

Eğer bir kritik nokta TC tipinde ise, o zaman oksijeni (Y> 0) ve yakıt ($\rho > 0$) vardır, ancak düşük sıcaklığa sahiptir ($\theta \leq 0$). Yani;

$$TC = \{(\theta,\rho):\ \theta \leq 0,\ \rho > 0,\ \frac{c\rho+w_2}{c-b} > 0 \text{ ve } (a-c)\theta - c\rho + w_1 = 0\ \}.$$

Eğer bir kritik nokta $TC \cap FC$ tipinde ise, o zaman oksijen (Y>0) vardır, yakıt ($\rho = 0$) yoktur ve düşük sıcaklığa sahiptir ($\theta \leq 0$).Yani;

$$TC \cap FC = \{(\theta, \rho) : \theta \leq 0,\ \rho = 0,\ \frac{c\rho + w_2}{c-b} > 0 \text{ ve } (a-c)\theta - c\rho + w_1 = 0\}.$$

Eğer bir kritik nokta $TC \cap OC$ tipinde ise, o zaman oksijen(Y=0) ve yakıt $(\rho > 0)$, ancak düşük sıcaklığa sahiptir $(\theta \leq 0)$. Yani;

$$TC \cap OC = \{(\theta, \rho): \theta \leq 0,\ \rho > 0,\ c\rho + w_2 = 0 \text{ ve } (a-c)\theta - c\rho + w_1 = 0\}.$$

Eğer bir kritik nokta $TC \cap FC \cap OC$ tipinde ise o zaman oksijen $(Y=0)$ ve yakıt $(\rho = 0)$ yoktur, ancak düşük sıcaklığa sahiptir $(\theta \leq 0)$.Yani;

$$TC \cap FC \cap OC = \{(\theta, \rho) : \theta \leq 0, \rho = 0, c\rho + w_2 = 0 \text{ ve } (a-c)\theta - c\rho + w_1 = 0\}.$$

Son dört alt gruba düşük sıcaklıktaki kritik noktalar denir. (3.14)-(3.15)'in kritik noktaları bu yedi alt grubun birleşimidir. H, $(a-c)\theta - c\rho + w_1 = 0$ ile tanımlanan doğru olsun. Bu doğru tüm kritik noktaları içerir. Değişmez doğrular $\rho = \frac{-w_2}{c}$ ve $\rho = 0$ her biri yalnızca bir kritik nokta içerir. (3.14)-(3.15)'de θ ve ρ ya göre lineerize edilirse:

$$\begin{pmatrix} a-c & -c \\ \frac{c\rho + w_2}{c(c-b)}\rho\Phi'(\theta) & \frac{2c\rho + w_2}{c(c-b)}\Phi(\theta) \end{pmatrix}, \tag{3.16}$$

elde edilir. (θ, ρ) düşük sıcaklıktaki kritik nokta ise (3.16)'dan;

$$\begin{pmatrix} a-c & -c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.17}$$

elde edilir.

Önerme 3.1 *(3.14)-(3.15)'in kritik noktası düşük sıcaklıkta ise, o zaman bir öz değeri a-c dir ve öz vektörü (1,0) dır; diğer öz değeri 0 ve öz vektörü (c, a-c) dır.*

Eğer (θ, ρ) FC veya $FC \cap OC$ tipinde ise (3.6)'dan;

$$\begin{pmatrix} a-c & -c \\ 0 & \frac{w_2}{c(c-b)}\Phi(\theta) \end{pmatrix}, \tag{3.18}$$

olur. FC kümesinde, Y>0 ve $\rho = 0$ olduğu için $w_2 = (c-b)Y - c\rho = (c-b)Y < 0$ dır. $FC \cap OC$ kümesinde Y = 0 ve $\rho = 0$ ise $w_2 = 0$ dır.

Önerme 3.2 *(3.14)-(3.15)'in kritik noktaları FC veya F C ∩ OC üzerinde ise, bir özdeğeri (a – c), özvektörü (1, 0) dır. Bu özvektör, değişmez doğru boyunca* $\rho = 0$ *olduğunu göstermektedir. Eğer Y > 0 ise diğer özdeğer, negatiftir. Eğer Y = 0 ise diğer özdeğer 0 olur.*

(θ, ρ) OC tipinde ise (3.16)'dan;

$$\begin{pmatrix} a-c & -c \\ 0 & \frac{w_2}{c(c-b)}\Phi(\theta) \end{pmatrix}, \tag{3.19}$$

elde edilir. Buradan OC için Y=0 ve $\rho > 0$ bu nedenle, $c\rho + w_2 = 0$ ve $w_2 > 0$ olur.

Önerme 3.3 *Eğer (3.14) - (3.15)'in bir kritik noktası OC üzerinde ise; bir özdeğeri (a – c), özvektörü (1, 0)'dır. Bu özvektör, değişmez doğru* $\rho = \frac{-w_2}{c}$, *boyunca Y = 0 olduğunu göstermektedir.*

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde ters yönde ilerleyen yanma dalgalarının hızını negatif olarak kabul edilecektir. Gerekli matematiksel işlemler yapılarak ters yönde ilerleyen yanma dalgalarının varlığı gösterilecektir.

4.1. Ters Yönde İlerleyen Yanma Dalgaları

Ters yönde ilerleyen yanma dalgasının hızı c_c negatif olarak kabul edilmektedir.

Önerme 4.1 *Sistem (1.1)-(1.3)'te;* $TC \xrightarrow{c_c} OC$ *ve* $TC \xrightarrow{c_c} FC$ *dışında, negatif hıza sahip yanma dalgaları bulunmamaktadır.*

İspat. Gerçekten de, yakıt denklemi (1.2)'de bir adveksiyon terimi bulunmamaktadır. dolayısıyla FC nin sol durumda olma ihtimali bulunmamaktadır. Yanma dalgası oksijen akışı ile ters yönde hareket ettiğinden, OC'nin sol durumda olması da mümkün değildir. Diğer taraftan, aynı türden durumları birleştiren yanma dalgasının bulunmadığının da görülmesi kolaydır. Geriye kalan tek olasılık, $TC \xrightarrow{c_c} OC$ ve $TC \xrightarrow{c_c} FC$ dir.

Teorem 4.2 *$0 < a < b$ olsun. $a\theta^- + bY^- > 0$ kabul edelim.*

1. (θ^-, ρ^-, Y^-) *TC tipinde bir durum olsun, yani* $\theta^- \leq 0$, $\rho^- > 0$, $Y^- > 0$ *dır.* (θ^-, ρ^-, Y^-) *den* $(\theta^+, 0, 0)$ *ya giden* $\theta^+ > 0$ *ve* $c_c < 0$ *olacak şekilde* c_c *hızına sahip bir yanma dalgası vardır.*

$$\theta^+ = \theta^- + \frac{bY^-\rho^-}{a\rho^- + Y^-(b-a)} \ , \quad c_c = \frac{bY^-}{Y^- - \rho^-} \ .$$

2. (θ^-, ρ^-, Y^-) *TC tipinde bir durum olsun, yani* $\theta^- \leq 0$, $\rho^- > 0$, $Y^- > 0$ *dır.* (θ^-, ρ^-, Y^-) *den* $(\theta^+, \rho^+, 0)$ *a giden* $\theta^+ > 0$, $\rho^+ > 0$ *ve* $c_c < 0$ *olacak şekilde* c_c *hızına sahip bir yanma dalgası vardır.*

$$\theta^+ = \theta^- + \frac{Y^-(c-b)}{c-a}, \quad \rho^+ = \rho^- - Y^- \frac{(c-b)}{c}.$$

3. (θ^-, ρ^-, Y^-) *TC tipinde bir durum olsun, yani* $\theta^- \leq 0$, $\rho^- > 0$, $Y^- > 0$ *dır.* (θ^-, ρ^-, Y^-) *den* $(\theta^+, 0, Y^+)$ *a giden* $\theta^+ > 0$, $Y^+ > 0$ *ve* $c_c < 0$ *olacak şekilde* c_c *hızına sahip bir yanma dalgası vardır.*

$$\theta^+ = \theta^- + \frac{c\rho^-}{c-a} \ , \quad Y^+ = Y^- - \frac{c\rho^-}{c-b} \ .$$

4.2. Ters Yönde İlerleyen Yanma Dalgalarının Varlığı

Bu bölümde ters yönde ilerleyen yanma dalgalarının varlığı ile ilgili Teorem 4.2' yi ispatlayacağız. Önerme 4.1'den (1.1)-(1.3) sistemi için ters yönde ilerleyen dalgaların sol durumu TC olarak kabul edilir. Yani (θ^-, ρ^-, Y^-) de $\theta^- \leq 0$, $\rho^- > 0$ ve $Y^- > 0$ olur. (3.14)-(3.15)'de $(\theta^-, \rho^-, Y^-), (\theta, v_1, \rho, Y) = (\theta^-, 0, \rho^-, Y^-)$ karşılık gelir. w_1 ve w_2 sabitleri $(w_1, w_2) = \big((c-a)\theta^- + c\rho^-, (c-b)Y^- - c\rho^-\big)$ dır.

(3.14)-(3.15) denklemlerinde (w_1, w_2) yi yerine yazarsak;

$$\dot{\theta} = (a-c)(\theta - \theta^-) - c(\rho - \rho^-), \tag{4.1}$$

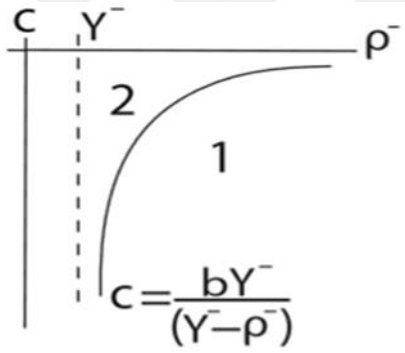
$$\dot{\rho} = \left(\frac{\rho-\rho^-}{c-b} + \frac{Y^-}{c}\right)\rho\Phi(\theta), \tag{4.2}$$

olur. (4.1)-(4.2) denklemlerinin iki değişmez doğrusu vardır. Biri $\rho = 0$ ve $\rho = \rho^- - Y^- \frac{(c-b)}{c}$ dir. İkincisi $Y = 0$ a karşılık gelir. Eğer $\rho^- = Y^- \frac{(c-b)}{c}$ ise $c = \frac{bY^-}{Y^- - \rho^-}$ dır ve $\rho = 0$ ve $Y = 0$ doğruları çakışır. $\rho = \rho^- - Y^- \frac{(c-b)}{c}$ doğrusu $\rho^- > Y^- \frac{(c-b)}{c}$ sağladığından $\rho = 0$ ın üzerinde uzanır. Ayrıca $\rho^- < Y^- \frac{(c-b)}{c}$ sağlandığında $\rho = \rho^- - Y^- \frac{(c-b)}{c}$ doğrusu $\rho = 0$ ın altında uzanır. Sabit b> 0, $\rho^- > 0$, $\theta^- \leq 0$ için (ρ^-, c) uzayında bir eğri ve iki bölge tanımlanır:

i. $C = \left\{ (\rho^-, c) : Y^- < \rho^- < \infty, \text{ ve } c = \frac{bY^-}{Y^- - \rho^-} \right\}$,

ii. Bölge 1 $= \left\{ (\rho^-, c) : Y^- < \rho^- < \infty, \text{ ve } c < \frac{bY^-}{Y^- - \rho^-} \right\}$,

iii. Bölge 2 $= \{ (\rho^-, c) : Y^- > 0 \text{ ve } (\rho^-, c) \notin C \cup \text{Bölge 1} \}$.



Şekil 4.1. C eğrisi, Bölge 1 ve Bölge 2

4.2.1. C Eğrisi

C eğrisi üzerinde $c = \frac{bY^-}{Y^- - \rho^-}$ dır. Dolayısıyla (4.1)-(4.2)'de $\rho = 0$ ve $Y = 0$ doğruları çakışıktır. $c = \frac{bY^-}{Y^- - \rho^-}$ yi önce (4.1)'de yerine yazarsak;

$$\dot{\theta} = (a - c)(\theta - \theta^-) - c(\rho - \rho^-),$$

$$\dot{\theta} = \left(a - \frac{bY^-}{Y^- - \rho^-}\right)(\theta - \theta^-) - \frac{bY^-}{Y^- - \rho^-}(\rho - \rho^-),$$

$$\dot{\theta} = \left(\frac{aY^- - a\rho^- - bY^-}{Y^- - \rho^-}\right)(\theta - \theta^-) - \frac{bY^-}{Y^- - \rho^-}(\rho - \rho^-),$$

gerekli işlemler yapılıp ortak paranteze alırsak;

$$\dot{\theta} = \frac{1}{Y^- - \rho^-}((Y^-(a-b) - a\rho^-)(\theta - \theta^-) - bY^-(\rho - \rho^-)), \qquad (4.3)$$

elde edilir. Şimdi de $c = \frac{bY^-}{Y^- - \rho^-}$ yi (4.2)'de yerine yazarsak;

$$\dot{\rho} = \left(\frac{\rho - \rho^-}{c - b} + \frac{Y^-}{c}\right)\rho\Phi(\theta),$$

$$\dot{\rho} = \left(\frac{\rho - \rho^-}{\frac{bY^-}{Y^- - \rho^-} - b} + \frac{Y^-}{\frac{bY^-}{Y^- - \rho^-}}\right)\rho\Phi(\theta),$$

$$\dot{\rho} = \left(\frac{(\rho - \rho^-)(Y^- - \rho^-)}{b\rho^-} + \frac{Y^-(Y^- - \rho^-)}{bY^-}\right)\rho\Phi(\theta),$$

olur. Paydaları eşitlersek;

$$\dot{\rho} = \left(\frac{Y^-(\rho - \rho^-)(Y^- - \rho^-) + Y^-\rho^-(Y^- - \rho^-)}{b\rho^- Y^-}\right)\rho\Phi(\theta),$$

$$\dot{\rho} = \left(\frac{(Y^- - \rho^-)(Y^-\rho - Y^-\rho^- + Y^-\rho^-)}{b\rho^- Y^-}\right)\rho\Phi(\theta),$$

olur. Gerekli işlemler ve sadeleştirme yaparsak;

$$\dot{\rho} = \left(\frac{(Y^- - \rho^-)\,Y^-\rho}{b\rho^- Y^-}\right)\rho\Phi(\theta), \qquad (4.4)$$

elde edilir. **(**4.1)-(4.2) denklemlerinde c'yi yerine yazarak,

$$\dot{\theta} = \frac{1}{Y^- - \rho^-}((Y^-(a-b) - a\rho^-)(\theta - \theta^-) - bY^-(\rho - \rho^-)), \quad (4.3)$$

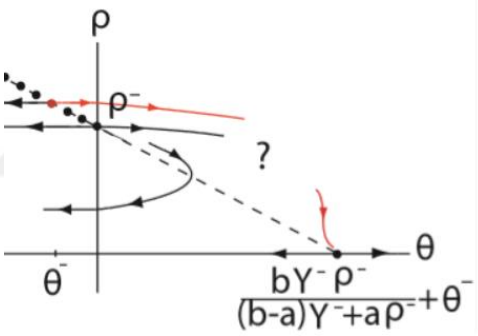
$$\dot{\rho} = \left(\frac{(Y^- - \rho^-)\,Y^-\rho}{b\rho^- Y^-}\right)\rho\Phi(\theta), \quad (4.4)$$

elde edildi. (4.3)-(4.4) denklemlerini $-b\,\rho^-(Y^- - \rho^-) > 0$ ile çarparsak;

$$\dot{\theta} = b\rho^-\big((a\rho^- + Y^-(b-a)\big)(\theta - \theta^-) + bY^-(\rho - \rho^-)), \quad (4.5)$$

$$\dot{\rho} = -\rho^2(Y^- - \rho^-)^2\Phi(\theta), \quad (4.6)$$

elde edilir. (4.5)-(4.6)'nın faz diyagramı Şekil 4.2.'de verilmiştir. (θ^-, ρ^-) noktası bir boyutlu kararlı manifolda sahiptir.



Şekil 4.2. (4.5)-(4.6)'nın faz diyagramı

$\theta > 0$ için $\dot{\rho} < 0$ ve $\theta \leq 0$ için $\dot{\rho} = 0$ dır. Ayrıca $\dot{\theta}$, $(a\rho^- + (Y^-(b-a))(\theta^- - \theta) + bY^-(\rho^- - \rho) = 0$ eş eğim doğrusu soldan sağa doğru geçildiğinde, negatiften pozitif değere değişir. (4.5)-(4.6) denklemlerinin kritik noktaları (θ^-, ρ^-) ve $(\frac{bY^-\rho^-}{(b-a)Y^- + a\rho^-} + \theta^-, 0)$ dır. Bulduğumuz (θ^-, ρ^-) nin kritik noktası için θ'nın öz değeri biri pozitiftir, diğeri sıfırdır. $(\frac{bY^-\rho^-}{(b-a)Y^- + a\rho^-} + \theta^-, 0)$ nin kritik noktası için ise öz değerinin biri pozitif, diğeri sıfırdır. Şekil 4.2.'de sol durumu (θ^-, ρ^-) olan ilerleyen dalgaların olabilmesi için,

$$\frac{bY^{-}\rho^{-}}{(b-a)Y^{-}+a\rho^{-}} + \theta^{-} > 0, \tag{4.7}$$

olmalıdır. (4.7) sağlanırsa $\rho > 0$ olduğundan $(\frac{bY^{-}\rho^{-}}{(b-a)Y^{-}+a\rho^{-}} + \theta^{-}, 0)$ noktası bir boyutlu merkez manifolduna $W^{c}(\frac{bY^{-}\rho^{-}}{(b-a)Y^{-}+a\rho^{-}} + \theta^{-}, 0)$ sahiptir. (4.7) şartı;

$$a\rho^{-}\theta^{-} + Y^{-}((b-a)\theta^{-} + b\rho^{-}) > 0, \tag{4.8}$$

eşittir. $\theta^{-} \leq 0$ olduğundan dolayı (4.8) ilerleyen dalgalarının varlığı için gerekli bir koşulun,

$$a\theta^{-} + bY^{-} > 0, \tag{4.9}$$

olduğunu gösterir. (4.8)'de bu eşitsizliği varsayarak;

$$\rho^{-} > \frac{-Y^{-}\theta^{-}(b-a)}{a\theta^{-}+bY^{-}}, \tag{4.10}$$

elde edilir. C eğrisinde $Y^{-} < \rho^{-}$ dır. Dolayısıyla $\frac{-Y^{-}\theta^{-}(b-a)}{a\theta^{-}+bY^{-}} > Y^{-}$ olduğunda (4.10) sadece bir koşul belirtir. (4.9) eşitsizliğini kabul ederek bu eşitsizlik $\theta^{-} + Y^{-} < 0$ a sadeleşir.

Önerme 4.3 *$\theta^{-} \leq 0$ ve $a\theta^{-} + bY^{-} > 0$ olsun. Bu durumda iki olasılık vardır;*

1. *$\theta^{-} + Y^{-} \geq 0$ olsun. (4.5)-(4.6) denklemleri için $\rho^{*} > Y^{-}$ vardır, öyle ki (θ^{-}, ρ^{-}) nin kararsız manifoldu, $(\frac{bY^{-}\rho^{-}}{(b-a)Y^{-}+a\rho^{-}} + \theta^{-}, 0)$ nin merkez manifoldunun bir kısmını içerir. $\rho^{*} > \rho^{-} > Y^{-}$ için (θ^{-}, ρ^{-}) nin kararsız manifoldu, merkez manifoldun üstündedir. $\rho^{*} < \rho^{-} < \infty$ için (θ^{-}, ρ^{-})nin kararsız manifoldu merkez manifoldun altındadır.*

2. *$\theta^{-} + Y^{-} < 0$ olsun. $\rho^{*} > \frac{-Y^{-}\theta^{-}(b-a)}{a\theta^{-}+bY^{-}}$ vardır, öyle ki (θ^{-}, ρ^{-}) nin kararsız manifoldu, $(\frac{bY^{-}\rho^{-}}{(b-a)Y^{-}+a\rho^{-}} + \theta^{-}, 0)$ nin merkez manifoldunun bir kısmını içerir.*

$\rho^* > \rho^- > \frac{-(b-a)Y^-\theta^-}{bY^-+a\theta^-}$ *için* (θ^-, ρ^-)*nin kararsız* $\rho^* < \rho^- < \infty$ *için* (θ^-, ρ^-) *nin kararsız manifoldu, kararlı manifoldun altındadır.*

Önerme 4.3. TC → FC ∩ OC ilerleyen yanma dalgasına karşılık gelir.

İspat. Önermenin 1. durumunda $\rho^- > Y^-$, 2. durumunda $\rho^- > \frac{-(b-a)Y^-\theta^-}{bY^-+a\theta^-}$ olduğunu varsayıyoruz. Her ikisinin de faz diyagramı Şekil 4.2.'de verilmiştir.

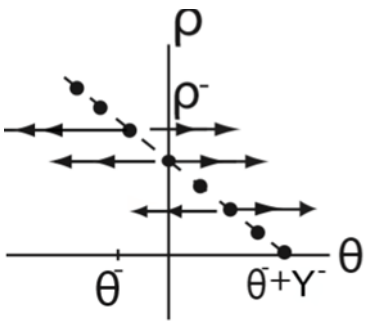
1. Durum

(4.5) ve (4.6) denklemlerinde $\rho^- \to Y^-$ limiti alınırsa;

$$\dot{\theta} = b^2(Y^-)^2[(\theta - \theta^-) + (\rho - Y^-)], \tag{4.11}$$

$$\dot{\rho} = 0, \tag{4.12}$$

elde edilir. (4.11)-(4.12)'nin faz diyagramı Şekil 4.3.'te verilmiştir. (θ^-, ρ^-) kritik noktasındaki kararsız manifoldu $\rho = \rho^-$ doğrusudur. $(\theta^- + Y^-, 0)$ merkez manifoldu $(\theta - \theta^-) + (\rho - Y^-) = 0$ doğrusudur. Y^-den biraz büyük ρ^-ler için (θ^-, ρ^-) nin kararsız manifoldu, $(\frac{bY^-\rho^-}{a\rho^-+Y^-(b-a)} + \theta^-, 0)$ nin merkez manifoldun üstünde yer alır.



Şekil 4.3. (4.11)-(4.12)'nin faz diyagramı

2. Durum

(4.5)-(4.6) denklemlerinde $\rho^- = \frac{-(b-a)Y^-\theta^-}{bY^-+a\theta^-}$ limitini alalım. İlk önce (4.5)'te $\rho^- = \frac{-(b-a)Y^-\theta^-}{bY^-+a\theta^-}$ limitini alırsak;

$$\dot{\theta} = b\rho^-((Y^-(b-a) + a\rho^-)(\theta - \theta^-) + bY^-(\rho - \rho^-)),$$

$$\dot{\theta} = \frac{-b(b-a)Y^-\theta^-}{bY^-+a\theta^-}\left[\left((Y^-(b-a) - a\frac{(b-a)Y^-\theta^-}{bY^-+a\theta^-}\right)(\theta - \theta^-) + bY^-\left(\rho + \frac{(b-a)Y^-\theta^-}{bY^-+a\theta^-}\right)\right],$$

$$\dot{\theta} = \frac{-b(b-a)Y^-\theta^-}{bY^-+a\theta^-}\left[\left(\frac{a^2Y^-\theta^- - abY^-\theta^- + b^2(Y^-)^2 - ab(Y^-)^2 + abY^-\theta^- - a^2Y^-\theta^-}{bY^-+a\theta^-}\right)(\theta - \theta^-) + bY^-\left(\frac{\rho bY^-+\rho a\theta^-+bY^-\theta^--aY^-\theta^-}{bY^-+a\theta^-}\right)\right],$$

$$\dot{\theta} = \frac{-b(b-a)Y^-\theta^-}{bY^-+a\theta^-}\left[\left[\left(\frac{b^2(Y^-)^2-ab(Y^-)^2}{bY^-+a\theta^-}\right)(\theta - \theta^-) + bY^-\left(\frac{\rho bY^-+\rho a\theta^-+bY^-\theta^--aY^-\theta^-}{bY^-+a\theta^-}\right)\right]\right],$$

$$\dot{\theta} = \frac{-b(b-a)Y^-\theta^-}{bY^-+a\theta^-}\left[\left(\frac{b(Y^-)^2(b-a)}{bY^-+a\theta^-}\right)(\theta - \theta^-) + bY^-\left(\frac{\rho(bY^-+a\theta^-)+Y^-\theta^-(b-a)}{bY^-+a\theta^-}\right)\right],$$

olur. Gerekli işlemler ve sadeleştirmeler yapılırsa;

$$\dot{\theta} = \frac{-b(b-a)Y^-\theta^-}{bY^-+a\theta^-}\left[\frac{b(Y^-)^2(b-a)\theta - b(Y^-)^2(b-a)\theta^- + bY^-\rho(bY^-+a\theta^-) + b(Y^-)^2\theta^-(b-a)}{bY^-+a\theta^-}\right],$$

ortak paranteze alırsak;

$$\dot{\theta} = \frac{-b^2(b-a)(Y^-)^2\theta^-}{(bY^-+a\theta^-)^2}[Y^-(b-a)\theta + \rho(bY^- + a\theta^-)], \qquad (4.13)$$

elde edilir. Şimdide (4.6) denkleminde $\rho^- = \frac{-(b-a)Y^-\theta^-}{bY^-+a\theta^-}$ limitini alırsak;

$$\dot{\rho} = -\rho^2(Y^- - \rho^-)^2\Phi(\theta),$$

$$\dot{\rho} = -\rho^2\left(Y^- + \frac{(b-a)Y^-\theta^-}{bY^-+a\theta^-}\right)^2\Phi(\theta),$$

$$\dot{\rho} = -\rho^2\left(\frac{b(Y^-)^2+a\theta^-Y^-+b\theta^-Y^--a\theta^-Y^-}{bY^-+a\theta^-}\right)^2\Phi(\theta),$$

sadeleştirme yapılıp ve ortak paranteze alırsak;

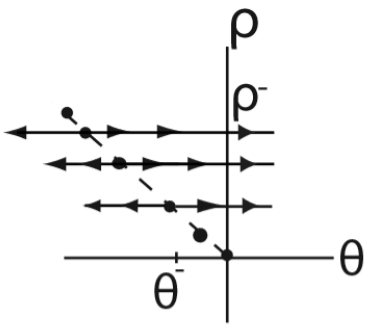
$$\dot{\rho} = -\rho^2\left(\frac{bY^-(Y^-+\theta^-)}{bY^-+a\theta^-}\right)^2\Phi(\theta), \tag{4.14}$$

elde edilir. (4.5)-(4.6) denklemlerinde $\rho^- = \frac{-(b-a)Y^-\theta^-}{bY^-+a\theta^-}$ limiti alındığında,

$$\dot{\theta} = \frac{-b^2(b-a)Y^-\theta^-}{(bY^-+a\theta^-)^2}[Y^-(b-a)\theta + \rho(bY^- + a\theta^-)], \tag{4.13}$$

$$\dot{\rho} = -\rho^2\left(\frac{bY^-(Y^-+\theta^-)}{bY^-+a\theta^-}\right)^2\Phi(\theta), \tag{4.14}$$

elde edildi. (4.13)-(4.14)'ün faz diyagramı Şekil 4.4.'te verilmiştir.



Şekil 4.4. (4.13)-(4.14)'ün faz diyagramı

$Y^-(b-a)\theta+\rho(bY^-+a\theta^-)$ doğrusundaki kritik noktaların kararsız manifoldu yatay doğrulardır. (θ^-,ρ^-) nin kararsız manifoldu $\rho=\rho^-$ doğrusudur ve $\left(\frac{bY^-\rho^-}{(b-a)Y^-+a\rho^-}+\theta^-,0\right)=(0,0)$ nın merkez manifoldu $\rho=0$ doğrusudur. Y^- den biraz büyük ρ^- ler için kararsız manifold merkez manifoldun üstündedir.

Şimdi çok büyük ρ^- ler için (θ^-,ρ^-)'nin kararsız manifoldu, $\left(\frac{bY^-\rho^-}{(b-a)Y^-+a\rho^-}+\theta^-,0\right)$ nin merkez manifoldun altında olduğunu gösterelim. $\varepsilon\in(0,\rho^-)$ için $(\theta,\rho)\in[-\theta^-+\varepsilon,-\theta^-+2\varepsilon]\times[\rho^--\varepsilon,\rho^-]$ bölgesini ele alalım.

Bu bölgede;

$$\frac{\partial\theta}{\partial\rho}=\frac{-b\rho^-}{(Y^--\rho^-)^2}\left[\frac{\left(a\rho^-+Y^-(b-a)\right)(\theta-\theta^-)+bY^-(\rho-\rho^-)}{\rho^2\Phi(\theta)}\right],$$

kısmi türevini göz önüne alalım. $\frac{-b\rho^-}{(Y^--\rho^-)^2}=K<0$ olsun.

$$K\left[\frac{\left(a\rho^-+Y^-(b-a)\right)(-\theta^-+2\varepsilon-\theta^-)+bY^-(\rho^--\rho^-)}{(\rho^--\varepsilon)^2\Phi(-\theta^-+\varepsilon)}\right]\leq\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\leq$$

$$K\left[\frac{\left(a\rho^-+Y^-(b-a)\right)(-\theta^-+\varepsilon-\theta^-)+bY^-(\rho^--\varepsilon-\rho^-)}{(\rho^-)^2\Phi(-\theta^-+2\varepsilon)}\right],$$

düzenlenirse;

$$K\left[\frac{\left(a\rho^-+Y^-(b-a)\right)(-2\theta^-+2\varepsilon)}{(\rho^--\varepsilon)^2\Phi(-\theta^-+\varepsilon)}\right]\leq\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\leq K\left[\frac{(a\rho^-+Y^-(b-a))(-2\theta^-+\varepsilon)-bY^-\varepsilon}{(\rho^-)^2\Phi(-\theta^-+2\varepsilon)}\right].$$

$\rho^-\to\infty$ giderken alt ve üst sınır 0 a yaklaşır. Çok büyük ρ^- ler için (θ^-,ρ^-) nin kararsız manifoldu, $(\frac{bY^-\rho^-}{(b-a)Y^-+a\rho^-}+\theta^-,0)$ nin merkez manifoldun altında olduğunu göstermiş olduk.

Sonuç olarak (4.5)-(4.6) denklemleri için 1. durumda $\rho^* > Y^-$ ve 2. durumda $\rho^* > \frac{-Y^-\theta^-(b-a)}{a\theta^-+bY^-}$ vardır ki (4.5)-(4.6) denklemleri için (θ^-, ρ^-) nin kararsız manifoldu, $(\frac{bY^-\rho^-}{(b-a)Y^-+a\rho^-} + \theta^- , 0)$ nin merkez manifoldunun bir kısmını içerir.

ρ^* ın tekliği Melnikov integrali kullanılarak gösterilebilir. ρ^- değişirken (4.5)-(4.6) sistemi için değişmez manifoldların ayrımı Melnikov integrali ile elde edilir. $X(\theta, \rho) = (X_1(\theta, \rho), X_2(\theta, \rho))$ (4.5)-(4.6) sisteminin sağ tarafının vektör alanı olsun. $(\theta, \rho)(\tau)$ birleştirici orbit ve $r(\tau) = divX(\theta, \rho)(\tau)$ olsun. Bu durumda Melnikov integrali aşağıdaki gibi verilir:

$$M=\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\int_0^{\tau} r(\eta)d\eta\right)(-\dot{\rho}\,\dot{\theta})\frac{\partial}{\partial\rho^-}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix} d\tau,$$

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\int_0^{\tau} r(\eta)d\eta\right)(-\dot{\rho}\,\dot{\theta})\left(\frac{b(((b-a)Y^-+2ab\rho^-)(\theta-\theta^-)+b^2Y^-(\rho-2\rho^-))}{2(Y^--\rho^-)\rho^2\Phi(\theta)}\right) d\tau,$$

$\dot{\theta}$ ve $\dot{\rho}$'yu Melnikov integralinde yerine yazdıktan sonra,

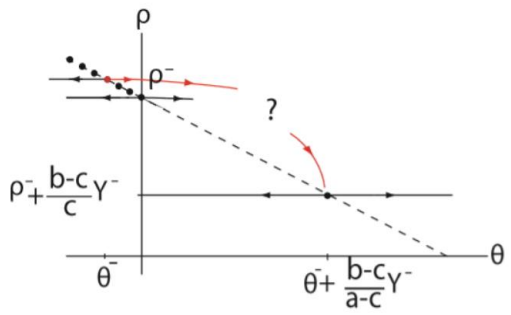
$$M=\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\int_0^{\tau} r(\eta)d\eta\right).$$

$(bY^-(Y^- - \rho^-)\rho^2\Phi(\theta))(((b-a)(Y^- + \rho^-) + 2a\rho^-)(\theta - \theta^-) + b(Y^- + \rho^-)\rho - 2bY^-\rho^-)d\tau$ olur.

$\left((b-a)(Y^- + \rho^-) + 2a\rho^-)(\theta - \theta^-) + b(Y^- + \rho^-)\rho - 2bY^-\rho^-\right)$ doğrusu, birleştirici orbit altındaki $(((b-a)Y^- + a\rho^-)(\theta - \theta^-) + bY^-(\rho - \rho^-))$ doğrusunun altında yer alır. Bu nedenle $(((b-a)(Y^- + \rho^-) + 2a\rho^-)(\theta - \theta^-) + b(Y^- + \rho^-)\rho - 2bY^-\rho^-) > 0$ ve $M<0$ olur. ρ^-, ρ^* ı geçtikçe merkez manifold $(\frac{bY^-\rho^-}{(b-a)Y^-+a\rho^-} + \theta^- , 0)$ aşağıdan yukarıya doğru kararlı manifoldu (θ^-, ρ^-) geçer. Bu manifoldların karşılaştığı herhangi bir ρ^* için geçerli olduğundan ρ^* nın tek olduğunu gösterir.

4.2.2. Bölge 1

Bölge 1'de $c < \frac{bY^-}{Y^- - \rho^-}$ dır. (4.1)-(4.2) denklemlerinden Y= 0 doğrusu $\rho = 0$ ın üzerinde, $\rho = \rho^-$ doğrusunun altındadır. Bakınız Şekil 4.5.. $\left(\theta^- + \frac{(b-c)Y^-}{(a-c)}, \rho^- + \frac{(b-c)Y^-}{c}\right)$ kritik noktası kararlı manifolda ve (θ^-, ρ^-) kritik noktası kararsız manifolda sahiptir. Eğer sol durumdan (θ^-, ρ^-), sağ duruma $\left(\theta^- + \frac{(b-c)Y^-}{(a-c)}, \rho^- + \frac{(b-c)Y^-}{c}\right)$ bir bağlantı varsa yanma dalgası oluşur.



Şekil 4.5. (4.1)-(4.2)'nin faz diyagramı

Önerme 4.4 *$\theta^- \leq 0$ ve ρ^* Önerme 4.3'deki gibi verilsin.*

1. *$\theta^- + Y^- \geq 0$ olmak üzere $\rho^- > \rho^*$ için bütün (ρ^-, c) noktaları Bölge 1'dedir ve $\theta^- + \frac{(b-c)Y^-}{(a-c)} > 0$ dır. Her ρ^- için $c < \frac{bY^-}{Y^- - \rho^-}$ vardır öyle ki (θ^-, ρ^-) nin kararsız manifoldu, $\left(\theta^- + \frac{(b-c)Y^-}{(a-c)}, 0\right)$ nın kararlı manifoldu ile çakışır.*
2. *$\theta^- + Y^- < 0$ olmak üzere $\rho^- > \rho^*$ için bütün (ρ^-, c) noktaları Bölge 1 dedir ve $\theta^- + \frac{(b-c)Y^-}{(a-c)} > 0$ dır. Her ρ^- için $\frac{a\theta^- + bY^-}{\theta^- + Y^-} < c < \frac{bY^-}{Y^- - \rho^-}$ vardır ki (θ^-, ρ^-) nin kararsız manifoldu, $\left(\theta^- + \frac{(b-c)Y^-}{(a-c)}, 0\right)$ nin kararlı manifoldu ile çakışır.*

Önerme 4.4 TC → OC ilerleyen dalgasına karşılık gelir.

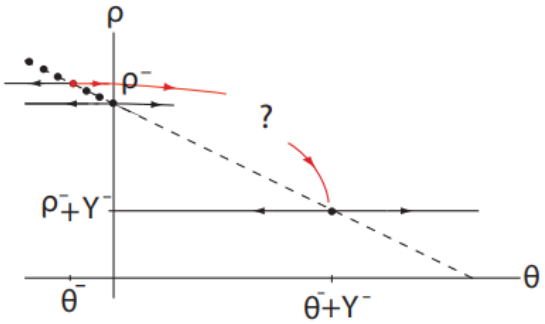
İspat. 1. Durum

Öncelikle (4.1)-(4.2) denklemlerini -c ile bölelim ve daha sonra $c \to -\infty$ için limit alırsak;

$$\dot{\theta} = (\theta - \theta^{-}) + (\rho - \rho^{-}), \tag{4.15}$$

$$\dot{\rho} = 0, \tag{4.16}$$

elde ederiz. Bu iki denklemimiz (4.11)-(4.12) denklemlerinin $b^2(\rho^{-})^2$ ile sadeleşmiş halidir. Önerme 4.3.'den çok küçük c ler için (θ^{-}, ρ^{-}) nin kararsız manifoldu, $(\theta^{-} + Y^{-}, 0)$ in kararlı manifoldunun üstünde yer alır. (4.15)-(4.16)'nın faz diyagramı Şekil 4.6.'da verilmiştir.



Şekil 4.6. (4.15)-(4.16)'nın faz diyagramı

2. Durum

$c \to \frac{a\theta^{-}+bY^{-}}{\theta^{-}+Y^{-}}$ için (4.1)-(4.2) denklemlerinde c'yi yerine yazalım. İlk önce (4.1)'de c'yi yerine yazarsak;

$$\dot{\theta} = \left(a - \frac{a\theta^{-}+bY^{-}}{\theta^{-}+Y^{-}}\right)(\theta - \theta^{-}) - \left(\frac{a\theta^{-}+bY^{-}}{\theta^{-}+Y^{-}}\right)(\rho - \rho^{-}),$$

gerekli sadeleştirmeler yapılırsa;

$$\dot{\theta} = \left(\frac{aY^- - bY^-}{\theta^- + Y^-}\right)(\theta - \theta^-) - \left(\frac{a\theta^- + bY^-}{\theta^- + Y^-}\right)(\rho - \rho^-),$$

ortak paranteze alınırsa;

$$\dot{\theta} = \left(\frac{Y^-(a-b)}{\theta^- + Y^-}\right)(\theta - \theta^-) - \left(\frac{a\theta^- + bY^-}{\theta^- + Y^-}\right)(\rho - \rho^-), \qquad (4.17)$$

elde edilir. Şimdi de (4.2) denkleminde c'yi yerine yazarsak;

$$\dot{\rho} = (\theta^- + Y^-)\left(\frac{(\rho - \rho^-)}{\theta^-(a-b)} + \frac{Y^-}{a\theta^- + bY^-}\right)\rho\Phi(\theta), \qquad (4.18)$$

elde edilir. (4.1)-(4.2) denklemlerinde c'yi yerine yazıldığında,

$$\dot{\theta} = \left(\frac{Y^-(a-b)}{\theta^- + Y^-}\right)(\theta - \theta^-) - \left(\frac{a\theta^- + bY^-}{\theta^- + Y^-}\right)(\rho - \rho^-), \qquad (4.17)$$

$$\dot{\rho} = (\theta^- + Y^-)\left(\frac{(\rho - \rho^-)}{\theta^-(a-b)} + \frac{Y^-}{a\theta^- + bY^-}\right)\rho\Phi(\theta), \qquad (4.18)$$

elde edildi. Bulduğumuz (4.17)-(4.18) denklemlerini $-(\theta^- + Y^-) > 0$ ile çarparsak;

$$\dot{\theta} = -Y^-(a-b)(\theta - \theta^-) + (a\theta^- + bY^-)(\rho - \rho^-), \qquad (4.19)$$

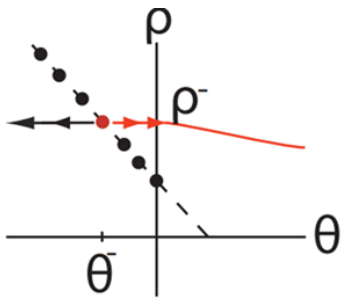
$$\dot{\rho} = -(\theta^- + Y^-)^2\left(\frac{(\rho - \rho^-)}{\theta^-(a-b)} + \frac{Y^-}{a\theta^- + bY^-}\right)\rho\Phi(\theta), \qquad (4.20)$$

elde edilir. (4.19)-(4.20) denklemlerinin kritik noktalarından biri (θ^-, ρ^-) dir. Bir diğer kritik noktasını bulmak için (4.19) denkleminde $\theta = 0$ için ρ yu bulalım:

$$-Y^-(a-b)(0 - \theta^-) + (a\theta^- + bY^-)(\rho - \rho^-) = 0,$$

$$\rho = \rho^- - \frac{Y^-(a-b)\theta^-}{(a\theta^- + bY^-)},$$

elde edilir. Bir diğer kritik noktamız $\left(0\,,\ \rho^- - \frac{Y^-(a-b)\theta^-}{(a\theta^-+bY^-)}\right)$ olur. (4.19)-(4.20)'nın faz diyagramı Şekil 4.7.'de verilmiştir. $(\theta^-\,,\ \rho^-)$ nin kararsız manifoldu, $\left(0\,,\ \rho^- - \frac{Y^-(a-b)\theta^-}{(a\theta^-+bY^-)}\right)$ nın merkez manifoldun üstünde yer alır.



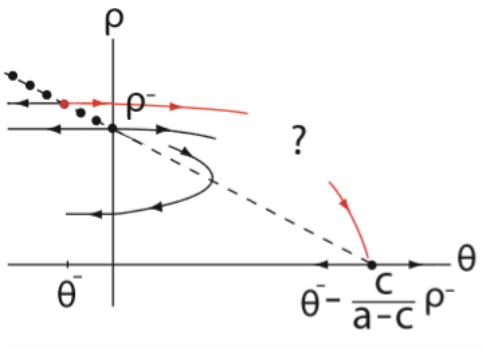
Şekil 4.7. (4.19)-(4.20)' nin faz diyagramı

Önerme 4.4'ün 1. ve 2. durumları için ortak olan $c = \frac{bY^-}{Y^- - \rho^-}$ limit noktasını daha daha önceden C eğrisinde ispatlamıştık. Önerme 4.3.'den $c_0 = \frac{bY^-}{Y^- - \rho^-}$'a yeterince yakın ve c_0'dan daha küçük c'ler için $(\theta^-\,,\ \rho^-)$ nin kararsız manifoldu, $\left(\theta^- + \frac{(b-c)Y^-}{(a-c)}\,,0\right)$ nin merkez manifoldunun altındadır.

Sonuç olarak bu da bize $c < 0$ ın varlığını gösterir.

4.2.3. Bölge 2

Bölge 2' de bir $(\rho^-,\ c)$ noktası ne Bölge 1 de ne de C eğrisinde değildir. Y= 0 doğrusu $\rho = 0$ ın altındadır. Bakınız Şekil 4.8.. $\left(\theta^- - \frac{c\rho^-}{a-c}, 0\right)$ kritik noktası kararlı manifolda ve $(\theta^-\,,\ \rho^-)$ kararsız manifolda sahiptir. Eğer sol durumdan $(\theta^-\,,\ \rho^-)$, sağ duruma $\left(\theta^- - \frac{c\rho^-}{a-c}\,,\ 0\right)$ bir bağlantı varsa bir yanma dalgası oluşur.

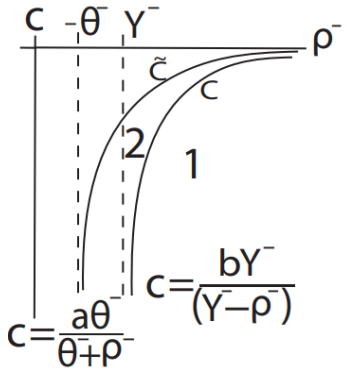


Şekil 4.8. (4.1)-(4.2)' nin faz diyagramı

Önerme 4.5 *$a > 0, \theta \leq 0$ ve ρ^* Önerme 4.3' deki gibi verilsin. $\rho^* < \rho^- < \infty$ için bütün (ρ^-, c) noktaları Bölge 2'dedir ve $\theta^- + \frac{c\rho^-}{c-a} > 0$ dır. Her ρ^- için $\frac{bY^-}{Y^- - \rho^-} < c < \frac{a\theta^-}{\theta^- + \rho^-}$ vardır öyle ki (θ^-, ρ^-) nin kararsız manifoldu, $\left(\theta^- + \frac{c\rho^-}{c-a}, 0\right)$ nin kararlı manifoldu ile çakışır.*

Önerme 4.5 TC → FC ilerleyen dalgasına karşılık gelir.

İspat. $\rho^* < \rho^-$olsun. $\theta^+ = \theta^- + \frac{c\rho^-}{c-a} > 0$ olması için $c < \frac{a\theta^-}{\theta^- + \rho^-}$ olmalıdır. Buradan yeni eğriyi $c = \frac{a\theta^-}{\theta^- + \rho^-}$ olarak tanımlayalım. Buna $\tilde{C}$ diyelim ve C eğrisinin üstündedir. Bakınız Şekil 4.9..



Şekil 4.9. C ve $\tilde{C}$ eğrisi

(4.1)-(4.2) denklemlerinde c yerine $c = \frac{a\theta^-}{\theta^- + \rho^-}$ yazalım, önce (4.1) denkleminde c'yi yerine yazarsak;

$$\dot{\theta} = \left(a - \frac{a\theta^-}{\theta^- + \rho^-}\right)(\theta - \theta^-) - \left(\frac{a\theta^-}{\theta^- + \rho^-}\right)(\rho - \rho^-),$$

gerekli işlemler ve sadeleştirmeleri yaparsak;

$$\dot{\theta} = \left(\frac{a\rho^-}{\theta^- + \rho^-}\right)(\theta - \theta^-) - \left(\frac{a\theta^-}{\theta^- + \rho^-}\right)(\rho - \rho^-),$$

bulunur. Ortak paranteze alırsak;

$$\dot{\theta} = \frac{a}{\theta^- + \rho^-}[\rho^-(\theta - \theta^-) - \theta^-(\rho - \rho^-)], \tag{4.21}$$

elde edilir. Şimdi de (4.2) denkleminde c'yi yerine yazarsak;

$$\dot{\rho} = \left(\frac{\rho - \rho^-}{\frac{a\theta^-}{\theta^- + \rho^-} - b} + \frac{Y^-}{\frac{a\theta^-}{\theta^- + \rho^-}}\right)\rho\Phi(\theta),$$

gerekli işlemler yapılırsa;

$$\dot{\rho} = \left(\frac{(\rho - \rho^-)(\theta^- + \rho^-)}{(a-b)\theta^- - b\rho^-} + \frac{Y^-(\theta^- + \rho^-)}{a\theta^-}\right)\rho\Phi(\theta),$$

$$\dot{\rho} = \left(\frac{(\rho - \rho^-)(\theta^- + \rho^-)}{(a-b)\theta^- - b\rho^-} + \frac{Y^-(\theta^- + \rho^-)}{a\theta^-}\right)\rho\Phi(\theta),$$

olur. $(\theta^- + \rho^-)$'nin ortak parantezine alırsak;

$$\dot{\rho} = (\theta^- + \rho^-)\left(\frac{(\rho - \rho^-)}{(a-b)\theta^- - b\rho^-} + \frac{Y^-}{a\theta^-}\right)\rho\Phi(\theta), \tag{4.22}$$

elde edilir.(4.1)-(4.2) denklemlerinde c yerine yazıldığında,

$$\dot{\theta} = \frac{a}{\theta^- + \rho^-}[\rho^-(\theta - \theta^-) - \theta^-(\rho - \rho^-)], \tag{4.21}$$

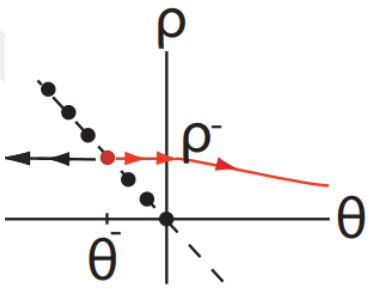
$$\dot{\rho} = (\theta^- + \rho^-)\left(\frac{(\rho - \rho^-)}{(a-b)\theta^- - b\rho^-} + \frac{Y^-}{a\theta^-}\right)\rho\Phi(\theta), \tag{4.22}$$

elde edildi. Bulduğumuz (4.21)-(4.22) denklemlerini $(\theta^- + \rho^-) > 0$ ile çarparsak;

$$\dot{\theta} = a[\rho^-(\theta - \theta^-) - \theta^-(\rho - \rho^-)], \tag{4.23}$$

$$\dot{\rho} = (\theta^- + \rho^-)^2 \left(\frac{(\rho-\rho^-)}{(a-b)\theta^- - b\rho^-} + \frac{Y^-}{a\theta^-}\right)\rho\Phi(\theta), \tag{4.24}$$

elde edilir. (4.23)-(4.24) denklemlerinin kritik noktaları (θ^-, ρ^-) ve (0,0) dır. Şekil 4.10'da görüldüğü gibi (θ^-, ρ^-) nin kararsız manifoldu, (0,0) nın merkez manifoldunun üzerindedir.



Şekil 4.10. (4.23)-(4.24) ün faz diyagramı

Önerme 4.3'den $c_0 = \frac{bY^-}{Y^- - \rho^-}$'a yeterince yakın ve c_0'dan daha büyük c'ler için (θ^-, ρ^-) nin kararsız manifoldu, $\left(\theta^- + \frac{c\rho^-}{c-a}, 0\right)$ nin merkez manifoldunun altındadır. Bu da bize $c < 0$'ın varlığını gösterir.

Şimdi Teorem 4.2'nin ispatını yapabiliriz. c_c formülü hariç Teorem 4.2(1) in ispatı Önerme 4.3'den takip edilir. w_2 çözümler üzerinde sabit olduğundan,

$$(c-b)Y^- - c\rho^- = (c-b)Y^+ - c\rho^+$$

c_c formülü $Y^+ = \rho^+ = 0$ alınarak bulunur.

Önerme 4.4' den Teorem 4.2(2)'nin ve Önerme 4.5'den Teorem 4.2(3)'ün ispatı görülür.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu çalışmada ele aldığımız yanma sistemi parçalı parabolik sistemdir. Bu sistemlerin birinde difüzyon vardır fakat diğerinde yoktur. Modelimiz sıcaklık, oksijen ve yakıt değişkenlerinden oluşan üç kısmi diferansiyel denklemden oluşmaktadır. Oksijenin hızı sıcaklığın hızından daha büyüktür ve yanma dalgası ters yönde ilerlemektedir. Bu üç kısmi diferansiyel denklemini daha basit ve elverişli hale getirmek için $\xi=x-ct$ dönüşümü yaparak iki boyuta indirgeyip (3.14)-(3.15) denklemleri bulunmuştur. (3.14)-(3.15) denklemlerinin kritik noktaları, öz değerleri ve öz vektörleri bulunmuştur. Ters yönde ilerleyen yanma dalgaları için Teorem 4.2 verilmiştir. Ters yönde ilerleyen yanma dalgaları Bölge 1, Bölge 2 ve C Eğrisinden oluşmaktadır. (4.1)-(4.2) denklemlerinin belirli limit noktalarına bakarak Bölge 1, Bölge 2 ve C Eğrisinin manifoldlarının durumları gösterildi. C Eğrisi, $TC\rightarrow FC\cap OC$ tipindeki bir yanma dalgasıdır. Bölge 1, $TC\rightarrow FC$ tipinde bir yanma dalgasıdır. Bölge 2 ise $TC\rightarrow OC$ tipindeki bir yanma dalgasıdır. Teorem 4.2'in ispatı, C Eğrisi, Bölge 1 ve Bölge 2'de bulunarak gösterilmiştir.

5.2. Öneriler

Bu çalışmada varlığını ispatladığımız ters yönde ilerleyen yanma dalgalarının kararlılığı üzerine çalışmalar yapılabilir. Bunun için bir ilerleyen dalga üzerinde kısmi diferansiyel denklem sisteminin lineerize edilmesiyle bulunan operatörün spektrumunun analiz edilmesi faydalı olacaktır.

KAYNAKLAR

AKKUTLU, Y. and YORTSOS, Y. C., 2003. The Dynamics of in-situ Combustion Fronts in Porous Media. J. of Combustion and Flame.,134:229–247.

ALDUSHIN, A., RUMANOV, I. and MATKOWSKY, B., 1999. Maximal Energy Accumulation in a Superadiabatic Filtration Combustion wave. J. of Combustion and Flame., 118:76–90.

ALDUSHIN, A.P. and SEPLYARSKY, B.S., 1978. Propagation of exothermic reaction in a porousmedium during gas blowing, Sov. Phys. Dokl., 23: 483–485.

BRUINING, J., MAILYBAEV, A.A. and MARCHESIN, D., 2009. Filtration combustion in wet porous medium, SIAM Journal on Applied Mathematics., 70:1157–1177.

CHAPIRO, G., FURTADO, L., MARCHESIN D. and SCHECTER, S., 2015. Stability of Interacting Traveling Waves in Reaction-Convection-Diffusion Systems. DCDS Issue special., 258–266.

CHAPIRO, G., MAILYBAEV, A.A., SOUZA, A., MARCHESIN D. and BRUINING, J., 2012. Asymptotic Approximation of Long-Time Solution for Low-Temperature Filtration Combustion. Comput. Geosciences., 16: 799–808.

CHAPIRO, G., MARCHESIN, D. and SCHECTER, S., 2014. Combustion Waves and Riemann Solutions in Light Porous Foam. Journal of Hyperbolic Differential Equations., 11(02): 295–328.

CHAPIRO, G. and SENOS, L., 2016. Riemann Solutions for Counterflow Combustion in Light Porous Foam.

CHAPIRO, G. and SOUZA, A.J., 2016. Asymptotic Approximation for Counterflow Combustion in Porous Media. Applicable Analysis, 95(1): 63–77.

GHAZARYAN, A., LATUSHKIN, Y. and SCHECTER, S., de Souza, A., 2010. Stability of Gasless Combustion Fronts in one-dimensional Solids. Archive for Rational Mechanics and Analysis., 198(3): 981–1030.

MAILYBAEV, A., BRUINING, J. and MARCHESIN, D., 2011. Analysis of in situ Combustion of Oil with Pyrolysis and Vaporization. Combustion and Flame., 158(6): 1097–1108.

MARCHESIN, D. and SCHECTER, S., 2003. Oxidation heat pulses in two-phase Expansive flow in porous media. Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)., 54(1): 48–83.

MOTA, J. and SCHECTER, S., 2006. Combustion fronts in a porous medium with two layers. Journal of Dynamics and Differential Equations., 18(3): 615–665.

OZBAG, F., CHAPIRO, G. and SCHECTER, S., 2018. Travelling Waves in a Simplified Gas-Solid Combustion Model in Porous Media. Advances in Differential Equations. 23 (5-6): 409-454.

SCHECTER, S., 1987. The saddle-node separatrix-loop bifurcation. SIAM journal on mathematical analysis., 18(4):1142–1156.

SCHECTER, S. and MARCHESIN, D., 2001. Geometric singular perturbation analysis of oxidation heat pulses for two-phase flow in porous media. dedicated to constantine dafermos on his 60th birthday. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society., 32(3): 237–270.

SCHULT, D., BAYLISS, A. and MATKOWSKY, B., 1998. Traveling waves in natural counterflow filtration combustion and their stability. SIAM J. Appl. Math., 58(3): 806–852.

SCHULT, D., MATKOWSKY, B., VOLPERT, V. and FERNANDEZ-PELLO, A., 1996. Forced forward smolder combustion. Combustion and Flame., 104(1-2):1–26.

SOUZA, A.J., Springer 2008. Counterflow combustion in a porous medium. In: Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications, pp., 1005–1012.

ZELDOVICH, Y.B., BARENBLATT, G.I., LIBROVICH, V.B. and MAKHVILADZE, G.M., 1985. The mathematical theory of combustion and explosion. Consultants Bureau, New York.

WAHLE, C., MATKOWSKY, B. and ALDUSHIN, A., 2003. Effects of gas-solid nonequilibrium in filtration combustion, Combustion Science and Technology., 175: 1389–1499.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Gamze BARLAS
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi:		Hilvan 26.09.1992
Telefon	**:**	0545 415 46 17
e-mail	**:**	gamzebrlsss92@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı**	**Bitirme Yılı**
Lise	**:**	Hilvan Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi, Hilvan, Şanlıurfa	2010
Üniversite	**:**	Harran Üniversitesi, Şanlıurfa	2015

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2015-2016	Mustafa Kemal Orta Okulu	Matematik Öğretmeni
2016-2018	Hilvan Bilgi Evi	Matematik Öğretmeni
2018-	Akçakale Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni

KONGRELER

ÖZBAĞ, F., ve BARLAS, G., 2019. Gözenekli Ortamda Ters Yönde İlerleyen Yanma Dalgaları. Mas International European Congress On Mathematics, Engineering, Natural and Medical Sciences-III, February 2-3, Şanlıurfa-Turkey.