T.C

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KANNAN SABİT NOKTA TEOREMİNİN ÇEŞİTLİ GENELLEŞTİRMELERİ

Tuğba BAŞKAL

ARALIK-2019

ÖZET

KANNAN SABİT NOKTA TEOREMİNİN ÇEŞİTLİ GENELLEŞTİRMELERİ

BAŞKAL, Tuğba

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. İshak ALTUN

Aralık 2019, 64 sayfa

Sabit nokta teori çalışmalarını inceleyen bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde sabit nokta teoriye genel bir bakış dikkate alınmıştır. İkinci bölüm, tezde kullanılacak olan bazı temel metrik ve topolojik tanımlar ve özellikleri, küme değerli dönüşümler ve Hausdorff metriği ile ilgili bilgileri içermektedir. Üçüncü bölüm yedi kısma ayrılmıştır. Birinci kısımda Kannan ve Subrahmanyam teoremleri incelenmiştir. Diğer kısımlarda ise asimptotik düzenli dönüşümler, yerelleştirme ve kontrol fonksiyonları ile oluşturulan Kannan tip büzülme dönüşümleri ve ilgili sabit nokta teoremleri ele alınmıştır. Ayrıca verilen genel sabit nokta teoremi dikkate alınarak Kannan teoreminin Suzuki tip genelleştirmeleri ve küme değerli dönüşümlere genişletilmeleri incelenmiştir. Son bölüm ise tartışma ve sonuç için ayrılmıştır

ABSTRACT

VARIOUS EXTENSIONS OF KANNAN'S FIXED POINT THEOREM

BAŞKAL, Tuğba

Kırıkkale University

Graduate School Of Natural And Applied Sciences

Department of Mathematics, M.Sc. Thesis

Supervisor: Prof. Dr. İshak ALTUN

December 2019, 64 Page

This thesis, which examines the studies of fixed point theory on the basis, consists of four sections. In the first section, an overview of fixed point theory is considered. The second section includes some basic metric and topological definitions and their properties, multivalued mappings and Hausdorff metric. The third section is divided into seven parts. In the first part, Kannan and Subrahmanyam theorems are examined. In the other parts, asymptotic regular mappings, Kannan type contraction mappings formed by localization and control functions and related fixed point theorems are discussed. In addition, taking into account the general fixed point theorem, Kannan's theorem Suzuki type generalizations and expansion of multivalued mappings are examined. The last section is reserved for discussion and conclusion.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, iki yıl boyunca değerli bilgilerini benimle paylaşan, tez çalışmamın yürütülmesinde büyük emeği olan, her zaman sabırla bana yol gösteren ve tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen değerli hocam ve tez danışmanım Prof. Dr. İshak ALTUN' a teşekkür ederim.

Yaşamım boyunca yanımda olan ve beni her konuda destekleyen, güvenen, yardımlarını esirgemeyen, hayatta sahip olduğum en değerli insanlar olan canım aileme, hayat arkadaşıma ve sevgili arkadaşlarıma sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET……..… i

ABSTRACT ……..… ii

TEŞEKKÜR …….. iii

İÇİNDEKİLER DİZİNİ…… iv

1.GİRİŞ …… 1

1.1.Kaynak Özetleri ……... 3
1.2.ÇalışmanınAmacı ……. 4

2.MATERYAL VE YÖNTEM …… 5

2.1. Bazı Temel Metrik ve Topolojik Kavramlar……..5
2.2. Küme değerli dönüşümler ve Hausdorff Metriği ……... 10

3.ARAŞTIRMABULGULARI …….. 14

3.1. Kannan ve Subrahmanyam Teoremleri …….……. 14
3.2. Asimptotik Düzenli Dönüşümler İçin Teoremler …….. 26
3.3. Yerelleştirme …….. 39
3.4. Kontrol Fonksiyonları ile Oluşturulan Kannan Tip Büzülmeler…..... 40
3.5. Asimptotik Düzenlilik ve Kontrol Fonksiyonları ...……... 48
3.6. Kannan Teoreminin Suzuki Tip Genelleştirmeleri …… 50
3.7. Kannan Teoreminin Küme Değerli Dönüşümlere Genişletilmeleri ... 52

4.TARTIŞMA VE SONUÇ …… 63

KAYNAKLAR…… 64

1.GİRİŞ

(X,d) bir metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. $x_0\in X$ keyfi bir nokta olmak üzere $x_n=Tx_{n-1}$ $n\in\mathbb{N}$ şeklinde tanımlı $\{x_n\}$ dizisine Picard iterasyon dizisi adı verilmektedir. Metrik sabit nokta teori çalışmalarının ispatında ilk aşama büzülme şartı dikkate alınarak Picard iterasyon dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunun gösterilmesidir. Ardından metrik uzayın tam olduğunun kabulü ile bu iterasyon dizisinin yakınsak olduğunun garanti edilmesi ve yakınsadığı noktanın bir sabit nokta olduğunun gösterilmesi ispatın ikinci aşaması olarak dikkate alınabilir. Bilindiği gibi (X,d) bir metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olmak üzere her $x,y\in X$ için

$$d(Tx,Ty)\leq\lambda d(x,y) \tag{1}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\lambda\geq 0$ varsa, T ye Lipschitz dönüşümü denir. (1) eşitsizliğini sağlayan λ sayılarının en küçüğüne T nin Lipschitz sabiti denir ve genellikle L ile gösterilir. Eğer $L<1$ ise T ye büzülme dönüşümü $L\leq 1$ ise genişlemeyen dönüşüm denir. Eğer $x\neq y$ olacak şekilde her $x,y\in X$ için

$$d(Tx,Ty)<d(x,y) \tag{2}$$

eşitsizliği sağlanırsa T ye büzülebilir dönüşüm denir.

Banach sabit nokta teoremi, tam metrik uzay üzerinde tanımlı her büzülme dönüşümün bir tek sabit noktasının varlığını ve her Picard iterasyonunun bu sabit noktaya yakınsadığını ifade etmektedir. Literatürde Banach sabit nokta teoreminin pek çok genelleştirmesinin yanı sıra farklı büzülme eşitsizlikleri kullanılarak elde edilen pek çok sabit nokta teoremi mevcuttur. Kannan sabit nokta teoremide bunlardan biridir. Bunun yanı sıra Górnicki, Nadler, Reich, Subrahmanyam, Kikkawa ve Suzuki sabit nokta teoremleride literatürde bilinen temel sabit nokta teoremleridir.

(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq K\{d(x, Tx) + d(y, Ty)\} \qquad (3)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $K \geq 0$ sabiti varsa T dönüşümüne Kannan dönüşümü adı verilir. Kannan 1968 yılında $K < \frac{1}{2}$ için Kannan dönüşümlerinin tam metrik uzayda bir tek sabit noktaya sahip olduğunu göstermiştir. Daha sonra Subrahmanyam Kannan dönüşümlerini kullanarak metrik uzayların tamlığı için bir karakterizasyon vermiştir. Yani Subrahmanyam bir metrik uzayda her Kannan dönüşümün sabit noktaya sahip olması halinde uzayın tam olduğunu ispatlamıştır.

Son zamanlarda Górnicki Kannan dönüşümlerini dikkate alarak Kannan sabit nokta teoreminin pek çok genelleştirmelerini elde etmiştir. Örneğin Kannan sabit nokta teoreminde dönüşüm için bazı ek koşullar dikkate alarak K sabitini 1'e kadar genişletebilmiştir.

Bu tez çalışmasında ilk olarak Kannan dönüşümü kavramı dikkate alınarak elde edilen sabit nokta teoremleri incelenecektir. Ayrıca asimptotik düzenlilik veya kontrol fonksiyonları ile elde edilen teoremler ile Kannan teoreminin küme değerli dönüşümlere genişletilmeleri ele alınacaktır.

1.2. Kaynak Özeti

Metrik uzay ve topolojik uzaylar ile ilgili temel kavramlar için Koçak'ın "Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar" adlı kitap kullanılmıştır [1]. Kannan teoreminin ispatı, Kannan tip sürekli dönüşümlerin kompakt metrik uzayda sabit noktanın var olduğu ve bir çok örnek gösterimi için Górnicki'nin " Fixed point theorems for Kannan type mapping " adlı çalışması dikkate alınmıştır [3]. Subrahmanyam'ın metrik uzayın tamlığının karakterizasyonu için elde etmiş olduğu teoremin ispatı için [9] kullanılmıştır. Asimptotik düzenlilik için Górnicki [3] nın çalışması dikkate alınmıştır. Kannan sabit nokta teoreminin bazı önemli genelleştirmelerini Geraghty'nin düşüncesiyle [2] de anlatılmıştır. Kannan teoreminin Suzuki tip genelleştirilmeleri için [10,11] deki bazı teoremlerden yararlanılmıştır. Son olarak Nadler küme değerli büzülme dönüşümleri için sabit nokta teoremi ispatlamıştır [12].

1.2. Çalışmanın Amacı

Bu tez çalışmasının amacı Kannan Sabit Nokta teoreminin çeşitli genelleştirmeleri detaylı bir şekilde incelemektir. Bunun için Kannan dönüşüm kavramı göz önüne alınıp bu tür dönüşümlerin hangi koşullar altında sabit noktaya sahip olacağı araştırılacaktır. Bu araştırma sonucunun yapılacak yeni çalışmalara yön vermesi amaçlanmıştır.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1.Bazı Temel Metrik Ve Topolojik Kavramlar

Bu kısımda tez boyunca sıkça kullanacağımız, metrik uzay, metrik uzayda kapalı yuvar, metrik uzayda yakınsaklık, süreklilik, Cauchy dizisi, metrik uzayda tamlık ve kompakt metrik uzay kavramlarını hatırlatacağız.

Tanım 2.1 X boş olmayan bir küme olmak üzere $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
ii) $d(x,y) = d(y,x)$,
iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

koşullarını sağlıyorsa d ye X üzerinde bir metrik, (X,d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

Tanım 2.2 (X,d) herhangi bir metrik uzay olsun. Bir $x_0 \in X$ ve $r > 0$ reel sayısı verildiğinde

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar,

$$D(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) = r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir.

Tanım 2.3 (X, d) bir metrik uzay ve U da X in bir alt kümesi olsun. Eğer her $x \in U$ için $B(x, r) \subseteq U$ olacak biçimde bir $r > 0$ sayısı varsa U kümesine açıktır denir. Eğer $X \setminus U$ kümesi açık ise o zaman U kümesine kapalı küme denir.

Önerme 2.1 (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda

i) (X, d) içindeki her açık yuvar açık kümedir.
ii) (X, d) içindeki her kapalı yuvar kapalı kümedir.

Tanım 2.4 (X, d) bir metrik uzay A ve B de X in boş olmayan iki alt kümesi olsun. Bu durumda

$$D(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

sayısına A ve B kümeleri arasındaki uzaklık denir. $x \in X$ olmak üzere

$$D(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$$

sayısına x noktasının A kümesine olan uzaklığı,

$$d(A) = \sup\{d(a, b) : a, b \in A\}$$

kümesine A kümesinin çapı denir.

Eğer $d(A) < \infty$ ise A kümesine sınırlı küme, eğer $d(A) = \infty$ ise A kümesine sınırsız küme denir.

Tanım 2.5 (X, d) metrik uzay $x \in X$ ve $V \subseteq X$ alt kümesi için $x \in G \subseteq V$ koşulunu sağlayan bir $G \subseteq X$ açık kümesi varsa V ye x in bu uzayda bir komşuluğu denir.

Tanım 2.6 (X, d) metrik uzayında $\{x_n\}$ bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq n_0$ için $x_n \in B(x, \varepsilon)$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsar denir. Kısaca $x_n \to x$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ile gösterilir. x noktasına $\{x_n\}$ dizisinin limiti adı verilir.

Teorem 2.1 Metrik uzayda yakınsak her dizinin limiti tektir.

Tanım 2.7 (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ de X de bir dizi olsun. $n_k < n_{k+1}$ olmak üzere $\{x_{n_k}\}$ dizisine $\{x_n\}$ dizisinin bir alt dizisi denir.

Teorem 2.2 (X, d) bir metrik uzay olsun $\{x_n\}$ dizisi yakınsak ise her $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi de aynı noktaya yakınsar.

Tanım 2.8 Bir (X, d) metrik uzayında herhangi bir dizi $\{x_n\}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $m, n \geq n_0$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı var ise $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir. Eğer (X, d) metrik uzayı içindeki her Cauchy dizisi bu uzayda bir noktaya yakınsıyor ise (X, d) ikilisine tam metrik uzay denir.

Teorem 2.3 (X,d) metrik uzayında yakınsak olan her dizi Cauchy dizisidir. Ayrıca her Cauchy dizisi sınırlıdır.

Önerme 2.2 (X,d) bir metrik uzay $\{x_n\}$ X de bir dizi ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \infty$$

olsun. Bu durumda $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir.

Tanım 2.9 (X,d) ve (Y,e) metrik uzaylar, $f:(X,d) \to (Y,e)$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $f(B(x_0,\delta)) \subseteq B(f(x_0),\varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa, diğer bir deyişle her $\varepsilon > 0$ için $d(x_0,x) < \delta$ olduğunda $e(f(x_0),f(x)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir. Eğer f fonksiyonu X in her noktasında sürekli ise f ye bir sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.10 (X,d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer A kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A kümesine kompakt küme denir. Eğer X kompakt bir küme ise (X,d) uzayına kompakt metrik uzay denir. Kompakt bir metrik uzayda her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.

Tanım 2.11 (X,d) bir metrik uzay $T:X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y)$$

olacak biçimde $\alpha \geq 0$ sayısı varsa, T ye Lipschitz dönüşümü denir. Bu eşitsizliği

sağlayan en küçük α sayısına T nin Lipschitz sabiti denir. T Lipschitz dönüşümü için $\alpha < 1$ ise T ye büzülme dönüşümü, $\alpha \leq 1$ ise T Lipschitz dönüşümüne genişlemeyen dönüşüm denir. $x \neq y$ olacak biçimdeki her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ oluyorsa T ye büzülebilir dönüşüm denir.

Her Lipschitz fonksiyonu süreklidir. Çünkü her $\varepsilon > 0$ için $d(x,y) < \delta = \frac{\varepsilon}{\alpha}$ iken $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x,y) < \alpha\delta = \varepsilon$ olup T Lipschitz fonksiyonu süreklidir.

Teorem 2.4 (Banach) (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir büzülme dönüşümü ise T nin X de bir tek sabit noktası vardır.

İspat : $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun.

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \cdots, x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$$

biçiminde tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n)$$

$$\leq L d(x_{n-1}, x_n)$$

olur. O halde $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m)$$

$$\leq L^n d(x_0, x_1) + L^{n+1} d(x_0, x_1) + \cdots + L^{m-1} d(x_0, x_1)$$

$$= [L^n + L^{n+1} + \cdots + L^{m-1}]d(x_0, x_1)$$

$$= \frac{L^n}{1-L} d(x_0, x_1)$$

bulunur ki bu $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam olduğundan $\lim x_n = z$ olacak biçimde bir $z \in X$ noktası vardır. Ayrıca T sürekli olduğundan

$$z = \lim x_{n+1} = \lim Tx_n = T \lim x_n = Tz$$

elde edilir ki bu T nin sabit noktasının var olduğunu gösterir. Şimdi $w \in X$ noktası T nin bir başka sabit noktası ise

$$0 < d(z,w) = d(Tz,Tw) \leq Ld(z,w) < d(z,w)$$

olur ki bu $L < 1$ olduğundan bir çelişkidir. Yani T nin sabit noktası tektir.

2.2 Küme Değerli Dönüşümler ve Hausdorff Metriği

Tanım 2.12 X ve Y boş olmayan iki küme olsun. $T \subseteq X \times Y$ ise T ye X den Y ye bir küme değerli (çoğul değerli) dönüşüm denir.

T, X den Y ye bir küme değerli dönüşüm ve $x \in X$ olsun. T nin x noktasındaki görüntüsü

$$Tx = \{y \in Y : (x,y) \in T\}$$

kümesidir.

Tanım 2.13 (X,d) bir metrik uzay $A,B \subseteq$ ve $x \in X$ olsun.

$$\delta(A,B) = sup\{D(x,B) : x \in A\}$$

ve

$$H(A,B) = max\{\delta(A,B)\ ,\delta(B,A)\}$$

şeklinde tanımlansın. $A,B \in \mathcal{B}(X)$ ise hem $\delta(A,B)$ ve hem de $H(A,B)$ birer reel sayıdır. Ayrıca iyi tanımlı olmaları nedenleri ile δ ve H, $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(X)$ üzerinde birer reel değerli fonksiyondur. Yine H, $\mathcal{CB}(X)$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe Hausdorff metriği denir.

Önerme 2.3 (X,d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda H, $\mathcal{CB}(X)$ üzerinde bir metriktir.

İspat : H ın $\mathcal{CB}(X) \times \mathcal{CB}(X)$ üzerinde tanımlı bir reel değerli fonksiyon olduğu açıktır. Ayrıca $H(A,B) = H(B,A)$ dır. Şimdi $A,B \in \mathcal{CB}(X)$ olsun. O zaman

$$H(A,B) = 0 \Leftrightarrow max\{\delta(A,B),\delta(B,A)\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \delta(A,B) = 0 \text{ ve } \delta(B,A) = 0$$

$$\Leftrightarrow A \subseteq B \text{ ve } B \subseteq A$$

$$\Leftrightarrow A = B$$

bulunur. Son olarak $a, b, c, d \in [0, \infty)$ için

$$max\{a + b, c + d\} \leq max\{a, c\} + max\{b, d\}$$

özelliğini kullanarak $A, B, C \in \mathcal{CB}(X)$ için

$$H(A,B) = max\{\delta(A,B), \delta(B,A)\}$$

$$\leq max\{\delta(A,C) + \delta(C,B) + \delta(B,C) + \delta(C,A)\}$$

$$\leq max\{\delta(A,C), \delta(C,A)\} + max\{\delta(B,C), \delta(C,B)\}$$

$$= H(A,C) + H(C,B)$$

elde edilir. Yani $H: \mathcal{CB}(X) \times \mathcal{CB}(X) \to \mathbb{R}$ bir metriktir. Bu metriğe Hausdorff metriği denir.

Örnek 2.1 $X = \mathbb{R}$ üzerinde $d_1(x, y) = |x - y|$ ve

$$d_2(x,y) = \begin{cases} 1 , & x \neq y \\ 0 , & x = y \end{cases}$$

Metriklerini göz önüne alalım. Bu durumda $A = [0,1]$, $B = [3,5]$ kümeleri için $H_1(A,B) = 4$ ve $H_2(A,B) = 1$ olur. Burada dikkat edelim ki her iki küme de d_1 ve d_2 metriğine göre kapalı ve sınırlıdır.

Lemma 2.1 $A, B \in \mathcal{CB}(X)$ ve $a \in A$ olsun. O zaman her $\varepsilon > 0$ için

$$d(a,b) \leq H(A,B) + \varepsilon$$

olacak şekilde bir $b \in B$ vardır.

İspat : $a \in A$ için

$$D(a,B) = \inf\{d(a,y) : y \in B\}$$

olur. İnfimumun tanımından her $\varepsilon > 0$ için

$$d(a,b) \leq D(a,B) + \varepsilon$$

olacak şekilde bir $b \in B$ vardır. Diğer taraftan

$$D(a,B) \leq \delta(A,B) \leq H(A,B)$$

olduğundan her $\varepsilon > 0$ için

$$d(a,b) \leq H(A,B) + \varepsilon$$

olacak şekilde bir $b \in B$ vardır.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Kannan ve Subrahmanyam Teoremleri

(X,d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve bir $K \geq 0$ için

$$d(Tx,Ty) \leq K\{d(x,Tx) + d(y,Ty)\} \tag{3.1}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T ye $K-$ Kannan dönüşümü denir. Eğer $K < \frac{1}{2}$ ise T dönüşümüne Kannan dönüşümü adı verilir.

Teorem 3.1: (X,d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir Kannan dönüşümü olsun. O zaman T bir tek $v \in X$ sabit noktasına sahiptir ve üstelik her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ iterasyon dizisi bu v noktasına yakınsar.

İspat: $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$ ile tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n)$$

$$\leq K\{d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) + d(x_n, Tx_n)$$

$$= K\{d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})\}$$

buradan

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{K}{1-K} d(x_{n-1}, x_n)$$

elde edilir. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{K}{1-K} d(x_{n-1}, x_n)$$

$$\leq \left(\frac{K}{1-K}\right)^2 d(x_{n-2}, x_{n-1})$$

$$\vdots$$

$$\leq \left(\frac{K}{1-K}\right)^n d(x_0, x_1)$$

Bulunur. Şimdi $\frac{K}{1-K} = L$ dersek $K < \frac{1}{2}$ olduğundan $L < 1$ dir. O zaman $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m)$$

$$\leq L^n d(x_0, x_1) + L^{n+1} d(x_0, x_1) + \cdots + L^{m-1} d(x_0, x_1)$$

$$= \frac{L^n (1 - L^{m-n})}{1-L} d(x_0, x_1)$$

$$\leq \frac{L^n}{1-L} d(x_0, x_1)$$

bulunur. Dolayısıyla $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. (X, d) tam olduğundan

$\lim x_n = v$ olacak biçimde bir $v \in X$ vardır. Böylece

$$d(v, Tv) \leq d(v, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tv)$$

$$= d(v, x_{n+1}) + d(Tx_n, Tv)$$

$$\leq d(v, x_{n+1}) + K\{d(x_n, \mathrm{Tx}_n) + d(v, Tv)\}$$

$$= d(v, x_{n+1}) + K\{d(x_n, x_{n+1}) + d(v, Tv)\}$$

olduğundan

$$d(v, Tv) \leq \frac{1}{1-K} d(v, x_{n+1}) + \frac{\mathrm{K}}{1-\mathrm{K}} d(x_n, x_{n+1})$$

bulunur ki $n \to \infty$ için limit alınırsa $d(v, Tv) = 0$ elde edilir. Yani v noktası T nin bir sabit noktasıdır. Sabit noktanın tek olduğu (3.1) eşitsizliği yardımıyla görülür. Ayrıca her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ iterasyon dizisinin bu v noktasına yakınsadığı açıktır.

Subrahmanyam Kannan dönüşümlerini kullanarak tam metrik uzayların karakterizasyonu için aşağıdaki teoremi vermiştir.

Teorem 3.2 : (X, d) metrik uzay olsun. O zaman

i. Bir $\lambda > 0$ ve her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \lambda max\{d(x,Tx),d(y,Ty)\} \qquad (3.2)$$

ve

ii. Sayılabilir bir küme özelliklerini sağlayan $T(X)$ ve her $T: X \to X$ dönüşümü bir sabit noktaya sahip ise (X,d) metrik uzayı tamdır.

İspat : (X,d) metrik uzayının tam olmadığını kabul edelim. O zaman X de yakınsak olmayan bir $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi vardır. Bu dizinin terimlerinin birbirinden farklı olduğunu kabul edebiliriz. Şimdi $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ diyelim. $\{x_n\}$ dizisi yakınsak olmadığından her $x \notin A$ için $d(x,A) = inf\{d(x,y): y \in A\} > 0$ dır. $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi olduğundan her bir $x \notin A$ noktasına karşılık $m,n \geq N(x)$ olduğundan

$$d(x_n,x_m) < \lambda d(x,A)$$

olacak biçimde bir $N(x)$ pozitif tam sayısı vardır. Bu durumda $m,n \geq N(x)$ ve $l = 1,2,3,\cdots$ için

$$d(x_n,x_m) < \lambda d(x,A) \leq \lambda d(x,x_l)$$

olur. Özel olarak $m \geq N(x)$ ve $l = 1,2,3,\cdots$ için

$$d(x_{N(x)},x_m) < \lambda d(x,A) \leq \lambda d(x,x_l)$$

yazılabilir. Benzer biçimde her bir $x = x_n \in A$ için $m \geq n'$ olduğunda

$$d(x_m, x_{n'}) < \lambda d(x_n, x_{n'})$$

olacak biçimde bir $n' > n$ pozitif tam sayısı vardır. Şimdi $T: X \to X$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} x_{N(x)} & , \quad x \notin A \\ x_{n'} & , x = x_n \in A \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. T nin sabit noktaya sahip olmadığı üstelik $T(X)$ de sayılabilir bir küme olduğu açıktır. Şimdi $x, y \in X$ olsun. O zaman $Tx = x_n$ ve $Ty = x_m$ biçiminde olacağından

$$d(Tx, Ty) = d(x_n, x_m) < \begin{cases} \lambda d(y, A \setminus \{y\}) , & n \geq m \\ \lambda d(x, A \setminus \{x\}) , & n < m \end{cases}$$

olur. Yani her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda max\{d(x, Tx), d(y, Ty)\}$$

eşitsizliği sağlanır. Sonuç olarak T dönüşümü (i) ve (ii) özellikleri sağlayan bir dönüşüm olup sabit noktaya sahip olmadığından bir çelişki elde edilir. Dolayısıyla (X, d) metrik uzayı tamdır.

Açıklama 3.1: (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. O zaman her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq K\{d(x,Tx) + d(y,Ty)\} \qquad (3.3)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $K > 0$ sayısı varsa yukarıdaki teoremde (i) koşulunu sağlayan bir $\lambda > 0$ vardır. Dolayısıyla teoremdeki (3.2) eşitsizliği yerine (3.3) eşitsizliği kullanılabilir.

Açıklama 3.2: Bir (X,d) metrik uzayında (i) koşulunu sağlayan her T dönüşümünün sabit noktaya sahip olması durumunda (i) ve (ii) koşullarını sağlayan her T dönüşümü de sabit noktaya sahiptir. O zaman yukarıdaki teoremi dikkate alarak (3.2) eşitsizliğini sağlayan veya daha zayıf bir eşitsizlik olan (3.3) eşitsizliğini sağlayan her T dönüşümünün sabit noktaya sahip olması durumunda (X,d) metrik uzayı tamdır. Burada $K < \frac{1}{2}$ olmasına dahi ihtiyaç yoktur.

Bu bilgileri dikkate alarak aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 3.3: (X,d) metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter şart X deki her Kannan dönüşümünün bir sabit noktaya sahip olmasıdır.

Örnek 3.1 : $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesini alışılmış metrik ile birlikte düşünelim ve $T: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ dönüşümünü aşağıdaki biçimde tanımlayalım:

$x < \sqrt{2}$ ise $Tx \in \{y \in \mathbb{Q} : y < \sqrt{2}$ ve $\sqrt{2} - y < \frac{1}{4}(\sqrt{2} - x)\}$

$x > \sqrt{2}$ ise $Tx \in \{y \in \mathbb{Q} : y > \sqrt{2}$ ve $y - \sqrt{2} < \frac{1}{4}(x - \sqrt{2})\}$.

O zaman her $x \in \mathbb{Q}$ için,

$$|\sqrt{2} - x| = |\sqrt{2} - Tx + Tx - x|$$

$$\leq |\sqrt{2} - Tx| + |Tx - x|$$

$$< \frac{1}{4}|\sqrt{2} - x| + |Tx - x|$$

olup buradan

$$|x - Tx| > \frac{3}{4}|\sqrt{2} - x| > 0$$

olur. Yani T nin sabit noktası yoktur. Şimdi T nin Kannan dönüşümü olduğunu göstermek için aşağıdaki durumları göz önüne alalım:

1. Durum: $a, b \in \mathbb{Q}$ ve $a < \sqrt{2} < b$ olsun. O zaman

$$|Ta - Tb| < \frac{1}{4}(b - a)$$

ve

$$|a - Ta| + |b - Tb| > \frac{3}{4}(b - a)$$

olduğundan

$$|Ta - Tb| < \frac{1}{4}(b - a)$$

$$= \frac{1}{3}\frac{3}{4}(b-a)$$

$$< \frac{1}{3}\{|a-Ta| + |b-Tb|\}$$

olur.

2. Durum : $a, b \in \mathbb{Q}$ ve $a \leq b < \sqrt{2}$ olsun. O zaman

$$|Ta - Tb| < \frac{1}{4}(\sqrt{2}-a)$$

ve

$$|a-Ta| + |b-Tb| > \frac{3}{4}(\sqrt{2}-a) + \frac{3}{4}(\sqrt{2}-b)$$

olduğundan

$$|Ta - Tb| < \frac{1}{4}(\sqrt{2}-a)$$

$$< \frac{1}{4}(\sqrt{2}-a) + \frac{1}{4}(\sqrt{2}-b)$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\frac{3}{4}(\sqrt{2}-a) + \frac{3}{4}(\sqrt{2}-b)\right\}$$

$$< \frac{1}{3}\{|a - Ta| + |b - Tb|\}$$

olur. $\sqrt{2} < b \leq a$ için de benzer durum geçerlidir.

Sonuç olarak $T: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ sabit noktası olmayan bir Kannan dönüşümüdür. Dolayısıyla Teorem 3.3 dikkate alınırsa $(\mathbb{Q}, |.|)$ tam metrik uzay olmaz.

Aşağıdaki örnekte de görülebileceği gibi (X, d) tam metrik uzay olmak üzere $T: X \to X$ bir dönüşümü her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{2}\{d(x, Tx) + d(y, Ty)\}$$

eşitsizliğini sağlasa bile sabit noktaya sahip olmayabilir.

Örnek 3.2 : $X = \mathbb{R}$ ayrık metrik ile birlikte göz önüne alınsın. Yani her $x, y \in X$ için

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & , \quad x = y \\ 1 & , \quad x \neq y \end{cases}$$

olsun. $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dönüşümü $Tx = x + 1$ olarak tanımlansın. O zaman

$$d(Tx,Ty) \leq \frac{1}{2}\{d(x,Tx) + d(y,Ty)\}$$

eşitsizliği sağlanır fakat T nin sabit noktası yoktur.

Benzer biçimde (X,d) kompakt olmayan bir tam metrik uzay olmak üzere $T:X \to X$ dönüşümü $x \neq y$ olacak biçimdeki her $x,y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) < \tfrac{1}{2}\{d(x,Tx) + d(y,Ty)\} \qquad (3.4)$$

eşitsizliğini sağlayan sürekli dönüşüm olsa bile sabit noktaya sahip olmayabilir. Bu durum aşağıdaki örnekte görülebilir.

Örnek 3.3 : $X = \left\{1 + \frac{1}{n} : n = 1,2,\cdots\right\}$ ve

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad x = y \\ x + y & , \quad x \neq y \end{cases}$$

olsun. O zaman (X,d) kompakt olmayan bir tam metrik uzaydır. $T:X \to X$ dönüşümü $T\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n+1}$ biçiminde tanımlansın. O zaman T süreklidir ve sabit noktası yoktur. Üstelik

$x = 1 + \frac{1}{n}$ ve $y = 1 + \frac{1}{m}$ için

$$2d(Tx,Ty) = 2\left(2 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1}\right)$$

$$< 2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + 2 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1}$$

$$= d(x, Tx) + d(y, Ty)$$

elde edilir.

Gornicki (3.4) eşitsizliğini sağlayan sürekli dönüşümlerin kompakt metrik uzayda sabit noktasının var olduğunu ispatlamıştır. Gornicki'nin bu teoremini ifade ve ispat edelim.

Teorem 3.3: (X, d) bir kompakt metrik uzay ve $T: X \to X$ dönüşümü (3.4) eşitsizliğini sağlayan sürekli dönüşüm olsun. O zaman T bir tek $v \in X$ sabit noktasına sahiptir üstelik her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ iterasyon dizisi v ye yakınsar.

İspat : $f: X \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, Tx)$ biçiminde tanımlı fonksiyonu göz önüne alalım. O zaman T sürekli olduğundan f de süreklidir.X kompakt olduğundan $f(X) \subset \mathbb{R}$ kompakttır. $\mathbb{R}$ de kompakt kümeler kapalı ve sınırlı olduğundan $f(X)$ kümesinin infimumu bu kümeye aittir. Yani

$f(v) = \inf f(X)$ olacak şekilde bir $v \in X$ vardır. Şimdi $v \neq Tv$ ile (3.4) eşitsizliğinden

$$d(Tv, T^2 v) < \frac{1}{2}\{d(v, Tv) + d(Tv, T^2 v)\}$$

olur ve buradan

$$f(Tv) = d(Tv, T^2 v) < d(v, Tv) = f(v)$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. O zaman $v = Tv$ dir. Sabit noktanın tek olduğu (3.4) eşitsizliğinden görülebilir. Şimdi $x \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere $x_n = T^n x$ biçiminde tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. Eğer $x = v$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = v$ olur. Yani $\lim x_n = v$ dir. Şimdi $x \neq v$ olsun. O zaman $n \in \mathbb{N}$ için $T^{n+1}x \neq T^n x$ olur. Böylece (3.4) eşitsizliğinden

$$d(T^{n+1}x, T^n x) < \frac{1}{2}\{d(T^n x, T^{n+1}x) + d(T^{n-1}x, T^n)\}$$

veya

$$d(T^{n+1}x, T^n x) < d(T^n x, T^{n-1}x) < \cdots < d(Tx, x)$$

bulunur. Dolayısıyla $b_n = d(T^{n+1}x, T^n x)$ biçiminde tanımlı reel sayı dizisi azalan bir dizidir. Aynı zamanda alttan sınırlı olduğundan yakınsaktır. Böylece $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ olacak biçimde $b \geq 0$ sayısı vardır. Şimdi $b > 0$ olmasının bir çelişki oluşturduğunu görelim. X kompakt olduğundan $\{T^n x\}$ dizisinin X de yakınsak bir alt dizisi vardır. Bu yakınsak alt dizi $\{T^{n_i}\}$ ve yakınsadığı nokta $z \in X$ olsun. O zaman T sürekli olduğundan

$$0 < b = \lim_{i\to\infty} b_{n_i} = \lim_{i\to\infty} d(T^{n_i+1}x, T^{n_i}x) = d(Tz, z)$$

olur ki bu z nin sabit nokta olamadığını söyler. Yani $z \neq v$ dir. Diğer taraftan (3.4) eşitsizliğinden

$$0 < b = \lim_{i\to\infty} b_{n_i} = \lim_{i\to\infty} d(T^{n_i+2}x, T^{n_i+1}x) = d(T^2 z, Tz) < d(Tz, z) = b$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. O zaman $b = 0$ olmalıdır. Böylece

$$d(T^{n+1}x, v) = d(T^{n+1}x, Tv)$$

$$< \frac{1}{2}\{d(T^n x, T^{n+1}x) + d(v, Tv)\}$$

$$= \frac{1}{2}d(T^n x, T^{n+1}x) \to b = 0$$

olduğundan $\{T^n x\}$ dizisi v ye yakınsar.

3.2. Asimptotik Düzenli Dönüşümler İçin Teoremler

(X, d) bir metrik uzay, C bunun boş olmayan bir alt kümesi ve $T: C \to C$ bir dönüşüm olsun. C deki bir $\{x_n\}$ dizisi için $d(x_n, Tx_n) \to 0$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine T nin yaklaşık sabit nokta dizisi denir.

Burada yaklaşık sabit nokta dizisi kavramını dikkate alarak bazı ek koşullarla birlikte metrik uzayda (3.1) eşitsizliğini sağlayan K sayısının $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ aralığında dahi olması durumunda dönüşümün sabit noktasının varlığını garanti eden bir teorem vereceğiz.

Teorem 3.4: (X, d) bir metrik uzay, T de X in kapalı M alt kümesinden kompakt C alt kümesine tanımlı bir dönüşüm olsun. Ayrıca T nin $K < 1$ olmak üzere (3.1) eşitsizliğini sağladığını kabul edelim. O zaman T nin bir tek sabit noktaya sahip olması için gerek ve yeter şart T nin bir yaklaşık sabit nokta dizisinin var olmalıdır.

İspat: $\{x_n\} \subseteq M$ dizisi T nin bir yaklaşık sabit nokta dizisi olsun. O zaman $\{Tx_n\}$ dizisi C de bir dizi olduğundan genelliği kaybetmeksizin $Tx_n \to y \in C$ olduğunu kabul edebiliriz. (C kümesi kompakt olduğundan C deki her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır. Dolayısıyla $\{Tx_n\}$ dizisinin de bir $y \in C$ noktasına yakınsayan $\{Tx_{n_k}\}$ gibi bir alt dizisi vardır. Burada ispatın geri kalanı bu alt dizi ile yapılabileceğinden alt dizi yerine $\{Tx_n\}$ dizisinin kendisinin $y \in C$ noktasına yakınsak olduğunu kabul ederek ispatı yapabiliriz). $\{x_n\}$ dizisi T nin bir yaklaşık sabit nokta dizisi olduğundan

$$0 = \lim_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} d(x_n, y)$$

olur. Yani $x_n \to y$ dir. Üstelik M kapalı olduğundan $y \in M$ olur. Böylece (3.1) eşitsizliğinden

$$d(y, Ty) \leq d(y, Tx_n) + d(Tx_n, Ty)$$

$$\leq d(y, Tx_n) + K\{d(x_n, Tx_n) + d(y, Ty)\}$$

olur ki buradan

$$d(y, Ty) \leq \frac{1}{1-K} d(y, Tx_n) + \frac{K}{1-K} d(x_n, Tx_n) \to 0$$

elde edilir. Yani $Ty = y$ bulunur. Bu sabit noktanın tek olduğu açıktır.

Yukarıdakine benzer bir sonuç (3.1) eşitsizliği yerine her $x, y \in M$ için

$$d(Tx,Ty) \leq K\{d(x\,,Tx) + d(y\,,Ty) + d(x\,,y)\}$$

olacak biçimde $K < 1$ sayısının var olduğu $T: M \to C$ dönüşümleri için de elde edilebilir.

Açıklama 3.3: Bir yaklaşık sabit nokta dizisine sahip olan $T: X \to X$ dönüşümü $x \neq y$ olacak biçimdeki her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) < d(x,Tx) + d(y,Ty)$$

eşitsizliğini sağlasa bile bir sabit noktaya sahip olmayabilir. Aşağıdaki örnek bu durumu göstermektedir.

Örnek 3.4: $X = [0,1]$ kümesini alışılmış metrik ile göz önüne alalım. $T: X \to X$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \ x = 0 \\ \frac{x}{2} & , \ x \neq 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. O zaman $0 < x < y \leq 1$ için

$$d(Tx\,,Ty) = |Tx - Ty| = \frac{1}{2}(y - x) < \frac{1}{2}(x + y) = |x - Tx| + |y - Ty|$$

olur. Yine $0 < x \leq 1$ için

$$d(T0,Tx) = |T0 - Tx| = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} < \frac{1}{2} + \frac{x}{2} = |0 - T0| + |x - Tx|$$

olur. Yani $x \neq y$ olacak biçimdeki her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) < d(x,Tx) + d(y,Ty)$$

sağlanır. Üstelik T dönüşümü yaklaşık sabit nokta dizisine sahip olmasına rağmen sabit noktası yoktur.

Eğer $x \in X$ için $d(T^{n+1}x, T^n x) \to 0$ oluyorsa $T: X \to X$ dönüşümüne x noktasın da asimptotik düzenlidir denir. Eğer T dönüşümü her $x \in X$ noktasında asimptotik düzenli ise T ye asimptotik düzenlidir denir.

Örnek 3.5: $X = \{0\} \cup [1,2]$ kümesinin alışılmış metrik ise birlikte göz önüne alalım. $T: X \to X$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} 1 & , \quad x = 0 \\ 0 & , \quad x \neq 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. O zaman her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \frac{1}{2}\{d(x,Tx) + d(y,Ty)\}$$

eşitsizliği sağlanır fakat T nin sabit noktası yoktur. Dikkat edelim ki burada

$\{T^n 0\}$ dizisi yakınsak değildir ve dolayısıyla T dönüşümü asimptotik düzenli değildir.

Teorem 3.5: (X, d) bir tam metrik uzay, $T: X \to X$ bir asimptotik düzenli dönüşüm olsun. Ayrıca T nin $K < 1$ olmak üzere (3.1) eşitsizliğini sağladığını kabul edelim. O zaman T dönüşümü bir tek $v \in X$ sabit noktasına sahiptir.

İspat : $x \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere $x_n = T^n x$ biçiminde tanımlı diziyi göz önüne alalım. T dönüşümü asimptotik düzenli olduğundan $m > n$ için

$$d(T^{n+1}x, T^{m+1}x) < K\{d(T^n x, T^{n+1}x) + d(T^m x, T^{m+1})\} \to 0$$

bulunur. Yani $\{T^n x\}$ bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} T^n x = v$ olacak biçimde bir $v \in X$ vardır. Böylece

$$d(v, Tv) \leq d(v, T^{n+1}x) + d(T^{n+1}x, Tv)$$

$$\leq d(v, T^{n+1}x) + K\{d(T^n x, T^{n+1}x) + d(v, Tv)\}$$

olur ki buradan

$$d(v, Tv) \leq \frac{1}{1-K} d(v, T^{n+1}x) + \frac{K}{1-K} d(T^n x, T^{n+1}x) \to 0$$

olur yani $Tv = v$ dir. T nin sabit noktasının tek olduğu ve $\{T^n x\}$ dizisinin bu sabit noktaya yakınsadığı açıktır.

Yukarıdakine benzer bir sonuç (3.1) eşitsizliği yerine her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq K\{d(x, Tx) + d(y, Ty) + d(x, y)\}$$

olacak biçimde $K < 1$ sayısının var olduğu $T: X \to X$ dönüşümleri için de elde edilebilir.

Genellikle $T: X \to X$ dönüşümü ile birlikte $T^2 = ToT, T^3 = T^2oT = ToT^2 \cdots$ şeklindeki iterasyonları da dikkate almaya ihtiyaç duyarız. I, X üzerindeki birim dönüşüm olmak üzere $T^0 = I$ gösterimini kullanırız. Ayrıca $m, n \in \mathbb{N}$ için $T^n oT^m = T^{n+m}$ eşitliğini yazabiliriz.

Eğer T dönüşümü (X, d) tam metrik uzayında K sabitine sahip bir Kannan dönüşümü ise, $n \geq 2$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(T^n x, T^n y) \leq K\left(\frac{K}{1-K}\right)^{n-1}\{d(x, Tx) + d(y, Ty)\}$$

eşitsizliği sağlanır ve üstelik T nin bir tek sabit noktası aynı zaman da T^n nin de bir tek sabit noktasıdır.

Şimdi $T: X \to X$ dönüşümünün bir Kannan dönüşümü olmadığı ancak bir $N \geq 2$ için T^N nin bir Kannan dönüşümü olabileceği ile ilgili aşağıdaki örneği dikkate alalım:

Örnek 3.6: $X = [0,1]$ kümesini alışılmış metrik ile dikkate alalım ve $T: X \to X$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \frac{x}{3} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{6} & , \quad x = 1 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. O zaman

$$d\left(T0\,, T\frac{1}{3}\right) = \left|T0 - T\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{2}\left\{|0 - T0| + \left|\frac{1}{3} - T\frac{1}{3}\right|\right\}$$

olduğundan T dönüşümü Kannan eşitsizliğini sağlamaz. Diğer taraftan T^2 dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \frac{x}{9} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{18} & , \quad x = 1 \end{cases}$$

biçiminde elde edilir. Böylece

$$d(T^2x\,, T^2y) \leq \frac{1}{9}(|x| + |y|)$$

ve

$$d(x\,, T^2x) + d(y\,, T^2y) \geq \frac{8}{9}(|x| + |y|)$$

olduğundan

$$d(T^2x\,,T^2y) \leq \frac{1}{4}\{d(x\,,T^2x) + d(y\,,T^2y)\}$$

elde edilir. Yani T^2 bir Kannan dönüşümüdür.

Aşağıdaki lemma aşikardır.

Lemma 3.1: X boş olmayan bir küme $\mathcal{F}$ de $F: X \to X$ tanımlı bir tek sabit noktaya sahip olan F dönüşümlerinin ailesi olsun. Eğer $T: X \to X$ dönüşümü için $T^n \in \mathcal{F}$ ise T bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat : $T^N \in \mathcal{F}$ olduğundan $T^N z = z$ olacak biçimde bir tek $z \in X$ vardır. O zaman $Tz = TT^N z = T^{N+1}z = T^N Tz$ olduğundan Tz de T^N nin bir sabit noktasıdır. T^N nin sabit noktası tek olduğundan $Tz = z$ olur. Ayrıca w noktası T nin z den farklı bir başka sabit noktası ise w, T^N nin de bir sabit noktası olur. Bu ise bir çelişki oluşturur.

Böylece aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Sonuç 3.1: $(X\,,d)$ bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer bir $N \geq 2$ için T^N bir Kannan dönüşümü ise T bir tek sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 3.2: $(X\,,d)$ bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm bir $N \geq 2$ için T^N asimptotik düzenli olacak biçimde bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(T^N x\,,T^N y) \leq K\{d(x\,,T^N x) + d(y\,,T^N y) + d(x,y)\}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $K < 1$ sabiti varsa, T bir tek sabit noktaya sahiptir.

Lemma 3.2: (X, d) bir tam metrik uzay, $N \geq 2$ bir pozitif tam sayı ve $K < \frac{1}{2}$ olsun. $T: X \to X$ dönüşümü her $x, y \in X$ için

$$d(T^N x, T^N y) \leq K\{d(x, Tx) + d(y, Ty)\} \tag{3.5}$$

eşitsizliğini sağlasın. Eğer $T^N x = x$ olacak biçimde bir $x \in X$ varsa o zaman x noktası T nin bir tek sabit noktasıdır.

İspat : $x \in X$ için $T^N x = x$ olsun. O zaman (3.5) den

$$d(x, Tx) = d(T^N x, T^{N+1} x)$$

$$\leq K\{d(x, Tx) + d(Tx, T^2 x)\}$$

olur ki buradan

$$d(x, Tx) \leq \frac{K}{1-K} d(Tx, T^2 x)$$

Bulunur. Şimdi de

$$d(Tx, T^2 x) = d(T^{N+1} x, T^{N+2} x)$$

$$\leq K\{d(Tx\,,T^2x)+d(T^2x\,,T^3x)\}$$

eşitsizliğinden

$$d(Tx\,,T^2x)\leq\frac{K}{1-K}d(T^2x\,,T^3x)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$d(T^{N-2}x\,,T^{N-1}x)\leq\frac{K}{1-K}d(T^{N-1}x\,,T^Nx)$$

elde edilebilir. Son olarak

$$d(T^{N-1}x\,,T^Nx)=d(T^{N+N-1}x\,,T^{N+N}x)$$

$$\leq K\{d(T^{N-1}x\,,T^Nx)+d(T^Nx\,,T^{N+1}x)\}$$

eşitsizliğinden de

$$d(T^{N-1}x\,,T^Nx)\leq\frac{K}{1-K}d(x\,,Tx)$$

bulunur. Fakat buradan

$$d(x,Tx) \leq \frac{K}{1-K} d(Tx,T^2x)$$

$$\leq \left(\frac{K}{1-K}\right)^2 d(T^2x,T^3x)$$

$$\vdots$$

$$\leq \left(\frac{K}{1-K}\right)^{N-1} d(T^{N-1}x,T^Nx)$$

$$\leq \left(\frac{K}{1-K}\right)^N d(x,Tx)$$

eşitsizliği bulunur ki $K < \frac{1}{2}$ olduğunda $x = Tx$ olmalıdır. Şimdi de $x, y \in X$ için $Tx = x$ ve $Ty = y$ olsun. O zaman

$$d(x,y) = d(T^Nx,T^Ny) \leq K\{d(x,Tx) + d(y,Ty)\} = 0$$

olur. Böylece $x = y$ elde edilir.

Açıklama 3.4: T dönüşümünün (3.5) eşitsizliğini sağlaması halinde sabit noktası var mıdır? Sorusu açık bir problemdir. Daha genel bir problem [7,8,10,15] numaralı kaynaklarda Genelleştirilmiş Banach Büzülme Konjektürü olarak ortaya konmuştur.

Varsayım 3.1: (X,d) bir tam metrik uzay, $K < \frac{1}{2}$, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve J de pozitif tam sayıların bir kümesi olsun. Ayrıca kabul edelim ki her $x, y \in X$ için

$$inf\{d(T^i x, T^i y): i \in J\} \leq K\{d(x, Tx) + d(y, Ty)\}$$

eşitsizliği sağlansın. O zaman T bir sabit noktaya sahiptir.

Kannan teoremi bu konjektürün $J = \{1\}$ durumudur.

Şimdi yukarıdaki lemmanın bir genelleştirmesini ifade ve ispat edelim.

Lemma 3.3: (X, d) bir tam metrik uzay, $K < \frac{1}{2}$, $T: X \to X$ bir dönüşümü ve J de pozitif tam sayıların bir kümesi olsun. Ayrıca kabul edelim ki her $x, y \in X$ için

$$inf\{d(T^i x, T^i y): i \in J\} \leq K\{d(x, Tx) + d(y, Ty)\}$$

eşitsizliği sağlansın. $N \geq 2$ için $T^N x = x$ olacak biçimde bir $x \in X$ varsa o zaman x noktası T nin bir tek sabit noktasıdır.

İspat : Her bir $i \in \{0,1,2, \cdots N-1\}$ için

$$d(T^{j_i} T^i x, T^{j_i} T^{i+1} x) \leq K\{d(T^i x, T^{i+1} x) + d(T^{i+1} x, T^{i+2} x)\}$$

olacak biçimde bir $j_i \in J$ nin var olduğunu dikkat edelim. $T^N x = x$ olduğundan

$$d(T^{a_i} x, T^{a_i+1} x) \leq K\{d(T^{a_{i-1}} x, T^{a_{i-1}+1} x) + d(T^{a_i} x, T^{a_i+1} x)\}$$

olacak biçimde bir $\{a_i : i \in \{1,2,\cdots\}\} \subset \{0,1,2,\cdots N-1\}$ dizisi bulabiliriz. Bu son eşitsizlikten

$$d(T^{a_i}x\ ,T^{a_i+1}x) \leq \frac{K}{1-K}\, d(T^{a_{i-1}}x\ ,T^{a_{i-1}+1}x)$$

bulunur. Şimdi $a_0 = 0$ olarak alalım ve $T^{a_{i-1}}x$ ve $T^{a_{i-1}+1}x$ ikilisine $T^{j_{a_{i-1}}}$ i uygulayalım. O zaman a_i sayısı $a_{i-1} + j_{a_{i-1}}$ in N ye bölümünden elde edilen kalan olarak tanımlanmaktadır. a_i sayısı $\{0,1,2,\cdots N-1\}$ sonlu kümesinin bir elemanı olduğundan $a_{i+n} = a_i$ olacak biçimde i ve n sayıları vardır. Yine

$$d(T^{a_i}x\ ,T^{a_i+1}x) = d(T^{a_{i+n}}x\ ,T^{a_{i+n}+1}x\ ) \leq \left(\frac{K}{1-K}\right)^n d(T^{a_i}x\ ,T^{a_i+1}x)$$

elde edilir. $K < \frac{1}{2}$ olduğundan $T^{a_i}x = T^{a_i+1}x$ olur ki buradan $T^{a_i}x\ ,T$ nin bir sabit noktasıdır. Dikkat edelim ki $N - a_i > 0$ ve $T^{a_i}x$ aynı zamanda T^{N-a_i} nin de sabit noktası olduğundan $T^{a_i}x = T^N x = x$ olur ki bu x in T nin bir sabit noktası olduğunu gösterir. Şimdi de $x, y \in X$ için $Tx = x$ ve $Ty = y$ olsun. O zaman

$$d(T^j x\ ,T^j y) \leq K\{d(x\ ,Tx) + d(y\ ,Ty)\}$$

olacak biçimde bir $j \in J$ vardır. x ve y T nin sabit noktaları olduğundan

$$d(x\ ,y) \leq K\{d(x\ ,Tx) + d(y\ ,Ty)\} = 0$$

bulunur ki buradan $x = y$ elde edilir.

3.3.Yerelleştirme

$T: X \to X$ dönüşümü X in tamamı üzerinde Kannan eşitsizliğini sağlamayabilir. Ancak verilen bir noktanın bir komşuluğunda Kannan eşitsizliği sağlanabilir. Bu durumda aşağıdaki gibi bir yerel sonuç elde edilebilir.

Teorem 3.6: (X, d) bir tam metrik uzay olmak üzere $z \in X$ merkezli $r > 0$ yarıçaplı kapalı yuvar $D(z,r) = \{x \in X: d(z,x) \leq r\}$ ve $T: D(z,r) \to X$ bir dönüşüm olsun. Ayrıca her $x, y \in D(z,r)$ için

$$d(Tx, Ty) \leq K\{d(x,Tx) + d(y,Ty)\}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $K < \frac{1}{2}$ sayısı var olsun. Ek olarak

$$d(z, Tz) \leq \left(1 - \frac{3K}{1+K}\right) r$$

eşitsizliği sağlansın. O zaman T dönüşümü $D(z,r)$ de bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat : $x \in D(z,r)$ olsun. O zaman

$$d(z, Tx) \leq d(z, Tz) + d(Tz, Tx)$$

$$\leq d(z, Tz) + K\{d(z, Tz) + d(x, Tx)\}$$

$$\leq (1+K)d(z, Tz) + K\{d(x, z) + d(z, Tx)\}$$

olup buradan

$$(1-K)d(z,Tx) \leq (1+K)d(z,Tz) + Kd(x,z)$$

olur. Dolayısıyla

$$d(z,Tx) \leq \frac{1+K}{1-K}d(z,Tz) + \frac{K}{1-K}d(x,z)$$

$$\leq \frac{1+K}{1-K}\left(1-\frac{3K}{1+K}\right)r + \frac{K}{1-K}r$$

$$= r$$

olur ki buradan $T: D(z,r) \to D(z,r)$ ye bir dönüşümdür. $D(z,r)$ tam olduğundan Kannan Sabit Nokta teoremi gereği T dönüşümü $D(z,r)$ de bir tek sabit noktaya sahiptir.

3.4. Kontrol Fonksiyonları İle Oluşturulan Kannan Tip Büzülmeler

Kannan eşitsizliğinde $K < \frac{1}{2}$ sabiti yerine bazı reel değerli kontrol fonksiyonlarını alarak Kannan Sabit Nokta teoreminin bazı önemli genelleştirmelerini elde edebiliriz. Bunlardan biri Geraghty'nin düşüncesiyle elde edilebilir. Aşağıdaki reel değerli S fonksiyon sınıfını göz önüne alalım:

$$S = \left\{ f : (0,\infty) \to \left[0, \frac{1}{2}\right) : f(t_n) \to \frac{1}{2} \Rightarrow t_n \to 0 \right\}.$$

Burada f nin sürekli olmasının kabul edilmediğine dikkat edelim. Örneğin $f(t) = K\ \left(0 \leq K < \frac{1}{2}\right)$, $f(t) = \frac{1}{2(1+t)}$ ve $f(t) = \frac{\ln(1+t)}{2t}$ fonksiyonları S sınıfına aittirler.

Teorem 3.7: (X, d) bir tam metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $f \in S$ olsun. $x \neq y$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq f(d(x, y))\{d(x, Tx) + d(y, Ty)\} \tag{3.6}$$

eşitsizliği sağlansın. O zaman T dönüşümü bir tek $v \in X$ sabit noktasına sahiptir, üstelik her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ iterasyon dizisi v ye yakınsar.

İspat : $x_0 \in X$ olmak üzere $x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$ biçiminde tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. Eğer $T^p x_0 = T^{p+1} x_0$ olacak biçimde bir $p \in \mathbb{N}$ varsa $T^p x_0$ noktası T nin bir sabit noktası olur. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $T^n x_0 \neq T^{n+1} x_0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T^{n+1} x_0, T^n x_0)$$

$$\leq \frac{1}{2}\{d(T^n x_0, T^{n+1} x_0) + d(T^{n-1} x_0, T^n x_0)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n-1}, x_n)\}$$

olduğundan

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq d(x_n, x_{n-1})$$

olur. Yani $\{d(x_{n+1}, x_n)\}$ dizisi monoton azalan bir dizidir. Alttan sınırlı olduğundan $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = \gamma$ olacak biçimde bir $\gamma \geq 0$ vardır. Şimdi $\gamma \neq 0$ olsun. O zaman (3.6) dan

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) \leq f(d(x_{n+1}, x_n))\{d(x_{n+2}, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1})\}$$

bulunur ki buradan

$$\frac{d(x_{n+2}, x_{n+1})}{d(x_{n+2}, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1})} \leq f(d(x_{n+1}, x_n))$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\frac{1}{2} \leq \lim_{n\to\infty} f(d(x_{n+1}, x_n))$$

elde edilir. $f \in S$ olduğundan $\gamma = 0$ bulunur ki bu $\gamma \neq 0$ kabulü ile çelişir. O zaman

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = \gamma = 0$$

olur.

Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu görelim. $m > n$ olsun. O zaman (3.6) dan

$$d(x_{n+1}, x_{m+1}) \leq f(d(x_n, x_m))\{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_m, x_{m+1})\}$$

$$\leq \frac{1}{2}\{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_m, x_{m+1})\}$$

bulunur ki $n \to \infty$ için limit alınırsa $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu görülür. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} T^n x_0 = v$ olacak biçimde bir $v \in X$ vardır. Buradan

$$d(Tv, v) \leq d(Tv, Tx_n) + d(Tx_n, v)$$

$$\leq f\big(d(v, x_n)\big)\{d(v, Tv) + d(x_n, Tx_n)\} + d(x_{n+1}, v)$$

olur ki

$$d(Tv, v) \leq \frac{f\big(d(v, x_n)\big)}{1 - f\big(d(v, x_n)\big)} d(x_n, x_{n+1}) + \frac{1}{1 - f\big(d(v, x_n)\big)} d(x_{n+1}, v)$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa $d(Tv, v) = 0$ bulunur, yani v noktası T nin bir sabit noktasıdır. Bu sabit noktanın tek olduğu görülebilir.

Şimdi de aşağıdaki $\mathcal{U}$ fonksiyon sınıfını dikkate alarak bir sabit nokta sonucu daha elde edebiliriz:

$$\mathcal{U} = \left\{f : (0, \infty) \to \left[0, \frac{1}{3}\right) : f(t_n) \to \frac{1}{3} \Rightarrow t_n \to 0\right\}.$$

Teorem 3.8: (X, d) bir tam metrik uzay, $T : X \to X$ bir dönüşüm ve $f \in \mathcal{U}$ olsun. $x \neq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq f(d(x,y))\{d(x,Tx) + d(y,Ty) + d(x,y)\} \qquad (3.7)$$

eşitsizliği sağlansın. O zaman T dönüşümü bir tek $v \in X$ sabit noktasına sahiptir, üstelik her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ iterasyon dizisi v ye yakınsar.

İspat : $x_0 \in X$ olmak üzere $x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$ biçiminde tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. Eğer $T^p x_0 = T^{p+1} x_0$ olacak biçimde bir $p \in \mathbb{N}$ varsa $T^p x_0$ noktası T nin bir sabit noktası olur. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $T^n x_0 \neq T^{p+1} x_0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$d(x_{n+1},x_n) = d(T^{n+1}x_0, T^n x_0)$$

$$\leq \frac{1}{3}\{d(T^n x_0, T^{n+1}x_0) + d(T^{n-1}x_0, T^n x_0) + d(T^n x_0, T^{n-1}x_0)\}$$

$$= \frac{1}{3}\{d(x_n, x_{n+1}) + 2d(x_{n-1}, x_n)\}$$

olduğundan

$$d(x_{n+1},x_n) \leq d(x_n, x_{n-1})$$

olur. Yani $\{d(x_{n+1},x_n)\}$ dizisi monoton azalan bir dizidir. Alttan sınırlı olduğundan $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1},x_n) = \gamma$ olacak biçimde bir $\gamma \geq 0$ vardır. Şimdi $\gamma \neq 0$ olsun. O zaman (3.7) den

$$d(x_{n+2},x_{n+1}) \leq f(d(x_{n+1},x_n))\{d(x_{n+2},x_{n+1}) + d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_n)\}$$

bulunur ki buradan

$$\frac{d(x_{n+2},x_{n+1})}{d(x_{n+2},x_{n+1})+2d(x_n,x_{n+1})} \leq f(d(x_{n+1},x_n))$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\frac{1}{3} \leq \lim_{n\to\infty} f(d(x_{n+1},x_n))$$

elde edilir. $f \in \mathcal{U}$ olduğundan $\gamma = 0$ bulunur ki $\gamma \neq 0$ ile çelişir. O zaman

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1},x_n) = \gamma = 0$$

dır.

Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $m > n$ olsun. O zaman (3.7) den

$$d(x_{n+1},x_{m+1}) \leq f(d(x_n,x_m))\{d(x_n,x_{n+1})+d(x_m,x_{m+1})+d(x_n,x_m)\}$$

$$\leq \frac{1}{3}\{d(x_n,x_{n+1})+d(x_m,x_{m+1})+d(x_n,x_{n+1})+d(x_{n+1},x_{m+1}) + d(x_{m+1},x_m)\}$$

bulunur. Buradan

$$d(x_{n+1}, x_{m+1}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_m, x_{m+1})$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu görülür. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} T^n x_0 = v$ olacak biçimde bir $v \in X$ vardır. Buradan

$$d(Tv, v) \leq d(Tv, Tx_{n+1}) + d(Tx_{n+1}, v)$$

$$\leq f\big(d(v, x_n)\big)\{d(v, Tv) + d(x_n, Tx_n) + d(x_n, v)\} + d(x_{n+1}, v)$$

olur ki

$$\big[1 - f\big(d(v, x_n)\big)\big]d(Tv, v) \leq f\big(d(v, x_n)\big)\{d(x_n, Tx_n) + d(x_n, v)\} + d(x_{n+1}, v)$$

elde edilir. Buradan

$$d(Tv, v) \leq \frac{f\big(d(v, x_n)\big)}{1 - f\big(d(v, x_n)\big)}\{d(x_n, Tx_n) + d(x_n, v)\}$$

$$+ \frac{1}{1 - f\big(d(v, x_n)\big)} d(x_{n+1}, v)$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa $d(Tv, v) = 0$ bulunur, yani v noktası T nin bir sabit noktasıdır. Bu sabit noktanın tek olduğu görülebilir.

Bu teorem Banach ve Kannan teoremleri arasında bulunmaktadır. Aşağıdaki

örnek bu durumu açıklamaktadır.

Örnek 3.7: $X = [0,1]$ kümesi alışılmış metrik ile birlikte göz önüne alınsın. $T: X \to X$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \frac{x}{3} & , 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{6} & , \quad x = 1 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. O zaman T dönüşümü sürekli olmadığından büzülme

dönüşümü değildir. Yani Banach sabit nokta teoreminin şartlarını sağlamaz. Ayrıca $x = \frac{1}{2}$ ve $y = 0$ alınırsa Kannan eşitsizliğinin de sağlanmadığı görülür. Dolayısıyla T dönüşümü Kannan sabit nokta teoreminin şartlarını da sağlamaz. Fakat

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{t}{12} + \frac{1}{3} & , \quad 0 < t \leq 1 \\ \frac{1}{4} & , \quad t = 0 \end{cases}$$

olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq f(d(x,y))\{d(x, Tx) + d(y, Ty) + d(x,y)\}$$

eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla yukarıdaki teoremden T bir tek sabit noktaya sahiptir ki $v = 0$ bu sabit noktadır.

3.5. Asimptotik Düzenlilik ve Kontrol Fonksiyonları

$\mathcal{V}$ fonksiyon sınıfı aşağıdaki biçimde tanımlansın:

$$\mathcal{V} = \{f : (0,\infty) \to [0,1) : f(t_n) \to 1 \Rightarrow t_n \to 0\}.$$

Burada f nin sürekli olması gerekmediğine dikkat edelim. $f : (0,\infty) \to [0,1)$ azalan bir fonksiyon ise f fonksiyonu $\mathcal{V}$ sınıfı içindedir.

Teorem 3.9 : (X,d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ asimptotik düzenli ve sürekli bir dönüşüm olsun. Ayrıca $x \neq y$ olacak biçimdeki her $x, y \in X$ için

$$d(Tx\,,Ty) \leq f\big(d(x,y)\big)\{d(x,Tx) + d(y,Ty) + d(x,y)\} \qquad (3.8)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $f \in \mathcal{V}$ var olsun. O zaman T dönüşümü bir tek $v \in X$ sabit noktasına sahiptir, üstelik her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ iterasyon dizisi v ye yakınsar.

İspat : $x \in X$ olmak üzere $x_n = T^n x$ biçiminde tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. Eğer $T^{n_0}x = T^{n_0+1}x$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $T^{n_0}x$ noktası T nin bir sabit noktası olur. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $T^n x \neq T^{n+1}x$ olduğunu kabul edelim. İlk olarak $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu göstereceğiz. Aksini kabul edelim. O zaman $\lim sup_{n,m\to\infty} d(x_n\,,x_m) > 0$ dır. Üçgen eşitsizliğinden (3.8) ve den

$$d(x_n\,,x_m) \leq d(x_n\,,x_{n+1}) + d(x_{n+1}\,,x_{m+1}) + d(x_{m+1}\,,x_m)$$

$$\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{m+1}, x_m)$$

$$+f\big(d(x_n, x_m)\big)\{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_m, x_{m+1}) + d(x_n, x_m)\}$$

eşitsizliği yazılabilir ki buradan

$$\frac{d(x_n, x_m)}{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{m+1}, x_m)} \leq \frac{1 + f\big(d(x_n, x_m)\big)}{1 - f\big(d(x_n, x_m)\big)}$$

elde edilir. Buradan $\lim sup_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) > 0$ olması ile asimptotik düzenlilik dikkate alınırsa

$$\lim_{n,m\to\infty} sup \frac{d(x_n, x_m)}{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{m+1}, x_m)} = \infty$$

olacağından

$$\lim_{n,m\to\infty} sup \frac{1 + f\big(d(x_n, x_m)\big)}{1 - f\big(d(x_n, x_m)\big)} = \infty$$

bulunur. Bu son eşitsizlikten de $\lim sup_{n,m\to\infty} f(d(x_n, x_m)) = 1$ olması gerektiği görülebilir. Fakat $f \in \mathcal{V}$ olduğundan $\lim sup_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$ bulunur ki bu bir çelişkidir. O zaman $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = v$ olacak biçimde bir $v \in X$ vardır. Son olarak T sürekli olduğundan $Tv = v$ elde edilir. Şimdi de sabit noktanın tek olduğunu görmek için T nin u ve v gibi farklı iki sabit noktanın olduğunu kabul edelim. O zaman $Tu = u,\ Tv = v$ ve $d(u, v) > 0$ dır. Böylece (3.8) den

$$d(u,v) = d(Tu,Tv)$$

$$\leq f\big(d(u,v)\big)\{d(u,Tu) + d(v,Tv) + d(u,v)\}$$

$$= f\big(d(u,v)\big)d(u,v)$$

olur ki buradan

$$1 \leq f(d(u,v))$$

bulunur. Bu ise bir çelişkidir.

Sonuç 3.3: (X,d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ asimptotik düzenli ve sürekli bir dönüşüm olsun. Ayrıca $x \neq y$ olacak biçimdeki her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq f(d(x,y))\{d(x,Tx) + d(y,Ty)\}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $f \in \mathcal{V}$ var olsun. O zaman T dönüşümü bir tek $v \in X$ sabit noktasına sahiptir, üstelik her $x \in X$ için $\{T^n\}$ iterasyon dizisi v ye yakınsar.

3.6. Kannan Teoreminin Suzuki Tip Genelleştirmeleri

Suzuki metrik sabit nokta teori için aşağıdaki düşünceyi dikkate alarak bazı genelleştirmeler elde etmiştir. Bilindiği gibi genellikle metrik sabit nokta teoremlerinde büzülme eşitsizliklerinin uzayın tüm x, y noktaları için sağlanması istenmektedir. Suzuki bu durumu zayıflatarak, metrik uzayda belli özelliklere

sahip x, y noktalarının büzülme eşitsizliğini sağlaması halinde sabit noktanın varlığını garanti eden sonuçlar elde etmiştir. Burada Suzuki'nin bu düşüncesiyle elde edilen Kannan teoreminin bazı genelleştirmelerini dikkate alacağız.

Teorem 3.10 (Kikkawa ve Suzuki) : (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki biçimde tanımlı $\varphi: [0,1) \to \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ fonksiyonu göz önüne alalım:

$$\varphi(r) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq r < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{1+r} & , \quad \dfrac{1}{\sqrt{2}} < r < 1 \end{cases}$$

$K \in [0,1)$ için $r = \frac{K}{1-K}$ diyelim. Kabul edelim ki

$$\varphi(r) d(x, Tx) \leq d(x, y)$$

olacak biçimdeki her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq K\{d(x, Tx) + d(y, Ty)\}$$

eşitsizliği sağlansın. O zaman T dönüşümü bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir. Üstelik her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ iterasyon dizisi z ye yakınsar.

Teorem 3.11 (Kikkawa ve Suzuki) : (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki biçimde tanımlı $\theta: [0,1) \to \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ fonksiyonu göz

önüne alalım:

$$\theta = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq r \leq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \dfrac{1-r}{r^2} & , \quad \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \leq r \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{1+r} & , \quad \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq r < 1 \end{cases}$$

Kabul edelim ki aşağıdaki gerektirmeyi sağlayan bir $r \in [0,1)$ var olsun:

$$\theta(r)d(x,Tx) \leq d(x,y)$$

olacak biçimdeki her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq r\ max\{d(x,Tx), d(y,Ty)\}$$

eşitsizliği sağlansın. O zaman T dönüşümü bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir. Üstelik her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ iterasyon dizisi z ye yakınsar.

3.7. Kannan Teoreminin Küme Değerli Dönüşümlere Genişletilmeleri

Bu kesimde Kannan sabit nokta teoreminin küme değerli dönüşümlere genişletilmelerinden bahsedeceğiz. Bilindiği gibi küme değerli dönüşümler için metrik sabit nokta teori çalışmaları Nadler ile başlamıştır. Nadler küme değerli büzülme dönüşümleri için aşağıdaki sabit nokta teoremini ispatlamıştır.

Teorem 3.12 : (X,d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to CB(X)$ bir küme değerli büzülme dönüşümü olsun. Yani her $x, y \in X$ için

$$H(Tx,Ty) \leq Ld(x,y)$$

olacak biçimde bir $L \in [0,1)$ var olsun. O zaman T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

Daha sonra Nadlerin bu teoreminin pek çok genelleştirmesi elde edilmiştir. Örneğin Kikkawa ve Suzuki küme değerli büzülme eşitsizliğini zayıflatarak aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 3.13 : (X,d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to CB(X)$ bir dönüşümü olsun. $\eta: [0,1) \to \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, $\eta(r) = \frac{1}{1+r}$ biçiminde tanımlı fonksiyonu göz önüne alalım. Ayrıca her $x, y \in X$ için

$$\eta(r)d(x,Tx) \leq d(x,y) \Longrightarrow H(Tx,Ty) \leq rd(x,y)$$

önermesini doğrulayan bir $r \in [0,1)$ var olsun. O zaman T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

Kannan sabit nokta teoreminin küme değerli genişletmeleri için aşağıdaki sonuçları inceleyelim.

Teorem 3.14 : (X,d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to CB(X)$ bir dönüşümü olsun. $\varphi: [0,1) \to (0,1]$

$$\varphi(r) = \begin{cases} 1 \quad , & 0 \leq r < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\ 1-r \quad , & \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \leq r < 1 \end{cases}$$

biçiminde tanımlı fonksiyonu göz önüne alalım. Ayrıca her $x, y \in X$ için

$$\varphi(r)D(x,Tx) \leq d(x,y) \Longrightarrow H(Tx,Ty) \leq r\max\{D(x,Tx),D(y,Ty)\} \qquad (3.9)$$

önermesini doğrulayan bir $r \in [0,1)$ var olsun. O zaman T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat : $0 \leq r < r_1 < 1$ eşitsizliğini sağlayan bir r_1 reel sayısını göz önüne alalım. $u_1 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere $u_2 \in Tu_1$ noktasını seçelim. Eğer $D(u_2, Tu_2) = 0$ ise $u_2 \in Tu_2$ olacağından T nin sabit noktası vardır. Şimdi $D(u_2, Tu_2) > 0$ olsun. O zaman $D(u_2, Tu_2) = 0$ olduğundan

$$D(u_2, Tu_2) \leq H(Tu_1, Tu_2)$$

ve

$$\varphi(r)D(u_1,Tu_1) \leq D(u_1,Tu_1) \leq d(u_1, u_2)$$

sağlanır. Dolayısıyla

$$D(u_2, Tu_2) \leq H(Tu_1, Tu_2) \leq r\ max\{D(u_1,Tu_1),D(u_2, Tu_2)\} \qquad (3.10)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece $D(u_2, Tu_2) > 0$ ve $r < 1$ olduğundan

$$D(u_2, Tu_2) \leq rD(u_1, Tu_1) \leq rd(u_1, u_2)$$

elde edilir. Buradan

$$d(u_2, u_3) \leq r_1 d(u_1, u_2)$$

olacak biçimde bir $u_3 \in Tu_2$ vardır. Bu şekilde devam ederek her $n \in \mathbb{N}$ için

$$u_{n+1} \in Tu_n \text{ ve } d(u_{n+1}, u_{n+2}) \leq r_1 d(u_n, u_{n+1})$$

özelliklerine uygun X için de bir $\{u_n\}$ dizisi bulabiliriz. Böylece $n \geq 1$ için

$$d(u_n, u_{n+1}) \leq r_1^{n-1} d(u_1, u_2)$$

elde edilir. O zaman üçgen eşitsizliğinden

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(u_n, u_{n+1}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} r_1^{n-1} d(u_1, u_2)$$

olur. Dolayısıyla $\{u_n\}$ dizisi X için de bir Cauchy dizisidir. (X, d) tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} u_n = z$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır.

Şimdi her $x \in X \setminus \{z\}$ için

$$D(z\,,Tx) \leq D(x\,,Tx) \tag{3.11}$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstereceğiz. $\lim_{n\to\infty} u_n = z$ olduğundan her $n \geq n_0$ için $d(u_n\,,z) \leq \frac{1}{3}d(x,z)$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı vardır. O zaman $n \geq n_0$ için

$$\varphi(r)D(u_n\,,Tu_n) \leq D(u_n\,,Tu_n)$$

$$\leq d(u_n\,,u_{n+1})$$

$$\leq d(u_n\,,z) + d(u_{n+1}\,,z)$$

$$\leq \frac{2}{3}d(x,z)$$

olur. Diğer taraftan $n \geq n_0$ için

$$\frac{2}{3}d(x,z) = d(x,z) - \frac{1}{3}d(x,z)$$

$$\leq d(x,z) - d(u_n\,,z)$$

$$\leq d(u_n\,,x)$$

olduğundan

$$\varphi(r)D(u_n, Tu_n) \leq d(u_n, x)$$

elde edilir. Böylece (3.10) dan, $n \geq n_0$ için

$$H(Tu_n, Tx) \leq r\ max\{D(u_n, Tu_n), D(x, Tx)\}$$

bulunur. Yine $u_{n+1} \in Tu_n$ olduğundan

$$D(u_{n+1}, Tx) \leq H(Tu_n, Tz)$$

olup $n \geq n_0$ için

$$D(u_{n+1}, Tx) \leq r\ max\{D(u_n, Tu_n), D(x, Tx)\}$$

$$\leq r\ max\{d(u_n, u_{n+1}), D(x, Tx)\}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsak

$$D(z, Tx) \leq D(x, Tx)$$

elde edilir ki bu (3.11) i doğrular.

Şimdi $z \in Tz$ olduğunu görelim. Aksini kabul edelim. Yani $z \notin Tz$ olsun. Aşağıdaki iki durumda inceleme yapacağız.

- $0 \leq r < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ olsun. $a \in Tz$ için $a \neq z$ olacağından (3.11) dikkate alınırsa

$$D(z, Ta) \leq rD(a, Ta)$$

olur. Diğer taraftan

$$\varphi(r)D(z, Tz) \leq D(z, Tz) \leq d(z, a)$$

olduğundan (3.9) ile beraber

$$H(Tz, Ta) \leq r\, max\{D(z, Tz), D(a, Ta)\}$$

elde edilir. Böylece

$$D(a, Ta) \leq H(Tz, Ta)$$

olduğundan

$$D(a, Ta) \leq rD(z, Tz)$$

bulunur. O zaman (3.11) dikkate alınırsa

$$D(z, Tz) \leq D(z, Ta) + H(Ta, Tz)$$

$$\leq rD(a,Ta) + r\ max\{D(z,Tz), D(a,Ta)\}$$

$$\leq rD(a,Ta) + rD(z,Tz)$$

$$\leq r^2 D(z,Tz) + rD(z,Tz)$$

$$= (r^2 + r)D(z,Tz)$$

bulunur. Böylece $r < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ olduğundan $r^2 + r < 1$ olur. Yani yukarıdaki eşitsizlikten $D(z,Tz) < D(z,Tz)$ olur ki bu bir çelişkidir. O zaman $z \in Tz$ olmalıdır.

- $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq r < 1$ olsun. Şimdi ilk olarak her $x \in X$ için

$$H(Tx,Tz) \leq r\ max\{D(x,Tx), D(z,Tz)\} \tag{3.12}$$

eşitsizliğinin sağlandığını görelim. Eğer $x = z$ ise bu eşitsizliğin sağlandığı açıktır. $x \neq z$ olsun. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(z,y_n) \leq D(z,Tx) + \frac{1}{n} d(x,z)$$

olacak biçimde bir $y_n \in Tx$ bulunabilir. Buradan (3.11) dikkate alınırsa her $n \in \mathbb{N}$ için

$$D(x,Tx) \leq d(x,y_n)$$

$$\leq d(x\,,z) + d(z\,,y_n)$$

$$\leq d(x\,,z) + D(z\,,Tx) + \frac{1}{n}\,d(x\,,z)$$

$$\leq d(x\,,z) + rD(x\,,Tx) + \frac{1}{n}\,d(x\,,z)$$

elde edilir. Böylece

$$(1-r)D(x\,,Tx) \leq (1+\frac{1}{n})d(x\,,z)$$

bulunur. Bu son ifadeden $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$(1-r)D(x\,,Tx) \leq d(x\,,z)$$

elde edilir. Böylece

$$\varphi(r)D(x\,,Tx) \leq d(x\,,z)$$

bulunur. Şimdi de (3.9) ve (3.12) dikkate alınırsa

$$D(z\,,Tz) \leq \lim_{n\to\infty} D(u_{n+1}\,,Tz)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} H(Tu_n, Tz)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} r\ max\{D(u_n, Tu_n), D(z, Tz)\}$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} r\ max\{d(u_n, u_{n+1}), D(z, Tz)\}$$

$$= rD(z, Tz)$$

elde edilir ki bu $D(z, Tz) = 0$ olduğunu gösterir. Tz kapalı olduğundan $z \in Tz$ bulunur.

Uyarı : Yukarıdaki teoremde (3.9) eşitsizliği yerine Kannan'ın orijinal eşitsizliği alınarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.15 : (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to CB(X)$ bir dönüşüm olsun. $K \in [0, \frac{1}{2})$ olmak üzere $r = 2K$ diyelim. Ayrıca her $x, y \in X$ için φ Teorem 3.14 deki gibi olmak üzere

$$\varphi(r)D(x, Tx) \leq d(x, y) \Longrightarrow H(Tx, Ty) \leq K\{D(x, Tx) + D(y, Ty)\} \qquad (3.13)$$

önermesi doğrulansın. O zaman T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

Uyarı : Yukarıdaki teoremlerde (3.9) ve (3.13) önermelerindeki ön koşullar ihmal edilerek aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

Sonuç 3.4: (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to CB(X)$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$H(Tx, Ty) \leq r \max\{D(x, Tx), D(y, Ty)\}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $r \in [0,1)$ var olsun. O zaman T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 3.5: (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to CB(X)$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$H(Tx, Ty) \leq K\{D(x, Tx) + D(y, Ty)\}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $K \in [0, \frac{1}{2})$ var olsun. O zaman T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

4.TARTIŞMA VE SONUÇ

Kannan sabit nokta teoremin çeşitli genelleştirmeleri detaylı bir şekilde incelenmiştir. Literatürde bulunan Kannan sabit nokta teoreminin yanı sıra Górnicki, Nadler, Subrahmanyam, Kikkawa ve Suzuki'nin sabit nokta teoremlerin tekliği üzerindeki teoremleri gösterilmiştir. Yerelleştirme ve kontrol fonsiyonları ile oluşturulan Kannan tip büzülme dönüşümleri ve ilgili sabit nokta teoremleri incelenmiştir. Suzuki, metrik sabit nokta teoremlerinde büzülme eşitsizliklerinin uzayın tüm x, y noktaları için sağlanması durumunu zayıflatarak, metrik uzayda belli özelliklere sahip x, y noktalarının büzülme eşitsizliğini sağlaması halinde sabit noktanın varlığını garanti eden sonuçlar elde etmiştir. Bu tez çalışmasında Suzuki'nin bu düşüncesiyle elde edilen Kannan teoreminin bazı genelleştirmeleri dikkate alınmıştır. Son olarak da Kannan teoreminin küme değerli dönüşümlere genişletilmesi teoremi sunulmuştur.

KAYNAKLAR

[1] Koçak, M., Genel topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar, Furkan Ofset Eskişehir, 2009.

[2] Mıchael A., G.: On contractive mappings. Proc. Am. Math. Soc. 40, 604-608 (1973).

[3] Górnicki, J.: Fixed point theorems for Kannan type mappings. J. Fixed Point Theory Appl. 19, 2145-2152 (2017).

[4] Jachymski, J., Schröder, B., Stein Jr., J.D.: A connection between fixed-point theorems and tiling problems. J. Comb. Theory A 87, 273-286 (1999)

[5] Jachymski, J., Stein Jr., J.D.: A minimum condition and some related fixed-point theorems. J. Aust. Math. Soc. A 66, 224-243 (1999).

[6] Kannan, R.: Some results on fixed points. Bull. Calcutta Math. Soc. 60, 71-76 (1968).

[7] Merryfield, J., Stein Jr., J.D.: A generalization of the Banach contraction principle. J. Math. Anal. Appl. 273, 112-120 (2002).

[8] Reich, S., Zaslavski, A.J.: Two results on Jachymski-Schröder-Stein contractions. Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 56, 53-58 (2008)

[9] Subrahmanyam, P.V.: Completeness and fixed points. Monatsh. Math. 80, 325-330 (1975)

[10] Kikkawa, M. and Suzuki, T. Some similarity between contractions and Kannan mappings, Fixed Point Theory Appl. (2008), Article ID 649749, 1-8.

[11] Kikkawa, M. and Suzuki, T. Three fixed point theorems for generalizet contractions with constants in complete metric spaces, Nonlinear Anal. 69, (2008), 2942-2949.

[12] S. B. Nadler, Jr., Multi-valued contraction mappings, Pacific J. Math., 30 (1969), 475-488.