T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

REEL KUATERNİYON MATRİSLERİ VE DÖNME DÖNÜŞÜMÜ

Arzu ALTINOK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2019

Doç. Dr. Mehmet GÜLBAHAR danışmanlığında, Arzu ALTINOK'un hazırladığı **"Reel Kuaterniyon Matrisleri ve Dönme Dönüşümü"** konulu bu çalışma 26/12/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

İmza

Danışman : Doç. Dr. Mehmet GÜLBAHAR .....

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Müslüm Aykut AKGÜN .....

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Abdullah YILDIRIM .....

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.

Doç. Dr. İsmail HİLALİ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
ŞEKİLLER DİZİNİ iv
ÇİZELGELER DİZİNİ v
SİMGELER DİZİNİ vi
1. GİRİŞ 1
2. KURAMSAL TEMELLER 3
2.1. Standart Reel Vektör Uzayı Üzerinde Bazı Özel Tanımlı Dönüşümler 3
2.2. Diferensiyellenebilir Manifoldlar 7
2.3. Riemann Manifoldları 14
2.4. Lie Grupları ve Cebirleri 18
3. MATERYAL ve YÖNTEM 32
3.1. Materyal 32
3.1.1. Reel kuaterniyonlar cebiri 32
3.1.2. Uzayda dönme dönüşümü 43
3.2. Yöntem 47
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA 48
4.1. Kuaterniyonlar Yardımı İle Dönme 48
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER 61
KAYNAKLAR 62
ÖZGEÇMİŞ 63

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

REEL KUATERNİYON MATRİSLERİ ve DÖNME DÖNÜŞÜMÜ

Arzu ALTINOK

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mehmet GÜLBAHAR
Yıl: 2019, Sayfa: 63

Bu tezde, kuaterniyonlar ile dönme dönüşümünün arasındaki ilişki çalışılmıştır. Temel kavramlar olarak; diferensiyellenebilir manifoldlar, Lie grupları ve bazı özel tanımlı dönüşümler ile alakalı bazı temel bilgilerden bahsedilmiştir. Daha sonra reel kuaterniyon cebiri ve temel özellikleri, uzayda dönme dönüşümü ifade edilmiştir. Son olarak kuaterniyonlar ile dönme dönüşümünün nasıl elde edildiği açıklanıp, Lie grupları ve kuaterniyon matrisleri kullanılarak, dönme dönüşümün diferensiyelinin konformal bir dönüşüm olduğu gösterilmiştir.

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş olarak düzenlenmiş ve kuaterniyonların tarihsel gelişimi hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölüm temel kavramlara ayrılmıştır. Üçüncü bölümde bu tezde kullanılan materyal ve yöntem kısaca verilmiştir. Ayrıca reel kuaterniyonların özellikleri ve uzayda dönme dönüşümünden bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde ise kuaterniyonların matris gösterimi, bu matrislerin bazı özel Lie grupları ile olan ilişkileri incelenmiştir. Kuaterniyonlar yardımıyla dönme ve dönme dönüşümünün diferensiyeli gösterilmiştir. Beşinci bölümde ise dördüncü bölümde yapılan çalışmalarla ilgili sonuç ve öneriler verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Dönme dönüşümleri, Kuaterniyonlar, Lie grupları.

ABSTRACT

MSc Thesis

REEL QUATERNIONS MATRICES AND ROTATION MAPPING

Arzu ALTINOK

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet GÜLBAHAR
Year: 2019, Page: 63

In this thesis, the relation between quaternions and rotation mapping is studied. Some basic facts related to smooth maps, Lie groups and some special linear maps are mentioned as preliminaries. Later, the notions of real quaternion algebra and its properties and rotation mapping are expressed. Finally, it is explained how to obtain the rotation mapping with the aid of quaternions. By using Lie groups and quaternion matrices, it is showed that the differential of rotation mapping in space is a conformal mapping.

This study prepared as a master thesis consists of five parts. The first chapter is arranged as an introduction and it is given information about historical developments of quaternions. The second chapter is devoted to basic concepts. In the the third chapter, materials and methods used in this thesis are given briefly. Moreover, it is mentioned about properties of real quaternions and rotation mapping in space. In the fourth chapter, matrix representation of quaternions and relationships with some special Lie groups of these matrices are analyzed. With the help of quaternions, rotation and rotation mapping's differential is showed. In fifth chapter, the results and suggestions related studies in the fourth chapter are given.

KEY WORDS: Rotation mapping, Quaternions, Lie Groups.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım süresince her türlü yardım ve fedakarlığı sağlayan, bilgi ve tecrübeleriyle çalışmama ışık tutan, desteğini ve önerilerini esirgemeyen değerli hocalarım Doç. Dr. Mehmet GÜLBAHAR'a ve Dr. Öğr. Üyesi Melek ERDOĞDU'ya sonsuz teşekkür eder ve saygılarımı sunarım. Çalışmalarım esnasında bana vakit ayıran katkılarını esirgemeyen sayın Dr. Öğr. Üyesi Abdullah YILDIRIM'a, Dr. Öğr. Üyesi Kemal TOKER'e ve Dr. Esra ERKAN'a teşekkürü borç bilirim.

Ayrıca hayatımın her döneminde olduğu gibi, bu çalışmam süresince de yanımda olup desteğini esirgemeyen değerli aileme de teşekkür eder, saygı ve sevgilerimi sunarım.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 2.2. Üstel dönüşüm…… 25
Şekil 3.1. z ekseni etrafında dönme……... 44
Şekil 3.2. Herhangi bir n vektörü etrafında dönme…….. 45
Şekil 3.3. Normal vektörü n olan düzlemde dönme…… 46

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

Çizelge 1.1. İmajiner birimler arası ilişkiler …….1

SİMGELER DİZİNİ

D_q : q Birim Kuaterniyonunun Belirttiği Dönme Dönüşümü
exp : Üstel Dönüşüm
$(F_*)_p$: Türev Dönüşümü
H : Reel Kuaterniyonlar Kümesi
L_a : Lie Grubunun Bir a Elemanının Sol Ötelenmesi
M_{nxn} : $n \times n$ Tipinde Matrisler Kümesi
$n \times u$: n ile u Vektörlerinin Vektörel Çarpımı
N_q : q Reel Kuaterniyonunun Normu
q^1 : q Reel Kuaterniyonunun Birimleştirilmesi
q^{-1} : q Reel Kuaterniyonunun Tersi
$\bar{q}$: q Reel Kuaterniyonunun Eşleniği
R_a : Lie Grubunun Bir a Elemanının Sağ Öelenmesi
$\mathbb{R}$: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^n$: n Boyutlu Öklid Uzayı
S_q : q Reel Kuaterniyonunun Skaler Kısmı
V_q : q Reel Kuaterniyonunun Vektörel Kısmı
$\Phi_q(x)$: x Vektörünün Pozitif Yönde θ Açısı Kadar Döndürülmesi
$\otimes$: İki kuaterniyonun çarpımı
$\langle\ \rangle$: Öklid İç Çarpımı
$\|\ \|$: Öklid Normu

1. GİRİŞ

Kompleks sayıların temel özellikleri Euler, Riemann, Cauchy gibi ünlü matematikçiler tarafından incelenmiştir. 1833 yılında Hamilton, kompleks sayıların yeni bir cebirsel gösterimi olan reel sayı çiftlerini ifade etti. Böylece herbir $z = a + ib$ kompleks sayısını (a,b) sıralı ikilisi ile gösterdi. Sonra iki kompleks sayının toplamını $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ ve çarpımını $(a,b).(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$ olarak tanımladı.

Daha sonra Hamilton kompleks sayıları bir reel kısım ve iki farklı imajiner kısımlarla genişletmek istedi. Fakat Hamilton böyle bir sayı üçlüsüne neden ihtiyaç duyulur sorusuna cevap veremedi.1843 yılında reel kuateniyon cebirini tanıtarak ve reel kuaterniyonların temel özelliklerini inşa ederek üç boyutta dönmenin bu sayılar yardımıyla ifade edilebileceğini savunmuştur.

Kuaterniyon sayıları bir reel, üç farklı imajiner eksenden oluşur ve her kuaterniyon sayısına bir (a,b,c,d) sıralı dörtlüsü karşılık gelir. Hamilton'un bu çalışmalarından sonra kuaterniyonlar ve kuaterniyon cebirleri birçok matematikçinin ilgisini çekmiştir (Brenner,1951; Weigmann 1955; Hacısalihoğlu 1983; Girard 1984; Farenick 2003; Weiner 2005; Meral 2009; Özdemir 2017; Jia 2017).

H kuaterniyonlar kümesini göstermek üzere;

$$H = \{q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde tanımlanmış olup imajiner birimler i, j, k aşağıdaki ilişkileri sağlar.

Çizelge 1.1. İmajiner birimler arası ilişkiler

$\otimes$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Her reel kuaterniyon $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ şeklinde ifade edilir. Burada $q_0 \in \mathbb{R}$ kuaterniyonun skaler kısmı olup $S_q = q_0$ ile gösterilir, $q_1 i + q_2 j + q_3 k$ ise vektörel kısmı olup $V_q = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ şeklinde yazılır (Hacısalihoğlu, 1983).

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş olarak düzenlenen birinci bölümde kuaterniyonların tarihsel gelişiminden bahsedilip kuaterniyonlar hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde, standart reel vektör uzayı, bazı özel tanımlı dönüşümler, diferensiyallenebilir manifoldlar, Riemann manifoldları, Lie grupları ve cebirleri başlıklarına ait temel tanım ve özelliklerden bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde kuaterniyonlar cebiri tanıtılmış ve önemli özellikleri belirtilmiştir. Ayrıca uzayda dönme dönüşümü ve dönme matrisi ifade edilmiştir.

Dördüncü bölümde skaler kısmı sıfır olan pure(saf) kuaterniyonlar V_q ile gösterilerek bazı cebirsel özellikleri incelenmiştir. Bu cebirsel özellikler kullanılarak dönmeyi veren dönüşüm kuaterniyonlar yardımı ile ifade edilmiştir. Elde edilen bu dönüşümün diferensiyeli incelenmiştir.

Son bölümde ise; sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Standart Reel Vektör Uzayı Üzerinde Bazı Özel Tanımlı Dönüşümler

Tanım 2.1.1. $V, \mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $f : V \times V \to \mathbb{R}$ dönüşümüne V üzerinde bir iç çarpım ve $(V, \langle , \rangle)$ ikilisine ise bir iç çarpım uzayı adı verilir (Hacısalihoğlu,2000).

i) $\forall u \in V, u \neq 0$ olmak üzere $\langle u, u \rangle > 0$,

ii) $\forall u, v \in V, \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$,

iii) $\forall u, v, w \in V, \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$,

iv) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V, \langle au, v \rangle = a \langle u, v \rangle$.

Tanım 2.1.2. $V, \mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\| \ \| : V \to \mathbb{R}$$
$$u \to \|u\|$$

ile tanımlı $\| \ \|$ fonksiyonu aşağıdaki önermeleri doğruluyorsa bu fonksiyona V üzerinde bir norm denir (Hacısalihoğlu,2000).

i) $\forall u \in V, u \neq 0 \Rightarrow \|u\| > 0$,

ii) $\forall c \in V, \forall u \in V, \|cu\| = |c| \, \|u\|$,

iii) $\forall u, v \in V, \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Önerme 2.1.1. $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ için u ve v vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \, \|v\| \cos\theta$$

dir (Hacısalihoğlu,2000).

Tanım 2.1.3. $L:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki iki önerme sağlanıyorsa, L ye bir lineer dönüşüm adı verilir (Sabuncuoğlu, 2011).

i) $\forall u,v \in \mathbb{R}^3$ *için* $L(u+v)=L(u)+L(v)$,

ii) $\forall c \in \mathbb{R}$ *ve* $\forall u \in V$ için $L(cu)=cL(u)$.

Tanım 2.1.4. $L:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümüne karşılık gelen bir matris $L=\left[\ a_{ij}\ \right]$ olsun. $L^T=\left[a_{ji}\right]$ olmak üzere $L^T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümüne L lineer dönüşümünün transpozu denir (Sabuncuoğlu, 2011).

Tanım 2.1.5. $L:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümün transpozu L^T olmak üzere $L^T \circ L = I_3$ (yani $L^{-1}=L^T$) ise L dönüşümüne ortogonal dönüşüm denir (Sabuncuoğlu, 2011).

Örnek 2.1.1.

$$L:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x_1,x_2,x_3) \to (x_1\cos\theta + x_2\sin\theta, -x_1\sin\theta + x_2\cos\theta, x_3)$$

$L(e_1)=L(1,0,0)=(\cos\theta,-\sin\theta,0)$, $L(e_2)=L(0,1,0)=(\sin\theta,\cos\theta,0)$,

$L(e_3)=L(0,0,1)$ olduğundan L ye $\phi=\{e_1,e_2,e_3\}$ standart tabanına göre karşılık gelen matris

$$L=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

olup L ortogonal bir matristir.

Teorem 2.1.1. $L:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümünün ortogonal olması için gerek ve yeter koşul $\mathbb{R}^3$ ün ortonormal bir tabanına göre L nin matrisinin ortogonal olmasıdır (Sabuncuoğlu, 2011).

İspat. $\mathbb{R}^3$ ün ortonormal bir $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ tabanını φ ile gösterelim. $L:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ortogonal bir dönüşüm olsun. Bu durumda $L^T \circ L = I_3$ olur. Bu eşitlikten

$\left(L^T \circ L\right)_\varphi = \left(I_3\right)_\varphi$ elde edilir. $\left(I_3\right)_\varphi = I_3$ olduğu ve lineer dönüşümlerin bileşkelerinin matrisleri, dönüşümlerin matrislerinin çarpımına eşit olduğundan $\left(L^T\right)_\varphi L_\varphi = I_3$ elde edilir. O halde $\left(L^T\right)_\varphi = \left(L_\varphi\right)^T$ eşitliği göz önüne alınırsa $\left(L_\varphi\right)^T = \left(L_\varphi\right)^{-1}$ olduğunu gösterir. Öyleyse L_φ matrisi ortogonal bir matristir.

Karşıt olarak L_φ matrisinin ortogonal bir matris olduğunu varsayalım. Böylece $\left(L_\varphi\right)^T = \left(L_\varphi\right)^{-1}$ eşitliği sağlanır. Bu eşitlikten $\left(L_\varphi\right)^T \circ L_\varphi = I_3$ elde edilir. $\left(L^T\right)_\varphi = \left(L_\varphi\right)^T$ olduğundan $\left(L^T\right)_\varphi L_\varphi = I_3$ elde edilir. Buradan $\left(L^T \circ L\right)_\varphi = \left(I_{\mathbb{R}^3}\right)_\varphi$ bulunur. $\mathbb{R}^3$ ün bir φ tabanına göre $L^T \circ L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ve $I_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümlerinin matrisleri birbirine eşit olduğundan $L^T \circ L = I_{\mathbb{R}^3}$ olur.

Teorem 2.1.2. $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümünün ortogonal olması için gerek ve yeter koşul $\forall u, v \in \mathbb{R}^3$ için

$$\langle L(u), L(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

olmasıdır (Sabuncuoğlu, 2011).

İspat. L ortogonal bir dönüşüm olsun. Bu durumda $L^T \circ L = I_3$ olduğundan

$$\langle L(u), L(v) \rangle = \langle u, L^T(L(v)) \rangle = \langle u, (L^T \circ L)(v) \rangle = \langle u, I_3(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

Karşıt olarak her $u, v \in \mathbb{R}^3 \; için \langle L(u), L(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ olduğunu varsayalım. Buna göre

$$\langle u, (L^T \circ L)(v) \rangle = \langle u, L^T(L(v)) \rangle = \langle L(u), L(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

ve buradan $\langle u,(L^T \circ L)(v)-v\rangle = 0$ elde edilir. Burada u yerine özel olarak $(L^T \circ L)(v)-v$ yazılırsa $(L^T \circ L)(v)-v=0$ bulunur. Öyleyse her $v \in \mathbb{R}^3$ için $(L^T \circ L)(v)=v$ ve dolayısıyla $L^T \circ L = I_3$ olur.

Sonuç 2.1.1. $L:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümünün ortogonal olması için gerek ve yeter koşul $\forall u \in \mathbb{R}^3$ için $\| L(u) \| = \|u\|$ olmasıdır (Sabuncuoğlu, 2011).

Teorem 2.1.3. $L:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ortogonal bir dönüşüm ise L nin determinantının mutlak değeri 1 dir (Sabuncuoğlu, 2011).

İspat. $\mathbb{R}^3$ ün ortonormal bir φ tabanına göre L nin matrisi A olsun. Bu durumda A matrisi ortogonal bir matristir. $A^T.A = I_3$ eşitliğinin her iki yanının determinantını hesaplarsak

$$\det(A^T.A) = \det I_3 \Rightarrow \det(A^T)\det A = 1 \Rightarrow \det A.\det A = 1 \Rightarrow |\det A|^2 = 1$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Not 2.1.1. L ve G determinantı 1 olan iki ortogonal dönüşüm olsun. Bu durumda

$$\det(LoG^{-1}) = (\det L).(\det G^{-1}) = (\det L)(\det G)^{-1} = 1.1 = 1$$

olur. Bu ise determinatı 1 olan tüm ortogonal dönüşümler kümesinin $\mathbb{R}^3$ üzerinde tanımlanan tüm lineer dönüşümler kümesi Hom($\mathbb{R}^3$)'ün bir alt grubu olduğunu gösterir (Sabuncuoğlu, 2011).

Tanım 2.1.6. 3x3 tipindeki bütün ortogonal matrislerin kümesi O(3) ile gösterilir. Bu küme matris çarpımına göre bir grup oluşturur. O(3) grubuna ortogonal grup adı verilir. O(3) grubunda determinantı 1 olan matrislerin kümesi bir alt gruptur. Bu alt grup SO(3) ile gösterilir. SO(3) alt grubuna özel ortogonal grup adı verilir. Özel ortogonal grubun elemanlarına dönme matrisi (dönüşümü) denir (Sabuncuoğlu, 2011).

V kümesini n-boyutlu bir kompleks iç çarpım uzayı olarak göz önüne alınırsa aşağıdaki tanımlar verilebilir.

Tanım 2.1.7. $L:V\to V$ bir lineer dönüşüm, L nin bir ortonormal tabanına karşılık gelen matris $A=\left[a_{ij}\right]$, $a_{ij}\in\mathbb{C}$, $1\le i,j\le n$ olsun. $A^*=\overline{A}^t$ ile tanımlı A^* matrisine A nın eki adı verilir. φ tabanına göre A^* matrisine karşılık gelen $L^*:V\to V$ lineer dönüşümüne L 'nin eki adı verilir (Sabuncuoğlu, 2011).

Tanım 2.1.8. $A\in\mathbb{C}_n^n$ olmak üzere $\overline{A}^t.A=\mathrm{I}_n$ ise A matrisine üniter matris adı verilir. $L:V\to V$ lineer dönüşümüne bir φ ortonormal tabanına karşılık gelen matris A üniter ise L lineer dönüşümüne üniter dönüşüm denir (Sabuncuoğlu, 2011).

2.2. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.2.1. $A\neq\varnothing$ bir küme ve V,K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir $f:A\times A\to V$ fonksiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir (Hacısalihoğlu,1983).

i) $\forall P,Q,R\in A$ için $f(P,Q)+f(Q,R)=f(P,R)$.

ii) $\forall P\in A$ ve $f(P,Q)=\alpha$ için $f(P,Q)=\alpha$ olacak şekilde bir tek $\alpha\in V$ vardır.

Tanım 2.2.2. E reel bir afin uzay ve E ile birleştirilmiş bir vektör uzayı V olsun V de bir iç çarpım

$$\langle,\rangle:V\times V\to\mathbb{R}$$

$$(x,y)\to<x,y>=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

ile tanımlansın. Bu durumda E kümesine Öklid Uzayı ve $\langle,\rangle$ dönüşümüne Öklid iç çarpımı denir (Hacısalihoğlu,1983).

$X=(x_1,x_2,...,x_n)$ ve $Y=(y_1,y_2,...,y_n)$, E^n Öklid uzayına herhangi iki nokta olmak üzere

$$\vec{XY} = \vec{OY} - \vec{OX} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, ..., y_n - x_n)$$

ve

$$\left|\overrightarrow{XY}\right| = \sqrt{< \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XY} >} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + ... + (y_n - x_n)^2}$$

dir.

Tanım 2.2.3. E^n de bir sıralı $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ (n+1)-lisi verilsin.

$\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, ..., \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör n lisi E^n için ortonormal bir tabanı ise bu sisteme Öklid çatısı denir (Hacısalihoğlu,1983).

X , E^n de bir nokta olmak üzere $\overrightarrow{P_0X} = \sum_{i=\iota}^{n} x_i \overrightarrow{P_0P_i}$ şeklinde yazılır. Buradaki $x_i : E^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarına X noktasının Öklid koordinat fonksiyonları denir.

Tanım 2.2.4. M bir topolojik uzay olsun. Eğer

i) M bir Hausdorff uzayıdır

ii) M nin her bir açık alt kümesi E^n veya E^n nin açık alt kümesine homeomorftur.

iii) M sayılabilir sayıda açık kümeler tarafından örtülebilir.

şartları sağlanıyorsa M ye bir topolojik manifold adı verilir (Hacısalihoğlu,1983).

Tanım 2.2.5. E^n de bir açık alt küme U olmak üzere $f : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun k. mertebeden kısmi türevleri var ve bu türevler sürekli iseler f fonksiyonuna $\mathbb{C}^k$ sınıfından diferensiyellenebilirdir denir.

f fonksiyonu $\mathbb{C}^k$ sınıfından ise $f \in \mathbb{C}^k(U, \mathbb{R})$ ile gösterilir. Burada $\mathbb{C}^0(U, \mathbb{R})$ sürekli fonksiyonların kümesini ifade eder (Hacısalihoğlu,1983).

Tanım 2.2.6. $U \subset E^n$ bir açık alt küme

$$\psi : U \to E^m$$
$$u \to \psi(u) = (f_1(u), f_2(u), ..., f_m(u))$$

fonksiyonu verildiğinde tüm f_i, $1 \le i \le m$ fonksiyonları $\mathbb{C}^k$ sınıfından ise ψ dönüşümüne $\mathbb{C}^k$ sınıfındandır denir ve $\psi \in \mathbb{C}^k(U, E^m)$ olarak gösterilir (Hacısalihoğlu,1983).

Tanım 2.2.7. E^n nin iki açık alt kümesi U ve V olsun. $\psi : U \to V$ dönüşümü için

i) $\psi \in \mathbb{C}^k(U,V)$

ii) ψ^{-1} mevcut ve $\psi^{-1} \in \mathbb{C}^k(V,U)$

ise ψ ye $\mathbb{C}^k$ sınıfından bir diffeomorfizm denir. Eğer $\psi \in \mathbb{C}^\infty(u,v)$ ise ψ ye bir diffeomorfizm denir (Hacısalihoğlu,1983).

Tanım 2.2.8. M, n-boyutlu bir topolojik manifold, $U \subset E^n$ ve $W \subset M$ açık alt kümeleri verilsin. $\psi : U \to W \subset M$ dönüşümü bir homeomorfizm ise (ψ, M) ikilisine M nin bir koordinat komşuluğu veya harita denir (Hacısalihoğlu,1983).

$U \subset E^n, u \in U$ için $\psi_{(u)} = \big((x_1(u), x_2(u), ..., x_n(u)\big)$ yazılabilir. Buradaki $x_i(u)$, $1 \le i \le n$ reel sayısına $\psi(u)$ noktasının $i.$ koordinatı denir.

Tanım 2.2.9. M bir topolojik manifold $\{W_\alpha\} \subset M$ ve $\{U_\alpha\} \subset E^n$ açık örtüsü ve $\psi_\alpha : U_\alpha \subset E^n \to W_\alpha \subset M$ homeomorfizmleri verilsin. Buradaki $\{(\psi_\alpha, U_\alpha) : \alpha \in A\}$ kolleksiyonuna bir koordinat komşuluğu sistemi veya atlas denir (Hacısalihoğlu,1983).

Tanım 2.2.10. M, n-boyutlu topolojik manifold ve $p \in M$ noktasının açık komşuluğu W_α ve W_β olsun. $S = \{(\psi_\alpha, W_\alpha) : \alpha \in A\}$ kümesi M nin bir atlası $W_\alpha \cap W_\beta \neq \varnothing$ olmak üzere $\psi_\beta : U_\alpha \to W_\alpha$, $\psi^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \subset U_\alpha$ ile $\psi_\beta : U_\beta \to W_\beta$, $\psi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \subset U_\beta$ homeomorfizmleri verildiğinde $\phi_{\alpha\beta} = \psi_\beta^{-1} o \psi_\alpha$, $\phi_{\beta\alpha} : U_\alpha \to U_\beta$ ve $\phi_{\beta\alpha} = \psi_\alpha^{-1} o \psi_\beta$, $\phi_{\alpha\beta} : U_\beta \to U_\alpha$ dönüşümleri tanımlanabilir. Buradaki $\forall \alpha, \beta \in A$ için $\phi_{\beta\alpha}$ ve $\phi_{\alpha\beta}$ dönüşümleri $\mathbb{C}^k$ sınıfından iseler $S = \{(\psi_\alpha, W_\alpha) : \alpha \in A\}$

atlasına M üzerinde bir diferensiyellenebilir yapı denir. $\mathbb{C}^k$ sınıfından bir diferensiyellenebilir yapıya sahip M manifolduna $\mathbb{C}^k$ sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir (Hacısalihoğlu,1983).

Tanım 2.2.11. V bir vektör uzayı ve V ile birleşen bir afin uzay A olsun. $p \in A$ ve $v \in V$ için $v_p = (p,v)$ sıralı ikilisine A afin uzayın p noktasındaki tanjant vektörü denir (Hacısalihoğlu,1983).

A bir afin uzay, V , A ile birleştirilmiş bir vektör uzayı olsun. $p \in A$ ve $\forall v \in V$ için tüm $v_p = (p,v)$ sıralı ikililerinin kümesini $T_P A$ ile gösterelim. Bu durumda $T_P A$ kümesi

$$\oplus : T_p A x T_p A \to T_p A$$
$$\big((p,v),(p,u)\big) \to \big(p, u+v\big)$$

ve

$$\odot : \mathbb{R} x T_p A \to T_p A$$
$$\big(\lambda,(p,v)\big) \to (p,\lambda v)$$

işlemleri ile birlikte bir vektör uzayı yapısına sahiptir. Buradaki $T_P A$ uzayına $p \in A$ noktasında tanjant uzay adı verilir.

Tanım 2.2.12. M bir manifold ve $p \in M$ olsun. M nin tüm tanjant uzaylarının kümesini $\underset{p\in M}{\cup} T_p M$ ile gösterelim.

$$X : M \to \underset{p\in M}{\cup} T_p M$$
$$P \to X\big(p\big)$$

ile tanımlanan X operatörüne M üzerinde bir vektör alanı denir (Hacısalihoğlu, 1983).

M nin tüm vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ ile gösterilir. Burada $\chi(M)$ kümesi

$$\oplus : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$
$$(x, y) \to (x \oplus y)(p) = X(p) + Y(p)$$

ve

$$\odot : \mathbb{R}\ x\ T_p A \to T_p A$$
$$(\lambda, (p, v)) \to (p, \lambda v)$$

işlemleri ile birlikte bir vektör uzayı yapısına sahiptir.

Tanım 2.2.13. $v = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \chi(M)$ ve $p \in E^n$ olmak üzere $f \in C\left(E^n, \mathbb{R}\right)$ fonksiyonu verilsin.

$$v_p[f] = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p = < \nabla f, v >$$

ifadesine f fonksiyonunun v_p tanjant vektörü yönündeki türevi adı verilir. Burada ∇, f ' nin gradientidir (Hacısalihoğlu, 1983).

Burada $\forall f, g \in C\left(E^n, \mathbb{R}\right), \forall v_p, u_p \in T_p E^n$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

i) $\left(av_p + bu_p\right)[f] = av_p[f] + bu_p[f]$

ii) $v_p\left(af + bg\right) = av_p[f] + bv_p[g]$

iii) $v_p[f.g] = v_p[f]g(p) + f(p)v_p[g]$

dir.

Tanım 2.2.14. $\alpha : I \to E^n$ eğrisi verilsin. $\forall t \in I$ için

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, ..., \frac{d\alpha_n}{dt}\right)$$

vektörüne α eğrisinin teğet vektörü veya hız vektörü denir (Hacısalihoğlu,1983).

Tanım 2.2.15. M diferensiyellenebilir manifold

$$\alpha : I \to M$$
$$t \to \alpha(t) = (\alpha_1(t), ..., \alpha_n(t))$$

eğrisi verilsin. $\chi(M)$ üzerinde vektör alanı X olmak üzere

$$\frac{d\alpha}{dt} = X(\alpha(t))$$

ise α eğrisine X vektör alanının integral eğrisi denir (Hacısalihoğlu,1983).

E^n de α bir eğri ve $f \in C(E^n, \mathbb{R})$ olsun. Bu durumda

$$\alpha'(t)[f] = \left.\frac{df}{dt}\right|_t = \frac{df(\alpha(t))}{dt}$$

dir. Burada $\alpha^{\iota}(t)[f]$ ifadesine f fonksiyonunun α eğrisi boyunca α^{ι} yönünde kovaryant türevi denir (Hacısalihoğlu,1983).

Tanım 2.2.16. $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ vektör alanları olmak üzere

$$D_X Y = (X_P[y_1], X_P[y_2], ..., X_p[y_n])$$

ile tanımlanan türeve Y 'nin X 'e göre kovaryant türevi denir (Hacısalihoğlu,1983).

$\forall X, Y, Z, W \in E^n$ ve $f \in C(E^n, \mathbb{R})$ olmak üzere kovaryant türev aşağıdaki özellikleri sağlar.

i) $D_X(Y+Z) = D_X(Y) + D_X(Z)$

ii) $D_{X+W}(Y) = D_X(Y) + D_W(Y)$

iii) $D_{f(p)X} Y = f(p) D_X(Y)$

iv) $D_X(fY) = X(f)Y + f\ D_X(Y)$

Tanım 2.2.17. V bir vektör uzayı olsun. V üzerinde

$$[,]: V \times V \to V$$

dönüşümü $\forall$ X,Y,Z$\in V$ ve $\forall a$,b $\in \mathbb{R}$ için

$i)[aX+bY,Z]=a[X,Z]+b[Y,Z]$ ve $[X,aY+bZ]=a[X,Y]+b[X,Z]$ (bilineer)

$ii)[X,Y]=-[Y,X]$ (alterne)

$iii)\big[X,[Y,Z]\big]+\big[Y,[Z,X]\big]+\big[Z,[X,Y]\big]=0$ (Jakobi Özdeşliği)

şartlarını sağlayan parantez operatörüne V üzerinde bir Lie parantez operatörü denir (Hacısalihoğlu,1983).

Özel olarak E^n üzerinde Lie parantezi şöyle tanımlanır.

$$[,]: \chi(E^n)\times\chi(E^n) \to \chi(E^n)$$
$$(X,Y) \to [X,Y]$$

$\forall f \in C^\infty\left(E^n,\mathbb{R}\right)$ için

$$[X,Y](f)=X(Y(f))-Y(X(f))$$

dir. Ayrıca E^n üzerinde tanımlı $[,]$ Lie operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar.

$\forall X,Y \in \chi(M)$ ve $\forall f,g \in C^\infty\left(E^n,\mathbb{R}\right)$ için

i) $[X,Y](fg)=f[X,Y](g)+g[X,Y](f)$

ii) $[fX,gY]=fX(g)Y-gY(f)X+fg[X,Y]$

iii) $[X,X]=0$

Tanım 2.2.18. $\alpha: I \to E^n$ eğrisi verilsin ve $F: E^n \to E^m$ bir dönüşüm olsun. $\beta = F\circ\alpha$ şeklinde tanımlanan $\beta: I \to E^m$ eğrisine α eğrisinin F altındaki resmi denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.2.19. $F : E^n \to E^m$ bir dönüşüm olmak üzere

$$(F_*)_p : T_P E^n \to T_{F(p)} E^m$$

lineer dönüşümüne F dönüşümünün türevi veya türev dönüşümü denir (Hacısalihoğlu, 1983).

$$F : E^n \to E^m$$
$$p \to F(p) = (f_1(p), f_2(p), ..., f_m(p))$$

olmak üzere $\forall v_p \in T_P E^n$ tanjant vektörü için

$$(F_*)_P = \sum_{i=1}^{n} v_p [f_i] \frac{\partial}{\partial x_i}$$

dir. Burada $(F_*)_P$ türev dönüşümü

i) birebir ise F dönüşümüne bir immersion

ii) örten ise F dönüşümüne bir submersion

adı verilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.2.1. $F : E^n \to E^m$ herhangi bir $p \in E^n$ noktasında $(F_*)_P$ birebir olacak şekilde bir dönüşüm olsun. O zaman p yi içeren öyle bir $U \subset E^n$ açığı vardır ki F nin U ya kısıtlanması bir $V \subset E^m$ açığı üzerine bir $U \to V$ diffeomorfizmdir. Kısıtlanmış $U \to V$ dönüşümü $V \to U$ ters dönüşüme sahiptir. Bu nedenle bu teorem ters fonksiyon teoremi olarak bilinir (Hacısalihoğlu, 1983).

2.3. Riemann Manifoldları

Tanım 2.3.1. M diferensiyellenebilir bir manifold olmak üzere

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$$

ile tanımlanan g bilineer formu simetrik ve pozitif tanımlı ise yani, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

i) $g(X, Y) = g(Y, X)$

ii) $g(X,X) \geq 0$ ve $\forall x$ için $g(X,X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$

şartlarını sağlıyorsa g bilineer formuna Riemann metriği veya metrik tensör denir. Üzerinde bir Riemann metriği g tanımlı diferensiyellenebilir M manifolduna Riemann manifoldu denir ve (M,g) ikilisi ile gösterilir (Kühnel, 2005).

(M,g) Riemann manifoldu üzerinde iki koordinat sistemi $\{x_1,...,x_n\}$ ve $\{y_1,...,y_n\}$ olmak üzere Riemann metriğinin bileşenleri

$$g_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,s=1}^{n} \delta_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \frac{\partial x_j}{\partial y_s}$$

ile bulunur. Burada δ_{ij} kronecker deltası ve g_{ij}, Riemann metriğine karşılık gelen matrisin bileşenleridir (Şahin, 2012).

Örnek 2.3.1. E^n

$$\delta_{ij} = \begin{Bmatrix} 1, & \text{i=j} \\ 0, & \text{i} \neq \text{j} \end{Bmatrix}$$

metriği ile bir Riemann manifoldudur (Şahin, 2012).

Örnek 2.3.2. S^1 çemberinin Riemann metriğinin bileşenleri

$$\left[g_{ij} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \text{r}^2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir (Bär, 2010).

Gerçekten,

S^1 çemberinin parametrik denklemi

$$x_1 = r\cos\alpha$$
$$x_2 = r\sin\alpha$$

ile verilsin. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
g_{rr} &= \frac{\partial x_1}{\partial r}\frac{\partial x_1}{\partial r} + \frac{\partial x_2}{\partial r}\frac{\partial x_2}{\partial r} \\
&= \cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\sin\alpha \\
&= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{r\alpha} &= \frac{\partial x_1}{\partial r}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial x_2}{\partial r}\frac{\partial x_2}{\partial r} \\
&= r\cos\alpha\sin\alpha + r\sin\alpha\cos\alpha \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{\alpha r} &= \frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\frac{\partial x_1}{\partial r} + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha}\frac{\partial x_2}{\partial r} \\
&= -r\sin\alpha\cos\alpha + r\cos\alpha\sin\alpha \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{\alpha\alpha} &= \frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha}\frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \\
&= r^2\sin^2\alpha + r^2\cos^2\alpha \\
&= r^2\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) \\
&= r^2
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece g metriğine karşılık gelen matris

$$
\left[g_{ij}\right] = \begin{bmatrix} g_{rr} & g_{r\alpha} \\ g_{\alpha r} & g_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}
$$

bulunur.

Örnek 2.3.3. S^3 küresinin herhangi bir (x_1, x_2, x_3, x_4) noktasının kutupsal koordinatlarda parametrik denklemi

$$
\begin{aligned}
x_1 &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3 \\
x_2 &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3 \\
x_3 &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\
x_4 &= r\cos\varphi_1
\end{aligned}
$$

verilsin. Buradan direkt hesaplamalar ile g metriğine karşılık gelen matris

$$
\left[g_{ij}\right] = \begin{bmatrix} g_{rr} & g_{r\varphi_1} & g_{r\varphi_2} & g_{r\varphi_3} \\ g_{\varphi_1 r} & g_{\varphi_1\varphi_1} & g_{\varphi_1\varphi_2} & g_{\varphi_1\varphi_3} \\ g_{\varphi_2 r} & g_{\varphi_2\varphi_1} & g_{\varphi_2\varphi_2} & g_{\varphi_2\varphi_3} \\ g_{\varphi_3 r} & g_{\varphi_3\varphi_1} & g_{\varphi_3\varphi_2} & g_{\varphi_3\varphi_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

olur. Böylece S^3 bir Riemann manifoldudur.

Tanım 2.3.2. $(M_1, g_1), (M_2, g_2)$ Riemann manifoldları üzerinde

$$\phi : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

C^∞ dönüşüm olsun. Bu durumda $p \in M$ ve $X, Y \in T_p M$ için

$$g_2\left((\phi_*)_p(X), (\phi_*)_p(Y)\right) = \lambda(p)\, g_1(X, Y)$$

olacak şekilde $\lambda(p)$ sayısı varsa ϕ dönüşümüne $p \in M$ noktasında bir konform dönüşüm denir. Eğer $\lambda(p) = 1$ ise konform dönüşüm bir izometri olur (Baird ve Wood, 2003).

Teorem 2.3.1. Konform dönüşümler açıları korur (Garrett,2014).

İspat. $(M_1, g_1), (M_2, g_2)$ Riemann manifoldları üzerinde $\phi : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ konform dönüşüm olsun.

$p \in M$ ve $X, Y \in T_p M$ için $\dfrac{1}{\lambda(p)} g_2\left((\phi_*)_p(X), (\phi_*)_p(Y)\right) = g_1(X, Y)$

yazılır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \left\|(\phi_*)_p(X)\right\| &= \sqrt{g_2\left((\phi_*)_p(X), (\phi_*)_p(X)\right)} \\ &= \sqrt{\lambda}\sqrt{g_1(X, X)} \\ &= \sqrt{\lambda}\,\|X\| \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \left\|(\phi_*)_p(Y)\right\| &= \sqrt{g_2\left((\phi_*)_p(Y), (\phi_*)_p(Y)\right)} \\ &= \sqrt{\lambda}\sqrt{g_1(Y, Y)} \\ &= \sqrt{\lambda}\,\|Y\| \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

X ve Y arasındaki açı θ olmak üzere

$$\cos\theta = \frac{g_1(X,Y)}{\|X\|\|Y\|} = \frac{\frac{1}{\lambda(p)} g_2\left((\phi_*)_p(X),(\phi_*)_p(Y)\right)}{\frac{1}{\lambda(p)}\left\|(\phi_*)_p(X)\right\|\left\|(\phi_*)_p(Y)\right\|}$$

$$= \frac{g_2\left((\phi_*)_p(X),(\phi_*)_p(Y)\right)}{\left\|(\phi_*)_p(X)\right\|\left\|(\phi_*)_p(Y)\right\|}$$

elde edilir. Buradan $(\phi_*)_p(X)$ ile $(\phi_*)_p(Y)$ arasındaki açının θ olduğu açıktır.

2.4. Lie Grupları ve Cebirleri

Tanım 2.4.1. $(G',\odot)$ ve $(G'',\otimes)$ iki grup olmak üzere $f: G' \to G''$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall a,b \in G'$ için $f(a\odot b) = f(a)\otimes f(b)$ oluyorsa f'ye grup homomorfizmi denir (Taşçı, 2007).

Tanım 2.4.2. G diferensiyellenebilir manifoldu ve $\bullet$, G üzerinde bir işlem olmak üzere

i) $(G,\bullet)$ bir grup

ii) $\bullet: G\times G \to G$ $\forall x,y \in G$ için $(x,y) \to xy^{-1}$

koşulları sağlanıyorsa G 'ye bir "Lie Grubu" denir (Arvanitoyeorgos, 2003).

Örnek 2.4.1. G_1 ve G_2 herhangi iki Lie grubu olmak üzere

$$G_1 \times G_2 = \left\{(a_1,a_2) : \forall a_1 \in G_1 \text{ ve } \forall a_2 \in G_2\right\}$$

de bir Lie grubudur. Bu gruba çarpım Lie grubu denir.

Gerçekten,

G_1 ve G_2 birer Lie grubu olduğundan birer diferensiyellenebilir manifolddur. İki diferensiyellenebilir manifoldun kartezyen çarpımıda diferensiyellenebilir manifold olduğundan $G_1 \times G_2$ diferensiyellenebilir manifolddur.

Ayrıca G_1 ve G_2 Lie grubu olduğundan birer grup olup $G_1 \times G_2$'de bir gruptur. Burada grup işlemi

$$(G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) \to (G_1 \times G_2)$$
$$((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \to (a_1 b_1, a_2 b_2)$$

şeklindedir. Böylece $G_1 \times G_2$'de bir Lie grubudur.

Örnek 2.4.2. E^n Öklidyen uzayı toplama işlemine göre bir Lie grubudur. Bir boyutlu Öklid uzayı E adi toplama işlemine göre bir Lie grubu fakat adi çarpma işlemine göre her elemanın tersi mevcut olmadığından bir Lie grubu değildir (Arvanitoyeorgos, 2003).

Örnek 2.4.3. Öklid uzayı üzerinde tanımlanan öteleme ve dönme dönüşümlerine göre bir Lie grubudur. Bu tür gruplar, Öklidyen gruplar olarak bilinir (Arvanitoyeorgos, 2003).

Örnek 2.4.4. Karesel tüm matrislerin kümesini $M_n(\mathbb{R})$ ile gösterelim. Matrisler üzerinde tanımlanan toplama ve skaler ile çarpma işlemine göre $M_n(\mathbb{R})$ bir vektör uzayı yapısına sahiptir. $M_n(\mathbb{R})$ nin

$$GL(n, \mathbb{R}) = \left\{ A \in M_n(\mathbb{R}) : |A| \neq 0 \right\} \subset M_n(\mathbb{R})$$

alt kümesi matrislerde çarpma işlemine göre bir Lie grubudur. Bu grup genel lineer grubu olarak adlandırılır (Arvanitoyeorgos, 2003).

Örnek 2.4.5.

$$O(n, \mathbb{R}) = \left\{ A \in M_n(\mathbb{R}) : AA^T = \mathrm{I}_n \right\} \subset GL(n, \mathbb{R})$$

alt kümesi matrislerin çarpma işlemine göre bir Lie grubudur. Bu gruba ortogonal grup adı verilir (Arvanitoyeorgos, 2003).

Örnek 2.4.6.

$$SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A = 1\} \subset O(n,\mathbb{R})$$

alt kümesi matrislerin çarpma işlemine göre bir Lie grubudur. Bu grup özel ortogonal grup olarak adlandırılır (Arvanitoyeorgos, 2003).

Tanım 2.4.3. $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$ üzerinde iç çarpım

$$< A, B >= iz(A.B^T)$$

ile tanımlanır (Hall, 2015).

Örnek 2.4.7. $n \times n$ tipindeki tüm kompleks matrislerin kümesi $M_n(\mathbb{C})$ olsun. $M_n(\mathbb{C})$ nin

$$GL(n,\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \det A \neq 0\}$$

alt kümesi matrislerin çarpma işlemine göre bir Lie grubudur. Bu grup genel lineer kompleks grup olarak adlandırılır (Arvanitoyeorgos, 2003).

$\forall A \in GL(n,\mathbb{C})$ için

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} + iy_{11} & x_{12} + iy_{12} \dots & x_{1n} + iy_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} + iy_{n1} & x_{n2} + iy_{n2} \cdots & x_{nn} + iy_{nn} \end{bmatrix}$$

olduğundan $GL(n,\mathbb{C}), \{x_{ij}, y_{ij}\}, \forall i, j \in \{1,....,n\}$ koordinat sistemi ile birlikte $2n^2$ reel boyutlu bir diferensiyellenebilir manifoldtur.

Örnek 2.4.8. $GL(n,\mathbb{C})$ nin

$$U(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) : A.A^* = I_n\}$$

alt kümesi matrislerin çarpma işlemine göre bir Lie grubudur. Bu grup üniter grup olarak adlandırılır. Burada A^*, A matrisinin transpozunun eşleniği olan matristir (Arvanitoyeorgos, 2003).

Tanım 2.4.4. G bir Lie grup olsun. $\forall g \in G$ ve $a \in G$ için

$$L_a : G \to G$$
$$(a, g) \to L_a(g) = ag$$

ve

$$R_a : G \to G$$
$$(a, g) \to R_a(g) = ga$$

dönüşümleri sırasıyla, sol öteleme ve sağ öteleme olarak isimlendirilir (Arvanitoyeorgos, 2003).

Sol öteleme dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlar. $e \in G$, G'nin birim elemanı olmak üzere;

i) $L_e(g) = eg = g$ olduğundan L_e birim eleman olur.

ii) $L_a\left(L_{a^{-1}}(g)\right) = L_a\left(a^{-1}g\right) = aa^{-1}g = g$ olduğundan L_a nın tersi $L_{a^{-1}}$ dir.

iii) $L_a\left(L_b(g)\right) = abg = L_{ab}(g)$ birleşme özelliğini sağlar.

Böylece, sol öteleme G üzerinde bir gruptur. Benzer şekilde sağ ötelemeninde bir grup olduğu gösterilebilir.

Tanım 2.4.5. G bir Lie grubu ve X , G üzerinde bir vektör alanı ve

$$(L_a)_* : T_eG \to T_aG$$
$$X_e \to (L_a)_* X_e$$

dönüşümü verilsin. Eğer $\forall a \in G$ için $(L_a)_* X_e = X_a$ ise X vektör alanı sol invaryant vektör alanı olarak adlandırılır (Arvanitoyeorgos, 2003).

Sol invaryant bir vektör alanı aşağıdaki şekilde de açıklanabilir:

$\forall a, b \in G$ için $(L_a)_* X_b = X_{ab}$ ise X vektör alanına sol invaryant vektör alanı denir.

Ayrıca X sol invaryant bir vektör alanı ise aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$X_b \circ L_a = (L_a)_* X_b = X_{ab}$$

Tanım 2.4.6. G bir Lie grubu ve X, G üzerinde bir vektör alanı olsun. Herhangi bir $a \in G$ ve $\forall b \in G$ için

$$(L_a)_* X_b = X_{ab}$$

ise X vektör alanına L_a – bağlantılı denir (Lee, 2003).

Teorem 2.4.1. G bir Lie grubu ve G üzerinde vektör alanları X, Y olsun. X ve Y sol invaryant vektör alanları ise $[X,Y]$ Lie braketi de sol invaryant bir vektör alanıdır (Arvanitoyeorgos, 2003).

İspat. $\forall a,b \in G$ ve $\forall f \in C^\infty(G,\mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned}(L_a)_*[X,Y]_b(f) &= [X,Y]_b(f \circ L_a)\\ &= ([X,Y](f \circ L_a))(b)\\ &= (([X,Y]f) \circ L_a)(b)\\ &= ([X,Y]f)(ab)\\ &= [X,Y]_{ab}(f)\end{aligned}$$

Tüm sol invaryant vektörlerin kümesini g ile gösterelim. Türev dönüşümü lineer olduğundan her $X, Y \in g$ ve $a \in G$ için

$$\begin{aligned}(L_a)_*(X+Y)_e &= (L_a)_* X_e + (L_a)_* Y_e\\ &= X_a + Y_a\\ &= (X+Y)_a\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $X+Y$ nin bir sol invaryant vektör alanı olduğunu gösterir. Benzer şekilde $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$(L_a)_*(\lambda X)_e = (L_a)_* \lambda X_e = \lambda (L_a)_* X_e = \lambda X_a$$

olup bu ise λX yine bir sol invaryant vektör alanı olduğunu gösterir.

Böylece g kümesi toplama $(+)$ ve skalerle çarpma $(\cdot)$ işlemine göre bir vektör uzayıdır.

Önerme 2.4.1. G bir Lie grubu ve e, G nin birim elemanı olmak üzere

$$\text{boy } g = \text{boy } T_e G$$

dir (Arvanitoyeorgos, 2003).

İspat.

$$\varphi : g \to T_e G$$
$$X \to \varphi(X) = X_e$$

şeklinde tanımlanan φ dönüşümün lineer izomorfizm olduğu gösterilirse ispat tamamlanır.

a) Lineerlik: $\forall X, Y \in g$ için $(X+Y)_e = X_e + Y_e$ olduğunu gösterelim:

Türev dönüşümü tanımından $\forall a \in G$ için

$$(L_a)_* (X+Y)_e = (X+Y)_a$$

dır. Ayrıca $(L_a)_*$ lineer ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $(L_a)_* (\lambda X)_e = \lambda X_a$ olduğundan

$$(L_a)_* (\lambda)(X+Y)_e = \lambda (L_a)_* X_e + \lambda (L_a)_* Y_e$$
$$= \lambda X_a + \lambda Y_a$$

yazılabilir. Bu da φ dönüşümünün lineer olduğunu gösterir.

b) Birebirlik : $X_e = 0 \Rightarrow X = 0$ olmalıdır.

Gerçekten;

$\forall a \in G$ için

$$X_e = 0 \Rightarrow (L_a)_* X_e = X_a = 0$$

olup $X = 0$ elde edilir.

c) Örtenlik: $\forall X_e \in T_e G$ için $X \in g$ olacak şekilde bir $X \in g$ vardır.

Tanım 2.4.7. G bir Lie grubu olsun.

$$\phi:(\mathbb{R},+)\to G$$

ile tanımlanan ϕ dönüşümü bir homomorfizma ise bu dönüşüme G üzerinde 1-parametreli dönüşüm grubu adı verilir. ϕ bir homomorfizm olduğundan $\forall t,s\in\mathbb{R}$ için

$$\phi(s+t)=\phi(s)\phi(t)$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca $\phi(0)=e$ ve ters eleman $\phi(-t)=\phi^{-1}(t)$ dir (Duistermaat ve Kolk,1999).

Örnek 2.4.9. $S^1=U(1)$ çemberinde $\phi(t)=e^{it}=\cos t+i\sin t$ dönüşümü 1-parametreli dönüşüm grubudur (Duistermaat ve Kolk,1999).

Örnek 2.4.10. $GL(3,\mathbb{R})$ Lie grubunda

$$\phi(t)=\begin{bmatrix}\cos t & \text{sint} & 0\\ \text{-sint} & \text{cost} & 0\\ 0 & 0 & \text{e}^t\end{bmatrix}$$

ile tanımlanan ϕ dönüşümü1-parametreli dönüşüm grubudur (Duistermaat ve Kolk, 1999).

Örnek 2.4.11. $O(3)$ ortogonal grubunda

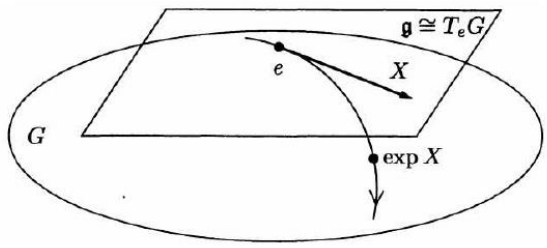
$$\phi(t)=\begin{bmatrix}\cos t & \text{sint} & 0\\ \text{-sint} & \text{cost} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

ile tanımlanan ϕ dönüşümü 1-parametreli dönüşüm grubudur (Duistermaat ve Kolk, 1999).

Tanım 2.4.8. G bir Lie grubu ve g, G nin sol invaryant vektör alanlarının kümesi (Lie cebiri) olsun.

$$\exp: g\to G$$
$$\text{X}\to\exp(X)=\phi_X(1)$$

ile tanımlanan Şekil 2.2. deki dönüşüme exponantial dönüşüm veya üstel dönüşüm denir. Burada ϕ_X , $\phi_X(0)=e$, $\phi_X'(0)=X_e$ şartlarını sağlayan bir $X \in g$ nin ürettiği 1-parametreli dönüşüm grubudur (Lee,2003).



Şekil 2.2. Üstel Dönüşüm

Lemma 2.4.1. $X \in G$ nin 1-parametreli dönüşüm grubu ϕ_X olmak üzere $\forall t,s \in \mathbb{R}$ için $\phi_X(st)=\phi_{sX}(t)$ dir (Lee, 2003).

İspat. $h(t)=\phi_X(st)$ olarak bir h fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda;

$$h'(t)=s\phi_X'(st)$$

olup

$$h'(0)=s\phi_X{}'(0)=sX \tag{2.1}$$

dır. Ayrıca sX vektörünün 1-parametreli dönüşüm grubu ϕ_{sX} olduğundan

$$\phi_{sX}{}'(0)=sX \tag{2.2}$$

dir. Böylece, (2.1) ve (2.2) eşitliklerinden

$$\phi_X(st)=\phi_{sX}(t)$$

olduğu görülür.

Sonuç 2.4.1. G bir Lie grubu olsun. $\forall X \in g$ ve $\forall t \in \mathbb{R}$ için

$$\exp(tX)=\phi_{tX}(1)=\phi_X(t)$$

dir (Lee, 2003).

İspat. Lemma 2.4.1. ile $\forall t, s \in \mathbb{R}$ için

$$\phi_X(st) = \phi_{sX}(t)$$

olduğunu biliniyor. Burada $\exp(sX) = \phi_{sX}(1)$ olduğundan $t = 1$ için

$$\exp(sX) = \phi_X(s) \tag{2.3}$$

yazılır. s ve t nin rolleri değiştirilerek, (2.3) eşitliğinden iddianın ispatı açıktır.

Sonuç 2.4.2. g, G Lie grubunun Lie cebiri olmak üzere $X \in g$ için $\gamma'(0) = X$ ve $\phi_X(t) = \gamma(t)$ olacak şekilde bir γ eğrisi verilsin. Bu durumda

$$\gamma(t) = \exp(tX)$$

dir. Ayrıca ϕ_X bir homomorfizm olduğundan

$$\exp((t+s)X) = \exp(tX)\exp(sX)$$

ve

$$\exp^{-1}(tX) = \exp(-tX)$$

dir (Lee,2003).

Şimdi, exp dönüşümünün türev dönüşümü olan $\exp_*$ dönüşümünün başlangıç noktasını 0 olarak seçelim. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.4.2. $\exp_* : T_0G \to T_eG$ dönüşümü birim dönüşümdür (Lee, 2003).

İspat. $X \in g$ için

$$\alpha : \mathbb{R} \to g$$
$$t \to \alpha(t) = tX$$

ile tanımlı bir eğrisi verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned}\exp_*(X) &= \exp_*(\alpha'(0)) \\ &= (\exp \circ \alpha)'(0) \\ &= \frac{d}{dt}(\exp(tX))\Big|_{t=0} \\ &= X\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $\exp_*$ dönüşümünün birim dönüşüm olduğunu gösterir.

Ters fonksiyon teoremi ve Teorem 2.4.3 ten aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 2.4.3. Üstel dönüşüm, g üzerinde 0 ın bir komşuluğundan G Lie grubundaki e birim elemanın bir komşuluğuna bir diffeomorfizmdir (Lee, 2003).

G bir Lie grubu ve $\phi(t)$, G üzerinde tanımlı bir 1-parametreli dönüşüm grubu olsun. Bu durumda

$$\phi'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\phi(t+h)-\phi(t)\right]$$

olup $\phi(t)$ bir homomorfizm olduğundan

$$\begin{aligned}\phi'(t)&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\phi(t)\phi(h)-\phi(t)\right]\\&=\phi(t)\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\phi(h)-e\right]\end{aligned}\tag{2.4}$$

olur. Burada G bir Lie grubu olduğundan koordinatları diferensiyellenebilir olup

$$\lim_{h\to 0}\frac{\phi(h)-e}{h}$$

limiti mevcuttur. Bu limit değerine A diyelim. Yani

$$A=\lim_{h\to 0}\frac{\phi(h)-e}{h}$$

olsun. (2.4) den

$$\phi'(t)=A\phi(t)$$

elde edilir. Böylece $t=0$ için

$$A=\phi'(0)=A\phi(0)$$

bulunur (Hall, 2015).

Tanım 2.4.9. $\phi(t)$, G Lie grubunun 1-parametreli dönüşüm grubu olsun. $\phi'(t)=A\phi(t)$ ile tanımlanan A ya $\phi(t)$ nin infinitesimal üreteci denir (Hall, 2015).

Örnek 2.4.12. $U(2)$ nin 1-parametreli dönüşüm grubunun

$$\phi(t)=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre $\phi'(t)=A\phi(t)$ ve $\phi'(0)=A$ olduğundan

$$\phi'(t)=\begin{bmatrix}-\sin t & \cos t\\ -\cos t & -\sin t\end{bmatrix}$$

ve

$$\phi'(0)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=A$$

olup

$$\phi'(t)=A\phi(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}$$

elde edilir. O halde $\phi(t)$ nin infinitesimal üreteci

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

bulunur (Hall, 2015).

Not 2.4.1. Burada $\phi'(t)=A\phi(t)$ denkleminin çözümü

$$\phi(t)=e^{At}$$

dir. $\phi'(0)=A$ dır. Gerçekten; e^{tA} nın taylor seri açılımı

$$e^{tA}=I+At+\frac{A^2}{2!}t^2+\frac{A^3}{3!}t^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}t^n$$

olup

$$\phi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(At)^n}{n!}$$

ile ifade edilir (Hall, 2015).

Not 2.4.2. G bir Lie grubu ve g , G nin Lie cebiri olmak üzere

$$\exp: g\to G$$
$$X\to \exp(tX)=\phi_X(t)$$

öyleki $\phi_X'(0) = X$ olduğundan exp dönüşümü yardımıyla bir G Lie grubunun Lie cebiri bulunabilir (Hall, 2015).

Örnek 2.4.13. $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AA^T = I\}$ ortogonal grubunun Lie cebiri

$$o(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^T = -A\}$$

kümesidir (Hall, 2015).

Gerçekten; kabul edelim ki $\gamma(s)$, $M_n(\mathbb{R})$ de $\gamma(0) = I$ olacak şekilde bir eğri olsun. $\gamma(s) \in O(n)$ ise

$$\gamma^T(s)\gamma(s) = I$$

olup $s = 0$ noktasında türev alınırsa

$$\left[\gamma^T(s)\right]'\gamma(s)\Big|_{s=0} + \gamma^T(s)\gamma'(s)\Big|_{s=0} = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\left[\gamma^T(0)\right]'\gamma(0) + \gamma^T(0)\gamma'(0) = 0$$

olur ki

$$\left[\gamma^T(0)\right]' = -\gamma'(0)$$

elde edilir. Buradan

$$\left[\gamma'(0)\right]^T = -\gamma'(0)$$

dır. Bu ise γ nın antisimetrik olduğunu yani $\gamma \in o(n)$ olduğunu gösterir.

Örnek 2.4.14.

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \text{sint} & 0 \\ \text{-sint} & \text{cost} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$O(3)$ de 1-parametreli dönüşüm grubu olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\phi'(t)=\begin{bmatrix}-\sin t & \cos t & 0\\ -\cos t & -\sin t & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

olup

$$A=\phi'(0)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

olduğundan $A\in o(3)$ bulunur. Böylece $O(3)$ ün Lie cebirinin $o(3)$ olduğu görülür (Hall,2015).

Örnek 2.4.15. $U(n)=\left\{A\in GL(n,\mathbb{C}): A\overline{A^T}=I_n\right\}$ üniter grubunun Lie cebiri

$$u(n)=\left\{A\in M_n(\mathbb{C}): \overline{A^T}=-A\right\}$$

ile tanımlanan tüm ters-Hermitian kompleks matrislerdir (Hall, 2015).

Örnek 2.4.16.

$$\phi(t)=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}$$

dönüşümü $U(2)$ üzerinde 1-parametreli dönüşüm grubu olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$\phi'(t)=\begin{bmatrix}-\sin t & \cos t\\ -\cos t & -\sin t\end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\phi'(0)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

dır. Bu ise $\phi'(0)=u(2)$ olduğunu gösterir. Böylece $U(2)$ nin Lie cebiri $u(2)$ olduğu görülür (Hall, 2015).

Örnek 2.4.17. $S^1=U(1)$ çemberi üzerinde

$$\phi(t)=e^{it}=\cos t+i\sin t$$

dönüşümünün 1-parametreli dönüşüm grubu olduğunu biliyoruz. Burada

$$\phi'(t) = -\sin t + i\cos t, \phi'(0) = i$$

olduğundan $\phi'(0) \in u(1)$ dir (Hall, 2015).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Materyal

3.1.1. Reel kuaterniyonlar cebiri

Her reel kuaterniyon $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ şeklinde ifade edilir. Burada $q_0 \in R$ kuaterniyonun skaler kısmı olup $S_q = q_0$ ile gösterilir, $q_1 i + q_2 j + q_3 k$ ise vektörel kısmı olup $V_q = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ şeklinde yazılır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 3.1.1.1. H tüm kuaterniyonların kümesi olmak üzere bu küme üzerinde

$$+ : H \times H \to H$$
$$(p, q) \to p + q$$

işlemi $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ ile $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ kuaterniyonlarının toplamı

$$\begin{aligned} p + q &= (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1) i + (p_2 + q_2) j + (p_3 + q_3) k \\ &= S_p + S_q + V_p + V_q \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanımlanan toplama işlemi ile kuaterniyonlar bir Abel grubudur. Etkisiz eleman ise sıfır kuaterniyon adını alır.

$p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k,\ q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k,\ r = r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k \in H$ olsun.

$i)$ $$\begin{aligned} p + q &= p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k + q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \\ &= p_0 + q_0 + p_1 i + q_1 i + p_2 j + q_2 j + p_3 k + q_3 k \\ &= p_0 + q_0 + (p_1 + q_1) i + (p_2 + q_2) j + (p_3 + q_3) k \end{aligned}$$

$$= q_0 + p_0 + (q_1 + p_1)i + (q_2 + p_2)\, j + (q_3 + p_3)k$$
$$= q + p$$

olduğundan kuaterniyonlarda toplama işlemi değişmelidir.

$$ii)\ (p+q)+r = (p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k + q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) + (r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k)$$
$$= p_0 + q_0 + r_0 + (p_1 + q_1 + r_1)i + (p_2 + q_2 + r_2)\, j + (p_3 + q_3 + r_3)k$$
$$= p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k + (q_0 + r_0 + (q_1 + r_1)i + (q_2 + r_2)\, j + (q_3 + r_3)k)$$
$$= p + (q + r)$$

olduğundan kuaterniyonlarda toplama işlemi birleşmelidir.

$iii)\ 0 = 0 + 0i + 0j + 0k$ sıfır kuaterniyonu etkisiz elemandır.

$iv)\ p + p'' = 0$ olacak şekilde p'' kuaterniyonunu bulalım.

$p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ ise $p'' = -p_0 - p_1 i - p_2 j - p_3 k$ olmalıdır.

$$p + p'' = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k - p_0 - p_1 i - p_2 j - p_3 k$$
$$= (p_0 - p_0) + (p_1 - p_1)\, i + (p_2 - p_2)\, j + (p_3 - p_3)\, k$$
$$= 0 + 0i + 0j + 0k$$

olduğundan her kuaterniyonun toplamaya göre tersi vardır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 3.1.1.2. $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ kuaterniyonu ile $\lambda \in \mathbb{R}$ skalerinin çarpımı

$$\lambda q = q\lambda = (\lambda q_0) + (\lambda q_1)i + (\lambda q_2)\, j + (\lambda q_3)k$$

şeklinde tanımlanır.

Her $p, q \in H$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için;

i) $\lambda(p+q) = \lambda p + \lambda q$,

ii) $(\lambda + \mu)p = \lambda p + \mu p$,

iii) $(\lambda\mu)p = \lambda(\mu p) = \mu(\lambda p)$,

iv) $1q = q$

özellikleri sağlanır. Tanım 3.1.1.1'de tanımlanan toplama ve Tanım 3.1.1.2'de verilen skalerle çarpma işlemi ile birlikte kuaterniyonlar kümesi bir reel vektör uzayıdır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 3.1.1.3.

$$\otimes : H \times H \to H$$
$$(p,q) \to p \otimes q$$

olmak üzere $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ *ve* $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ kuaterniyonlarının çarpımı; imajiner birimlerin ilişkilerini gösteren Çizelge 1.1'e göre,

$$\begin{aligned} p \otimes q &= \left(p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k\right)\left(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k\right) \\ &= p_0 q_0 + p_0 q_1 i + p_0 q_2 j + p_0 q_3 k + p_1 i q_0 + \underbrace{p_1 i q_1 i}_{i^2=-1} + \underbrace{p_1 i q_2 j}_{i \otimes j = k} + \underbrace{p_1 i q_3 k}_{i \otimes k = -j} \\ &\quad + p_2 j q_0 + \underbrace{p_2 j q_1 i}_{j \otimes i = -k} + \underbrace{p_2 j q_2 j}_{j^2=-1} + \underbrace{p_2 j q_3 k}_{j \otimes k = i} + p_3 k q_0 + \underbrace{p_3 k q_1 i}_{k \otimes i = j} + \underbrace{p_3 k q_2 j}_{k \otimes j = -i} + \underbrace{p_3 k q_3 k}_{k^2=-1} \\ &= \left(p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3\right) + \left(p_0 q_1 + p_1 q_0 + p_2 q_3 - p_3 q_2\right) i \\ &\quad + \left(p_0 q_2 - p_1 q_3 + p_2 q_0 + p_3 q_1\right) j + \left(p_0 q_3 + p_1 q_2 - p_2 q_1 + p_3 q_0\right) k \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 3.1.1.1. $\forall p, q \in H$ için

$$p \otimes q = S_p S_q - < V_p, V_q > + S_p V_q + S_q V_p + V_p \times V_q \qquad (3.1)$$

eşitliği sağlanır (Vicci,2001).

İspat. $\forall p, q \in H$ için

$$\begin{aligned} p \otimes q &= \left(p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3\right) + \left(p_0 q_1 + p_1 q_0 + p_2 q_3 - p_3 q_2\right) i \\ &\quad + \left(p_0 q_2 - p_1 q_3 + p_2 q_0 + p_3 q_1\right) j + \left(p_0 q_3 + p_1 q_2 - p_2 q_1 + p_3 q_0\right) k \end{aligned}$$

olduğu bilinmektedir. Burada $p_0 q_0$ yerine $S_p S_q$, $p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3$ yerine $< V_p, V_q >$ yazılabilir. Ayrıca $p \otimes q$ nun imajiner kısmı için

$$\begin{aligned} V_{p\otimes q} &= p_0q_1i + p_0q_2j + p_0q_3k + q_0p_1i + q_0p_2j + q_0p_3k \\ &\quad + p_2q_3 - p_3q_2i - p_1q_3j + p_3q_1j + p_1q_2k - p_2q_1k \\ &= p_0\left(q_1i + q_2j + q_3k\right) + q_0\left(p_1i + p_2j + p_3k\right) + i\left(p_2q_3 - p_3q_2\right) \\ &\quad - j\left(p_1q_3 - p_3q_1\right) + k\left(p_1q_2 - p_2q_1\right) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlikte $p_0\left(q_1i + q_2j + q_3k\right)$ yerine S_pV_q, $q_0\left(p_1i + p_2j + p_3k\right)$ yerine S_qV_q, $i\left(p_2q_3 - p_3q_2\right) - j\left(p_1q_3 - p_3q_1\right) + k\left(p_1q_2 - p_2q_1\right)$ yerine $V_p \times V_q$ yazılırsa p ve q çarpımının, (3.1) şeklinde temsil edilebileceği görülür.

Buradan kuaterniyonların çarpımının şu özelliklere sahip olduğu görülür.

i) İki kuaterniyonun çarpımı bir kuaterniyondur.

ii) Kuaterniyon çarpımı birleşmelidir.

$p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k, q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k, r = r_0 + r_1i + r_2j + r_3k \in H$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \left(p\otimes q\right)\otimes r &= \left[\left(p_0 + p_1i + p_2j + p_3k\right)\otimes\left(q_0 + q_1i + q_2j + q_3k\right)\right]\otimes\left(r_0 + r_1i + r_2j + r_3k\right) \\ &= p_0q_0r_0 - p_1q_1r_0 - p_2q_2r_0 - p_3q_3r_0 - p_0q_1r_1 - p_1q_0r_1 - p_2q_3r_1 \\ &\quad - p_3q_2r_1 - p_0q_0r_2 + p_1q_3r_2 - p_2q_0r_2 - p_3q_1r_2 - p_0q_3r_3 - p_1q_2r_3 \\ &\quad + p_2q_1r_3 - p_3q_0r_3 + i\left[p_0q_1r_0 + p_1q_0r_0 + p_2q_3r_0 - p_3q_2r_0 + p_0q_0r_1\right. \\ &\quad - p_1q_1r_1 - p_2q_2r_1 - p_3q_3r_1 + p_0q_3r_2 + p_1q_2r_2 - p_2q_1r_2 + p_3q_0r_2 \\ &\quad \left. - p_0q_2r_3 + p_1q_3r_3 - p_2q_0r_3 - p_3q_1r_3\right] + j\left[p_0q_2r_0 - p_1q_3r_0 + p_2q_0r_0\right. \\ &\quad + p_3q_1r_0 + p_0q_0r_2 - p_1q_1r_2 - p_2q_2r_2 - p_3q_3r_2 - p_0q_3r_1 - p_1q_2r_1 \\ &\quad \left. + p_2q_1r_2 - p_3q_0r_1 + p_0q_1r_3 + p_1q_0r_3 + p_2q_3r_3 - p_3q_2r_3\right] \\ &\quad + k\left[p_0q_3r_0 + p_1q_2r_0 - p_2q_1r_0 + p_3q_0r_0 + p_0q_2r_1 - p_1q_3r_1\right. \\ &\quad \left. + p_2q_0r_1 + p_3q_1r_1 - p_0q_1r_2 - p_1q_0r_2 - p_2q_3r_2 + p_3q_2r_2\right] \end{aligned}$$

olarak bulunur. Diğer yandan,

$$
\begin{aligned}
p\otimes(q\otimes r) &= \left(p_0+p_1 i+p_2 j+p_3 k\right)\otimes\left[\ \left(q_0+q_1 i+q_2 j+q_3 k\right)\otimes\left(r_0+r_1 i+r_2 j+r_3 k\right)\ \right] \\
&= p_0q_0r_0 - p_1q_1r_0 - p_2q_2r_0 - p_3q_3r_0 - p_0q_1r_1 - p_1q_0r_1 - p_2q_3r_1 \\
&\quad - p_3q_2r_1 - p_0q_0r_2 + p_1q_3r_2 - p_2q_0r_2 - p_3q_1r_2 - p_0q_3r_3 - p_1q_2r_3 \\
&\quad + p_2q_1r_3 - p_3q_0r_3 + i\left[p_0q_1r_0 + p_1q_0r_0 + p_2q_3r_0 - p_3q_2r_0\right. \\
&\quad + p_0q_0r_1 - p_1q_1r_1 - p_2q_2r_1 - p_3q_3r_1 + p_0q_3r_2 + p_1q_2r_2 \\
&\quad \left. - p_2q_1r_2 + p_3q_0r_2 - p_0q_2r_3 + p_1q_3r_3 - p_2q_0r_3 - p_3q_1r_3\right] \\
&\quad + j\left[p_0q_2r_0 - p_1q_3r_0 + p_2q_0r_0 + p_3q_1r_0 + p_0q_0r_2\right. \\
&\quad - p_1q_1r_2 - p_2q_2r_2 - p_3q_3r_2 - p_0q_3r_1 - p_1q_2r_1 + p_2q_1r_2 \\
&\quad \left. - p_3q_0r_1 + p_0q_1r_3 + p_1q_0r_3 + p_2q_3r_3 - p_3q_2r_3\right] \\
&\quad + k\left[p_0q_3r_0 + p_1q_2r_0 - p_2q_1r_0 + p_3q_0r_0 + p_0q_2r_1\right. \\
&\quad \left. - p_1q_3r_1 + p_2q_0r_1 + p_3q_1r_1 - p_0q_1r_2 - p_1q_0r_2 - p_3q_3r_2 + p_3q_2r_2\right]
\end{aligned}
$$

olduğundan $\left(p\otimes q\right)\otimes r = p\otimes\left(q\otimes r\right)$ dır.

iii) Kuaterniyon çarpımı toplamaya göre dağılmalıdır.

$p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$, $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$, $r = r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
p\otimes(q+r) &= p\otimes\left[\left(q_0+r_0\right)+\left(q_1+r_1\right)i+\left(q_2+r_2\right)j+\left(q_3+r_3\right)k\ \right] \\
&= \left(p_0+p_1 i+p_2 j+p_3 k\right)\otimes\left[\ \left(q_0+r_0\right)+\left(q_1+r_1\right)i+\left(q_2+r_2\right)j+\left(q_3+r_3\right)k\right] \\
&= p_0\left(q_0+r_0\right)-p_1\left(q_1+r_1\right)-p_2\left(q_2+r_2\right)-p_3\left(q_3+r_3\right) \\
&\quad + i\left[p_0\left(q_1+r_1\right)+p_1\left(q_0+r_0\right)+p_2\left(q_3+r_3\right)-p_3\left(q_2+r_2\right)\right] \\
&\quad + j\left[p_0\left(q_2+r_2\right)+p_2\left(q_0+r_0\right)+p_3\left(q_1+r_1\right)-p_1\left(q_3+r_3\right)\right] \\
&\quad + k\left[p_3\left(q_0+r_0\right)+p_0\left(q_3+r_3\right)+p_1\left(q_2+r_2\right)-p_2\left(q_1+r_1\right)\right] \\
&= p_0q_0 + p_0r_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_2r_2 - p_3q_3 - p_3r_3 \\
&\quad + i\left[p_0q_1 + p_0r_1 + p_1q_0 + p_1r_0 + p_2q_3 + p_2r_3 - p_3q_2 - p_3r_2\right] \\
&\quad + j\left[p_0q_2 + p_0r_2 + p_2q_0 + p_2r_0 + p_3q_1 + p_3r_1 - p_1q_3 - p_1r_3\right] \\
&\quad + k\left[p_3q_0 + p_3r_0 + p_0q_3 + p_0r_3 + p_1q_2 + p_1r_2 - p_2q_1 - p_2r_1\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 + i\left(p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2\right) \\
&\quad + j\left(p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - p_1q_3\right) + k\left(p_3q_0 + p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1\right) \\
&\quad + p_0r_0 - p_1r_1 - p_2r_2 - p_3r_3 + i\left(p_0r_1 + p_1r_0 + p_2r_3 - p_3r_2\right) \\
&\quad + j\left(p_0r_2 + p_2r_0 + p_3r_1 - p_1r_3\right) + k\left(p_3r_0 + p_0r_3 + p_1r_2 - p_2r_1\right) \\
&= p \otimes q + p \otimes r
\end{aligned}
$$

dir.

Fakat kuaterniyon çarpımı değişmeli değildir. Bu özellikler ile kuaterniyonlar birleşmeli bir cebirdir. Bu cebire kuaterniyonlar cebiri denir. Bu cebirin tabanı $\{1, i, j, k\}$ olup boyutu ise dörttür (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 3.1.1.2. p ve q birer skaler (reel sayı) kuaterniyon ise $p \otimes q = q \otimes p$ dır (Hacısalihoğlu, 1983).

İspat. p ve q birer skaler (reel sayı) olmak üzere $p = p_0$ ve $q = q_0$ olsun.

$$p \otimes q = p_0 \otimes q_0 = q_0 \otimes p_0 = q \otimes p$$

elde edilir.

Teorem 3.1.1.3. p ve q kuaterniyonlarının vektörel kısımları orantılı $\left(V_p = \lambda V_q\right)$ ise $p \otimes q = q \otimes p$ olur (Hacısalihoğlu, 1983).

İspat. p ve q kuaterniyonlarının çarpımı (3.1) den

$$p \otimes q = S_pS_q - < V_p, V_q > + S_pV_q + S_qV_p + V_p \times V_q$$

şeklinde yazılabilir. Burada p ve q'nun vektörel kısımları orantılıdır ve $V_p \times V_q = 0$ olacağından $p \otimes q = q \otimes p$ elde edilir.

Örnek 3.1.1.1. $p = 1 + i - j,\ q = j + k$ olarak verilsin.

$$p \otimes q = \left(1 + i - j\right) \otimes \left(j + k\right) = j + k + i \otimes j + i \otimes k - j^2 - j \otimes k$$

$$= j+k+k-j+1-i = 1-i+2k$$

$$q \otimes p = (j+k) \otimes (1+i-j) = j + j \otimes i - j^2 + k + k \otimes i - k \otimes j$$
$$= j-k+1+k+j+i$$
$$= 1+2j$$

olarak bulunur. Buradan $p \otimes q \neq q \otimes p$ olduğu görülür.

Örnek 3.1.1.2. $p = 5, q = 2$ olsun. Burada;

$p = S_p, q = S_q$ olduğundan $p \otimes q = 5.2 = 2.5 = q \otimes p$ olur.

Örnek 3.1.1.3. $p = 3+i+j+k, q = 5+2i+2j+2k$ kuaterniyonlarını alalım. $V_q = 2V_p$ olduğundan

$$p \otimes q = (3+i+j+k) \otimes (5+2i+2j+2k)$$
$$= 15+6i+6j+6k+5i+2i^2+2i \otimes j+2i \otimes k+5j+2j \otimes i$$
$$+2j^2+2j \otimes k+5k+2k \otimes i+2k \otimes j+2k^2$$
$$= (5+2i+2j+2k) \otimes (3+i+j+k)$$
$$= q \otimes p$$

elde edilir.

Tanım 3.1.1.4. Her $p, q \in H$ için, iki kuaterniyonun eşitliği

$$p = q \Leftrightarrow S_p = S_q \; ve \; V_p = V_q$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 3.1.1.5. Her $p, q \in H$ için, iki kuaterniyonun farkı

$$p-q = (S_p - S_q) + (V_p - V_q)$$
$$= (p_0 - q_0) + (p_1 - q_1)i + (p_2 - q_2)j + (p_3 - q_3)k$$

olarak tanımlıdır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 3.1.1.6. Her $q \in H$ için q'nun eşleniği

$$\overline{q} = S_q - V_q = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$$

olarak tanımlanır. O halde $V_{\overline{q}} = -V_q$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned} q \otimes \overline{q} &= \left(S_q + V_q\right) \otimes \left(S_q - V_q\right) \\ &= q_0^2 - \left(q_1 i + q_2 j + q_3 k\right) \otimes \left(q_1 i + q_2 j + q_3 k\right) \\ &= q_0^2 - \left[q_1^2 i^2 + q_1 q_2 i \otimes j + q_1 q_3 i \otimes k + q_2 q_1 j \otimes i \right. \\ &\quad \left. + q_2^2 j^2 + q_2 q_3 j \otimes k + q_3 q_1 k \otimes i + q_3 q_2 k \otimes j + q_3^2 k^2 \right] \\ &= q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır (Hacısalihoğlu, 1983).

Önerme 3.1.1.1. Her $p, q \in H$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için,

i) $q \otimes \overline{q} = \overline{q} \otimes q \geq 0$,

ii) $q \otimes \overline{q} = \overline{q} \otimes q = 0 \Leftrightarrow q = 0$,

iii) $\overline{ap + bq} = a\overline{p} + b\overline{q}$,

iv) $\left(\overline{\overline{p}}\right) = p$,

v) $\overline{\left(p \otimes q\right)} = \overline{q} \otimes \overline{p}$,

sağlanır (Hacısalihoğlu, 1983).

İspat. $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k, q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in H$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olsun.

i) ve *ii*) eşlenik tanımından açıktır.

iii) $\overline{\left(ap + bq\right)} = a\overline{p} + b\overline{q}$ olduğunu görelim.

$$\begin{aligned} \overline{ap + bq} &= \overline{a\left(p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k\right) + b\left(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k\right)} \\ &= ap_0 - ap_1 i - ap_2 j - ap_3 k + bq_0 - bq_1 i - bq_2 j - bq_3 k \\ &= a\left(p_0 - p_1 i - p_2 j - p_3 k\right) + b\left(q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k\right) = a\overline{p} + b\overline{q}\,. \end{aligned}$$

$iv)\ \overline{\left(\overline{p}\right)} = \overline{\left(\overline{p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k}\right)} = \overline{p_0 - p_1 i - p_2 j - p_3 k} = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k = p$
elde edilir.

$$\begin{aligned} v)\ \overline{(p \otimes q)} &= (p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3) - (p_0 q_1 + p_1 q_0 + p_2 q_3 - p_3 q_2) i \\ &\quad - (p_0 q_2 - p_1 q_3 + p_2 q_0 + p_3 q_1) j - (p_0 q_3 + p_1 q_2 - p_2 q_1 + p_3 q_0) k \\ &= (q_0 p_0 - q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3) - (q_1 p_0 + q_0 p_1 + q_3 p_2 - q_2 p_3) i \\ &\quad - (q_2 p_0 - q_3 p_1 + q_0 p_2 + q_1 p_3) j - (q_3 p_0 + q_2 p_1 - q_1 p_2 + q_0 p_3) k \\ &= (q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k) \otimes (p_0 - p_1 i - p_2 j - p_3 k) = \overline{q} \otimes \overline{p} \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Tanım 3.1.1.7.

$$\begin{aligned} \| \ \| : H &\to \mathbb{R} \\ q &\to \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \end{aligned}$$

olmak üzere, her $q \in H$ için q'nun normu N_q ve $\| \ \|$ ile gösterilir ve

$$N_q = \|q\| = \sqrt{q \otimes \overline{q}} = \sqrt{\overline{q} \otimes q} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu, 1983).

Önerme 3.1.1.2. $\forall p, q \in H$ için $N_{p \otimes q} = N_p \ N_q$ eşitliği sağlanır (Hacısalihoğlu, 1983).

İspat. p *ve* q iki kuaterniyon olmak üzere,

$$\begin{aligned} N_{p \otimes q} &= \sqrt{p \otimes q \otimes \overline{p \otimes q}} = \sqrt{p \otimes q \otimes \overline{q} \otimes \overline{p}} = \sqrt{p \otimes \left(N_q\right)^2 \otimes \overline{p}} \\ &= N_q \sqrt{p \otimes \overline{p}} = N_p N_q \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.1.1.8. $q \neq 0$ olmak üzere her $q \in H$ için q'nun tersi

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{\left(N_q\right)^2}$$

olarak tanımlanır (Hacısalihoğlu, 1983).

Önerme 3.1.1.3. Her $q \in H$ için, $q \otimes q^{-1} = q^{-1} \otimes q$ eşitliği sağlanır (Hacısalihoğlu, 1983).

İspat. $q \neq 0$ olmak üzere $\forall q \in H$ için,

$$q \otimes q^{-1} = q \otimes \frac{\overline{q}}{\left(N_q\right)^2} = \frac{N_q^2}{N_q^2} = 1$$
$$q^{-1} \otimes q = \frac{\overline{q}}{\left(N_q\right)^2} \otimes q = \frac{N_q^2}{N_q^2} = 1 \quad ,$$

$q \otimes q^{-1} = q^{-1} \otimes q$ eşitliği elde edilir.

Önerme 3.1.1.4. Her $p, q \in H$ için $\left(p \otimes q\right)^{-1} = q^{-1} \otimes p^{-1}$ sağlanır (Hacısalihoğlu, 1983).

İspat. $\left(p \otimes q\right)^{-1} = \dfrac{\overline{p \otimes q}}{\left(N_{p \otimes q}\right)^2}$ eşitliğinden

$$\left(p \otimes q\right)^{-1} = \frac{\overline{p \otimes q}}{\left(N_{p \otimes q}\right)^2} = \frac{\overline{q} \otimes \overline{p}}{\left(N_q N_p\right)^2} = \frac{\overline{q} \otimes \overline{p}}{\left(N_q\right)^2 \left(N_p\right)^2} = \frac{\overline{q}}{\left(N_q\right)^2} \otimes \frac{\overline{p}}{\left(N_p\right)^2} = q^{-1} \otimes p^{-1}$$

elde edilir.

Yukarıda ispatlanan önermelerin tümevarımı ile aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

i) $\overline{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \left(\overline{p_1}\right) + \left(\overline{p_2}\right) + \ldots + \left(\overline{p_n}\right)$,

ii) $\left(\overline{p_1 \otimes p_2 \ldots p_n}\right) = \overline{p_n} \otimes \overline{p_{n-1}} \ldots \otimes \overline{p_1}$,

iii) $N_{p_1 \otimes p_2 \ldots p_n} = N_{p_n} N_{p_{n-1}} \ldots N_{p_1}$,

iv) $\left(p_1 \otimes p_2 ... p_n\right)^{-1} = p_n^{-1} \otimes p_{n-1}^{-1} ... \otimes p_1^{-1}$ (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 3.1.1.9. Normu bir olan kuaterniyona birim kuaterniyon denir. Her q sıfırdan farklı kuaterniyonun normlanışı (birimleştirilmesi)

$$q^1 = \frac{q}{N_q} = \frac{q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k}{\sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}$$

şeklindedir. Burada q^1 birim kuaterniyonun reel eksen ile yaptığı açı θ olmak üzere

$$q^1 = \cos\theta + s \sin\theta$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \neq 0 \left(V_q \neq 0\right)$ olduğu zaman

$$\cos\theta = \frac{q_0}{\sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} ,$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{\sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}$$

ve

$$s = \frac{q_1 i + q_2 j + q_3 k}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \left(s^2 = -1 \Rightarrow s\bar{s} = -s^2 = 1\right)$$

birim vektörüdür. Burada s vektörüne q^1 birim kuaterniyonunun ekseni denir (Ward, 1997).

Örnek 3.1.1.4. $q = 1 + 2i - j + k$ kuaterniyonunun birimleştirilmesini ve birimleştirmenin eksenini bulalım. $N_q = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{7} \neq 1$ olduğundan q kuaterniyonu birim değildir. O halde q'nun birimleştirilmesi

$$q^1 = \frac{q}{N_q} = \frac{1}{\sqrt{7}}(1 + 2i - j + k) = \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{2}{\sqrt{7}} i - \frac{1}{\sqrt{7}} j + \frac{1}{\sqrt{7}} k$$

olarak bulunur. Buradan;

$$\cos\theta = \frac{q_0}{N_q} = \frac{1}{\sqrt{7}},\ \sin\theta = \frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{\sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}},$$

olduğu görülür.

$$q^1 = \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}i - \frac{1}{\sqrt{6}}j + \frac{1}{\sqrt{6}}k\right)$$

şeklinde yazılabilir. q nun birimleştirilmesinin ekseni ise

$$s = \frac{2}{\sqrt{6}}i - \frac{1}{\sqrt{6}}j + \frac{1}{\sqrt{6}}k = \frac{1}{\sqrt{6}}(2i - j + k)$$

olarak elde edilir.

Tanım 3.1.1.10. Kuaterniyonların kompleks sayılarla gösterimi

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in H \text{ ve } k = i \otimes j$$

olmak üzere,

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 i \otimes j = q_0 + q_1 i + \left(q_2 + q_3 i\right) j = c_1 + c_2 j$$

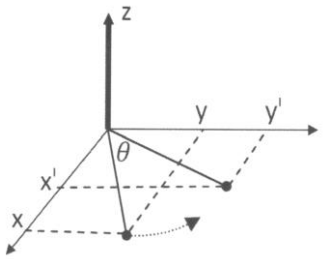
şeklinde tanımlıdır (Farenick, 2003).

3.1.2. Uzayda dönme dönüşümü

Uzaydaki dönme dönüşümü, düzlemde tanımlanan dönme dönüşümünden bazı farklı özelliklere sahiptir. Düzlemde, bir nokta etrafında dönme dönüşümü yapılırken, uzayda bir eksen etrafında dönme yapılır. Yani, yapılan dönme bir düzlemde gerçekleşir ve dönme ekseni ise, bu düzleme dik bir vektörle ifade edilebilir. O halde, uzaydaki dönme dönüşümünde, dönme eksenine göre dönüşüm değişecektir (Özdemir, 2017).

z ekseni etrafındaki dönme; z eksenine dik olan düzlemde gerçekleşen, yani xoy düzlemindeki bir dönme hareketidir. Dönme matrisi aşağıdaki şekilde tanımlıdır ve Şekil 3.1' de gösterilmiştir (Özdemir, 2017).

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Şekil 3.1. z ekseni etrafında dönme

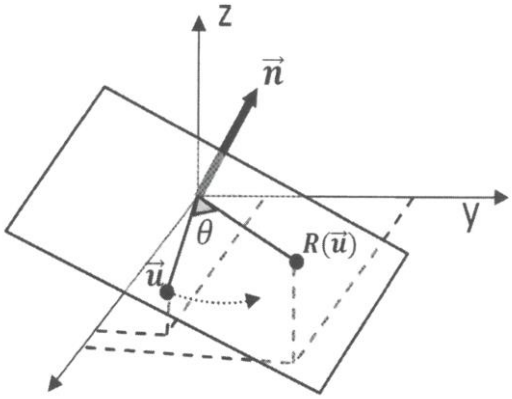
Benzer şekilde y ekseni etrafındaki dönme matrisi ve x ekseni etrafındaki dönme matrisi

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Herhangi bir n vektörü etrafından dönme Şekil 3.2 de gösterildiği gibi n vektörüne dik olan düzlemde yani normal vektörü n olan düzlemde gerçekleşir.



Şekil 3.2. Herhangi bir n vektörü etrafında dönme

Teorem 3.1.2.1. $\mathbb{R}^3$ uzayında verilen herhangi bir $u=(x,y,z)$ vektörünün, herhangi bir $n=(a,b,c)$ birim vektörü etrafından θ açısı kadar döndürülmesiyle elde edilen vektör

$$R(u)=\langle u,n\rangle n+(u-\langle u,n\rangle n)\cos\theta+(n\times u)\sin\theta$$

dönüşümü ile bulunur ve lineer dönüşümün standart matrisi (dönme matrisi)

$$R=\begin{bmatrix}\cos\theta+a^2(1-\cos\theta) & ab(1-\cos\theta)-c\sin\theta & ac(1-\cos\theta)+b\sin\theta\\ ab(1-\cos\theta)+c\sin\theta & \cos\theta+b^2(1-\cos\theta) & bc(1-\cos\theta)-a\sin\theta\\ ac(1-\cos\theta)-b\sin\theta & bc(1-\cos\theta)+a\sin\theta & \cos\theta+c^2(1-\cos\theta)\end{bmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca dönme açısı θ olmak üzere,

$$1+2\cos\theta=izR$$

eşitliği sağlanır (Özdemir, 2017).

İspat.

Şekil 3.3 de w vektörü, u vektörünün n birim vektörü üzerine dik izdüşüm vektörüdür. Buna göre

$$w=\frac{\langle u,n\rangle}{\langle n,n\rangle}n=\langle u,n\rangle n$$

yazılabilir. Böylece

$$x=u-w=u-\langle u,n\rangle n$$

olur. Ayrıca y vektörü hem n hem u vektörüne dik olduğundan

$$y = n \times u$$

elde edilir. x vektörünün saat yönünün tersine θ açısı kadar döndürüldüğünde elde edilen vektör $R(x)$ olsun.

$$R_\theta(x) = \cos\theta\, x + \sin\theta\, y$$

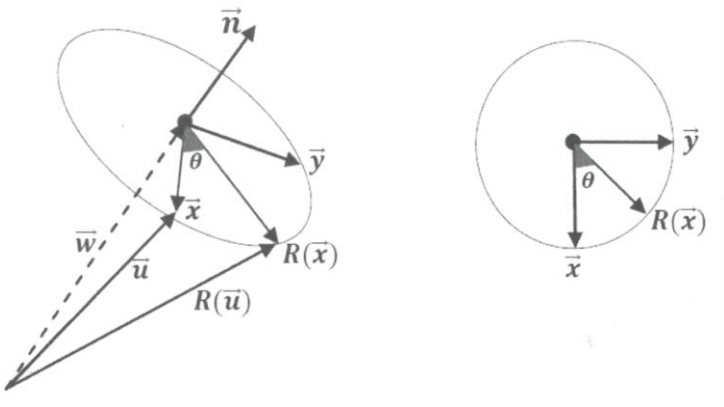
şeklinde yazılabileceğinden

$$\begin{aligned} R_\theta(u) &= w + \cos\theta\left(u - \langle u,n\rangle n\right) + \sin\theta\left(n \times u\right) \\ &= \langle u,n\rangle n + \cos\theta\left(u - \langle u,n\rangle n\right) + \sin\theta\left(n \times u\right) \end{aligned}$$

bulunur. Bu dönüşüm $u = (x,y,z) ve\, n = (a,b,c)$ için düzenlenirse, standart matrisi (dönme matrisi)

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta + a^2(1-\cos\theta) & ab(1-\cos\theta) - c\sin\theta & ac(1-\cos\theta) + b\sin\theta \\ ab(1-\cos\theta) + c\sin\theta & \cos\theta + b^2(1-\cos\theta) & bc(1-\cos\theta) - a\sin\theta \\ ac(1-\cos\theta) - b\sin\theta & bc(1-\cos\theta) - a\sin\theta & \cos\theta + c^2(1-\cos\theta) \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu matrisin determinantı 1 olan bir ortogonal matris olduğunu görebiliriz. Ayrıca $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ kullanılarak, $\text{izR}_\theta = 1 + 2\cos\theta$ olduğu görülebilir.



Şekil 3.3. Normal vektörü n olan düzlemde dönme

3.2. Yöntem

Bu tez çalışması hazırlanırken gerekli literatür taraması yapılmıştır. Tarama sonucunda ilgili kitap, makale ve tez çalışmaları incelenmiştir. Konu ile ilgili çalışmalar ayrıntılı incelenmiş, her bir tanım ve teorem farklı kaynaklardan karşılaştırılmıştır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Kuaterniyonlar Yardımı İle Dönme

H nın üç boyutlu alt uzayı

$$V_q = \{u_1 i + u_2 j + u_3 k : u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}\}$$

verilsin. Bu durumda aşağıdaki lemma verilebilir.

Önerme 4.1.1. $\forall u, v \in V_q$ için

$$u \otimes v = -\langle u, v \rangle + u \times v$$

eşitliği sağlanır (Vicci,2001).

İspat. (3.1) den $u \otimes v = S_u S_v - < V_u, V_v > + S_u V_v + S_v V_u + V_u \times V_v$ eşitliğinde $S_u = 0$, $S_v = 0$ yazıldığında istenilen elde edilir.

Önerme 4.1.2. $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ortogonal bir dönüşüm olsun. Bu durumda $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$ için

$$L(x \times y) = (\det L)(L(x) \times L(y))$$

olur (Janson, 2017).

İspat. $\forall x, y, u \in \mathbb{R}^3$ için $\langle x \times y, u \rangle = \det(x, y, u)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \langle L(x) \times L(y), L(u) \rangle &= \det(L(x), L(y), L(u)) \\ &= \det L \det(x, y, u) \\ &= \det L \langle x \times y, u \rangle \\ &= \langle (\det L)(x \times y), u \rangle \end{aligned} \tag{4.1}$$

elde edilir. Ayrıca L ortogonal olduğundan

$$\langle L(x) \times L(y), L(u) \rangle = \langle L^T (L(x) \times L(y)), u \rangle \tag{4.2}$$

(4.1) ve (4.2) eşitliklerini kullanarak

$$\langle (\det L)(x\times y),u\rangle = \langle L^T\left(L(x)\times L(y)\right),u\rangle$$

yazılabilir. Buradan $\forall u$ için son eşitlik sağlandığından

$$(\det L)(x\times y) = L^T\left(L(x)\times L(y)\right)$$

olur. L, terslenebilir olduğundan $\det L\left(L^T\right)^{-1}(x\times y) = L(x)\times L(y)$ ve $L\in O(3)$ için $\left(L^T\right)^{-1} = L$ ve $\det L = \mp 1$ sağlandığından

$$(\det L)L(x\times y) = L(x)\times L(y)$$

veya

$$L(x\times y) = (\det L)\left(L(x)\times L(y)\right)$$

elde edilir.

Önerme 4.1.3. $L\in SO(3)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&L(i)\otimes L(i) = -1 = L(j)\otimes L(j) = L(k)\otimes L(k)\\
&L(i)\otimes L(j) = -L(j)\otimes L(i) = L(k)\\
&L(k)\otimes L(i) = -L(i)\otimes L(k) = L(j)\\
&L(j)\otimes L(k) = -L(k)\otimes L(i) = L(i)
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır (Janson, 2017).

İspat. $L\in SO(3)$ ve i, j, k imajiner birimler olmak üzere Önerme 4.1.1 den

$$L(i)\otimes L(i) = -\langle L(i),L(i)\rangle + L(i)\times L(i) = -\langle i,i\rangle + L(i)\times L(i)$$

olur. L ortogonal dönüşüm olduğundan $L(i)\times L(i) = 0$ yazılabilir. $\langle i,i\rangle = 1$ olduğu kullanılarak $L(i)\otimes L(i) = -1$ bulunur.

Benzer şekilde $L(j)\otimes L(j) = L(k)\otimes L(k) = -1$ gösterilebilir.

$$L(i)\otimes L(j) = -\langle L(i), L(j)\rangle + L(i)\times L(j)$$
$$= -\langle i, j\rangle + L(i)\times L(j)$$

olur. Önerme 4.1.2 den

$$L(i\times j) = \det L\left(L(i)\times L(j)\right)$$

yazılabilir. $L\in SO(3)$ olduğundan $\det L = 1$ kullanılarak

$$L(i\times j) = L(i)\times L(j)$$

yazılabilir. $L(i\times j) = L(k)$ olduğundan

$$L(i\times j) = L(i)\times L(j) = L(k)$$

elde edilir. Ayrıca

$$L(k)\otimes L(i) = -\langle L(k), L(i)\rangle + L(k)\times L(i)$$
$$= -\langle k, i\rangle + L(k)\times L(i)$$
$$= L(k\times i) = L(j)$$

ve

$$L(j)\otimes L(k) = -\langle L(j), L(k)\rangle + L(j)\times L(k)$$
$$= -\langle j, k\rangle + L(j)\times L(k) = L(j\times k) = L(i)$$

bulunur.

$L\in SO(3)$ olsun. $\forall r\in\mathbb{R}$ ve $\forall u\in V_q$ için

$$\hat{L}: H\to H$$

dönüşümü $\hat{L}(r+u) = r + L(u)$ olarak tanımlansın.

Önerme 4.1.4. $L\in SO(3)$ olmak üzere $\forall u, v\in V_q$ için

$$\hat{L}(u\otimes v) = L(u)\otimes L(v)$$

dir (Janson, 2017).

İspat. $u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ ve $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$ olmak üzere Önerme 4.1.1 den

$$u \otimes v = -\left(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3\right) + i\left(u_2 v_3 - u_3 v_2\right) + j\left(v_3 u_1 - v_1 u_3\right) + k\left(u_1 v_2 - u_2 v_1\right)$$

olup

$$\begin{aligned}\hat{L}\left(u \otimes v\right) &= -\hat{L}\left(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3\right) + \hat{L}\left(i\right)\hat{L}\left(u_2 v_3 - u_3 v_2\right) + \hat{L}\left(j\right)\hat{L}\left(v_3 u_1 - v_1 u_3\right) \\ &\quad + \hat{L}\left(k\right)\hat{L}\left(u_1 v_2 - u_2 v_1\right) \\ &= -\left(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3\right) + \left(u_2 v_3 - u_3 v_2\right) L(i) \\ &\quad + \left(v_3 u_1 - v_1 u_3\right) L\left(j\right) + \left(u_1 v_2 - u_2 v_1\right) L\left(k\right) \qquad (4.3)\end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

Ayrıca

$\hat{L}\left(u\right) = \hat{L}\left(u_1 i + u_2 j + u_3 k\right) = L\left(u\right) = L\left(u_1 i + u_2 j + u_3 k\right) = u_1 L\left(i\right) + u_2 L\left(j\right) + u_3 L\left(k\right)$,

$\hat{L}(v) = \hat{L}\left(v_1 i + v_2 j + v_3 k\right) = L(v) = L\left(v_1 i + v_2 j + v_3 k\right) = v_1 L\left(i\right) + v_2 L\left(j\right) + v_3 L\left(k\right)$

alındığında $L\left(u\right) \otimes L\left(v\right)$ hesaplanırsa ve Önerme 4.1.3 kullanılırsa

$$\begin{aligned}L\left(u\right) \otimes L\left(v\right) &= \left(u_1 L\left(i\right) + u_2 L\left(j\right) + u_3 L\left(k\right)\right) \otimes \left(v_1 L\left(i\right) + v_2 L\left(j\right) + v_3 L\left(k\right)\right) \\ &= u_1 v_1 \left(L\left(i\right) \otimes L\left(i\right)\right) + u_1 v_2 \left(L\left(i\right) \otimes L\left(j\right)\right) + u_1 v_3 \left(L\left(i\right) \otimes L\left(k\right)\right) \\ &\quad + u_2 v_1 \left(L\left(j\right) \otimes L\left(i\right)\right) + u_2 v_2 \left(L\left(j\right) \otimes L\left(j\right)\right) + u_2 v_3 \left(L\left(j\right) \otimes L\left(k\right)\right) \\ &\quad + u_3 v_1 \left(L\left(k\right) \otimes L\left(i\right)\right) + u_3 v_2 \left(L\left(k\right) \otimes L\left(j\right)\right) + u_3 v_3 \left(L\left(k\right) \otimes L\left(k\right)\right) \\ &= -\left(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3\right) + \left(u_2 v_3 - u_3 v_2\right) L(i) \\ &\quad + \left(v_3 u_1 - v_1 u_3\right) L\left(j\right) + \left(u_1 v_2 - u_2 v_1\right) L\left(k\right) \qquad (4.4)\end{aligned}$$

olur. Buradan (4.3) ve (4.4) eşit olduğundan $L\left(u \otimes v\right) = L\left(u\right) \otimes L\left(v\right)$ olduğu görülür.

Teorem 4.1.1. $L \in SO\left(3\right)$ olmak üzere $\forall u, v \in V_q$ için

$$\hat{L}(q_1 \otimes q_2) = \hat{L}(q_1) \otimes \hat{L}(q_2), \quad q_1, q_2 \in H$$

dir ve $\hat{L}, H$ üzerinde bir otomorfizmdir (Janson, 2017).

İspat. Önce $\hat{L}$ dönüşümünün lineer bir dönüşüm olduğunu gösterelim. $\forall q_1, q_2 \in H$ ve $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ için $\hat{L}(\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2) = \lambda_1 \hat{L}(q_1) + \lambda_2 \hat{L}(q_2)$ olduğunu göstereceğiz. $q_1 = r_1 + u_1$ ve $q_2 = r_2 + u_2$ yazılırsa

$$\hat{L}(\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2) = \hat{L}(\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + L(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)$$

olur. Burada L lineer olduğundan $L(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 L(u_1) + \lambda_2 L(u_2)$ olup

$$L(\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2) = \lambda_1 (r_1 + L(u_1)) + \lambda_2 (r_2 + L(u_2)) = \lambda_1 \hat{L}(q_1) + \lambda_2 \hat{L}(q_2)$$

elde edilir. Bu ise $\hat{L}$ nin lineer olduğunu gösterir.

Şimdi $\hat{L}$ nin bir homomorfizm olduğunu göstereceğiz. $\forall q_1, q_2 \in H$ $q_1 = r_1 + u_1$, $q_2 = r_2 + u_2$ için $q_1 \otimes q_2 = r_1 r_2 + r_1 u_2 + r_2 u_1 + u_1 \otimes u_2$ olarak yazılıp $\hat{L}$ lineer olduğu göz önüne alınırsa;

$$\hat{L}(q_1 \otimes q_2) = \hat{L}(r_1 r_2 + r_1 u_2 + r_2 u_1 + u_1 \otimes u_2) = r_1 r_2 + r_1 \hat{L}(u_2) + r_2 \hat{L}(u_1) + \hat{L}(u_1 \otimes u_2)$$

elde edilir. Ayrıca $\hat{L}$ dönüşümünün tanımından ve Önerme 4.1.4 deki $\hat{L}(u \otimes v) = L(u) \otimes L(v)$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} \hat{L}(q_1 \otimes q_2) &= r_1 r_2 + r_1 \hat{L}(u_2) + r_2 \hat{L}(u_1) + \hat{L}(u_1) \otimes \hat{L}(u_2) \\ &= r_1 r_2 + r_1 L(u_2) + r_2 L(u_1) + L(u_1) \otimes L(u_2) \end{aligned}$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \hat{L}(q_1) \otimes \hat{L}(q_2) &= \hat{L}(r_1 + u_1) \otimes \hat{L}(r_2 + u_2) \\ &= (r_1 + L(u_1)) \otimes (r_2 + L(u_2)) \\ &= r_1 r_2 + r_1 L(u_2) + r_2 L(u_1) + L(u_1) \otimes L(u_2) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\hat{L}(q_1 \otimes q_2) = \hat{L}(q_1) \otimes \hat{L}(q_2)$ elde edilir. Buradan $\hat{L}$ nin bir homomorfizm olduğu görülür.

Son olarak $\hat{L}$ nin birebir ve örten olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \hat{L}(q_1) = 0 &\Rightarrow r_1 + L(u) = 0 \\ &\Rightarrow r_1 = 0 \text{ ve } \mathrm{L(u)=0} \\ &\Rightarrow r_1 = 0 \text{ ve } \mathrm{u=0} \end{aligned}$$

olduğundan $\hat{L}$ birebirdir. Rank $\hat{L}$=4 olduğundan $\hat{L}$ nin örten olduğu açıktır. Böylece ispat tamamlanır.

Not 4.1.1. $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, i=\begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}, j=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, k=\begin{bmatrix}0 & i\\ i & 0\end{bmatrix}$ olmak üzere H'ın her bir $z=a+bi+cj+dk$ elemanı

$$a.I+b\begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0 & i\\ i & 0\end{bmatrix}$$

olarak yazılabileceğinden her bir z kuaterniyonuna $M_2(\mathbb{C})$ de

$$\begin{bmatrix}\alpha & -\bar{\beta}\\ \beta & \bar{\alpha}\end{bmatrix},\ \alpha=a+ib, \beta=c+id\in\mathbb{C}$$

matrisi karşılık gelir. Böylece H kümesi

$$H=\left\{\begin{bmatrix}\alpha & -\bar{\beta}\\ \beta & \bar{\alpha}\end{bmatrix}:\alpha,\beta\in\mathbb{C}\right\} \tag{4.5}$$

olarak ve birim kuatermiyonlar kümesi

$$Q=\left\{\begin{bmatrix}\alpha & -\bar{\beta}\\ \beta & \bar{\alpha}\end{bmatrix}:\alpha,\beta\in\mathbb{C},|\alpha|^2+|\beta|^2=1\right\}=SU(2) \tag{4.6}$$

olarak göz önüne alınabilir (Janson, 2017).

Not 4.1.2. $M_2(\mathbb{C})$, 2×2 tipinde kompleks değerli matrisler kümesi olmak üzere H kuaterniyonlar kümesi, $M_2(\mathbb{C})$ nin bir alt uzayıdır (Janson,2017).

Not 4.1.3. (4.5) ve (4.6) da verilen matrislerin yazımı tek türlü değildir. Yani seçilen uygun I, i, j, k matrisleri değiştirilerek farklı matrisler ile kuaterniyon sayıları ifade edilebilir (Janson, 2017).

Not 4.1.4. $M_2(\mathbb{C})$, 4 boyutlu kompleks vektör uzayı veya 8 boyutlu reel vektör uzayıdır. Burada H alt uzayı $M_2(\mathbb{C})$ nin 4 boyutlu reel bir alt uzayıdır (Janson, 2017).

$q \in Q$ olmak üzere H üzerinde L_q ve R_q dönüşümleri

$$L_q p = q \otimes p, \quad R_q p = p \otimes q \quad p \in H$$

ile verilsin. Açık olarak q bir birim kuaterniyon olduğundan L_q ve R_q dönüşümleri $H = \mathbb{R}^4$ de normu korur. Böylece L_q ve R_q ortogonal dönüşümlerdir.

Ayrıca $\forall q_1, q_2 \in Q$ için

$$L_{q_1 \otimes q_2} p = q_1 \otimes q_2 \otimes p = L_{q_1}(q_2 \otimes p) = L_{q_1} L_{q_2} p$$

olduğundan $q \to Lq$ dönüşümü ve

$$\begin{aligned} R_{(q_1 \otimes q_2)^{-1}}(p) &= p \otimes (q_1 \otimes q_2)^{-1} \\ &= p \otimes q_2^{-1} \otimes q_1^{-1} \\ &= R_{q_1^{-1}} R_{q_2^{-1}}(p) \end{aligned}$$

olduğundan $q \to R_{q^{-1}}$ dönüşümü birer homomorfizmdir. Bu iki homomofizm birleştirilerek

$$\begin{aligned} &\Psi : Q \times Q \to SO(4) \\ &(q_1, q_2) \to \Psi_{q_1, q_2} = L_{q_1} \circ R_{q_2^{-1}} \end{aligned}$$

ile tanımlanan Ψ dönüşümüde bir homomorfizmdir. Buradan $\forall q_1, q_2 \in Q$ ve $p \in H$ için

$$\Psi_{q_1, q_2}(p) = q_1 \otimes p \otimes q_2^{-1}$$

olur.

Son eşitliğin özel olarak $q_1 = q_2 = q$ seçilirse

$$\Phi_q(p) = q \otimes p \otimes q^{-1}, \Phi : Q \to SO(3)$$

ile tanımlanabilir.

Burada $\Phi_q 1 = 1$ ve $V_q \subset H$ ın her elemanı Φ_q ile invaryant kalır. Bu nedenle, $q \in Q$ olmak üzere Φ_q, $\Phi_q : V_q \to V_q$, $q \in Q$ olarak göz önüne alınabilir. Hatta $V_q \cong \mathbb{R}^3$ olduğundan $\Phi_q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ olarak tanımlanabilir.

Teorem 4.1.2. $\forall q = \cos\theta + s\sin\theta$ birim kuaterniyonu için

$$\Phi_q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$H \to H$$

$$u \to q \otimes u \otimes q^{-1} = q \otimes u \otimes \overline{q}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşüm lineer olup s vektörü dönme ekseni olmak üzere 2θ açısı kadar dönmeyi ifade eder (Jia, 2017).

İspat: Her $u, v \in \mathbb{R}^3$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\Phi_q(u + \lambda v) = q \otimes (u + \lambda v) \otimes \overline{q} = q \otimes u \otimes \overline{q} + \lambda q \otimes v \otimes \overline{q} = \Phi_q(u) + \lambda \Phi_q(v)$$

olduğundan Φ_q dönüşümü lineerdir. Şimdi bu lineer dönüşümün matris temsilini H 'ın tabanı cinsinden ifade edelim.

$$\Phi_q(i) = (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) \otimes i \otimes (q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k)$$

$$= (q_0 i + q_1 i^2 + q_2 j \otimes i + q_3 k \otimes i) \otimes (q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k)$$

$$= (q_0 i - q_1 - q_2 k + q_3 j) \otimes (q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k)$$

$$= q_0^2 i - q_0 q_1 i^2 - q_0 q_2 i \otimes j - q_0 q_3 i \otimes k - q_1 q_0 + q_1^2 i + q_1 q_2 j + q_1 q_3 k$$

$$- q_2 q_0 k + q_2 q_0 k \otimes i + q_2^2 k \otimes j + q_2 q_3 k^2 + q_3 q_0 j - q_3 q_0 j \otimes i - q_3 q_0 j^2 - q_3^2 j \otimes k$$

$$= q_0^2 i + q_0 q_1 - q_0 q_2 k + q_0 q_3 j - q_0 q_1 + q_1^2 i$$

$$+ q_1 q_2 j + q_1 q_3 k - q_0 q_2 k + q_1 q_2 j - q_2^2 i - q_2 q_3 + q_0 q_3 j + q_1 q_1 k + q_2 q_3 - q_3^2 i$$

$$= (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) i + (2q_0 q_3 + 2q_1 q_2)\, j + (2q_1 q_3 - 2q_0 q_2)\, k$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$\Phi_q(j) = (-2q_0 q_3 + 2q_1 q_2)\, i + (q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2)\, j + (2q_0 q_1 + 2q_2 q_3)\, k$$

$$\Phi_q(k) = (2q_0 q_2 + 2q_1 q_3)\, i + (2q_2 q_3 - 2q_0 q_1)\, j + (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2)\, k$$

olarak bulunur.

$$\Phi_q = \begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2q_1q_2-2q_0q_3 & 2q_0q_2+2q_1q_3 \\ 2q_1q_2+2q_0q_3 & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2q_2q_3-2q_0q_1 \\ 2q_1q_3-2q_2q_0 & 2q_1q_0+2q_2q_3 & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{bmatrix}$$

ise Φ_q lineer dönüşümünün matris temsilidir. Bu matrisin dönme matrisi olduğunu göstermek için $\Phi_q\Phi_q{}^T = \Phi_q{}^T\Phi_q = I_3$ ve $\det\Phi_q = 1$ olduğunu göstermeliyiz. Bunları hesaplarken $q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ kuaterniyonun birim $\left(q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2=1\right)$ olduğunu göz önünde bulunduracağız.

$$\Phi_q\Phi_q{}^T = \begin{bmatrix} \left(q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2\right)^2 \end{bmatrix} = I_3$$

olur. Yani $\Phi_q{}^T\Phi_q = \Phi_q\Phi_q{}^T = I_3$ bulunur. Ayrıca $\det\left(\Phi_q\right) = \left(q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2\right)^3 = 1$ olacaktır. S vektörü dönme ekseni ise Φ_q'nun 1 özdeğerine karşılık gelen özvektörüdür. $iz\Phi_q = 1+2\cos 2\theta$ 'dır.

Örnek 4.1.1. $u=(1,0,1)$ vektörünün $s=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ vektörü etrafında 120° dönmesiyle elde edilen vektörü bulalım.

Burada $\theta = 60°, \cos\theta = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *ve* q birim kuaterniyonu

$$q = \cos\theta + \sin\theta\, s = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j - \frac{1}{\sqrt{3}}k\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j - \frac{1}{2}k$$

olarak bulunur. İstenen vektör ise

$$\Phi_q(u) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k\right)\otimes(i+k)\otimes\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}i^2+\frac{1}{2}j\otimes i-\frac{1}{2}k\otimes i+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}i\otimes k+\frac{1}{2}j\otimes k-\frac{1}{2}k^2\right)$$

$$\otimes\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}\right)\otimes\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k\right)$$

$$=\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}i^2-\frac{1}{2}i\otimes j+\frac{1}{2}i\otimes k-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}j\otimes i+\frac{1}{2}j^2-\frac{1}{2}j\otimes k$$

$$=\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i=-j-k$$

şeklindedir. Aynı örneği

$$R(u)=\langle u,n\rangle n+\left(u-\langle u,n\rangle\right)\cos\theta+(n\times u)\sin\theta$$

formülü ile bulalım.

$$\langle u,n\rangle=\left\langle(1,0,1),\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}=0 \text{ ve } n\times u=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-2}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

formülünde yerine yazarsak

$$R(u)=0.n+(u-0.n)\cos 120+\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-2}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\sin 120$$

$$=(0,0,0)+(1,0,1)\cos 120+\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-2}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\sin 120$$

$$=(1,0,1)\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-2}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}=(0,-1,-1)$$

bulunur.

$\psi: Q\times Q\to SO(4)$ dönüşümünün diferensiyeli

$$\psi_*: T_P(Q\times Q)\to T_{\psi(p)}(SO(4))$$

ile tanımlanır. Burada $T_{\psi(p)}(SO(4))$ teğet uzayı her $\psi(p)$ noktasında 4×4 tipindeki anti-simetrik matrisler kümesi olan $so(4)$ kümesidir. Böylece $\psi_*: T_p(Q\times Q)\to so(4)$ ile verilir.

Teorem 4.1.3. $\psi_*: T_p(Q\times Q)\to so(4)$ dönüşümü konformal (açıları koruyan) bir dönüşümdür.

İspat. $X=\begin{bmatrix}\alpha_1 & -\bar{\beta}_1\\ \beta_1 & \bar{\alpha}_1\end{bmatrix}\in Q$ ve $Y=\begin{bmatrix}\alpha_2 & -\bar{\beta}_2\\ \beta_2 & \bar{\alpha}_2\end{bmatrix}\in Q$, $\alpha_1=p_1+ip_2$, $\beta_1=p_3+ip_4$, $\alpha_2=p_5+ip_6$, $\beta_2=p_7+ip_8$ olmak üzere

$$p=(x,y)\in Q\times Q=(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6,p_7,p_8)$$

noktası alınırsa $T_p(Q\times Q)\subset\mathbb{R}^8$ ve $boyT_p(Q\times Q)=6$ olur.

$\forall X,Y\in T_p(Q\times Q)$ için $T_p(Q\times Q)$'da $\{x_i\}_{i\in\{1,\dots,6\}}$ ve $\{y_i\}_{i\in\{1,\dots,6\}}$ koordinat fonksiyonları seçilebilir. Bu durumda

$$(\psi_*)_p(X)=\begin{bmatrix}0 & x_1 & x_2 & x_3\\ -x_1 & 0 & x_4 & x_5\\ -x_2 & -x_4 & 0 & x_6\\ -x_3 & -x_5 & -x_6 & 0\end{bmatrix}\quad\text{ve}\quad(\psi_*)_p(Y)=\begin{bmatrix}0 & y_1 & y_2 & y_3\\ -y_1 & 0 & y_4 & y_5\\ -y_2 & -y_4 & 0 & y_6\\ -y_3 & -y_5 & -y_6 & 0\end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\langle(\psi_*)_p(X),(\psi_*)_p(Y)\rangle=iz\left(\left[(\psi_*)_p(X)\right]\left[(\psi_*)_p(Y)\right]^T\right)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}iz\left(\left[(\psi_*)_p(X)\right]\left[(\psi_*)_p(Y)\right]^T\right)&=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_1y_1+x_4y_4+x_5y_5\\&\quad+x_2y_2+x_4y_4+x_6y_6+x_3y_3+x_5y_5+x_6y_6\\&=2\langle X,Y\rangle\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ψ_* dönüşümünün konformal bir dönüşüm olduğunu gösterir.

Örnek 4.1.2. $u=(1,0,1)$ vektörünün $s=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ vektörü etrafında 120° döndürülmesiyle elde edilen vektörü Örnek 4.1.1 de $(0,-1,-1)$ olarak elde etmiştik. $(\psi_*)_p(X)$ ile $(\psi_*)_p(Y)$ arasındaki açının 120° olduğunu gösterelim.

Burada $X,Y\in T_p(Q\times Q)$ olmak üzere $X=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=(1,0,1,1,0,1)$ ve $Y=(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6)=(0,-1,-1,0,-1,-1)$ vektörlerini alalım.

Bu durumda

$$(\psi_*)_p(X)=\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_2 & -x_4 & 0 & x_6 \\ -x_3 & -x_5 & -x_6 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$(\psi_*)_p(Y)=\begin{bmatrix} 0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ -y_1 & 0 & y_4 & y_5 \\ -y_2 & -y_4 & 0 & y_6 \\ -y_3 & -y_5 & -y_6 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $(\psi_*)_p(X)$ ve $(\psi_*)_p(Y)$ arasındaki açıyı hesaplamak için

$$\cos\theta=\frac{\left\langle (\psi_*)_p(X),(\psi_*)_p(Y)\right\rangle}{\left\|(\psi_*)_p(X)\right\|\left\|(\psi_*)_p(Y)\right\|}$$

$$=\frac{\left\langle (\psi_*)_p(X),(\psi_*)_p(Y)\right\rangle}{\sqrt{\left\langle (\psi_*)_p(X),(\psi_*)_p(X)\right\rangle}\sqrt{\left\langle (\psi_*)_p(Y),(\psi_*)_p(Y)\right\rangle}}$$

$$=\frac{iz\left(\left[(\psi_*)_p(X)\right]\left[(\psi_*)_p(Y)\right]^T\right)}{\sqrt{iz\left(\left[(\psi_*)_p(X)\right]\left[(\psi_*)_p(X)\right]^T\right)}\sqrt{iz\left(\left[(\psi_*)_p(Y)\right]\left[(\psi_*)_p(Y)\right]^T\right)}}$$

formülü kullanılabilir. Burada

$$\left[(\psi_*)_p(X)\right]\left[(\psi_*)_p(Y)\right]^T=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$iz\left(\left[(\psi_*)_p(X)\right]\left[(\psi_*)_p(Y)\right]^T\right)=-4$$

$$\left[(\psi_*)_p(X)\right]\left[(\psi_*)_p(X)\right]^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$iz\left(\left[(\psi_*)_p(X)\right]\left[(\psi_*)_p(X)\right]^T\right) = 8$$

$$\left[(\psi_*)_p(Y)\right]\left[(\psi_*)_p(Y)\right]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$iz\left[(\psi_*)_p(Y)\right]\left[(\psi_*)_p(Y)\right]^T = 8$$

olarak bulunur. Bulunan değerler formülde yerine yazılırsa

$$\cos\theta = \frac{-4}{\sqrt{8}\sqrt{8}} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = 120^\circ$$

elde edilir.

Böylece $(\psi_*)_p(X)$ ile $(\psi_*)_p(Y)$ arasındaki açının 120° olduğunu göstermiş oluruz.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında kuaterniyonlar yardımıyla dönme hareketi ifade edilmiş ve bu dönüşümün diferensiyeli incelenmiştir.

Ayrıca kuaterniyonun tersini sağ öteleyip ardından sol öteleme yapmanın dönmeyi verdiği belirtilmiştir. Son olarak kuaterniyonlarla dönmeyi ifade eden dönüşümün diferensiyelinin konformal bir dönüşüm olduğu ispatlanmıştır.

Bu tez çalışması ile kuaterniyonlar yardımıyla tanımlanan dönme hareketinin diferensiyelinin çeşitli geometrik özellikleri incelenebilir ve Minkowski uzaylarında tezde elde edilen sonuçlar karşılaştırılabilirdir.

KAYNAKLAR

ARVANİTOYEORGOS, A., 2003. An introduction to Lie groups and the geometry of homogeneous spaces(vol. 22). American Mathematical Society, USA, 40s.

BAIRD,P. and WOOD, J.C., 2003. Harmonic Morphisms Between Riemann Manifolds. Clarendon Press, Oxford, 40-45.

BRENNER, J.L., 1951. Matrices of Quaternions. Pacific Journal of Mathematics,1(3): 330-334.

BÄR, C., 2010. Elementare Differential Geometrie. De Gruyter, Berlin, 147s.

DUİSTERMAAT, J.J. and KOLK, J.A., 2000.Lie Groups.Springer Science and Business Media,New York,355.

FARENİCK,D.R.and Pidkowich, B.A.F., 2003. The Spectral Theorem in Quaternions.Linear Algebra and Its Applications, 75-102.

GARRETT,P., 2014. Conformal mapping. http://www.math.umn.edu/garrett/m/complex/07 conformal mapping.pdf].

GİRARD, P.R., 1984. The Quaternion Group and Modern Physics. European Journal of Physics, 5(1): 25-32.

HACISALİHOĞLU, H. H., 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, No: 2, Ankara, 338s.

HACISALİHOĞLU, H. H., 1983. Diferensiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Yayınları, No: Malatya, 227s.

HACISALİHOĞLU, H. H., 2000. Lineer Cebir. Hacısalihoğlu Yayınları, Ankara,587-.601.

HALL,B.,2015.Lie Groups,Lie Algebras and Representations An Elementary Introduction.Springer Science and Business Media,New York,449.

JANSON, S., 2017. Quaternıons and Rotation. Upsala University Lecture Notes, Sweden.

JİA, Y. B., 2017. Quaternion and Rotation. Lowa State University Computer Science Catalog, 477/577, 1-12.

LEE,J.M.,2003.Introduction to Smooth Manifolds. Springer Science and Business Media,New York,494.

ÖZDEMİR, M., 2017. Mühendisler İçin Lineer Cebir, Altın Nokta Yayınevi, İzmir, 459-466.

SABUNCUOĞLU, A., 2011. Lineer Cebir. Nobel Yayınevi, Ankara, 635-638.

ŞAHİN, B., 2012. Manifoldların Diferensiyel Geometrisi. Nobel Yayınevi, Ankara, 104-122.

TAŞÇI, D., 2007. Soyut Cebir, Alp Yayınevi, Ankara, 169-191.

VİCCİ, L., 2001. Quaternions and Rotations in 3-Space: The Algebra and its Geometric Interpretation. University of North Carolina at Chapel Hill, TR01-014, Department of Computer Science.

WARD, J.P., 1997. Quaternions and Cayley Numbers Algebra and Applications. Kluwer Academic Publishers, London, 54-102.

WEİGMANN, N. A., 1955. Some Theorems on Matrices With Real Quaternion Elements. Canadian Journal of Mathematics, 7(3): 191-201.

WEINER, J. L., and Wilkens, G.R., 2005. Quaternions and Rotations in E^4.Mathematical Association of America, 112(1): 69-76.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Arzu ALTINOK
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Sarıkamış/03.09.1991
Telefon	**:**	0 536 729 49 89
Faks	**:**	
e-mail	**:**	arzuuu.altnok@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Seyhan Rotary Anadolu Lisesi, Seyhan, Adana	2009
Üniversite	:	Necmettin Erbakan Üniversitesi, Konya	2014
TezsizYüksek Lisans	:	Necmettin Erbakan Üniversitesi, Konya	2014
Yüksek lisans	:	Harran Üniversitesi, Şanlıurfa	2019

İŞ DENEYİMLERİ

YIL	**KURUM**	**GÖREVİ**
2014-2015	Adana Çok Programlı Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni
2017-2018	Adana Yemişli Ortaokulu	Matematik Öğretmeni
2018-Halen	Şanlıurfa Örencik Bakır Kaçar Ortaokulu	Matematik Öğretmeni