KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ TÜREV İÇEREN DİFÜZYON DENKLEMİNİN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ METODU İLE KAYNAK FONKSİYONUNUN BULUNMASI

SİMGE DEDEOĞLU PINAR

KOCAELİ 2019

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ TÜREV İÇEREN DİFÜZYON DENKLEMİNİN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ METODU İLE KAYNAK FONKSİYONUNUN BULUNMASI

SİMGE DEDEOĞLU PINAR

Prof. Dr. Vildan GÜLKAÇ		
Danışman,	**Kocaeli Üniversitesi**	.....
Prof. Dr. Serdal PAMUK		
Jüri Üyesi,	**Kocaeli Üniversitesi**	.....
Prof. Dr. Şevket GÜR		
Jüri Üyesi,	**Sakarya Üniversitesi**	.....

Tezin Savunulduğu Tarih: 08.07.2019

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Kesirli mertebeden türev ve integral kavramları, uygulamalı bilimlerdeki birçok alanda ortaya çıkmaktadır. Bu sebeple son yıllarda kesirli diferansiyel denklemlere yönelik çalışmalar önemini korumaktadır.
Yüksek Lisans çalışmam boyunca tecrübelerinden faydalandığım, tez çalışmamın her aşamasında emeği olan, değerli yardımlarını esirgemeyen saygı değer hocam Prof. Dr. Vildan GÜLKAÇ' a ve tezin düzenlenmesinde bana yol gösteren Arş. Gör. Zuhal Elif KARA' ya teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca beni bu zorlu süreçte daima destekleyen aileme ve sevgili eşim Murat PINAR' a sonsuz teşekkür ederim.

Haziran -2019 Simge DEDEOĞLU PINAR

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR i
İÇİNDEKİLER ii
ŞEKİLLER DİZİNİ iv
TABLOLAR DİZİNİ vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ vii
ÖZET viii
ABSTRACT ix
GİRİŞ 1
1.MATEMATİKSEL ÖNBİLGİLER 3
1.1. Laplace Dönüşümü 3
1.1.1.Laplace dönüşümünün bazı özellikleri 5
1.1.1.1. Öteleme özelliği 5
1.1.1.2. Doğrusallık özelliği 6
1.1.1.3. Ölçek değiştirme özelliği 6
1.1.1.4. Türevin Laplace dönüşümü 6
1.1.1.5. İntegralin Laplace dönüşümü 6
1.1.2.Ters Laplace dönüşümü 10
1.1.3.Bazı özel fonksiyonlar 12
1.1.3.1.Birim basamak fonksiyonu (Heaviside birim fonksiyonu) 12
1.1.3.2.Gama fonksiyonu 13
1.1.3.2.1. Gama fonksiyonunun özellikleri 14
1.1.3.3.Dirac delta fonksiyonu 14
1.1.3.4.Hata fonksiyonu 15
1.1.4.Konvolüsyon integralleri 15
1.2. Kesirli Türev ve İntegrallerle İlgili Tanımlar 17
1.2.1.Riemann-Liouville kesirli integrali 17
1.2.2.Riemann-Liouville kesirli türev operatörü 17
1.2.3.Caputo kesirli türev operatörü 17
2. MODEL PROBLEM 19
2.1. f(x,t) Kaynak Fonksiyonun k. Dereceden Polinom Olduğu Durum 22
2.1.1. f sadece x'e bağlı bir polinom 22
2.1.2. f sadece t'ye bağlı bir polinom 24
2.2. f(x,t) Kaynak Fonksiyonunun Trigonometrik Fonksiyon Olduğu Durum 25
2.2.1. f sadece x'e bağlı trigonometrik bir fonksiyon 25
2.2.2. f sadece t değişkenine bağlı trigonometrik bir fonksiyon 26
2.3. f(x,t) Kaynak Fonksiyonunun Üstel Fonksiyon Olduğu Durum 27
2.3.1. f sadece x değişkenine bağlı üstel fonksiyon 27
2.3.1.1. α_1 karakteristik denklemin bir kökü değil ise 28
2.3.1.2. α_1 karakteristik denklemin basit bir kökü ise 29
2.3.1.3. α_1 karakteristik denklemin çift katlı kökü ise 30
2.3.2. f sadece t değişkenine bağlı üstel fonksiyon 31

2.3.2.1. α_1 karakteristik denklemin kökü değil ise 31
2.3.2.2. α_1 karakteristik denklemin basit bir kökü ise 32
2.3.2.3. α_1 karakteristik denklemin çift katlı kökü ise 33
2.4. f(x,t) Kaynak Fonksiyonunun k. Dereceden Polinom ile Trigonometrik Bir Fonksiyonun Çarpımı Biçiminde Ele Alındığı Durum 34
2.4.1. f sadece x değişkenine bağlı bir fonksiyon 34
2.4.2. f sadece t değişkenine bağlı fonksiyon 37
2.5. f(x,t) Kaynak Fonksiyonunun Üstel Bir Fonksiyon ile k. Dereceden Bir Polinomun Çarpımı Biçiminde Ele Alındığı Durum 38
2.5.1. f sadece x değişkenine bağlı fonksiyon 38
2.5.1.1. α_1 karakteristik denklemin bir kökü değil ise 38
2.5.1.2. α_1 karakteristik denklemin basit bir kökü ise 40
2.5.1.3. α_1 karakteristik denklemin çift katlı kökü ise 43
2.5.2. f sadece t değişkenine bağlı fonksiyon 45
2.5.2.1. α_1 karakteristik denklemin bir kökü değil ise 45
2.5.2.2. α_1 karakteristik denklemin basit bir kökü ise 46
2.5.2.3. α_1 karakteristik denklemin çift katlı kökü ise 47
2.6. f(x,t) Kaynak Fonksiyonunun Üstel ve Trigonometrik Fonksiyonların Çarpımı Şeklinde Yazıldığı Durum 48
2.6.1. f sadece x değişkenine bağlı fonksiyon 48
2.6.1.1. α_1 karakteristik denklemin kökü değil ise 48
2.6.1.2. α_1 karakteristik denklemin basit bir kökü ise 50
2.6.1.3. α_1 karakteristik denklemin çift katlı kökü ise 51
2.6.2. f sadece t değişkenine bağlı fonksiyon 53
2.6.2.1. α_1 karakteristik denklemin kökü değil ise 53
2.6.2.2. α_1 karakteristik denklemin basit bir kökü ise 54
2.6.2.3. α_1 karakteristik denklemin çift katlı kökü ise 55
2.7. f(x,t) Kaynak Fonksiyonunun k. Dereceden Polinom, Üstel ve Trigonometrik Fonksiyonların Çarpımı Biçiminde Yazıldığı Durum 56
2.7.1. f sadece x değişkenine bağlı fonksiyon 56
2.7.1.1. α_1 karakteristik denklemin kökü değil ise 56
2.7.1.2. α_1 karakteristik denklemin basit bir kökü ise 58
2.7.1.3. α_1 karakteristik denklemin çift katlı kökü ise 60
2.7.2. f sadece t değişkenine bağlı fonksiyon 62
2.7.2.1. α_1 karakteristik denklemin kökü değil ise 62
2.7.2.2. α_1 karakteristik denklemin basit bir kökü ise 63
2.7.2.3. α_1 karakteristik denklemin çift katlı kökü ise 65
3.SONUÇLAR VE ÖNERİLER 70
KAYNAKLAR 80
KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER 83
ÖZGEÇMİŞ 84

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Rezidü teoremi için bir kontör örneği.....11
Şekil 1.2. Pozitif ve negatif değerler için gama fonksiyonu grafiği.....14
Şekil 3.1. Kaynak fonksiyonunun x değişkenine bağlı polinom olduğu durumda α=1/2 için f(x) grafiği.....71
Şekil 3.2. Kaynak fonksiyonunun x değişkenine bağlı polinom olduğu durumda α=1 için f(x) grafiği.....71
Şekil 3.3. Kaynak fonksiyonunun t değişkenine bağlı polinom olduğu durumda α=1/2 için f(t) grafiği.....72
Şekil 3.4. Kaynak fonksiyonunun t değişkenine bağlı polinom olduğu durumda α=1 için f(t) grafiği.....72
Şekil 3.5. Kaynak fonksiyonunun t değişkenine bağlı trigonometrik olduğu durumda α=1 ve β=1 için f(t) grafiği.....73
Şekil 3.6. Kaynak fonksiyonunun x değişkenine bağlı üstel olduğu durumda α=1/2 için f(x) grafiği.....73
Şekil 3.7. Kaynak fonksiyonunun x değişkenine bağlı üstel olduğu durumda α=1 için f(x) grafiği.....74
Şekil 3.8. Kaynak fonksiyonunun x değişkenine bağlı polinom ve üstel fonksiyonun çarpımı olduğu durumda α=1/2 için f(x) grafiği.....74
Şekil 3.9. Kaynak fonksiyonunun x değişkenine bağlı polinom ve üstel fonksiyonun çarpımı olduğu durumda α=1 için f(x) grafiği.....75
Şekil 3.10. Kaynak fonksiyonunun x değişkenine bağlı polinom olduğu durumda α=1/2 için u(x,t) grafiği.....75
Şekil 3.11. Kaynak fonksiyonunun x değişkenine bağlı polinom olduğu durumda α=1 için u(x,t) grafiği.....76
Şekil 3.12. Kaynak fonksiyonunun t değişkenine bağlı polinom olduğu durumda α=1 için u(x,t) grafiği..... 76
Şekil 3.13. Kaynak fonksiyonunun t değişkenine bağlı polinom olduğu durumda α=1/2 için u(x,t) grafiği.....77
Şekil 3.14. Kaynak fonksiyonunun x değişkenine bağlı trigonometrik olduğu durumda α=1, β=1 için u(x, t) grafiği.....77
Şekil 3.15. Kaynak fonksiyonunun x değişkenine bağlı trigonometrik olduğu durumda α=1/2, β=1 için u(x, t) grafiği.....78

Şekil 3.16. Kaynak fonksiyonunun x değişkenine bağlı trigonometrik olduğu durumda α=1/2, β=2 için u(x, t) grafiği.....78
Şekil 3.17. Kaynak fonksiyonunun x değişkenine bağlı polinom ve trigonometrik fonksiyonların çarpımı olduğu durumda α=1/2, β=2 için u(x, t) grafiği.....79

TABLOLAR DİZİNİ

Tablo 1.1. Yaygın bazı fonksiyonlar için Laplace dönüşüm tablosu.....8

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

${}_aD_t^\alpha f(t)$	:	Riemann-Liouville kesirli türevi
${}_a^C D_t^\alpha f(t)$	:	Caputo kesirli türevi
$erf(t)$	:	Hata fonksiyonu
$f * g$	:	Konvolüsyon integrali
$f(x,t)$	:	Kaynak fonksiyonu
$J_t^0 f(t)$	:	Özdeşik operatörü
${}_aJ_t^\alpha f(t)$	:	Riemann-Liouville kesirli integrali
L	:	Laplace Dönüşümü
L^{-1}	:	Ters Laplace dönüşümü
$\Gamma(z)$	:	Gama fonksiyonu
$\delta(x)$	:	Dirac delta fonksiyonu
$U(t-t_0)$	:	Birim basamak fonksiyonu

KESİRLİ TÜREV İÇEREN DİFÜZYON DENKLEMİNİN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ METODU İLE KAYNAK FONKSİYONUNUN BULUNMASI

ÖZET

Bu çalışmada kesir türevli bir ters probleme Laplace Dönüşüm Metodu uygulanmıştır. Bu metot, daha önce uygulamalı matematiğin birçok alanında kullanılmış etkili bir yöntemdir. Yazar, mevcut probleme Laplace Dönüşümü Metodunu uygulamış ve problemin kaynak fonksiyonunu çeşitli fonksiyon türleri için incelemiştir. Elde edilen sonuçlar, kullanılan metodun probleme başarılı bir şekilde uygulanabileceğini göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: Difüzyon Problemi, Kaynak Fonksiyonu, Kesirli Türev, Laplace Dönüşümü, Ters Problem.

FINDING SOURCE FUNCTION OF DIFFUSION PROBLEM WITH TIME-FRACTIONAL DERIVATIVE BY LAPLACE TRANSFORM METHOD

ABSTRACT

In this study, Laplace Transform Method is applied to a fractional inverse problem. This method is an effective method which has been used in many fields of applied mathematics before. Author applied the Laplace Transform Method to existing problem and examined the source function of the problem for various types of functions. The results show that the method can be applied successfully to the problem.

Keywords: Diffusion Problem, Source Function, Time-Fractional Derivative, Laplace Transformation, Invers Problem.

GİRİŞ

Kesirli mertebeden türev ve integral, klasik türev ve integral kavramlarının genelleştirilmiş halidir. İçerisinde kesirli mertebeden türev barındıran diferansiyel denklemlere kesirli mertebeden diferansiyel denklemler adı verilir[1]. Tamsayı mertebeden türev ve integral kavramları kadar eski bir kavramdır. Kesirli türev ifadesi 1695 yılında Leibnitz'in L'Hospital'e yönelttiği "Tamsayı basamaktan türevler kesirli basamaktan türevlere genişletilebilir mi?" sorusu ile ilk kez ortaya çıkmıştır[2-5]. Kesirli mertebeden türevler fiziksel süreçlere uygulandığında tamsayı mertebeden türevlere göre daha iyi sonuç verdiği görülmüştür[6]. Liouville, Riemann, Weyl, Lagrange, Laplace, Fourier, Euler ve Abel gibi birçok matematikçi bu konu üzerinde çalışmış ve Oliver Heaviside tarafından da mühendislik alanına taşınmıştır[7].

Kesirli türev için verilmiş tanımlardan bazıları; Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov, Weyl, Riesz kesirli türevleridir. Bazı çalışmalarda belirli şartlar sağlandığında verilen bu tanımların eşdeğer olduğu gösterilmiştir. Kesirli türev için verilen bu tanımlardan problemin çeşidine göre en uygunu seçilir ve böylelikle problemin en iyi çözümü elde edilir. Ancak bazı çalışmalara göre de kesirli diferansiyel denklemlerin anlaşılması oldukça güçtür. Dolayısıyla tamsayı kuvvetli diferansiyellere göre daha doğru ya da kesin olduğunu söylemek doğru olmaz [8].

Genel olarak türev ve integral doğal ve yapay sistemlerin çalışma kurallarını anlamada ve teknolojide çok önemli bir yere sahiptir. Adından da anlaşılacağı gibi kesirli diferansiyel matematiksel analizin önemli bir kolu olup türev ve integralin tamsayı olmayan mertebelerle ifade edilmiş şeklidir. Kesirli diferansiyel, diferansiyel hesap kadar eskidir ve Leibniz ve Newton'un diferansiyel hesaplama tekniğini bulmalarına kadar uzanır[7].

Doğadaki ve uygulamalı bilimlerdeki birçok olay lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerle tanımlanır.

Örneğin; sönümleme yasası, akışkanlar mekaniği, ısı transferi ve difüzyon süreçleri gibi konular kesirli analizle daha iyi ifade edilebilir [9].

Bunun yanısıra; uygulamalı matematik, mühendislik, fizik, finans, kimya, biyoloji, biyomühendislik, elektromanyetik, hidroloji, sürekli ortamlar mekaniği gibi alanlarda pek çok sistem ve süreç kesirli mertebeden türevler kullanılarak gerçeğe daha yakın modellenebildiğinden dolayı kesirli mertebeden diferansiyel denklemler bu tür bilim alanlarında sıklıkla karşımıza çıkar[10-12]. Aynı zamanda fiziksel ve mekanik modelleme problemlerini çözmekte oldukça etkilidir.

Bu alanda yapılmış çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Bunlardan bazıları; Genelleştirilmiş Kesirli Analiz ve Uygulamaları [13], Kesirli Osilatör ve Mittag-Leffler Fonksiyonları [14], Kesir Dereceli Diferensiyel Denklemler [15], Riemann-Liouville Kesirli Analizi [16], Kesirli Analiz ve Kesir Dereceli Diferensiyel Denklemler için Nümerik Yöntemler [17], Kesirli Türev Operatörü Kullanılarak Elde Edilmiş Bir Boyutlu Viskoplastisite Modeli [18].

Son yıllarda kesirli adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerine yönelik çalışmalar artmıştır[19]. Bu kesirli adi ve kısmi türevlerin birçoğunun analitik çözümleri bulunamadığından bunun yerine yaklaşık çözümlerin bulunması için farklı ve etkili birçok yöntem geliştirilmiştir[20]. Örneğin; Dalgacık Yöntemi, Fourier Dönüşümü, Homotopi Pertürbasyon Metodu, Adomian Ayırma Metodu, Sonlu Fark Yöntemleri, Varyasyonel İterasyon Metodu bunlardan bazılarıdır[21].

Bu çalışmada ise kesirli türevli bir difüzyon denklemi ele alınmış ve Laplace Dönüşüm Metodu uygulanarak homojen ve özel çözümleri elde edilmiştir.

1. MATEMATİKSEL ÖNBİLGİLER

Laplace dönüşümü ve bazı özel fonksiyonlar kesirli analizi anlamada büyük önem taşır. Bu sebeple kesirli türev hesabının tanımlarını ve kullanımlarını anlamak için gerekli olan bazı matematiksel tanımlar aşağıda verilmiştir.

1.1. Laplace Dönüşümü

Fransız matematikçi ve gökbilimci Pierre Simon Laplace tarafından bulunmuş ve matematiğin birçok alanında kullanılmıştır. Son yıllarda matematiğin önemli bir parçası haline gelen Laplace dönüşümü mühendisler, matematikçiler, fizikçiler ve diğer bilim adamları tarafından oldukça sık kullanılmaktadır. Kendisine teorik anlamda ilgi duyulması ve çok sayıda problemin çözümü için kolay ve etkili bir araç olması, bu çözümün bir çok bilim adamı tarafından tercih edilmesinin başlıca nedenleridir[22]. Sabit ve değişken katsayılı diferansiyel denklemler, adi ve kısmi diferansiyel denklemler, fark denklemleri ve integral denklemlerine uygulanabildiği gibi aynı zamanda havalandırma, iklimlendirme, nükleer fizikte radyoaktif bozunma da bu dönüşümle yapılan çalışmalardan bazılarıdır[23,24].

Lineer kesirli diferansiyel denklemlerin analitik çözümünü elde etmek için en etkili yöntem Laplace dönüşümüdür[21]. Reel sayılarda tanımlı adi diferansiyel denklemlerin kompleks düzlemdeki cebirsel denklemlere dönüşmesi işlemi Laplace dönüşümünün en temel kullanımıdır ve böylelikle çözüm çok daha kolay hesaplanır. Daha sonra cebirsel denklemden elde edilen çözümün ise ters Laplace dönüşümü alınarak adi diferansiyel denklem için bir çözüm elde edilir. n. mertebeden lineer diferansiyel denklemin eşit olduğu fonksiyon sürekli ise diferansiyel denklem çözümü yapılabilir. Ancak süreksiz ise sadece Laplace dönüşümü ile çözülür[25]. Aşağıda Laplace dönüşümü ile ilgili bazı tanım ve teoremler verilmiştir;

Tanım: $f(t)$, $[0,\infty)$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun;

$$F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}.f(t).dt \qquad (1.1)$$

Denklem (1.1) integrali mevcut veya yakınsak ise F(s)'ye f(t)'nin Laplace dönüşümü denir ve L{f(t)}=F(s) ile gösterilir. F(s) fonksiyonuna f(t)'nin görüntüsü, f(t) 'ye ise F(s)'nin başlangıç fonksiyonu veya ters Laplace dönüşümü denir. Her fonksiyonun Laplace dönüşümü mevcut değildir. Laplace dönüşümünün varlığını gösterebilmek için bazı koşulların sağlaması gerekir. Bu koşullar parçalı süreklilik ve üstel mertebeden sınırlı fonksiyon tanımlarıdır.

Tanım: Sonlu sayıda noktada $\lim_{t\to t_0^-} f(t) \neq \lim_{t\to t_0^+} f(t)$ süreksizliğine sahip f(t) fonksiyonuna t_0 noktasında sıçrama süreksizliği vardır denir. Eğer f fonksiyonunun $\lim_{t\to 0^+} f(t)$ limiti varsa ve sıçrama süreksizliğine sahip olduğu sonlu sayıda nokta hariç $[0,\infty)$ aralığındaki her noktada sürekli ise bu f fonksiyonuna parçalı süreklidir denir.

Tanım: f(t) , $[0,\infty)$ aralığında tanımlı olsun.

$|f(t)| \leq M.e^{rt}$ $(r\geq 0)$ olacak şekilde bir M>0 sayısı varsa f(t) 'ye $[0,\infty)$ aralığında r. dereceden sınırlı fonksiyon (üstel mertebeden sınırlı) denir. Polinomlar, üstel fonksiyonlar, sin ve cos trigonometrik fonksiyonları üstel mertebeden sınırlı olmasına rağmen $f(t)=e^{t^2}$ fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında üstel mertebeden değildir.

Verilen tanımlar yardımıyla aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem (Laplace dönüşümünün varlığı): f(t) , $[0,\infty)$ aralığında parçalı sürekli ve üstel mertebeden sınırlı olsun. O zaman Denklem (1.2) elde edilir;

$$F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}.f(t).dt \qquad (1.2)$$

İspat : Denklem (1.2)'de her iki tarafın mutlak değeri alınır.

$$|F(s)| \leq \int_0^{\infty} |e^{-st}|.|f(t)|.dt \qquad (1.3)$$

f(t) üstel mertebeden sınırlı olduğundan;

$$\leq \int_0^{\infty} e^{-st}.M.e^{rt}.dt \qquad (1.4)$$

yazılabilir.

$$\leq M.\int_0^{\infty} e^{t(r-s)}.dt \tag{1.5}$$

$$\leq \lim_{l\to\infty} M.\left(\frac{e^{l(r-s)}}{r-s}-\frac{1}{r-s}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{s-r} & , r<s\\ \infty & , r>s\end{cases} \tag{1.6}$$

$\int_0^{\infty} e^{-st}.f(t).dt$ integralinin $r<s$ için yakınsak olduğu açıktır.

$$\leq M.\frac{1}{s-r} \tag{1.7}$$

Denklem (1.7) bulunur. Bulunan bu eşitlik $s\to\infty$ için limit hesabı yapılırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem: Eğer f , $[0,\infty)$ aralığında parçalı sürekli ve üstel mertebeden sınırlı ise;

$$\lim_{s\to\infty} L\{f(x)\}=0 \tag{1.8}$$

Örnek: $f(t)=t$ $(t\geq 0)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü elde ediniz.

Çözüm: Laplace dönüşümünün tanımı gereğince aşağıdaki integrali yazabiliriz;

$$L\{t\}=\int_0^{\infty} e^{-st}\,t.dt=\lim_{m\to\infty}\int_0^{m} e^{-st}\,t.dt \tag{1.9}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left[-\frac{t.e^{-st}}{s}-\frac{e^{-st}}{s^2}\right]_0^m=\lim_{m\to\infty}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-sm}}{s^2}(sm+1)\right] \tag{1.10}$$

Denklem (1.10)'daki gibi hesaplanır. Böylelikle sonuç Denklem (1.11)'deki gibi elde edilir;

$$L\{t\}=\frac{1}{s^2}\quad,\ (s>0) \tag{1.11}$$

1.1.1. Laplace dönüşümünün bazı özellikleri

1.1.1.1. Öteleme özelliği

Öteleme özelliği Denklem (1.12)'deki gibidir;

$$L\{e^{s_0 t}f(t)\}=\int_0^{\infty} e^{-st}.e^{s_0 t}f(t).dt=\int_0^{\infty} e^{-t(s-s_0)}f(t).dt=F(s-s_0) \tag{1.12}$$

Bu özellik görüntü fonksiyonunun ötelenmesi olarak da adlandırılır.

1.1.1.2. Doğrusallık özelliği

$c_1, c_2 \in R$ ve $f_1(t), f_2(t)$ Laplace dönüşümü mevcut iki fonksiyon olmak üzere;

$$L\{c_1.f_1(t)+c_2.f_2(t)\}=c_1.L\{f_1(t)\}+c_2.L\{f_2(t)\} \quad (1.13)$$

Denklem (1.13)'deki gibi ifade edilir.

1.1.1.3. Ölçek değiştirme özelliği

Ölçek değiştirme özelliği $L\{f(t)\}=F(s)$ için;

$$L\{f(at)\}=\frac{1}{a}.F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (1.14)$$

Denklem (1.14)'teki gibi tanımlanır.

Örnek: Ölçek değiştirme özelliğinden;

$$L\{\sin 5t\}=\frac{1}{5}.\frac{1}{1+\left(\frac{s}{5}\right)^2}=\frac{5}{25+s^2} \quad (1.15)$$

Denklem (1.15) bulunur.

1.1.1.4. Türevin Laplace dönüşümü

$f(t)$, $[0,\infty)$ aralığında sürekli ve $f'(t)$ aynı aralıkta parçalı sürekli olsun.
$L\{f(t)\}=F(s)$ olmak üzere türevin Laplace dönüşümü Denklem (1.16)'daki gibi gösterilebilir;

$$L\left\{f^{(n)}(t)\right\}=s^n.F(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)\ldots-f^{(n-1)}(0) \quad (1.16)$$

1.1.1.5. İntegralin Laplace dönüşümü

Teorem: Laplace dönüşümünün tanımından yola çıkarak Denklem (1.17) ifadesi yazılabilir;

$$L\left\{\int_0^t f(x)dx\right\}=\frac{F(s)}{s} \quad (1.17)$$

İspat: İntegralin Laplace dönüşümünü hesaplayabilmek için Denklem (1.18) ifadesini ele alalım;

$$F(t)=\int_0^t f(x)dx \tag{1.18}$$

Denklem (1.18)'de her iki tarafın türevi alınırsa Denklem (1.19) elde edilir;

$$F'(t)=f(t) \tag{1.19}$$

Türevin Laplace dönüşümü özelliğinden;

$$L\{F'(t)\}=s.L\{F(t)\}-F(0) \tag{1.20}$$

Denklem (1.20) elde edilir. Denklem (1.18)'de x=0 yazılırsa;

$$F(0)=0 \tag{1.21}$$

Denklem (1.21) bulunur ve bulunan bu eşitlik Denklem (1.20)'de yazılırsa;

$$L\{f(t)\}=s.L\{F(t)\} \tag{1.22}$$

Denklem (1.22) elde edilir. Denklem (1.18), Denklem (1.22)'de yerine yazıldığında Denklem (1.23) bulunur;

$$L\{f(t)\}=s.L\left\{\int_0^t f(x)dx\right\} \tag{1.23}$$

Denklem (1.23)'ün her iki yanı s'ye bölünürse;

$$L\left\{\int_0^t f(x)dx\right\}=\frac{L\{f(t)\}}{s} \tag{1.24}$$

Denklem (1.24) elde edilir.

Örnek: $f(t)=3.\sin 2t+5.e^{-2t}$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü hesaplayınız.

Çözüm: Doğrusallık özelliğinden;

$$L\{3.\sin 2t+5.e^{-2t}\}=3.L\{\sin 2t\}+5.L\{e^{-2t}\}=3.\frac{2}{s^2+4}+5.\frac{1}{s+2} \quad ,s>-2 \tag{1.25}$$

Denklem (1.25) elde edilir.

Örnek: f(t)=sinhat fonksiyonunun Laplace dönüşümünü hesaplayınız.

Çözüm:

$L\{\sinh at\}=L\left\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right\}$ olarak yazılsın.

Lineerlik özelliğinden;

$$=\frac{1}{2}L\{e^{at}\}-\frac{1}{2}L\{e^{-at}\} \tag{1.26}$$

Denklem (1.26) elde edilir. Laplace dönüşümünde öteleme özelliği kullanılarak Denklem (1.27) hesaplanır;

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}\right\}=\frac{a}{s^2-a^2} \tag{1.27}$$

Tablo 1.1. Yaygın bazı fonksiyonlar için Laplace dönüşüm tablosu

$f(t)$	$F(s)$
$C_1 f(t) + C_2 g(t)$	$C_1 F(s) + C_2 G(s)$
$e^{kt} f(t)$	$F(s-k)$
$f(kt)$	$\frac{1}{k} F\left(\frac{s}{k}\right)$
$tf(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
$\frac{1}{t} f(t)$	$\int_s^\infty F(s)ds$
$\int_0^t f(f^t)dt$	$\frac{1}{s} F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
$t^a,\ a > -1$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
$t^{-1/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$
$t^n,\ n = 1,2,3,....$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$t^n e^{at},\ n = 1,2,3,....$	$\frac{n!}{(s-k)^{n+1}}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$e^{kt} \sin at$	$\frac{a}{(s-k)^2+a^2}$
$t \sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$

Tablo 1.1.(Devam) Yaygın bazı fonksiyonlar için Laplace dönüşüm tablosu

$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$e^{kt}\cos at$	$\frac{s-k}{(s-k)^2+a^2}$
$t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$u(t-t_0)$	$\frac{e^{-t_0 s}}{s}$
$u(t-t_0)f(t-t_0)$	$e^{-t_0 s}F(s)$
$\delta(t-t_0)$	$e^{-t_0 s}$
$f(t)$, p periyotlu fonksiyon	$\frac{1}{1-e^{-ps}}\int_0^p e^{-st}f(t)dt$
$f'(t)$	$sF(s)-sf(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$

Örnek: $L\{e^{-2t}.\sin 7t\}$ dönüşümünü hesaplayınız.

Çözüm: Öteleme özelliği uygulanırsa;

$$L\{e^{-2t}.\sin 7t\}=\frac{7}{(s+2)^2+49}=\frac{7}{s^2+4s+53} \tag{1.28}$$

Denklem (1.28) bulunur.

Örnek: $\cos^2 t$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm:

$\cos^2 t=\frac{\cos 2t+1}{2}$ olduğundan $L\{\cos^2 t\}=L\left\{\frac{\cos 2t+1}{2}\right\}$ eşitliği sağlanır.

Öteleme özelliğinden;

$$L\left\{\frac{\cos 2t+1}{2}\right\}=\frac{1}{2}L\{\cos 2t\}+\frac{1}{2}L\{1\} \tag{1.29}$$

Denklem (1.29) elde edilir. Elde edilen eşitlik Laplace dönüşümü yardımıyla hesaplandığında Denklem (1.30) bulunur;

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{s}\right) \quad (s>0) \tag{1.30}$$

1.1.2. Ters Laplace dönüşümü

$L\{f(t)\}=F(s)$ Laplace formunun tersi $L^{-1}\{F(s)\}=f(t)$ şeklindedir. Ters Laplace dönüşümü integral formunda yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir;

$$F(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{-st}.F(s).ds \tag{1.31}$$

Bu integrasyon $x=\gamma$ doğrultusu boyunca S karmaşık düzleminde gerçekleştirilir.

Teorem: Bir F(s) fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü olan f(t), $0\leq t\leq M$ sonlu aralığında parçalı sürekli ve $t>m$ için üstel mertebeden sınırlı bir fonksiyon ise F(s)'nin ters Laplace dönüşümü;

$L^{-1}\{F(s)\}=f(t)$ olarak yazılır ve tektir.

Teorem(Rezidü Teoremi)

Analitik fonksiyonların kapalı bir eğri üstündeki çizgi integrallerinin bulunmasında rezidü teoremi kullanılır. Ayrıca sıklıkla reel integralleri bulmak için de kullanılır.

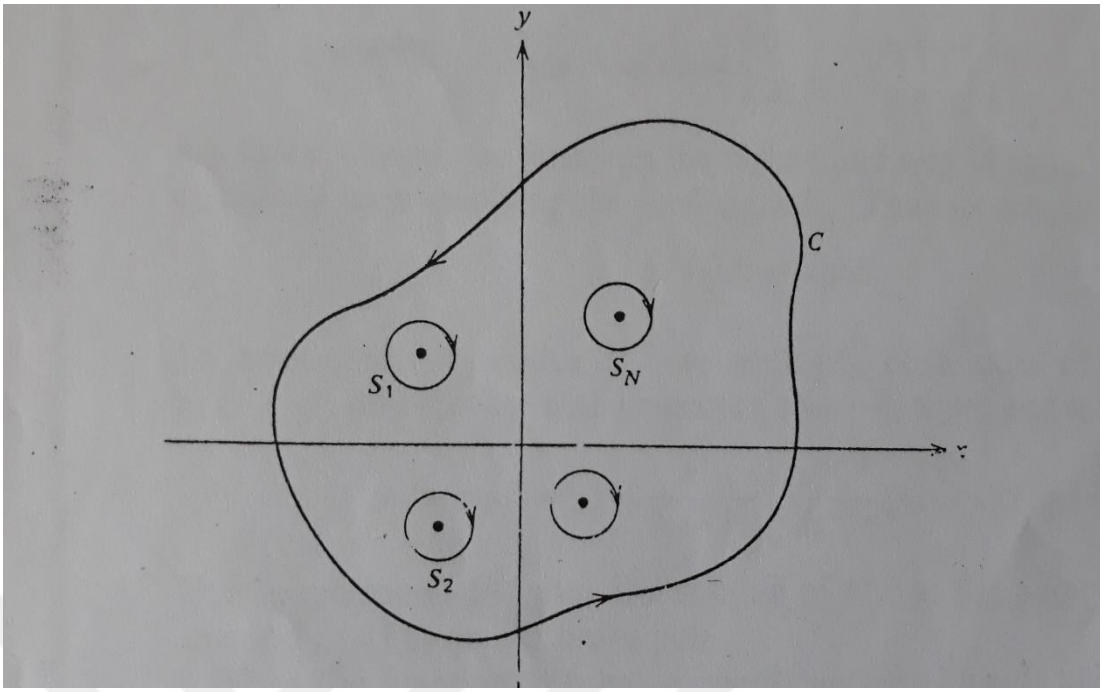
Rezidü teoreminin ifadesi aşağıda verilmiştir.

C , kapalı kompleks s bölgesinin kontörü, $F(s)$ fonksiyonu da bu bölgedeki kutup noktaları hariç (s_k, k=1,2,…N) kompleks değişkenli bir analitik fonksiyon olsun. $F(s)$ fonksiyonunun integrali, saat yönünün tersinde C kontörü etrafında kutuplardaki rezidüler toplamının $2\pi i$ katıdır.

Yani ;

$$\oint_C F(s).ds=2\pi i.\sum_{k=1}^{N} I(\gamma,s_k).res(f,s_k) \tag{1.32}$$

Denklem (1.32) ifadesinde $res(f,s_k)$, f'nin s_k'daki kalıntısı ve $I(\gamma,s_k)$, γ'nin s_k etrafındaki dolanım sayısıdır.



Şekil 1.1. Rezidü teoremi için bir kontör örneği[5]

Rezidünün Belirlenmesi

$F(s)$, s=a ayrık singülerlik noktası hariç kompleks s düzleminde analitik ve tek değerli olsun. $F(s)$ fonksiyonunu bu noktada Laurent serisine açalım;

$$F(s)=A_0+A_1(s-a)+A_2(s-a)^2+\ldots+\frac{B_1}{s-a}+\frac{B_2}{(s-a)^2}+\ldots+\frac{B_n}{(s-a)^n} \tag{1.33}$$

Denklem (1.33)'teki B_1 katsayısına s=a noktasındaki $F(s)$ 'nin rezidüsü denir ve res(s=a) ile gösterilir. Açılan serinin kapalı C kontörü etrafında integrali alınırsa;

$$\oint (s-a)^n.ds=\begin{cases}0 & ,n\neq -1\\ 2\pi i & ,n=-1\end{cases} \tag{1.34}$$

$$= 2\pi i.B_1 \tag{1.35}$$

Denklem (1.35) elde edilir

B_1 rezidüsünü bulmak için denklemin her iki tarafını $(s-a)^n$ ile çarpıp (n-1) kez diferansiyelini alırsak;

$$B_1=res(s=a)=\frac{1}{(n-1)!}.\left\{\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}.[(s-a)^n.F(s)]\right\} \tag{1.36}$$

Elde edilen Denklem (1.36), F(s) fonksiyonunun n. mertebeden rezidüsünü verir. Ters Laplace dönüşümünde f(t)'yi veren integral yapısı oldukça karmaşık olduğundan kısmi kesirlere ayırma yöntemi kullanılarak çözmesi zor olan ifadeler Laplace dönüşüm tablosunun bilinen ifadeleri haline dönüştürülür.

Örnek: $L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2-2s-8}\right\}$ ifadesinin sonucunu hesaplayınız.

Çözüm:

$L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2-2s-8}\right\}=L^{-1}\left\{e^{-2s}.\frac{1}{s^2-2s-8}\right\}$ biçiminde yazdıktan sonra $\frac{1}{s^2-2s-8}$ ifadesini basit kesirlere ayıralım.

$$\frac{1}{s^2-2s-8}=\frac{A}{s-4}+\frac{B}{s+2} \tag{1.37}$$

Denklem (1.37)'de payda eşitlenirse Denklem (1.38) hesaplanır;

$$\frac{1}{s^2-2s-8}=\frac{A(s+2)+B(s-4)}{(s-4)(s+2)} \tag{1.38}$$

Polinom eşitliğinden;

$\begin{matrix} A+B=0 \\ 2A-4B=1 \end{matrix}$ denklemlerinden $A=\frac{1}{6}$ $B=-\frac{1}{6}$ elde edilir.

Bulunan A ve B değerlerini problemde yerine yazarsak Denklem (1.39) elde edilir;

$$L^{-1}\left\{e^{-2s}.\left(\frac{1/6}{s-4}-\frac{1/6}{s+2}\right)\right\}=\frac{1}{6}.L^{-1}\left\{e^{-2s}.\frac{1}{s-4}\right\}-\frac{1}{6}.L^{-1}\left\{e^{-2s}.\frac{1}{s+2}\right\} \tag{1.39}$$

Denklem (1.39) Laplace dönüşümü yardımıyla çözülürse Denklem (1.40) bulunur;

$$=\frac{1}{6}u(t-2).e^{4(t-2)}-\frac{1}{6}u(t-2).e^{-2(t-2)} \tag{1.40}$$

1.1.3. Bazı özel fonksiyonlar

1.1.3.1. Birim basamak fonksiyonu (Heaviside birim fonksiyonu)

$t_0 \geq 0$ olmak üzere Denklem (1.41)'deki gibi tanımlanan fonksiyon birim basamak fonksiyonu olarak adlandırılır;

$$U(t-t_0)=\begin{cases} 0, & 0\le t<t_0 \\ 1, & t\ge t_0 \end{cases} \quad (1.41)$$

$t=t_0$ noktasında sıçrama süreksizliğine sahip en basit fonksiyondur. Birim basamak fonksiyonunun Laplace dönüşümü aşağıdaki gibi hesaplanabilir;

$$L\{U(t-t_0)\}=\int_0^{\infty} e^{-st}.U(t-t_0)dt=\int_0^{t_0} 0.e^{-st}dt+\int_{t_0}^{\infty} 1.e^{-st}=\frac{1}{s}.e^{-st_0} \quad (1.42)$$

Örnek: $f(t)= 4+2.U(t-2)+7.U(t-3)-5.U(t+1)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü hesaplayınız.

Çözüm: $L\{f(t)\}=\frac{4}{s}+2.\frac{e^{-2s}}{s}+7.\frac{e^{-3s}}{s}-5.\frac{e^{s}}{s}$ olarak hesaplanır.

Örnek: $F(s)=\frac{1}{s}-\frac{2}{s}.e^{-s}+4.\frac{e^{-3s}}{s}$ ise $f(t)=?$

Çözüm: $F(s)$ fonksiyonuna ters Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{2}{s}.e^{-s}+4.\frac{e^{-3s}}{s}\right\}=f(t)=1-2.u(t-1)+4.u(t-3) \quad (1.43)$$

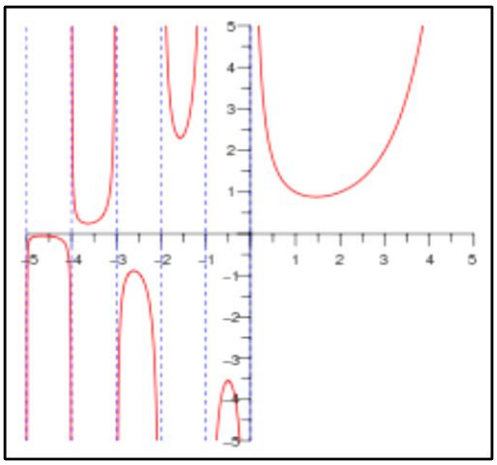
Denklem (1.43) elde edilir.

1.1.3.2. Gama fonksiyonu

Faktöriyel fonksiyonunun genelleştirilmiş halidir. Faktöriyel işlemi negatif olmayan bir n sayısından 1'e kadar olan bütün sayıların çarpımı şeklinde tanımlanır.
$n>0$ olmak üzere n sayısının karmaşık ve tamsayı olmayan reel sayılardan oluştuğu durumda ise Denklem (1.44) genelleştirilmiş integral ifadesi kullanılır;

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty} e^{-t}.t^{z-1}dt \quad , \ z\in C \quad (1.44)$$

Şekil 1, sıfır ve civarındaki gama fonksiyonunu gösterir. Gama fonksiyonu, negatif tamsayı değerlerinde sonsuza gitmesine rağmen tamsayı olmayan değerler olarak tanımlanır [26,27].



Şekil 1.2. Pozitif ve negatif değerler için gama fonksiyonu grafiği

1.1.3.2.1. Gama fonksiyonunun özellikleri

Gama fonksiyonun özellikleri Denklem (1.45)-(1.48)'de verilmiştir;

- $\Gamma(z+1)=z.\Gamma(z)$ (1.45)
- $\Gamma(n+1)=n!$, $n\in N$ (1.46)
- $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ (1.47)
- $L\{z^n\}=n!/s^{n+1}=\Gamma(n+1)/s^{n+1}$ (1.48)

Gama fonksiyonuyla ilgili bilinmesi gereken eşitliklerden bazıları birinci ve üçüncü özellikler yardımıyla Denklem (1.49)-(1.52)'de hesaplanmıştır;

$$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi} \quad (1.49)$$

$$\Gamma(3/2)=\Gamma(1+1/2)=1/2.\Gamma(1/2)=1/2.\sqrt{\pi} \quad (1.50)$$

$$\Gamma(5/2)=\Gamma(1+3/2)=3/2.\Gamma(3/2)=3/2.1/2.\sqrt{\pi} \quad (1.51)$$

$$\vdots$$

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\frac{1.3.5....(2n-1)}{2^n}.\sqrt{\pi} \quad (1.52)$$

1.1.3.3. Dirac delta fonksiyonu

x=0 hariç diğer tüm değerlerde sonucu 0 veren fonksiyondur. δ(x) ile gösterilir. Matematiksel olarak Dirac delta bir fonksiyon değil, bir dağılımdır. Daha öncelerde de bilinmesine rağmen Fizikçi Paul Dirac tarafından kıymete binen bu fonksiyonun en

geniş kullanım alanları kuantum mekaniği, Fourier Dönüşümü, optik ve dijital görüntülemedir[28]. Denklem (1.53)'te dirac delta fonksiyonları verilmiştir;

$$\delta(x)=0 \ ,x\neq 0 \quad \text{ve} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1 \tag{1.53}$$

Denklem (1.53)'teki ifadelere Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$L\{\delta(x)\}=\delta(s)=\int_{0}^{\infty} e^{-sx}\,\delta(x).dx=1 \tag{1.54}$$

Denklem (1.54) elde edilir.

1.1.3.4. Hata fonksiyonu

Sıklıkla difüzyon ve ısı denklemlerinin Laplace dönüşümü ile çözümünde kullanılır. Hata fonksiyonu Denklem (1.55)'deki gibi tanımlanır;

$$\text{erf}(t)=2/\sqrt{\pi}\,.\int_{0}^{t} e^{-u^2}\,du \quad , \quad -\infty<t<+\infty \tag{1.55}$$

Hata fonksiyonuna ait bazı özellikler Denklem (1.56) ve Denklem (1.57)'de verilmiştir;

- Hata fonksiyonu tek fonksiyondur. erf(-x)=-erf(x) şeklinde de gösterilebilir.
- $t=0$ için $\text{erf}(0)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}.\int_{0}^{0} e^{-u^2}\,du \quad =0$ (1.56)
- $t=\infty$ için $\text{erf}(\infty)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}.\int_{0}^{\infty} e^{-u^2}\,du \quad =1$ (1.57)

1.1.4. Konvolüsyon integralleri

Tanım: Laplace dönüşümü diferansiyel denklemlere uygulandığında, ters Laplace dönüşümü alınamayan fakat s'ye bağlı ve ters Laplace dönüşümü ile hesaplanabilen iki fonksiyonun çarpımı biçiminde yazılmış fonksiyonlarla karşılaşılır. Bu fonksiyonların ters Laplace dönüşümü konvolüsyon integralleri yardımıyla hesaplanır. Konvolüsyon işlemi ancak sistem zamana bağlı değilse ve lineerse uygulanabilir. Konvolüsyon integralleri Denklem (1.58)'deki gibi tanımlanır;

f(t) ve g(t), [0, ∞) aralığında parçalı sürekli olsun. f(t) ve g(t) fonksiyonlarının konvolüsyonu $f * g$ ile gösterilir ve Denklem (1.58)'deki gibidir;

$$(f*g)(t)=\int_{0}^{t} f(\omega).g(t-\omega).d\omega=\int_{0}^{t} f(t-\tau).g(\tau).d\tau \tag{1.58}$$

İspat: Konvolüsyon integrali Denklem (1.59)'da verilmiştir;

$$f*g= \int_0^t f(\omega).g(t-\omega).d\omega \tag{1.59}$$

$t-\omega=\tau$ olsun. Her iki tarafın türevi alınırsa $-d\omega=d\tau$ bulunur. Yapılan dönüşümler Denklem (1.59)'da yerlerine yazılırsa;

$$=- \int_t^0 f(t-\tau).g(\tau).d\tau= \int_0^t f(t-\tau).g(\tau).d\tau \tag{1.60}$$

Denklem (1.60) elde edilir. Bu integraller değişme ve birleşme özelliklerine sahiptir fakat etkisiz elemanları yoktur.

Örneğin;

$$(f(t)*1)= \int_0^t 1.f(t-\tau)d\tau= \int_0^t f(t-\tau)d\tau \tag{1.61}$$

$f(t)=\cos t$ alınırsa Denklem (1.61), Denklem (1.62) şeklinde yazılır;

$$(\cos t*1)= \int_0^t \cos(t-\tau)\, d\tau =-\sin 0+\sin t=\sin t \tag{1.62}$$

Şimdi konvolüsyon integralinin tanımı yardımıyla konvolüsyon teoremini ifade ve ispat edelim.

Teorem: f(t) ve g(t), [0, ∞) aralığında parçalı sürekli ve üstel mertebeden sınırlı fonksiyonlar olsunlar. f(t) ve g(t) fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri sırası ile F(s) ve G(s) olmak üzere konvolüsyon teoremi Denklem (1.63)'te verilmiştir;

$$L\{f*g\}=F(s).G(s) \tag{1.63}$$

İspat: Denklem (1.58)'e Laplace dönüşümü uygulanırsa Denklem (1.64) elde edilir;

$$L\{f*g\}=L\left\{\int_0^t f(\tau).g(t-\tau)d\tau\right\}= \int_0^\infty e^{-st}.\left[\int_0^t f(\tau).g(t-\tau)d\tau\right]dt \tag{1.64}$$

İntegrasyonların sırasını değiştirip $\omega=t-\tau$ dönüşümü yapılırsa Denklem (1.65)-(1.68) elde edilir;

$$= \int_0^\infty f(\tau).\left[\int_\tau^\infty e^{-st}.g(t-\tau).dt\right]d\tau \tag{1.65}$$

$$= \int_0^\infty f(\tau).\left[\int_0^\infty e^{-s(\tau+\omega)}.g(\omega)d\omega\right]d\tau \tag{1.66}$$

$$= \int_0^{\infty} f(\tau).e^{-s\tau}d\tau \,.\, \int_0^{\infty} g(\omega).e^{-s\omega}d\omega \tag{1.67}$$

$$=F(s).G(s) \tag{1.68}$$

Bu sonuç kullanılarak $(f*g)(t)=L^{-1}\{F(s).G(s)\}$ ters dönüşüm formülü elde edilmiş olur.

1.2. Kesirli Türev ve İntegrallerle İlgili Tanımlar

1.2.1. Riemann-Liouville kesirli integrali

Tanım: f fonksiyonunun α. mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali;

$${}_aJ_t^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau \qquad , \quad \alpha>0 \tag{1.69}$$

Denklem (1.69)'daki gibi tanımlanır.

Burada f fonksiyonu $(0,\infty)$ aralığında sürekli ve $[0,\infty)$ alt aralığında integrallenebilirdir.

$\alpha=0$ için $J_t^0:=I$ özdeşlik operatörüdür [29].

1.2.2. Riemann-Liouville kesirli türev operatörü

Tanım: f sürekli bir fonksiyon ve $\alpha>0$ olsun. n, $n>\alpha$ olacak şekilde α'ya en yakın ve en küçük tamsayı olsun.

O halde Riemann-Liouville kesirli türev operatörü Denklem (1.70)'de yazıldığı gibidir;

$${}_aD_t^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n\left[\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}.f(\tau).d\tau\right] \tag{1.70}$$

1.2.3. Caputo kesirli türev operatörü

Tanım: Caputo kesirli türevi n pozitif tamsayı ve $n-1<\alpha\leq n$ olmak üzere;

$${}_a^CD_t^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}.f^{(n)}(\tau)d\tau \quad , \alpha>0,t>0 \text{ [30].} \tag{1.71}$$

Denklem (1.71) ile tanımlanır.

1960'larda M. Caputo tarafından detaylı bir şekilde tanımlanan bu operatör, klasik yaklaşıma tamamen uyum sağladığından ötürü kullanılması en uygun seçenek olarak görülür [31].

Riemann-Liouville kesirli türevi için Denklem (1.72);

$$ {}_0D_t^{1/2} f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \tag{1.72} $$

Caputo kesirli türevi için Denklem (1.73);

$$ {}_0^C D_t^{1/2} f(t) = 0 \tag{1.73} $$

bulunur[8]. Burada $\alpha = 0$ için $D_t^0 := I$ özdeşlik operatörüdür[29].

Riemann-Liouville kesirli türevi ile Caputo kesirli türevini birbirinden ayıran farklardan biri sabit fonksiyonun türevidir. Caputo kesirli türevinde sabitin türevi sıfır iken alt sınırının sonlu olduğu Riemann-Liouville kesirli türevinde sonuç sıfırdan farklıdır. Sabitin değerinin sıfır olduğu durumlarda problemin başlangıç koşullarının fiziksel yorumu mümkün olduğundan ve başlangıç değer ifadeleri Laplace dönüşümü altında daha kolay hesaplanabildiğinden ötürü Caputo kesirli türev operatörü tercih edilir [32]. Riemann-Liouville kesirli türevinin başlangıç koşulları limit formundadır. Bu gibi başlangıç koşullarına sahip problemlerin sonuçları başarılıdır fakat fiziksel yorumlamaya uygun değildir [33].

2. MODEL PROBLEM

Direkt problem, sebeplerden kaynaklı etkilerin belirlenmesi problemidir. Ters problem ise direkt problemin tam tersidir. Ters problem, yapılan gözlemler sonucu onlara sebep olan faktörleri hesaplar.

Ters problem olarak adlandırılmasının sebebi, problemin etkileri ile çözüme başlayıp sebeplerini hesap etmesidir. Doğrudan görülemeyen parametreleri hesaplayabildiği için bilim ve matematikteki en önemli problemlerden biri olarak anılır. Ters problemler alanı son yıllarda kayda değer bir büyüme yaşamıştır ve bilimde birçok alanda kullanılır. Bilgisayarlı tomografi, optik, astronomi, iletişim teorisi, akustik, medikal görüntüleme bu alanlardan bazılarıdır.

Ters problem ilk kez, bugün Weyl kanunu olarak bilinen Laplace-Beltrami operatörünün özdeğerlerinin asimptotik yaklaşımı üzerine çalışan Hermann Weyl tarafından keşfedilmiş, henüz daha öğrenciyken atomik yapı teorisi ve enerji seviyelerinin oluşumu üzerine çalışan Viktor Ambartsumian da değinmiştir[34-36].

Ters problemlerin kullanım alanları oldukça geniştir; başlangıç, sınır ve kaynak fonksiyonun bulunmasında kullanılabilirler. Bu bölümde kesirli mertebeden başlangıç-sınır değerleri verilen difüzyon probleminin Laplace dönüşümü kullanılarak f(x,t) kaynak fonksiyonunun bulunması araştırılmıştır. Kaynak fonksiyonu polinom, üstel, trigonometrik, polinom-üstel, polinom-trigonometrik, üstel-trigonometrik ve polinom-üstel-trigonometrik fonksiyonlara bağlı olarak ayrı ayrı incelenmiştir. Kaynak fonksiyonu sadece x değişkenine bağlıysa f(x), sadece t değişkenine bağlıysa f(t) olarak belirtilmiştir.

Kesirli mertebeden türev içeren difüzyon denklemini ele alalım [37];

$$D_t^{\alpha} u(x,t) = u_{xx}(x,t) + f(x,t) \tag{2.1}$$

$$x > 0 \ , \ t > 0 \ , \ 0 < \alpha \leq 1 \tag{2.2}$$

Denklem (2.1)'deki eşitliğin başlangıç ve sınır koşulları aşağıdaki gibidir;

$$u(x,0) = f_1(x) \tag{2.3}$$

$$u(0,t) = h_1(t) \tag{2.4}$$

$$u_x(0,t) = h_2(t) \tag{2.5}$$

Denklem (2.1)'in kaynak fonksiyonu olan f(x,t)'yi bulmak için Laplace dönüşümü metodunu kullanalım. Laplace dönüşümü Denklem (2.1)'e uygulanırsa;

$$L\{D_t^{\alpha}u(x,t)\}=L\{u_{xx}(x,t)\}+L\{f(x,t)\} \tag{2.6}$$

Denklem (2.6) elde edilir ve elde edilen eşitliğin sol tarafına başlangıç fonksiyonunun diferansiyellenmesi özelliği uygulanırsa Denklem (2.7) elde edilir;

$$L\{D_t^{\alpha}u(x,t)\}=L\left\{\frac{d}{dt}.D_t^{\alpha-1}u(x,t)\right\}=s.L\left\{D_t^{\alpha-1}u(x,t)\right\}-D_t^{\alpha-1}u(x,0)$$

$$=s.L\left\{\frac{d}{dt}D_t^{\alpha-2}u(x,t)\right\}-D_t^{\alpha-1}u(x,0) \tag{2.7}$$

$$= s.\left[s.L\left\{D_t^{\alpha-2}u(x,t)\right\}-D_t^{\alpha-2}u(x,0)\right]- D_t^{\alpha-1}u(x,0)$$

İşlemler α-2 kez devam ettirilirse;

$$=s^{\alpha}.U(x,s)-\sum_{k=0}^{\alpha-1} s^{\alpha-1-k}.\ D_t^{k}u(x,0) \tag{2.8}$$

elde edilir. Bulunan Denklem (2.8)'i Denklem (2.6)'da yerine yazarsak;

$$s^{\alpha}.U(x,s)-\sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-1-k}.\ D_t^{k}u(x,0)=\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}+F(x,s)\ ,\quad n-1<\alpha\leq n\ ,\ n\in N \tag{2.9}$$

Denklem (2.9) elde edilir. Denklem (2.9)'daki $D_t^{k}u(x,0)$ ifadesi x'e bağlıdır. Dolayısıyla t'ye göre türevi sıfırdır. O halde Denklem (2.9) düzenlenirse Denklem (2.10) elde edilir;

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^{\alpha}.U(x,s)=-F(x,s) \tag{2.10}$$

Denklem (2.3)-(2.5)'te gösterilen koşullara Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$U(x,0)=\frac{f_1(x)}{s} \tag{2.11}$$

$$U(0,s) =H_1(s) \tag{2.12}$$

$$U_x(0,s)=H_2(s) \tag{2.13}$$

koşulları elde edilir. Şimdi homojen çözümü bulmak için denklemin ikinci yanını sıfırlarsak Denklem (2.14) elde edilir;

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^{\alpha}.U(x,s)=0 \tag{2.14}$$

Denklem (2.14)'ün karakteristik denklemi yazılırsa $\omega^2-s^{\alpha}=0$ denkleminden $\omega=\pm\sqrt{s^{\alpha}}$ elde edilir. Elde edilen ifade homojen çözümde yerine yazıldığında;

$$U_h\ (x,s)=c_1.e^{x\sqrt{s^{\alpha}}}+c_2.e^{-x\sqrt{s^{\alpha}}} \tag{2.15}$$

Denklem (2.15) bulunur. Burada $s>0$ olduğundan $\sqrt{s^{\alpha}}$ ifadesi daima reel sonuç verir. Daha önce hesaplanan (2.11)-(2.13) koşulları Denklem (2.15)'te yerine yazılsın;

$$U(0,s)=H_1(s)=c_1+c_2 \tag{2.16}$$

$$U_x(0,s)=H_2(s)=\sqrt{s^{\alpha}}.c_1-\sqrt{s^{\alpha}}.c_2 \tag{2.17}$$

Sınır koşulları uygulanarak bulunan Denklem (2.16) ve Denklem (2.17) düzenlendiğinde iki bilinmeyenli iki denklem elde edilir;

$$c_1+c_2=H_1(s)$$

$$c_1-c_2=\frac{H_2(s)}{\sqrt{s^{\alpha}}} \tag{2.18}$$

Denklem (2.18) taraf tarafa toplanırsa c_1 ve c_2 katsayıları bulunur;

$$c_1=\frac{1}{2}\left(H_1(s)+H_2(s)/\sqrt{s^\alpha}\right)$$

$$c_2=\frac{1}{2}\left(H_1(s)-H_2(s)/\sqrt{s^\alpha}\right) \tag{2.19}$$

Denklem (2.19)'da elde edilen c_1 ve c_2 katsayıları Denklem (2.15)'te yerine yazılırsa;

$$U_h(x,s)=\frac{1}{2}\left(H_1(s)+H_2(s)/\sqrt{s^\alpha}\right).e^{x\sqrt{s^\alpha}}+\frac{1}{2}\left(H_1(s)-H_2(s)/\sqrt{s^\alpha}\right).e^{-x\sqrt{s^\alpha}} \tag{2.20}$$

Denklem (2.20) homojen çözümü elde edilir.

Denklem (2.1)'in Laplace dönüşümü alınarak elde edilen (2.10) denklemindeki F(x,s) ifadesi bir fonksiyon belirttiğinden dolayı bu fonksiyonun polinom, üstel ve trigonometrik çeşitlerine göre özel çözümlerinin bulunması gerekmektedir.

2.1. f(x,t) Kaynak Fonksiyonun k. Dereceden Polinom Olduğu Durum

2.1.1. f sadece x'e bağlı bir polinom

f(x,t) fonksiyonu sadece x'e bağlı bir polinom ise model problem (2.21) denklemine dönüşür;

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^\alpha.U(x,s)=-\left(B_kx^k+B_{k-1}x^{k-1}+B_{k-2}x^{k-2}+\ldots+B_1x+B_0\right) \quad , \quad s>0 \tag{2.21}$$

U(x,s)'in özel çözümleri $U_ö$ ile gösterilsin. O halde U(x,s) ve türevleri aşağıdaki gibi elde edilir;

$$U_ö=A_kx^k+A_{k-1}x^{k-1}+A_{k-2}x^{k-2}+\ldots+A_1x+A_0 \tag{2.22}$$

$$U'_ö=A_kkx^{k-1}+A_{k-1}(k-1)x^{k-2}+A_{k-2}(k-2)x^{k-3}+\ldots+A_1 \tag{2.23}$$

$$U''_ö=A_kk(k-1)x^{k-2}+A_{k-1}(k-1)(k-2)x^{k-3}+\ldots+2A_2 \tag{2.24}$$

Denklem (2.22)-(2.24) 'ü Denklem (2.21)'de yerine yazalım;

$$\begin{aligned}&A_kk(k-1)x^{k-2}+A_{k-1}(k-1)(k-2)x^{k-3}+\ldots+2A_2\\&-s^\alpha.\left[A_kx^k+A_{k-1}x^{k-1}+A_{k-2}x^{k-2}+\ldots+A_1x+A_0\right]\\&=-\left[B_kx^k+B_{k-1}x^{k-1}+B_{k-2}x^{k-2}+\ldots+B_1x+B_0\right]\end{aligned} \tag{2.25}$$

Denklem (2.25) elde edilir. A_k katsayılarını bulabilmek için katsayılar birbirlerine eşitlenirse;

$$-s^{\alpha}A_k=-B_k \tag{2.26}$$

$$-s^{\alpha}A_{k-1}=-B_{k-1}$$

$$A_k k(k-1)-s^{\alpha}A_{k-2}=-B_{k-2} \tag{2.27}$$

$$\vdots$$

$$2A_2-s^{\alpha}A_0=-B_0$$

Denklem (2.26) ve Denklem (2.27) bulunur ve bu denklemlerden elde edilen A_k katsayıları F(x)'de yerine yazılırsa;

$$F(x)=s^{\alpha}A_k x^k+s^{\alpha}A_{k-1}x^{k-1}-[A_k k(k-1)-s^{\alpha}A_{k-2}]x^{k-2}-\ldots-2A_2+s^{\alpha}A_0 \tag{2.28}$$

Denklem (2.28) özel çözümü elde edilir. Denklem (2.11)-(2.13) başlangıç-sınır koşulları Denklem (2.28)'de yerine yazılırsa;

$$U(0,s)=H_1(s)=A_0 \tag{2.29}$$

$$U_x(0,s)=H_2(s)=A_1 \tag{2.30}$$

Denklem (2.29) ve Denklem (2.30) elde edilir.
Denklem (2.26)'da sırasıyla k=0 ve k=1 yazılırsa Denklem (2.31) ve Denklem (2.32), Denklem (2.27)'de sırasıyla k=2 ve k=3 yazılırsa Denklem (2.33) ve Denklem (2.34) elde edilir;

$$-s^{\alpha}.A_0=-B_0 \tag{2.31}$$

$$-s^{\alpha}.A_1=-B_1 \tag{2.32}$$

$$2.A_2-s^{\alpha}.A_0=-B_0 \tag{2.33}$$

$$3.2.A_3-s^{\alpha}.A_1=-B_1 \tag{2.34}$$

Denklem (2.31) ve Denklem (2.33) birbirine eşit olduğundan $A_2=0$, Denklem (2.32) ve Denklem (2.34) birbirine eşit olduğundan $A_3=0$ elde edilir. Bu işlemler benzer şekilde devam ettirilirse A_k katsayıları hesaplanmış olur;

$$A_k=A_{k-1}=A_{k-2}=\ldots=A_3=A_2=0 \quad (2.35)$$

Denklem (2.35)'ten elde edilen katsayılar Denklem (2.28)'de yerlerine yazılırsa;

$$F(x)=x.\ s^{\alpha}.H_2(s)+ s^{\alpha}.H_1(s) \quad (2.36)$$

Denklem (2.36) bulunur ve bu denkleme ters Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$f(x)=L^{-1}\{x.\ s^{\alpha}.H_2(s)+ s^{\alpha}.H_1(s)\} \quad (2.37)$$

Denklem (2.37) elde edilir.

2.1.2. f sadece t'ye bağlı bir polinom

f(x,t) sadece t'ye bağlı bir polinom olduğunda model problem Denklem (2.38) dönüşür;

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^{\alpha}.U(x,s)=-\left(D_ks^k+D_{k-1}s^{k-1}+D_{k-2}s^{k-2}+\ldots+D_1s+D_0\right) \quad (2.38)$$

f(t) k.dereceden bir polinom olsun ve U(x,s)'nin özel çözümleri $U_{ö}$ ile gösterilsin. O halde U(x,s) ve türevleri Denklem (2.39) ve Denklem (2.40)'taki gibidir;

$$U_{ö}=C_ks^k+C_{k-1}s^{k-1}+C_{k-2}s^{k-2}+\ldots+C_1s+C_0 \quad (2.39)$$

$$U_{ö}^{'}=U_{ö}^{''}=0 \quad (2.40)$$

D_k katsayılarını bulabilmek için Denklem (2.39) ve Denklem (2.40), Denklem (2.38)'de yerine yazılırsa;

$$-s^{\alpha}\left(C_ks^k+C_{k-1}s^{k-1}+C_{k-2}s^{k-2}+\ldots+C_1s+C_0\right) =$$
$$-\left(D_ks^k+D_{k-1}s^{k-1}+D_{k-2}s^{k-2}+\ldots+D_1s+D_0\right) \quad (2.41)$$

Denklem (2.41) bulunur. Bulunan eşitlikte her iki taraf birbirine eşitlenerek D_k katsayıları bulunur;

$$s^kC_k = D_k \quad (2.42)$$
$$s^kC_{k-1} = D_{k-1} \quad (2.43)$$
$$\vdots$$

$$s^k C_0 = D_0 \tag{2.44}$$

Denklem (2.42)-(2.44) elde edilir.

(2.11) başlangıç koşulu Denklem (2.39) özel çözümünde yazılırsa Denklem (2.45) bulunur;

$$U(x,0)=C_0=\frac{f_1(x)}{s} \tag{2.45}$$

Bulunan değerler F(s) fonksiyonunda yazılırsa kaynak fonksiyon Denklem (2.46)'daki gibi bulunur;

$$F(s)=s^{\alpha}(C_k s^k+C_{k-1}s^{k-1}+C_{k-2}s^{k-2}+\ldots+C_1 s)+\frac{f_1(x)}{s} \tag{2.46}$$

Denklem (2.46)'ya ters Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$f(t)=L^{-1}\left\{s^{\alpha}(C_k s^k+C_{k-1}s^{k-1}+C_{k-2}s^{k-2}+\ldots+C_1 s)+\frac{f_1(x)}{s}\right\} \tag{2.47}$$

Denklem (2.47) elde edilir.

2.2. f(x,t) Kaynak Fonksiyonunun Trigonometrik Fonksiyon Olduğu Durum

2.2.1. f sadece x'e bağlı trigonometrik bir fonksiyon

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^{\alpha}.U(x,s)=-A_1.\cos\beta x-B_1\sin\beta x \tag{2.48}$$

Denklem (2.48)'in U(x,s) özel çözümü ve türevleri aşağıdaki gibi olur;

$$U_{\ddot{o}}=A_2.\cos\beta x+B_2\sin\beta x \tag{2.49}$$

$$U'_{\ddot{o}}=-A_2.\beta.\sin\beta x+B_2.\beta.\cos\beta x \tag{2.50}$$

$$U''_{\ddot{o}}=-A_2.\beta^2.\cos\beta x-B_2.\beta^2.\sin\beta x \tag{2.51}$$

Denklem (2.49) ve Denklem (2.51), Denklem (2.48)'de yazılırsa;

$$-A_2\beta^2.\cos\beta x-B_2\beta^2.\sin\beta x-s^{\alpha}A_2\cos\beta x-s^{\alpha}B_2\sin\beta x$$
$$=-A_1.\cos\beta x-B_1.\sin\beta x \tag{2.52}$$

Denklem (2.52) elde edilir ve bu denklemde katsayılar birbirine eşitlenirse Denklem (2.53) ve Denklem (2.54) hesap edilir;

$$-A_2\beta^2-s^\alpha A_2=-A_1 \tag{2.53}$$

$$-B_2\beta^2-s^\alpha B_2=-B_1 \tag{2.54}$$

Denklem (2.48)'e sınır koşulları uygulanırsa;

$$U(0,s)=H_1(s)=A_2 \tag{2.55}$$

$$U_x(0,s)=H_2(s)=B_2.\beta \tag{2.56}$$

$$B_2=\frac{H_2(s)}{\beta} \tag{2.57}$$

Denklem (2.55)-(2.57), Denklem (2.53) ve Denklem (2.54)'te yerlerine yazılırsa;

$$A_1=H_1(s).(\beta^2+s^\alpha) \tag{2.58}$$

$$B_1=\frac{H_2(s)}{\beta}.(\beta^2+s^\alpha)$$

Denklem (2.58) elde edilir ve bu denklemler $F(x)$ fonksiyonunda yazılırsa Denklem (2.59) bulunur;

$$F(x)=H_1(s).\left(\beta^2+s^\alpha\right).\cos\beta x+\frac{H_2(s)}{\beta}.\left(\beta^2+s^\alpha\right).\sin\beta x \tag{2.59}$$

Son olarak Denklem (2.59)'a ters Laplace dönüşümü uygulanırsa Denklem (2.60) kaynak fonksiyonu bulunur;

$$f(x)=L^{-1}\left\{H_1(s).\left(\beta^2+s^\alpha\right).\cos\beta x+\frac{H_2(s)}{\beta}.\left(\beta^2+s^\alpha\right).\sin\beta x\right\} \tag{2.60}$$

2.2.2. f sadece t değişkenine bağlı trigonometrik bir fonksiyon

f sadece t'ye bağlı olduğunda model problem Denklem (2.61)'deki gibi olur;

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^\alpha U(x,s)=-(A\cos\beta s+B\sin\beta s) \tag{2.61}$$

Denklem (2.61)'e ait özel çözümler Denklem (2.62)'deki gibidir;

$U=C\cos\beta s+D\sin\beta s$

$U''=U'=0$ (2.62)

Denklem (2.62), Denklem (2.61)'de yerlerine yazılırsa Denklem (2.63) elde edilir;

$-s^{\alpha}(C\cos\beta s+D\sin\beta s)=-(A\cos\beta s+B\sin\beta s)$ (2.63)

Denklem (2.63)'te katsayılar eşitlenirse Denklem (2.64) ve Denklem (2.65) bulunur;

$s^{\alpha}.C=A$ (2.64)

$s^{\alpha}.D=B$ (2.65)

Denklem (2.61)'e başlangıç koşulu uygulandığında Denklem (2.66) elde edilir;

$$U(x,0)=C=\frac{f_1(x)}{s} \quad (2.66)$$

A ve B katsayıları ve Denklem (2.66)'daki başlangıç koşulu $F(s)$ kaynak fonksiyonunda yerine yazılırsa Denklem (2.67) elde edilir;

$F(s)=s^{\alpha-1}.f_1(x)\cos\beta s+s^{\alpha}.D\sin\beta s$ (2.67)

Son olarak Denklem (2.67)'ye ters Laplace dönüşümü uygulanırsa kaynak fonksiyonunun genel çözümü Denklem (2.68)'deki gibi elde edilir;

$f(t)=L^{-1}\{s^{\alpha-1}.f_1(x)\cos\beta s+s^{\alpha}.D\sin\beta s\}$ (2.68)

2.3. f(x,t) Kaynak Fonksiyonunun Üstel Fonksiyon Olduğu Durum

2.3.1. f sadece x değişkenine bağlı üstel fonksiyon

f sadece x'e bağlı üstel fonksiyon olsun. Bu durum α_1 'in karakteristik denklemin bir kökü olup olmadığına göre üç aşamada incelenir.

2.3.1.1. α_1 karakteristik denklemin bir kökü değil ise

α_1 karakteristik denklemin bir kökü değilse model problem Denklem (2.69)'daki gibidir;

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^{\alpha}U(x,s)=-A_1e^{\alpha_1 x}\ ,\ \alpha_1\neq 0 \tag{2.69}$$

Denklem (2.69)'a ait özel çözümler ve türevleri hesaplanırsa;

$$U(x)=Ae^{\alpha_1 x} \tag{2.70}$$

$$U'(x)=\alpha_1 Ae^{\alpha_1 x} \tag{2.71}$$

$$U''(x)=\alpha_1^{\,2} Ae^{\alpha_1 x} \tag{2.72}$$

Denklem (2.70)-(2.72) elde edilir. Elde edilen eşitlikler Denklem (2.69)'da yerlerine yazılırsa Denklem (2.73) bulunur;

$$\alpha_1^{\,2} Ae^{\alpha_1 x}-s^{\alpha}Ae^{\alpha_1 x}=-A_1e^{\alpha_1 x} \tag{2.73}$$

Elde edilen Denklem (2.73)'ten A_1 katsayısı bulunursa;

$$\alpha_1^{\,2} A-s^{\alpha}A=-A_1 \tag{2.74}$$

Denklem (2.74) elde edilir.

Şimdi model problemin sınır koşullarını Denklem (2.70) ve Denklem (2.71)'de yerlerine yazalım;

$$U(0,s)=A=H_1(s) \tag{2.75}$$

$$U_x(0,s)=\alpha_1 A=H_2(s) \tag{2.76}$$

Denklem (2.75) ve Denklem (2.76) elde edilir ve elde edilen bu denklemlerden α_1 katsayısı Denklem (2.77)'deki gibi bulunur;

$$\alpha_1=H_2(s)/H_1(s) \tag{2.77}$$

Bulunan A ve α_1 katsayıları Denklem (2.74)'te yazılırsa;

$$-H_1(s).(H_2(s)/H_1(s))^2+s^{\alpha}.H_1(s)=A_1 \quad (2.78)$$

Denklem (2.78) elde edilir. Bulunan katsayılar F(x) kaynak fonksiyonunda yazılırsa;

$$F(x)=\left[-H_2^2(s)/H_1(s)+s^{\alpha}.H_1(s)\right].e^{H_2(s)/H_1(s)\,x} \quad (2.79)$$

Denklem (2.79) hesaplanır. Son olarak Denklem (2.79)'a ters Laplace dönüşümü uygulanırsa Denklem (2.80) elde edilir;

$$f(x)=L^{-1}\left\{\left[-H_2^2(s)/H_1(s)+s^{\alpha}.H_1(s)\right].e^{H_2(s)/H_1(s)\,x}\right\} \quad (2.80)$$

2.3.1.2. α_1 karakteristik denklemin basit bir kökü ise

α_1 karakteristik denklemin basit bir kökü ise model problem aşağıdaki gibidir;

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^{\alpha}U(x,s)=-A_1e^{\alpha_1 x} \quad (2.81)$$

Denklem (2.81)'e ait özel çözümler ve türevleri hesaplanırsa;

$$U(x)=Axe^{\alpha_1 x} \quad (2.82)$$

$$U'(x)=A[e^{\alpha_1 x}+\alpha_1 xe^{\alpha_1 x}] \quad (2.83)$$

$$U''(x)=A[\alpha_1 e^{\alpha_1 x}+\alpha_1(e^{\alpha_1 x}+\alpha_1 xe^{\alpha_1 x})] \quad (2.84)$$

Denklem (2.82)-(2.84) elde edilir ve bulunan bu denklemler Denklem (2.81)'de yerlerine yazılır ve düzenlenirse;

$$2A\alpha_1.e^{\alpha_1 x}+A\alpha_1^2.xe^{\alpha_1 x}-s^{\alpha}Axe^{\alpha_1 x}=A_1e^{\alpha_1 x} \quad (2.85)$$

Denklem (2.85) elde edilir. Elde edilen denklemde katsayılar birbirine eşitlenirse;

$$A(\alpha_1^2-s^{\alpha})=0 \quad (2.86)$$

$$2A\alpha_1=-A_1 \quad (2.87)$$

Denklem (2.86) ve Denklem (2.87) elde edilir. Denklem (2.86)'da A=0 yada $(\alpha_1^2-s^{\alpha})=0$ olabilir. $(\alpha_1^2-s^{\alpha})=0$ olursa;

$$\alpha_1=\pm\sqrt{s^{\alpha}} \tag{2.88}$$

Denklem (2.88) bulunur ve bu ifade Denklem (2.87)'de yerine yazılırsa;

$$A_1=\pm 2A\sqrt{s^{\alpha}} \tag{2.89}$$

Denklem (2.89) bulunur. Denklem (2.82) ve Denklem (2.83)'e sınır koşulları uygulanırsa;

$$U(0,s)=H_1(s)=0$$

$$U_x(0,s)=H_2(s)=A \tag{2.90}$$

Denklem (2.90), Denklem (2.89)'de yerine yazılırsa;

$$A_1=\pm 2H_2(s)\sqrt{s^{\alpha}} \tag{2.91}$$

Denklem (2.91) elde edilir. Denklem (2.88) ve Denklem (2.91), $F(x)$ kaynak fonksiyonunda yazılırsa Denklem (2.92) bulunur;

$$F(x)=\pm 2H_2(s).\sqrt{s^{\alpha}}.e^{\pm\sqrt{s^{\alpha}}x} \tag{2.92}$$

Bulunan Denklem (2.92)'ye ters Laplace dönüşümü uygulanırsa Denklem (2.93) elde edilir;

$$f(x)=L^{-1}\left\{\pm 2H_2(s).\sqrt{s^{\alpha}}.e^{\pm\sqrt{s^{\alpha}}x}\right\} \tag{2.93}$$

A=0 olursa Denklem (2.91)'den $A_1 = 0$ bulunur. Bu durumda $F(x) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla kaynak fonksiyon f(x)=0 olarak elde edilmiş olur.

2.3.1.3. α_1 karakteristik denklemin çift katlı kökü ise

α_1 karakteristik denklemin çift katlı kökü ise model problem Denklem (2.94)'teki gibidir;

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^{\alpha}U(x,s)=-A_1e^{\alpha_1 x} \quad , \alpha_1 \neq 0 \tag{2.94}$$

U(x,s) özel çözümü ve türevleri Denklem (2.95)-(2.97)' de verilmiştir;

$$U(x)=Ax^2e^{\alpha_1 x} \tag{2.95}$$

$$U'(x)=A[2xe^{\alpha_1 x}+x^2\alpha_1 xe^{\alpha_1 x}]$$

$$U''(x)=A\left[2(e^{\alpha_1 x}+x.\alpha_1 e^{\alpha_1 x})+\alpha_1\left(2xe^{\alpha_1 x}+\alpha_1 x^2e^{\alpha_1 x}\right)\right] \tag{2.96}$$

Denklem (2.95) ve Denklem (2.96), Denklem (2.94)'te ilgili yerlere yazılırsa Denklem (2.97) elde edilir;

$$A\left[2(e^{\alpha_1 x}+x.\alpha_1 e^{\alpha_1 x})+\alpha_1\left(2xe^{\alpha_1 x}+\alpha_1 x^2e^{\alpha_1 x}\right)\right]-s^{\alpha}Ax^2e^{\alpha_1 x}=-A_1e^{\alpha_1 x} \tag{2.97}$$

Denklem (2.97)'de eşitliğin her iki yanında katsayılar birbirine eşitlenirse;

$$2A=-A_1 \quad \text{ve} \quad 4A\alpha_1=0 \tag{2.98}$$

Denklem (2.98) bulunur. Bu eşitliklerde $\alpha_1\neq 0$ olduğundan A=0 elde edilir. Dolayısıyla $A_1=0$ olarak hesaplanır. Bulunan A ve A_1 katsayıları $F(x)=A_1e^{\alpha_1 x}$ kaynak fonksiyonunda yerine yazılırsa;

$$F(x)=0 \tag{2.99}$$

Denklem (2.99) elde edilir. Bulunan eşitliğe ters Laplace dönüşümü uygulanırsa Denklem (2.100) bulunur;

$$f(x)=L^{-1}(0)=0 \tag{2.100}$$

2.3.2. f sadece t değişkenine bağlı üstel fonksiyon

f sadece t'ye bağlı üstel fonksiyon olsun. Bu durum α_1'in karakteristik denklemin bir kökü olup olmadığına göre üç aşamada incelenir.

2.3.2.1. α_1 karakteristik denklemin kökü değil ise

α_1 karakteristik denklemin kökü değil ise U(x,s) özel çözümü Denklem (2.102)'deki gibi olur;

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^{\alpha}U(x,s)=-A_1.e^{\alpha_1 s} \tag{2.101}$$

U(x,s) özel çözümü ve türevleri Denklem (2.102)'de verilmiştir;

$$U=B_1.e^{\alpha_1 s} \quad (2.102)$$

$U''=U'=0$

$U(x,0)=f_1(x)/s$ başlangıç koşulu Denklem (2.102)'ye uygulanırsa $B_1 = f_1(x)/s$ elde edilir.

Denklem (2.102)'de elde edilen eşitlikler Denklem (2.101)'de yerlerine yazılırsa Denklem (2.103) bulunur;

$$s^{\alpha}B_1.e^{\alpha_1 s}=A_1.e^{\alpha_1 s} \quad (2.103)$$

Denklem (2.103)'te katsayılar birbirine eşitlenirse $s^{\alpha}B_1=A_1$ elde edilir. Bulunan A_1 katsayısı kaynak fonksiyonunda yerine yazılırsa Denklem (2.104) bulunur;

$$F(s)=s^{\alpha-1}.f_1(x).e^{\alpha_1 s} \quad (2.104)$$

Elde edilen $F(s)$ fonksiyonunun ters Laplace'ı alınırsa Denklem (2.105) bulunmuş olur;

$$f(t)=L^{-1}\{s^{\alpha-1}.f_1(x).e^{\alpha_1 s}\} \quad (2.105)$$

2.3.2.2. α_1 karakteristik denklemin basit bir kökü ise

α_1 karakteristik denklemin basit bir kökü ise $U(x,s)$ özel çözümü Denklem (2.106)'daki gibi olur;

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^{\alpha}U(x,s)=-A_2.e^{\alpha_1 s} \quad (2.106)$$

$U(x,s)$ özel çözümü ve türevleri Denklem (2.107)'de verilmiştir;

$$U=B_2.e^{\alpha_1 s}s \quad (2.107)$$

$U''=U'=0$

$U(x,0)=f_1(x)/s$ başlangıç koşulu Denklem (2.107)'ye uygulanırsa $B_2=f_1(x)/s$ elde edilir.

Denklem (2.107)'de bulunan özel çözümler Denklem (2.106)'da yerlerine yazılırsa Denklem (2.108) bulunur;

$$s^{\alpha+1}B_2.e^{\alpha_1 s}=A_2.e^{\alpha_1 s} \quad (2.108)$$

Denklem (2.108)'den $s^{\alpha+1}B_2=A_2$ eşitliği elde edilir. O halde bulunan eşitlik ile birlikte $F(s)$ kaynak fonksiyonu;

$$F(s)=s^{\alpha+1}B_2e^{\alpha_1 s} \quad (2.109)$$

Denklem (2.109)'daki gibi bulunur. Başlangıç koşulu yardımıyla hesaplanan B_2 katsayısı Denklem (2.109)'da yerine yazılır ve ters Laplace dönüşümü uygulanırsa Denklem (2.110) elde edilir.

$$f(t)=L^{-1}\{s^{\alpha}.f_1(x).e^{\alpha_1 s}\} \quad (2.110)$$

2.3.2.3. α_1 karakteristik denklemin çift katlı kökü ise

α_1 karakteristik denklemin çift katlı kökü ise model problem Denklem (2.111)'deki gibidir;

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^{\alpha}U(x,s)=-A_3.e^{\alpha_1 s} \quad (2.111)$$

α_1, karakteristik denklemin çift katlı kökü ise $U(x,s)$ özel çözümü ve türevleri Denklem (2.112)'deki gibi yazılır;

$$U(x,s)=B_3.e^{\alpha_1 s}.s^2 \quad (2.112)$$

$$U''=U'=0$$

$U(x,0)$ koşulu Denklem (2.112)'ye uygulanırsa $U(x,0)=f_1(x)/s=0$ ifadesinden $f_1(x)=0$ elde edilir. Denklem (2.112)'de hesaplanmış olan özel çözümler Denklem (2.111)'de ilgili yerlere yazılırsa Denklem (2.113) bulunur;

$$-s^{\alpha}B_3.e^{\alpha_1 s}.s^2=-A_3.e^{\alpha_1 s} \quad (2.113)$$

Denklem (2.113)'te katsayılar birbirine eşitlenirse $s^{\alpha+2}B_3=A_3$ eşitliği elde edilir. Bulunan A_3 katsayısı $F(s)=A_3.e^{\alpha_1 s}$ kaynak fonksiyonunda yerine yazılırsa Denklem (2.114) elde edilmiş olur;

$$F(s)=s^{\alpha+2}e^{\alpha_1 s}B_3 \quad (2.114)$$

Son olarak Denklem (2.114)'ün ters Laplace 'ı alınırsa;

$$f(t)=L^{-1}\{s^{\alpha+2}e^{\alpha_1 s}B_3\} \tag{2.115}$$

Denklem (2.115) elde edilir.

2.4. f(x,t) Kaynak Fonksiyonunun k. Dereceden Polinom ile Trigonometrik Bir Fonksiyonun Çarpımı Biçiminde Ele Alındığı Durum

2.4.1. f sadece x değişkenine bağlı bir fonksiyon

f 'in sadece x'e bağlı bir fonksiyon olduğu durumda yazılabilecek model problem Denklem (2.116)'daki gibidir;

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^{\alpha}U(x,s)=-(C\sin\beta x+D\cos\beta x)(B_kx^k+B_{k-1}x^{k-1}+\ldots+B_1x+B_0) \tag{2.116}$$

U(x,s) özel çözümü ve türevleri Denklem (2.117) ve Denklem (2.118)'de hesaplanmıştır;

$$U=(A\sin\beta x+B\cos\beta x).(A_kx^k+A_{k-1}x^{k-1}+\ldots+A_1x+A_0)\quad,\quad A,B,\beta\neq 0 \tag{2.117}$$

$$U'=\left(A\beta\cos\beta x-B\beta\sin\beta x\right)(A_kx^k+A_{k-1}x^{k-1}+\ldots+A_1x+A_0)+$$
$$(A\sin\beta x+B\cos\beta x)(A_kkx^{k-1}+A_{k-1}(k-1)x^{k-2}+\ldots+A_1)$$

$$U''=(-A\beta^2\sin\beta x-B\beta^2\cos\beta x)(A_kx^k+A_{k-1}x^{k-1}+\ldots+A_1x+A_0)+ \tag{2.118}$$
$$2(A\beta\cos\beta x-B\beta\sin\beta x)(A_kkx^{k-1}+A_{k-1}(k-1)x^{k-2}+\ldots+A_1)+$$
$$(A\sin\beta x+B\cos\beta x)(A_kk(k-1)x^{k-2}+A_{k-1}(k-1)(k-2)x^{k-3}+\ldots+2A_2)$$

Denklem (2.117) ve Denklem (2.118)'de hesaplanan U ve U'' eşitlikleri Denklem (2.116)'da yerlerine yazılırsa;

$$(-A\beta^2\sin\beta x-B\beta^2\cos\beta x)(A_kx^k+A_{k-1}x^{k-1}+\ldots+A_1x+A_0)+$$
$$2(A\beta\cos\beta x-B\beta\sin\beta x)(A_kkx^{k-1}+A_{k-1}(k-1)x^{k-2}+\ldots+A_1)+$$
$$(A\sin\beta x+B\cos\beta x)\left(A_kk(k-1)x^{k-2}+A_{k-1}(k-1)(k-2)x^{k-3}+\ldots+2A_2\right)$$
$$-s^{\alpha}(A\sin\beta x+B\cos\beta x).(A_kx^k+A_{k-1}x^{k-1}+\ldots+A_1x+A_0)$$
$$=-(C\sin\beta x+D\cos\beta x)(B_kx^k+B_{k-1}x^{k-1}+\ldots+B_1x+B_0) \tag{2.119}$$

Denklem (2.119) elde edilir. Elde edilen bu eşitlikte katsayılar birbirine eşitlenirse B_k katsayıları Denklem (2.120)-(2.123)'teki gibi hesap edilir;

$$-A\beta^2 A_k - s^{\alpha} A A_k = -C B_k \tag{2.120}$$

$$-A\beta^2 A_{k-1} - 2B\beta A_k k - s^{\alpha} A A_{k-1} = -C B_{k-1} \tag{2.121}$$

$$-A\beta^2 A_{k-2} - 2B\beta A_{k-1}(k-1) + A A_k k(k-1) - s^{\alpha} A A_{k-2} = -C B_{k-2}$$

$$\vdots$$

$$-A\beta^2 A_0 - 2B\beta A_1 + 2A A_2 - s^{\alpha} A A_0 = -C B_0$$

ve

$$-B\beta^2 A_k - s^{\alpha} B A_k = -D B_k \tag{2.122}$$

$$-B\beta^2 A_{k-1} + 2A\beta A_k k - s^{\alpha} B A_{k-1} = -D B_{k-1} \tag{2.123}$$

$$-B\beta^2 A_{k-2} + 2A\beta A_{k-1}(k-1) + B A_k k(k-1) - s^{\alpha} B A_{k-2} = -D B_{k-2}$$

$$\vdots$$

$$-B\beta^2 A_0 + 2A\beta A_1 + 2B A_2 - s^{\alpha} B A_0 = -D B_0$$

$U(0,s)=H_1(s)$ koşulu U özel çözümüne uygulanırsa $BA_0=H_1(s)$ eşitliği elde edilir. Burada A_0 yalnız bırakılırsa;

$$A_0 = H_1(s)/B \tag{2.124}$$

Denklem (2.124) elde edilir. $U_x(0,s)=H_1(s)$ koşulu U' özel çözümüne uygulanırsa;

$$A\beta A_0 + B A_1 = H_2(s) \tag{2.125}$$

Denklem (2.125) elde edilir. Denklem (2.120)'de sırasıyla k=0 ve k=1, Denklem (2.121)'de ise sırasıyla k=1 ve k=2 yazılsın.
Denklem (2.120)'de k=0 yazılırsa;

$$A\beta^2 A_0 + s^{\alpha} A A_0 = C B_0 \tag{2.126}$$

Denklem (2.126) bulunur ve burada Denklem (2.124) ifadesi yerine yazılırsa;

$$A\frac{H_1(s)}{B}(\beta^2 + s^{\alpha}) = C B_0 \tag{2.127}$$

Denklem (2.127) elde edilir. Denklem (2.120)'de k=1 yazılırsa;

$$A\beta^2 A_1+s^{\alpha}AA_1= CB_1 \quad (2.128)$$

Denklem (2.128) bulunur. Denklem (2.121)'de k=1 yazılırsa;

$$A\beta^2 A_0+2B\beta A_1+s^{\alpha}AA_0=CB_0 \quad (2.129)$$

Denklem (2.129) elde edilir. Denklem (2.129) ve Denklem (2.126)'nın sağ yanları eşit olduğundan sol yanlar da birbirine eşittir.

$A\beta^2 A_0+2B\beta A_1+s^{\alpha}AA_0 = A\beta^2 A_0+s^{\alpha}AA_0$ eşitliğinden $A_1=0$ bulunur. $A_1=0$ ve $A_0=\frac{H_1(s)}{B}$ ifadeleri (2.125)'te yazıldığında;

$$A\beta\frac{H_1(s)}{B}=H_2(s) \quad (2.130)$$

Denklem (2.130) bulunur ve bulunan bu eşitlikten Denklem (2.131) elde edilir.

$$\frac{H_1(s)}{H_2(s)}=\frac{B}{A\beta} \quad (2.131)$$

Aynı zamanda $A_1=0$ sırasıyla Denklem (2.128) ve Denklem (2.129)'da yerlerine yazılırsa $B_1=0$ ve $A\beta^2 A_0+s^{\alpha}AA_0=CB_0$ eşitlikleri bulunur. Denklem (2.121)'de k=2 yazılırsa;

$$A\beta^2 A_1+4B\beta A_2+s^{\alpha}AA_1= CB_1 \quad (2.132)$$

Denklem (2.132) elde edilir ve burada $A_1=0$ ve $B_1=0$ değerleri yerlerine yazılırsa $A_2=0$ elde edilir. İşlemler benzer şekilde devam ederse;

$$B_k=B_{k-1}=\ldots=B_2=B_1=0 \quad (2.133)$$

elde edilir.

Denklem (2.122)'de k=0 yazılırsa $B\beta^2 A_0+s^{\alpha}BA_0=DB_0$ bulunur. Bulunan bu eşitlikte $A_0=\frac{H_1(s)}{B}$ eşitliği kullanılırsa;

$$H_1(s)(\beta^2+s^{\alpha})=DB_0 \quad (2.134)$$

Denklem (2.134) elde edilir. Bulunan DB_0 ve CB_0 katsayıları $F(x)$ kaynak fonksiyonunda yerlerine yazılırsa Denklem (2.135) bulunur;

$$F(x)=H_1(s)(\beta^2+s^{\alpha})\left(\frac{A}{B}\sin\beta x+\cos\beta x\right) \tag{2.135}$$

Son olarak Denklem (2.134)'e ters Laplace dönüşümü uygulanırsa Denklem (2.136) bulunmuş olur;

$$f(x)=L^{-1}\left\{H_1(s)(\beta^2+s^{\alpha})\left(\frac{A}{B}\sin\beta x+\cos\beta x\right)\right\} \tag{2.136}$$

2.4.2. f sadece t değişkenine bağlı fonksiyon

f sadece t'ye bağlı fonksiyon olduğu durumda model problem Denklem (2.137)'deki gibi olur;

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^{\alpha}U(x,s)=-(A\cos\beta s+B\sin\beta s)(A_ks^k+A_{k-1}s^{k-1}+\ldots+A_1s+A_0) \tag{2.137}$$

Denklem (2.137)'ye ait özel çözüm ve türevleri Denklem (2.138)'de verilmiştir;

$$U(x,s)=(C\cos\beta s+D\sin\beta s)(B_ks^k+B_{k-1}s^{k-1}+\ldots+B_1s+B_0)$$

$$U'=U''=0 \tag{2.138}$$

Denklem (2.138) de bulunan özel çözümler Denklem (2.137)'de ilgili yerlere yazılırsa;

$$-s^{\alpha}(C\cos\beta s+D\sin\beta s)(B_ks^k+B_{k-1}s^{k-1}+\ldots+B_1s+B_0)=$$
$$-(A\cos\beta s+B\sin\beta s)(A_ks^k+A_{k-1}s^{k-1}+\ldots+A_1s+A_0) \tag{2.139}$$

Denklem (2.139) bulunur. Bulunan eşitliğin iki tarafındaki $\cos\beta s$ ifadelerinin katsayıları birbirine eşit olacağından;

$$\begin{aligned}
&s^{\alpha}B_kC=AA_k\\
&s^{\alpha}B_{k-1}C=AA_{k-1}\\
&\vdots\\
&s^{\alpha}B_0C=AA_0
\end{aligned} \tag{2.140}$$

Denklem (2.140) bulunur ve aynı şekilde sin βs ifadelerinin de katsayıları birbirine eşit olduğundan;

$$s^{\alpha}B_kD=BA_k$$
$$s^{\alpha}B_{k-1}D=BA_{k-1} \quad (2.141)$$
$$\vdots$$
$$s^{\alpha}B_0D=BA_0$$

Denklem (2.141) elde edilir.

Model probleme başlangıç koşulu uygulanırsa $U(x,0)=CB_0=f_1(x)/s$ bulunur.

Bulunan bu katsayılar $F(s)$ kaynak fonksiyonunda yerlerine yazılırsa Denklem (2.142) hesaplanmış olur;

$$F(s)=\sum_{k=0}^{k}\left[(s^{\alpha}CB_k)\cos\beta s.s^k+(s^{\alpha}DB_k)\sin\beta s.s^k\right] \quad (2.142)$$

Hesaplanan Denklem (2.141)'e ters Laplace dönüşümü uygulanırsa Denklem (2.143) bulunur;

$$f(t)=L^{-1}\left\{\sum_{k=0}^{k}\left[(s^{\alpha}CB_k)\cos\beta s.s^k+(s^{\alpha}DB_k)\sin\beta s.s^k\right]\right\} \quad (2.143)$$

2.5. f(x,t) Kaynak Fonksiyonunun Üstel Bir Fonksiyon ile k. Dereceden Bir Polinomun Çarpımı Biçiminde Ele Alındığı Durum

2.5.1. f sadece x değişkenine bağlı fonksiyon

2.5.1.1. α_1 karakteristik denklemin bir kökü değil ise

α_1 karakteristik denklemin bir kökü değil ise model problem Denklem (2.144)'teki gibidir;

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^{\alpha}.U(x,s)=-(A_kx^k+A_{k-1}x^{k-1}+A_{k-2}x^{k-2}+\ldots+A_1x+A_0)e^{\alpha_1x} \quad (2.144)$$

Denklem (2.144)'e ait özel çözüm ve türevleri;

$$U(x,s)=(B_kx^k+B_{k-1}x^{k-1}+B_{k-2}x^{k-2}+\ldots+B_1x+B_0)e^{\alpha_1x} \quad (2.145)$$

$$U'(x,s)=(B_kkx^{k-1}+B_{k-1}(k-1)x^{k-2}+B_{k-2}(k-2)x^{k-3}+\ldots+2B_2x+B_1)e^{\alpha_1x}+$$
$$(B_kx^k+B_{k-1}x^{k-1}+B_{k-2}x^{k-2}+\ldots+B_1x+B_0)e^{\alpha_1x}\alpha_1$$

$$U''(x,s)=(B_k k(k-1)x^{k-2}+B_{k-1}(k-1)(k-2)x^{k-3}+\ldots+2B_2)e^{\alpha_1 x}+$$
$$(B_k kx^{k-1}+B_{k-1}(k-1)x^{k-2}+\ldots+2B_2 x+B_1)\alpha_1 e^{\alpha_1 x}+$$
$$(B_k kx^{k-1}+B_{k-1}(k-1)x^{k-2}+\ldots+B_1)e^{\alpha_1 x}\alpha_1+(B_k x^k+B_{k-1}x^{k-1}+\ldots+B_1 x+B_0)e^{\alpha_1 x}\alpha_1^2 \quad (2.146)$$

Denklem (2.145) ve Denklem (2.146)'da hesaplanmıştır. Hesaplanan özel çözümler Denklem (2.144)'te yazılırsa Denklem (2.147) elde edilir.

$$(B_k k(k-1)x^{k-2}+B_{k-1}(k-1)(k-2)x^{k-3}+\ldots 2B_2)e^{\alpha_1 x}+$$
$$(B_k kx^{k-1}+B_{k-1}(k-1)x^{k-2}+\ldots 2B_2 x+B_1)\alpha_1 e^{\alpha_1 x}+$$
$$(B_k kx^{k-1}+B_{k-1}(k-1)x^{k-2}+\ldots B_1)e^{\alpha_1 x}\alpha_1+(B_k x^k+B_{k-1}x^{k-1}+\ldots B_1 x+B_0)e^{\alpha_1 x}\alpha_1^2 \quad (2.147)$$
$$-s^{\alpha}.(B_k x^k+B_{k-1}x^{k-1}+B_{k-2}x^{k-2}+\ldots B_1 x+B_0)e^{\alpha_1 x}$$
$$= -(A_k x^k+A_{k-1}x^{k-1}+A_{k-2}x^{k-2}+\ldots A_1 x+A_0)e^{\alpha_1 x}$$

Denklem (2.147)'de eşitliğin iki tarafındaki katsayılar eşitlenirse;

$$B_k\alpha_1^2-s^{\alpha}B_k=-A_k \quad (2.148)$$
$$2B_k k\alpha_1+B_{k-1}\alpha_1^2-s^{\alpha}B_{k-1}=-A_{k-1} \quad (2.149)$$
$$B_k k(k-1)+2B_{k-1}(k-1)\alpha_1+B_{k-2}\alpha_1^2-s^{\alpha}B_{k-2}=-A_{k-2} \quad (2.150)$$

Denklem (2.148)-(2.150) elde edilir. U(x,s) özel çözümüne koşullar uygulanırsa;

$$U(0,s)=B_0=H_1(s) \quad (2.151)$$

$$U_x(0,s)=B_1+B_0\alpha_1=H_2(s) \quad (2.152)$$

Denklem (2.151) ve Denklem (2.152) bulunur. Denklem (2.152)'de $B_0=H_1(s)$ yazılırsa Denklem (2.153) elde edilir;

$$B_1+H_1(s)\alpha_1=H_2(s) \quad (2.153)$$

Denklem (2.148)'de k =0 yazılırsa;

$$B_0\alpha_1^2-s^{\alpha}B_0=-A_0 \quad (2.154)$$

Denklem (2.154) bulunur ve bulunan bu eşitlikte $B_0=H_1(s)$ yazılırsa Denklem (2.155) elde edilir;

$$H_1(s)(s^{\alpha}-\alpha_1{}^2)=A_0 \tag{2.155}$$

Denklem (2.148)'de k =1 yazılırsa Denklem (2.156) bulunur;

$$B_1\alpha_1{}^2-s^{\alpha}B_1=-A_1 \tag{2.156}$$

Denklem (2.149)'da k=1 yazılırsa Denklem (2.157) elde edilir;

$$2B_1\alpha_1+B_0\alpha_1{}^2-s^{\alpha}B_0=-A_0 \tag{2.157}$$

Denklem (2.154) ve Denklem (2.157) ifadelerinin sağ yanları eşit olduğundan sol yanları da eşittir. Bu sebeple $B_1=0$ olarak bulunur. Dolayısıyla Denklem (2.153)'ten $\alpha_1=H_2(s)/H_1(s)$ bulunur.
Denklem (2.149)'da k=2 yazılırsa;

$$4B_2\alpha_1+B_1\alpha_1{}^2-s^{\alpha}B_1=-A_1 \tag{2.158}$$

Denklem (2.158) elde edilir. Bulunan Denklem (2.156) ve Denklem (2.158) ifadelerinin sağ yanları eşit olduğundan sol yanları da eşittir. Bu sebeple $B_2=0$ bulunur. İşlemler benzer şekilde devam ettirildiğinde;

$$B_k=B_{k-1}=\ldots=B_2=B_1=0 \tag{2.159}$$

Denklem (2.159) elde edilir. B_k katsayıları 0 ise Denklem (2.148) gereği $A_k=A_{k-1}=\ldots=A_3=A_2=A_1=0$ hesaplanır. Bu durumda kaynak fonksiyonu;

$$F(x)=H_1(s)\left(s^{\alpha}-\left(\frac{H_2(s)}{H_1(s)}\right)^2\right)e^{\frac{H_2(s)}{H_1(s)}x} \tag{2.160}$$

Denklem (2.160) olarak hesaplanır. Hesaplanan bu fonksiyona ters Laplace dönüşümü uygulanırsa Denklem (2.161) bulunur;

$$f(x)=L^{-1}\left\{H_1(s)(s^{\alpha}-(H_2(s)/H_1(s))^2)e^{H_2(s)/H_1(s)x}\right\} \tag{2.161}$$

2.5.1.2. α_1 karakteristik denklemin basit bir kökü ise

α_1 karakteristik denklemin basit bir kökü ise model problem Denklem (2.162)'deki gibidir;

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^{\alpha}.U(x,s)=-(A_kx^k+A_{k-1}x^{k-1}+A_{k-2}x^{k-2}+\ldots+A_1x+A_0)e^{\alpha_1 x} \quad (2.162)$$

Model probleme ait özel çözüm ve türevleri Denklem (2.163)-(2.165)'te verilmiştir;

$$U(x,s)=(B_kx^k+B_{k-1}x^{k-1}+B_{k-2}x^{k-2}+\ldots+B_1x^1+B_0)e^{\alpha_1 x}.x \quad (2.163)$$

$$U'=(B_kkx^{k-1}+B_{k-1}(k-1)x^{k-2}+\ldots+B_1)e^{\alpha_1 x}x+ \quad (2.164)$$
$$(B_kx^k+B_{k-1}x^{k-1}+B_{k-2}x^{k-2}+\ldots+B_1x+B_0)\alpha_1 e^{\alpha_1 x}x+$$
$$(B_kx^k+B_{k-1}x^{k-1}+B_{k-2}x^{k-2}+\ldots+B_1x+B_0)e^{\alpha_1 x}$$

$$U''=(B_kk(k-1)x^{k-2}+B_{k-1}(k-1)(k-2)x^{k-3}+\ldots 2B_2)e^{\alpha_1 x}x+ \quad (2.165)$$
$$(B_kkx^{k-1}+B_{k-1}(k-1)x^{k-2}+\ldots B_1)\alpha_1 e^{\alpha_1 x}x+$$
$$(B_kkx^{k-1}+B_{k-1}(k-1)x^{k-2}+\ldots+B_1)e^{\alpha_1 x}+(B_kkx^{k-1}+B_{k-1}(k-1)x^{k-2}+\ldots+B_1)\alpha_1 e^{\alpha_1 x}x+$$
$$(B_kx^k+B_{k-1}x^{k-1}+B_{k-2}x^{k-2}+\ldots B_1x+B_0)\alpha_1^2 xe^{\alpha_1 x}+$$
$$(B_kx^k+B_{k-1}x^{k-1}+B_{k-2}x^{k-2}+\ldots B_1x+B_0)e^{\alpha_1 x}\alpha_1+$$
$$(B_kkx^{k-1}+B_{k-1}(k-1)x^{k-2}+\ldots+B_1)e^{\alpha_1 x}+(B_kx^k+B_{k-1}x^{k-1}+B_{k-2}x^{k-2}+\ldots+B_1x+B_0)e^{\alpha_1 x}\alpha_1$$

Denklem (2.163) ve Denklem (2.165), Denklem (2.162) diferansiyel denkleminde yazılırsa Denklem (2.166) elde edilir;

$$(B_kk(k-1)x^{k-2}+B_{k-1}(k-1)(k-2)x^{k-3}+\ldots+2B_2)e^{\alpha_1 x}x+$$
$$(B_kkx^{k-1}+B_{k-1}(k-1)x^{k-2}+\ldots+B_1)\alpha_1 e^{\alpha_1 x}x+$$
$$(B_kkx^{k-1}+B_{k-1}(k-1)x^{k-2}\ldots B_1)e^{\alpha_1 x}+(B_kkx^{k-1}+B_{k-1}(k-1)x^{k-2}\ldots B_1)\alpha_1 e^{\alpha_1 x}x+$$
$$(B_kx^k+B_{k-1}x^{k-1}+B_{k-2}x^{k-2}+\ldots B_1x+B_0)\alpha_1^2 xe^{\alpha_1 x}+$$
$$(B_kx^k+B_{k-1}x^{k-1}+B_{k-2}x^{k-2}+\ldots B_1x+B_0)e^{\alpha_1 x}\alpha_1+$$
$$(B_kkx^{k-1}+B_{k-1}(k-1)x^{k-2}+\ldots+B_1)e^{\alpha_1 x}+(B_kx^k+B_{k-1}x^{k-1}+B_{k-2}x^{k-2}+\ldots+B_1x+B_0)e^{\alpha_1 x}\alpha_1 -$$
$$s^{\alpha}(B_kx^k+B_{k-1}x^{k-1}+B_{k-2}x^{k-2}\ldots B_1x+B_0)e^{\alpha_1 x}x$$
$$=-(A_kx^k+A_{k-1}x^{k-1}+A_{k-2}x^{k-2}+\ldots A_1x+A_0)e^{\alpha_1 x} \quad (2.166)$$

Denklem (2.163) ve Denklem (2.164)'te U(0,s) ve $U_x(0,s)$ sınır koşulları uygulanırsa;

$$U(0,s)=H_1(s)=0 \quad (2.167)$$

$$U_x(0,s)=H_2(s)=B_0 \tag{2.168}$$

bulunur. Denklem (2.166)'nın her iki yanındaki A_k ve B_k katsayıları birbirine eşitlensin. B_k katsayılarının eşitliğinden;

$$B_k\alpha_1^2-s^\alpha B_k=0 \tag{2.169}$$

elde edilir. Elde edilen bu denklemden $B_k=0$ veya $\alpha_1^2=s^\alpha$ elde edilir. $B_k=0$ olsun. A_k katsayılarının eşitliğinden Denklem (2.170) ve (2.171) bulunur;

$$2B_k k\alpha_1+B_{k-1}\alpha_1^2+2B_k\alpha_1-s^\alpha B_{k-1}=-A_k \tag{2.170}$$

$$B_k k(k-1)+2B_{k-1}(k-1)\alpha_1+2B_k k+B_{k-2}\alpha_1^2+2B_{k-1}\alpha_1-s^\alpha B_{k-2}=-A_{k-1} \tag{2.171}$$

$B_k=0$ katsayıları Denklem (2.170)'de yazıldığında $A_k=0$ olduğu görülür. Bulunan A_k ve B_k katsayıları F(x) fonksiyonunda yerine yazılırsa F(x)=0 olarak hesaplanır ve F(x)'in ters Laplace dönüşümü alınırsa $f(x)=L^{-1}\{0\}=0$ kaynak fonksiyonu elde edilmiş olur.

$\alpha_1^2=s^\alpha$ olursa Denklem (2.170) ifadesi aşağıdaki gibi düzenlenir;

$$2B_k k\alpha_1+2B_k\alpha_1=-A_k \tag{2.172}$$

Denklem (2.172)'de sırasıyla k=0 ve k=1 yazılırsa $A_0=-2B_0\alpha_1$ ve $A_1=-4B_1\alpha_1$ katsayıları bulunur. Denklem (2.170)'de k=2 yazıldığında;

$$-6B_2\alpha_1 = A_2 \tag{2.173}$$

Denklem (2.173) bulunur. Denklem (2.171)'de k=2 yazıldığında;

$$6B_2+4B_1\alpha_1=-A_1 \tag{2.174}$$

Denklem (2.174) elde edilir ve bu eşitlikte $A_1=-4B_1\alpha_1$ eşitliği kullanılırsa $B_2=0$ bulunur. Denklem (2.173)'te $B_2=0$ yazılırsa $A_2=0$ elde edilir. İşlemler bu şekilde devam ettirildiğinde;

$B_k=B_{k-1}=\ldots=B_2=0$ katsayılarına karşılık $A_k=A_{k-1}=\ldots=A_3=A_2=0$ bulunur. Bulunan katsayılar F(x) fonksiyonunda yerine yazılırsa;

$$F(x)= -(4B_1\alpha_1 x+2B_0\alpha_1)e^{\mp\sqrt{s^\alpha}x} \quad (2.175)$$

Denklem (2.175) elde edilir. Elde edilen fonksiyona ters Laplace dönüşümü uygulanırsa Denklem (2.176) kaynak fonksiyon bulunmuş olur;

$$f(x)=L^{-1}\{-(4B_1\alpha_1 x+2B_0\alpha_1)e^{\mp\sqrt{s^\alpha}x}\} \quad (2.176)$$

2.5.1.3. α_1 karakteristik denklemin çift katlı kökü ise

α_1 karakteristik denklemin çift katlı kökü iken model problem Denklem (2.177)'deki gibidir;

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^\alpha.U(x,s)=-(A_kx^k+A_{k-1}x^{k-1}+A_{k-2}x^{k-2}+\ldots+A_1x+A_0)e^{\alpha_1 x} \ , \ \alpha_1\neq 0 \quad (2.177)$$

Denklem (2.177)'ye ait özel çözüm ve türevleri Denklem (2.178)-(2.180)'de verilmiştir;

$$U(x,s)=(B_kx^k+B_{k-1}x^{k-1}+B_{k-2}x^{k-2}+\ldots+B_1x+B_0)e^{\alpha_1 x}x^2 \quad (2.178)$$

$$U'(x,s)=(B_k(k+2)x^{k+1}+B_{k-1}(k+1)x^k+\ldots+4B_2x^3+3B_1x^2+2B_0x)e^{\alpha_1 x}+ \quad (2.179)$$
$$(B_kx^{k+2}+B_{k-1}x^{k+1}+B_{k-2}x^k+\ldots+B_2x^4+B_1x^3+B_0x^2)\alpha_1 e^{\alpha_1 x}$$

$$U''(x,s)=\left(B_k(k+2)(k+1)x^k+B_{k-1}(k+1)kx^{k-1}\ldots+12B_2x^2+6B_1x+2B_0\right)e^{\alpha_1 x}+$$
$$(B_k(k+2)x^{k+1}+B_{k-1}(k+1)x^k+\ldots 4B_2x^3+3B_1x^2+2B_0x)\alpha_1 e^{\alpha_1 x}+$$
$$(B_k(k+2)x^{k+1}+B_{k-1}(k+1)x^k+\ldots 4B_2x^3+3B_1x^2+2B_0x)e^{\alpha_1 x}\alpha_1+$$
$$(B_kx^{k+2}+B_{k-1}x^{k+1}+\ldots B_2x^4+B_1x^3+B_0x^2)\alpha_1^2 e^{\alpha_1 x} \quad (2.180)$$

Bulunan özel çözüm ve türevleri Denklem (2.177)'de yazılırsa;

$$\left(B_k(k+2)(k+1)x^k+B_{k-1}(k+1)kx^{k-1}\ldots+12B_2x^2+6B_1x+2B_0\right)e^{\alpha_1 x}+$$
$$2(B_k(k+2)x^{k+1}+B_{k-1}(k+1)x^k+\ldots 4B_2x^3+3B_1x^2+2B_0x)\alpha_1 e^{\alpha_1 x}+ \quad (2.181)$$
$$(B_kx^{k+2}+B_{k-1}x^{k+1}+\ldots B_2x^4+B_1x^3+B_0x^2)\alpha_1^2 e^{\alpha_1 x}-$$
$$s^\alpha.(B_kx^{k+2}+B_{k-1}x^{k+1}+\ldots B_1x^3+B_0x^2)e^{\alpha_1 x}=-(A_kx^k+A_{k-1}x^{k-1}+A_{k-2}x^{k-2}\ldots A_1x+A_0)e^{\alpha_1 x}$$

Denklem (2.181) elde edilir ve bulunan denklemin her iki yanındaki A_k ve B_k katsayıları birbirine eşitlenir.

B_k katsayılarının eşitlenmesinden Denklem (2.182) bulunur;

$$B_k\alpha_1^2-s^\alpha.\ B_k=0 \tag{2.182}$$

Denklem (2.182)'nin düzenlenmesiyle $B_k(\alpha_1^2-s^\alpha)=0$ eşitliği elde edilir ve buradan $B_k=0$ veya $\alpha_1^2=s^\alpha$ bulunur. A_k katsayılarının eşitlenmesinden Denklem (2.183) yazılır;

$$B_k(k+2)(k+1)+B_{k-1}(k+1)\alpha_1+B_{k-1}(k+1)\alpha_1+B_{k-2}\alpha_1^2-s^\alpha.B_{k-2}=-A_k \tag{2.183}$$

$B_k=0$ olursa Denklem (2.183)'ten $A_k=0$ elde edilir. $U(0,s)$ ve $U_x(0,s)$ sınır koşulları Denklem (2.178) ve Denklem (2.179)'a uygulanırsa;

$$U(0,s)=H_1(s)=0 \tag{2.184}$$

$$U_x(0,s)=H_2(s)=0 \tag{2.185}$$

Denklem (2.183)'te elde edilen değerler ile A_k ve B_k katsayıları göz önüne alınırsa $F(x)=0$ elde edilir ve elde edilen bu $F(x)$ fonksiyonuna ters Laplace dönüşümü uygulanırsa $f(x)=L^{-1}\{0\}=0$ bulunmuş olur.

$\alpha_1^2=s^\alpha$ durumu için öncelikle Denklem (2.183)'te α_1^2 yerine s^α yazalım bu durumda A_k katsayısı Denklem (2.186)'daki gibi elde edilir;

$$-[B_k(k+2)(k+1)+B_{k-1}(k+1)\alpha_1+B_{k-1}(k+1)\alpha_1]=A_k \tag{2.186}$$

Bulunan A_k katsayıları $F(x)$ fonksiyonunda yazılırsa;

$$F(x)=-\sum_{k=0}^{k}[B_k(k+2)(k+1)+B_{k-1}(k+1)\alpha_1+B_{k-1}(k+1)\alpha_1]x^k e^{\alpha_1 x} \tag{2.187}$$

Denklem (2.187) bulunur. Son olarak bulunan denkleme ters Laplace dönüşümü uygulanırsa Denklem (2.188) kaynak fonksiyon elde edilir;

$$f(x)=L^{-1}\left\{-\sum_{k=0}^{k}[B_k(k+2)(k+1)+B_{k-1}(k+1)\alpha_1+B_{k-1}(k+1)\alpha_1]x^k e^{\alpha_1 x}\right\} \tag{2.188}$$

2.5.2. f sadece t değişkenine bağlı fonksiyon

2.5.2.1. α_1 karakteristik denklemin bir kökü değil ise

α_1 karakteristik denklemin bir kökü değil ise model problem Denklem (2.189)'daki gibidir;

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^{\alpha}.U(x,s)=-(A_k s^k+A_{k-1}s^{k-1}+A_{k-2}s^{k-2}+\ldots+A_1 s+A_0)e^{\alpha_1 s} \quad (2.189)$$

Denklem (2.189)'a ait özel çözümler ve türevleri Denklem (2.190) ve Denklem (2.191)'de verilmiştir;

$$U(x,s)=(B_k s^k+B_{k-1}s^{k-1}+B_{k-2}s^{k-2}+\ldots+B_1 s+B_0)e^{\alpha_1 s} \quad (2.190)$$

$$U''=U'=0 \quad (2.191)$$

Elde edilen özel çözüm ve türevleri Denklem (2.189)'da yazılırsa;

$$-s^{\alpha}.(B_k s^k+B_{k-1}s^{k-1}+B_{k-2}s^{k-2}+\ldots+B_1 s+B_0)e^{\alpha_1 s} \quad (2.192)$$
$$=-(A_k s^k+A_{k-1}s^{k-1}+A_{k-2}s^{k-2}+\ldots+A_1 s+A_0)e^{\alpha_1 s}$$

Denklem (2.192) bulunur. Denklem (2.192)'de eşitliğin her iki yanındaki A_k ve B_k katsayıları birbirine eşitlenirse;

$$s^{\alpha}B_k=A_k \quad (2.193)$$
$$s^{\alpha}B_{k-1}=A_{k-1} \quad (2.194)$$
$$\vdots$$
$$s^{\alpha}B_0=A_0 \quad (2.195)$$

Denklem (2.193)-(2.195) elde edilir. Elde edilen A_k katsayıları $F(s)$ fonksiyonunda yerine yazılırsa;

$$F(s)=e^{\alpha_1 s}\sum_{k=0}^{k}\left(B_k.s^{\alpha+k}\right) \quad (2.196)$$

Denklem (2.196) elde edilir ve elde edilen bu denkleme ters Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$f(t)=L^{-1}\left\{e^{\alpha_1 s}.\sum_{k=0}^{k}\left(B_k.s^{\alpha+k}\right)\right\} \quad (2.197)$$

Denklem (2.197) kaynak fonksiyonu hesaplanmış olur.

2.5.2.2. α_1 karakteristik denklemin basit bir kökü ise

α_1 karakteristik denklemin basit bir kökü ise model problem Denklem (2.198)'daki gibidir;

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^{\alpha}.U(x,s)=-(A_k s^k+A_{k-1}s^{k-1}+A_{k-2}s^{k-2}+\ldots+A_1 s+A_0)e^{\alpha_1 s} \tag{2.198}$$

Denklem (2.198)'e ait özel çözümler ve türevleri Denklem (2.199) ve Denklem (2.200)'de verilmiştir;

$$U(x,s)=(B_k s^k+B_{k-1}s^{k-1}+B_{k-2}s^{k-2}+\ldots+B_1 s+B_0)e^{\alpha_1 s}s \tag{2.199}$$

$$U''=U'=0 \tag{2.200}$$

Elde edilen özel çözüm ve türevleri Denklem (2.198)'de yazılırsa Denklem (2.201) bulunur;

$$\begin{aligned}&-s^{\alpha}.(B_k s^k+B_{k-1}s^{k-1}+B_{k-2}s^{k-2}+\ldots+B_1 s+B_0)e^{\alpha_1 s}s\\&=-(A_k s^k+A_{k-1}s^{k-1}+A_{k-2}s^{k-2}+\ldots+A_1 s+A_0)e^{\alpha_1 s}\end{aligned} \tag{2.201}$$

Denklem (2.201)'deki eşitliğin her iki yanındaki A_k ve B_k katsayıları birbirine eşitlenirse $B_k=0$, $A_0=0$ ve Denklem (2.202)-(2.204) elde edilir;

$$s^{\alpha}B_{k-1}=A_k \tag{2.202}$$

$$s^{\alpha}B_{k-2}=A_{k-1} \tag{2.203}$$

$$\vdots$$

$$s^{\alpha}B_0=A_1 \tag{2.204}$$

Elde edilen A_k katsayıları $F(s)$ fonksiyonunda yerine yazılırsa;

$$F(s)=e^{\alpha_1 s}\sum_{k=1}^{k}\left(B_{k-1}.s^{\alpha+k}\right) \tag{2.205}$$

Denklem (2.205) elde edilir ve elde edilen bu denkleme ters Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$f(t)=L^{-1}\left\{e^{\alpha_1 s}.\sum_{k=1}^{k}\left(B_{k-1}.s^{\alpha+k}\right)\right\} \quad (2.206)$$

Denklem (2.206) kaynak fonksiyonu hesaplanmış olur.

2.5.2.3. α_1 karakteristik denklemin çift katlı kökü ise

α_1 karakteristik denklemin çift katlı kökü ise model problem Denklem (2.207)'deki gibidir;

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^{\alpha}.U(x,s)=-(A_k s^k+A_{k-1}s^{k-1}+A_{k-2}s^{k-2}+\ldots+A_1 s+A_0)e^{\alpha_1 s} \quad (2.207)$$

Denklem (2.207)'ye ait özel çözümler ve türevleri Denklem (2.208) ve Denklem (2.209)'da verilmiştir;

$$U(x,s)=(B_k s^k+B_{k-1}s^{k-1}+B_{k-2}s^{k-2}+\ldots+B_1 s+B_0)e^{\alpha_1 s}s^2 \quad (2.208)$$

$$U''=U'=0 \quad (2.209)$$

Elde edilen özel çözüm ve türevleri Denklem (2.207)'de yazılırsa;

$$-s^{\alpha}.(B_k s^k+B_{k-1}s^{k-1}+B_{k-2}s^{k-2}+\ldots+B_1 s+B_0)e^{\alpha_1 s}s^2$$
$$=-(A_k s^k+A_{k-1}s^{k-1}+A_{k-2}s^{k-2}+\ldots+A_1 s+A_0)e^{\alpha_1 s} \quad (2.210)$$

Denklem (2.210) bulunur.
Denklem (2.210)'da eşitliğin her iki yanındaki A_k ve B_k katsayıları birbirine eşitlenirse $B_k=B_{k-1}=0$, $A_0=A_1=0$ ve Denklem (2.211)-(2.213) elde edilir;

$$s^{\alpha}B_{k-2}=A_k \quad (2.211)$$
$$s^{\alpha}B_{k-3}=A_{k-1} \quad (2.212)$$
$$\vdots$$
$$s^{\alpha}B_0=A_2 \quad (2.213)$$

Elde edilen A_k katsayıları F(s) fonksiyonunda yerine yazılırsa;

$$F(s)=e^{\alpha_1 s}\sum_{k=2}^{k}\left(B_{k-2}.s^{\alpha+k}\right) \quad (2.214)$$

Denklem (2.214) elde edilir ve elde edilen bu denkleme ters Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$f(t)=L^{-1}\left\{e^{\alpha_1 s}.\sum_{k=2}^{k}\left(B_{k-2}.s^{\alpha+k}\right)\right\} \tag{2.215}$$

Denklem (2.215) kaynak fonksiyonu bulunur.

2.6. f(x,t) Kaynak Fonksiyonunun Üstel ve Trigonometrik Fonksiyonların Çarpımı Şeklinde Yazıldığı Durum

Bu durum α_1'in karakteristik denklemin kökü olup olmadığına göre 3 aşamada incelenir.

2.6.1. f sadece x değişkenine bağlı fonksiyon

f sadece x'e bağlı fonksiyon olsun. Bu durumda α_1'in durumları aşağıdaki verilmiştir.

2.6.1.1. α_1 karakteristik denklemin kökü değil ise

α_1 karakteristik denklemin kökü değil ise model problem Denklem (2.216)'daki gibidir;

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^{\alpha}.U(x,s)=-(A.\sin\beta x+B\cos\beta x)e^{\alpha_1 x} \tag{2.216}$$

Model problemin özel çözümü ve türevleri Denklem (2.217)-(2.219)'da verilmiştir;

$$U(x,s)=(C\sin\beta x+D\cos\beta x)e^{\alpha_1 x} \tag{2.217}$$

$$U'=(C\sin\beta x+D\cos\beta x)e^{\alpha_1 x}\alpha_1+e^{\alpha_1 x}(C\beta\cos\beta x-D\beta\sin\beta x) \tag{2.218}$$
$$=e^{\alpha_1 x}.[(C\sin\beta x+D\cos\beta x)\alpha_1+(C\beta\cos\beta x-D\beta\sin\beta x)]$$

$$U''=e^{\alpha_1 x}\alpha_1[\alpha_1(C\sin\beta x+D\cos\beta x)+(C\beta\cos\beta x-D\beta\sin\beta x)]+ \tag{2.219}$$
$$e^{\alpha_1 x}.\left[\alpha_1(C\beta\cos\beta x-D\beta\sin\beta x)+(-C\beta^2\sin\beta x-D\beta^2\cos\beta x)\right]$$

Elde edilen denklemler Denklem (2.216)'da ilgili yerlere yazılırsa Denklem (2.220) elde edilir;

$$e^{\alpha_1 x}\alpha_1[\alpha_1(C\sin\beta x+D\cos\beta x)+(C\beta\cos\beta x-D\beta\sin\beta x)]+$$

$$e^{\alpha_1 x}.\left[\alpha_1(C\beta\cos\beta x-D\beta\sin\beta x)+(-C\beta^2\sin\beta x-D\beta^2\cos\beta x)\right]-$$
$$s^{\alpha}(C\sin\beta x+D\cos\beta x)e^{\alpha_1 x}=-(A\sin\beta x+B\cos\beta x)e^{\alpha_1 x} \quad (2.220)$$

Denklem (2.220) ifadesinde katsayılar eşitlenerek kaynak fonksiyonuna ait olan A ve B katsayıları bulunursa;

$$-\alpha_1{}^2.C+\alpha_1 D\beta+\alpha_1 D\beta+C\beta^2+s^{\alpha}.C=A \quad (2.221)$$

$$-\alpha_1{}^2.D-\alpha_1 C\beta-\alpha_1 C\beta+D\beta^2+s^{\alpha}.D=B \quad (2.222)$$

Denklem (2.221) ve Denklem (2.222) elde edilir. Sınır koşulları Denklem (2.217) ve Denklem (2.218)'e uygulanırsa;

$$U(0,s)=D=H_1(s) \quad (2.223)$$

$$U_x(0,s)=\alpha_1 D+C\beta=H_2(s) \quad (2.224)$$

Denklem (2.223) ve Denklem (2.224) elde edilir.
Denklem (2.223)'te elde edilen D katsayısı Denklem (2.224)'te yazılırsa C katsayısı Denklem (2.225)'teki gibi bulunmuş olur;

$$C=\frac{H_2(s)-\alpha_1 H_1(s)}{\beta} \quad (2.225)$$

Bulunan C ve D katsayıları Denklem (2.221) ve Denklem (2.222)'de yazılınca Denklem (2.226) ve Denklem (2.227) elde edilir;

$$A=2\alpha_1\beta H_1(s)+\left(\frac{H_2(s)-\alpha_1 H_1(s)}{\beta}\right)\left(\beta^2-\alpha_1{}^2+s^{\alpha}\right) \quad (2.226)$$

$$B=-2\alpha_1\beta\left(\frac{H_2(s)-\alpha_1 H_1(s)}{\beta}\right)+H_1(s)\,(\beta^2-\alpha_1{}^2+s^{\alpha}) \quad (2.227)$$

Bulunan A ve B katsayıları F(x) fonksiyonunda yerine yazılırsa Denklem (2.228) bulunur;

$$F(x)=\left(2\alpha_1\beta H_1(s)+((H_2(s)-\alpha_1 H_1(s))/\beta)\left(\beta^2-\alpha_1{}^2+s^{\alpha}\right)\right)e^{\alpha_1 x}\sin\beta x+$$
$$\left(-2\alpha_1\beta\left((H_2(s)-\alpha_1 H_1(s))/\beta\right)+H_1(s)(\beta^2-\alpha_1{}^2+s^{\alpha})\right)e^{\alpha_1 x}\cos\beta x \quad (2.228)$$

Bulunan Denklem (2.228)'e ters Laplace dönüşümü uygulanırsa Denklem (2.229) kaynak fonksiyonu elde edilmiş olur;

$$f(x)=L^{-1}\left\{\left(2\alpha_1\beta H_1(s)+((H_2(s)-\alpha_1 H_1(s))/\beta)\left(\beta^2-{\alpha_1}^2+s^\alpha\right)\right)e^{\alpha_1 x}\sin\beta x+\left(-2\alpha_1\beta\left((H_2(s)-\alpha_1 H_1(s))/\beta\right)+H_1(s)(\beta^2-{\alpha_1}^2+s^\alpha)\right)e^{\alpha_1 x}\cos\beta x\right\} \quad (2.229)$$

2.6.1.2. α_1 karakteristik denklemin basit bir kökü ise

α_1 karakteristik denklemin basit bir kökü ise model problem Denklem (2.230)'daki gibidir;

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^\alpha.U(x,s)=-(A.\sin\beta x+B\cos\beta x)e^{\alpha_1 x} \quad (2.230)$$

Denklem (2.230)'un özel çözümü ve türevleri Denklem (2.231)-(2.233)'te verilmiştir;

$$U=(C\sin\beta x+D\cos\beta x)e^{\alpha_1 x}x \quad (2.231)$$

$$U'=(C\sin\beta x+D\cos\beta x)e^{\alpha_1 x}\alpha_1 x+e^{\alpha_1 x}(C\beta\cos\beta x-D\beta\sin\beta x)x+(C\sin\beta x+D\cos\beta x)e^{\alpha_1 x}$$
$$=e^{\alpha_1 x}.[(C\sin\beta x+D\cos\beta x)\alpha_1 x+(C\beta\cos\beta x-D\beta\sin\beta x)x+(C\sin\beta x+D\cos\beta x)] \quad (2.232)$$

$$U''=e^{\alpha_1 x}\alpha_1[\alpha_1 x(C\sin\beta x+D\cos\beta x)+x(C\beta\cos\beta x-D\beta\sin\beta x)+(C\sin\beta x+D\cos\beta x)]+$$
$$e^{\alpha_1 x}.[\alpha_1 x(C\beta\cos\beta x-D\beta\sin\beta x)+(C\sin\beta x+D\cos\beta x)\alpha_1+\left(-C\beta^2\sin\beta x-D\beta^2\cos\beta x\right)x+$$
$$(C\beta\cos\beta x-D\beta\sin\beta x)+(C\beta\cos\beta x-D\beta\sin\beta x)] \quad (2.233)$$

Elde edilen denklemler Denklem (2.230)'da ilgili yerlere yazılırsa;

$$e^{\alpha_1 x}\alpha_1[\alpha_1 x(C\sin\beta x+D\cos\beta x)+x(C\beta\cos\beta x-D\beta\sin\beta x)+(C\sin\beta x+D\cos\beta x)]+$$
$$e^{\alpha_1 x}.[\alpha_1 x(C\beta\cos\beta x-D\beta\sin\beta x)+(C\sin\beta x+D\cos\beta x)\alpha_1+\left(-C\beta^2\sin\beta x-D\beta^2\cos\beta x\right)x+$$
$$(C\beta\cos\beta x-D\beta\sin\beta x)+(C\beta\cos\beta x-D\beta\sin\beta x)]-$$
$$s^\alpha.(C\sin\beta x+D\cos\beta x)e^{\alpha_1 x}x=-(A.\sin\beta x+B\cos\beta x)e^{\alpha_1 x} \quad (2.234)$$

Denklem (2.234) bulunur. Eşitliğin her iki tarafındaki katsayılar birbirine eşitlenirse;

$$-2\alpha_1 C+2D\beta=A \quad (2.235)$$
$$-2\alpha_1 D-2C\beta=B \quad (2.236)$$

$$-{\alpha_1}^2.C+2\alpha_1 D\beta+C\beta^2+s^\alpha.C=0 \quad (2.237)$$

$$-\alpha_1{}^2.D-2\alpha_1 C\beta+D\beta^2+s^\alpha.D=0 \tag{2.238}$$

Denklem (2.235)-(2.238) elde edilir. Sınır koşulları Denklem (2.231) ve Denklem (2.232)'de yerlerine yazılırsa $H_1(s)=0$ ve $H_2(s)=D$ elde edilir. Bulunan eşitlikler Denklem (2.238)'de yerine yazılırsa C katsayısı;

$$C=\frac{H_2(s)(-\beta^2+\alpha_1{}^2-s^\alpha)}{-2\alpha_1\beta} \tag{2.239}$$

Denklem (2.239) olarak bulunur. Elde edilen C ve D katsayıları Denklem (2.236)'da yazılırsa A ve B katsayıları Denklem (2.240) ve Denklem (2.241)'deki gibi elde edilir;

$$A=2\beta H_2(s)+\frac{H_2(s)(-\beta^2+\alpha_1{}^2-s^\alpha)}{\beta} \tag{2.240}$$

$$B=-2\alpha_1 H_2(s)+\frac{H_2(s)(-\beta^2+\alpha_1{}^2-s^\alpha)}{\alpha_1} \tag{2.241}$$

Bulunan A ve B katsayıları F(x) fonksiyonunda yerine yazılırsa;

$$F(x)=\left(2\beta H_2(s)+\frac{H_2(s)(-\beta^2+\alpha_1{}^2-s^\alpha)}{\beta}\right).\sin\beta x e^{\alpha_1 x}+$$
$$\left(-2\alpha_1 H_2(s)+\frac{H_2(s)(-\beta^2+\alpha_1{}^2-s^\alpha)}{\alpha_1}\right)\cos\beta x e^{\alpha_1 x} \tag{2.242}$$

Denklem (2.242) bulunur. En son elde edilen F(x) fonksiyonuna ters Laplace dönüşümü uygulanırsa f(x) kaynak fonksiyonu Denklem (2.243)'teki gibi bulunur;

$$f(x)=L^{-1}\left\{\left(2\beta H_2(s)+\frac{H_2(s)(-\beta^2+\alpha_1{}^2-s^\alpha)}{\beta}\right).\sin\beta x e^{\alpha_1 x}+\right.$$
$$\left.\left(-2\alpha_1 H_2(s)+\frac{H_2(s)(-\beta^2+\alpha_1{}^2-s^\alpha)}{\alpha_1}\right)\cos\beta x e^{\alpha_1 x}\right\} \tag{2.243}$$

2.6.1.3. α_1 karakteristik denklemin çift katlı kökü ise

α_1 karakteristik denklemin çift katlı kökü ise model problem Denklem (2.244)'teki gibidir;

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2} - s^{\alpha}.U(x,s) = -(A.\sin\beta x + B\cos\beta x)e^{\alpha_1 x} \quad (2.244)$$

Denklem (2.244)'ün özel çözümü ve türevleri Denklem (2.245)-(2.247)'de verilmiştir;

$$U = (C\sin\beta x + D\cos\beta x)e^{\alpha_1 x}x^2 \quad (2.245)$$

$$U' = (C\beta\cos\beta x - D\beta\sin\beta x)e^{\alpha_1 x}x^2 + (C\sin\beta x + D\cos\beta x)e^{\alpha_1 x}\alpha_1 x^2 + 2(C\sin\beta x + D\cos\beta x)e^{\alpha_1 x}x \quad (2.246)$$

$$U'' = (-C\beta^2\sin\beta x - D\beta^2\cos\beta x)e^{\alpha_1 x}x^2 + 4x(C\beta\cos\beta x - D\beta\sin\beta x)e^{\alpha_1 x} + 4x(C\sin\beta x + D\cos\beta x)e^{\alpha_1 x}\alpha_1 + 2(C\beta\cos\beta x - D\beta\sin\beta x)e^{\alpha_1 x}x^2\alpha_1 + (C\sin\beta x + D\cos\beta x)e^{\alpha_1 x}x^2\alpha_1{}^2 + 2(C\sin\beta x + D\cos\beta x)e^{\alpha_1 x} \quad (2.247)$$

Bulunan ifadeler Denklem (2.244)'te yerlerine yazılırsa Denklem (2.248) elde edilir;

$$(-C\beta^2\sin\beta x - D\beta^2\cos\beta x)e^{\alpha_1 x}x^2 + 4(C\beta\cos\beta x - D\beta\sin\beta x)e^{\alpha_1 x}x + 4(C\sin\beta x + D\cos\beta x)e^{\alpha_1 x}\alpha_1 x + 2(C\beta\cos\beta x - D\beta\sin\beta x)e^{\alpha_1 x}x^2\alpha_1 + (C\sin\beta x + D\cos\beta x)e^{\alpha_1 x}x^2\alpha_1{}^2 + 2(C\sin\beta x + D\cos\beta x)e^{\alpha_1 x} - s^{\alpha}(C\sin\beta x + D\cos\beta x)e^{\alpha_1 x}x^2 = -(A\sin\beta x + B\cos\beta x)e^{\alpha_1 x} \quad (2.248)$$

Bulunan denklemin her iki tarafındaki katsayılar birbirine eşitlenirse;

$$2C = -A \quad (2.249)$$

$$2D = -B \quad (2.250)$$

$$4\alpha_1 C - 4D\beta = 0 \quad (2.251)$$

$$4\alpha_1 D + 4C\beta = 0 \quad (2.252)$$

$$-C\beta^2 + C\alpha_1{}^2 - 2\alpha_1 D\beta - s^{\alpha}C = 0 \quad (2.253)$$

$$-D\beta^2 + D\alpha_1{}^2 + 2\alpha_1 C\beta - s^{\alpha}D = 0 \quad (2.254)$$

Denklem (2.249)-(2.254) elde edilir. Denklem (2.249) ve Denklem (2.250)'deki ifadeler Denklem (2.251) ve Denklem (2.252)'de yerlerine yazılırsa;

$$B\beta = A\alpha_1 \quad (2.255)$$

$$A\beta = -B\alpha_1 \quad (2.256)$$

Denklem (2.255) ve (2.256) bulunur. Bulunan bu iki denklem taraf tarafa oranlanıp çözülürse A=0 ve B=0 elde edilir. Bulunan katsayılar F(x) fonksiyonunda yazılırsa F(x)=0 bulunur ve bulunan denklemin ters Laplace dönüşümü hesaplanırsa f(x)=0 kaynak fonksiyonu elde edilmiş olur.

2.6.2. f sadece t değişkenine bağlı fonksiyon

f sadece t'ye bağlı fonksiyon olsun. Bu durumda α_1'in durumları aşağıdaki verilmiştir.

2.6.2.1. α_1 karakteristik denklemin kökü değil ise

α_1 karakteristik denklemin kökü değil ise model problem Denklem (2.257)'deki gibidir;

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^{\alpha}.U(x,s)=-(A.\sin\beta s+B\cos\beta s)e^{\alpha_1 s} \quad (2.257)$$

Denklem (2.257)'ye ait özel çözüm ve türevleri Denklem (2.258) ve Denklem (2.259)'da hesaplanmıştır;

$$U(x,s)=(C\sin\beta s+D\cos\beta s)e^{\alpha_1 s} \quad (2.258)$$

$$U''=U'=0 \quad (2.259)$$

Hesaplanan ifadeler Denklem (2.257)'de yazılırsa;

$$-s^{\alpha}.(C\sin\beta s+D\cos\beta s)e^{\alpha_1 s}=-(A.\sin\beta s+B\cos\beta s)e^{\alpha_1 s} \quad (2.260)$$

Denklem (2.260) elde edilir. Bulunan denklemin katsayıları birbirine eşitlenirse;

$$s^{\alpha}C=A \quad (2.261)$$

$$s^{\alpha}D=B \quad (2.262)$$

Denklem (2.261) ve Denklem (2.262) bulunur ve bu katsayılar F(s) kaynak fonksiyonunda yerine konursa Denklem (2.263) yazılır;

$$F(s)=(s^{\alpha}C.\sin\beta s+s^{\alpha}D\cos\beta s)e^{\alpha_1 s} \quad (2.263)$$

Başlangıç koşulu Denklem (2.258)'de sağlatılırsa;

$$U(x,0)=D=\frac{f_1(x)}{s} \tag{2.264}$$

Denklem (2.264) elde edilir. Denklem (2.264) ve Denklem (2.261) kullanılarak F(s) fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır;

$$F(s)=(s^{\alpha}C.\sin\beta s+s^{\alpha-1}f_1(x).\cos\beta s)e^{\alpha_1 s} \tag{2.265}$$

Son olarak F(s) fonksiyonuna ters Laplace dönüşümü uygulanırsa Denklem (2.266) elde edilir;

$$f(t)=L^{-1}\{(s^{\alpha}C\sin\beta s+s^{\alpha-1}f_1(x).\cos\beta s)e^{\alpha_1 s}\} \tag{2.266}$$

2.6.2.2. α_1 karakteristik denklemin basit bir kökü ise

α_1 karakteristik denklemin basit bir kökü ise model problem Denklem (2.267)'deki gibi yazılır;

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^{\alpha}.U(x,s)=-(A.\sin\beta s+B\cos\beta s)e^{\alpha_1 s} \tag{2.267}$$

Denklem (2.267)'ye ait özel çözüm ve türevleri Denklem (2.268) ve Denklem (2.269)'da hesaplanmıştır;

$$U(x,s)=(C\sin\beta s+D\cos\beta s)e^{\alpha_1 s}s \tag{2.268}$$

$$U''=U'=0 \tag{2.269}$$

Denklem (2.268) ve Denklem (2.269), Denklem (2.267)'de yerlerine yazılırsa;

$$-s^{\alpha+1}(C\sin\beta s+D\cos\beta s)e^{\alpha_1 s}=-(A.\sin\beta s+B\cos\beta s)e^{\alpha_1 s} \tag{2.270}$$

Denklem (2.270) elde edilir ve elde edilen denklemin her iki tarafının eşitliği sağlanırsa Denklem (2.271) ve Denklem (2.272) bulunur;

$$s^{\alpha+1}.C=A \tag{2.271}$$

$$s^{\alpha+1}.D=B \tag{2.272}$$

Başlangıç koşulunu Denklem (2.268) özel çözümüne uygularsak $U(x,0)= f_1(x)/s=0$ olduğundan $f_1(x)=0$ elde edilir. A ve B katsayıları yardımıyla;

$$F(s)=s^{\alpha+1}(C\sin\beta s+D\cos\beta s)e^{\alpha_1 s} \quad (2.273)$$

Denklem (2.273) bulunur ve bulunan ifadeye ters Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$f(t)= L^{-1}\{s^{\alpha+1}(C\sin\beta s+D\cos\beta s)e^{\alpha_1 s}\} \quad (2.274)$$

Denklem (2.274) kaynak fonksiyonu bulunmuş olur.

2.6.2.3. α_1 karakteristik denklemin çift katlı kökü ise

α_1 karakteristik denklemin çift katlı kökü ise model problem Denklem (2.275)'te verilmiştir;

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^{\alpha}.U(x,s)=-(A.\sin\beta s+B\cos\beta s)e^{\alpha_1 s} \quad (2.275)$$

Denklem (2.275)'e ait özel çözüm ve türevleri Denklem (2.276) ve Denklem (2.277)'deki gibidir;

$$U(x,s)=(C\sin\beta s+D\cos\beta s)e^{\alpha_1 s}s^2 \quad (2.276)$$

$$U''=U'=0 \quad (2.277)$$

Denklem (2.276) ve Denklem (2.277), Denklem (2.275)'te yerlerine yazılırsa;

$$-s^{\alpha+2}(C\sin\beta s+D\cos\beta s)e^{\alpha_1 s}=-(A\sin\beta s+B\cos\beta s)e^{\alpha_1 s} \quad (2.278)$$

Denklem (2.278) elde edilir ve elde edilen denklemde her iki tarafın eşitliği sağlanırsa;

$$s^{\alpha+2}C=A \quad (2.279)$$

$$s^{\alpha+2}D=B \quad (2.280)$$

Denklem (2.279) ve Denklem (2.280) bulunur. Başlangıç koşulu Denklem (2.276)'ya uygulanırsa $U(x,0)= f_1(x)/s=0$ olduğundan $f_1(x)=0$ bulunur.
A ve B katsayıları yardımıyla Denklem (2.281) elde edilir;

$$F(s)=s^{\alpha+2}(C\sin\beta s+D\cos\beta s)e^{\alpha_1 s} \quad (2.281)$$

Denklem (2.281) ifadesine ters Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$f(t)=L^{-1}\{ s^{\alpha+2}(C\sin\beta s+D\cos\beta s)e^{\alpha_1 s}\} \quad (2.282)$$

hesaplanır.

2.7. f(x,t) Kaynak Fonksiyonunun k. Dereceden Polinom, Üstel ve Trigonometrik Fonksiyonların Çarpımı Biçiminde Yazıldığı Durum

2.7.1. f sadece x değişkenine bağlı fonksiyon

f sadece x'e bağlı fonksiyon olsun. Bu durumda α_1'in durumları aşağıdaki verilmiştir.

2.7.1.1. α_1 karakteristik denklemin kökü değil ise

α_1 karakteristik denklemin kökü değil ise model problem Denklem (2.283)'teki gibidir;

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2} - s^{\alpha}.U(x,s) = -e^{\alpha_1 x}.(C\cos\beta x+D\sin\beta x).(B_k x^k+B_{k-1}.x^{k-1}+\ldots+B_1 x+B_0) \quad (2.283)$$

Denklem (2.283) ifadesine ait özel çözüm ve türevleri Denklem (2.284)-(2.286)'da verilmiştir;

$$U= e^{\alpha_1 x}.(A\cos\beta x+B\sin\beta x)(A_k x^k+A_{k-1}.x^{k-1}+\ldots+A_2x^2+A_1x+A_0) \quad (2.284)$$

$$\begin{aligned} U' &= \alpha_1.\, e^{\alpha_1 x}.(A\cos\beta x+B\sin\beta x)(A_k x^k+A_{k-1}.x^{k-1}+\ldots+A_2x^2+A_1x+A_0)+ \\ &e^{\alpha_1 x}(-A\beta\sin\beta x+B\beta\cos\beta x).\,(A_k x^k+A_{k-1}.x^{k-1}+\ldots+A_2x^2+A_1x+A_0)+ \\ &e^{\alpha_1 x}(A\beta.\sin\beta x+B\beta\cos\beta x)(A_k.k.x^{k-1}+A_{k-1}.(k-1).x^{k-2}+\ldots+2A_2x^2+A_1x+A_1) \end{aligned} \quad (2.285)$$

$$\begin{aligned} U'' &= \alpha_1^2.\, e^{\alpha_1 x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)(A_k x^k+A_{k-1}.x^{k-1}+\ldots+A_2x^2+A_1x+A_0)+ \\ &2\alpha_1 e^{\alpha_1 x}.(-A\beta.\sin\beta x+B\beta\cos\beta x).\,(A_k x^k+A_{k-1}.x^{k-1}+\ldots+A_2x^2+A_1x+A_0)+ \\ &2\alpha_1 e^{\alpha_1 x}.(A\beta.\cos\beta x+B\beta\sin\beta x).(A_k.k.x^{k-1}+A_{k-1}.(k-1).x^{k-2}+\ldots+2A_2x^2+A_1x+A_1)+ \\ &e^{\alpha_1 x}.(-A\beta^2.\cos\beta x-B\beta^2\sin\beta x).\,(A_k x^k+A_{k-1}.x^{k-1}+\ldots+A_2x^2+A_1x+A_0)+ \\ &2e^{\alpha_1 x}.(-A\beta.\sin\beta x+B\beta\cos\beta x).\,(A_k.k.x^{k-1}+A_{k-1}.(k-1)\,x^{k-2}+\ldots+2A_2x+A_1)+ \\ &e^{\alpha_1 x}.(A\cos\beta x+B\sin\beta x).(\,A_k.k.(k-1).\,x^{k-2}+\,A_{k-1}.(k-1).(k-2).\,x^{k-3}+\ldots+6A_3x+2A_2) \end{aligned} \quad (2.286)$$

Denklem (2.284)-(2.286)'da bulunan özel çözüm ve türevleri Denklem (2.283)'te yerlerine yazılıp denklemin her iki tarafındaki katsayılar birbirlerine eşitlendiğinde $e^{\alpha_1 x}\cos\beta x.x^k$ katsayılarının eşitliğinden Denklem (2.287)-(2.289);

$$\alpha_1^2.A.A_k+\alpha_1.B\beta.A_{k+}\ \alpha_1.B\beta.A_k - A\beta^2.A_k - s^{\alpha}.A.A_k = -C.B_k \quad (2.287)$$

$$\alpha_1^2.A.A_{k-1}+\alpha_1.B\beta.A_{k-1+}\alpha_1.A.A_k.k+\alpha_1.B\beta.A_{k-1}-A\beta^2.A_{k-1}+ B\beta.A_k.k+$$
$$\alpha_1.A.A_k.k+ B\beta.A_k.k-s^{\alpha}.A.A_{k-1}= -C.B_{k-1} \quad (2.288)$$

$$\alpha_1^2.A.A_{k-2}+\alpha_1.B\beta.A_{k-2+}\ \alpha_1.A.A_k.(k-1)+ \alpha_1.B\beta.A_{k-2}-A\beta^2.A_{k-2}+ B\beta.A_{k-1}.(k-1)+$$
$$\alpha_1.A.A_{k-1}.(k-1) + B\beta.A_{k-1}.(k-1)+ A.A_k.k.(k-1)-s^{\alpha}.A.A_{k-2}= -C.B_{k-2} \quad (2.289)$$

$e^{\alpha_1 x}\sin\beta x.x^k$ katsayılarının eşitliğinden Denklem (2.290)-(2.292) hesap edilir;

$$\alpha_1^2.B.A_k-\alpha_1.A\beta.A_k- \alpha_1.A\beta.A_k- B\beta^2.A_k -s^{\alpha}.B.A_k = -D.B_k \quad (2.290)$$

$$\alpha_1^2.B.A_{k-1}-\alpha_1.A\beta.A_{k-1}+\alpha_1.B.A_k.k-\alpha_1.\ A\beta.A_{k-1}-B\beta^2.A_{k-1}-\ A\beta.A_k.k+\alpha_1.\ B.A_k.k-$$
$$A\beta.A_k.k-s^{\alpha}.B.A_{k-1}= -D.B_{k-1} \quad (2.291)$$

$$\alpha_1^2.\ B.\ A_{k-2}-\alpha_1.A\beta.A_{k-2}+\alpha_1.\ B.A_{k-1}.(k-1)-\alpha_1.\ A\beta.A_{k-2}-B\beta^2.A_{k-2}-A\beta.A_{k-1}.(k-1)+$$
$$\alpha_1.\ B.A_{k-1}.(k-1)\ -\ A\beta.A_{k-1}.(k-1)+\ B.A_k.k.(k-1)-s^{\alpha}.B.A_{k-2}= -D.B_{k-2} \quad (2.292)$$

Koşullar Denklem (2.284) ve Denklem (2.285) ifadelerine uygulanırsa;

$$U(0,\ s) = A.A_0 = H_1(s) \quad (2.293)$$
$$U_x(0,\ s) = \alpha_1.A.A_0+B\beta.A_{0+}\ A.A_1= H_2(s) \quad (2.294)$$

Denklem (2.293) ve Denklem (2.294) bulunur. Bulunan $D.B_k$ ve $C.B_k$ katsayıları F(x) fonksiyonunda yazılırsa kaynak fonksiyon elde edilir;

$$F(x)=-\sum_{k=0}^{k}(\alpha_1{}^2.A.A_k+2\alpha_1.B\beta A_k-A\beta^2 A_k-s^{\alpha}AA_k+2\alpha_1 AA_{k+1}(k+1)+$$
$$2B\beta.A_{k+1}(k+1)+AA_{k+2}(k+2)(k+1))e^{\alpha_1 x}\cos\beta x x^k+ \quad (2.295)$$
$$(\alpha_1{}^2.B.A_k-2\alpha_1.A\beta A_k+\alpha_1 BA_{k+1}(k+1)-B\beta^2 A_k-2B\beta.A_{k+1}(k+1)+$$
$$BA_{k+2}(k+2)(k+1)-s^{\alpha}BA_k))e^{\alpha_1 x}\sin\beta x x^k$$

Bulunan Denklem (2.295)'e ters Laplace dönüşümü uygulanırsa f(x) kaynak fonksiyonu Denklem (2.296)'daki gibi elde edilmiş olur;

$$f(x)=L^{-1}\{-\sum_{k=0}^{k}(\alpha_1{}^2.A.A_k+2\alpha_1.B\beta A_k-A\beta^2A_k-s^{\alpha}AA_k+2\alpha_1AA_{k+1}(k+1)+$$
$$2B\beta.A_{k+1}(k+1)+AA_{k+2}(k+2)(k+1))e^{\alpha_1 x}cos\beta x x^k+$$
$$(\alpha_1{}^2.B.A_k-2\alpha_1.A\beta A_k+\alpha_1BA_{k+1}(k+1)-B\beta^2A_k-2B\beta.A_{k+1}(k+1)+$$
$$BA_{k+2}(k+2)(k+1)-s^{\alpha}BA_k))e^{\alpha_1 x}sin\beta x x^k\} \quad (2.296)$$

2.7.1.2. α_1 karakteristik denklemin basit bir kökü ise

α_1 karakteristik denklemin basit bir kökü ise model problem Denklem (2.297)'deki gibi olur;

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^{\alpha}.U(x,s)=-e^{\alpha_1 x}.(Ccos\beta x+Dsin\beta x).(B_kx^k+B_{k-1}.x^{k-1}+\ldots+B_1x+B_0) \quad (2.297)$$

Denklem (2.297)'a ait özel çözüm ve türevleri hesaplanırsa;

$$U(x,s)=e^{\alpha_1 x}.(Acos\beta x+Bsin\beta x).(A_kx^{k+1}+A_{k-1}.x^k+\ldots+A_2x^3+A_1x^2+A_0x) \quad (2.298)$$

$$U'=\alpha_1.e^{\alpha_1 x}.(Acos\beta x+Bsin\beta x).(A_kx^{k+1}+A_{k-1}.x^k+\ldots+A_2x^3+A_1x^2+A_0x)+ \quad (2.299)$$
$$e^{\alpha_1 x}.(-A\beta.sin\beta x+B\beta cos\beta x).(A_kx^{k+1}+A_{k-1}.x^k+\ldots+A_2x^3+A_1x^2+A_0x)+$$
$$e^{\alpha_1 x}.(Acos\beta x+Bsin\beta x).(A_k.(k+1).x^k+A_{k-1}.k.x^{k-1}+\ldots+3A_2x^2+2A_1x+A_0)$$

$$U''=\alpha_1^2.e^{\alpha_1 x}.(Acos\beta x+Bsin\beta x).(A_kx^{k+1}+A_{k-1}.x^k+\ldots+A_2x^3+A_1x^2+A_0x)+ \quad (2.300)$$
$$\alpha_1e^{\alpha_1 x}.(-A\beta.sin\beta x+B\beta cos\beta x).(A_kx^{k+1}+A_{k-1}.x^k+\ldots+A_2x^3+A_1x^2+A_0x)+$$
$$\alpha_1e^{\alpha_1 x}.(A.cos\beta x+Bsin\beta x).(A_k.(k+1).x^k+A_{k-1}.k.x^{k-1}+\ldots+3A_2x^2+2A_1x+A_0)+$$
$$e^{\alpha_1 x}.(-A\beta.sin\beta x-B\beta cos\beta x).(A_kx^{k+1}+A_{k-1}.x^k+\ldots+A_2x^3+A_1x^2+A_0x)+$$
$$e^{\alpha_1 x}.(-A\beta^2.cos\beta x-B\beta^2.sin\beta x).(A_k.x^{k+1}+A_{k-1}.x^k+\ldots+A_2x^3+A_1x^2+A_0x)+$$
$$e^{\alpha_1 x}.(-A\beta sin\beta x+B\beta cos\beta x).(A_k..(k+1).x^k+A_{k-1}.k.x^{k-1}+\ldots+3A_2x^2+2A_1x+A_0)+$$
$$e^{\alpha_1 x}.(Acos\beta x+Bsin\beta x).(A_k.(k+1).x^k+A_{k-1}.k.x^{k-1}+\ldots+3A_2x^2+2A_1x+A_0)+$$
$$e^{\alpha_1 x}.(-A\beta.sin\beta x+B\beta cos\beta x).(A_k.(k+1).x^k+A_{k-1}.k.x^{k-1}+\ldots+3A_2x^2+2A_1x+A_0)+$$
$$e^{\alpha_1 x}.(Acos\beta x+Bsin\beta x).(A_k.(k+1).x^{k-1}+A_{k-1}.k.(k-1)x^{k-2}+\ldots+6A_2x^2+2A_1)$$

Denklem (2.98)-(2.300) bulunur ve bulunan bu özel çözümler Denklem (2.297)'de ilgili yerlere yazılırsa Denklem (2.301) elde edilir;

$$\alpha_1^2.e^{\alpha_1 x}.(Acos\beta x+Bsin\beta x).(A_kx^{k+1}+A_{k-1}.x^k+\ldots+A_2x^3+A_1x^2+A_0x)+$$
$$\alpha_1e^{\alpha_1 x}.(-A\beta.sin\beta x+B\beta cos\beta x).(A_kx^{k+1}+A_{k-1}.x^k+\ldots+A_2x^3+A_1x^2+A_0x)+$$
$$\alpha_1e^{\alpha_1 x}.(A.cos\beta x+Bsin\beta x).(A_k.(k+1).x^k+A_{k-1}.k.x^{k-1}+\ldots+3A_2x^2+2A_1x+A_0)+$$
$$e^{\alpha_1 x}.(-A\beta.sin\beta x-B\beta cos\beta x).(A_kx^{k+1}+A_{k-1}.x^k+\ldots+A_2x^3+A_1x^2+A_0x)+$$
$$e^{\alpha_1 x}.(-A\beta^2.cos\beta x-B\beta^2.sin\beta x).(A_k.x^{k+1}+A_{k-1}.x^k+\ldots+A_2x^3+A_1x^2+A_0x)+ \quad (2.301)$$

$e^{\alpha_1 x}.(-A\beta\sin\beta x+B\beta\cos\beta x).(A_k..(k+1). x^k+ A_{k-1}.k. x^{k-1}+\ldots+3A_2x^2+2A_1x+A_0)+$

$e^{\alpha_1 x}.(A\cos\beta x+B\sin\beta x).(A_k.(k+1).x^k+A_{k-1}.k.x^{k-1}+\ldots+3A_2x^2+2A_1x+A_0)+$

$e^{\alpha_1 x}.(-A\beta.\sin\beta x+B\beta\cos\beta x). (A_k.(k+1).x^k+A_{k-1}.k.x^{k-1}+\ldots+3A_2x^2+2A_1x+A_0)+$

$e^{\alpha_1 x}.(A\cos\beta x+B\sin\beta x).(A_k.(k+1).x^{k-1}+A_{k-1}.k.(k-1)x^{k-2}+\ldots+6A_2x^2+2A_1)-$
$s^{\alpha}. e^{\alpha_1 x}.(A\cos\beta x+B\sin\beta x).(A_kx^{k+1}+A_{k-1}.x^k+\ldots+A_2x^3+A_1x^2+A_0x)=$

$-e^{\alpha_1 x}.(C\cos\beta x+D\sin\beta x).(B_kx^k+B_{k-1}.x^{k-1}+\ldots+ B_1x +B_0)$

Denklem (2.301)'in her iki yanındaki katsayıların eşitliği sağlanırsa $e^{\alpha_1 x}\cos\beta x.x^k$ katsayılarının eşitliğinden Denklem (2.302)-(2.306) elde edilir;

$$\alpha_1^2.A.A_k+2\alpha_1.\ B\beta.A_k- A\beta^2.A_k - s^{\alpha}.A.A_k = 0 \qquad (2.302)$$

$$\alpha_1^2.A.A_{k-1}+\alpha_1.\ B\beta.A_{k-1}+\alpha_1.\ A.A_k.(k+1)+\alpha_1.\ B\beta.A_{k-1}-A\beta^2.A_{k-1}+ B\beta.A_k.(k+1)+$$
$$\alpha_1.\ A.A_k.(k+1)+ B\beta.A_k.(k+1)-s^{\alpha}.A.A_{k-1}= -C.B_k \qquad (2.303)$$

$$\alpha_1^2.A.A_{k-2}+\alpha_1.B\beta.A_{k-2+}\ \alpha_1.\ A.A_{k-1}.k+\ \alpha_1.B\beta.A_{k-2}-A\beta^2.A_{k-2}+ B\beta.A_{k-1}.k+$$
$$\alpha_1.\ A.A_{k-1}.k + B\beta.A_{k-1}.k+ A.A_k.k.(k+1)-s^{\alpha}.A.A_{k-2}= -C.B_{k-1} \qquad (2.304)$$

$$\vdots$$

$$\alpha_1^2.A.A_0+\alpha_1.B\beta.A_{0+}\ \alpha_1.\ A.2A_1+\ \alpha_1.\ B\beta.A_0-A\beta^2.A_0+ B\beta.2A_1+\ \alpha_1.\ A.2A_1- B\beta.2A_1+$$
$$A.6A_2-s^{\alpha}.A.A_0= -C.B_1 \qquad (2.305)$$

$$2\alpha_1.\ A.A_0+2B\beta.A_0+A.2A_1= -C.B_0 \qquad (2.306)$$

Denklem (2.301)'in her iki yanındaki katsayıların eşitliği sağlanırsa $e^{\alpha_1 x}\sin\beta x.x^k$ katsayılarının eşitliğinden Denklem (2.307)-(2.310) elde edilir;

$$\alpha_1.\ B.A_k- 2\alpha_1.A\beta.A_k - B\beta^2.A_k- s^{\alpha}.B.A_k=0 \qquad (2.307)$$

$$\alpha_1^2.B.A_{k-1}-2\alpha_1.\ A\beta.A_{k-1}+\alpha_1.\ B.A_k.(k+1) -B\beta^2.A_{k-1}-2A\beta.A_k.(k+1)+$$
$$\alpha_1.\ B.A_k.(k+1)-s^{\alpha}.B.A_{k-1}= -D.B_k \qquad (2.308)$$

$$\alpha_1^2.B.A_{k-2}-2\alpha_1.\ A\beta.A_{k-2}+2\alpha_1B.A_{k-1}.k-B\beta^2.A_{k-2}-2A\beta.A_{k-1}.k+A.A_k.k.(k+1)$$
$$-s^{\alpha}.B.A_{k-2}= -D.B_{k-1} \qquad (2.309)$$

$$\vdots$$

$$\alpha_1^2.B.A_0-2\alpha_1.\ A\beta.A_{0+}\ 4\alpha_1.BA_1-B\beta^2.A_0-4A\beta.A_1+2\ \alpha_1.A.A_1+6B.A_2-s^{\alpha}.B.A_0= -D.B_1$$

$$2\alpha_1.B.A_0-2A\beta.A_0+2BA_1= -D.B_0 \qquad (2.310)$$

Denklem (2.298) ve Denklem (2.299) özel çözümlerine sınır koşulları uygulanırsa $U(0,s)=0$ ve $U_x(0,s)=A.A_0=H_2(s)$ ifadeleri elde edilir. Önceden bulunan $C.B_k$ ve $D.B_k$ katsayıları F(x) fonksiyonunda yazılırsa Denklem (2.311) bulunur;

$$F(x)=-\sum_{k=2}^{k+2}(\alpha_1{}^2.A.A_{k-2}+2\alpha_1.B\beta A_{k-2}-A\beta^2A_{k-2}-s^{\alpha}AA_{k-2}+2\alpha_1AA_{k-1}k+$$
$$2B\beta.A_{k-1}k+AA_k(k+1)k)e^{\alpha_1 x}cos\beta x x^k+ \quad (2.311)$$
$$(\alpha_1{}^2.B.A_{k-2}-2\alpha_1.A\beta A_{k-2}+2\alpha_1BA_{k-1}k-B\beta^2A_{k-2}-2A\beta.A_{k-1}k+$$
$$BA_k(k+1)k-s^{\alpha}BA_{k-2}))e^{\alpha_1 x}sin\beta x x^k$$

Elde edilen Denklem (2.311)'in ters Laplace dönüşümü alınırsa;

$$f(x)=L^{-1}\{-\sum_{k=1}^{k+2}(\alpha_1{}^2.A.A_{k-2}+2\alpha_1.B\beta A_{k-2}-A\beta^2A_{k-2}-s^{\alpha}AA_{k-2}+2\alpha_1AA_{k-1}k+$$
$$2B\beta.A_{k-1}k+AA_k(k+1)k)e^{\alpha_1 x}cos\beta x x^k+ \quad (2.312)$$
$$(\alpha_1{}^2.B.A_{k-2}-2\alpha_1.A\beta A_{k-2}+2\alpha_1BA_{k-1}k-B\beta^2A_{k-2}-2A\beta.A_{k-1}k+BA_k(k+1)k-$$
$$s^{\alpha}BA_{k-2}))e^{\alpha_1 x}sin\beta x x^k\}$$

Denklem (2.312) bulunur.

2.7.1.3. α_1 karakteristik denklemin çift katlı kökü ise

α_1 karakteristik denklemin çift katlı kökü ise model problem Denklem (2.313)'teki gibi olur;

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^{\alpha}.U(x,s)=-e^{\alpha_1 x}.(Ccos\beta x+Dsin\beta x).(B_k x^k+B_{k-1}.x^{k-1}+\ldots+B_1x+B_0) \quad (2.313)$$

Denklem (2.313)'e ait özel çözüm ve türevleri hesaplanırsa;

$$U(x,s)=e^{\alpha_1 x}.(Acos\beta x+Bsin\beta x).(A_k x^{k+2}+A_{k-1}.x^{k+1}+\ldots+A_2x^4+A_1x^3+A_0x^2) \quad (2.314)$$

$$U''=\alpha_1^2.\,e^{\alpha_1 x}.(Acos\beta x+Bsin\beta x).(A_k x^{k+2}+A_{k-1}.x^{k+1}+\ldots+A_2x^4+A_1x^3+A_0x^2)+$$
$$\alpha_1 e^{\alpha_1 x}.(-A\beta.sin\beta x+B\beta cos\beta x).\,(A_k x^{k+2}+A_{k-1}.x^{k+1}+\ldots+A_2x^4+A_1x^3+A_0x^2)+$$
$$\alpha_1 e^{\alpha_1 x}.(A.cos\beta x+Bsin\beta x).(A_k.(k+2).x^{k+1}+A_{k-1}.(k+1).x^k+\ldots+4A_2x^3+3A_1x^2+2A_0x)+$$
$$e^{\alpha_1 x}.(-A\beta.sin\beta x+B\beta cos\beta x).\,(A_k x^{k+2}+A_{k-1}.x^{k+1}+\ldots+A_2x^4+A_1x^3+A_0x^2)+$$
$$e^{\alpha_1 x}.(-A\beta^2.cos\beta x-B\beta^2.sin\beta x).\,(A_k.x^{k+2}+A_{k-1}.x^{k+1}+\ldots+A_2x^4+A_1x^3+A_0x^2)+$$
$$e^{\alpha_1 x}.(-A\beta sin\beta x+B\beta cos\beta x).(\,A_k..(k+2).\,x^{k+1}+\,A_{k-1}.(k+1).\,x^k+\ldots$$
$$+4A_2x^3+3A_1x^2+2A_0x)+ \quad (2.315)$$
$$\alpha_1.e^{\alpha_1 x}.(Acos\beta x+Bsin\beta x).(A_k.(k+2).x^{k+1}+A_{k-1}.(k+1).x^k+\ldots$$
$$+4A_2x^3+3A_1x^2+2A_0x)+$$
$$e^{\alpha_1 x}.(-A\beta.sin\beta x+B\beta cos\beta x).\,(A_k.(k+2).x^{k+1}+A_{k-1}.(k+1).x^k+\ldots$$
$$+4A_2x^3+3A_1x^2+2A_0x)+$$

$e^{\alpha_1 x}.(A\cos\beta x+B\sin\beta x).(A_k.(k+2).(k+1).x^k+A_{k-1}.k.(k+11)x^{k-1}+\ldots$

$+12A_2x^2+6A_1x+2A_0)$

Denklem (2.314) ve Denklem (2.315) elde edilir ve elde edilen özel çözümler Denklem (2.313)'te yazılırsa;

$\alpha_1^2.\ e^{\alpha_1 x}.(A\cos\beta x+B\sin\beta x).(A_kx^{k+2}+A_{k-1}.x^{k+1}+\ldots+A_2x^4+A_1x^3+A_0x^2)+$

$\alpha_1 e^{\alpha_1 x}.(-A\beta.\sin\beta x+B\beta\cos\beta x).\ (A_kx^{k+2}+A_{k-1}.x^{k+1}+\ldots+A_2x^4+A_1x^3+A_0x^2)+$

$\alpha_1 e^{\alpha_1 x}.(A.\cos\beta x+B\sin\beta x).(A_k.(k+2).x^{k+1}+A_{k-1}.(k+1).x^k+\ldots+4A_2x^3+3A_1x^2+2A_0x)+$

$e^{\alpha_1 x}.(-A\beta.\sin\beta x+B\beta\cos\beta x).\ (A_kx^{k+2}+A_{k-1}.x^{k+1}+\ldots+A_2x^4+A_1x^3+A_0x^2)+$

$e^{\alpha_1 x}.(-A\beta^2.\cos\beta x-B\beta^2.\sin\beta x).\ (A_k.x^{k+2}+A_{k-1}.x^{k+1}+\ldots+A_2x^4+A_1x^3+A_0x^2)+$
$e^{\alpha_1 x}.(-A\beta\sin\beta x+B\beta\cos\beta x).(\ A_k..(k+2).\ x^{k+1}+\ A_{k-1}.(k+1).\ x^k+\ldots+4A_2x^3+3A_1x^2+2A_0x)+$

$\alpha_1.e^{\alpha_1 x}.(A\cos\beta x+B\sin\beta x).(A_k.(k+2).x^{k+1}+A_{k-1}.(k+1).x^k+\ldots+4A_2x^3+3A_1x^2+2A_0x)+$

$e^{\alpha_1 x}.(-A\beta.\sin\beta x+B\beta\cos\beta x).\ (A_k.(k+2).x^{k+1}+A_{k-1}.(k+1).x^k+\ldots+4A_2x^3+3A_1x^2+2A_0x)+$

$e^{\alpha_1 x}.(A\cos\beta x+B\sin\beta x).(A_k.(k+2).(k+1).x^k+A_{k-1}.k.(k+11)x^{k-1}+\ldots+$

$12A_2x^2+6A_1x+2A_0)-s^{\alpha}e^{\alpha_1 x}.(A\cos\beta x+B\sin\beta x).(A_kx^{k+2}+A_{k-1}.x^{k+1}+\ldots+$

$A_2x4+A_1x^3+A_0x^2)=-e^{\alpha_1 x}.(C\cos\beta x+D\sin\beta x).(B_kx^k+B_{k-1}.x^{k-1}+\ldots+B_1x+B_0)$ (2.316)

Denklem (2.316) bulunur. Denklem (2.316)'nın her iki yanındaki katsayıların eşitliği sağlanırsa $e^{\alpha_1 x}\cos\beta x.x^k$ katsayılarının eşitliğinden Denklem (2.317)-(2.321);

$\alpha_1^2\ A.A_k+\ 2\alpha_1B\beta.A_k-\ A\beta^2.A_k-s^{\alpha}.A.A_k=0$ (2.317)

$\alpha_1^2\ A.A_{k-1}+2\ \alpha_1B\beta.A_{k-1}+\ \alpha_1.\ A.A_k.(k+2)-A\beta^2.A_{k-1}+2B\beta.A_k(k+2)+$

$\alpha_1.\ A.A_k.(k+2)-s^{\alpha}.A.A_{k-1}=0$ (2.318)

$\alpha_1^2\ A.A_{k-2}+2\ \alpha_1B\beta.A_{k-2}+\ \alpha_1.\ A.A_{k-1}.(k+1)-A\beta^2.A_{k-2}+2B\beta.A_{k-1}(k+1)+$

$\alpha_1.\ A.A_{k-1}.(k+1)+\ A.A_k.(k+2)(k+1)-\ s^{\alpha}.A.A_{k-2}=-CB_k$ (2.319)

$\vdots$

$4\alpha_1.A.A_0+4B\beta A_0=-CB_1$ (2.320)

$2A.A_0=-CB_0$ (2.321)

$e^{\alpha_1 x}\sin\beta x.x^k$ katsayılarının eşitliğinden Denklem (2.322)-(2.326) elde edilir;

$\alpha_1^2\ B.A_k-\ 2\alpha_1A\beta.A_k-\ B\beta^2.A_k-s^{\alpha}.B.A_k=0$ (2.322)

$\alpha_1^2\ B.A_{k-1}-2\alpha_1A\beta.A_{k-1}+\ \alpha_1.\ B.A_k.(k+2)-B\beta^2.A_{k-1}-2A\beta.A_k(k+2)+$
$\alpha_1.\ B.A_k.(k+2)-s^{\alpha}.B.A_{k-1}=0$ (2.323)

$\alpha_1^2\ B.A_{k-2}-2\ \alpha_1A\beta.A_{k-2}+\ \alpha_1.B.A_{k-1}.(k+1)-B\beta^2.A_{k-2}-2A\beta.A_{k-1}(k+1)+$

$$\alpha_{1.} B.A_{k-1}.(k+1)+ B.A_k.(k+2)(k+1)- s^{\alpha}.B.A_{k-2}= -DB_k \quad (2.324)$$

⋮

$$4\alpha_{1.}B.A_0-4A\beta A_0=-DB_1 \quad (2.325)$$

$$2B.A_0= -DB_0 \quad (2.326)$$

Denklem (2.314) ve Denklem (2.315)'e sınır koşulları uygulanırsa $U(0,s)=H_1(s)=0$ ve $U_x(0,s)=H_2(s)=0$ elde edilir. Önceden bulunan Denklem (2.319) ve (2.324)'teki $C.B_k$ ve $D.B_k$ katsayıları F(x) fonksiyonunda yazılırsa Denklem (2.327) elde edilir;

$$\begin{aligned} F(x)=&-\sum_{k=0}^{k+2}(\alpha_1{}^2.B.A_{k-2}-2\alpha_1.A\beta A_{k-2}-B\beta^2A_{k-2}-s^{\alpha}BA_{k-2}+2\alpha_1BA_{k-1}(k+1)-\\ &2A\beta.A_{k-1}(k+1)+BA_k(k+2)(k+1))e^{\alpha_1 x}\cos\beta x x^k+\\ &(\alpha_1{}^2.A.A_{k-2}+2\alpha_1.B\beta A_{k-2}+2\alpha_1AA_{k-1}(k+1)-A\beta^2A_{k-2}+2B\beta.A_{k-1}(k+1)+\\ &AA_k(k+2)(k+1)k-s^{\alpha}AA_{k-2}))e^{\alpha_1 x}\sin\beta x x^k \end{aligned} \quad (2.327)$$

Denklem (2.327)'ye ters Laplace dönüşümü uygulandığında Denklem (2.328) kaynak fonksiyonu bulunmuş olur;

$$\begin{aligned} f(x)=L^{-1}\{&-\sum_{k=0}^{k+2}(\alpha_1{}^2.B.A_{k-2}-2\alpha_1.A\beta A_{k-2}-B\beta^2A_{k-2}-s^{\alpha}BA_{k-2}+2\alpha_1BA_{k-1}(k+1)-\\ &2A\beta.A_{k-1}(k+1)+BA_k(k+2)(k+1))e^{\alpha_1 x}\cos\beta x x^k+\\ &(\alpha_1{}^2.A.A_{k-2}+2\alpha_1.B\beta A_{k-2}+2\alpha_1AA_{k-1}(k+1)-A\beta^2A_{k-2}+2B\beta.A_{k-1}(k+1)+\\ &AA_k(k+2)(k+1)k-s^{\alpha}AA_{k-2}))e^{\alpha_1 x}\sin\beta x x^k\ \} \end{aligned} \quad (2.328)$$

2.7.2. f sadece t değişkenine bağlı fonksiyon

f sadece t'ye bağlı fonksiyon olsun. Bu durumda α_1'in durumları aşağıdaki verilmiştir.

2.7.2.1. α_1 karakteristik denklemin kökü değil ise

α_1 karakteristik denklemin kökü değil ise model problem Denklem (2.329)'daki gibidir;

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2} - s^{\alpha}.U(x,s) = -e^{\alpha_1 s}.(C\cos\beta s+D\sin\beta s).(B_k.s^k+B_{k-1}.s^{k-1}+\ldots+B_1.s+B_0) \quad (2.329)$$

Denklem (2.329)'a ait özel çözüm ve türevleri hesaplanırsa;

$$U(x,s)=e^{\alpha_1 s}.(A\cos\beta s+B\sin\beta s).(A_k.s^k+A_{k-1}.s^{k-1}+\ldots+A_1.s+A_0) \quad (2.330)$$

$$U'=U''=0 \quad (2.331)$$

Denklem (2.330) ve Denklem (2.331) bulunur ve bulunan ifadeler Denklem (2.329)'da ilgili yerlere yazılırsa Denklem (2.332) elde edilir;

$$-s^{\alpha}.\, e^{\alpha_1 s}.\, (A\cos\beta s + B\sin\beta s).\, (A_k.s^k + A_{k-1}.s^{k-1} + \ldots + A_1.s + A_0) =$$
$$-e^{\alpha_1 s}.(C\cos\beta s + D\sin\beta s)\, .(B_k.s^k + B_{k-1}.s^{k-1} + \ldots + B_1.s + B_0) \quad (2.332)$$

Bulunan Denklem (2.332)'de eşitliğin her iki yanında katsayılar birbirine eşitlenirse $C.B_k$ katsayıları Denklem (2.333)-(2.336)'daki gibi elde edilir;

$$s^{\alpha}.A.A_k = C.B_k \quad (2.333)$$
$$s^{\alpha}.A.A_{k-1} = C.B_{k-1} \quad (2.334)$$
$$s^{\alpha}.A.A_{k-2} = C.B_{k-2} \quad (2.335)$$
$$\vdots$$
$$s^{\alpha}.A.A_0 = C.B_0 \quad (2.336)$$

Aynı şekilde Denklem (2.332)'de eşitliğin her iki yanında katsayılar birbirine eşitlenirse $D.B_k$ katsayıları Denklem (2.337)-(2.340)'daki gibi elde edilir;

$$s^{\alpha}.B.A_k = D.B_k \quad (2.337)$$
$$s^{\alpha}.B.A_{k-1} = D.B_{k-1} \quad (2.338)$$
$$s^{\alpha}.B.A_{k-2} = D.B_{k-2} \quad (2.339)$$
$$\vdots$$
$$s^{\alpha}.B.A_0 = D.B_0 \quad (2.340)$$

Denklem (2.330)'da başlangıç koşulu sağlatıldığında $U(x,0) = f_1(x)/s = A.A_0$ elde edilir. Elde edilen $C.B_k$ ve $D.B_k$ katsayıları F(s) fonksiyonunda yerlerine yazılırsa Denklem (2.341) elde edilir;

$$F(s) = A.e^{\alpha_1 s}.\cos\beta s.\sum_{k=0}^{k} s^{\alpha+k}.A_k + B.\, e^{\alpha_1 s}.\sin\beta s.\, \sum_{k=0}^{k} s^{\alpha+k}.A_k \quad (2.341)$$

Denklem (2.341)'in ters Laplace dönüşümü alınırsa Denklem (2.342) bulunur;

$$f(t) = L^{-1}\left\{e^{\alpha_1 s}(A.\cos\beta s + B.\sin\beta s).\sum_{k=0}^{k} s^{\alpha+k}.A_k)\right\} \quad (2.342)$$

2.7.2.2. α_1 karakteristik denklemin basit bir kökü ise

α_1 karakteristik denklemin basit bir kökü ise model problem Denklem (2.343)'teki gibidir;

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2} - s^{\alpha}.U(x,s) = -e^{\alpha_1 s}.(A\cos\beta s + B\sin\beta s).(A_k.s^k + A_{k-1}.s^{k-1} + \ldots + A_1 s + A_0) \quad (2.343)$$

Denklem (2.343)'e ait özel çözüm ve türevleri Denklem (2.344) ve Denklem (2.345)'te verilmiştir;

$$U(x,s) = e^{\alpha_1 s}.(C\cos\beta s + D\sin\beta s).\, (B_k.s^k + B_{k-1}.s^{k-1} + \ldots + B_2.s^2 + B_1 s + B_0).s$$

$$=e^{\alpha_1 s}.(C\cos\beta s+D\sin\beta s).\ (B_k.s^{k+1}+B_{k-1}.s^k+\ldots+B_2.s^3+B_1s^2+B_0s) \quad (2.344)$$

$$U'=U''=0 \quad (2.345)$$

Elde edilen özel çözümler Denklem (2.343)'te yerlerine yazılırsa Denklem (2.346) elde edilir;

$$-s^{\alpha}.\ e^{\alpha_1 s}.(C\cos\beta s+D\sin\beta s).\ (B_k.s^{k+1}+B_{k-1}.s^k+\ldots+B_2.s^3+B_1s^2+B_0s)$$
$$=-e^{\alpha_1 s}.(A\cos\beta s+B\sin\beta s).(A_k.s^k+A_{k-1}.s^{k-1}+\ldots+A_2.s^2+A_1s+A_0) \quad (2.346)$$

Denklem (2.346)'da her iki tarafın eşitliği sağlanırsa $C.B_k$ katsayıları Denklem (2.347)-(2.351)'deki gibi olur;

$$s^{\alpha}.C.B_k=0 \quad (2.347)$$
$$s^{\alpha}.C.B_{k-1}=A.A_k \quad (2.348)$$
$$s^{\alpha}.C.B_{k-2}=A.A_{k-1} \quad (2.349)$$

⋮

$$s^{\alpha}.C.B_0=A.A_1 \quad (2.350)$$
$$0=A.A_0 \quad (2.351)$$

Denklem (2.346)'da her iki tarafın eşitliği sağlanırsa $D.B_k$ katsayıları Denklem (2.352)-(2.356)'daki gibi olur;

$$s^{\alpha}.D.B_k=0 \quad (2.352)$$
$$s^{\alpha}.D.B_{k-1}=B.A_k \quad (2.353)$$
$$s^{\alpha}.D.B_{k-2}=B.A_{k-1} \quad (2.354)$$

⋮

$$s^{\alpha}.D.B_0=B.A_1 \quad (2.355)$$
$$B.A_0=0 \quad (2.356)$$

Koşullar Denklem (2.344)'e uygulanırsa $U(x,0) = f_1(x)/s=0$ olduğundan $f_1(x)=0$ bulunur. Elde edilen $C.B_k$ ve $D.B_k$ katsayıları F(s) fonksiyonu Denklem (2.357)'deki gibi yazılır;

$$F(s)=\ e^{\alpha_1 s}.\cos\beta s.C.\sum_{k=1}^{k} s^{\alpha+k}.B_{k-1}+\ e^{\alpha_1 s}.\sin\beta s.D.\ \sum_{k=0}^{k} s^{\alpha+k}.B_{k-1} \quad (2.357)$$

Elde edilen Denklem (2.357)'nin ters Laplace dönüşümü alınırsa;

$$f(t)= L^{-1}\left\{e^{\alpha_1 s}(\cos\beta s.C.\ \sum_{k=1}^{k} s^{\alpha+k}\ .B_{k-1}+\sin\beta s.D.\ \sum_{k=0}^{k} s^{\alpha+k}\ .B_{k-1})\right\} \quad (2.358)$$

Denklem (2.358) kaynak fonksiyonu elde edilir.

2.7.2.3. α_1 karakteristik denklemin çift katlı kökü ise

α_1 karakteristik denklemin çift katlı kökü ise model problem Denklem (2.359)'daki gibidir;

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2} - s^{\alpha}.U(x,s) = -e^{\alpha_1 s}.(C\cos\beta s+D\sin\beta s).(B_k.s^k+B_{k-1}.s^{k-1}+\ldots+B_1.s+B_0) \quad (2.359)$$

Denklem (2.359)'a ait özel çözüm ve türevleri Denklem (2.360) ve Denklem (2.361)'deki gibidir;

$$U(x,s)=e^{\alpha_1 s}.(A\cos\beta s+B\sin\beta s).(A_k.s^k+A_{k-1}.s^{k-1}+A_{k-2}.s^{k-2}\ldots+A_1.s+A_0).s^2$$
$$=e^{\alpha_1 s}.(A\cos\beta s+B\sin\beta s).(A_k.s^{k+2}+A_{k-1}.s^{k+1}+A_{k-1}.s^k\ldots+A_1.s^3+A_0s^2) \quad (2.360)$$

$$U'=U''=0 \quad (2.361)$$

Elde edilen özel çözümler Denklem (2.359)'da yerlerine yazılırsa;

$$-s^{\alpha}.e^{\alpha_1 s}.(A\cos\beta s+B\sin\beta s).(A_k.s^{k+2}+A_{k-1}.s^{k+1}+A_{k-1}.s^k\ldots+A_1.s^3+A_0s^2) =$$
$$-e^{\alpha_1 s}.(C\cos\beta s+D\sin\beta s).(B_k.s^k+B_{k-1}.s^{k-1}+\ldots+B_1.s+B_0) \quad (2.362)$$

Denklem (2.362) elde edilir. Elde edilen eşitlikten $C.B_k$ katsayıları Denklem (2.363)-(2.366)'daki gibi hesap edilir;

$$s^{\alpha}.A.A_k = s^{\alpha}.A.A_{k-1}=0 \quad (2.363)$$
$$s^{\alpha}.A.A_{k-2}=C.B_k \quad (2.364)$$

⋮

$$s^{\alpha}.A.A_0=C.B_2 \quad (2.365)$$
$$0= C.B_1= C.B_0 \quad (2.366)$$

Denklem (2.362)'den benzer şekilde $D.B_k$ katsayıları da elde edilirse eşitlikler Denklem (2.367)-(2.370)'deki gibi olur;

$$s^{\alpha}.B.A_k = s^{\alpha}.B.A_{k-1}=0 \quad (2.367)$$
$$s^{\alpha}.B.A_{k-2}=D.B_k \quad (2.368)$$

⋮

$$s^{\alpha}.B.A_0=D.B_2 \quad (2.369)$$
$$0= D.B_1=D.B_0 \quad (2.370)$$

Bulunan katsayılar yardımıyla F(s) fonksiyonu Denklem (2.371)'deki gibi yazılabilir;

$$F(s)= e^{\alpha_1 s}.\cos\beta s.A.\sum_{k=2}^{k} s^{\alpha+k}.A_{k-2}+ e^{\alpha_1 s}.\sin\beta s.B.\sum_{k=2}^{k} s^{\alpha+k}.A_{k-2} \quad (2.371)$$

f(t) kaynak fonksiyonunu bulmak için Denklem (2.371)'e ters Laplace dönüşümü uygulanırsa Denklem (2.372) elde edilir;

$$f(t)= L^{-1}\left\{e^{\alpha_1 s}(\cos\beta s.A.\sum_{k=2}^{k} s^{\alpha+k}.A_{k-2}+\sin\beta s.B.\sum_{k=2}^{k} s^{\alpha+k}.A_{k-2})\right\} \quad (2.372)$$

Örnek problem:

Bölüm 2'de elde edilen sonuçları;

$$D_t^{\alpha}u(x,t) = 2u_{xx}(x,t) + f(x) \quad (2.373)$$

$$x>0 \ , \ t>0 \ , \ 0<\alpha\leq 1 \quad (2.374)$$

$$u(x,0) = f_1(x) = e^x+\sin x \quad (2.375)$$

$$u(0,t) = h_1(t)= e^{2t} \quad (2.376)$$

$$u_x(0,t)=h_2(t)=e^{2t+1} \quad (2.377)$$

örnek problemine uygulayalım.

Çözüm:

(2.373) problemine Laplace dönüşüm metodu uygulanırsa Denklem (2.378) elde edilir;

$$2.\ \frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^{\alpha}.U(x,s)=-\sum_{k=0}^{\alpha-1} s^{\alpha-1-k}.\ D_t^k u(x,0)-F(x) \quad (2.378)$$

Denklem (2.378)'de elde edilen $D_t^k u(x,0)$ ifadesi x'e bağlıdır, dolayısıyla t'ye göre türevi sıfırdır. Homojen denklemi bulmak için Denklem (2.378) ifadesinin ikinci yanı sıfıra eşitlenirse;

$$2.\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^{\alpha}.U(x,s)=0 \quad (2.379)$$

$$2\omega^2-s^{\alpha}=0 \quad (2.380)$$

$$\omega^2=\frac{s^{\alpha}}{2} \quad (2.381)$$

$$\omega=\pm\sqrt{s^{\alpha}/2} \tag{2.382}$$

Denklem (2.382) elde edilir. Bu durumda homojen denklem aşağıdaki gibidir;

$$U_h(x,s)=c_1.e^{x\sqrt{\frac{s^{\alpha}}{2}}}+c_2.e^{-x\sqrt{\frac{s^{\alpha}}{2}}} \tag{2.383}$$

Denklem (2.375)-(2.377) koşullarına Laplace dönüşümü uygulanır ve Denklem (2.383)'de sağlatılırsa;

$$U(0,s)=c_1+c_2=1/(s-2) \tag{2.384}$$

$$U_x(0,s)=c_1.\sqrt{s^{\alpha}/2}-c_2.\sqrt{s^{\alpha}/2}=e/(s-2) \tag{2.385}$$

Denklem (2.384) ve Denklem (2.385) elde edilir. Yukarıda bulunan denklemler çözüldüğünde $c_1$ve c_2 katsayıları Denklem (2.386) ve Denklem (2.387)'deki gibi bulunur;

$$c_1=\frac{1}{2(s-2)}\left(1+\frac{\sqrt{2}.e}{\sqrt{s^{\alpha}}}\right) \tag{2.386}$$

$$c_2=\frac{1}{2(s-2)}\left(1-\frac{\sqrt{2}.e}{\sqrt{s^{\alpha}}}\right) \tag{2.387}$$

Bulunan bu katsayılar daha önce elde edilmiş olan Denklem (2.383) homojen çözümünde yazılırsa;

$$U_h(x,s)=\frac{1}{2(s-2)}\left(1+\frac{\sqrt{2}.e}{\sqrt{s^{\alpha}}}\right).e^{x\sqrt{\frac{s^{\alpha}}{2}}}+\frac{1}{2(s-2)}\left(1-\frac{\sqrt{2}.e}{\sqrt{s^{\alpha}}}\right).e^{-x\sqrt{\frac{s^{\alpha}}{2}}} \tag{2.388}$$

Denklem (2.388) bulunur. Denklemin özel çözümünü bulabilmek için F(x), x'e bağlı k. dereceden polinom olarak kabul edilsin. Bu durumda diferansiyel denklem Denklem (2.389)'daki gibi yazılabilir;

$$2.\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^{\alpha}.U(x,s)=-\left[B_kx^k+B_{k-1}x^{k-1}+B_{k-2}x^{k-2}+\ldots+B_1x+B_0\right]\ ,\quad s>0 \tag{2.389}$$

Özel çözüm ve türevleri Denklem (2.390)-(2.392)'deki gibi olur;

$$U_{ö}=A_k x^k+A_{k-1}x^{k-1}+A_{k-2}x^{k-2}+\ldots+A_1 x+A_0 \quad (2.390)$$

$$U'_{ö}=A_k k x^{k-1}+A_{k-1}(k-1)x^{k-2}+A_{k-2}(k-2)x^{k-3}+\ldots+A_1 \quad (2.391)$$

$$U''_{ö}=A_k k(k-1)x^{k-2}+A_{k-1}(k-1)(k-2)x^{k-3}+\ldots+2A_2 \quad (2.392)$$

Bulunan özel çözümler Denklem (2.389)'da yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}&2.A_k k(k-1)x^{k-2}+2.A_{k-1}(k-1)(k-2)x^{k-3}+\ldots+4A_2\\&-s^{\alpha}.\left[A_k x^k+A_{k-1}x^{k-1}+A_{k-2}x^{k-2}+\ldots+A_1 x+A_0\right]\\&=-\left[B_k x^k+B_{k-1}x^{k-1}+B_{k-2}x^{k-2}+\ldots+B_1 x+B_0\right]\end{aligned} \quad (2.393)$$

Denklem (2.393) elde edilir. Elde edilen denklemde polinom eşitliği yapılarak B_k katsayıları Denklem (2.394)-(2.397)'deki gibi elde edilir;

$$-s^{\alpha}A_k=-B_k \quad (2.394)$$

$$-s^{\alpha}A_{k-1}=-B_{k-1} \quad (2.395)$$

$$2.A_k k(k-1)-s^{\alpha}A_{k-2}=-B_{k-2} \quad (2.396)$$

$$\vdots$$

$$4A_2-s^{\alpha}A_0=-B_0 \quad (2.397)$$

Bulunan B_k katsayıları F(x) fonksiyonunda yerine yazılırsa;

$$F(x)=s^{\alpha}.A_k.x^k+s^{\alpha}.A_{k-1}.x^{k-1}+[s^{\alpha}.A_{k-2}-2A_k.k.(k-1)]x^{k-2}+\ldots+[s^{\alpha}.A_0-4A_2] \quad (2.398)$$

Denklem (2.398) bulunur. Denklem (2.390) ve Denklem (2.391)'e sırasıyla Denklem (2.384) ve (2.385) koşulları uygulanırsa;

$$U(0,s)=A_0=1/(s-2) \quad (2.399)$$

$$U_x(0,s)=A_1=e/(s-2) \quad (2.400)$$

Denklem (2.399) ve Denklem (2.400) elde edilir.
Denklem (2.394)'te k=0 ve k=1, Denklem (2.395)'te k=2 ve k=3 yazıldığında Denklem (2.401)-(2.404) elde edilir;

$$-s^{\alpha}/(s-2)=-B_0 \quad (2.401)$$

$$-e.s^{\alpha}/(s-2)=-B_1 \quad (2.402)$$

$$4.A_2\text{-}s^{\alpha}.\,1/(s\text{-}2) = -B_0 \tag{2.403}$$

$$12.A_3\text{-}s^{\alpha}.\,e/(s\text{-}2) = -B_1 \tag{2.404}$$

Denklem (2.401) ve (2.403) birbirine eşitlenirse $A_2=0$, Denklem (2.402) ve (2.404) denklemleri birbirine eşitlenirse $A_3=0$ bulunur. Bu işlemler benzer şekilde devam ettirilirse A_k katsayıları bulunmuş olur;

$$A_k=A_{k-1}=A_{k-2}=\ldots=A_3=A_2=0 \tag{2.405}$$

Denklem (2.399)-(2.400) ve (2.405) eşitlikleri $F(x)$'te yerlerine yazıldığında Denklem (2.406) elde edilir;

$$F(x)=s^{\alpha}.\,1/(s\text{-}2) + x.s^{\alpha}\,e/(s\text{-}2) \tag{2.406}$$

Son olarak Denklem (2.406)'ya ters Laplace dönüşümü uygulanırsa Denklem (2.407) kaynak fonksiyonu elde edilir;

$$f(x)=L^{-1}\{s^{\alpha}.\,1/(s\text{-}2) + x.s^{\alpha}\,e/(s\text{-}2)\} \tag{2.407}$$

3. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümü laplace dönüşümü metodu kullanılarak incelenmiştir. Laplace dönüşümünün ters problemin analitik çözümünü bulmakta etkili bir yöntem olduğu görülmüştür. Kaynak fonksiyonun polinom, üstel, trigonometrik, polinom-üstel, polinom-trigonometrik, üstel-trigonometrik, polinom-üstel-trigonometrik olmak üzere yedi ayrı aşamada x ve s değişkenine bağlı olduğu durumlar için kaynak fonksiyonlar ters laplace dönüşümü ile bulunmuştur. Bulunan fonksiyonlar örnek probleme uygulanarak bazı grafikler elde edilmiştir ve bu grafiklerin çiziminde Mathematica kullanılmıştır.

Şekil 3.1. ve Şekil 3.2.'de f(x,t) kaynak fonksiyonunun sadece x değişkenine bağlı k. dereceden polinom olduğu durum gösterilmiştir.

Şekil 3.3. ve Şekil 3.4.'te f(x,t) kaynak fonksiyonunun sadece t değişkenine bağlı k. dereceden polinom olduğu durum gösterilmiştir.

Şekil 3.5'te f(x,t) kaynak fonksiyonunun sadece t değişkenine bağlı trigonometrik olduğu durum gösterilmiştir.

Şekil 3.6. ve Şekil 3.7.'de f(x,t) kaynak fonksiyonunun sadece x değişkenine bağlı üstel fonksiyon olduğu durum gösterilmiştir.

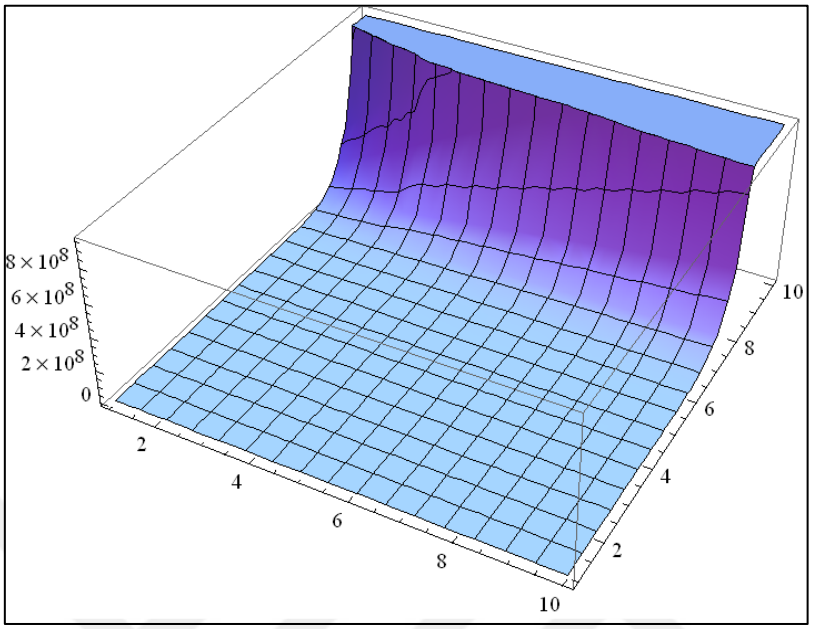
Şekil 3.8. ve Şekil 3.9.'da f(x,t) kaynak fonksiyonunun sadece x değişkenine bağlı k. dereceden polinom ve üstel fonksiyon olduğu durum gösterilmiştir.

Şekil 3.10. ve Şekil 3.11.'de f(x,t) kaynak fonksiyonunun sadece x değişkenine bağlı k. dereceden polinom olduğu durum gösterilmiştir.

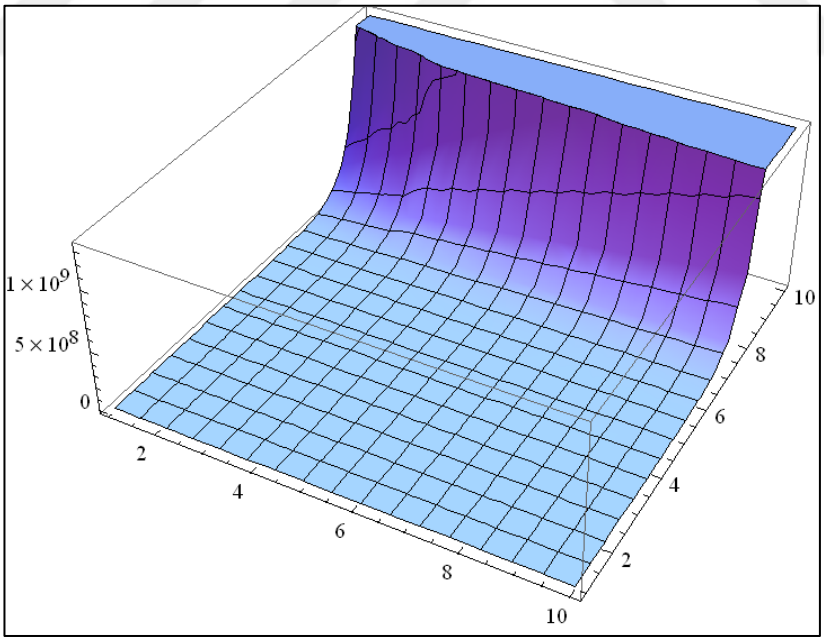
Şekil 3.12. ve Şekil 3.13.'te f(x,t) kaynak fonksiyonunun sadece t değişkenine bağlı k. dereceden polinom ve üstel fonksiyon olduğu durum gösterilmiştir.

Şekil 3.14., Şekil 3.15. ve Şekil 3.16.'da f(x,t) kaynak fonksiyonunun sadece x değişkenine bağlı trigonometrik fonksiyon olduğu durum gösterilmiştir.

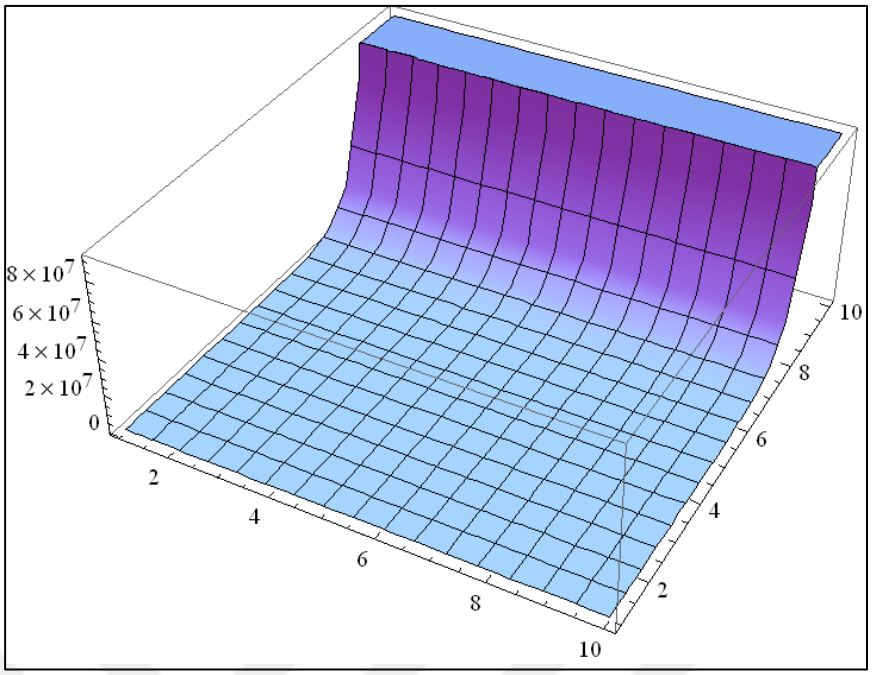
Şekil 3.17'de f(x,t) kaynak fonksiyonunun sadece x değişkenine bağlı k. dereceden polinom ve trigonometrik fonksiyon olduğu durum gösterilmiştir.



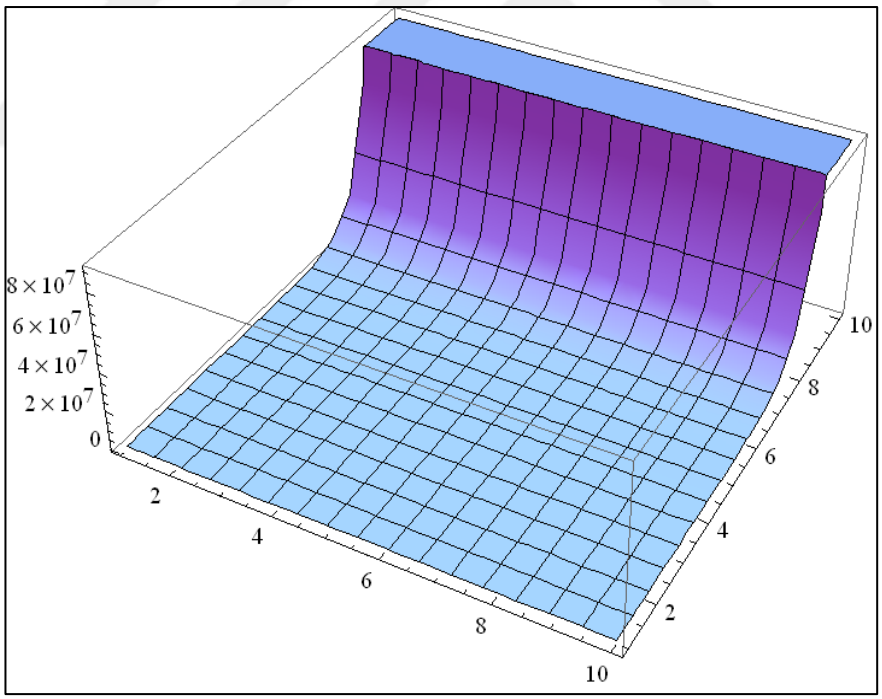
Şekil 3.1. Kaynak fonksiyonunun x değişkenine bağlı polinom olduğu durumda α=1/2 için f(x) grafiği



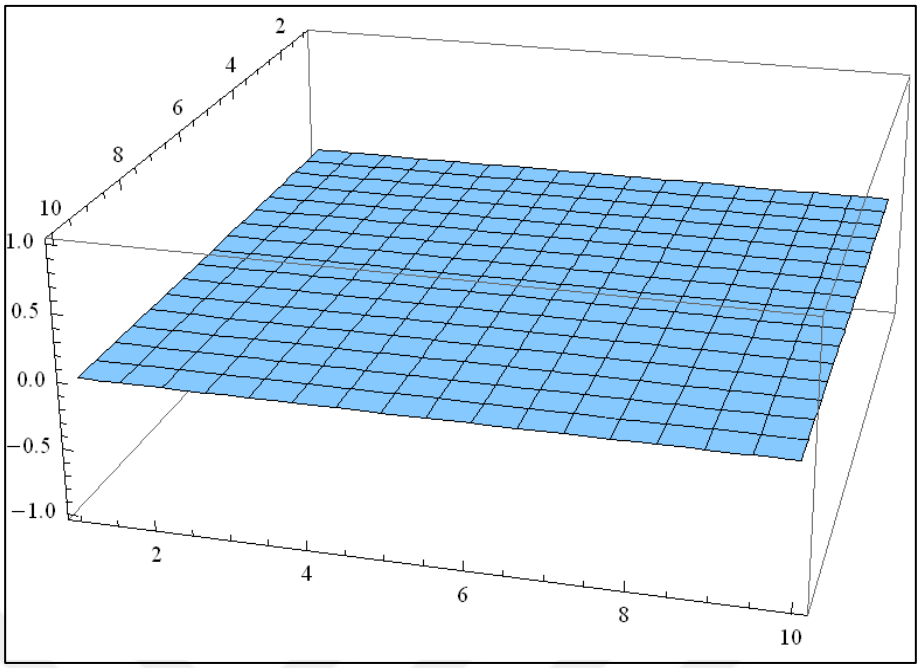
Şekil 3.2. Kaynak fonksiyonunun x değişkenine bağlı polinom olduğu durumda α=1 için f(x) grafiği



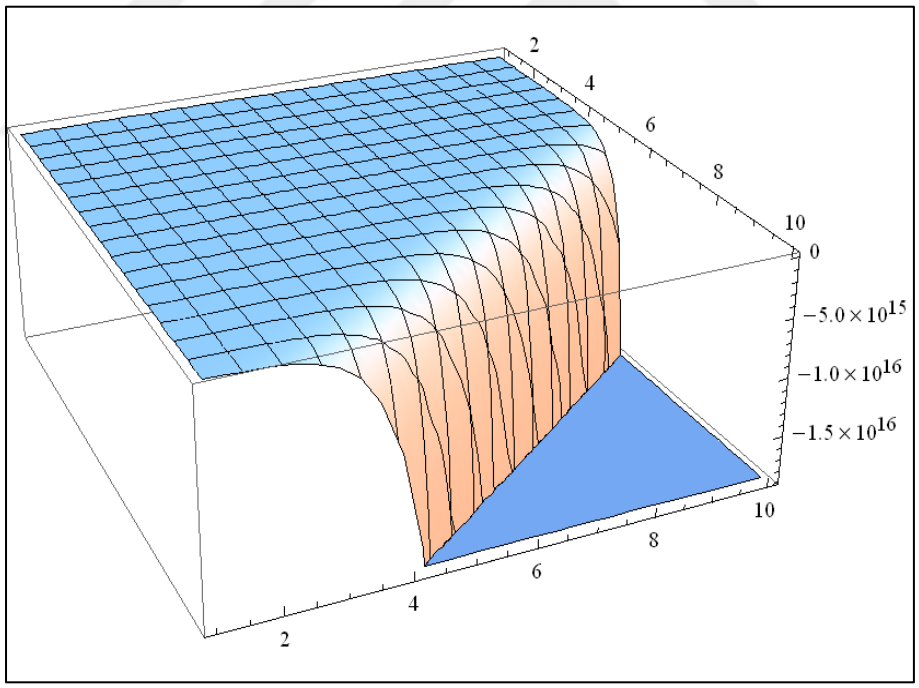
Şekil 3.3. Kaynak fonksiyonunun t değişkenine bağlı polinom olduğu durumda α=1/2 için f(t) grafiği



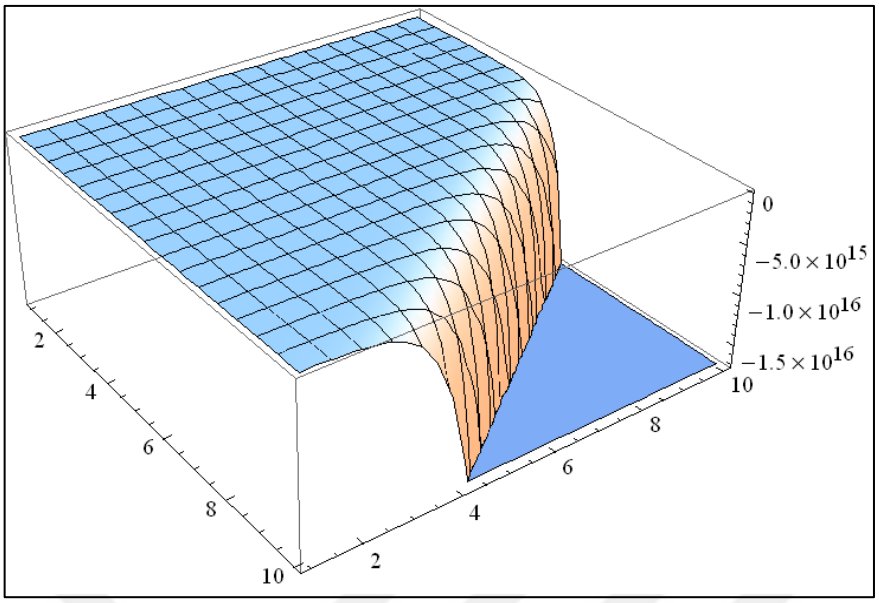
Şekil 3.4. Kaynak fonksiyonunun t değişkenine bağlı polinom olduğu durumda α=1 için f(t) grafiği



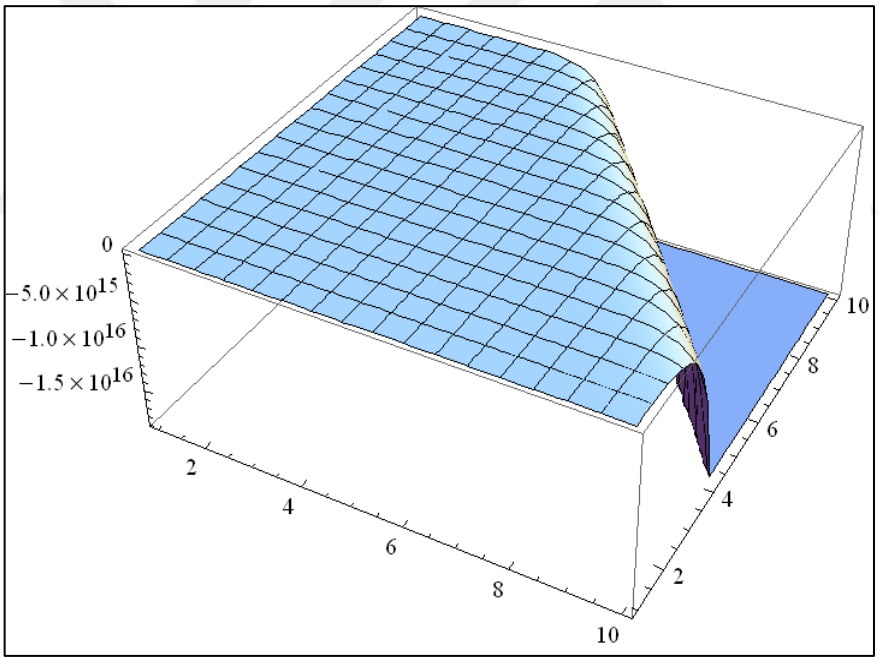
Şekil 3.5. Kaynak fonksiyonunun t değişkenine bağlı trigonometrik olduğu durumda α=1 ve β=1 için f(t) grafiği



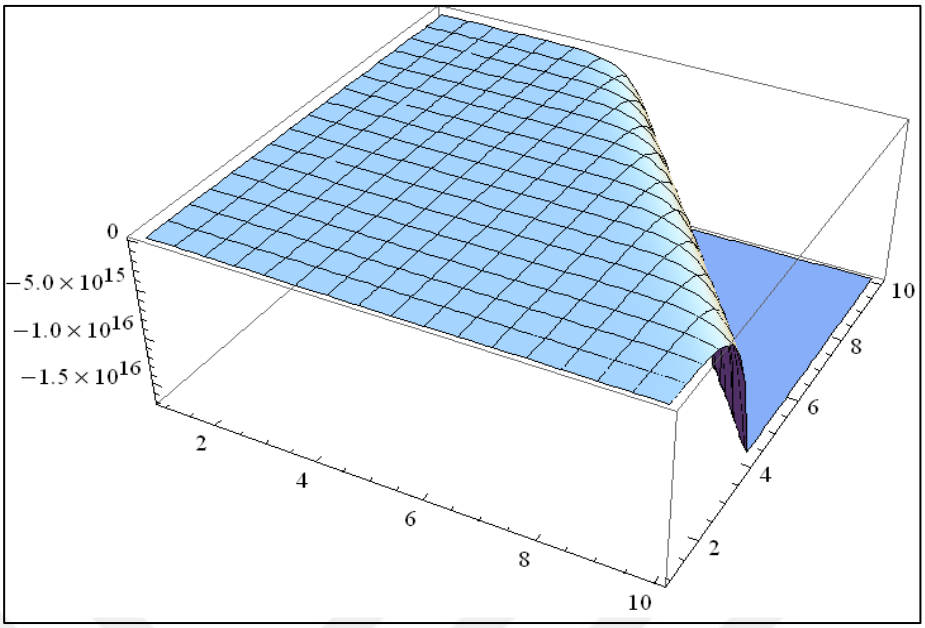
Şekil 3.6. Kaynak fonksiyonunun x değişkenine bağlı üstel olduğu durumda α=1/2 için f(x) grafiği



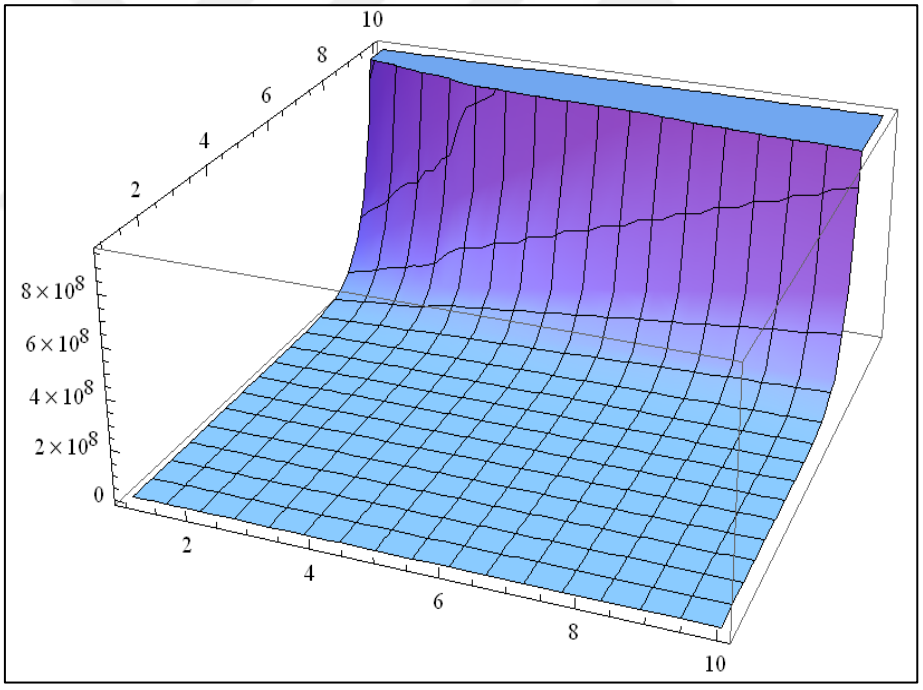
Şekil 3.7. Kaynak fonksiyonunun x değişkenine bağlı üstel olduğu durumda α=1 için f(x) grafiği



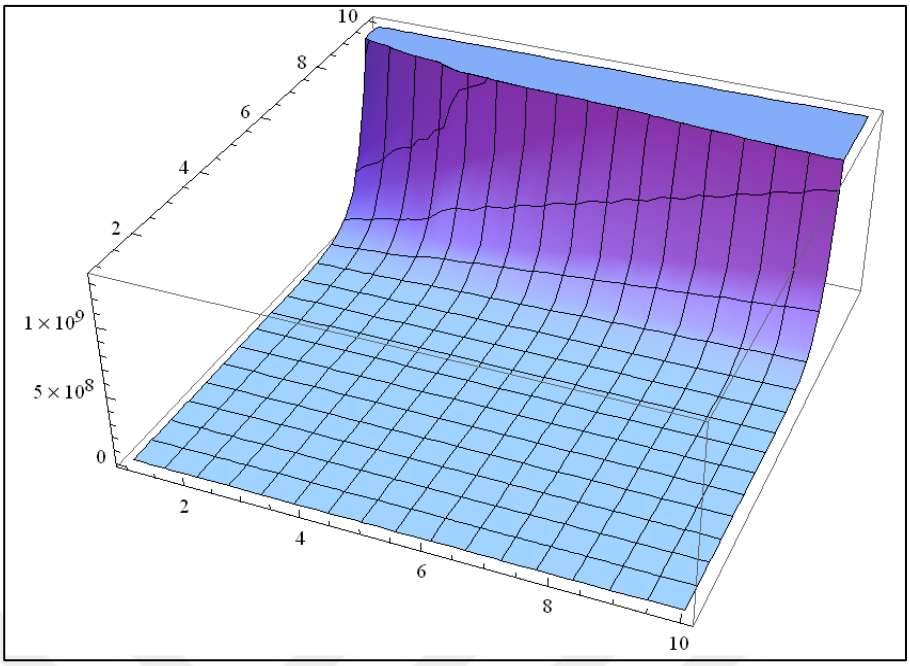
Şekil 3.8. Kaynak fonksiyonunun x değişkenine bağlı polinom ile üstel fonksiyonun çarpımı olduğu durumda α=1/2 için f(x) grafiği



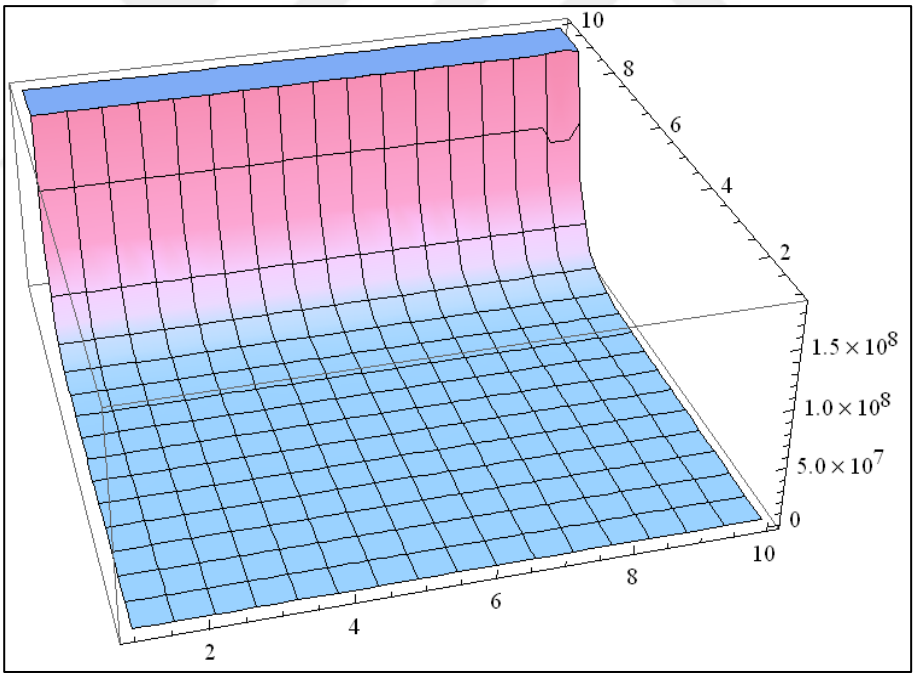
Şekil 3.9. Kaynak fonksiyonunun x değişkenine bağlı polinom ile üstel fonksiyonun çarpımı olduğu durumda α=1 için u(x,t) grafiği



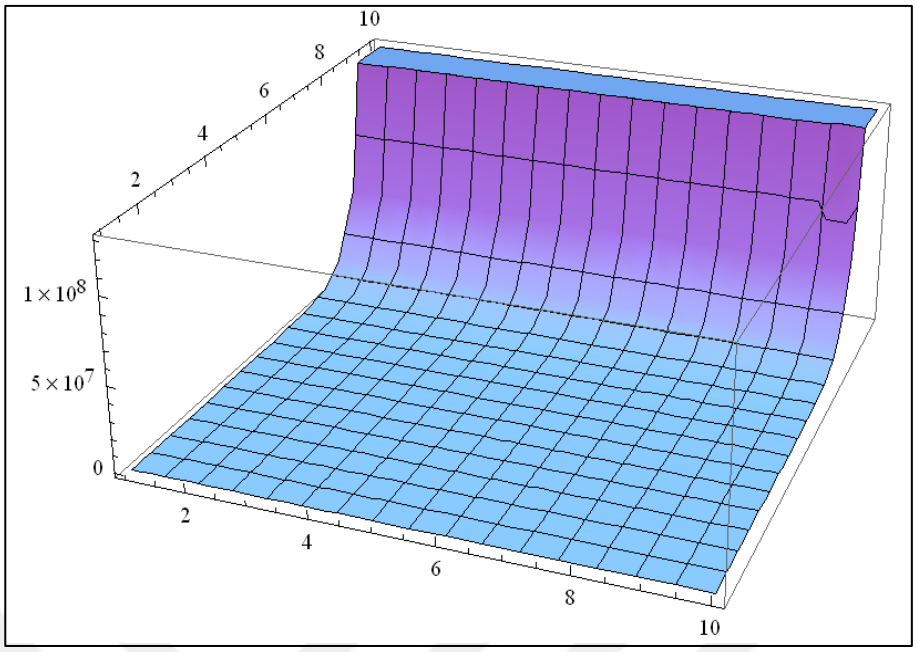
Şekil 3.10. Kaynak fonksiyonunun x değişkenine bağlı polinom olduğu durumda α=1/2 için u(x, t) grafiği



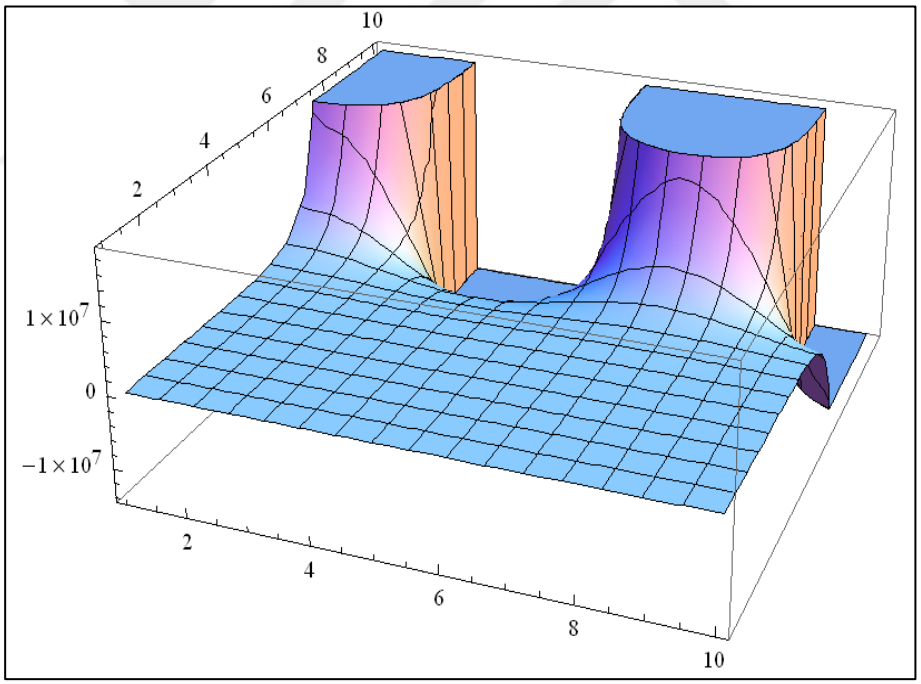
Şekil 3.11. Kaynak fonksiyonunun x değişkenine bağlı polinom olduğu durumda α=1 için u(x, t) grafiği



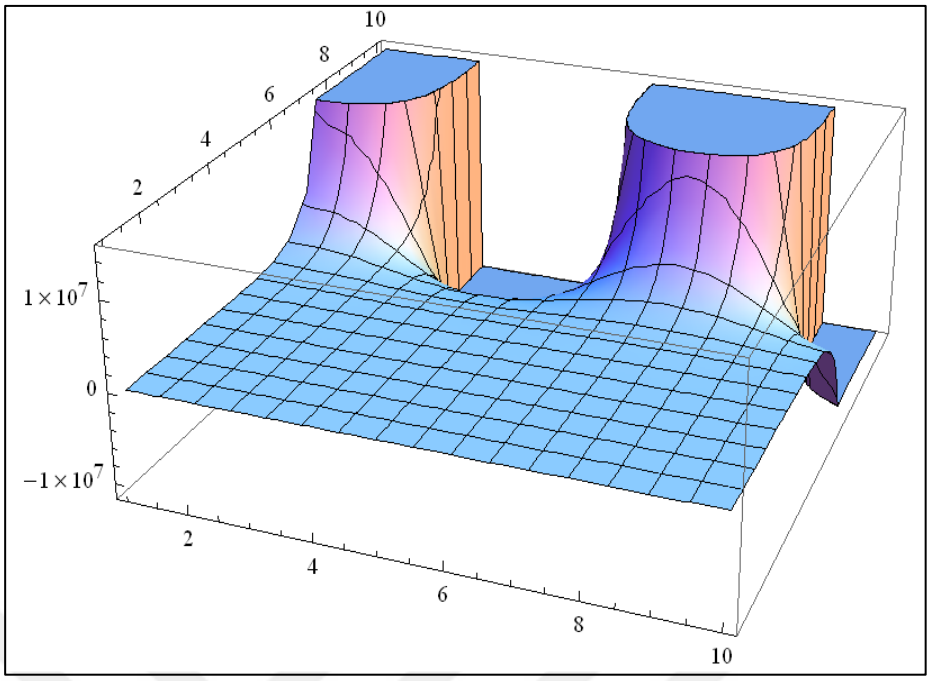
Şekil 3.12. Kaynak fonksiyonunun t değişkenine bağlı polinom olduğu durumda α=1 için u(x, t) grafiği



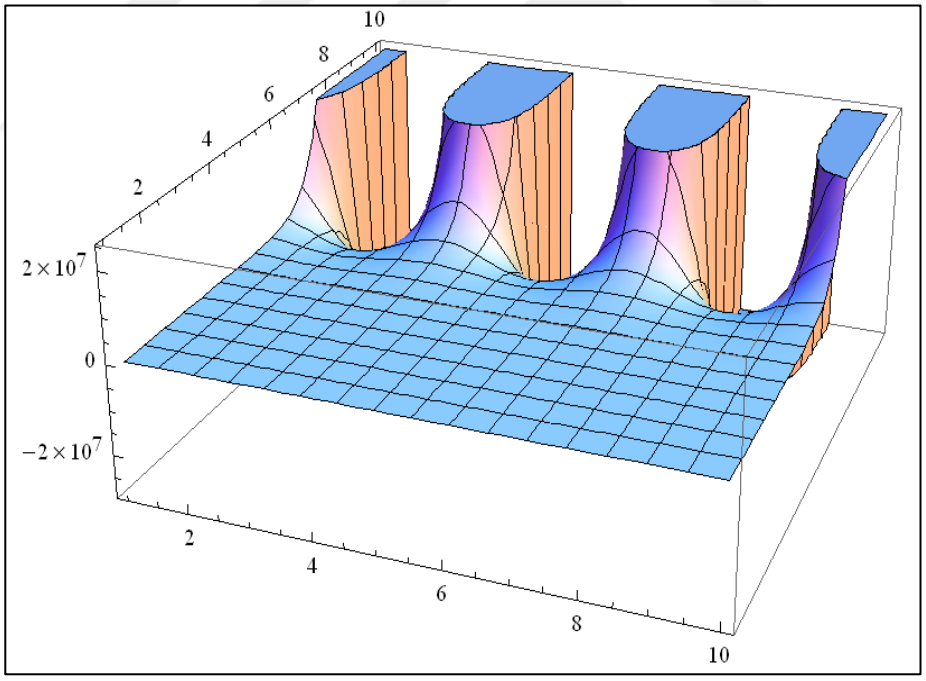
Şekil 3.13. Kaynak fonksiyonunun t değişkenine bağlı polinom olduğu durumda α=1/2 için u(x, t) grafiği



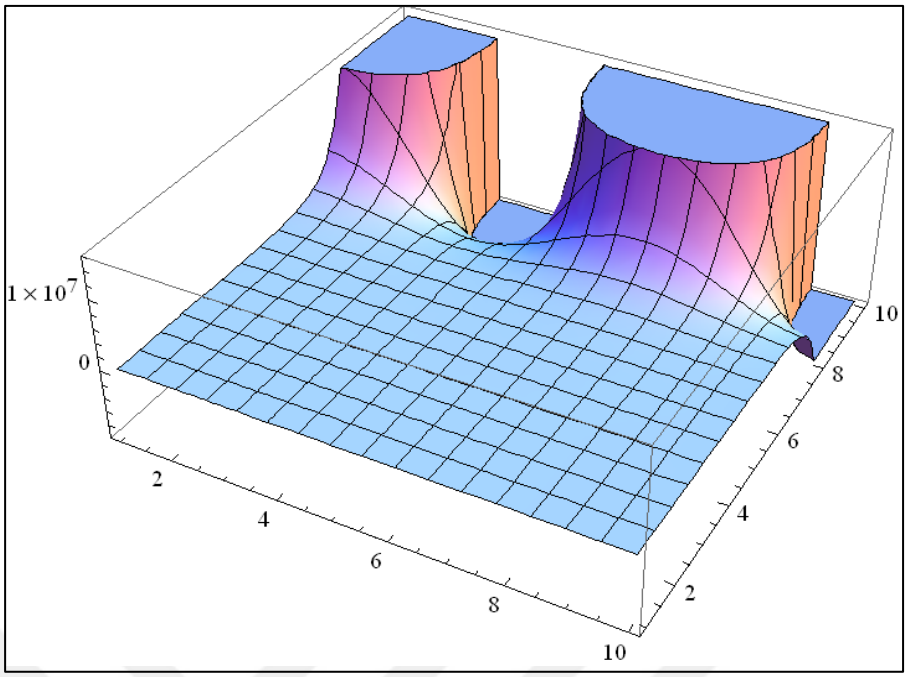
Şekil 3.14. Kaynak fonksiyonunun x değişkenine bağlı trigonometrik olduğu durumda α=1 , β=1 için u(x, t) grafiği



Şekil 3.15. Kaynak fonksiyonunun x değişkenine bağlı trigonometrik olduğu durumda α=1/2 , β=1 için u(x, t) grafiği



Şekil 3.16. Kaynak fonksiyonunun x değişkenine bağlı trigonometrik olduğu durumda α=1/2 , β=2 için u(x, t) grafiği



Şekil 3.17. Kaynak fonksiyonunun x değişkenine bağlı polinom ve trigonometrik fonksiyonun çarpımı olduğu durumda $\alpha=1/2$, $\beta=1$ için u(x, t) grafiği

KAYNAKLAR

[1] Benghorbal M.M,. Power Series Solutions of Fractional Differential Equations and Symbolic Derivatives and İntegrals, Faculty of Graduate Studies, PhD. Thesis, The University of Western Ontario, Canada, 2004.

[2] Sökmen Y., Genelleştirilmiş Caputo Kesirli Türevi ve Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Ahi Evran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kırşehir, 2012, 321474.

[3] Leibniz G.W., *Mathematische Schriften*, 3rd ed., Georg Olms Verlag AG, Hildesheim, 1962.

[4] Küçük G.D., Kesirli Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Farklı Metotlarla Nümerik Çözümü, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum, 2014, 376298.

[5] Ross, B. and Miller, K.S., *An Introduction to Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley and Sons İnc., Canada, 1993.

[6] Damor R.S., Kumar S., Shukla A.K., Numerical Solution of Fractional Diffusion Equation Model for Freezing in Finite Media, *International Journal of Engineering Mathematics*, dx.doi.org/10.1155/2013/785609.

[7] Çavuş, M.S., Kesirli (fractional) Diferensiyel Denklemler Teorisi ve Dielektrik Durulmanın Kesirli Master Denklemi Yöntemiyle Analizi, Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana, 2006, 197958.

[8] Özkara F., Kesirli Analizde Laplace Dönüşümleri ve Bazı Biyofiziksel Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2013, 330687.

[9] Blair G.W.S., The role of psychophysics in rheology, *Journal of Colloid Sciences*, doi.org/10.1016/0095-8522(47)90007-X.

[10] Diego A.M, Implicit Finite Difference Approximation for Time Fractional Diffusion Equations, *Computers&Mathematics with Applications*, doi.org/10.1016/j.camwa.2008.02.015.

[11] Mainardi F., Editors: Carpinteri A., Mainardi F., *Fractals and Fractional Calculus Continuum Mechanics*, Springer Verlag, New York, 291–348, 1997.

[12] Meerschaert M.M., Scheffler H.P., Tadjeran C., Finite difference methods for two-dimensional fractional dispersion equation, *Journal of Computational Physics*, doi.org/10.1016/j.jcp.2005.05.017.

[13] Kiryakova V.S., *Generalized Fractional Calculus and Applications*, J. Wiley and Sons, New York, 1994.

[14] Gorenflo R., Mainardi F., *Fractional Oscillations and Mittag-Leffler Functions*, Proceedings of RAAM 1996, Kuwait, 1996.

[15] Podlubny I., *Fractional Differential Equations*, 1st ed., Academic Press, New York, 1999.

[16] Mirevski S.P., Boyadjiev L., Scherer R., On the Riemann-Liouville Fractional Calculus, g-Jacobi Functions and F.Gauss Functions, *Applied Mathematics and Computation*, doi.org/10.1016/j.amc.2007.01.035.

[17] Li C., Chen A., Ye J., Numerical Approaches to Fractional Calculus and Fractional Ordinary Differential Equation, *Journal of Computational Physics*, doi.org/10.1016/j.jcp.2011.01.030.

[18] Arslan S.T., Kesirli Türev Operatörü Kullanılarak Elde Edilmiş Bir Boyutlu Viskoplastisite Modeli, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 2011, 327306.

[19] Dalir M., Bashour M., Applications of Fractional Calculus, *Applied Mathematical Sciences*, 2010, **21**, 1021-1032.

[20] Karabacak M., Kesirli Mertebeli Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin Haar Dalgacık Fonksiyonları ile Nümerik Çözümleri, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum, 2015, 380487.

[21] Sontakke B.R., Shaikh A.S., Properties of Caputo Operator and Its Applications to Linear Fractional Differential Equations, *International Journal of Engineering Research and Applications*, 2015, **5**, 22-27.

[22] Spiegel M.R., *Schaums Outline of Theory and Problems of Laplace Transform*, McGraw-Hill, USA, 1965.

[23] Honig G., Hirdes U., A Method for the Numerical Inversion Transforms of Laplace, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, doi.org/10.1016/0377-0427(84)90075-X.

[24] Cocagne A., Applications of Laplace Transform, Senior Honors Theses, 2017, 541.

[25] Schiff J.L., *The Laplace Transform Theory and Applications*, Springer, New Zealand, 1999.

[26] Loverro A., Fractional Calculus: History, Definitions and Applications for the Engineer, *Department of Aerospace and Mechanical Engineering, University of Notre Dame*, 46556, 2004.

[27] Arfken G.B., Weber H.J., *Mathematical Methods for Physıcısts*, 6th ed., Elsevier Academic Press, Oxford, 2005.

[28] Dirac, P.A.M., *The Principles of Quantum Mechanics*, 3rd ed., Oxford University Press, London, 1947.

[29] Akgönüllü P.N., Kesirli Mertebeden Değişken Katsayılı Diferensiyel Denklem ve Denklem Sistemlerinin Hermite Collocation Yöntemi ile Yaklaşık Çözümleri, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2014, 352633.

[30] Gorenflo R., Mainardi F., *Fractional Calculus*, Springer, Vienna, 1997.

[31] Mainardi F., *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*, Imperial College Press, Singapore, 2010.

[32] Mutlu İ., Kesirli Mertebeden Kontrolörler ve Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 2010, 293904.

[33] Lüleci A., Kesirli Basamaktan Bazı Diferensiyel Denklem Modelleri, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2011, 300897.

[34] Ambartsumian V., Invers Sturm-Liouville Problem, *Zeitschrift für Physik*, 1929.

[35] Ambartsumian R.V., *Astrofizikte Bir Yaşam: Viktor A. Ambartsumian'ın Seçilmiş Makaleleri*, Allerton Press, New York, 1998.

[36] Weyl H.,*Über die Asymptotische Verteilung der Eigenwerte,* Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 110–117, 1911.

[37] Gülkaç V. A, Method of Finding Source Function for İnverse Diffusion Problem with Time-Fractional Derivative, *Advances in Mathematical Physics*, dx.doi.org/10.1155/2016/6470949.

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

[1] **Dedeoğlu S**., Gülkaç V., Analytic Method of Finding Source Function for Diffusion Problem with Time-Fractional Derivative, *International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling*, İstanbul, Turkey, 3-7 July 2017.

[2] **Dedeoğlu S.**, Gülkaç V., Finding Source Function of Diffusion Problem with Time-Fractional Derivative, *7nd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications,* Kiev, Ukraine, 28-31 August 2018.

ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında Kocaeli'de doğdu. İlk ve orta öğretimini Kocaeli'de tamamladı. Lise eğitimini Körfez Atatürk Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2009 yılında giriş yaptığı Kocaeli Üniversitesi Matematik Bölümü'nden 2013 yılında Matematikçi olarak mezun oldu. 2016 yılında Kocaeli Üniversitesi Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans yapmaya başladı.