KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AL-OBOUDİ DİFERANSİYEL OPERATÖRÜ YARDIMIYLA TANIMLANAN ANALİTİK M-KATLI SİMETRİK Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN YENİ BİR ALT SINIFI İÇİN KATSAYI TAHMİNLERİ

ARZU KOÇAL

KOCAELİ 2019

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AL-OBOUDİ DİFERANSİYEL OPERATÖRÜ YARDIMIYLA TANIMLANAN ANALİTİK M-KATLI SİMETRİK Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN YENİ BİR ALT SINIFI İÇİN KATSAYI TAHMİNLERİ

ARZU KOÇAL

Dr.Öğr.Üyesi Arzu AKGÜL
Danışman, Kocaeli Üniversitesi .....

Prof.Dr. Serdal PAMUK
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniversitesi .....

Prof.Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ
Jüri Üyesi, Bursa Uludağ Üniversitesi .....

Tezin Savunulduğu Tarih: 11.07.2019

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Hayata dair her konuda engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, bu çalışmanın hazırlanması sırasında sabrı, hoşgörüsü ve yardımlarıyla varlığını her zaman yanımda hissettiren, değerli Hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Arzu AKGÜL'e teşekkürlerimi sunmayı borç bilirim.
Hayatım boyunca bana her daim destek veren aileme, ama özellikle bu süreçte kızımla ilgilenip tez çalışmalarıma daha çok yoğunlaşmamı sağlayan anneme ve eşime çok teşekkür ederim.

Haziran-2019 Arzu KOÇAL

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR ……...…….....i
İÇİNDEKİLER ....……ii
ŞEKİLLER DİZİNİ....…….iii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ....……....iv
ÖZET....……v
ABSTRACT....…….....vi
GİRİŞ....……1
1. GENEL BİLGİLER.…….....3
2. MALZEME VE YÖNTEM..…….....8
2.1. Ünivalent Fonksiyonlar....…….....8
2.2. Ünivalent Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları.……...13
2.3. Bi-Ünivalent Fonksiyonlar.…….....16
2.4. Salagean Diferansiyel Operatörü..…….....17
2.5. Al-Oboudi Diferansiyel Operatörü.…….....18
2.6. M-Katlı Simetrik Bi- Ünivalent Fonksiyonlar Sınıfı…….....19
2.7. Bi-Ünivalent Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları İçin Katsayı Tahminleri .....…….....20
3. BULGULAR VE TARTIŞMA.…….....35
3.1. $B^{\delta}_{\Sigma_m}(\alpha, \lambda, \gamma, n)$ Sınıfının Başlangıç Katsayıları …….…….....35
3.2. $B^{\delta}_{\Sigma_m}(\beta, \lambda, \gamma, n)$ Sınıfının Başlangıç Katsayıları ……..….....38
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER ..…….....42
KAYNAKLAR ……...……...49
KİSİSEL YAYIN VE ESERLER…….……...……...51
ÖZGEÇMİŞ ……...52

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. U birim diskinin Koebe fonksiyonu altındaki görüntüsü……...10

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

N	: $N=\{1,2,\ldots\}$ Doğal Sayılar Kümesi
N_0	: $N \cup \{0\}$
R	: Reel Sayılar Kümesi
C	: Kompleks Sayılar Kümesi
U	: $\{z \in C: \lvert z \rvert <1\}$, Açık Birim Disk
$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$	: Koebe Fonksiyonu
$\mathcal{A}$	: Normalize Edilmiş Analitik Fonksiyonlar Sınıfı
S	: Normalize Edilmiş Analitik Ünivalent Fonksiyonlar Sınıfı
P	: Caratheodory Fonksiyonlarının Sınıfı
S^*	: Yıldızıl Fonksiyonlar Sınıfı
K	: Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
Σ	: Bi-Ünivalent Fonksiyonların Sınıfı
$Arg(f(z))$	: $f(z)$ Fonksiyonunun Argümanı
Σ_m	: Birim Diskte Tanımlı M-Katlı Simetrik Bi-Ünivalent Fonksiyonların Sınıfı
Ω	: Schwarz Fonksiyonlarının Sınıfı
D^n	: Salagean Diferansiyel Operatörü
D_δ^n	: Al-Oboudi Diferansiyel Operatörü

AL-OBOUDİ DİFERANSİYEL OPERATÖRÜ YARDIMIYLA TANIMLANAN ANALİTİK M-KATLI SİMETRİK Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN YENİ BİR ALT SINIFI İÇİN KATSAYI TAHMİNLERİ

ÖZET

Bu tezde Al-Oboudi diferansiyel operatöründen yararlanılarak, bi-ünivalent analitik m-katlı simetrik fonksiyonlar için yeni iki sınıf oluşturulmuştur. Bu yeni sınıflara ait olan fonksiyonların Taylor-Maclauren seri açılımlarındaki ikinci ve üçüncü katsayılarının mutlak değerleri için katsayı eşitsizlikleri elde edilmiştir. Ayrıca elde edilen sonuçların literatürde iyi bilinen sınıflarla bağlantıları kurulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Al-Oboudi Diferansiyel Operatörü, Bi-Ünivalent Fonksiyon, M-Katlı Simetrik Fonksiyon, Ünivalent Fonksiyon.

COEFFICIENT ESTIMATES FOR A NEW SUBCLASS OF ANALYTIC M-FOLD BI-UNIVALENT FUNCTIONS DEFINED BY THE AL-OBOUDI DIFFERANTIAL OPERATOR

ABSTRACT

In this thesis, by using Al-Oboudi differantial operator, two new subclasses of bi-univalent analytic and m-fold symmetric functions were constructed. Coefficient estimates for module of second and third coefficients of Taylor-Maclauren series expensions of this functions, belonging these new classes, were obtained. Also, these corollaries were connected the well known results before.

Keywords: Al-Oboudi Differantial Operator, Bi-Univalent Function, M-Fold Symmetric Function, Univalent Function.

GİRİŞ

Analitik ünivalent fonksiyonlar teorisi geometrik fonksiyonlar teorisinde önemli yeri olan bir konudur. Bu konunun temeli Koebe'nin 1907 yılında yayımladığı makalesi olup, bunu 1914 de Granwall'ın alan teoreminin ispatı ve 1916 da Bieberbach'ın ünivalent fonksiyonların ikinci katsayı sınırı ve bunun sonuçları izlemiştir. Kompleks düzlemin basit bağlantılı bir alt kümesini birim diske konform dönüştüren bir dönüşümün varlığı Riemann dönüşüm teoremi olarak bilinir. Bu teorem sayesinde keyfi basit bağlantılı bölgelerde tanımlı ünivalent fonksiyonlarla çalışmak yerine, tüm işlemlerde kolaylık sağlayan birim diskte tanımlı ünivalent fonksiyonlarla çalışmak tercih edilmektedir.

Böylelikle, bu tarz fonksiyonlar üzerindeki çalışmalar $U = \{z \in C: |z| < 1\}$ da analitik, ünivalent ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ normalizasyonunu gerçekleyen fonksiyonlar tarafından oluşturulan S sınıfı üzerinde yoğunlaşmıştır. 1916 da Bieberbach, $z \in U$ olmak üzere $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ biçiminde bir Taylor açılımına sahip $f \in S$ fonksiyonu için $n \geq 2$ iken $|a_n| \leq n$ olduğunu ileri sürmüştür. $n = 2$ için ispat Bieberbach (Bieberbach, 1916) tarafından, $n = 3$ için doğruluğu Löwner (Löwner, 1923) tarafından, $n = 4$ için doğruluğu Garabedian ve Schiffer (Garabedian ve Schiffer, 1955) tarafından, $n = 5$ için doğruluğu Pederson ve Schiffer (Pederson ve Schiffer, 1972) tarafından, $n = 6$ için doğruluğu Pederson (Pederson, 1968) ve Ozawa (Ozawa, 1969) tarafından gösterilmiştir. Genel ispat ise Louis de Branges (Louis de Branges, 1985) tarafından yapılmıştır.

Hem kendisi hem de tersi ünivalent olan fonksiyonları ilk olarak Lewin (Lewin, 1967) çalışmış ve bu fonksiyonları bi-ünivalent fonksiyonlar olarak adlandırmıştır, bu fonksiyonlardan oluşan sınıfı ise Σ ile göstermiştir. Akabinde Netenyahu (Netenyahu, 1969), Brannan ve Clunie (Brannan ve Clunie, 1979), Clunie (Clunie, 1979), Brannan ve Taha (Brannan ve Taha, 1986) bi-ünivalent fonksiyonların bazı alt sınıflarına ait fonksiyonlar için başlangıç katsayı tahminlerini elde etmişlerdir.

Son yıllarda ise bu konu ile ilgili çalışmalar büyük hız kazanmış, oluşturulan sınıflara ait fonksiyonların Taylor-Maclaurin seri açılımındaki ilk iki katsayısının modülleri için üst sınır bulma çalışmaları artmıştır. Tüm bu yoğun ve sayısı artan çalışmalara rağmen $N=\{1,2,\ldots\}$ olmak üzere $|a_n|$ $\left(n\in N-\{1,2\}\right)$ katsayı tahmini açık bir problem olmaya devam etmektedir.

1.GENEL BİLGİLER

Bu bölümde kompleks fonksiyonlar teorisinde büyük önemi olan ve bu çalışmamızda çok faydalanacağımız tanım, teorem ve örneklere yer verilmiştir.

Tanım 1.1 (ε Komşuluğu): $z_0 \in C$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere,

$D(z_0, \varepsilon) = \{z \in C: |z - z_0| < \varepsilon\}$ kümesine z_0 noktasının ε komşuluğu denir. Ayrıca bu kümeye z_0 merkezli ε yarıçaplı açık disk de denir.

$\overline{D}(z_0, \varepsilon) = \{z \in C: |z - z_0| \leq \varepsilon\}$ kümesine z_0 merkezli ε yarıçaplı kapalı disk ya da $D(z_0, \varepsilon)$ kümesinin kapanışı denir.

$\partial D(z_0, \varepsilon) = \{z \in C: |z - z_0| = r\}$ kümesine z_0 merkezli ε yarıçaplı çember ya da $D(z_0, \varepsilon)$ kümesinin sınırı adı verilmektedir.

Tanım 1.2 (İç Nokta): $A \subset C$ herhangi bir küme ve $z_0 \in A$ olmak üzere $D(z_0, \varepsilon) \subset A$ koşulunu sağlayacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı var ise z_0 noktasına A kümesinin iç noktasıdır denir. Başka bir ifadeyle z_0 noktasının bir ε komşuluğu A kümesinin içinde kalıyorsa z_0 noktasına A kümesinin iç noktasıdır denir.

Tanım 1.3 (Açık Küme): A, C nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. A kümesinin her noktası A nın bir iç noktası ise A kümesine açık küme denir.

Tanım 1.4 (Kapalı Küme): A kümesinin tümleyeni açık ise A kümesine kapalı küme denir.

Tanım 1.5 (Bağlantılı Küme): $A \subset C$ herhangi bir küme, A_1 ve A_2, C de ayrık açık iki küme olsun. Eğer $A \cap A_1 \neq \emptyset$, $A \cap A_2 \neq \emptyset$ ve $A \subset A_1 \cup A_2$ ise A kümesine bağlantısız küme denir. Bağlantısız olmayan kümeye bağlantılı küme denir.

Tanım 1.6 (Bölge): Açık bağlantılı kümeler bölge olarak adlandırılır. Bölgeye örnek olarak C kümesi verilebilir.

Tanım 1.7 (Eğri): $[a, b] \subset R$ olmak üzere $\varphi: [a, b] \to C$ sürekli fonksiyonuna C düzleminde bir eğri (yol) denir. $\varphi(a)$ ve $\varphi(b)$ noktalarına da sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitiş noktaları denir.

Tanım 1.8 (Kapalı Eğri): $\varphi: [a, b] \to C$ bir eğri olsun. $\varphi(a) = \varphi(b)$ ise bu eğriye kapalı eğri denir.

Tanım 1.9 (Basit Eğri): $\varphi: [a, b] \to C$ bir eğri ve $t_1, t_2 \in (a, b)$ olsun. $t_1 \neq t_2$ için $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ oluyorsa φ eğrisine basit eğri denir.

Tanım 1.10 (Basit Kapalı Eğri): Eğer $\varphi: [a, b] \to C$ basit bir eğri ve $\varphi(a) = \varphi(b)$ ise bu eğriye basit kapalı eğri veya Jordan eğrisi denir.

Örneğin; $\varphi(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ şeklinde verilen eğri Jordan eğrisidir.

Tanım 1.11 (Diferansiyellenebilir Eğri): Eğer $\varphi: [a, b] \to C$ eğrisinin her $[a, b]$ için φ' türevi var ve sürekli ise bu eğriye diferansiyellenebilir eğri denir.

Tanım 1.12 (Düzgün Eğri): Diferansiyellenebilir bir φ eğrisi için $\forall t \in [a, b]$ iken φ' türevi sürekli ve sıfırdan farklı ise φ eğrisine düzgün eğri denir.

Tanım 1.13 (Basit Bağlantılı Bölge): $A \subset C$ bölgesinde her basit kapalı eğrinin sınırladığı bölge sadece A bölgesinin noktalarından oluşuyor ise A bölgesine basit bağlantılı bölge denir.

Tanım 1.14 (Kompleks Fonksiyon): $A \subset C$ boş olmayan bir küme olmak üzere A kümesindeki her bir z elemanına w kompleks sayısı karşılık getiren f(z) kuralına A'dan C'ye bir fonksiyon denir ve $f: A \to C$ ile gösterilir. f kompleks fonksiyonu w=f(z) şeklinde gösterilir.

Tanım 1.15 (Kompleks Fonksiyonun Limiti): $A \subset C$ ve $f: A \to C$ olsun. $z_0 \in C$, A kümesinin bir yığılma noktası ve w_0 kompleks sayısı verilsin. Eğer herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $0 < |z - z_0| < \delta$ olduğunda $|f(z) - A| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$ varsa f nin z_0 noktasındaki limiti w_0 dır denir ve $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ biçiminde gösterilir.

Tanım 1.16 (Süreklilik): $A \subset C$ olmak üzere $f: A \to C$ bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $|z - z_0| < \delta$ şartını sağlayan her $z \in A$ için $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısı varsa $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında süreklidir denir.

Tanım 1.17 (Diferansiyellenebilirlik): $A \subset C$ bir bölge ve $f: A \subset C \to C$ bir fonksiyon, z_0, A nın bir iç noktası olmak üzere eğer,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \tag{1.1}$$

limiti var ise, f fonksiyonu z_0 noktasında türevlenebilir veya diferansiyellenebilir denir. Bu değere f fonksiyonunun z_0 noktasında türevi adı verilir ve bu türev $f'(z_0)$ ile gösterilir.

Tanım 1.18 (Analitiklik)**:** Bir f karmaşık fonksiyonu bir z_0 noktasının belli bir $D(z_0, \delta)$ komşuluğundaki tüm noktalarda diferansiyellenebiliyorsa f, z_0 da analitiktir(holomorftur) denir.

f fonksiyonu z_0 noktasında analitik değilse bu noktaya fonksiyonun singüler noktası denir. Eğer f(z) fonksiyonu bir açık $A \subset C$ kümesinin tüm noktalarında analitikse f(z) ye bu A kümesinde analitiktir denir.

$z = x + iy$ olmak üzere $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ kompleks değişkenli kompleks değerli fonksiyonu analitik ise,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \tag{1.2}$$

ile ifade edilen Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar.

Tanım 1.19 (Tam Fonksiyon): C nin tüm noktalarında analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir. Tam fonksiyonlara $f_1(z) = e^z$, $f_2(z) = \sin z$ ve $f_3(z) = \cos z$ fonksiyonları örnek olarak verilebilir

Teorem 1.20 (Maksimum Modül Teoremi)**:** Sınırlı bir A bölgesinde sabit olmayan, analitik ve sınırında sürekli bir f fonksiyonu maksimum modülünü A bölgesinin sınırında alır (Palka, 1991).

Maksimum Modül Teoremi'nin en önemli sonucu olan Schwarz Lemması aşağıda verilmiştir.

Teorem 1.21 (Schwarz Lemması): $f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ fonksiyonu U birim diskinde analitik olsun ve $f(0) = 0, |f(z)| \leq 1$ şartlarını sağlasın. Bu durumda $|f(z)| \leq |z|$ ve $|f'(0)| \leq 1$ olur. Eşitlik durumu ise sadece $\theta \in R$ için $f(z) = e^{i\theta} z$ fonksiyonu ile sağlanır.

Teorem 1.22 (Minimum Modül Teoremi)**:** Sınırlı bir A bölgesinde sabit olmayan, analitik ve sınırında sürekli ve her $z \in A$ için $f(z) \neq 0$ olan f fonksiyonu minimum modülünü A bölgesinin sınırında alır (Palka, 1991).

Tanım 1.23 (Argüment): $z \neq 0$ kompleks sayısı verilsin. Bu z kompleks sayısının belirttiği vektörün x ekseninin pozitif kısmıyla yaptığı açıya z kompleks sayısının argümenti denir. Vektörün pozitif reel eksen ile yaptığı açı θ ise, $\arg(z) = \theta$ biçiminde gösterilir.

Tanım 1.24 (Konform Dönüşüm): A kompleks düzlemde bir bölge olmak üzere $f: A \subset C \to C$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer bir $z_0 \in A$ noktasından geçen ve aralarında α açısı bulunan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrileri de $w_0 = f(z_0)$ noktasında aralarında büyüklük ve yön bakımından α açısı yapıyorsa f fonksiyonu z_0 noktasında bir konform dönüşümdür denir. Eğer her $z_0 \in A$ noktasında f fonksiyonu konform ise f, A da konformdur denir.

Örneğin; $f(z) = e^z$ dönüşümü kompleks düzlemin tamamında konformdur. Ayrıca en önemli konform dönüşümlerden biri a, b, c, d karmaşık sabitler olmak üzere,

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \; ad - bc \neq 0 \qquad (1.3)$$

şeklinde gösterilen Möbius dönüşümüdür. Bu dönüşüm genişletilmiş kompleks düzlemi $(C_\infty = C \cup \{\infty\})$ kendisi üzerine konform olarak resmeder.

Analitik ve konform dönüşümler arasındaki bağlantıyı aşağıdaki teorem ile verebiliriz.

Teorem 1.25: f fonksiyonu z_0 noktasında analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ ise f, z_0 noktasında konform bir dönüşümdür denir (Duren, 1983).

Tanım 1.26 (Dizi): f: N→C, $f(n) = z_n$ fonksiyonuna kompleks terimli dizi denir.

Tanım 1.27 (Seri): (a_n) bir kompleks dizi olmak üzere,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.4}$$

toplamına kompleks terimli seri denir. $a_1, a_2, \ldots$ sayılarına serinin terimleri denir. Bu serinin kısmi toplamlar dizisi ise genel terimi $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ olan (S_n) dizisidir.

Tanım 1.28 (Kuvvet Serisi): $z_0 \in C$ verilsin. $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ kompleks sayılar olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \tag{1.5}$$

fonksiyon serisine z_0 merkezli bir kuvvet serisi denir.

Teorem 1.29 (Taylor Teoremi): f(z) fonksiyonu z_0 noktasında analitik olsun. Bu durumda f(z) fonksiyonu bu noktanın bir komşuluğunda,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{\mathbf{n}}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n \tag{1.6}$$

şeklindeki kuvvet serisi açılımına sahiptir. Bu seriye f fonksiyonunun z_0 noktası komşuluğundaki Taylor Serisi denir.

$z_0 = 0$ özel durumu için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{\mathbf{n}}(0)}{n!} (z)^n \tag{1.7}$$

elde edilir ve bu seriye Maclaurin Serisi denir.

2.MALZEME VE YÖNTEM

Bu bölümde tezin hazırlanmasında kullanılan önemli tanım ve teoremler verilecektir.

2.1.Ünivalent Fonksiyonlar

Tanım 2.1 (Ünivalent Fonksiyon): f, $D \subset C$ kompleks bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her bir $z_1, z_2 \in D$ için $f(z_1) = f(z_2)$ olması sadece $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa f fonksiyonuna D bölgesinde ünivalent (schlicht ya da yalınkat) fonksiyon adı verilir. Diğer bir deyişle $f: D \to C$ fonksiyonu birebir ise f fonksiyonuna ünivalent fonksiyon denir. Örneğin; $f(z) = \bar{z}$ bir ünivalent fonksiyondur.

Tanım 2.2 (Yerel Ünivalent Fonksiyon): f, $D \subset C$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu $z_0 \in D$ noktasının en az bir komşuluğunda ünivalent ise f fonksiyonuna z_0 noktasında yerel ünivalent fonksiyon denir.

Teorem 2.3: Analitik bir $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasında yerel ünivalent olması için gerek ve yeter koşul $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır (Duren, 1983).

$f'(z_0) \neq 0$ şartı f fonksiyonunun ünivalentliği için gerekli fakat yeterli değildir, yani f analitik fonksiyonu ünivalent ise $f'(z_0) \neq 0$ dır. Fakat tersi her zaman doğru olmaz. Bir bölgede yerel ünivalent olan fonksiyonlar verilen bölgede ünivalet olmak zorunda değildir.

Ünivalent fonksiyonlar teorisinin en önemli sonuçlarından biri olan Riemann Dönüşüm Teoremi aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.4 (Riemann Dönüşüm Teoremi): C karmaşık düzleminin basit bağlantılı bir D öz alt bölgesini alalım. $z_0 \in D$ olsun. Bu durumda D bölgesini U birim diski üzerine konform olarak resmeden ve $f(z_0) = 0$, $|f'(z_0)| > 0$ koşulunu sağlayan tek bir f fonksiyonu vardır (Duren, 1983).

Tanım 2.5 (Normalize Edilmiş Analitik Fonksiyonlar): Ünivalent fonksiyonlar, analitik olarak sıfırdan farklı türeve sahip iken; geometrik olarak da basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Hem analitik hem de ünivalent olan fonksiyonlar ise basit bağlantılı bölgeleri basit bağlantılı bölgelere dönüştürür. Riemann dönüşüm teoremi, keyfi basit bağlantılı bir bölgede tanımlı f ünivalent fonksiyonu yerine U birim diskinde tanımlı olan bir f ünivalent fonksiyonunun seçilebileceğini söyler. Bu fonksiyonlardan $f(0) = 0$, $f'(0)=1$ şartını sağlayan ve

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \ , (z \in U) \tag{2.1}$$

biçimindeki fonksiyonlara normalize edilmiş analitik fonksiyon denir. Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfı $\mathcal{A}$ ile gösterilir. Bu sınıf,

$$\mathcal{A}=\left\{ f: \forall z \in U \text{ için } f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \text{ şeklindeki analitik fonksiyon} \right\}$$

şeklinde yazılır.

Tanım 2.6 (S Sınıfı): U birim diskinde ünivalent olan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonlarının sınıfı S sınıfı olarak adlandırılır. Bu sınıf kısaca,

$S=\{f \in \mathcal{A}: \ \forall z \in U \text{ için } f \text{ ünivalent}\}$ şeklinde yazılır (Duren, 1983).

Aşağıda S sınıfına ait bazı fonksiyon örnekleri verilmiştir:

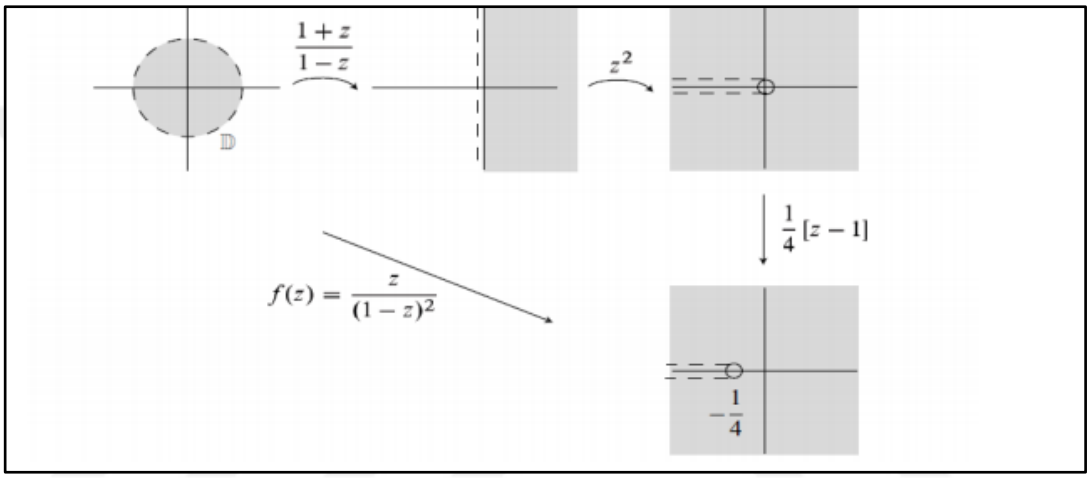
i. $f(z) = z$ fonksiyonu U birim diskini kendi üzerine resmeder.

ii. $f(z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ fonksiyonu U birim diskini $\left(\frac{-\pi}{2} < \text{Im } z < \frac{\pi}{2}\right)$ yatay şeridi üzerine birebir resmeder.

iii. $f(z) = \frac{z}{1-z} = z+z^2+z^3+...$ fonksiyonu U birim diskini $\text{Re}w > \frac{-1}{2}$ yarı düzlemine birebir resmeder.

iv. $f(z) = \frac{z}{1-z^2} = z + z^3 + z^5 + \ldots$ fonksiyonu altında U birim diskininin görüntüsü $C-\left\{\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)\right\}$ bölgesidir.

v. $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots$ fonksiyonu Koebe fonksiyonu olup bu fonksiyon ünivalent fonksiyonlar teorisinde çok önemli bir yere sahiptir. $k(z)$ dönüşümü U birim diskini $-\infty$ dan $\frac{-1}{4}$ e kadar negatif reel ekseni çıkartılmış kompleks düzlem üzerine konform olarak resmeder.Bu fonksiyon $k(z) = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1\right]$ şeklinde de yazılabilir. Bu dönüşüm aşağıdaki şekilde resmedilebilir.



Şekil 2. 1. U birim diskinin Koebe fonksiyonu altındaki görüntüsü

Tanım 2.7 (Rotasyon): $f(z) \in S$ ve α herhangi bir reel sayı olmak üzere,

$$f_\alpha(z) = e^{-i\alpha} f(e^{i\alpha}z) \qquad (2.2)$$

fonksiyonuna $f(z)$ nin bir rotasyonu denir.

S sınıfı aşağıdaki teoremde verilen bazı dönüşümler altında korunur.

Teorem 2.8: $f \in S$ olması durumunda aşağıdaki ifadeler doğrudur (Duren, 1983).

i. Eşlenik alma:

$$g(z) = \overline{f(\overline{z})} = z + \overline{a_2}z^2 + \ldots \qquad (2.3)$$

ise $g \in S$ dir.

ii. Döndürme (Rotasyon): $\theta \in R$ olmak üzere,

$$g(z) = e^{-i\theta} f\left(e^{i\theta}\right) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{i(n-1)\theta} z^n, \qquad (z \in U) \qquad (2.4)$$

ise $g \in S$ dir.

iii. Genişleme (Dilatasyon): $f \in S$ ve $0 < r < 1$ olmak üzere,

$$g(z) = r^{-1} f(rz) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n r^{n-1} z^n \quad , \qquad (z \in U) \tag{2.5}$$

ise $g \in S$ dir.

iv. Disk Otomorfizmi (Koebe veya Bieberbach Dönüşümü): $f \in S$ ve $\alpha \in U$ olmak üzere,

$$g(z) = \frac{f\left(\frac{z + \alpha}{1 + \bar{\alpha} z}\right) - f(\alpha)}{(1 - |\alpha|^2) f'(\alpha)} \ , \ (z \in U) \tag{2.6}$$

ise $g \in S$ dir.

v. Değer Bölgesi Dönüşümü: $f \in S$ olmak üzere w fonksiyonu f(U) da analitik, ünivalent ve $w(0) = 0$, $w'(0) = 1$ koşullarını sağlayan bir fonksiyon ise $w \circ f \in S$ dir.

vi. Çıkarılmış Değer Dönüşümü: $f \in S$ ve $w \in f(U)$ olsun. Bu durumda,

$$g(z) = \frac{wf(z)}{w - f(z)}, \ (z \in U) \tag{2.7}$$

fonksiyonu S sınıfına aittir.

vii. n. kök dönüşümü: $f \in S$ olmak üzere $n = 2, 3, \ldots$ için,

$$g(z) = \sqrt[n]{f(z^n)} = z + \frac{a_2}{n} z^{n+1} + \frac{1}{2n^2}\left(2na_3 - (n - 1)a_2^2\right) z^{2n+1} + \ldots (z \in U) \tag{2.8}$$

fonksiyonu S sınıfına aittir.

Bieberbach Teoremi, ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli bir yer tutar. Bu teorem S sınıfına ait fonksiyonların $|a_2|$ katsayısı için üst sınırı verir.

Teorem 2.9 (Bieberbach Teoremi): S sınıfına ait olan her f fonksiyonu için $|a_2| \leq 2$ eşitsizliği gerçeklenir. Eşitlik hali Koebe fonksiyonu ve rotasyonları tarafından sağlanır (Bieberbach, 1916).

Bieberbach bu eşitsizliği genişleterek aşağıdaki kestirimde bulunmuştur. Bieberbach tahmini olarak bilinen bu problem, Louis De Branges tarafından 1985 yılında ispatlanmıştır.

Teorem 2.10 (Bieberbach Tahmini): $f \in S$ ve $n \geq 2$ olmak üzere $|a_n| \leq n$ dir. Eşitlik hali Koebe fonksiyonu ve rotasyonları tarafından sağlanır (Bieberbach, 1916).

S sınıfına ait f ünivalent fonksiyonları için en önemli ve en temel geometrik sonuç, Koebe tarafından 1907 yılında verilen aşağıdaki teoremdir.

Teorem 2.11 (Koebe Dörtte Bir Teoremi): S sınıfına ait her f fonksiyonunun f(U) görüntü bölgesi orijin merkezli $\frac{1}{4}$ yarıçaplı açık bir diski kapsar (Duren, 1983). Bu sonuç Koebe fonksiyonunun rotasyonları için kesindir.

Teorem 2.12 (Bükülme Teoremi): S sınıfına ait her f fonksiyonu ve $|z| = r < 1$ için,

$$\frac{1 - r}{(1 + r)^3} \leq \left|f'(z)\right| \leq \frac{1 + r}{(1 - r)^3} \tag{2.9}$$

eşitsizliği sağlanır (Goodman, 1983).

Teorem 2.13**:** S sınıfındaki her f fonksiyonu ve $|z| = r < 1$ için,

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1 - r^2}\right| \leq \frac{4r}{1 - r^2}, \tag{2.10}$$

eşitsizliği sağlanır (Goodman, 1983).

Teorem 2.14 (Büyüme Teoremi): S sınıfına ait her f fonksiyonu ve $|z| = r < 1$ için,

$$\frac{r}{(1 + r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1 - r)^2}, \tag{2.11}$$

eşitsizliği sağlanır (Goodman, 1983).

Büyüme ve Bükülme Teoremlerinin birleştirildiği bir diğer eşitsizlik aşağıdaki teoremde verilmektedir

Teorem 2.15**:** S sınıfına ait her bir f fonksiyonu için $|z| = r < 1$ olmak üzere

$$\frac{1 - r}{1 + r} \leq \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1 + r}{1 - r} \tag{2.12}$$

eşitsizliği sağlanır (Duren, 1983).

2.2. Ünivalent Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları

Bu bölümde S sınıfının çok önemli alt sınıfları olan yıldızıl, konveks, α mertebeli yıldızıl ve α mertebeli konveks fonksiyon sınıflarını inceleyip bazı temel özelliklerini vereceğiz.

Tanım 2.16 (Caratheodory Sınıfı): U birim diskinde analitik, $f(0) = 1$ ve $z \in U$ için, $\mathrm{Re}\{f(z)\} > 0$ eşitsizliğini sağlayan ve

$$f(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \tag{2.13}$$

şeklinde bir açılıma sahip olan fonksiyonların oluşturduğu sınıfa reel kısmı pozitif analitik fonksiyonlar sınıfı veya genellikle Caratheodory Sınıfı denir. Bu fonksiyonların oluşurduğu sınıf P ile gösterilir.

$z \in U$ için

$$p(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2z + 2z^3 + \ldots = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n \tag{2.14}$$

Möbius fonksiyonu P sınıfına ait önemli bir fonksiyondur. Bu fonksiyon analitik, ünivalent ve U birim diskini $H^+ = \{ w \in C: \mathrm{Re}w > 0 \}$ bölgesi üzerine konform olarak resmeder. Bir anlamda, Koebe fonksiyonunun S sınıfında oynadığı temel rolü, p fonksiyonu P sınıfında oynar.

P sınıfına ait fonksiyonların ünivalent olması gerekli değildir. Bu duruma örnek olarak $f(z) = 1 + z^n$ fonksiyonu $n \geq 0$ tamsayısı için P sınıfındadır ancak $n \geq 2$ için bu fonksiyon ünivalent değildir.

P sınıfına ait fonksiyonların katsayıları için oldukça kullanışlı olan ve temel teoremimizin ispatında da kullanacağımız aşağıdaki teorem Caratheodory tarafından 1907 yılında verilmiştir.

Teorem 2.17 (Caratheodary Teoremi): $f(z) \in P$ ve $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$ olsun. Bu takdirde, $n = 1, 2,\ldots$ için $|p_n| \leq 2$ dir (Caratheodory, 1907).

Tanım 2.18 (Schwarz Fonksiyonu): $w(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ fonksiyonu U birim diskinde tanımlanmış ve analitik olsun. Bu fonksiyon $w(0) = 0$ ve $|w(z)| < 1$ koşullarını gerçekleştiriyorsa bu fonksiyona Schwarz fonksiyonu denir ve bu fonksiyonların sınıfı Ω simgesi ile gösterilir.

Caratheodory sınıfı ve Schwarz fonksiyonları sınıfı arasındaki ilşki aşağıdaki önerme ile verilebilir.

$$p \in P \Leftrightarrow p = \frac{1 + w}{1 - w}, \quad w \in \Omega \tag{2.15}$$

Tanım 2.19 (Yıldızıl Fonksiyon): $D \subset C$ bölgesi verilsin ve $w_0 \in D$ olsun. Bu durumda, her $w \in D$ için $\{(1- t)w + tw_0, 0 < t < 1\} \subset D$ ise D bölgesine w_0 noktasına göre yıldızıl (starlike) bölge denir.

Yani, D bölgesindeki sabit bir w_0 noktasını her bir $w \in D$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen D bölgesinde kalıyorsa, D ye w_0 noktasına göre yıldızıl bölge denir. Eğer özel olarak $w_0 = 0$ seçilirse D bölgesine orijine göre yıldızıl bölge veya kısaca yıldızıl bölge denir. Farklı bir ifadeyle D bölgesinin her noktası w_0 noktasından "görünür" ise, D bölgesine w_0 noktasına göre yıldızıl bölge denir.

Eğer bir f fonksiyonu U birim diskini w_0 noktasına göre bir yıldızıl bölgeye resmediyorsa, f fonksiyonuna w_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyon denir.

Eğer özel olarak $w_0 = 0$ alınırsa f fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir. Yıldızıl fonksiyonların sınıfı S^* ile gösterilir.

Koebe Fonksiyonu, $w_0 > \frac{-1}{4}$ olmak üzere w_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyondur.

Teorem 2.20: $f \in \mathcal{A}$ ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ (yani $f \in S$) koşulları sağlansın. Bu durumda $f \in S^*$ olması için gerek ve yeter koşul,

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0,\ z \in U \qquad (2.16)$$

olmasıdır (Duren, 1983).

Yıldızıl fonksiyonların sınıfı kısaca,

$$S^* = \left\{f \in \mathcal{A}: \mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0, z \in U\right\}$$

şeklinde gösterilir.

Buradan da anlaşılacağı üzere $S^* \subset S$ dır. α mertebeli yıldızıl fonksiyonlar sınıfı S^* sınıfının bir alt sınıfıdır ve Robertson (Robertson, 1936) tarafından tanımlanmıştır. Bu sınıf kısaca,

$$S^*(\alpha) = \left\{f \in \mathcal{A}:\ \mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha;\ z \in U, 0 \le \alpha < 1\right\}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Tanım 2.21 (Konveks Fonksiyon): S sınıfının bir diğer önemli alt sınıfı da konveks fonksiyonlar sınıfıdır. D bölgesi her noktasına göre yıldızıl ise bu bölgeye konveks bölge denir. Başka bir deyişle, D bölgesinin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasının tamamı D bölgesinin içinde kalıyorsa, D bölgesine konveks bölge denir.

Birim disk içinde ünivalent $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu birim diski konveks bir kümeye dönüştürüyorsa f ye konveks fonksiyon denir. Konveks fonksiyonların sınıfı K ile gösterilir.

Teorem 2.22: $f: U \to C$ fonksiyonu analitik olsun ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ şartları sağlansın. Bu durumda f nin K sınıfında olması için gerek ve yeter şart,

$$\mathrm{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0, z \in U \qquad (2.17)$$

olmasıdır.

Konveks ve yıldızıl fonksiyonlar için $K \subset S^* \subset S$ bağıntısı yazılabilir.

$f(z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ fonksiyonu konvekstir, ancak $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ fonksiyonu yıldızıl olup konveks değildir.

Yıldızıl ve konveks fonksiyonlar arasındaki bağıntıyı aşağıdaki teoremle verebiliriz.

Teorem 2.23 (Alexander Teoremi): $f \in \mathcal{A}$ ve $z \in U$ olmak üzere $g(z) = zf'(z)$ olsun. Bu durumda $f \in K$ olması için gerek ve yeter şart $g \in S^*$ olmasıdır (Alexander, 1915).

2.3 Bi-Ünivalent Fonksiyonlar

f, C kompleks düzleminin açık ve bağlantılı bir D alt kümesinde analitik olan bir fonksiyon olsun. Bu f analitik fonksiyonunun tersi olan g analitik fonksiyonu $g(f(z)) = z$ şeklinde tanımlanır. Ayrıca, Koebe $\frac{1}{4}$ teoremine göre her U diskinin $f \in S$ altında görüntüsü orijin merkezli $\frac{1}{4}$ yarıçaplı diski kapsar. Böylelikle, her $f \in S$ fonksiyonunun aşağıdaki koşulları sağlayan bir f^{-1} ters fonksiyonu vardır:

$$f^{-1}\big(f(z)\big) = z, \quad z \in U \tag{2.18}$$

ve

$$f^{-1}\big(f(w)\big) = w \qquad \left(|w| < r_0(f), \ r_0(f) \geq \frac{1}{4}\right). \tag{2.19}$$

Bu halde $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in S$ alınırsa, $f^{-1}(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$ olduğu aşikardır. Bu durumda,

$$f\left(f^{-1}(w)\right) = f^{-1}(w) + a_2\left[f^{-1}(w)\right]^2 + a_3\left[f^{-1}(w)\right]^3 + \ldots \tag{2.20}$$

$$= w + \sum_{n=2}^{\infty} b_n w^n + a_2\left[w + \sum_{n=2}^{\infty} b_n w^n\right]^2 + a_3\left[w + \sum_{n=2}^{\infty} b_n w^n\right]^3 + \ldots$$

$$= w + (a_2 + b_2)w^2 + (b_3 + 2a_2b_2 + a_3)w^3 + \left(b_4 + 2a_2b_3 + a_2{b_2}^2 + 3a_3b_2 + a_4\right)w^4 + \ldots$$

olur. Buradan hareketle w'nin dereceleri aynı kuvvetlerinin katsayıları eşitlenirse

$$a_2 + b_2 = 0 \Rightarrow b_2 = -a_2 \tag{2.21}$$

$$b_3 + 2a_2b_2 + a_3 = 0 \Rightarrow b_3 = 2{a_2}^2 - a_3 \tag{2.22}$$

$b_4 + 2a_2b_3 + a_2{b_2}^2 + 3a_3b_2 + a_4 = 0 \Rightarrow b_4 = -5{a_2}^3 + 5a_2a_3 - a_4$ (2.23)

bağıntıları elde edilir. Böylelikle

$f^{-1}(w) = w - a_2w^2 + (2a_2^2 - a_3)w^3 - (5a_2^3 - 5a_2a_3 + a_4)w^4 + \ldots$ (2.24)

şeklinde olur. Buradaki $f^{-1}(z) \in \mathcal{A}$ dır.

Eğer hem f(z) hem de $f^{-1}(z)$ fonksiyonu U açık birim diskinde ünivalent ise $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna U da bi-ünivalenttir denir.

U da bi-ünivalent olan ve

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \ (z \in U) \quad (2.25)$$

formunda verilen f(z) fonksiyonlarının sınıfını Σ ile göstereceğiz. Σ sınıfındaki fonksiyonlarla ilgili ilk çalışma 1967 yılında Lewin tarafından yayınlanmıştır. Aşağıda Σ sınıfına ait fonksiyon örnekleri verilmiştir.

$f_1(z) = z$, $f_2(z) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$, $f_3(z) = -\log(1-z)$, $f_4(z) = \frac{z}{1-z^2}$.

Yukarıdaki fonksiyonların görüntü bölgeleri U birim diskini ihtiva eder.

$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ şeklinde tanımlanan Koebe fonksiyonu U birim diskinde ünivalent olmasına rağmen Σ sınıfına ait değildir. Çünkü Koebe Fonksiyonu U birim diskini

$C - \left(-\infty, \frac{-1}{4}\right]$ bölgesi üzerine resmeder yani görüntü bölgesi U birim diskini ihtiva etmez.

Σ sınıfına ait olmayan fonksiyonlara aşağıdaki fonksiyonlar örnek olarak verilebilir.

$f_5(z) = \frac{z}{1-z^2}$, $f_6(z) = z - \frac{z^2}{2}$.

2.4 Salegean Diferansiyel Operatörü

$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ biçimindeki f fonksiyonu için Salagean Diferansiyel Operatörü,

$$D^0 f(z) = f(z) \tag{2.26}$$

$$D^1 f(z) = Df(z) = zf'(z) \tag{2.27}$$

$$D^2 f(z) = D\big(Df(z)\big) = D\left(zf'(z)\right) = zf'(z) + z^2 f''(z) \tag{2.28}$$

.

.

.

$$D^n f(z) = D\left(D^{n-1} f(z)\right),\ n \in N = \{1,2,3,\ldots\} \tag{2.29}$$

olmak üzere,

$$D^n f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} k^n a_k z^k\ ,\ (\ n \in N_0 = \{0,1,2,\ldots\}\ ) \tag{2.30}$$

şeklinde tanımlanır.

Salagean (Salagean, 1983)'ın kendi doktora tezinde tanımladığı ve kendi ismini verdiği Salagean Operatöründen sonra Al-Oboudi (Al-Oboudi, 2004) tarafından genelleştirilmiş Salagean operatörü tanımlanmıştır. Bunun üzerine birçok matematikçi bu operatörden faydalanıp, farklı parametreler kullanarak yeni operatörler elde etmiş ve bu operatörler yardımıyla önemli bazı teoremler ile sonuçlar bulmuşlardır.

2.5. Al-Oboudi Diferansiyel Operatörü

$f \in \mathcal{A}$ olmak üzere, Al-Oboudi Diferansiyel Operatörü,

$$D_\delta^0 f(z) = f(z), \tag{2.31}$$

$$D_\delta^1 f(z) = (1-\delta)f(z) + \delta zf'(z) = D_\delta f(z),\ \delta \geq 0, \tag{2.32}$$

$$D_\delta^n f(z) = D_\delta(D_\delta^{n-1}\big(f(z)\big). \tag{2.33}$$

biçiminde Al-Oboudi tarafından tanımlanmıştır (Al-Oboudi, 2014).

Eğer f fonksiyonu $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ formunda verilirse,

$$D_{\delta}^{n} f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} [1 + (k-1)\delta]^n a_k z^k, \ (n \in N_0 = \{0,1,2,\ldots\}) \tag{2.34}$$

olduğu görülür.

$\delta=1$ alındığında Salagean diferansiyel operatörü elde edilir.

2.6 M-Katlı Simetrik Bi-Ünivalent Fonksiyonlar Sınıfı

$m \in N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ olsun. Bir A bölgesi orijin etrafında $\frac{2\pi}{m}$ açısı kadar döndürüldüğünde yine kendisi elde ediliyorsa bu bölgeye m-katlı simetrik bir bölge denir. Buradan anlaşıldığı gibi, eğer U birim diskinde analitik olan bir f fonksiyonu için

$$f\left(e^{\frac{2\pi i}{m}} z\right) = e^{\frac{2\pi i}{m}} f(z) \tag{2.35}$$

sağlanıyorsa f fonksiyonuna m-katlı simetrik ($m \in N$) fonksiyon denir. m-katlı simetrik fonksiyonlar sınıfını $S^{(m)}$ ile gösterelim.

m-katlı simetrik fonksiyonlar aşağıdaki biçimde de tanımlanabilir:

S ye ait olan her bir g fonksiyonu için,

$$f(z) = \sqrt[m]{g(z^m)}, \ (m \in N) \tag{2.36}$$

ile verilen f fonksiyonu da U birim diskinde ünivalenttir ve U birim diskini m-katlı simetrik bir bölge içine resmeder. Eğer f ünivalent fonksiyonu,

$$f(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk+1} z^{mk+1}, \quad (m \in N, z \in U) \tag{2.37}$$

biçiminde normalize edilmiş bir forma sahip ise bu fonksiyona m-katlı simetrik fonksiyon denir.

S sınıfına ait olan fonksiyonların bir-katlı simetrik (yani, $m = 1$) fonksiyonlar oldukları açıktır. m-katlı simetrik ünivalent fonksiyonlar kavramına benzer şekilde, m-katlı simetrik bi-ünivalent fonksiyonlar kavramının olması düşüncesi de doğal olarak ortaya çıkmaktadır. Her bir pozitif m tam sayısı için Σ sınıfına ait olan her bir f fonksiyonu, bir m-katlı simetrik bi-ünivalent fonksiyon üretmektedir.

f fonksiyonunun normalize edilmiş formu (2.37) eşitliğinde verildiği gibidir ve $f^{-1} = g$ aşağıdaki şekilde verilir:

$$g(w) = f^{-1}(w) = w - a_{m+1}w^{m+1} + \left[(m+1)a_{m+1}^2 - a_{2m+1}\right]w^{2m+1} -$$

$$\left[\frac{1}{2}(m+1)(3m+2)a_{m+1}^3 - (3m+2)a_{m+1}a_{2m+1} + a_{3m+1}\right]w^{3m+1} + \ldots \qquad (2.38)$$

M-katlı simetrik bi-ünivalent fonksiyonlar sınıfı Σ_m ile gösterilir. $m = 1$ alındığında (2.38) formülü Σ sınıfına ait olan ve (2.24) eşitliği ile verilen formül ile çakışır.

Pommerenke'nin çalışmasına göre, P sınıfına ait olan m-katlı simetrik p fonksiyonu,

$$p(z) = 1 + c_m z^m + c_{2m} z^{2m} + c_{3m} z^{3m} + \ldots \qquad (2.39)$$

formundadır.

Σ_m sınıfına ait fonksiyon örnekleri aşağıda verilmiştir:

$$\left(\frac{z^m}{1-z^m}\right)^{1/m},\ \left[-\log\left(1-z^m\right)\right]^{1/m} \text{ ve } \left[\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z^m}{1-z^m}\right)^{\frac{1}{m}}\right].$$

Analitik simetrik m-katlı bi-ünivalent fonksiyonlar için katsayı problemi son günlerde geometrik fonksiyonlar teorisinin favori bir konusu olarak gündemde olan bir konudur. Bu konuyla ilgili yapılan çalışmalar içinde burada kullanılan ve en önemli olanların bazıları ise (Srivastava ve diğ., 2014), (Akgül, 2017), (Yalçın ve Altınkaya, 2016), (Sümer Eker, 2016), (Sakar ve Taşar, 2018) çalışmalarıdır.

2.7 Bi-Ünivalent Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları İçin Katsayı Tahminleri

Bu kısımda son yıllarda m-katlı simetrik bi-ünivalent fonksiyonlarla ilgili yapılan çalışmalardan bazı örnekler verilmiştir.

Tanım 2.24: $f \in \Sigma_m$, $g = f^{-1}$ ve $0 < \alpha \leq 1$, $z \in U$, $w \in U$ olmak üzere eğer (2.37) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu,

$$\left|\arg\left(f'(z)\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \tag{2.40}$$

ve

$$\left|\arg\left(g'(w)\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \tag{2.41}$$

koşullarını sağlıyorsa f fonksiyonu $H_{\Sigma_m}(\alpha)$ sınıfına aittir denir. $g(w)$ fonksiyonu (2.38) eşitliği ile verilen fonksiyondur (Srivastava ve diğ., 2014).

Teorem 2.25: $f \in H_{\Sigma_m}(\alpha)$ ve $0 < \alpha \leq 1$, $m \in N$ olsun. Bu durumda,

$$|a_{m+1}| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{(m+1)(\alpha m + m + 1)}} \tag{2.42}$$

ve

$$|a_{2m+1}| \leq \frac{2\alpha[(2m+1)\alpha+m+1]}{(m+1)(2m+1)} \tag{2.43}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Srivastava ve diğ., 2014).

İspat: (2.40) ve (2.41) den,

$$f'(z) = [p(z)]^{\alpha} \tag{2.44}$$

ve

$$g'(w) = [q(w)]^{\alpha} \tag{2.45}$$

yazılır. Burada p(z) ve q(w) fonksiyonları,

$$p(z) = 1 + p_m z^m + p_{2m} z^{2m} + p_{3m} z^{3m} + \ldots \tag{2.46}$$

ve

$$q(z) = 1 + q_m w^m + q_{2m} w^{2m} + q_{3m} w^{3m} + \ldots \tag{2.47}$$

formlarına sahiptir ve P sınıfındadır.

$$[p(z)]^{\alpha} = 1 + \alpha p_m z^m + \left(\alpha p_{2m} + \frac{\alpha(\alpha\text{-}1)}{2} p_m^2\right) z^{2m} + \dots \tag{2.48}$$

$$[q(w)]^{\alpha} = 1 + \alpha q_m w^m + \left(\alpha q_{2m} + \frac{\alpha(\alpha\text{-}1)}{2} q_m^2\right) w^{2m} + \dots \tag{2.49}$$

dır.

(2.44) ve (2.45) de karşılıklı katsayılar eşitlenerek,

$$(m + 1)a_{m+1} = \alpha p_m \tag{2.50}$$

$$(2m + 1)a_{2m+1} = \alpha p_{2m} + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} p_m^2 \tag{2.51}$$

ve

$$- (m + 1)a_{m+1} = \alpha q_m \tag{2.52}$$

$$(2m + 1)\left[(m + 1)a_{m+1}^2 - a_{2m+1}\right] = \alpha q_{2m} + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} q_m^2 \tag{2.53}$$

elde edilir. (2.50) ve (2.52) den,

$$p_m = - q_m \tag{2.54}$$

$$2(m + 1)^2 a_{m+1}^2 = \alpha^2\left(p_m^2 + q_m^2\right) \tag{2.55}$$

olduğu görülür. Şimdi (2.51) ve (2.53) taraf tarafa toplanarak ve (2.55) eşitliği kullanılarak,

$$a_{m+1}^2 = \frac{\alpha^2(p_{2m} + q_{2m})}{(m + 1)(\alpha m + m + 1)} \tag{2.56}$$

bulunur. p_{2m} ve q_{2m} katsayılarının mutlak değerleri için Teorem 2.17 uygulanarak,

$$|a_{m+1}| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{(m + 1)(\alpha m + m + 1)}} \tag{2.57}$$

olduğu kolayca görülür. Bu da teoremde ileri sürülen $|a_{m+1}|$ katsayı sınırını verir.

Benzer şekilde $|a_{2m+1}|$ sınırını bulmak için (2.51) den (2.53) çıkartıldığında,

$$(2m + 1)\left[2a_{2m+1} - (m + 1)a_{m+1}^2\right]=\alpha\left(p_{2m} - q_{2m}\right) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\left(p_m^2 - q_m^2\right) \tag{2.58}$$

ve (2.54), (2.58) de kullanıldığında

$$a_{2m+1} = \frac{\alpha^2\left(p_m^2 + q_m^2\right)}{4(m + 1)} + \frac{\alpha\left(p_{2m} - q_{2m}\right)}{2(2m + 1)} \tag{2.59}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte mutlak değere geçildiğinde p_m, q_m, p_{2m} ve q_{2m} katsayılarının mutlak değerleri için Teorem 2.17 uygulandığında,

$$|a_{2m+1}| \leq \frac{2\alpha[(2m + 1)\alpha + m + 1]}{(m + 1)(2m + 1)} \tag{2.60}$$

olduğu kolayca görülür. Bu da teoremde ileri sürülen $|a_{2m+1}|$ katsayı sınırını verir.

Tanım 2.26: $f \in \Sigma_m$, $g = f^{-1}$ ve $0 \leq \beta < 1, z \in U, w \in U$ olmak üzere eğer (2.37) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu,

$$\mathrm{Re}\{f'(z)\} > \beta, \tag{2.61}$$

ve

$$\mathrm{Re}\{g'(w)\} > \beta \tag{2.62}$$

koşullarını sağlıyorsa f fonksiyonu $H_{\Sigma_m}(\beta)$ sınıfına aittir denir. g(w) fonksiyonu (2.38) eşitliği ile verilen fonksiyondur. (Srivastava ve diğ., 2014)

Teorem 2.27: $f \in H_{\Sigma_m}(\beta)$ ve $0 \leq \beta < 1$, $m \in N$ olsun. Bu durumda,

$$|a_{m+1}| \leq 2\sqrt{\frac{1 - \beta}{(m + 1)(2m + 1)}}, \tag{2.63}$$

ve

$$|a_{2m+1}| \leq 2(1 - \beta)\left(\frac{(1 - \beta)(2m + 1) + m + 1}{(m + 1)(2m + 1)}\right) \tag{2.64}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Srivastava ve diğ., 2014).

İspat: (2.61) ve (2.62) den,

$$f'(z) = \beta + (1 - \beta)p(z) \tag{2.65}$$

ve

$$g'(w) = \beta + (1 - \beta)q(w) \tag{2.66}$$

yazılır. Buradaki P(z) ve Q(z) fonksiyonları P sınıfına ait olup, (2.46) ve (2.47) denklemleri ile verilmektedir. (2.65) ve (2.66) de karşılıklı katsayılar eşitlenerek,

$$(m + 1)a_{m+1} = (1 - \beta)p_m \tag{2.67}$$

$$(2m + 1)a_{2m+1} = (1 - \beta)p_{2m} \tag{2.68}$$

$$-(m + 1)a_{m+1} = (1 - \beta)q_m \tag{2.69}$$

$$(2m + 1)\left[(m + 1)a_{m+1}^2 - a_{2m+1}\right] = (1 - \beta)q_{2m} \tag{2.70}$$

(2.67) ve (2.69) dan,

$$p_m = -q_m \tag{2.71}$$

ve

$$2(m + 1)^2 a_{m+1}^2 = (1 - \beta)^2(p_m^2 + q_m^2) \tag{2.72}$$

ve ayrıca (2.68) ve (2.70) den

$$(m + 1)(2m + 1)a_{m+1}^2 = (1 - \beta)(p_{2m} + q_{2m}) \tag{2.73}$$

sonucuna ulaşılır. Buradan a_{m+1}^2 ifadesi son denklemden çekildiğinde,

$$a_{m+1}^2 = \frac{(1 - \beta)(p_{2m} + q_{2m})}{(m + 1)(2m + 1)} \tag{2.74}$$

elde edilir. Bu denkleme Teorem 2.17 uygulanırsa

$$|a_{m+1}| \leq 2\sqrt{\frac{1-\beta}{(m+1)(2m+1)}} \tag{2.75}$$

bulunur.

$|a_{2m+1}|$ i bulmak için (2.68) ve (2.70) den

$$(2m+1)\left[2a_{2m+1} - (m+1)a_{m+1}^2\right] = (1-\beta)(p_{2m} - q_{2m}) \tag{2.76}$$

ve (2.74) den

$$a_{2m+1} = \frac{(1-\beta)^2\left(p_m^2 + q_m^2\right)}{4(m+1)} + \frac{(1-\beta)(p_{2m} - q_{2m})}{2(2m+1)} \tag{2.77}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte her iki tarafın modülü alınıp p_m, q_m, p_{2m} ve q_{2m} katsayıları için Teorem 2.17 uygulanırsa,

$$|a_{2m+1}| \leq 2(1-\beta)\left(\frac{[(2m+1)(1-\beta)+m+1]}{(m+1)(2m+1)}\right) \tag{2.78}$$

sonucuna ulaşılır.

Tanım 2.28: $f \in \Sigma_m$, $g = f^{-1}$ ve $0 < \alpha \leq 1$, $\tau \in C\backslash\{0\}$, $0 \leq \gamma \leq 1$, $z \in U$, $w \in U$ olmak üzere eğer (2.37) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu,

$$\left|\arg\left(1+\frac{1}{\tau}\left[f'(z) + \gamma z f''(z) - 1\right]\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \tag{2.79}$$

ve

$$\left|\arg\left(1+\frac{1}{\tau}\left[g'(w) + \gamma w g''(w) - 1\right]\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \tag{2.80}$$

koşullarını sağlıyorsa f fonksiyonu $H_{\Sigma_m}(\tau,\gamma;\alpha)$ sınıfına aittir denir. $g(w)$ fonksiyonu (2.38) eşitliği ile verilen fonksiyondur (Srivastava ve diğ., 2015).

Teorem 2.29: $f \in H_{\Sigma_m}(\tau, \gamma; \alpha)$ ve $0 < \alpha \leq 1$, $\tau \in C\backslash\{0\}$, $0 \leq \gamma \leq 1$, $m \in N$ olsun. Bu durumda,

$$|a_{m+1}| \leq \frac{2\alpha|\tau|}{\sqrt{|\tau\alpha(m+1)(2m+1)(2\gamma m+1)+(1-\alpha)(m+1)^2(\gamma m+1)^2|}} \tag{2.81}$$

ve

$$|a_{2m+1}| \leq \frac{2\alpha^2|\tau|^2}{(m+1)(\gamma m+1)^2} + \frac{2\alpha|\tau|}{(2m+1)(2\gamma m+1)} \tag{2.82}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Srivastava ve diğ., 2015).

Tanım 2.30: $f \in \Sigma_m$, $g = f^{-1}$ ve $0 \leq \beta < 1$, $\tau \in C\backslash\{0\}$, $0 \leq \gamma \leq 1$, $z \in U$, $w \in U$ olmak üzere eğer (2.37) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu,

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{1}{\tau}\left[f'(z)+\gamma z f''(z) - 1\right]\right) > \beta \tag{2.83}$$

ve

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{1}{\tau}\left[g'(w) + \gamma w g''(w) - 1\right]\right) > \beta \tag{2.84}$$

koşullarını sağlıyorsa $H_{\Sigma_m}(\tau, \gamma; \beta)$ sınıfına aittir denir. $g(w)$ fonksiyonu (2.38) eşitliği ile verilen fonksiyondur (Srivastava ve diğ., 2015).

Teorem 2.31: $f \in H_{\Sigma_m}(\tau, \gamma; \beta)$ ve $0 \leq \beta < 1$, $\tau \in C\backslash\{0\}$, $0 \leq \gamma \leq 1$, $m \in N$ olsun. Bu durumda,

$$|a_{m+1}| \leq \sqrt{\frac{4|\tau|(1-\beta)}{(m+1)(2m+1)(2\gamma m+1)}} \tag{2.85}$$

ve

$$|a_{2m+1}| \leq \frac{2|\tau|^2(1-\beta)^2}{(m+1)(\gamma m+1)^2} + \frac{2|\tau|(1-\beta)}{(2m+1)(2\gamma m+1)} \tag{2.86}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Srivastava ve diğ., 2015).

Hatırlatma 2.32: Tanım 2.28 ve Tanım 2.30 de $\tau = 1$ ve $\gamma = 0$ alınırsa $H_{\Sigma_m}(\tau, \gamma; \alpha)$ ve $H_{\Sigma_m}(\tau, \gamma; \beta)$ sınıfları sırasıyla, Srivastava ve diğerleri (Srivastava ve diğ., 2014) tarafından çalışılan $H_{\Sigma_m}(\alpha)$ ve $H_{\Sigma_m}(\beta)$ sınıflarına indirgenir ve Teorem 2.25 ve Teorem 2.27, bu özel durumun sonuçları olarak verilebilir.

Tanım 2.33: $f \in \Sigma_m$, $g = f^{-1}$ ve $0 < \alpha \leq 1$, $\lambda \geq 1$, $\tau \in C\backslash\{0\}$, $z \in U$, $w \in U$ olmak üzere eğer (2.37) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu,

$$\left|\arg\left(1 + \frac{1}{\tau}\left[(1 - \lambda)\frac{f(z)}{z} + \lambda f'(z) - 1\right]\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \tag{2.87}$$

ve

$$\left|\arg\left(1 + \frac{1}{\tau}\left[(1 - \lambda)\frac{g(w)}{w} + \lambda g'(w) - 1\right]\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \tag{2.88}$$

koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyon $B_{\Sigma_m}(\tau, \lambda; \alpha)$ sınıfına aittir denir. $g(w)$ fonksiyonu (2.38) de tanımlanan fonksiyondur (Srivastava ve diğ., 2016).

Teorem 2.34: $f \in B_{\Sigma_m}(\tau, \lambda; \alpha)$ ve $0 < \alpha \leq 1$, $\lambda \geq 1$, $\tau \in C\backslash\{0\}$, $m \in N$ olsun. Bu durumda,

$$|a_{m+1}| \leq \frac{2\alpha|\tau|}{\sqrt{\left|\tau\alpha(m + 1)(2\lambda m + 1) + (1 - \alpha)(\lambda m + 1)^2\right|}} \tag{2.89}$$

ve

$$|a_{2m+1}| \leq \frac{2\alpha^2|\tau|^2(m + 1)}{(\lambda m + 1)^2} + \frac{2\alpha|\tau|}{2\lambda m + 1} \tag{2.90}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Srivastava ve diğ., 2016).

Tanım 2.35: $f \in \Sigma_m$, $g = f^{-1}$ ve $0 \leq \beta < 1$, $\lambda \geq 1$, $\tau \in C\backslash\{0\}$, $z \in U$, $w \in U$ olmak üzere eğer (2.37) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu,

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{1}{\tau}\left[(1 - \lambda)\frac{f(z)}{z} + \lambda f'(z) - 1\right]\right) > \beta \tag{2.91}$$

ve

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{1}{\tau}\left[(1-\lambda)\frac{g(w)}{w}+\lambda g'(w)-1\right]\right)>\beta \tag{2.92}$$

koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyon $B^{*}_{\Sigma_m}(\tau,\lambda;\beta)$ sınıfına aittir denir. $g(w)$ fonksiyonu (2.38) de tanımlanan fonksiyondur (Srivastava ve diğ., 2016).

Teorem 2.36: $f\in B^{*}_{\Sigma_m}(\tau,\lambda;\beta)$ ve $0\le\beta<1, \lambda\ge 1, \tau\in C\backslash\{0\}, m\in N$ olsun. Bu durumda,

$$|a_{m+1}|\le\sqrt{\frac{4|\tau|(1-\beta)}{(m+1)(2\lambda m+1)}} \tag{2.93}$$

ve

$$|a_{2m+1}|\le\frac{2|\tau|^2(1-\beta)^2(m+1)}{(\lambda m+1)^2}+\frac{2|\tau|(1-\beta)}{2\lambda m+1} \tag{2.94}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Srivastava ve diğ., 2016).

Hatırlatma 2.37: Eğer Teorem 2.34 ve Teorem 2.36 de $\lambda=1$ ve $\tau=1$ alınırsa $B_{\Sigma_m}(\tau,\lambda;\alpha)$ ve $B^{*}_{\Sigma_m}(\tau,\lambda;\beta)$ sınıfları sırasıyla Srivastava ve diğerleri (Srivastava ve diğ., 2014) tarafından çalışılan $H_{\Sigma_m}(\alpha)$ ve $H_{\Sigma_m}(\beta)$ sınıflarına indirgenir ve Teorem 2.25 ve Teorem 2.27 bu özel durumun sonucu olarak verilebilir.

Tanım 2.38: $f\in\Sigma_m$, $g=f^{-1}$ ve $0<\alpha\le 1, \lambda\ge 1, \gamma\ge 0, z\in U, w\in U$ olmak üzere eğer (2.37) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu,

$$\left|\arg\left((1-\lambda)\frac{f(z)}{z}+\lambda f'(z)+\gamma z f''(z)\right)\right|<\frac{\alpha\pi}{2} \tag{2.95}$$

ve

$$\left|\arg\left((1-\lambda)\frac{g(w)}{w}+\lambda g'(w)+\gamma w g''(w)\right)\right|<\frac{\alpha\pi}{2} \tag{2.96}$$

koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyon $S_{\Sigma_m}(\alpha, \lambda, \gamma)$ sınıfına aittir denir. g(w) fonksiyonu (2.38) de tanımlanan fonksiyondur (Akgül, 2017).

Teorem 2.39: $f \in S_{\Sigma_m}(\alpha, \lambda, \gamma)$ ve $0 < \alpha \leq 1$, $\lambda \geq 1$, $\gamma \geq 0$, $m \in N$ olsun. Bu durumda,

$$|a_{m+1}| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{\left|\left(1+2\lambda m+2\gamma m(2m+1)\right)(m+1)\alpha + (1-\alpha)\left(1+ m\lambda+\gamma m(m+1)\right)^2\right|}} \tag{2.97}$$

ve

$$|a_{2m+1}| \leq \frac{2\alpha^2(m+1)}{\left(1 + m\lambda + \gamma m(m+1)\right)^2} + \frac{2\alpha}{1 + 2\lambda m + 2\gamma m(2m+1)} \tag{2.98}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Akgül, 2017).

Tanım 2.40: $f \in \Sigma_m$, $g = f^{-1}$ ve $0 \leq \beta < 1$, $\lambda \geq 1$, $\gamma \geq 0$, $z \in U$, $w \in U$ olmak üzere eğer (2.37) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu,

$$\mathrm{Re}\left\{(1 - \lambda)\frac{f(z)}{z} + \lambda f'(z) + \gamma z f''(z)\right\} > \beta \tag{2.99}$$

ve

$$\mathrm{Re}\left\{(1 - \lambda)\frac{g(w)}{w} + \lambda g'(w) + \gamma w g''(w)\right\} > \beta \tag{2.100}$$

koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyon $S_{\Sigma_m}(\beta, \lambda, \gamma)$ sınıfına aittir denir. g(w) fonksiyonu (2.38) de tanımlanan fonksiyondur (Akgül, 2017).

Teorem 2.41: $f \in S_{\Sigma_m}(\beta, \lambda, \gamma)$ ve $0 \leq \beta < 1$, $\lambda \geq 1$, $\gamma \geq 0$, $m \in N$ olsun. Bu durumda,

$$|a_{m+1}| \leq 2\sqrt{\frac{(1 - \beta)}{1 + 2\lambda m + 2\gamma m(2m+1)(m+1)}} \tag{2.101}$$

ve

$$|a_{2m+1}| \leq \frac{2(1-\beta)^2(m+1)}{\left(1+m\lambda+\gamma m(m+1)\right)^2}+\frac{2(1-\beta)}{1+2\lambda m+2\gamma m(2m+1)} \tag{2.102}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Akgül, 2017).

Hatırlatma 2.42: Tanım 2.38 ve Tanım 2.40 da $\lambda=1$ ve $\gamma=0$ alındığında $S_{\Sigma_m}(\alpha,\lambda,\gamma)$ ve $S_{\Sigma_m}(\beta,\lambda,\gamma)$ sınıfları sırasıyla Srivastava ve diğerleri (Srivastava ve diğ., 2014) tarafından çalışılan $H_{\Sigma_m}(\alpha)$ ve $H_{\Sigma_m}(\beta)$ sınıflarına indirgenir ve Teorem 2.25 ve Teorem 2.27, bu özel durumun sonucu olarak verilebilir.

Tanım 2.43: $f\in\Sigma_m$, $g=f^{-1}$ ve $0<\alpha\leq 1$, $\lambda\geq 1$, $\mu\geq 0$, $z\in U$, $w\in U$ olmak üzere eğer (2.37) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu,

$$\left|\arg\left((1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu}+\lambda f'(z)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu-1}\right)\right|<\frac{\alpha\pi}{2} \tag{2.103}$$

ve

$$\left|\arg\left((1-\lambda)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu}+\lambda g'(w)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu-1}\right)\right|<\frac{\alpha\pi}{2} \tag{2.104}$$

Koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyon $N_{\Sigma_m}^{\mu}(\alpha,\lambda)$ sınıfına aittir denir. g(w) fonksiyonu (2.38) de tanımlanan fonksiyondur (Yalçın ve Altınkaya, 2016).

Teorem 2.44: $f\in N_{\Sigma_m}^{\mu}(\alpha,\lambda)$ ve $0<\alpha\leq 1$, $\lambda\geq 1$, $\mu\geq 0$, $m\in N$ olsun. Bu durumda,

$$|a_{m+1}|\leq\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha[\mu(m+1)(1-\lambda)+\lambda(2m+1)(m+\mu)+(\mu-1)(\mu+\lambda m)]+(1-\alpha)(\mu+\lambda m)^2}} \tag{2.105}$$

ve

$$|a_{2m+1}|\leq\frac{2\alpha}{(\mu+2\lambda m)}+\frac{2[\mu(m+1)(1-\lambda)+\lambda(2m+1)(m+\mu)+(1-\mu)\lambda m]\alpha^2}{(\mu+\lambda m)^2(\mu+2\lambda m)} \tag{2.106}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Yalçın ve Altınkaya, 2016).

Tanım 2.45: $f \in \Sigma_m$, $g = f^{-1}$ ve $0 \leq \beta < 1$, $\lambda \geq 1$, $\mu \geq 0$, $z \in U$, $w \in U$ olmak üzere eğer (2.37) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu,

$$\operatorname{Re}\left((1 - \lambda)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu} + \lambda f'(z)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu-1} \right) > \beta \tag{2.107}$$

ve

$$\operatorname{Re}\left((1 - \lambda)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu} + \lambda g'(w)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu-1} \right) > \beta \tag{2.108}$$

koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyon $N_{\Sigma_m}^{\mu}(\beta, \lambda)$ sınıfına aittir denir. g(w) fonksiyonu (2.38) de tanımlanan fonksiyondur (Yalçın ve Altınkaya, 2016).

Teorem 2.46: $f \in N_{\Sigma_m}^{\mu}(\beta, \lambda)$ ve $0 \leq \beta < 1$, $\lambda \geq 1$, $\mu \geq 0$, $m \in N$ olsun. Bu durumda,

$$|a_{m+1}| \leq \sqrt{\frac{4(1 - \beta)}{\mu(m + 1)(1 - \lambda) + \lambda(2m + 1)(m + \mu) + (\mu - 1)(\mu + \lambda m)}} \tag{2.109}$$

ve

$$|a_{2m+1}| \leq \frac{2[\mu(m+1)(1-\lambda) + \lambda(2m+1)(m+\mu) + (1-\mu)\lambda m](1-\beta)^2}{(\mu+\lambda m)^2(\mu+2\lambda m)} + \frac{2(1-\beta)}{\mu+2\lambda m} \tag{2.110}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Yalçın ve Altınkaya, 2016).

Tanım 2.47: $f \in \Sigma_m$, $g = f^{-1}$ ve $0 < \alpha \leq 1$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $z \in U$, $w \in U$ olmak üzere eğer (2.37) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu,

$$\left| \arg\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} + \frac{\lambda z^2 f''(z)}{f(z)} \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2} \tag{2.111}$$

ve

$$\left| \arg\left(\frac{wg'(w)}{g(w)} + \frac{\lambda w^2 g''(w)}{g(w)} \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2} \tag{2.112}$$

koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyon $A_{\Sigma_m}(\lambda; \alpha)$ sınıfına aittir denir. g(w) fonksiyonu (2.38) de tanımlanan fonksiyondur (Sümer Eker, 2016).

Teorem 2.48: $f \in A_{\Sigma_m}(\lambda; \alpha)$ ve $0 < \alpha \leq 1$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $m \in N$ olsun. Bu durumda,

$$|a_{m+1}| \leq \frac{2\alpha}{m\sqrt{2\alpha[1 + 2\lambda(m + 1)] + (1 - \alpha)[1 + \lambda(m + 1)]^2}} \tag{2.113}$$

ve

$$|a_{2m+1}| \leq \frac{\alpha(m + 1)(2-\alpha)}{m^2[1 + 2\lambda(m + 1)]} \tag{2.114}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Sümer Eker, 2016).

Tanım 2.49: $f \in \Sigma_m$, $g = f^{-1}$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$, $0 \leq \beta < 1$, $z \in U$, $w \in U$ olmak üzere eğer (2.37) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu,

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)} + \frac{\lambda z^2 f''(z)}{f(z)}\right\} > \beta \tag{2.115}$$

ve

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{wg'(w)}{g(w)} + \frac{\lambda w^2 g''(w)}{g(w)}\right\} > \beta \tag{2.116}$$

koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyon $A_{\Sigma_m}(\lambda, \beta)$ sınıfına aittir denir. g(w) fonksiyonu (2.38) de tanımlanan fonksiyondur (Sümer Eker, 2016).

Teorem 2.50: $f \in A_{\Sigma_m}(\lambda, \beta)$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$, $0 \leq \beta < 1$, $m \in N$ olsun. Bu durumda,

$$|a_{m+1}| \leq \sqrt{\frac{2(1 - \beta)}{m^2[1 + 2\lambda(m + 1)]}} \tag{2.117}$$

ve

$$|a_{2m+1}| \leq \frac{(1 - \beta)(m + 1)}{m^2[1 + 2\lambda(m + 1)]} \tag{2.118}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Sümer Eker, 2016).

Tanım 2.51: $f \in \Sigma_m$, $g = f^{-1}$ ve $0 \leq \lambda < 1$, $0 < \alpha \leq 1$, $\tau \in C\backslash\{0\}$, $z \in U$, $w \in U$ olmak üzere eğer (2.37) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu,

$$\left| \arg\left(1 + \frac{1}{\tau}\left(\frac{zf'(z) + \lambda z^2 f''(z)}{\lambda z f'(z) + (1-\lambda) f(z)} - 1 \right) \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2} \tag{2.119}$$

ve

$$\left| \arg\left(1 + \frac{1}{\tau}\left(\frac{wg'(w) + \lambda w^2 g''(w)}{\lambda w g'(w) + (1-\lambda) g(w)} - 1 \right) \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2} \tag{2.120}$$

koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyon $S_{\Sigma_m}(\tau, \lambda, \alpha)$ sınıfına aittir denir. g(w) fonksiyonu (2.38) de tanımlanan fonksiyondur (Sakar ve Taşar, 2018).

Teorem 2.52: $f \in S_{\Sigma_m}(\tau, \lambda, \alpha)$ ve $0 \leq \lambda < 1$, $0 < \alpha \leq 1$, $\tau \in C\backslash\{0\}$, $m \in N$ olsun. Bu durumda,

$$|a_{m+1}| \leq \frac{2\alpha|\tau|}{\sqrt{2m\left(m + 2m^2\lambda - m^2\lambda^2\right)\alpha|\tau| - (\alpha - 1)m^2(1 + m\lambda)^2}} \tag{2.121}$$

ve

$$|a_{2m+1}| \leq \frac{2(m+1)\alpha^2|\tau|^2}{m^2(1 + m\lambda)^2} + \frac{\alpha|\tau|}{m(1 + 2m\lambda)} \tag{2.122}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Sakar ve Taşar, 2018).

Tanım 2.53: $f \in \Sigma_m$, $g = f^{-1}$ ve $0 \leq \lambda < 1$, $0 \leq \beta < 1$, $\tau \in C/\{0\}$, $z \in U$, $w \in U$ olmak üzere eğer (2.37) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu,

$$\operatorname{Re}\left\{ 1 + \frac{1}{\tau}\left(\frac{zf'(z) + \lambda z^2 f''(z)}{\lambda z f'(z) + (1 - \lambda) f(z)} - 1 \right) \right\} > \beta \tag{2.123}$$

ve

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{1}{\tau}\left(\frac{wg'(w)+\lambda w^2 g''(w)}{\lambda wg'(w)+(1-\lambda)g(w)}-1\right)\right\}>\beta \tag{2.124}$$

koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyon $S_{\Sigma_m}(\lambda,\tau,\beta)$ sınıfına aittir denir. $g(w)$ fonksiyonu (2.38) de tanımlanan fonksiyondur (Sakar ve Taşar, 2018).

Teorem 2.54: $f\in S_{\Sigma_m}(\lambda,\tau,\beta)$ ve $0\le\lambda<1$, $0\le\beta<1$, $\tau\in C\backslash\{0\}$, $m\in N$ olsun. Bu durumda $|a_{m+1}|$ ve $|a_{2m+1}|$ katsayıları,

$$|a_{m+1}|\le\sqrt{\frac{2|\tau|(1-\beta)}{m\left(m+2m^2\lambda-m^2\lambda^2\right)}} \tag{2.125}$$

ve

$$|a_{2m+1}|\le\frac{2(m+1)|\tau|^2(1-\beta)^2}{m^2(1+m\lambda)^2}+\frac{|\tau|(1-\beta)}{m(1+2m\lambda)} \tag{2.126}$$

eşitsizliklerini sağlar (Sakar ve Taşar, 2018).

3.BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçlara yer verilecektir. Amacımız, Al-Oboudi Diferansiyel Operatörünü kullanarak Σ_m sınıfındaki fonksiyonlardan oluşan iki yeni alt sınıf tanımlamak ve bu sınıflar için kesin olmayan $|a_{m+1}|$ ve $|a_{2m+1}|$ başlangıç katsayı sınırlarını elde etmektir.

3.1 $B^{\delta}_{\Sigma_m}(\alpha,\lambda,\gamma,n)$ Sınıfının Başlangıç Katsayıları

Tanım 3.1: $f \in \Sigma_m$, $g = f^{-1}$ ve $0 < \alpha \leq 1$, $\lambda \geq 1$, $\gamma \geq 0$, $z \in U$, $w \in U$ olsun. Eğer (2.37) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu,

$$\left|\arg\left((1-\lambda)\frac{D^n_\delta f(z)}{z} + \lambda\left(D^n_\delta f(z)\right)' + \gamma z\left(D^n_\delta f(z)\right)''\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \tag{3.1}$$

$$\left|\arg\left((1-\lambda)\frac{D^n_\delta g(w)}{w} + \lambda\left(D^n_\delta g(w)\right)' + \gamma w\left(D^n_\delta g(w)\right)''\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \tag{3.2}$$

koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyon $B^{\delta}_{\Sigma_m}(\alpha, \lambda, \gamma, n)$ sınıfına aittir denir. $g(w)$ fonksiyonu (2.38) de tanımlanan fonksiyondur. Buradaki D^n_δ operatörü Al-Oboudi Diferansiyel Operatörüdür.

Teorem 3.2: $f \in B^{\delta}_{\Sigma_m}(\alpha, \lambda, \gamma, n)$ ve $0 < \alpha \leq 1$, $\lambda \geq 1$, $\gamma \geq 0$, $m \in N$ olsun. Bu durumda,

$|a_{m+1}| \leq$

$$\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha\left(1+2\lambda m+2\gamma m(2m+1)\right)(2\delta m+1)^n(m+1)-(\alpha-1)\left(1+\lambda m+\gamma m(m+1)\right)^2(\delta m+1)^{2n}}} \tag{3.3}$$

ve

$$|a_{2m+1}| \leq \frac{2\alpha^2(m+1)}{\left(1+\lambda m+\gamma m(m+1)\right)^2(\delta m+1)^{2n}} + \frac{2\alpha}{\left(1+2\lambda m+2\gamma m(2m+1)\right)(2\delta m+1)^n} \tag{3.4}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat: $f \in B^{\delta}_{\Sigma_m}(\alpha, \lambda, \gamma, n)$, $g = f^{-1}$ ve $0 < \alpha \leq 1$, $\lambda \geq 1$, $\gamma \geq 0$ olmak üzere,

$$(1-\lambda)\frac{D^n_\delta f(z)}{z} + \lambda\left(D^n_\delta f(z)\right)' + \gamma z\left(D^n_\delta f(z)\right)'' = [p(z)]^\alpha \tag{3.5}$$

ve

$$(1-\lambda)\frac{D^n_\delta g(w)}{w} + \lambda\left(D^n_\delta g(w)\right)' + \gamma z\left(D^n_\delta g(w)\right)'' = [q(w)]^\alpha \tag{3.6}$$

dir. Burada p(z) ve q(w) fonksiyonları P sınıfında olup aşağıda verilen formlara sahiptir:

$$p(z) = 1 + p_m z^m + p_{2m} z^{2m} + p_{3m} z^{3m} + \dots \tag{3.7}$$

ve

$$q(z) = 1 + q_m w^m + q_{2m} w^{2m} + q_{3m} w^{3m} + \dots \tag{3.8}$$

(3.5) ve (3.6) eşitliklerinde z^m ve z^{2m} katsayıları arasında birebir eşleme yapabilmek için bu eşitliklerin sol tarafındaki oranlar ile ilgili hesaplamalar yapılırsa

$$D^n_\delta f(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} (\delta mk + 1)^n a_{mk+1} z^{mk+1} \tag{3.9}$$

$$D^n_\delta g(w) = w + \sum_{k=1}^{\infty} (\delta mk + 1)^n A_{mk+1} w^{mk+1} \tag{3.10}$$

olduğundan

$$(1-\lambda)\frac{D^n_\delta f(z)}{z} + \lambda\left(D^n_\delta f(z)\right)' + \gamma z\left(D^n_\delta f(z)\right)'' = 1 + \left(1+\lambda m+\gamma m(m+1)\right)(\delta m+1)^n a_{m+1} z^m$$

$$+\left(1 + 2\lambda m + 2\gamma m(2m + 1)\right)(2\delta m + 1)^n a_{2m+1} z^{2m} + \dots \tag{3.11}$$

$$(1-\lambda)\frac{D^n_\delta g(w)}{w} + \lambda\left(D^n_\delta g(w)\right)' + \gamma w\left(D^n_\delta g(w)\right)'' = 1 - \left(1+\lambda m+\gamma m(m+1)\right)(\delta m+1)^n (a_{m+1}) w^m$$

$$+\big(1 + 2\lambda m + 2\gamma m(2m + 1)\big)(2\delta m + 1)^n\big[(m + 1)a_{m+1}^2 - a_{2m+1}\big]w^{2m} + ... \quad (3.12)$$

eşitlikleri elde edilir.

$$[p(z)]^\alpha = 1 + \alpha p_m z^m + \left(\alpha p_{2m} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} p_m^2\right) z^{2m} + \dots \quad (3.13)$$

$$[q(w)]^\alpha = 1 + \alpha q_m w^m + \left(\alpha q_{2m} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} q_m^2\right) w^{2m} + \dots \quad (3.14)$$

dır.

(3.11) ve (3.12) da verilen eşitliklerdeki z^m ve z^{2m} katsayılarını eşitlediğimizde aşağıda verilen denklemleri elde ederiz.

$$(1 + \lambda m + \gamma m(m + 1))(\delta m + 1)^n a_{m+1} = \alpha p_m \quad (3.15)$$

$$\big(1 + 2\lambda m + 2\gamma m(2m + 1)\big)(2\delta m + 1)^n a_{2m+1} = \alpha p_{2m} + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} p_m^2 \quad (3.16)$$

$$-\big(1 + \lambda m + \gamma m(m + 1)\big)(\delta m + 1)^n a_{m+1} = \alpha q_m \quad (3.17)$$

$$\big(1+2\lambda m+2\gamma m(2m+1)\big)(2\delta m+1)^n\big[(m+1)a_{m+1}^2 - a_{2m+1}\big] = \alpha q_{2m} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} q_m^2 \quad (3.18)$$

(3.15) ve (3.17) denklemlerini kullanarak,

$$p_m = -q_m \quad (3.19)$$

$$2\big(1 + \lambda m + \gamma m(m + 1)\big)^2(\delta m + 1)^{2n} a_{m+1}^2 = \alpha^2\big(p_m^2 + q_m^2\big) \quad (3.20)$$

eşitlikleri elde edilir. (3.16) ve (3.18) taraf tarafa toplandığında,

$$\big(1+2\lambda m+2\gamma m(2m+1)\big)(2\delta m+1)^n(m+1)a_{m+1}^2 = \alpha\big(p_{2m}+q_{2m}\big) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\big(p_m^2+q_m^2\big) \quad (3.21)$$

bulunur.

(3.20), (3.21) de kullanılırsa,

$a_{m+1}^2=$

$$\frac{\alpha^2(p_{2m}+q_{2m})}{\alpha\left(1+2\lambda m+2\gamma m(2m+1)\right)(2\delta m+1)^n(m+1)-(\alpha-1)\left(1+\lambda m+\gamma m(m+1)\right)^2(\delta m+1)^{2n}} \quad (3.22)$$

bulunur.

(3.22) eşitliğinin her iki tarafının modülü ve karekökü alınıp, p_{2m} ve q_{2m} katsayılarının modülleri için Teorem 2.17 uygulanırsa

$|a_{m+1}|\leq$

$$\frac{2\alpha}{\sqrt{\left|\alpha(1+2\lambda m+2\gamma m(2m+1))(2\delta m+1)^n(m+1)-(\alpha-1)\left(1+\lambda m+\gamma m(m+1)\right)^2(\delta m+1)^{2n}\right|}} \quad (3.23)$$

elde edilir.

Şimdi $|a_{2m+1}|$ katsayısı için bir sınır elde etmeye çalışalım. Bunun için, (3.17) dikkate alınarak (3.16) eşitliğinden (3.18) eşitliğini çıkartıldığında,

$$\left(1+2\lambda m+2\gamma m(2m+1)\right)(2\delta m+1)^n\left[2a_{2m+1}-(m+1)a_{m+1}^2\right]=\alpha\left(p_{2m}-q_{2m}\right) \quad (3.24)$$

eşitliği bulunur. (3.20) denkleminden a_{m+1}^2, çekilip (3.24) denkleminde yerine yazılıp modüle geçildiğinde p_{2m} ve q_{2m} katsayılarının mutlak değerleri için Teorem 2.17 yi uygulandığında,

$$|a_{2m+1}|\leq\frac{2\alpha^2(m+1)}{\left(1+\lambda m+\gamma m(m+1)\right)^2(\delta m+1)^{2n}}+\frac{2\alpha}{\left(1+2\lambda m+2\gamma m(2m+1)\right)(2\delta m+1)^n} \quad (3.25)$$

eşitsizliği elde edilir.

3.2 $B_{\Sigma_m}^{\delta}(\beta,\lambda,\gamma,n)$ Sınıfının Başlangıç Katsayıları

Bu bölümde Σ_m sınıfının $B_{\Sigma_m}^{\delta}(\beta, \lambda, \gamma, n)$ ile gösterilen yeni bir alt sınıfı tanımlanarak, bu sınıfa ait olan $|a_{m+1}|$ ve $|a_{2m+1}|$ katsayı sınırları elde edilecektir.

Tanım 3.3: $f \in \Sigma_m$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer (2.37) şeklinde tanımlanan $f \in \Sigma_m$ fonksiyonu,

$0 \le \beta < 1$, $\lambda \ge 1$, $\gamma \ge 0$ olmak üzere,

$$\mathrm{Re}\left((1 - \lambda) \frac{D_\delta^n f(z)}{z} + \lambda \left(D_\delta^n f(z)\right)' + \gamma z \left(D_\delta^n f(z)\right)'' \right) > \beta \tag{3.26}$$

$$\mathrm{Re}\left((1 - \lambda) \frac{D_\delta^n g(w)}{w} + \lambda \left(D_\delta^n g(w)\right)' + \gamma w \left(D_\delta^n g(w)\right)'' \right) > \beta \tag{3.27}$$

koşullarını sağlıyorsa f fonksiyonu $B_{\Sigma_m}^{\delta}(\beta, \lambda, \gamma, n)$ sınıfına aittir denir. g(w) fonksiyonu (2.38) de tanımlanan fonksiyondur. Buradaki D_δ^n operatörü Al-Oboudi Diferansiyel Operatörüdür.

Teorem 3.4: $f \in B_{\Sigma_m}^{\delta}(\beta, \lambda, \delta, n)$ ve $0 \le \beta < 1$, $\lambda \ge 1$, $\gamma \ge 0$ olsun. Bu durumda,

$$|a_{m+1}| \le 2 \sqrt{\frac{(1 - \beta)}{\left(1 + 2\lambda m + 2\gamma m(2m + 1)\right)(2\delta m + 1)^n (m + 1)}} \tag{3.28}$$

ve

$$|a_{2m+1}| \le \frac{2(m+1)(1-\beta)^2}{\left(1+\lambda m+\gamma m(m+1)\right)^2 (\delta m+1)^{2n}} + \frac{2(1-\beta)}{\left(1+2\lambda m+2\gamma m(2m+1)\right)(2\delta m+1)^n} \tag{3.29}$$

olur.

İspat: $f \in B_{\Sigma_m}^{\delta}(\beta, \lambda, \gamma, n)$, $g = f^{-1}$ ve $0 \le \beta < 1$, $\lambda \ge 1$, $\gamma \ge 0$ olmak üzere,

$$(1 - \lambda) \frac{D_\delta^n f(z)}{z} + \lambda \left(D_\delta^n f(z)\right)' + \gamma z \left(D_\delta^n f(z)\right)'' = \beta + (1 - \beta) p(z) \tag{3.30}$$

$$(1 - \lambda) \frac{D_\delta^n g(w)}{w} + \lambda \left(D_\delta^n g(w)\right)' + \gamma w \left(D_\delta^n g(w)\right)'' = \beta + (1 - \beta) q(w) \tag{3.31}$$

(3.30) ve (3.31) de verilen eşitliklerdeki z^m ve z^{2m} katsayılarını eşitlendiğinde aşağıda verilen denklemleri elde ederiz.

$$\big(1 + \lambda m + \gamma m(m+1)\big)(\delta m + 1)^n a_{m+1} = \big(1 - \beta\big)p_m \tag{3.32}$$

$$\big(1 + 2\lambda m + 2\gamma m(2m+1)\big)(2\delta m + 1)^n a_{2m+1} = \big(1 - \beta\big)p_{2m} \tag{3.33}$$

$$-\big(1 + \lambda m + \gamma m(m+1)\big)(\delta m + 1)^n a_{m+1} = \big(1 - \beta\big)q_m \tag{3.34}$$

$$\big(1 + 2\lambda m + 2\gamma m(2m+1)\big)(2\delta m + 1)^n\big[(m+1)a_{m+1}^2 - a_{2m+1}\big] = \big(1 - \beta\big)q_{2m} \tag{3.35}$$

(3.32) ve (3.34) denklemleri kullanılarak

$$p_m = -\,q_m \tag{3.36}$$

ve

$$2\big(1 + \lambda m + \gamma m(m+1)\big)^2(\delta m + 1)^{2n}{a_{m+1}}^2 = \big(1 - \beta\big)^2\big(p_m^2 + q_m^2\big) \tag{3.37}$$

eşitlikleri elde edilir. Diğer yandan (3.33) ile (3.35) denklemlerinin taraf tarafa toplanmasıyla

$$a_{m+1}^2 = \frac{(1 - \beta)\big(p_{2m} + q_{2m}\big)}{\big(1 + 2\lambda m + 2\gamma m(2m+1)\big)(2\delta m + 1)^n(m+1)} \tag{3.38}$$

bulunur.

(3.38) denkleminde mutlak değer ve karakök alındığında p_{2m} ve q_{2m} katsayılarının mutlak değerleri için Teorem 2.17 uygulanırsa

$$|a_{m+1}| \le 2\sqrt{\frac{(1 - \beta)}{\big(1 + 2\lambda m + 2\gamma m(2m+1)\big)(2\delta m + 1)^n(m+1)}} \tag{3.39}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi $|a_{2m+1}|$ katsayısı için bir sınır elde etmeye çalışalım. Bunun için,

(3.33) eşitliğinden (3.35) eşitliğini çıkartıldığında,

$$\big(1 + 2\lambda m + 2\gamma m(2m+1)\big)(2\delta m+1)^n\big[2a_{2m+1} - (m+1)a_{m+1}^2\big] = (1 - \beta)(p_{2m} - q_{2m}) \tag{3.40}$$

elde edilir. (3.36) ve (3.37) denklemleri (3.40) kullanırak ve mutlak değer alınıp p_{2m} ve q_{2m} katsayılarının mutlak değerleri için Teorem 2.17 uygulandığında

$$|a_{2m+1}| \leq \frac{2(m+1)(1-\beta)^2}{\left(1+\lambda m+\gamma m(m+1)\right)^2(\delta m+1)^{2n}} + \frac{2(1-\beta)}{\left(1+2\lambda m+2\gamma m(2m+1)\right)(2\delta m+1)^n} \qquad (3.41)$$

eşitsizliği bulunur.

4.SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmamızda $B^{\delta}_{\Sigma_m}(\alpha, \lambda, \gamma, n)$ ve $B^{\delta}_{\Sigma_m}(\beta, \lambda, \gamma, n)$ sınıfları tanımlanarak, bu sınıflar için kesin olmayan $|a_{m+1}|$ ve $|a_{2m+1}|$ başlangıç katsayı sınırları incelendi. Elde edilen bulgulardaki parametreler için bazı özel seçimler yapılırsa, daha önce çalışılmış olan önemli sınıflar ve bu sınıflara ait sonuçlar elde edilir.

Tanım 3.1 ve Tanım 3.3 ile verdiğimiz sınıflar ve bu sınıflar için elde ettiğimiz Teorem 3.2 ve Teorem 3.4 deki sonuçlar daha önce yapılmış bir çok çalışmanın genellemesi niteliğinde olup bu sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Sonuç 4.1: $n = 0$ ve $\delta = 0$ alınırsa $B^{\delta}_{\Sigma_m}(\alpha, \lambda, \delta, n)$ ve $B^{\delta}_{\Sigma_m}(\beta, \lambda, \delta, n)$ sınıfları sırasıyla Arzu Akgül (Akgül, 2017) tarafından çalışılan $S_{\Sigma_m}(\alpha, \lambda, \gamma)$ ve $S_{\Sigma_m}(\beta, \lambda, \gamma)$ sınıflarına indirgenir. Teorem 3.2 ve Teorem 3.4 de $n = 0$, $\delta = 0$ alındığında ise Teorem 2.39 ve Teorem 2.41 bu özel durumun sonucu olarak verilebilir.

Sonuç 4.2: $n = 0$ ve $\delta = 0, \lambda = 1, \gamma = 0$ alınırsa $B^{\delta}_{\Sigma_m}(\alpha, \lambda, \gamma, n)$ ve $B^{\delta}_{\Sigma_m}(\beta, \lambda, \gamma, n)$ sınıfları sırasıyla Srivastava ve diğerleri (Srivastava ve diğ. 2014) tarafından çalışılan $H_{\Sigma_m}(\alpha)$ ve $H_{\Sigma_m}(\beta)$ sınıflarına indirgenir. Teorem 3.2 ve Teorem 3.4 de $n = 0$ ve $\delta = 0, \lambda = 1, \gamma = 0$ alındığında ise Teorem 2.25 ve Teorem 2.27 bu özel durumun sonucu olarak verilebilir.

Sonuç 4.3: Bir katlı fonksiyonlar için ($m = 1$) $n = 0, \delta = 0$ ve $\gamma = 0$ alınırsa $B^{\delta}_{\Sigma_m}(\alpha, \lambda, \gamma, n)$ ve $B^{\delta}_{\Sigma_m}(\beta, \lambda, \gamma, n)$ sınıfları sırasıyla Frasin ve Aouf (Frasin ve Aouf, 2011) tarafından çalışılan aşağıda verilen $B_{\Sigma}(\alpha, \lambda)$ ve $B_{\Sigma}(\beta, \lambda)$ sınıflarına indirgenir. Teorem 3.2 ve Teorem 3.4 de $n = 0$, $\delta = 0$ ve $\gamma = 0$ alındığında ise aşağıda verilen Teorem 4.2 ve Teorem 4.4 bu özel durumun sonucu olarak verilebilir.

Tanım 4.1: $f \in \Sigma$, $g = f^{-1}$ ve $0 < \alpha \leq 1, \lambda \geq 1, z \in U, w \in U$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu için

$$\left|\arg\left((1-\lambda)\frac{f(z)}{z}+\lambda f'(z)\right)\right|<\frac{\alpha\pi}{2}\quad(z\in U) \tag{4.1}$$

ve

$$\left|\arg\left((1-\lambda)\frac{g(w)}{w}+\lambda g'(w)\right)\right|<\frac{\alpha\pi}{2}\quad(w\in U) \tag{4.2}$$

şartları sağlanıyorsa f fonksiyonu $B_\Sigma(\alpha,\lambda)$ sınıfına aittir denir (Frasin ve Aouf, 2011).

Teorem 4.2: $f\in B_\Sigma(\alpha,\lambda)$ ve $0<\alpha\leq 1$, $\lambda\geq 1$ olsun. Bu durumda,

$$|a_2|\leq\frac{2\alpha}{\sqrt{(1+\lambda)^2+\alpha\left(1+2\lambda-\lambda^2\right)}} \tag{4.3}$$

ve

$$|a_3|\leq\frac{4\alpha^2}{(1+\lambda)^2}+\frac{2\alpha}{1+2\lambda} \tag{4.4}$$

olur (Frasin ve Aouf, 2011).

Tanım 4.3: $f\in\Sigma$, $g=f^{-1}$ ve $0\leq\beta<1$, $\lambda\geq 1$, $z\in U$, $w\in U$ olsun. Eğer $f\in\Sigma$ fonksiyonu için,

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\lambda)\frac{f(z)}{z}+\lambda f'(z)\right\}>\beta \tag{4.5}$$

ve

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\lambda)\frac{g(w)}{w}+\lambda g'(w)\right\}>\beta \tag{4.6}$$

şartları sağlanıyorsa f fonksiyonu $B_\Sigma(\beta,\lambda)$ sınıfındandır denir (Frasin ve Aouf, 2011).

Teorem 4.4: $f \in B_{\Sigma}(\beta, \lambda)$ ve $0 \leq \beta < 1$, $\lambda \geq 1$ olsun. Bu durumda,

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{2(1 - \beta)}{1 + 2\lambda}} \tag{4.7}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{4(1 - \beta)^2}{(1 + \lambda)^2} + \frac{2(1 - \beta)}{(1 + 2\lambda)} \tag{4.8}$$

olur (Frasin ve Aouf, 2011).

Sonuç 4.4: Eğer bir katlı simetrik fonksiyonlarda $(m = 1)$ $n = 0$, $\delta = 0$, $\lambda = 1$ alınırsa $B^{\delta}_{\Sigma_m}(\alpha, \lambda, \gamma, n)$ ve $B^{\delta}_{\Sigma_m}(\beta, \lambda, \gamma, n)$ sınıfları sırasıyla Frasin (Frasin, 2014) tarafından oluşturulmuş (Ayrıca bakınız (Srivastava ve Baysal, 2015).) aşağıda verilen $H_{\Sigma}(\alpha, \beta)$ sınıfına ve $H_{\Sigma}(\gamma, \beta)$ sınıfına indirgenir. Teorem 3.2 ve Teorem 3.4 de $n = 0$, $\delta = 0$, $\lambda = 1$ alındığında ise aşağıda verilen Teorem 4.6 ve Teorem 4.8 bu özel durumun sonucu olarak verilebilir.

Tanım 4.5: $f \in \Sigma$, $g = f^{-1}$ ve $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$, $2(1 - \alpha) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{\beta m+1} \leq 1$, $z \in U$, $w \in U$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu için

$$\left|\arg\left(f'(z) + \beta z f''(z)\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \tag{4.9}$$

ve

$$\left|\arg(g'(w) + \beta w g''(w))\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \tag{4.10}$$

şartları sağlanıyorsa f fonksiyonu $H_{\Sigma}(\alpha, \beta)$ sınıfına aittir denir (Frasin, 2014).

Teorem 4.6: $f \in H_{\Sigma}(\alpha, \beta)$ ve $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$, $2\left(1 - \alpha\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{\beta m + 1} \leq 1$ olsun. Bu durumda,

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{2(\alpha + 2) + 4\beta(\alpha + \beta + 2 - \alpha\beta)}} \tag{4.11}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{\alpha^2}{(1+\beta)^2} + \frac{2\alpha}{3(1+2\beta)} \tag{4.12}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Frasin, 2014).

Tanım 4.7: $f \in \Sigma$, $g = f^{-1}$ ve $\beta > 0$, $0 \leq \gamma < 1$, $2(1-\gamma)\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{\beta m + 1} \leq 1$, $z \in U$, $w \in U$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu için

$$\mathrm{Re}\left(f'(z) + \beta z f''(z)\right) > \gamma \tag{4.13}$$

$$\mathrm{Re}(g'(w) + \beta w g''(w)) > \gamma \tag{4.14}$$

şartları sağlanıyorsa f fonksiyonu $H_{\Sigma}(\gamma, \beta)$ sınıfındandır denir (Frasin, 2014).

Teorem 4.8: $f \in H_{\Sigma}(\gamma, \beta)$ ve $\beta > 0, 0 \leq \gamma < 1, 2(1-\gamma)\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{\beta m + 1} \leq 1$ olsun. Bu durumda,

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{2(1-\gamma)}{3(1+2\beta)}} \tag{4.15}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{(1-\gamma)^2}{(1+\beta)^2} + \frac{2(1-\gamma)}{3(1+2\beta)} \tag{4.16}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Frasin, 2014).

Sonuç 4.5: Eğer bir katlı simetrik fonksiyonlarda (m = 1) $n = 0$, $\delta = 0$, $\lambda = 1$ ve $\gamma = 0$ alındığında $B^{\delta}_{\Sigma_m}(\alpha, \lambda, \gamma, n)$ ve $B^{\delta}_{\Sigma_m}(\beta, \lambda, \gamma, n)$ sınıfları sırasıyla Srivastava ve diğerleri (Srivastava ve diğ., 2010) tarafından oluşturulmuş aşağıda verilen $H_{\Sigma}(\alpha)$ sınıfına ve $H_{\Sigma}(\beta)$ sınıfına indirgenir. Teorem 3.2 ve Teorem 3.4 de $n = 0$, $\delta = 0$, $\lambda = 1$ ve $\gamma = 0$ alındığında ise aşağıda verilen Teorem 4.10 ve Teorem 4.12 bu özel durumun sonucu olarak verilebilir.

Tanım 4.9: $f \in \Sigma$, $g = f^{-1}$ ve $0 < \alpha \leq 1$, $z \in U$, $w \in U$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu için

$$\left|\arg\left(f'(z)\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \tag{4.17}$$

ve

$$\left|\arg\left(g'(w)\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \tag{4.18}$$

şartları sağlanıyorsa f fonksiyonu $H_{\Sigma}(\alpha)$ sınıfına aittir denir (Srivastava ve diğ., 2010).

Teorem 4.10: $f \in H_{\Sigma}(\alpha)$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu durumda,

$$|a_2| \leq \alpha\sqrt{\frac{2}{\alpha+2}} \tag{4.19}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{\alpha(3\alpha+2)}{3} \tag{4.20}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Srivastava ve diğ., 2010).

Tanım 4.11: $f \in \Sigma$, $g = f^{-1}$ ve $0 \leq \beta < 1$, $z \in U$, $w \in U$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu için

$$\operatorname{Re}\left(f'(z)\right) > \beta \tag{4.21}$$

$$\operatorname{Re}\left(g'(w)\right) > \beta \tag{4.22}$$

şartları sağlanıyorsa f fonksiyonu $H_{\Sigma}(\beta)$ sınıfındandır denir (Srivastava ve diğ., 2010).

Teorem 4.12: $f \in H_{\Sigma}(\beta)$ ve $0 \leq \beta < 1$ olsun. Bu durumda,

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{2(1 - \beta)}{3}} \tag{4.23}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{(1-\beta)(5-3\beta)}{3} \tag{4.24}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Srivastava ve diğ., 2010).

KAYNAKLAR

Akgül A., On the Fekete –Szegö Problem for a New Class of M-Fold Symmetric Bi-univalent Functions Satisfying Subordination Condition, *ICAAMM 2019*, İstanbul, TÜRKİYE, 10-13 Mart 2019.

Akgül A., On the Coefficient Estimates of Analytic and Bi-univalent M-Fold Symmetric Functions, *Mathematica Aeterna*, 2017, **7**(3), 253-260.

Akgül A., The Fekete –Szegö Coefficient Inequality for a New Class of M-Fold Symmetric Bi-univalent Functions Satisfying Subordination Condition, *Honam Mathematical J*., 2018, **40**(4), 733-748.

Akgül A., A New General Subclasses of M-Fold Symmetric Bi-univalent Functions Given By Subordination, *Turkish Journal of Mathematics*, 2019, **43**, 1688-1698.

Akgül A., On The Fekete-Szegö Problem for a New Class of M-Fold Symmetric Bi-univalent Functions Satisfying Subordination Condition Given By Symmetric Q-Derivative Operator, *5Th International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics(ICRAPAM 2018),* Trabzon, Türkiye, 23-27 Temmuz 2018.

Akgül A., Koçal A., Al-Oboudi Diferansiyel Operatörü Yardımıyla Tanımlanan Analitik Yalınkat Fonksiyonların Yeni Bir Alt Sınıfı İçin Katsayı Tahminleri, *2.Uluslararası İstatistik Matematik ve Analitik Yöntemler Kongresi*, İstanbul, Türkiye, 28 Mart 2019.

Altınkaya Ş., Yalçın S., Coefficient Bounds for Two New Subclasses of M-fold Symmetric Bi-univalent Functions, *Serdica Math. J*., 2016, **42**, 175-186.

Al-Oboudi F. M., On Univalent Functions Defined by a Generalized Salagean Oparatör, *Int. J. Math. Sci.*, 2004, **27**, 1429-1436.

Başkan T., *Kompleks Fonksiyonlar Teorisi*, 7.Basım, Dora, Bursa, 2012.

Bieberbach L., Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, Welcheeine Schlichte Abbildung des Einheitskreises Vermitteln, Sitzungsber.Preuss.Akad.Wiss.Phys-Math.KI.940-955,1916.

Branges L. De, A Proof of the Bieberbach Conjecture, *Acta Math.*, 1985, **154**, 137-152.

Brannan D. A., Clunie J. G., *Aspect of Contemporary Complex Analysis*, Academic Press, New York London, 1980.

Brannan D. A., Taha T. S., On Some Classes of Bi-Univalent Functions, *Studia Universitatis Babeş-Bolyai*. *Mathematica*, 1986, **31**(2), 70-77.

Bulut S., Faber Polynomial Coefficient Estimates for a Subclasses of Analytic Bi-univalent Functions, *Filomat*, 2016, **30**(6), 1567-1575.

Duren P.L., *Univalent Functions*, Springer –Verlag, New York, 1983.

Frasin B.A., Aouf M.K., New Subclasses of Bi-univalent Functions, *Applied Mathematics Letters*, 2011, 24, 1569-1573.

Frasin B.A., Coefficient Estimates for a Certain Subclass of Bi-univalent Functions, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 2014, **43**(3), 383-389.

Garabedian P.R., Schiffer M., A Proof of the Bieberbach Conjecture for the Fourth Coefficient, *J. Rational Mech. Anal.*, 1955, **4**, 427-465.

Goodman A.W., *Univalent Functions Vols I and II*, Polygonal Publishing House, Washington, New Jersey, 1983.

Xu Q.-H., Gui Y.-C.,Srivastava H.M., Coefficient Estimates for a Certain Subclass of Analytic and Bi-univalent Functions, *Appl.Math.Lett.*, 2011, **23**(2010), 1188-1192.

Koebe P., *Über die Uniformisierung Beliebeger Analytischer Kurven*, Nach. Ges. Wiss., Gottingen, 1907.

Lewin M., On a Coefficient Problem for Bi-Univalent Functions, *American Mathematical Society*, 1967, **18**(1), 63-68.

Lowner C., Uniersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I., *Math Ann.*, 1923, **89**, 103-121.

Netenyahu E., The Minimal Distance of the İmage Boundary From the Orijin and Second Coefficient of a Univalent Functions in $|z| < 1$, *Archieve for Rational Mechanics and Analysis*, 1969, **32**, 100-112.

Ozawa M., On the Bieberbach Conjecture for the Sixth Coefficient, *Kodai Math. Sem. Rep.*, 1969, **21**, 97-128.

Palka B. P., *An Introduction to Complex Function Theory*, Springer-Verlag, New York, 1991.

Pederson R. W., A Proof of the Bieberbach Conjecture for the Sixth Coefficient, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1968, **31**, 331-351.

Pederson R. W., Sciffer M., A Proof of the Bieberbach Conjecture for the Fifth Coefficient, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1972, **45**, 161-193.

Pommerenke C., *Univalent Functions*, Vanderhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

Ponnusamy S., ve Silverman H., *Complex Variables with Applications*, Birkhauser, Boston, 2006.

Riemann B., Grundlagen für eine Allgemeine Theorie der Functionen einer Veranderlichen Complexen Grösse, PhD Thesis, University of Göttingen, Germany, 1851.

Robertson M. S., Analytic Functions Starlike in One Direction, *Amer. J. Math.*, 1936, **58**, 456-472.

Salagean G.S., Subclasses of Univalent Functions, *Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1013: 362-372, 1983.

Srivastava H. M., Bansal D., Coefficient Estimates for a Subclass of Analytic and Bi-univalent Functions, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 2015, **23**, 242-246.

Srivastava H. M. , Tuneski N. and Georgieva –Celakoska, Some Distortion and Other Properties Associated With a Family of N-Fold Symmetric Koebe Type Functions, *Austral.J.Math. Anal. Appl.*, 2012, 9(2), Article 1,1-17.

Srivastava H. M., Mishra A.K., Gochhayat P., Certain Subclass of Analytic and Bi-univalent Functions, *Appl.Math.Lett*., 2010, **23**, 1188-1192.

Srivastava H. M., Sivasubramanian S., Sivakumar R. ,Initial Coefficient Bounds for a Subclasses of M-fold Symmetric Bi-univalent Functions, *Tbilisi Mathematical Journal*, 2014, **7**(2), 1-10.

Srivastava H. M., Gaboury S., Ghanim F., Coefficient Estimates for Some Subclass of M-fold Symmetric Bi-univalent Functions, *Acta Universitatis Apulensis*, 2015, **41**, 153-164.

Srivastava H. M., Gaboury S., Ghanim F., Initial Coefficient Bounds for Some Subclasses of M-fold Symmetric Bi-univalent Functions, *Acta Mathematica Scienta*, 2016, **36B**(3), 863-871.

Sümer Eker S., Coefficient Estimates for a New Subclass of M-fold Symmetric Bi-univalent Functions, *Theory and Applications of Mathematics&Computer Science*, 2016, **6**(2), 103-109.

Taşar N., M-Katlı Simetrik Bi-Ünivalent Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları İçin Başlangıç Katsayı Sınırları, Yüksek Lisans Tezi, Batman Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Batman, 2019, 539812.

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

Akgül A., **Koçal A.**, Al-Oboudi Diferansiyel Operatörü Yardımıyla Tanımlanan Analitik Yalınkat Fonksiyonların Yeni Bir Alt Sınıfı İçin Katsayı Tahminleri, *2.Uluslararası İstatistik Matematik ve Analitik Yöntemler Kongresi*, İstanbul, Türkiye, 28 Mart 2019.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında İstanbul'da doğdu. Lise eğitimini Pertevniyal Lisesi'nde tamamladı. 2007 yılında girdiği İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümü'nden 2011 yılında mezun oldu. 2016 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2013 yılından beri M.E.B 'da Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.