T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

# KUANTUM PLAZMASINDA

# RAYLEIGH – TAYLOR KARARSIZLIĞI

Elif İMDAT

Danışman: Doç. Dr. Ebru DEVLEN

Astronomi ve Uzay Bilimleri Anabilim Dalı
Astrofizik Yüksek Lisans Programı

İzmir
2019

**Elif İMDAT** tarafından yüksek lisans tezi olarak sunulan **"Kuantum Plazmasında Rayleigh–Taylor Kararsızlığı"** başlıklı bu çalışma EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile EÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 10/09/2019 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği ile başarılı bulunmuştur.

**Jüri Üyeleri:** **İmza**

**Jüri Başkanı :** Prof. Dr. Ömür ÇAKIRLI

**Raportör Üye:** Doç. Dr. Ebru DEVLEN

**Üye :** Doç. Dr. Ahmet DERVİŞOĞLU



## EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

## ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum **"Kuantum Plazmasında Rayleigh–Taylor Kararsızlığı"** başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlamasından yazımına kadar bütün aşamalar bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

10/09/2019



Elif İMDAT

# ÖZET

## KUANTUM PLAZMASINDA RAYLEIGH – TAYLOR KARARSIZLIĞI

İMDAT, Elif

Yüksek Lisans Tezi, Astronomi ve Uzay Bilimleri Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ebru DEVLEN

Eylül 2019, 69 sayfa

Bu tezde, plazma ortamında karşılaşılan kararsız durumlardan biri olan Rayleigh–Taylor kararsızlığı üzerine çalışılmıştır. Bu kararsızlık, plazma yapısını ve bu yapı içerisinde meydana gelebilecek durumları anlayabilmek için önemli bir role sahiptir. Astrofizikte yıldız yapısı ve evrimiyle doğrudan bağlantılıdır.

Kuantum plazmalar elektronlar, iyonlar, pozitronlar ve/veya taneciklerin karışımından oluşmaktadır. Manyetik alanın ve kuantum mekanizmasının, ideal sıkıştırılamaz kuantum plazmasında ortaya çıkan Rayleigh–Taylor kararsızlığı üzerindeki etkileri incelenmiştir. Kuantum manyetohidrodinamik denklemleri ele alınmış ve tedirginlik sonucu dağılma bağıntısı elde edilmiştir. Sabit sınır koşulları uygulanarak denklemler çözülmüş ve Rayleigh–Taylor kararsızlığının büyüme oranının analitik ifadesi elde edilmiştir.

Manyetik alanın kararsızlığa etkisine bakıldığında klasik plazma ya da kuantum plazmada herhangi bir fark olmadığı görülmüş, ancak kuantum etkileri incelendiğinde bu etkilerin kararsızlığı bastırdığı görülmüştür. Rayleigh–Taylor kararsızlığında kuantum etkilerin önemini anlayabilmek için bazı parametreler elde edilmiş ve bu parametreler kullanılarak astrofiziksel bir durum incelenmiştir.

**Anahtar Sözcükler:** Rayleigh–Taylor kararsızlığı, plazma kararsızlıkları, kuantum plazma

# ABSTRACT

## RAYLEIGH – TAYLOR INSTABILITY IN A QUANTUM PLASMA

İMDAT, Elif

MSc in Astronomy and Space Science

Supervisor: Doç. Dr. Ebru DEVLEN

September 2019, 69 pages

In this thesis, Rayleigh–Taylor instability which is one of the unstable conditions encountered in plasma environment is studied. This instability plays an important role in understanding the plasma structure and the conditions that may occur within it. It is directly related with stellar structure and evolution in astrophysics.

Quantum plasmas are formed by electrons, ions, pozitrons, and/or particles. Quantum mechanism and magnetic field are examined effects on the Rayleigh–Taylor instability in an ideal incompressible quantum plazma. Quantum–MHD equations are used and the dispersion relation is derived using perturbation analysis. Equations are solved by fixed boundary conditions an analytical form of growth rate of Rayleigh–Taylor instability are obtained.

There is no difference between classical plazma and quantum plasma in view of the magnetic field effects on instability but, when the quantum effects are investigated it shows that the instability are supressed by these effects. To understand the importance of quantum effects on Rayleigh–Taylor instability, some parameters are given and an astrophysical situation is examined by using these parameters.

**Keywords:** Rayleigh–Taylor instability, plasma instabilities, quantum plasma

# ÖNSÖZ

Astronomide plazma madde yıllarca çalışılmış ve hala da çalışılmakta olan önemli bir konudur. Bu alanda yapılan çalışmalar evrende var olan maddenin hangi formlarda bulunabileceğini ve birbiri ile nasıl etkileşimde bulunabileceğini anlamamıza yardımcı olmaktadır.

Ankara Üniversitesi Astronomi ve Uzay Bilimleri Bölümü mezunu olarak, isteğim astonomi alanında ilerleyebilmek ve katkıda bulunabilmektir. Bu nedenle tez konusu olarak ilgi alanım da olan plazma madde ile ilgili bir durumu tercih ettim. Maddenin meydana getirebileceği ya da sebep olabileceği ilginç durumları incelemek ve kendi alanımda mümkün olduğunca ilerleyerek başarılar elde etmek en büyük temennimdir.

İZMİR

10/09/2019

Elif İMDAT

# İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇ KAPAK ..... i

KABUL ONAY SAYFASI ..... iii

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI ..... v

ÖZET ..... vii

ABSTRACT ..... ix

ÖNSÖZ ..... xi

İÇİNDEKİLER DİZİNİ ..... xiii

ŞEKİLLER DİZİNİ ..... xv

TABLOLAR DİZİNİ ..... xvii

KISALTMALAR DİZİNİ ..... xix

1. GİRİŞ ..... 1

2. PLAZMA MADDE ..... 3

2.1 Plazma Nedir? ..... 3

2.2 Plazma Çeşitleri ..... 4

2.3.Kuantum Plazma Nedir? ..... 6

3. PLAZMA KARARSIZLIKLARI ..... 10

# İÇİNDEKİLER (devam)

4.RAYLEIGH–TAYLOR KARARSIZLIĞI.....11

4.1.Tanım.....11

4.2.Lineer Kararlılık Analizi .....13

5.KUANTUM RAYLEIGH–TAYLOR KARARSIZLIĞI .....20

5.1.Tanım.....20

5.2.Matematiksel Model .....22

5.3.Analitik Gelişme.....23

5.4.Tartışma .....35

6. SONUÇLAR.....41

KAYNAKLAR DİZİNİ.....42

TEŞEKKÜR .....46

EKLER .....

# ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil Sayfa

Şekil 1.Kararsızlığın nicel gösterimi ..... 11

Şekil 2. Rayleigh-Taylor kararsızlığının Athena kodu ile gösterimi..... 12

Şekil 3. $\eta$ arayüzeyi ile ayrılmış iki akışkan ..... 13

Şekil 4. $H = 0.5,\ g^* = 10,\ n = 1,\ h^* = 1$ ile çeşitli Alfvén hız değerleri için dalga sayısına göre kararsızlığın büyüme oranı.. ..... 36

Şekil 5. $v_{af}^{*2} = 0.1,\ g^* = 10,\ n = 1,\ h^* = 1$ ile çeşitli kuantum durumları için dalga sayısına göre karasızlığın büyüme oranı ..... 38

Şekil 6.İki farklı durum için dalga sayısına göre kararsızlığın büyüme oranı ..... 38

# TABLOLAR DİZİNİ

Tablo Sayfa

Tablo 1.Plazma parametrelerinin tipik aralıkları.....4

# KISALTMALAR DİZİNİ

| Kısaltmalar | Açıklama |
|---|---|
| ICF | Inertial Confinement Fusion |
| SBM | Sharp Boundary Model |
| RT | Rayleigh–Taylor |
| MHD | Manyetohidrodinamik |
| QMHD | Quantum Manyetohidrodinamik |
| QHD | Quantum Hidrodinamik |
| ODE | Ordinary Differential Equation |

# 1. GİRİŞ

Tarih boyunca evreni anlamak ve anlamlandırmak için bir çok çalışma yapılmıştır. Bunun için öncelikle maddeyi anlamak gerekmektedir. Farklı hallerde bulunabilen maddenin bu değişik durumlarının bulunma sebebi tamamen enerji ile ilgilidir. Katı denilen sert durumdaki maddeye enerji verildiği zaman daha yumuşak durum olan sıvı hale, sonrasında ise hava diye adlandırılabilecek gaz hale geçiş yapmaktadır. Enerji aktarımı devam ettiğinde ise plazma diye adlandırılan başka bir durum olduğu görülmüştür. Bu hal, çok yüksek enerjili parçacıklardan oluşmaktadır ve bu parçacıkların hareketi sebebi ile de çeşitli yüksek enerjili dalgalar meydana gelebilmektedir. Yeryüzünde kısıtlı imkanlar sebebi ile daha ileri gidebilecek kadar enerji aktarımı henüz mümkün değildir. Ancak evrene bakıldığında buna örnek olabilecek durumlar bulunduğu görülmüştür.

Evrende bulunan maddenin hemen hemen hepsinin plazma halinde olduğu düşünülmektedir. Bunun sebebi yeryüzünde o denli yüksek enerjiler olmaması ve evrenin de henüz tamamının gözlemlenmemiş ve keşfedilmemiş olmasıdır.

Gözlemlerle elde edilen veriler göstermiştir ki bu kadar yüksek enerjiler yanında yer yüzeyinde üretilen enerjiler çok çok küçük kalmaktadır. Bu küçüklük karşısında yapılabilecek olan tek şey plazma diye adlandırılmış bu halin bütün özelliklerini kavrayabilmektir.

Dünya'ya en yakın kaynak olan Güneş incelenerek, barındırdığı plazma madde ile ilgili bir çok veri elde edilmiştir. Bu veriler kozmik plazma olarak adlandırılan plazma çeşidi hakkında bir çok bilgi edinme imkanı sağlamıştır. Farklı yoğunluklara sahip plazma madde katmanları arasında çok farklı etkileşimler olduğu görülmüştür. Bu plazma katmanlar Güneş'te olduğu gibi, bütün yıldızların çekirdeklerinden yüzeylerine kadar farklı sıcaklık ve yoğunluklarda bulunmaktadırlar.

Basitçe Rayleigh–Taylor kararsızlığı, hafif sıvının ağır sıvıyı bastırmasıyla meydana gelen, farklı yoğunluktaki iki sıvı arasındaki yüzeyin kararsızlığıdır. Aynı şekilde farklı yoğunluktaki iki plazma katmanı arasındaki kararsızlık olarak da incelemek mümkündür. Bu iki katman Güneş ve Güneş benzeri yıldızlarda incelenebileceği gibi, ömrünü tamamlamış ve patlama ile katmanlarını atarak yoğun çekirdek olarak kalmış ölü yıldız kalıntılarında da bulunabilmektedir.

Bu çalışmada Rayleigh–Taylor kararsızlığını araştırmak, dengesiz bir Taylor arayüzünde meydana gelen olayı açıklamak ve bu olayı nicel olarak anlama girişimlerini gözden geçirmek amaçlanmıştır. Maddenin bir hali olan akışkan plazma madde için Rayleigh–Taylor kararsızlığı incelenmek istenmiş, bunun için öncelikle klasik plazma olarak da bilinen laboratuvar plazması ele alınmıştır. Bu plazma ideal plazma olarak tanımlanır ve bu plazmanın sıkıştırılamaz olduğu varsayılmaktadır.

Daha sonra kozmik plazma olarak adlandırılan, gök cisimlerinde bulunan çok yüksek enerjilere sahip parçacıklardan meydana gelen plazma madde incelenerek, Rayleigh–Taylor kararsızlığının bu koşullar altında nasıl bir eğilim gösterdiği incelenmiştir.

Plazma, maddenin diğer hallerinden çok farklı bir forma sahiptir. Bu maddenin sahip olduğu ya da meydana getirdiği enerji kullanılarak teknolojik olarak çok farklı boyutlara ulaşılabilir. Evreni keşfetme ve yıldızlararası seyahati mümkün kılma açısıdan plazma maddenin sahip olduğu enerji çok büyük bir role sahiptir. Bunun için öncelikle bu maddeyi iyi anlamalı ve hangi koşullar altında ne gibi değişimlerde bulunduğu iyi kavranmalıdır. Aksi takdirde en ufak bir enerji değişikliği ile çok büyük yıkımlara sebep olunabilir. Bu çalışmada klasik plazma ve kozmik plazma içerisinde meydana gelebilecek Rayleigh–Taylor kararsızlığının evrimi incelenmiş ve farklı etkiler altında ne gibi durumlar oluşabileceği araştırılmıştır.

# 2. PLAZMA MADDE

## 2.1 Plazma Nedir?

Fizikte plazma; kelime anlamı olarak “iyonize olmuş gaz” demektir. Bu kelimenin kullanımı 1820’li yıllara dayanır. Maddenin bilinen katı,sıvı ve gaz durumlarından farklı olarak ele alınır. Bunun sebebi diğer üç durumdan oldukça değişik davranışlar sergilemesidir. Evrende bulunan maddenin %99’u plazma durumundadır (Chen, 1984).

Katı bir cisme belirli bir ısı enerjisi aktarılırsa, cisim erime ısısına ulaştığı anda sıvı duruma geçer. Enerji aktarımı devam ederse, aynı cisim buharlaşma ısısına ulaştığı anda gaz duruma geçer. Gaz durumunda elektronlar oldukça hızlı hareket ederler. Gaz durumundaki maddeye ısı enerjisi aktarılmaya devam edilirse iyonlaşma ısısına ulaştığı anda iyonlaşma başlar ve çekirdek çekiminden kurtulan serbest elektronlar, bir elektron uzayı oluşturarak maddeye yeni bir şekil kazandırır. İyonlaşmış gaz durumdaki madde iyon ve serbest elektronlardan oluşur. Isı verildikçe iyonlaşma süreci tekrarlanarak devam eder ve serbest elektron ve iyon bulutları oluşur. Ancak bazı atomlar nötr kalacaktır. Meydana gelen bu serbest elektron, iyon ve nötr atomlar içeren karışım “plazma” olarak adlandırılır.

Gaz durumdaki madde ile plazma madde arasındaki temel ayrım, gaz elektriksel olarak nötr parçacıklardan oluşurken plazmanın serbest elektronlar ve iyonlar da içeriyor olmasıdır.

Plazma genel olarak pozitif ve negatif parçacıkların elektriksel olarak nötr bir ortamı olarak tanımlanmaktadır. Bilinmelidir ki parçacıklar bağlı durumda olmadığı gibi tamamen özgür de değildirler. Yükler hareket ettiği zaman manyetik alanla birlikte elektrik akımı üretirler ve bunun sonucu olarak da birbirlerinin alanından etkilenirler. Plazmanın tanımı üç kriter gerektirir (Covlea, 2012):

*1) Plazma yaklaşımı*

Yüklü parçacıklarda, her bir parçacık, sadece en yakın parçacık ile etkileşime girmek yerine, yakınındaki birçok yüklü parçacığı etkileyebilecek kadar birbirine yakın olmalıdır (bu birlikte hareketler plazmanın ayırt edici özelliğidir). Plazma yaklaşımı, belirli bir parçacığın etki küresi (Debye küresi olarak da bilinir.) içindeki yük taşıyıcıların sayısının, yüklü parçacıkların toplu davranışını sağlayacak biçimde birden çok büyük olduğu durumda geçerlidir. Debye küresinin yarıçapı (Debye uzunluğu) $\lambda_D = \left( \frac{\varepsilon_0 kT}{e^2 n_e} \right)^{1/2}$ ile verilir. Genelde $\lambda_D$ çok küçüktür. $10^4\ K$ sıcaklıklı ve $n_e = 10^{16}\ m^{-3}$ elektron sayı yoğunluklu gaz içindeki yük boşalımı için $\lambda_D = 10^{-4}\ m$, $10^3\ K$ sıcaklıklı ve $n_e = 10^{12}\ m^{-3}$ elektron sayı yoğunluklu Yer iyonosferinde $\lambda_D = 10^{-3}\ m$ dir. Debye küresi içindeki parçacıkların ortalama sayısı plazma parametresi olarak verilir: $N_D = \frac{4\pi}{3} n_e \lambda_D^3$. Plazma olmanın birinci koşulu $N_D \gg 1$ dir.

*2) Toplu etkileşimler*

Plazmanın fiziksel büyüklüğü ile karşılaştırıldığında Debye uzunluğu çok kısadır, $\lambda_D \ll L$. Bu kriter sağlandığında, plazma elektriksel olarak nötrdür.

*3) Plazma frekansı*

Elektron plazma frekansı (elektronların plazma titreşimlerinin frekansı, $\omega$ ), elektron–nötr çarpışma frekansı (elektron ve nötr parçacıklar arasındaki çarpışmaların frekansı, $\nu_{en}$) ile karşılaştırıldığında büyüktür, $\omega > \nu_{en}$. Bu durum sağlandığında, elektrostatik etkileşimler genel gaz kinetikleri süreçlerini bastırır.

## 2.2 Plazma Çeşitleri

Plazma, küçük ölçekli laboratuvar plazması ve büyük ölçekli kozmik plazma şeklinde iki türlü ele alınabilir. Kozmik plazmada eş dağılımlılık (homojenlik) söz konusu iken laboratuvar plazması eş dağılımsızdır.

Laboratuvar plazmasında ilgilenilen sistem boyutları küçüktür. Bu nedenle yüksek frekanslı ışınım için geçirgendir. Deney düzeneği sınırlı olduğundan parçacıklara istenildiği ölçüde müdahale edilememekte ve bu nedenle yeterli sonuç alınamamaktadır. Plazma içerisinde titreşimler ve dalgalar oluşabilir. Plazma dalgaları enerjilerinin bir kısmını yüklü parçacıklara aktararak onları hızlandırabilir. Laboratuvar ortamının yetersiz kaldığı bir diğer nokta budur. Bu plazma durumuna örnek olarak şimşek, florasan lamba, plazma televizyon vb. gösterilebilir.

Kozmik plazmada sistemler daha büyük boyutlu olduğu için yüksek frekanslı ışınıma geçirgen değildirler. Bunun sebebi ortamın enerjisinin büyük bir bölümünü elektromanyetik ışınıma dönüştürmesi durumudur. Kozmik plazmada kozmik ışınlar kolayca üretilebilir. Küçük bir yük dengesizliği bile plazma parçacıklarını hareket ettirecek çok büyük elektrik alanlarına neden olur ve böylelikle nötrlüğü çok hızlı bir şekilde geri getirir. Kozmik ışınlar elektromanyetik ışınımla, dolayısıyla elektromanyetik alanlarla ilgili olan dalgalardır. Bu plazma durumuna örnek olarak Van Allen ışınım kuşakları, güneş rüzgarları gösterilebilir.

Plazmada serbest elektronlar, elektron kaybederek iyonlaşmış atomlar ve elektron kaybetmeyerek nötr kalmış atomlar bulunmaktadır. Coulomb kuvvetleri ve elektron devinimleri sebebi ile elektron titreşimleri; bu titreşimlerin yayılarak bütün plazmayı etkilemesi sonucu da plazma titreşimleri meydana gelir.

Plazma titreşimleri ve plazma dalgaları meydana gelen plazmalar çarpışmasız plazma olarak da ifade edilir. Çarpışmasız plazma içerisinde elektronların ortalama serbest yolu toplu süreçlerin karakteristik boyutlarından daha büyüktür.

Bir plazma, atomik veya moleküler bir gazdan farklıdır, çünkü elektrik yüklü parçacıklardan oluşan iki gazdan oluşan bir karışım oluşur: elektron gazı ve iyon gazı. Elektronlar ve iyonlar, elektrostatik Coulomb çekimleri ve itimleri yoluyla birbirleriyle etkileşime girer. Coulomb kuvveti uzaklık ile yavaşça azalır $\left(\propto r^{-2}\right)$ ve uzun erimli kuvvet olduğundan karakteristik bir uzunluk ölçeğine sahip değildir. Bu nedenle, bir plazma parçacığı herhangi bir anda diğerleri ile etkileşime girer ve

bu da, parçacıklar arası kuvvetlerin çok kısa menzilli olduğu yerdeki atomik veya moleküler gazlardan daha karmaşık çarpışmaların tanımlanmasını sağlar.

Tüm plazmalar, yük tarafsızlığını bozma eğiliminde olan küçük dalgalanmalara (örneğin, elektromanyetik ışınımın geçişi veya plazma parçacıklarının ısıl hareketi) maruz kalır. Bu salınımların doğal frekansı, plazma frekansı olarak adlandırılan temel bir miktardır (Pekünlü, 1996).

Küçük ölçekli laboratuvar plazması ve büyük ölçekli kozmik plazmaların tipik özellikleri Tablo 1'de verilmiştir (Covlea, 2012):

Tablo 1. Plazma parametrelerinin tipik aralıkları

| **Özellik** | **Yeryüzündeki Plazmalar** | **Kozmik Plazmalar** |
|---|---|---|
| **Boyut** | $10^{-6}$ m (laboratuvar plazmaları) — $10^{-2}$ m (şimşek) | $10^{-6}$ m (uzay aracı kaplaması) — $10^{25}$ m (gökadalar arası bulutsu) |
| **Yaşam Süresi** | $10^{-12}$ s (lazer plazma) — $10^{7}$ s (florasan ışığı) | $10^{1}$ s (Güneş flareleri) — $10^{17}$ s (gökadalar arası plazma) |
| **Yoğunluk** | $10^{7}$ $m^{-3}$ — $10^{32}$ $m^{-3}$ (içe hapsolmuş plazma) | 1 $m^{-3}$ (gökadalar arası ortam) — $10^{30}$ $m^{-3}$ (yıldız çekirdeği) |
| **Sıcaklık** | ~ 0 $K$ (kristal nötr olmayan plazma) $-10^{8}$ $K$ (manyetik füzyon plazma) | $10^{2}$ $K$ (aurora) — $10^{7}$ $K$ (Güneş çekirdeği) |
| **Manyetik Alan** | $10^{-4}$ T (laboratuvar plazmaları) — $10^{3}$ T (pulse kökenli plazma) | $10^{-12}$ T (gökadalar arası ortam) — $10^{11}$ T (nötron yıldızı) |

## 2.3 Kuantum Plazma Nedir?

Kuantum plazmalar elektronlar, pozitronlar, iyonlar ve yüklü nanoparçacıklardan oluşur. Kuantum plazmalar çok farklı çevrelerde karşımıza çıkar; örneğin çok yoğun olan astrofiziksel cisimlerde (Jung, 2001; Opher et al., 2001; Chabrier et al., 2002) (Jüpiter'in içi, büyük kütleli beyaz cüceler, magnetarlar, nötron yıldızları), yeğin lazer–katı yoğunluk plazma deneylerinde (Kremp et al., 2005; Andreev, 2000; Marklund & Shukla, 2006), çok küçük elektronik aletlerde (örneğin mikroelektronik, yarı–iletken aletler (Markowich et al., 1990), kuantum noktaları, nanoteller (Shpatakovskaya, 2006), karbon nanotüpler (Wei & Wang, 2007), kuantum diyotlar (Ang et al., 2003, 2006),

biyofotonikler (Barnes et al., 2003; Chang et al., 2006), en soğuk plazmalar (Killian, 2006) ve mikroplazmalar (Becker et al., 2005)).

Şimdi kuantum plazmaları klasik plazmalardan ayıran bazı özelliklere değinelim (Ali, 2008):

- Klasik plazmalar düşük yoğunluk ve yüksek sıcaklıklara sahipken, kuantum plazmalar yüksek yoğunluk ve düşük sıcaklıklara sahiptir.

- Klasik plazmalar Maxwell–Boltzmann dağılımı ile tanımlanırken, kuantum plazmalar Fermi–Dirac dağılımı ile tanımlanır.

- Tipik kuantum ölçekleri, yani zaman, uzunluk ve yüklü parçacıkların ısıl hızları klasik plazmalardan oldukça farklıdır. Yük taşıyıcıların de Broglie dalgaboyu ( $\lambda_{Bs} = \hbar / m_s V_{Fs}$ , burada $V_{Fs}$ Fermi hızıdır.) plazma sisteminin boyutu ile karşılaştırılabilir düzeydedir. Böylesi bir durumda plazma bir Fermi gazı gibi davranır ve kuantum mekanik etkileri yüklü plazma parçacıklarının davranışında önemli rol oynar. de Broglie dalgaboyu kabaca kuantum belirsizliğinden dolayı Fermiyon dalga fonksiyonunun uzaysal genişlemesini gösterir. Klasik plazmalarda $\lambda_{Bs}$ çok küçüktür, parçacıklar nokta benzeri olarak varsayılır.

- de Broglie dalgaboyu parçacıklar arası uzaklığa $\left(d = n_{e0}^{-1/3}\right)$ eşit veya daha büyük olduğunda $\left(n_{e0}\lambda_{Be}^3 \geq 1\right)$ kuvvetli elektron yoğunluk korelasyonları önemli rol oynar. Zıt durumda $\left(n_{e0}\lambda_{Be}^3 < 1\right)$ plazma parçacıkları klasik şekilde davranır.

Parçacıkların kuantumlu doğası özellikle büyük ölçekli özellikleri etkilediğinde, plazma kuantumlu olarak ele alınır. Plazmalarda kuantum etkilerin önemini anlamak için, bu etkilerin yeterli şekilde bir tanımının yapılması gerekir. Plazmalar, birçok parçacıktan oluşan bir topluluk olduğu için, karşılık gelen yaklaşım, bir kuantum parçacığının uygun tanımlanmasına dayanmalıdır.

Relativistik olmayan bir kuantum plazmanın tanımı, Schrödinger'in temsili (ki bunda operatörler zamana bağlıdır; sistemin fiziksel niceliklerinin zaman bağlılığı, sistemin yoğunluk matrisinin ya da dalga fonksiyonunun zamana bağlılığı ile tanımlanır) ya da Heisenberg'in temsili (yani, zaman bağlılığı dalga fonksiyonlarından operatörlere aktarılır) ile yapılır. Bu günlerde kullanılan kuantum plazma modellerinin çoğu Schrödinger'in temsilini kullanır; kuantum plazma durumu farklı parçacıkların dalga fonksiyonları ile (çoklu–akış modeli), ya da yoğunluk matrisi ile, veya koordinat temsilinde yoğunluk matrisi cinsinden tanımlanan Wigner fonksiyonu ile, ya da – son zamanlarda oldukça popüler bir yaklaşım olan – kuantum hidrodinamik denklemler takımı ile tanımlanır (Covlea, 2012).

Doğal olarak, bunlardan elde edilen sonuçları analiz ederken dikkate alınması gereken nokta, tüm bu modellerde uygulanabilirlik sınırlamalarına yol açan basitleştirici varsayımlar yapıldığıdır. Bununla birlikte, belirli bir modelden elde edilen sonuçların somut uygulanabilirlik sınırları, her zaman açık bir şekilde ifade edilmemiş olup yanlış yorumlanmasına neden olabilir. Bunun ötesinde, plazmadaki kuantum olaylarının büyük ölçeklerde gözlenebilirliğinin önemli bir sorunu bulunmaktadır; ayrıca bu sorun kuantum plazmada kuantum olaylarının ne zaman olduğu (ve hangisinin önemli olduğu) sorusu ile de bağlantılıdır. Elbette bu sorunun cevabı, kuantum plazmasını tanımlamak için kullanılan model ve yaklaşımlara bağlıdır.

Klasik plazmalar gibi, birbiriyle etkileşime giren birçok parçacığın oluşturduğu bir sistem olarak kuantum plazmanın en olası tanımı oldukça zordur. Bu, sadece sistemin N–parçacıklı dalga fonksiyonu için Schrödinger denklemini çözmenin mümkün olmaması değil, aynı zamanda bu ortamla zayıf bir şekilde etkileşime giren büyük ölçekli bir sistem için böyle bir dalga fonksiyonunun bulunmamasından da kaynaklanmaktadır. Ancak, plazmanın neredeyse ideal olduğu varsayımıyla, yani parçacıklar arasındaki iki ve daha yüksek dereceli ilişkilerin ihmal edilebileceği varsayılarak, bu problem önemli ölçüde basitleştirilebilir. Bu durumda, plazma yalnızca parçacıkların ortak alanlarıyla etkileşime giren kuantum parçacıkları topluluğu olarak düşünülür. Yukarıda

bahsedildiği gibi, aşağıda verilen modeller günümüzde yaygın olarak kullanılmaktadır:

(i) çoklu akışkan modelinin kuantum benzeri,

(ii) koordinat ve momentum uzayında parçacık dağılımının yarı–olasılık yoğunluğu için Wigner denklemine dayanan kinetik model,

(iii) kuantum hidrodinamik model.

Bütün bu modeller, o ya da bu şekilde, plazma parçacıklarının dalga fonksiyonları için yazılan Schrödinger denklemine dayanır ve bu nedenle relativistik değillerdir; bundan dolayı sadece relativistik olmayan ideal plazmaları tanımlamak, yani küçük evre hızlarına ( $\omega / k \ll c$ , burada $\omega$ salınımların frekansı, $k$ dalga sayısı, $c$ ışık hızıdır.) sahip plazma salınımlarını tanımlamak için kullanılırlar. Bu noktada kuantum plazma dinamiğinin genel relativistik modelleri olduğunu da unutmayalım.

Kuantum terimlerinin –kuantum kırınım etkileri, modifiye edilmiş durum denklemleri ve serbestlik spin dereceleri gibi– plazma akışkan denklemlerine dahil edilmesi çeşitli yeni fiziksel olaylara yol açar. Son gelişmeler şunlardır; yoğun manyetik elektron–pozitron–iyon plazmasında lineer ve lineer olmayan kuantum iyon–akustik dalgaları, kuantum plazmada girdapların oluşumu, kuantum Weibel ve filament kararsızlıkları, kuantum plazmadaki zayıf şokların yapısı, yoğun kuantum manyetoplazmada kuantum diyodun lineer olmayan teorisi, tek duvarlı karbon nanotüplerinde kuantum iyon–akustik dalgalar, kuantum kuyuları gibi nanometrik cihazlarda çoklu–elektron dinamiği, iki boyutlu kuantum tozlu plazmada lineer olmayan elektrostatik dalgaların parametrik çalışması, çok soğuk kuantum plazmada elektromanyetik dalgaların uyartılmış saçılma kararsızlıkları ve kuantum plazmalarda spin ve mıknatıslanma etkileriyle dalgaların yayılması ve kararsızlıklar (Covlea, 2012).

# 3. PLAZMA KARARSIZLIKLARI

Laboratuvar plazması ve kozmik plazma olarak gözlenen plazmanın büyük bir kısmı termodinamik dengede değildir. Denge durumunda olan bir sistem, küçük bir tedirginlik sonucunda başlangıç denge konuşllarına geri dönebiliyor ya da denge durumuna yakın koşullarda küçük titreşimler gösteriyorsa bu kararlı denge durumudur. Eğer tedirginlik sınırsız olarak büyüyorsa, başlangıç denge durumuna kararsız denge durumu denir.

Termodinamik dengede bulunan, tedirgin edilmemiş, parçacık yoğunluğu ve alanı tekdüze (uniform) olan bir plazma ortamında dalgaların ortaya çıkmasına sebep olacak bir özgür enerji kaynağı yoktur. Eğer böyle tekdüze bir ortamda dalga gözleniyorsa bu dalgalar ancak dış kuvvetler tarafından uyartılmış olabilir. Bu durumun tam tersi durumda yani; termodinamik dengede olmayan, fakat üzerine etkiyen dış kuvvetlerin dengede bulunduğu ve zamana bağlı olmayan bir plazma ortamında, sistemde varolan özgür enerji bu dalgaların kendiliğinden ortaya çıkmasına neden olur.

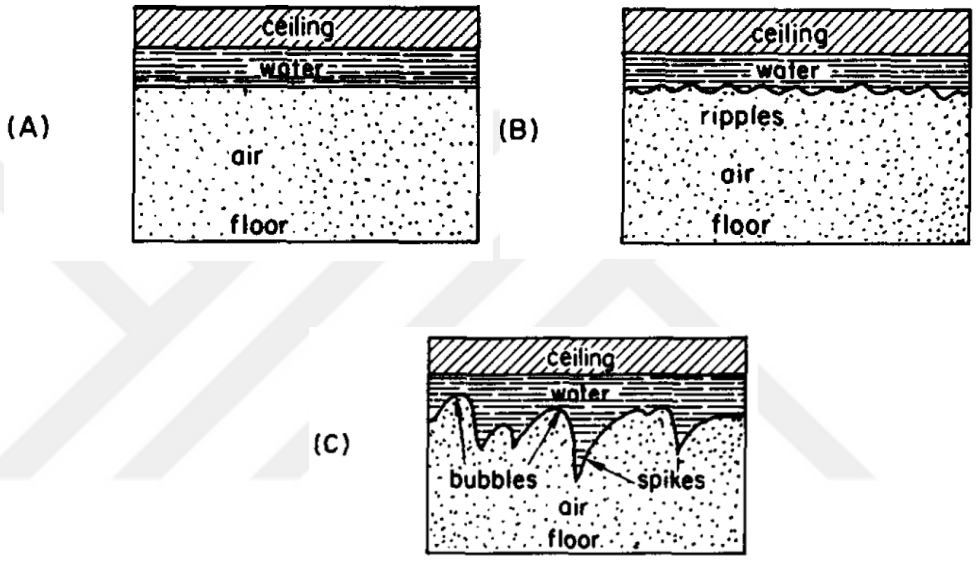
Eğer özgür enerji ortaya çıkıyorsa sistem kararsızdır. Kararsızlık özgür enerjiyi azaltarak ortamı denge durumuna getirmeye çalışan bir süreçtir.

Özgür enerji türüne veya plazmanın içinde bulunduğu evre uzayına veya incelenen plazma rejimine göre bakıldığında pek çok farklı kararsızlık sınıfı olduğu görülür.

# 4. RAYLEIGH–TAYLOR KARARSIZLIĞI

## 4.1 Tanım

Rayleigh–Taylor kararsızlığı farklı yoğunluklu iki akışkan arasındaki arayüzeyde hafif akışkanın ağır akışkanı itmesiyle ortaya çıkan parmak yapılar gösteren bir kararsızlıktır. Bu kararsızlığı basitçe sıvılarda nicel olarak açıklamaya çalışalım (Sharp, 1984).

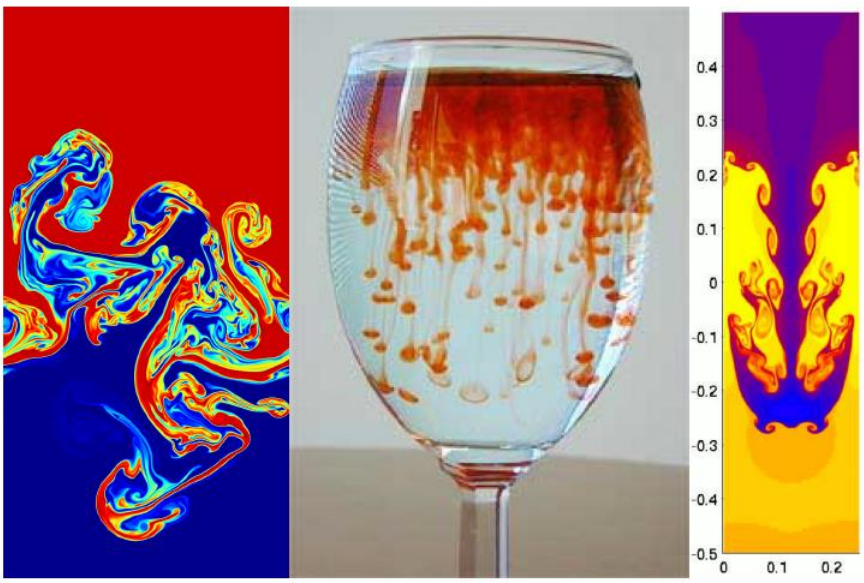



Şekil 1. (A) Hava basıncı 1 m kalınlıklı mükemmel tekdüze su tabakasını tavana karşı desteklemek için yeterlidir. (B) Ancak hava basıncı su–hava arayüzeyini düz olacak biçimde tutamaz. Arayüzeyde dalgacıkların veya düzensizliklerin ortaya çıkması kaçınılmazdır. (C) Düzensizlikler büyüyerek kabarcık (bubble) ve dikensi (spike) yapılar oluşturur. Su zemine doğru düşer (Sharp, 1984).

Bir metre derinliğine sahip eşit bir şekilde su tabakası ile kaplanmış bir odanın tavanını düşünelim (bkz. Şekil 1). Su tabakası aşağı doğru düşecektir. Sudaki bu düşüş, hava tarafından desteklenmediği için değildir. Atmosfer basıncı on metre kalınlığındaki bir su kolonunu tavanda tutmaya yetecek kadardır. Ancak bir bakıma atmosfer, destekleyici bir araç olarak başarısız kalır, bunun sebebi hava–su arayüzeyini düzlükle sınırlayamamasıdır. Başlangıçta su tabakası ne kadar dikkatlice hazırlanmış olsa da, düzlemsellikten az miktarda sapmalar olacaktır. Sıvının ortalama seviyeden daha yüksek olan kısımları, desteklenmek için

gerekenden daha fazla basınca ihtiyaç duyar ve suyu olabildiğince kenara iter. Sıvının ortalamanın biraz altına düştüğü komşu bir bölgede desteklenmesi için ortalama basınçtan daha fazlası gereklidir ve su düşmeye başlar. Hava, arayüzey düzensizliklerinin büyümesini önlemek için gerekli olan bir yerden bir yere basınç değişimlerini sağlayamaz. İlk düzensizlikler bu nedenle zamanla üssel olarak artar. Aşağı doğru hareket eden su dikensi yapılar (spike) oluşturur. Hava, yuvarlak tepeli sütunlarda su içerisinde yukarı doğru hareket eder, su zemine doğru düşmeye başlar.

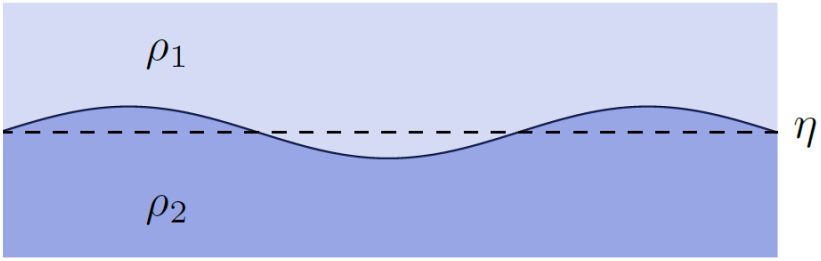
Tabanda bulunan aynı su tabakası tamamen durağan olacağından düzensizlikler ortadan kalkacaktır. Bu nedenle, farklı yoğunluktaki iki akışkan arasındaki arayüzeyde Taylor kararsızlığının başlaması için basit bir kriter çıkartılabilir: *Ağır akışkan hafif akışkanı iterse, arayüzey kararlıdır. Hafif akışkan ağır akışkanı iterse, arayüzey kararsızdır*. Bu kriter, Kelvin–Helmholtz kararsızlığının kriterine benzer: *İki akışkan arasındaki arayüzey boyunca hızın teğetsel bileşeninde bir sıçrama varsa, bu arayüzey kararsızdır* (Sharp, 1984).




Şekil 2. Rayleigh-Taylor kararsızlığının Athena kodu ile gösterimi (https://web.astro.princeton.edu/files/rtathenapng)

### 4.2. Lineer Kararlılık Analizi

Bu bölümde, iki akışkan arasındaki bir yüzeyin kararlılığı incelenecektir.




Şekil 3. $\eta$ arayüzeyi ile ayrılmış iki akışkan.

Yoğunlukları $\rho_1$ ve $\rho_2$ olan iki akışkan olsun ve $\eta$ sapması ile parametreleştirilmiş düz bir arayüzle ayrılmış olsun.

Sıkıştırılamaz bir akışkan için Navier–Stokes denklemleri şöyle verilir:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\right)=-\nabla P-g\rho\hat{\mathbf{z}}+\mu\nabla^2\mathbf{u},\quad \nabla\cdot\mathbf{u}=0. \tag{4.2.1}$$

Akışkanlar mekaniğinde genellikle yoğunluğun sabit olduğu varsayılır ve tüm denklem $\rho$'ya bölünür. Çekim kuvveti, hidrostatik basınç gradyenti ile dengelenir:

$$P=P_h(z)+p(x,t),\qquad \frac{\partial P_h}{\partial z}=-g\rho \tag{4.2.2}$$

Böylece (4.2.1) denklemi

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}=-\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right)+\nu\nabla^2\mathbf{u} \tag{4.2.3}$$

biçiminde yazılabilir.

Basitleştirici varsayımlarda bulunmadan ilerlemek oldukça zor olduğundan, viskoz olmayan akışkanlar konusuna odaklanarak $\nu = 0$ alınacaktır. Ayrıca akışkanın girdapsız olduğu $(\nabla \times \mathbf{u} = 0)$ varsayılarak ve aşağıdaki vektör özelliği kullanılarak

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla\left(\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2\right) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}), \tag{4.2.4}$$

ikinci terim yeniden yazılabilir. Stokes teoremi, hız potansiyeli $\phi$ için $\mathbf{u} = \nabla\phi$ yazılmasını sağlar. Son olarak, her bir bölge için yoğunluk $(\rho)$ sabittir. Bu nedenle

$$\nabla\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho|\nabla\phi|^2 + P + g\rho z\right) = 0, \tag{4.2.5}$$

yazılabilir. Bu, *Bernoulli teoremidir*.

Bu bilgiler ışığında, iki akışkanımız olduğu için iki ayrı hız potansiyeli $\phi_1$, $\phi_2$ olacaktır. Bunların ikisi de bağımsız bir şekilde sıkıştırılamazlık hipotezini sağlar:

$$\nabla^2\phi_{1,2} = 0 \tag{4.2.6}$$

Bernoulli teoremi

$$\rho\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho|\nabla\phi|^2 + P + g\rho z\,, \tag{4.2.7}$$

niceliğinin akışkan boyunca sabit olduğunu söyler. Bu nicelik, arayüzeyde birbirine eşit olur:

$$\rho_1\frac{\partial\phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho_1|\nabla\phi_1|^2 + P_1 + g\rho_1\eta\big|_{z=\eta} = \rho_2\frac{\partial\phi_2}{\partial t} + \frac{2}{2}\rho_2|\nabla\phi_2|^2 + P_2 + g\rho_2\eta\big|_{z=\eta}\,. \tag{4.2.8}$$

Arayüzey için belli sınır koşulları kullanmalıyız. İlk olarak akışkanların dik hızları arayüzeyde birbirine eşit olmalıdır, bu nedenle kinematik sınır koşulu

$$\left.\frac{\partial \phi_1}{\partial z}\right|_{z=\eta} = \left.\frac{\partial \phi_2}{\partial z}\right|_{z=\eta} = \frac{D\eta}{Dt}, \qquad \mathrm{D} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla \tag{4.2.9}$$

ile verilir. Diğer bir sınır koşulu, basıncın arayüzey boyunca sürekli olduğudur. Ancak bu tüm arayüzeylerde geçerli değildir. Örneğin bir balon için, içindeki basınç dışındaki basınçtan daha yüksektir. Bu durumda, basınç farkını korumak için bir kuvvet uygulayan balonun kendisidir. İncelediğimiz durumda iki akışkan olduğundan, basınçta bir süreksizlik olduğunu varsaymak için hiçbir sebep yoktur, bu yüzden basıncın sürekli olduğu iyi bir varsayımdır.

Basıncın sürekli olması, Bernoulli teoremini daha da basitleştirir:

$$\rho_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho_1 |\nabla \phi_1|^2 + g\rho_1 \eta = \rho_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{2}{2}\rho_2 |\nabla \phi_2|^2 + g\rho_2 \eta \tag{4.2.10}$$

Modele özgü son bir sınır koşulu $\mathbf{u} = 0$ ve $\eta = 0$ olmasıdır. Statik bir çözümle başlayalım. Sonrasında $\eta$'yı birazcık tedirgin edip akışkana neler olacağı gösterilecektir. Özellikle, tedirginliğin kararlı olup olmadığını görmek istiyoruz.

Uzak alanda hız olmadığı varsayımıyla, yani $z \to \infty$ giderken $\phi_1 \to 0$ gider ve $z \to -\infty$ giderken $\phi_2 \to 0$ giderken (türevler için de benzerdir), arayüzey yakınında ilginç bir davranış ortaya çıkar. Ayrıca $y-$koordinatına bağlılık olmadığını varsayacağız.

Artık denklemler bu sınır koşulları ile çözülebilir. Ancak denklemler lineer olmadığından, mantıklı bir yaklaşım olarak her şeyin küçük olduğu varsayılarak, denklemleri lineerleştirelim. $\eta$'nın küçük olduğuna ilave olarak, $\nabla\phi$ gibi bazı türevlerin de küçük olduğu varsayımına ihtiyaç vardır; böylece bütün ikinci dereceden terimler boşlanabilir. $\eta$ küçük olduğu için, $\eta$'daki $\frac{\partial \phi_1}{\partial z}$ , $\eta = 0$'daki değer ile aynı olmalıdır. Zaten $\frac{\partial \phi_1}{\partial z}$ değerinin küçük olduğu kabul edildiğinden,

farkta küçük olur. Bu nedenle bütün $\eta$'daki tüm değerler, $z=0$'daki değerler ile değiştirilir. Kalan denklem takımı şunlardır:

$$\nabla^2 \phi_{1,2} = 0 \tag{4.2.11}$$

$$\left.\frac{\partial \phi_{1,2}}{\partial z}\right|_{z=0} = \eta_t \tag{4.2.12}$$

$$\rho_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + g\rho_1 \eta \Big|_{z=0} = \rho_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + g\rho_2 \eta \Big|_{z=0}. \tag{4.2.13}$$

Çözümlerin Fourier modlarını

$$\phi_{1,2}(x,z,t) = \hat{\phi}_{1,2}(z) e^{i(kx-\omega t)} \tag{4.2.14}$$

$$\eta(x,t) = B e^{i(kx-\omega t)}. \tag{4.2.15}$$

Laplace denklemine yazarsak

$$\hat{\phi}_{1,2} - k^2 \hat{\phi}_{1,2} = 0 \tag{4.2.16}$$

elde ederiz. Uzak alan sınır koşulları kullanılırsa aşağıdaki gibi bir çözüm ailesine sahip oluruz:

$$\hat{\phi}_1 = A_1 e^{-kz}, \quad \hat{\phi}_2 = A_2 e^{kz}. \tag{4.2.17}$$

Kinematik sınır koşulları gereğince

$$\dot{\hat{\phi}}_{1,2}(0) = -i\omega B \tag{4.2.18}$$

olur. $B = \frac{kA_1}{i\omega} = -\frac{kA_2}{i\omega}$ olarak elde edilir. Özellikle $A \equiv A_1 = -A_2$ olmalıdır, böylece

$$\eta = \frac{kA}{i\omega} e^{ik(kx-\omega t)}. \tag{4.2.19}$$

Son denklemde bunları yerine yazarsak

$$\rho_1(-i\omega A) + g\rho_1 \frac{kA}{i\omega} = \rho_2 i\omega A + g\rho_2 \frac{kA}{i\omega} \tag{4.2.20}$$

elde edilir. En önemlisi, doğrusallaştırma sonucu denklemde A yok edilir ve A'dan bağımsız bir sonuç elde edilir. Çözüm, dalga sayısıyla frekansın (ya da evre hızı $c_p = \omega/k$ ) ilişkisini gösteren bir *dağılma bağıntısı* verir:

$$\omega^2 = \frac{g(\rho_2 - \rho_1)k}{\rho_1 + \rho_2}. \tag{4.2.21}$$

Eğer $\rho_2 \gg \rho_1$ ise (4.2.21) dağılma bağıntısı $\omega^2 \approx gk$ 'ya indirgenir; bu, derin su dalgalarının dağılma bağıntısıdır. Öte yandan, eğer $\rho_2 - \rho_1 > 0$ ise (4.2.21) dağılma bağıntısı kokteyl karışımlarda gözlenen oldukça düşük frekanslı dalgalara ait olur.

Ancak bizim analizimizde $\rho_2 > \rho_1$ olmasına gerek olmadığından, $\rho_1 > \rho_2$ olduğu varsayılır. Bu, hafif olan akışkanın üstüne ağır olan akışkanın koyulması demektir.

Eğer $\rho_1 > \rho_2$ ise $\omega$ sanal olmalıdır. $\omega = \pm i\sigma$ yazılırsa $\sigma > 0$ olur:

$$\sigma = \sqrt{\frac{g(\rho_1 - \rho_2)k}{\rho_1 + \rho_2}}. \tag{4.2.22}$$

$\phi_{1,2}$ ifadesinde $e^{\pm\sigma t}$ terimleri olduğu için $e^{\sigma t}$ terimi uzun vadede $\phi_{1,2}$ üstel olarak büyür. Bu *Rayleigh–Taylor kararsızlığıdır.*

Kararsızlık ile ilgili söyleyecek çok şey vardır. Dalgaboyu azaldıkça $k$ artar, bu yüzden $\sigma$'da artar. Böylece, kısa ölçekli tedirginlikler üstel olarak çok hızlı büyür. Bu, moröte afetidir. Elbette, buradaki modele güvenilmemelidir. Sadeleştirme işleminde sadece $\phi$ ve $\eta$'nın genliklerinin küçük olduğu değil aynı zamanda türevlerinin de küçük olduğu varsayıldı. Büyük $k$ davranışı, büyük $x$ türevleri verir ve böylece yüksek mertebe terimleri de hesaba katmak gerekir.

Ancak küçük ölçekli tedirginliklerin böylesi bir sistemde bastırılması gerektiğine dair fiziksel sebepler vardır. Modelde yüzey gerilimi olmadığını varsaydık. Küçük ölçekli değişimler büyük bir yüzey alanına neden olur ve böylece yüzey gerilimi bu değişimleri baskılar. Matematiksel olarak, yüzeyin izin verdiği şey, arayüzey boyunca bir basınç sıçramasıdır.

Yüzey gerilimi, birim uzunluk başına olan kuvvettir. Boyutu $\left[\gamma\right] = MT^{-1}$ dir. Deneysel olarak arayüzey boyunca basınç farkının

$$\Delta p = -\gamma \nabla \cdot \hat{\mathbf{n}} = 2\gamma H = \gamma \left( \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right), \tag{4.2.23}$$

olduğu gözlenir; burada $\hat{\mathbf{n}}$ normal doğrultusundaki birim vektör ve $H$ ortalama eğriliktir.

$y$ – doğrultusuna bağlılık olmadığı varsayıldığından, tek bir eğrilik yarıçapına sahip silindirik bir arayüzeyimiz vardır. Doğrusallaştırma işlemiyle basınç farkı

$$\left(P_2 - P_1\right)\Big|_{z=\eta} = \frac{\gamma}{R_x} = -\gamma \frac{\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}} \approx -\gamma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \tag{4.2.24}$$

olarak elde edilir.

Bu nedenle (doğrusallaştırılmış) dinamik sınır koşulu

$$\rho_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + g\rho_1 \eta\big|_{z=0} + \gamma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \rho_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + g\rho_2 \eta\big|_{z=0} \tag{4.2.25}$$

olur. Önceki hesaplar tekrar yapılacak olursa, dağılma bağıntısı

$$\omega^2 = \frac{g(\rho_2 - \rho_1)k + \gamma k^3}{\rho_1 + \rho_2} \ . \tag{4.2.26}$$

olarak elde edilir. $\gamma$ her zaman pozitif olduğundan, $\rho_1 > \rho_2$ olsa bile yeterince büyük $k$ için sistem kararlıdır. Elbette, küçük $k$ için sistem kararsızdır ve suyun yüzey gerilimine rağmen düşmesi beklenir. $\rho_1 < \rho_2$ durumunda iç çekim dalgaları elde edilir.

Kararsız durumda

$$\sigma^2 = k\left(\frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + \rho_2}\right)\left(1 - l_c^2 k^2\right) \tag{4.2.27}$$

olur, burada

$$l_c^2 = \frac{\gamma}{g(\rho_1 - \rho_2)} \tag{4.2.28}$$

karakteristik uzunluk ölçeğidir. $kl_c > 1$ için, salınımlar kararlıdır ve $k$ için maksimum değer olarak $k = \frac{l_c}{\sqrt{3}}$ elde edilir.

Özetle, bir dalgaboyu aralığı vardır ve "en kararsız dalgaboyu" olarak tanımlanır. Zamanla, eğer tüm frekans modları tetiklenirse, bu en kararsız dalgaboyunun baskın olması beklenir. Ancak bu lineer analizin sonucudur ve lineer olmayan rejimde durum farklı olabilir.

# 5. KUANTUM RAYLEIGH–TAYLOR KARARSIZLIĞI

Bu bölümde Cao et al. (2008) tarafından yapılan "Manyetik plazmada Rayleigh–Taylor (RT) kararsızlığı üzerindeki kuantum etkileri" isimli çalışma verilmiştir. Tüm denklemler adım adım çözülerek hesaplar yeniden yapılmıştır.

## 5.1.Tanım

Rayleigh–Taylor (RT) kararsızlığı farklı yoğunluktaki iki akışkan arasında, ağır olanın hafif olan tarafından hızlandırıldığı (veya ağır olanın hafif olan üzerine koyulduğu) arayüzeyde meydana gelir (Rayleigh, 1900; Taylor, 1950; Bodner, 1974; Chandrasekhar, 1981). Arayüzeydeki küçük tedirginlikler teğetsel ivmeye neden olur ve bu kuvvetin etkisi altında aşağı yönde akan madde tarafından güçlendirilir. Ağır akışkanın aşağı doğru ve hafif olanın yukarı doğru hareketi iç içe geçen yapıların büyümesini sağlar. Bu, temel hidrodinamik bir kararsızlıkla sonuçlanır. Keskin sınır modeline (sharp boundary model: SBM) dayanan önceki çalışmalar herhangi bir kesme akışının olmadığı basit bir durumda, küçük tedirginlikler $e^{\gamma t}$'nin bir fonksiyonu olarak lineer bir şekilde büyür (Rayleigh, 1900; Chandrasekhar, 1981; Piriz&Wouchuk, 1995; Piriz et al., 1997). Kararsızlığın lineer büyüme oranı $\gamma = \sqrt{A_T kg}$ ile verilir, burada $A_T = (\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2 + \rho_1)$ Atwood sayısı, $\rho_1$ ve $\rho_2$ sırasıyla hafif ve ağır olan akışkanların yoğunlukları, $k = 2\pi/\lambda$ tedirginlik dalga sayısı ve $g$ çekim ivmesidir. Bu kararsızlığa yeryüzünde volkanik patlamalar ve atmosferik nükleer patlamalar sonucu oluşan mantar bulutları, plazma füzyon reaktörü; kozmik olarak ise Tür Ia süpernova patlamaları, beyaz cücelerin kökeni, gezegenimsi bulutsular, toplanma diskleri, relativistik jetler, kırmızı devlerin iç katmanlarının evrim süreci örnektir (Cabot&Cook, 2006; Timmes&Woosley, 1992; Blinnikov&Sorokina, 2004).

Plazma fiziğinde yeni gelişen bir alan olarak kuantum plazmalar büyük bir ilgi odağı olmuştur (bkz. Shaikh&Shukla, 2007; Lundin et al., 2007; Bret, 2007; Ali et al., 2007). Yük taşıyıcılarının de Broglie dalgaboyu, kuantum plazma sisteminin boyutuna eşit ya da ondan daha büyük olduğu zaman yüklü plazma

parçacıklarının davranışında kuantum etkilerinin önemli olduğu iyi bilinmektedir (Manfredi, 2005). Kuantum plazmalar elektronlar, iyonlar, pozitronlar ve/veya taneciklerin karışımından oluşur. Kuantum plazma sistemleri çalışılırken iyi bilinen iki model kullanılır. İlk olanı Wigner–Poisson sistemine dayanan, plazmaların istatistiksel davranışını tanımlayan Wigner modelidir. Diğeri de Schrödinger–Poisson sistemine dayanan plazmaların hidrodinamik davranışını tanımlayan Hartree modelidir (Manfredi, 2005; Manfredi&Haas, 2001). Plazmalarda yük, momentum ve enerji taşınımını tanımlayan kuantum hidrodinamik (QHD) model, yarı iletken fiziği ve astrofizik konularına girmiştir (Madelung, 1926; Gardner, 1994; Marklund et al., 2003, 2005, 2006; Bingham et al., 2004). Kuantum etkileri ayrıca ultraküçük elektronik cihazlarda ve güçlü lazer plazmalarında da görülür (Markowich et al., 1990; Kremp et al., 1999; Marklund et al., 2005). Kuantum manyetohidrodinamik model (QMHD) Wigner–Maxwell denklemlerini temel alır ve manyetik alandaki hidrodinamik modelin (QHD) yardımı ile Haas (2005) tarafından elde edilmiştir.

Aşağıda verilen çalışmada QMHD model ile tanımlanan ideal sıkıştırılamaz manyetik plazma temel alınmıştır (Haas, 2005). Kesme akışının (shear flow) ihmal edildiği durumda manyetik alan ve kuantum mekanizması tarafından tanımlanan etkilerin RT kararsızlığı üzerindeki etkisi incelenmiştir.

Manyetik alan ve kuantum etkilerinin düzeltmeleri ile hız değişimini tanımlayan ikinci dereceden adi diferansiyel denklemler (ODE) elde edilmiştir. Bu denklemler sabitlenmiş sınır koşulları kullanarak çözülerek RT kararsızlığının büyüme oranının analitik ifadesi bulunmuştur. Manyetik alanın RT kararsızlığı üzerindeki etkisi tartışılarak sonuçlar önceki çalışmalarla karşılaştırılmıştır (Chandrasekhar, 1981; Wu et al. 2004; Zhang et al. 2005). Kuantum etkilerinin RT kararsızlığı üzerindeki önemini ölçmek için bazı parametreler tanımlanmıştır. Elde edilen sonuçları açıklamak için yoğun astrofiziksel bir durum (Timmes&Woosley, 1992; Blinnikov&Sorokina, 2004) kullanılmıştır.

### 5.2. Matematiksel Model

Elektronlar ve iyonlar içeren ideal sıkıştırılamaz bir kuantum plazmasını ele alalım. Plazmanın $\mathbf{B}_0$ manyetik alanı içinde olduğu varsayımı altında ideal QMHD denklemleri şöyle verilir:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \tag{5.2.1}$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \frac{\hbar^2}{2m_e m_i} \rho \nabla \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right) \tag{5.2.2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{5.2.3}$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B} + \frac{\hbar^2}{2em_e} \nabla \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right) \tag{5.2.4}$$

Burada $\rho$ kütle yoğunluğu, $p$ ısıl basınç,. $m_e$ elektronların kütlesi, $m_i$ iyonların kütlesi, $e$ elektron yükü, $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ konvektif türev, $\mathbf{E}$ elektrik alan, $\mathbf{B}$ manyetik alan ve $\mathbf{g}$ çekim ivmesidir. Denklem (5.2.2)'nin sağ tarafındaki $\hbar$'ye bağlı son terime Bohm potansiyeli denir ve yoğunluktaki dalgalanmanın kuantum düzeltmelerini temsil eder. Klasik manyetohidrodinamik (MHD) sonuçlar için $\hbar = 0$ limit değeri dikkate alınmalıdır. Akışkan sıkıştırılamaz olduğundan,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{5.2.5}$$

$\mathbf{u}, \mathbf{B}, \rho, p$'yi temsil eden dalga fonksiyonu $(\psi)$ aşağıdaki biçimde verilir:

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 \tag{5.2.6}$$

Burada $\psi_0$ denge değeri ve $\psi_1 \ll \psi_0$ koşuluyla

$$\psi_1 \propto \tilde{\psi}(z)\exp(ikx - i\omega t) \tag{5.2.7}$$

olmak üzere, $\psi_1$ küçük bir tedirginlik (denge değerinden küçük bir sapma) miktarıdır. Buradaki *k* dalga sayısı ve $\omega$ karmaşık titreşim frekansıdır. Tedirginlik hızı, $x(y,z)$ doğrultusu boyunca birim vektör $\hat{\mathbf{e}}_x(\hat{\mathbf{e}}_y,\hat{\mathbf{e}}_z)$'nin olmak üzere $\mathbf{u}_1 = u_{x1}\hat{\mathbf{e}}_x + u_{y1}\hat{\mathbf{e}}_y + u_{z1}\hat{\mathbf{e}}_z$ biçiminde alınır. Tedirginlik hızının her bir skaler bileşeni $\exp(ikx - i\omega t)$ ile orantılıdır.

Yoğunluk ve basınç gradyentleri, pozitif $z-$ekseni yönü boyunca olan çekim ivmesinin ters yönünde alınır. Bu nedenle, eşdağılımsızlık durumu sadece $z-$ yönünde ortaya çıkar. Bunun yanı sıra, bu çalışmada denge akışı ihmal edilmiş ve denge değerleri aşağıdaki biçimde alınmıştır:

$$\rho_0 = \rho_0(z) \text{ ve } p_0 = p_0(z) \tag{5.2.8}$$

$$\mathbf{B}_0 = B_{x0}(z)\hat{\mathbf{e}}_x + B_{y0}(z)\hat{\mathbf{e}}_y \ , \tag{5.2.9}$$

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{E}_0 = 0 . \tag{5.2.10}$$

Üstelik, basitlik için viskozite ve dirençten kaynaklanan dağılım etkileri ihmal edilmiştir.

### 5.3. Analitik Gelişme

(5.2.1) – (5.2.5) arasındaki denklemleri sırasıyla tedirgin edelim. Akışkan nicelikleri denge ve tedirginlik değerleri toplamı cinsinden yazılır. Tedirginlik değerleri denge değerlerinden çok çok küçük olduğu için doğrusal yaklaşımda iki tedirginlik değeri çarpımı boşlanır.

***Denklem(5.2.1):*** $\dfrac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$

$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla$ yerine yazarsak $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\right)\rho+\rho(\nabla\cdot\mathbf{u})=0$ elde edilir.

$\nabla\cdot\mathbf{u}=0$ (plazma sıkıştırılamaz olduğundan)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\rho=0$$

Akışkan niceliklerini yerine yazalım: $\mathbf{u}=\mathbf{u}_0+\mathbf{u}_1$ ve $\rho=\rho_0+\rho_1$

$$\frac{\partial(\rho_0+\rho_1)}{\partial t}+(\mathbf{u}_0+\mathbf{u}_1)\cdot\nabla(\rho_0+\rho_1)=0$$

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial t}+\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\mathbf{u}_0\cdot\nabla\rho_0+\underbrace{\mathbf{u}_0\cdot\nabla\rho_1}_{\|0}+\mathbf{u}_1\cdot\nabla\rho_0+\underbrace{\mathbf{u}_1\cdot\nabla\rho_1}_{\|0}=0$$

$\frac{\partial\rho_0}{\partial t}+\mathbf{u}_0\cdot\nabla\rho_0=0$ denge durumu olduğundan elimizde kalan denklem

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\mathbf{u}_1\cdot\nabla\rho_0=0 \qquad (5.2.11)$$

***Denklem (5.2.2):*** $\underset{I}{\rho\frac{d\mathbf{u}}{dt}}=\underset{II}{-\nabla p}+\underset{III}{\rho\mathbf{g}}+\frac{1}{\mu_0}\underbrace{(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}}_{IV}+\underbrace{\frac{\hbar^2}{2m_e m_i}\rho\nabla\left(\frac{\nabla^2\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right)}_{V}$

***I:***

$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla$ kullanılırsa $\rho\frac{d\mathbf{u}}{dt}=\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\right)\mathbf{u}$ elde edilir.

Tedirgin edelim:

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}=\frac{\partial(\mathbf{u}_0+\mathbf{u}_1)}{\partial t}+(\mathbf{u}_0+\mathbf{u}_1)\cdot\nabla(\mathbf{u}_0+\mathbf{u}_1)$$

$$= \underbrace{\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t}}_{0} + \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \underbrace{\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_0}_{0} + \underbrace{\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_1}_{0} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}_1 + \underbrace{\mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}_0}_{0} + \underbrace{\mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}_1}_{0} = \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t}$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = (\rho_0 + \rho_1) \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t}$$

***II:***

$$\nabla p = \nabla (p_0 + p_1) = \underbrace{\nabla p_0}_{0} + \nabla p_1$$

$\nabla p_0$ terimi denge değerleri toplamından sıfır olur.

***III:***

$$\rho \mathbf{g} = (\rho_0 + \rho_1)\mathbf{g} = \underbrace{\rho_0 \mathbf{g}}_{0} + \rho_1 \mathbf{g}$$

$\rho_0 \mathbf{g}$ terimi denge değerleri toplamından sıfır olur.

***IV:***

$\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$ vektör ilişkisi kullanılarak

$$\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$2\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla B^2 - 2(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

$\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{1}{2} \nabla B^2 - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ elde edilir.

$$\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}=\frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}-\nabla\frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$=\frac{1}{\mu_0}\left[(\mathbf{B}_0+\mathbf{B}_1)\cdot\nabla(\mathbf{B}_0+\mathbf{B}_1)\right]-\nabla\frac{1}{2\mu_0}\left[(B_{x0}+B_{x1})^2+(B_{y0}+B_{y1})^2+(B_{z0}+B_{z1})^2\right]$$

$$=\frac{1}{\mu_0}\left[\mathbf{B}_0\cdot\nabla\mathbf{B}_0+\mathbf{B}_0\cdot\nabla\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_1\cdot\nabla\mathbf{B}_0+\mathbf{B}_1\cdot\nabla\mathbf{B}_1\right]$$
$$-\nabla\frac{1}{2\mu_0}\left[\left(B_{x0}^2+2B_{x0}B_{x1}+B_{x1}^2\right)+\left(B_{y0}^2+2B_{y0}B_{y1}+B_{y1}^2\right)+\left(B_{z0}^2+2B_{z0}B_{z1}+B_{z1}^2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\mu}\left[\underbrace{\mathbf{B}_0\cdot\nabla\mathbf{B}_0}_{\|\,0}+\mathbf{B}_0\cdot\nabla\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_1\cdot\nabla\mathbf{B}_0+\underbrace{\mathbf{B}_1\cdot\nabla\mathbf{B}_1}_{\|\,0}\right]$$
$$-\nabla\frac{1}{2\mu_0}\left[\left(\underbrace{B_{x0}^2}_{\|\,0}+2B_{x0}B_{x1}+\underbrace{B_{x1}^2}_{\|\,0}\right)+\left(\underbrace{B_{y0}^2}_{\|\,0}+2B_{y0}B_{y1}+\underbrace{B_{y1}^2}_{\|\,0}\right)+\left(\underbrace{B_{z0}^2}_{\|\,0}+2B_{z0}B_{z1}+\underbrace{B_{z1}^2}_{\|\,0}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}_0\cdot\nabla\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_1\cdot\nabla\mathbf{B}_0)-\frac{\nabla B_0B_1}{\mu_0}$$

$$=\frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}_0\cdot\nabla\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_1\cdot\nabla\mathbf{B}_0)-\frac{1}{\mu_0}(B_0\nabla B_1+B_1\nabla B_0)$$

***V:***

$$\mathbf{H}=\left(\underbrace{\mathbf{H}_0}_{\|\,0}+\mathbf{H}_1\right)=\frac{\hbar^2}{2m_em_i}\left(\underbrace{\mathbf{A}_0}_{\|\,0}+\mathbf{A}_1\right)=\frac{\hbar^2}{2m_em_i}\mathbf{A}_1$$

Elimizde kalan terimlerin toplamı

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \rho_1 \mathbf{g} + \frac{1}{\mu_0}\left(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1 \cdot \nabla \mathbf{B}_0\right)$$
$$-\frac{1}{\mu_0}\left(B_0 \nabla B_1 + B_1 \nabla B_0\right) + \mathbf{H}_1$$

***Denklem(5.2.3):*** $\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ ve $\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B} + \dfrac{\hbar^2}{2em_e} \nabla \left( \dfrac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right)$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \left(\mathbf{u} \times \mathbf{B}\right) + \frac{\hbar^2}{2em_e} \nabla \times \nabla \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right)$$

$\nabla \times \left(\mathbf{A} \times \mathbf{B}\right) = \mathbf{A}\left(\nabla \cdot \mathbf{B}\right) - \mathbf{B}\left(\nabla \cdot \mathbf{A}\right) + \left(\mathbf{B} \cdot \nabla\right)\mathbf{A} - \left(\mathbf{A} \cdot \nabla\right)\mathbf{B}$ vektör ilişkisi kullanılarak

$$\nabla \times \left(\mathbf{u} \times \mathbf{B}\right) = \mathbf{u}\underbrace{\left(\nabla \cdot \mathbf{B}\right)}_{\| \, 0} - \mathbf{B}\underbrace{\left(\nabla \cdot \mathbf{u}\right)}_{\| \, 0} + \left(\mathbf{B} \cdot \nabla\right)\mathbf{u} - \left(\mathbf{u} \cdot \nabla\right)\mathbf{B} \quad \text{ve} \quad \nabla \times \nabla f = 0 \quad (f \text{ :skaler})$$

olduğundan

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \left(\mathbf{B} \cdot \nabla\right)\mathbf{u} - \left(\mathbf{u} \cdot \nabla\right)\mathbf{B} \text{ elde edilir.}$$

Tedirgin edelim:

$$\frac{\partial \left(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1\right)}{\partial t} = \left(\left(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1\right) \cdot \nabla\right)\underset{\| \, 0}{(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1)} - \left( \underset{\| \, 0}{(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1) \cdot \nabla} \right)\left(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1\right)$$

$$\underset{\| \, 0}{\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t}} + \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \left(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla\right)\mathbf{u}_1 + \underbrace{\left(\mathbf{B}_1 \cdot \nabla\right)\mathbf{u}_1}_{\| \, 0} - \left(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla\right)\mathbf{B}_0 - \underbrace{\left(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla\right)\mathbf{B}_1}_{\| \, 0}$$

Denge durumu toplamı sıfır olduğu ve iki tedirginlik çarpımı boşlandığı için

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \left(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla\right)\mathbf{u}_1 - \left(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla\right)\mathbf{B}_0 \qquad (5.2.13)$$

elde edilir.

***Denklem (5.2.5):*** $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1) = 0$$
$$\underset{\|}{0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \qquad (5.2.14)$$

(5.2.12) denkleminin sağ tarafındaki son terim Bohm potansiyel teriminin birinci derece tedirginlik terimidir:

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\hbar^2}{2m_e m_i}\mathbf{A}_1$$

$$\mathbf{A} = \rho\nabla\left(\frac{\nabla^2\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right)$$

$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$ ve $\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f$

$$\mathbf{A} = \rho\left[\frac{1}{\sqrt{\rho}}\nabla\left(\nabla^2\sqrt{\rho}\right) + \left(\nabla^2\sqrt{\rho}\right)\nabla\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right]$$

$$\mathbf{A} = \rho\left[\frac{1}{\sqrt{\rho}}\nabla\left(\nabla\cdot\nabla\sqrt{\rho}\right) + \left(\nabla\cdot\nabla\sqrt{\rho}\right)\nabla\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right]$$

$$\mathbf{A} = \rho\left[\frac{1}{\sqrt{\rho}}\nabla\left(\nabla\cdot\nabla\sqrt{\rho}\right) - \left(\nabla\cdot\nabla\sqrt{\rho}\right)\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^{3/2}}\nabla\rho\right]$$

$$\mathbf{A} = \rho\left[\frac{1}{\sqrt{\rho}}\nabla\left(\nabla\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^{1/2}}\nabla\rho\right)\right) - \left(\nabla\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^{1/2}}\nabla\rho\right)\right)\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^{3/2}}\nabla\rho\right]$$

$$\mathbf{A}=\rho\left[\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\rho}}\nabla\left(\nabla\cdot\left(\frac{1}{\rho^{1/2}}\nabla\rho\right)\right)-\frac{1}{4}\frac{1}{\rho^{3/2}}\nabla\rho\left(\nabla\cdot\left(\frac{1}{\rho^{1/2}}\nabla\rho\right)\right)\right]$$

$\nabla\cdot(f\mathbf{A})=f\nabla\cdot\mathbf{A}+\mathbf{A}\cdot\nabla f$ olduğundan

$$\left(\nabla\cdot\left(\frac{1}{\rho^{1/2}}\nabla\rho\right)\right)=\frac{1}{\rho^{1/2}}\nabla\cdot(\nabla\rho)+(\nabla\rho)\cdot\nabla\frac{1}{\rho^{1/2}}$$
$$=\frac{1}{\rho^{1/2}}\nabla\cdot(\nabla\rho)-(\nabla\rho)\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^{3/2}}\nabla\rho\right)$$
$$=\frac{1}{\rho^{1/2}}\nabla^2\rho-\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^{3/2}}(\nabla\rho)\cdot(\nabla\rho)$$

$$\nabla\left(\nabla\cdot\left(\frac{1}{\rho^{1/2}}\nabla\rho\right)\right)=\nabla\left[\frac{1}{\rho^{1/2}}\nabla^2\rho-\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^{3/2}}(\nabla\rho)\cdot(\nabla\rho)\right]$$
$$=\frac{1}{\rho^{1/2}}\nabla(\nabla^2\rho)+(\nabla^2\rho)\nabla\frac{1}{\rho^{1/2}}-\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^{3/2}}\nabla(\nabla\rho)\cdot(\nabla\rho)-\frac{1}{2}(\nabla\rho)\cdot(\nabla\rho)\nabla\frac{1}{\rho^{3/2}}$$
$$=\frac{1}{\rho^{1/2}}\nabla(\nabla^2\rho)-\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^{3/2}}\nabla\rho(\nabla^2\rho)-\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^{3/2}}\nabla(\nabla\rho)\cdot(\nabla\rho)+\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{\rho^{5/2}}\nabla\rho(\nabla\rho)\cdot(\nabla\rho)$$

$$\mathbf{A}=\rho\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\rho}}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{\rho^{1/2}}\nabla(\nabla^2\rho)-\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^{3/2}}\nabla\rho(\nabla^2\rho)-\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^{3/2}}\nabla(\nabla\rho)\cdot(\nabla\rho)\\+\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{\rho^{5/2}}\nabla\rho(\nabla\rho)\cdot(\nabla\rho)\end{array}\right]\\-\frac{1}{4}\frac{1}{\rho^{3/2}}\nabla\rho\left[\frac{1}{\rho^{1/2}}\nabla^2\rho-\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^{3/2}}(\nabla\rho)\cdot(\nabla\rho)\right]\end{array}\right]$$

$$\mathbf{A}=\rho\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{1}{\rho^{1/2}}\nabla(\nabla^2\rho)-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^{3/2}}\nabla\rho(\nabla^2\rho)\\-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^{3/2}}\nabla(\nabla\rho)\cdot(\nabla\rho)+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{\rho^{5/2}}\nabla\rho(\nabla\rho)\cdot(\nabla\rho)\end{array}\right]\\-\nabla\rho\left[\frac{1}{4}\frac{1}{\rho^{3/2}}\frac{1}{\rho^{1/2}}\nabla^2\rho-\frac{1}{4}\frac{1}{\rho^{3/2}}\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^{3/2}}(\nabla\rho)\cdot(\nabla\rho)\right]\end{array}\right]$$

$$\mathbf{A}=\rho\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\frac{1}{\rho}\nabla\left(\nabla^2\rho\right)-\frac{1}{4}\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\left(\nabla^2\rho\right)-\frac{1}{4}\frac{1}{\rho^2}\nabla\left(\nabla\rho\right)\cdot\left(\nabla\rho\right)\\+\frac{3}{8}\frac{1}{\rho^3}\nabla\rho\left(\nabla\rho\right)\cdot\left(\nabla\rho\right)\end{array}\right]\\-\left[\frac{1}{4}\frac{1}{\rho^2}\nabla^2\rho\nabla\rho-\frac{1}{8}\frac{1}{\rho^3}\nabla\rho\left(\nabla\rho\right)\cdot\left(\nabla\rho\right)\right]\end{array}\right]$$

$$\mathbf{A}=\rho\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\frac{1}{\rho}\nabla\left(\nabla^2\rho\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\left(\nabla^2\rho\right)\\-\frac{1}{4}\frac{1}{\rho^2}\nabla\left(\nabla\rho\right)\cdot\left(\nabla\rho\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^3}\nabla\rho\left(\nabla\rho\right)\cdot\left(\nabla\rho\right)\end{array}\right]$$

Bu ifadeyi tedirgin edelim:

$$\mathbf{A}=\left(\rho_0+\rho_1\right)\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\rho_0+\rho_1\right)}\nabla\left(\nabla^2\left(\rho_0+\rho_1\right)\right)\\-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\rho_0+\rho_1\right)^2}\nabla\left(\rho_0+\rho_1\right)\left(\nabla^2\left(\rho_0+\rho_1\right)\right)\\-\frac{1}{4}\frac{1}{\left(\rho_0+\rho_1\right)^2}\nabla\left(\nabla\left(\rho_0+\rho_1\right)\right)\cdot\left(\nabla\left(\rho_0+\rho_1\right)\right)\\+\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\rho_0+\rho_1\right)^3}\nabla\left(\rho_0+\rho_1\right)\left(\nabla\left(\rho_0+\rho_1\right)\right)\cdot\left(\nabla\left(\rho_0+\rho_1\right)\right)\end{array}\right]$$

$$\mathbf{A}=\left(\rho_0+\rho_1\right)$$
$$\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\rho_0+\rho_1\right)}\nabla\left(\nabla^2\left(\rho_0+\rho_1\right)\right)\\-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\rho_0{}^2+2\rho_0\rho_1+\rho_1{}^2\right)}\nabla\left(\rho_0+\rho_1\right)\left(\nabla^2\left(\rho_0+\rho_1\right)\right)\\-\frac{1}{4}\frac{1}{\left(\rho_0{}^2+2\rho_0\rho_1+\rho_1{}^2\right)}\nabla\left(\nabla\left(\rho_0+\rho_1\right)\right)\cdot\left(\nabla\left(\rho_0+\rho_1\right)\right)\\+\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\rho_0{}^3+3\rho_0{}^2\rho_1+3\rho_0\rho_1{}^2+\rho_1{}^3\right)}\nabla\left(\rho_0+\rho_1\right)\left(\nabla\left(\rho_0+\rho_1\right)\right)\cdot\left(\nabla\left(\rho_0+\rho_1\right)\right)\end{array}\right]$$

$$\mathbf{A}=\left(\rho_0+\rho_1\right)$$
$$\left[\begin{array}{l}
\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\rho_0+\rho_1\right)}\nabla\left(\nabla^2\left(\rho_0+\rho_1\right)\right)\\
-\frac{1}{2}\frac{1}{{\rho_0}^2}\left(1+2\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^{-1}\nabla\left(\rho_0+\rho_1\right)\left(\nabla^2\left(\rho_0+\rho_1\right)\right)\\
-\frac{1}{4}\frac{1}{{\rho_0}^2}\left(1+2\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^{-1}\nabla\left(\nabla\left(\rho_0+\rho_1\right)\right)\cdot\left(\nabla\left(\rho_0+\rho_1\right)\right)\\
+\frac{1}{2}\frac{1}{{\rho_0}^3}\left(1+3\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^{-1}\nabla\left(\rho_0+\rho_1\right)\left(\nabla\left(\rho_0+\rho_1\right)\right)\cdot\left(\nabla\left(\rho_0+\rho_1\right)\right)
\end{array}\right]$$

Yukarıdaki ifadede, $|x|<1$ olmak üzere $(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots$ seri açılımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_1=&\frac{1}{2}\nabla\nabla^2\rho_1-\frac{1}{2\rho_0}\nabla\rho_1\nabla^2\rho_0-\frac{1}{2\rho_0}\nabla\rho_0\nabla^2\rho_1+\frac{\rho_1}{2\rho_0^2}\nabla\rho_0\nabla^2\rho_0\\&-\frac{1}{4\rho_0}\nabla\left(2\nabla\rho_0\cdot\nabla\rho_1\right)+\frac{1}{4\rho_0^2}\rho_1\nabla\left(\nabla\rho_0\right)^2+\frac{1}{2\rho_0^2}\left(\nabla\rho_0\right)^2\nabla\rho_1\\&+\frac{1}{\rho_0^2}\left(\nabla\rho_0\cdot\nabla\rho_1\right)\nabla\rho_0-\frac{1}{\rho_0^3}\left(\nabla\rho_0\right)^2\rho_1\nabla\rho_0\end{aligned}\qquad(5.2.15)$$

elde edilir.

(5.2.13) denklemi tedirginliğe uğratılmış manyetik alanın hareketini tanımlar. Tedirginlik nicelikleri $\exp(ikx-i\omega t)$ ile orantılıdır.

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{A}\cdot\nabla\right)\mathbf{B}=&\left(A_x\frac{\partial B_x}{\partial x}+A_y\frac{\partial B_x}{\partial y}+A_z\frac{\partial B_x}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}}+\left(A_x\frac{\partial B_y}{\partial x}+A_y\frac{\partial B_y}{\partial y}+A_z\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{y}}\\&+\left(A_x\frac{\partial B_z}{\partial x}+A_y\frac{\partial B_z}{\partial y}+A_z\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

Vektör ilişkisine göre uzay türevi $\partial/\partial x$ yerine $ik$, zaman türevi yerine $-i\omega$ yazılırsa tedirginliğe uğratılmış manyetik alan aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathbf{B}_1 = -\frac{k}{\omega} B_{x0} \mathbf{u}_1 + \frac{u_{z1}}{i\omega} \frac{d\mathbf{B}_0}{dz} \tag{5.2.16}$$

Bu formül kullanılarak, Denklem (5.2.12)'nin sağ tarafındaki manyetik gerilme kuvveti aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\mathbf{B}_0 \cdot \nabla \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1 \cdot \nabla \mathbf{B}_0 = -\frac{ik^2 B_{x0}^2}{\omega} \mathbf{u}_1 \tag{5.2.17}$$

Böylece Denklem (5.2.14)'teki sıkıştırılamazlık durumu şu hale gelir:

$$iku_{x1} + \frac{\partial u_{z1}}{\partial z} = 0 \tag{5.2.18}$$

ve süreklilik denklemi (5.2.11)

$$-i\omega\rho_1 + \frac{d\rho_0}{dz} u_{z1} = 0 \tag{5.2.19}$$

haline gelir. Bu denklemden çekilen tedirginlik kütle yoğunluğu $\rho_1$ ve Denklem (5.2.17), Denklem (5.2.12) içinde yazılırsa

$$\left( \rho_0 \omega^2 - \frac{k^2 B_{x0}^2}{\mu_0} \right) \mathbf{u}_1 = -i\omega \nabla \left( p_1 + \frac{\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1}{\mu_0} \right) + \frac{d\rho_0}{dz} u_{z1} \mathbf{g} + i\omega \mathbf{H}_1 \tag{5.2.20}$$

elde edilir.

$\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{y} \cdot \left[ \nabla \times (5.2.20) \right]$ işlemi ile Denklem (5.2.20)'deki tedirginlik ısıl basıncı ve manyetik basınç terimleri yok edilebilir.

$$\begin{aligned} &\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{y} \cdot \left[ \nabla \times \left( \rho_0 \omega^2 - \frac{k^2 B_{x0}^2}{\mu_0} \right) \mathbf{u}_1 \right] \\ &\quad = \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{y} \cdot \left[ \nabla \times \frac{d\rho_0}{dz} u_{z1} \mathbf{g} \right] + i\omega \frac{\hbar^2}{2 m_e m_i} \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{y} \cdot \left[ \nabla \times \mathbf{A}_1 \right] \end{aligned} \tag{5.2.21}$$

Denklem (5.2.15)'den $\mathbf{A}_1$, tedirginlik hızı $\mathbf{u}_1$, tedirginlik kütle yoğunluğu $\rho_1$ Denklem (5.2.21)'de yerine koyulduğunda, manyetik kuantum plazmalar için dağılma bağıntısı elde edilir:

$$\frac{d}{dz}\left[\left(\rho_0\omega^2-\frac{k^2B_{x0}^2}{\mu_0}\right)\frac{d}{dz}\tilde{u}_{z1}\right]=k^2\left[\left(\rho_0\omega^2-\frac{k^2B_{x0}^2}{\mu_0}\right)-\left(g+G\right)\frac{d\rho_0}{dz}\right]\tilde{u}_{z1} + \frac{k^2\hbar^2}{4m_em_i}\frac{d\rho_0}{dz}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{\rho_0}\frac{d}{dz}\left(\tilde{u}_{z1}\frac{d\rho_0}{dz}\right)\right] \tag{5.2.22}$$

ve

$$G=\frac{\hbar^2}{4m_em_i}\left[\frac{k^2}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz}+\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\rho_0}\frac{d^2\rho_0}{dz^2}\right)\right].$$

Denklem (5.2.22)'de $\hbar=0$ alıp kuantum etkiler boşlanırsa MHD sonucu elde edilir (Zhang et al., 2005). $\rho*(z)\omega^2=\rho_0\omega^2-k^2\,B_{x0}^2/\mu_0$ alırsak yukarıdaki denklem şöyle yazılır:

$$\left(\rho*\omega^2+k^2B\right)\frac{d^2\tilde{u}_{z1}}{dz^2}+\left(\frac{d\rho*}{dz}\omega^2+k^2A\right)\frac{d\tilde{u}_{z1}}{dz} = k^2\left[\rho*\omega^2-\left(g-C\right)\frac{d\rho_0}{dz}\right]\tilde{u}_{z1} \tag{5.2.23}$$

$$A=\frac{\hbar^2}{4m_em_i}\frac{1}{\rho_0^2}\frac{d\rho_0}{dz}\left[\left(\frac{d\rho_0}{dz}\right)^2-2\rho_0\frac{d^2\rho_0}{dz^2}\right],$$

$$B=-\frac{\hbar^2}{4m_em_i}\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{d\rho_0}{dz}\right)^2,$$

$$C=\frac{\hbar^2}{4m_em_i}\frac{k^2}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz}.$$

Kuantum etkiler üç parametre ile temsil edilir. Denklem (5.2.23)'e göre; farklı sınır koşulları altında RT kararsızlığının büyüme oranı kuantum etkilerin eklenmesi ile elde edilebilir. İkinci dereceden bir diferansiyel denklem olan (5.2.23) denklemini çözmek için, kütle yoğunluk dağılımı $\rho_0(z)$'yi tanımlamak gereklidir. Literatürde, genellikle $\rho_0$'ın $z$'ye üstel olarak bağımlı olduğu varsayılır. Bu çalışmada $z=0$'daki kütle yoğunluğu $\rho_f$ olmak üzere, $\rho_0(z)=\rho_f \exp(-z/L_D)$ dağılımı kullanıldı. Denklem (5.2.2)'den, $B_{x0}(z)$ manyetik alanın da aynı şekilde $z$'ye bağlı bir dağılım gösterdiğini varsayılmıştır:

$$B_{x0}(z)=B_f \exp(-z/2L_D). \tag{5.2.24}$$

Denklem (5.2.23)'e $\rho_0$ ve $B_{x0}$ yerleştirilirse,

$$\begin{aligned}&\left(\omega^2-k^2v_{af}^2-\omega_q^2\right)\frac{d^2\tilde{u}_{z1}}{dz^2}-\frac{1}{L_D}\left(\omega^2-k^2v_{af}^2-\omega_q^2\right)\frac{d\tilde{u}_{z1}}{dz}\\&=k^2\left[\omega^2-k^2v_{af}^2+\frac{1}{L_D}\left(g-\omega_q^2L_D\right)\right]\tilde{u}_{z1}\end{aligned} \tag{5.2.25}$$

elde edilir. Burada $\omega_q^2=k^2\hbar^2/\left(L_D^2 4m_e m_i\right)$ kuantum etkileri ve $v_{Af}=\left(B_f^2/\mu_0\rho_f\right)^{1/2}$ Alfvén hızını temsil eder.

Üstel yoğunluk dağılımı kullanıldığı için sabit sınır koşulu $\tilde{u}_{z1}(0)=\tilde{u}_{z1}(h)=0$ olarak alınır. Bu şu anlama gelir:

$$\tilde{u}_{z1}=\tilde{u}_0 \sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right)\exp(\lambda z)$$

Denklem (5.2.25)'te yerine koyarsak $\lambda=\frac{1}{2L_D}$ olmak üzere

$$\left(\omega^2 - k^2 v_{af}^2\right)\left[\lambda^2 - k^2 - \frac{\lambda}{L_D} - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2\right] - \omega_q^2\left[\lambda^2 - k^2 - \frac{\lambda}{L_D} - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2\right] - \frac{k^2 g}{L_D} = 0 \tag{5.2.26}$$

Denklem (5.2.26)'da $\lambda$'nın değeri yerine yazılırsa $\omega$ frekansı aşağıdaki gibi bulunur:

$$\omega^2 = -\frac{4gh^2k^2L_D}{h^2 + 4h^2k^2L_D^2 + 4L_D^2n^2\pi^2} + \omega_q^2 + k^2\upsilon_{af}^2 \ . \tag{5.2.27}$$

Bu manyetik kuantum plazmadaki RT kararsızlığının dağılma bağıntısıdır. $\omega_q$ sıfıra eşit alınarak kuantum etkileri yok edildiğinde Wu et al. (2004) tarafından elde edilen dağılma bağıntısı bulunur.

### 5.4. Tartışma

Denklem (5.2.27) kullanılarak kuantum mekanizması ve denge manyetik alanın RT kararsızlığı üzerindeki etkileri incelenebilir. Bu denklem aynı zamanda $\omega$'nın sanal kısmı olan $\gamma$, yani kararsızlığın büyüme oranının manyetik alan ve kuantum etkileri ile nasıl değiştiğini gösterir. Matematiksel kolaylık için, bazı boyutsuz değişkenler kullanacağız: $\omega_{pe} = \left(\rho_f e^2 / m_e^2 \varepsilon_0\right)^{1/2}$ plazma frekansı olmak üzere, $H^2 = \hbar^2 / \left(4m_e m_i \omega_{pe}^2 L_D^2\right)$, $v_{af}^{*2} = v_{af}^2 / L_D^2 \omega_{pe}^2$, $g^* = g / L_D \omega_{pe}^2$, $K^{*2} = k^2 L_D^2$ ve $h^* = h / L_D$. Bu parametreler sırasıyla kuantum etkilerin, denge manyetik alanın, çekim ivmesinin, dalga sayısının ve plazma katmanı kalınlığının önemini gösterir.

Boyutsuz dağılım bağıntısı

$$\omega^{*2} = \frac{\omega^2}{\omega_{pe}^2} = -\frac{4h^{*2}K^{*2}g^*}{4h^{*2}K^{*2} + h^{*2} + 4n^2\pi^2} + K^{*2}H^2 + K^{*2}v_{af}^{*2} \ . \tag{5.2.28}$$

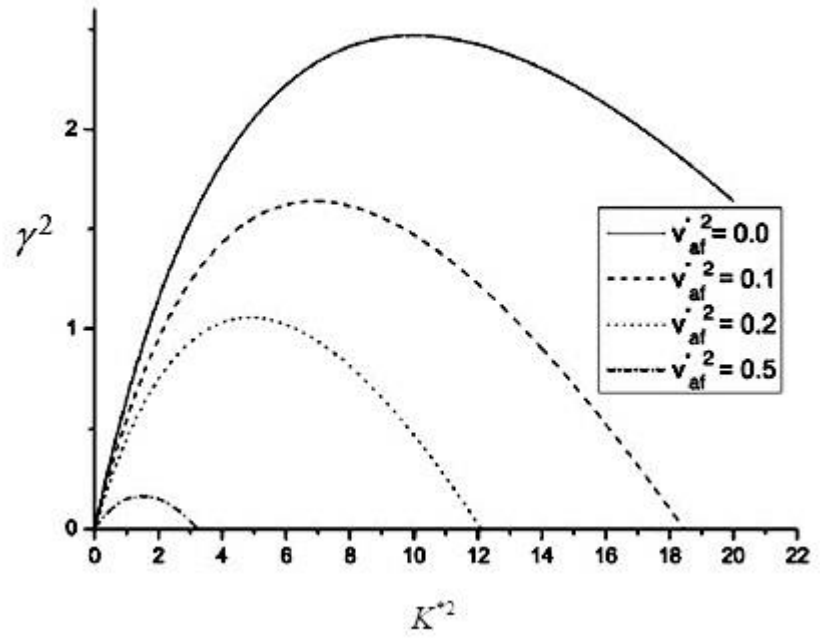
ile verilir. $\gamma^2$, RT kararsızlığının boyutsuz büyüme oranının karesi olmak üzere

$$\gamma^2 = -\omega^{*2} = \frac{4h^{*2}K^{*2}g^*}{4h^{*2}K^{*2} + h^{*2} + 4n^2\pi^2} - K^{*2}H^2 - K^{*2}v_{af}^{*2} \ . \qquad (5.2.29)$$

ile verilir.

Kuantum ve manyetik alanın RT kararsızlığının büyüme oranı üzerindeki etkilerini daha açık görebilmek için, RT kararsızlığının boyutsuz büyüme oranı $\gamma^2$ 'ye karşı boyutsuz dalga sayısının karesi $K^{*2}$ arasındaki ilişkiler Şekil 4-6'da verilmiştir.

İlk olarak manyetik alanın RT kararsızlığı üzerindeki etkisini inceleyelim. Denklem (5.2.29) $\partial\gamma^2 / \partial v_{Af}^{*2} = -K^{*2} < 0$ olduğunu gösterir. Buna göre Alfvén hızı $\upsilon_{af}^{*2}$ arttıkça büyüme oranı monoton bir şekilde azalır. Bir başka deyişle, RT kararsızlığı manyetik alan tarafından bastırılır (bkz. Şekil. 4) Burada kararlı kılıcı etki Lorentz kuvvetidir.




**Şekil 4.** $H = 0.5,\ g^* = 10,\ n = 1,\ h^* = 1$ ile çeşitli Alfvén hız değerleri için dalga sayısına göre karasızlığın büyüme oranı.

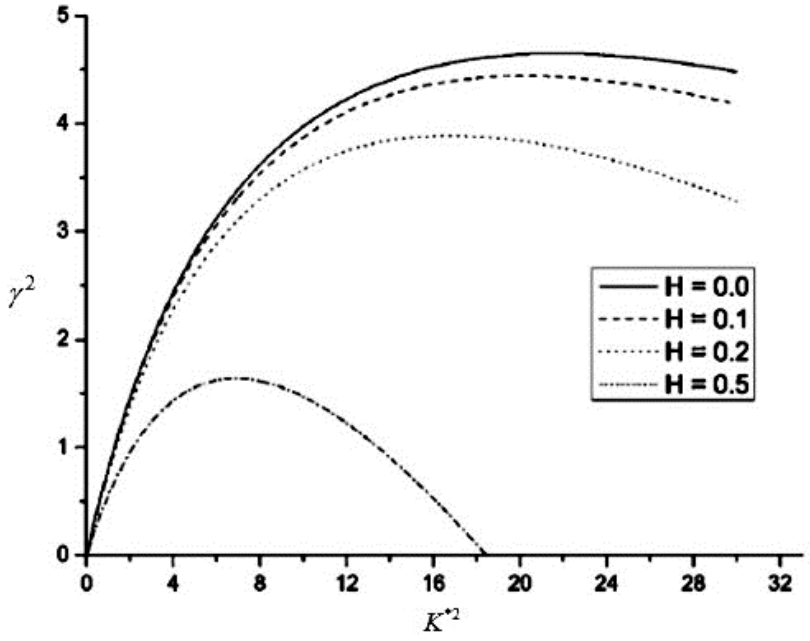
RT kararsızlığı üzerindeki kuantum etkileri Şekil 5'de gösterilmiştir. Denklem (5.2.29)'dan $\partial\gamma^2/\partial H^2 = -K^{*2} < 0$ elde edilir. Kuantum etkileri artarken büyüme oranı monoton olarak azalır. Kuantum etkilerinin kütle yoğunluğundaki dalgalanmalarla ortaya çıktığı bilinmektedir. Bohm potansiyel terimi, çekimin ters yönü olan negatif $z-$ yönündeki yoğunluk gradyenti ile aynı yönde bir kuvvete neden olur. Görünen o ki, kuantum mekanizması da manyetik alan gibi RT kararsızlığı üzerinde kararlı kılıcı etkiye sahiptir.

Denklem (5.2.29)'un sağ tarafındaki son terim yeterince büyük ise, kararsızlık tamamen ortadan kalkar. Bu demektir ki, eğer boyutsuz dalga sayısı yeterince büyükse, $H^2$ parametresi yeterince büyük olur ve/veya denge manyetik alan değeri yeterince güçlü olur ve karasızlık bastırılır, sistem kararlı hale döner. Bu nedenle, $\gamma = 0$ kritik dalga sayısı olarak $K_{c1}$ tanımlanır. Eğer $K^{*2} > K_{c1}^2$ ise, tedirginlik sönümlenir ve kararlı bir dalga ortaya çıkar. $K_{c1}$ ifadesini şöyle verilir:

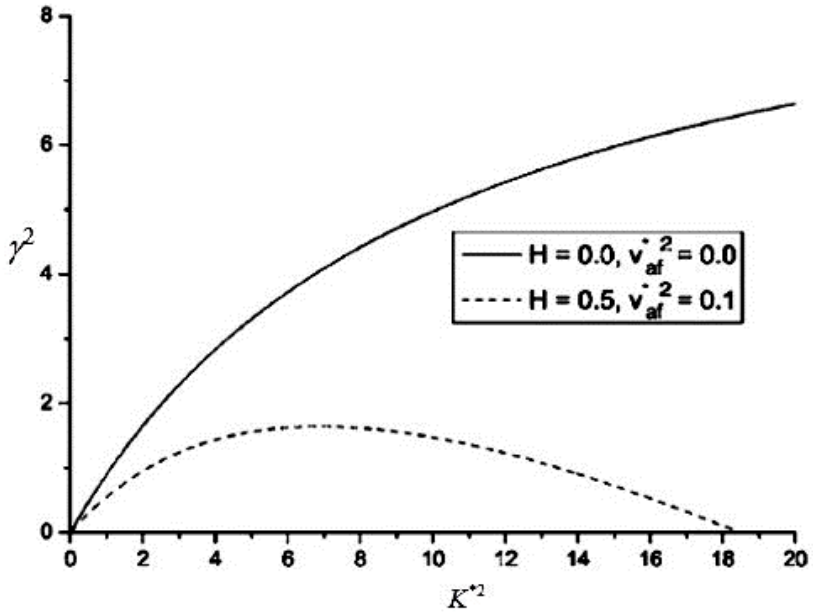
$$K_{c1}^2 = \frac{g^*}{H^2 + \upsilon_{af}^{*2}} - \frac{1}{4} - \left(\frac{n\pi}{h^*}\right)^2 \tag{5.2.30}$$

Bu formül, $H^2$ ve/veya $\upsilon_{af}^{*2}$ arttıkça $K_{c1}$'in azaldığını gösterir. Kuantum etkileri ve/veya manyetik alanın etkisi arttıkça eşik değer daha küçük olur ve bu eşik değere ulaşmak daha kolay olur. Dolayısıyla, RT kararsızlığı kolayca sönümlenir (bkz. Şekil 4 ve 5). Denklem (5.2.29)'da kuantum etkileri ve manyetik alan terimleri boşlanırsa, $\gamma$ belirsiz olarak $k$ ile yükselmez, $\sqrt{g^*}$ gibi bir sınır değere yaklaşır. $K_{c1}$ bir sınır değere sahiptir, bu RT kararsızlığının sadece uzun dalga bölgesinde meydana geldiğini gösterir. Kısa dalga bölgesinde görülen kararsızlık, manyetik alan ve kuantum etkileri tarafından üretilir.

Şekil 6 dalga sayısı $K^{*2}$'nin klasik şartlar altında (kuantum etkilerinin olmadığı durum) artarken, büyüme oranının monoton bir şekilde arttığını göstermektedir. Yukarıdaki üç şekilde gösterilen kuantum durumunda ilişki karmaşık hale gelir. $K^{*2}$ küçük olduğunda, büyüme oranı $K^{*2}$ yükseldikçe yükselir.




**Şekil 5.** $v_{af}^{*2} = 0.1$, $g^* = 10$, $n = 1$, $h^* = 1$ ile çeşitli kuantum durumları için dalga sayısına göre karasızlığın büyüme oranı.




**Şekil 6.** İki farklı durum için dalga sayısına göre kararsızlığın büyüme oranı.

Diğer yandan; $K^{*2}$ yeterince büyük olduğu zaman, $K^{*2}$ yükseldikçe, büyüme oranı düşer. Aslında bunu Denklem (5.2.29)'dan bulmak kolaydır:

$$\frac{\partial \gamma^2}{\partial K^{*2}} = \frac{\left(1/4 + n^2\pi^2/h^{*2}\right) + g^*}{\left(K^{*2} + 1/4 + n^2\pi^2/h^{*2}\right)^2} - H^2 - \upsilon_{af}^{*2} \ , \tag{5.2.31}$$

$K_{c2}^2 = \left[\dfrac{\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{n^2\pi^2}{h^{*2}}\right) g^*}{H^2 + \upsilon_{af}^{*2}}\right]^{1/2} - \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{n^2\pi^2}{h^{*2}}\right)$ olmak üzere $0 < K^{*2} < K_{c2}^2$ olduğunda $K^{*2}$ arttıkça büyüme oranının monoton bir şekilde arttığını gösterir.

Bu nedenle $K^{*2} = K_{c2}^2$ olduğunda büyüme oranı $\gamma^2$ bir maksimum değere ulaşır:

$$\gamma_{\max}^2 = g^* + \left(1/4 + n^2\pi^2/h^{*2}\right)\left(H^2 + \upsilon_{af}^{*2}\right) - 2\left[g^*\left(1/4 + n^2\pi^2/h^{*2}\right)\left(H^2 + \upsilon_{af}^{*2}\right)\right]^{1/2}$$

$K^{*2} > K_{c2}^2$ olduğunda, $K^{*2}$ yükselirken büyüme oranı düşmeye başlar. Özellikle Şekil 6'da bu görülmektedir.

Fiziksel problemleri daha açık bir şekilde tartışabilmek için, Denklem (5.2.29)'un sağ tarafında bulunan ikinci terimin birinci terime oranını $\alpha$ olarak tanımlayalım. Eğer $\alpha$, birden daha küçük olursa kuantum etkileri boşlanabilir. $m_e = 0.91\times10^{-30} kg$ , $m_i = 12m_p$ ($m_p = 1.67\times10^{-27}$ kg proton kütlesi), ve $\hbar = 1.05\times10^{-34} Js$ nümerik değerleri yerine yazalım. $h^* = 1$ ve $n = 1$ alarak iki fiziksel durum incelenbilir:

***1)*** $k^2 L_D^2 \gg 1$ ***durumu***

Denklem (5.2.29)'dan $\alpha_1 \simeq 0.15\times\dfrac{10^{-12}k^2}{gL_D}$ olarak bulunur.

***2)*** $k^2 L_D^2 \sim O(1)$ ***veya*** $k^2 L_D^2 \ll 1$ ***durumu***

$\alpha_2 \simeq 0.15 \times \dfrac{10^{-11}}{g L_D^3}$ olarak bulunur.

Beyaz cüceler ve bazı süpernovalarda etkin çekim ivmesi $g$ 'nin tipik değeri $10^6 ms^{-2}$ dir ve RT kararsızlığı ile ilgili $L_D$ yoğunluk ölçek uzunluğu $1.4 \times 10^{-6} m$ değerindedir (Cabot&Cook, 2006; Timmes&Woosley, 1992; Blinnikov&Sorokina, 2004). Bu şartlar altında $\alpha_1 \simeq 0.11 \times 10^{-12} k^2$ olur. Eğer dalga sayısı $k$, $10^6 m^{-1}$ 'den daha büyükse, ki bu çok kısa dalga boyundaki tedirginliklerdir, kuantum etkileri RT kararsızlığı üzerinde önemli bir etkiye sahiptir. Aynı değerler için $\alpha_2 \simeq 0.55$ olur. Bu nedenle beyaz cücelerdeki flame yapıların RT kararsızlığı için kuantum etkileri önemli olur.

Denklem (5.2.30)'a göre kuantum etkileri ve manyetik alan tarafından RT kararsızlığı tamamen bastırılır. Denklem (5.2.30)'daki boyutsuz kesiklilik (cut-off) $K_{c1}$ dalga sayısı üzerindeki kuantum etkilerini tartışmak için, $\upsilon_{af}^{*2}$ 'yi sıfıra eşit alarak manyetik alanı boşlayalım. Yukarıdaki fiziksel parametreler kullanılarak

$$k_{c1}^2 = \frac{4 m_e m_i}{\hbar^2} g L_D - \frac{1}{4 L_D^2} - \frac{n^2 \pi^2}{h^2 L_D^2} \simeq 6.6 \times 10^{12} L_D - \frac{10.1}{L_D^2}$$

Bulunur, burada $k_{c1} = K_{c1} / L_D$ kesiklilik dalga sayısıdır. $k_{c1} \simeq 2.0 \times 10^6 m^{-1}$ olarak elde edilir. Bu demektir ki; beyaz cücelerdeki parlamalardan ötürü oluşan RT kararsızlığı için kısa dalgaboylu tedirginlikler kuantum etkiler tarafından bastırılır.

Denklem (5.2.30)'daki $H^2$ 'nin $\upsilon_{af}^{*2}$ 'ye oranı $\beta \simeq \dfrac{10^{-14}}{B_f^2 L_D^2}$ olarak tanımlansın. ICF kapsüllerindeki tipik kütle yoğunluğu $\rho_f = 10^5 kgm^{-3}$ 'dir. Kendiliğinden üretilen manyetik alan da hesaba katıldığında $\beta \ll 1$ elde edilir ve ICF deneylerindeki kuantum etkiler ile karşılaştırıldığında, manyetik alan etkileri RT kararsızlığı üzerinde daha önemli olduğu sonucuna varılır.

# 6. SONUÇLAR

Bu çalışmada, QMHD model temel alınarak ideal sıkıştırılamaz kuantum manyetik plazmada RT kararsızlığı araştırıldı. Kuantum etkileri ve denge manyetik alan içeren ikinci derece ODE elde edildi. Sabit sınır koşulları ve üstel değişen yoğunluk dağılımı kullanılarak, RT kararsızlığındaki büyüme oranının analitik ifadesi elde edildi. Kuantum mekanizması ve manyetik alanın RT kararsızlığı üzerindeki etkisi tartışıldı. Sonuçlar gösterdi ki; kuantum plazmada denge manyetik alanın RT kararsızlığına etkisi, kuantum etkilerinin olmadığı klasik plazma üzerindeki etkisi ile aynıdır. Öte yandan sonuçlar RT kararsızlığının kuantum etkileri tarafından önemli ölçüde etkilendiğini göstermektedir. Uygun koşullar içinde kuantum mekanik etkileri RT kararsızlığını bastırır. Çok kısa dalga boylarında RT kararsızlığının durağanlaştığını bulmak ve RT kararsızlığı üzerindeki kuantum etkilerinin önemini tartışmak için astrofiziksel örnekler kullanıldı. Bu, kuantum RT kararsızlığının astrofizikte, tozlu plazmalarda ve uzay fiziğinde önemli olduğunu göstermiştir. Ayrıca ICF deneylerinde kullanılan kendiliğinden üretilen manyetik alanın, kuantum etkilere göre RT kararsızlığı üzerinde daha önemli olduğu görülmüştür.

## KAYNAKLAR DİZİNİ

**Ali**, **S.**, **Moslem**, **W. M.**, **Shukla**, **P. K.**, and **Schlickeiserd**, **R.**, Phys. Plasmas **14**, 082307 (2007)

**Ali**, **Shahid**, Doctoral Thesis, Waves and Instabilities in Quantum Plasmas, Umea University, Sweden, (2008)

**Andreev**, **A. V.**, JETP Lett. 72, 238 (2000)

**Ang**, **L. K.**, **Koh**, **W. S.**, **Lau**, **Y. Y.**, and **T. J. T.** IEEE Trans. Plasma Sci. 32, 410 (2004)

**Ang**, **L. K.**, **Kwan**, **T. J. T.**, and **Lau**, **Y. Y.**, Phys. Rev. Lett. 91, 208303 (2003)

**Barnes**, **W. L.**, **Dereux**, **A.**, and **Ebbesen**, **T. W.**, Nature (London) 424, 824 (2003)

**Becker**, **K.**, **Koutsospyros**, **K.**, **Yin**, **S. M.** et al., Plasma Phys. Control. Fusion 47, B513 (2005)

**Bingham**, **R.**, **Mendonca**, **J. T.**, and **Shukla**, **P. K.**, Plasma Phys. Controlled Fusion **46**, R1 (2004)

**Blinnikov**, **S.** and **Sorokina**, **E.**, Astrophys. Space Sci. **290**, 13 (2004)

**Bodner**, **S.**, Phys. Rev. Lett. **33**, 761 (1974)

**Bret**, **A.**, Phys. Plasmas **14**, 084503 (2007)

**Cabot**, **W. H.** and **Cook**, **A. W.**, Nat. Phys. **2**, 562 (2006)

**Chabrier**, **G.**, **Douchin**, **F.**, and **Potekhin**, **A. Y.**, J. Phys. Condens. Matter 14, 9133 (2002)

**Chandrasekhar**, **S.**, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Dover, New York, 1981)

**Chang**, **D. E.**, **Sørensen**, **A. S.**, **Hemmer**, **P. R.**, and **Lukin**, **M. D.**, Phys. Rev. Lett. 97, 053002 (2006)

**Chen**, **F.F**, Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion: Volume 1: Plasma Physics, Springer, New York.

**Covlea**, **V.**, Quantum Plasmas, Lecture Notes (2012)

**Gardner**, **C.**, SIAM J. Appl. Math. **54**, 409 (1994)

**Haan**, **W.**, **Kauffman**, **R. L.**, **Landen**, **O. L.**, and **Suter**, **L. J.**, Phys. Plasmas **11**, 339 (2004)

**Haas**, **F.**, Phys. Plasmas **12**, 062117 (2005)

**Jung**, **Y. D., Phys**. Plasmas 8, 3842 (2001)

**Killian**, **T. C.**, Nature (London) 441, 298 (2006)

**Kremp**, **D.**, **Bornath**, **Th.**, **Bonitz**, **M.**, and **Schlanges**, **M.**, Phys. Rev. E **60**, 4725 (1999)

**Kremp**, **D.**, **Bornath**, **Th.**, **Bonitz**, **M.**, and **Schlanges**, **M.**, Phys. Rev. E 60, 4725 (1999)

**Kremp**, **D.**, **Schlanges**, **M.**, and **Kraft**, **W. D.**, "Quantum Statistics of Nonideal Plasmas" (Springer, Berlin, 2005)

**Kwan,** Phys. Plasmas 13, 056701 (2006)

**Li Wei** and **You-Nian Wang**, Phys. Rev. B 75, 193407 (2007)

**Lindl**, **J. D.**, **Amendt**, **P.**, **Berger**, **R. L.**, **Glendinning**, **S. G.**, **Glenzer**, **S. H.**, **Wouchuk**, **J. G.** and **Piriz**, **A. R.**, Phys. Plasmas **2**, 493 (1995)

**Lord Rayleigh**, *Scientific Papers* (Cambridge University Press, Cambridge, 1900), Vol. II, p. 200

**Lundin**, **J.**, **Zamanian**, **J.**, **Marklund**, **M.**, and **Brodin**, **G.**, Phys. Plasmas **14**, 062112 (2007)

**Madelung**, **E.**, Z. Phys. **40**, 332 (1926)

**Manfredi**, **G.** and **Haas**, **F.**, Phys. Rev. B **64**, 075316 (2001)

**Manfredi**, **G.**, Fields Inst. Commun. **46**, 263 (2005)

**Marklund**, **M.** and **Shukla**, **P. K.**, Rev. Mod. Phys. **78**, 455 (2006)

**Marklund**, **M.** and **Shukla**, **P. K.**, Rev. Mod. Phys. 78, 591 (2006)

**Marklund**, **M.**, **Brodin**, **G.**, and **Stenflo**, **L.**, Phys. Rev. Lett. **91**, 163601(2003)

**Marklund**, **M.**, **Shukla**, **P. K.**, **Stenflo**, **L.**, **Brodin**, **G.**, and **Servin**, **M.**, Plasma Phys. Controlled Fusion **47**, L25 (2005)

**Marklund**, **M.**, **Tskhakaya**, **D. D.**, and **Shukla**, **P. K.**, Europhys. Lett. **72**, 950 (2005)

**Markowich**, **P. A.**, **Ringhofer**, **C. A.**, and **Schmeiser**, **C.**, "Semiconductor Equations" (Springer-Verlag, New York, 1990)

**Markowich**, **P. A.**, **Ringhofer**, **C.**, and **Schmeiser**, **C.**, *Semiconductor Equations* (Springer, Vienna, 1990)

**Opher**, **M.**, **Silva**, **L. O.**, **Dauger**, **D. E.**, **Decyk**, **V. K.**, and **Dawson**, **J. M.**, ibid. 8, 2454 (2001)

**Pekünlü**, **R.,** Plazma Astrofiziği**,** Bornova**,** İzmir, (1996)

**Piriz**, **A.R., Sanz**, **J.**, and **Ibanez**, **L. F.**, Phys. Plasmas **4**, 1117 (1997)

**Shaikh**, **D.** and **Shukla**, **P.K.**, Phys. Rev. Lett. **99**, 125002 (2007)

**Sharp**, **D.H.**, Physica 12D, 3, 18, (1984)

**Shpatakovskaya**, **G. V.**, J. Exp. Theor. Phys. 102, 466 (2006)

**Taylor**, **G. I.**, Proc. R. Soc. London, Ser. A **201**, 192 (1950)

**Timmes**, **F. X.** and **Woosley**, **S. E.**, Astrophys. J. **396**, 649 (1992)

**Zhang**, **W.**, **Wu**, **Z.**, and **Li**, **D.**, Phys. Plasmas **12**, 042106 (2005)

**TEŞEKKÜR**

Bu çalışmayı hazırladığım süreç boyunca benden desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübeleri ile yol gösteren değerli danışman hocam Doç. Dr. Ebru DEVLEN'e teşekkür ederim. Lisansüstü dönemim boyunca bu alanda etkin olarak çalışmam için benden desteklerini esirgemeyen, aramızdan çok erken ayrılmış olan değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Ahmet DEVLEN'e teşekkürü bir borç bilirim. Bu alanda kendimi geliştirmem için her zaman ve her şekilde yardımcı olan, hiçbir zaman desteğini esirgemeyen gerek lisans dönemim, gerekse yüksek lisans dönemim boyunca yanımda olan bütün hocalarıma teşekkür ediyor ve şükranlarımı sunuyorum.

Okul hayatım, çalışmalarım ve çalışma hayatım boyunca maddi manevi her şekilde destek olan, beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan, uzak yakın demeden her şekilde koruyup kollayan biricik aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ve son olarak destekleri ile her zaman yanımda olan okul ve iş arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Elif İMDAT

# EKLER

Bu çalışma, Ege Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) Koordinasyon Birimi tarafından 18–FEN–002 nolu "*Kuantum Plazmasında Rayleigh–Taylor Kararsızlığı*" isimli proje ile desteklenmiştir.