KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ
ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ELASTİK EULER KOLONLARININ STABİLİTESİNİN DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ

SEVDA MEMİŞ

KOCAELİ 2019

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ELASTİK EULER KOLONLARININ STABİLİTESİNİN DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ

SEVDA MEMİŞ

Prof. Dr. Safa Bozkurt COŞKUN
Danışman, Kocaeli Üniv.

Doç. Dr. Utkan MUTMAN
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv.

Doç. Dr. Baki ÖZTÜRK
Jüri Üyesi, Hacettepe Üniv.

Tezin Savunulduğu Tarih: 12.07.2019

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Tez çalışmam sırasında beni teşvik eden, benden desteğini ve yardımını esirgemeyen, akademik tecrübesi, bilgi ve birikimiyle yol göstererek, çalışmamın başarıyla sonuçlanmasını sağlayan, tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Safa Bozkurt COŞKUN' a teşekkür ederim.

Bu çalışmayı hazırlarken geçirdiğim süreçte beni destekleyen, maddi ve manevi hiçbir destekten kaçınmayan babam Ahmet MEMİŞ'e, annem Natalya MEMİŞ' e ve kardeşim Serkan MEMİŞ' e sonsuz teşekkürler.

Temmuz – 2019 Sevda MEMİŞ

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR i
İÇİNDEKİLER ii
ŞEKİLLER DİZİNİ iii
TABLOLAR DİZİNİ iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ v
ÖZET vi
ABSTRACT vii
GİRİŞ 1
1. ELASTİK ÇUBUKLARIN BURKULMASI 4
1.1. Çubuklar İçin Genel Burkulma Kuramı 7
1.2. Diferansiyel Denklem Yöntemi 10
1.3. Euler Halleri 11
1.4. Burkulma Boyu 15
1.5. Elastik Stabilitede Sınırlar 16
1.6. Elastik Burkulma 16
2.DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ İLE İLGİLİ TEMEL BİLGİLER 18
2.1. Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi 19
3.ELASTİK STABİLİTE PROBLEMİNİN DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ İLE FORMÜLASYONU 24
3.1. Uniform Euler Kolonu İçin Formülasyon 24
3.2. Eğilme Rijitliği Üslü Değişken Olan Euler Kolonu İçin Formülasyon 30
4.SONUÇLAR VE ÖNERİLER 47
KAYNAKLAR 48
KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER 50
ÖZGEÇMİŞ 51

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. P yükü altındaki elastik çubuk elemanın burkulması 4
Şekil 1.2. Kritik Euler yüklerini gösteren çubuk elemanlar 7
Şekil 1.3. Dış yüklerin etkimediği, P yükü altında şekil değiştiren eleman 9
Şekil 1.4. Serbest uçta tek dış yükü düşey P yükü olan eleman 9
Şekil 1.5. Çeşitli uç durumları için Euler halleri 12
Şekil 1.6. Denklemin sıfır olmayan en küçük kökünün tespitinde kullanılan grafik 14
Şekil 1.7. Euler Hiperbolü grafiği 17
Şekil 3.1. Klasik Euler kolonu için çeşitli uç durumlar 24
Şekil 3.2. A-S kirişi için ilk iki modun yakınsaması 29
Şekil 3.3. M-M kirişi için ilk iki modun yakınsaması 29
Şekil 3.4. A-M kirişi için ilk iki modun yakınsaması 29
Şekil 3.5. A-A kirişi için ilk iki modun yakınsaması 30
Şekil 3.6. A-S kiriş ve αL=0,1 için ilk iki modun yakınsaması 39
Şekil 3.7. A-S kiriş ve αL=0,5 için ilk iki modun yakınsaması 39
Şekil 3.8. A-S kiriş ve αL=1,0 için ilk iki modun yakınsaması 39
Şekil 3.9. A-S kiriş ve αL=1,5 için ilk iki modun yakınsaması 40
Şekil 3.10. A-S kiriş ve αL=2,0 için ilk iki modun yakınsaması 40
Şekil 3.11. M-M kiriş ve αL=0,1 için ilk iki modun yakınsaması 40
Şekil 3.12. M-M kiriş ve αL=0,5 için ilk iki modun yakınsaması 41
Şekil 3.13. M-M kiriş ve αL=1,0 için ilk iki modun yakınsaması 41
Şekil 3.14. M-M kiriş ve αL=1,5 için ilk iki modun yakınsaması 41
Şekil 3.15. M-M kiriş ve αL=2,0 için ilk iki modun yakınsaması 42
Şekil 3.16. A-M kiriş ve αL=0,1 için ilk iki modun yakınsaması 42
Şekil 3.17. A-M kiriş ve αL=0,5 için ilk iki modun yakınsaması 42
Şekil 3.18. A-M kiriş ve αL=1,0 için ilk iki modun yakınsaması 43
Şekil 3.19. A-M kiriş ve αL=1,5 için ilk iki modun yakınsaması 43
Şekil 3.20. A-M kiriş ve αL=2,0 için ilk iki modun yakınsaması 43
Şekil 3.21. A-A kiriş ve αL=0,1 için ilk iki modun yakınsaması 44
Şekil 3.22. A-A kiriş ve αL=0,5 için ilk iki modun yakınsaması 44
Şekil 3.23. A-A kiriş ve αL=1,0 için ilk iki modun yakınsaması 44
Şekil 3.24. A-A kiriş ve αL=1,5 için ilk iki modun yakınsaması 45
Şekil 3.25. A-A kiriş ve αL=2,0 için ilk iki modun yakınsaması 45
Şekil 3.26. Farklı terim sayıları ile çözüm için geçen süre (saniye) 46

TABLOLAR DİZİNİ

Tablo 2.1. DDY için temel dönüşümler..... 20
Tablo 3.1. Uniform Euler kolonu için elde edilen burkulma yükü değerleri..... 28
Tablo 3.2. Uniform Euler kolonu için elde edilen kritik burkulma değerlerinin analitik çözümle karşılaştırılması..... 28
Tablo 3.3. Eğilme rijitliği üslü değişken olan Euler kolonu için elde edilen burkulma yükü değerleri 36
Tablo 3.4. Eğilme rijitliği üslü değişken olan Euler kolonu için elde edilen kritik burkulma değerlerinin analitik çözümler ile karşılaştırılması 38
Tablo 3.5. Farklı terim sayıları ile çözüm için geçen süre (saniye)..... 46

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

E : Elastisite modülü, (N/m^2)
I : Eylemsizlik momenti, (N.m)
M : Moment, (N.m)
L : Kolon boyu, (m)
L_B : Burkulma boyu, (m)
A : Kesit alanı, (m^2)
α : Boyutsuz burkulma yükü, (N)
σ_{kr} : Kritik normal gerilme, (Pa)
i^2_{min} : Eylemsizlik yarıçapı, (m)
λ : Çubuğun narinliği
P : Burkulma yükü, (N)
P_{kr} : Kritik Euler burkulma yükü, (N)
c_i : İntegral sabiti
n : Doğrusal terim

Kısaltmalar

A : Ankastre Uç Durumu
DDY : Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi
M : Mafsallı Uç Durumu
S : Serbest Uç Durumu

ELASTİK EULER KOLONLARININ STABİLİTESİNİN DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ

ÖZET

Bu çalışmada, eğilme rijitliği sabit ve değişken olan kolonların stabilitesi diferansiyel dönüşüm yöntemi (DDY) ile analiz edilmiştir. Kullanılan metod doğrusal ve doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerle ifade edilen mühendislik problemlerinde başarıyla kullanılmış olan bir yöntemdir. Yazar, matematiksel tekniğin kullanımını mevcut probleme uyarlamış ve sonuçlar DDY'nin eğilme elastik Euler kolonlarının stabilitesinin incelenmesi probleminin çözümünde de başarılı bir şekilde kullanılabileceğini göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: Burkulma, Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi, Kolon, Stabilite.

STABILITY ANALYSIS OF EULER COLUMNS USING DIFFERENTIAL TRANSFORMATION METHOD

ABSTRACT

In this study, stability analysis of columns with variable flexural rigidity is conducted using differential transform method (DTM). The method used in the present work was successfully used in the solution of many engineering problems governed by linear and nonlinear differential euations. The author, extended the use of the proposed technique to the presented problem and the results show that DTM can be successfully used in the stability analysis of columns with elastic Euler columns.

Keywords: Buckling, Differential Transformation Method, Column, Stability.

GİRİŞ

Kolonlarda burkulma problemi 18. yüzyılın sonlarına doğru integral ve diferansiyel hesapların gelişmesiyle çözülmüştür. Leonhard Euler, 1759 yılında kolonların burkulması ile ilgili çalışmasını yayınlamıştır. L. Euler kolon taşıma gücünün sadece basınç altında ezilme değil aslında bir stabilite problemi olduğunu fark eden ilk kişidir. Derlenen çalışmalarının tamamı yaklaşık 80 cilde ulaşmış durumdadır. (URL-2, URL-3)

Dış yükler tarafından zorlanan bir taşıyıcı elemanın dengesi araştırılıyorsa iki durum ile karşılaşılır. Bu durumlardan biri gerilme, diğeri ise stabilite problemidir. Gerilme probleminde güvenlik koşulu gereği en büyük gerilme, emniyet gerilmesini aşmamalıdır. Stabilite probleminde ise var olan dengenin kararlılığı incelenir. Eğer denge durumu kararlı değilse, sistemin bu durumda yapacağı en küçük sapma sistemde engellenemez bir biçimde daha büyük yer değiştirmelerin gerçekleşmesine neden olur ve akabinde sistem taşıyıcılık özelliğini yitirerek göçer. (Omurtag, 2018)

Denge durumunun kendisi gerilme problemlerinde araştırılırken, belli olan denge durumunun kararlılığı ise stabilite problemlerinde araştırılır. Denge durumu kararlı denge, kararsız denge ve tarafsız denge olmak üzere üçe ayrılır. Kararlı denge bir cismin herhangi bir müdahaleye gerek duymadan bir takım salınım hareketlerinin sonunda tekrar ilk denge konumuna dönmesidir. Karasız denge durumu ise bir cismin bir takım salınım hareketleri sonunda dışarıdan müdahale olmadan denge konumundan giderek uzaklaşarak ilk denge konumuna dönememesidir. Tarafsız denge durumunu bir örnek ile açıklarsak, bir plağın üstünde dengede bulunan bilye bir tarafa doğru itilirse bir başka yere gider ve orada tekrar dengede durur. Bu nedenle bilyenin ilk ve son konumu farksız denge konumlarıdır. Tarafsız denge halinde büyük sapmalara sebep olacağı için taşıyıcı sistemde kırılma, kopma ya da ezilme durumu meydana gelmese dahi taşıyıcılık görevi aksayabilir. Mühendislik projelerinde kararlı denge durumu sağlanmalıdır. Eğer mümkünse dengede kararsızlığın hangi yükleme altında olacağının bilinmesi de faydalıdır. (Omurtag, 2018)

Bir stabilite problemi olan burkulmayı basit bir örnek ile açıklamak için eksenel basınç kuvveti altında olan, narin ve uzun bir çubuk elemanı ele alalım. P kuvveti ile sıkıştırılan bu çubuk elemanın kuvveti yavaşça arttırılıp elemanın enine yer değiştirmesi gerçekleştirilir. Bu aşamada eğer kuvvet kaldırılır ise, çubuk eleman tekrar ilk konumuna geri döner. Eğer P yükü kaldırılmayıp arttırılmaya devam edilirse, çubuk eleman yer değiştirmeye devam ederek dış kuvvet P'nin belli bir kritik değeri aşması durumunda kırılır. Yer değiştirmenin gerçekleşmesini sağlayan bu yüke kritik burkulma yükü, çubuk elemanın gerçekleştirdiği yer değiştirme eylemine ise burkulma denir. Eğer eleman daha kısa boylu ve kalın olursa, eleman stabilitesinin bozulması için etkitilecek eksenel yükün daha büyük olması gerekecektir. Hatta son derece kalın elemanlarda burkulma meydana gelmeyebilir. Bütün bu durumlar, çubuk kesitinin boyutlarına, çubuktaki eksenel basınç kuvvetinin şiddetine ve çubuk malzemesinin mekanik özelliklerine bağlı olarak değişiklik göstermektedir. (URL-1)

Başka bir burkulma örneği verecek olursak da dairesel basınç altındaki ince cidarlı silindirik ya da küresel tankları ele alabiliriz. Silindirik bir tanka dairesel doğrultuda uygulanan, sıfırdan başlayarak artan dış basıncın belli bir değeri geçmesi halinde silindirik kesit aniden büyük yer değiştirmeler yaparak elips biçimini alır. Eğer basınç kuvveti arttırılmaya devam edilirse kap iyice yassılaşır. Bir diğer yandan, yükleme durumu dış basınç yerine iç basınç olsaydı, kapta oluşacak çekme gerilmeleri nedeniyle malzeme yırtılıncaya kadar görev yapabilecekti. (Omurtag, 2018)

Günümüzde yaşanan teknolojik gelişmeler sonucu, malzeme kalitesinde elde edilen ilerlemeler, gittikçe narinleşen boyutlarda üretilmiş taşıyıcı elemanlarda kararsız denge durumunun analizini çok daha gerekli ve önemli duruma getirmiştir. Bu nedenden ötürü stabilite hesabı mühendislik problemlerinde her geçen gün önemini arttırmaktadır. (Omurtag, 2018)

Bu çalışmada matematiksel yöntem olarak kullanılan Diferansiyel dönüşüm yöntemi (DDY), ilk olarak Zhou tarafından 1986 yılında geliştirilmiştir. Zhou (1986) bu yöntemi çalışmasında ilk olarak elektrik devre analizlerinde ortaya çıkan lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemlerini çözmek için kullanmıştır. Daha sonra Chen ve Ho (1996), Jang ve Chen (1997), Ho ve Chen (1999), Hassan Abdel-Halim (2002, 2004), Ayaz (2003, 2004), Chen ve Chen (2004), Chen ve Ju (2004), Arikoğlu

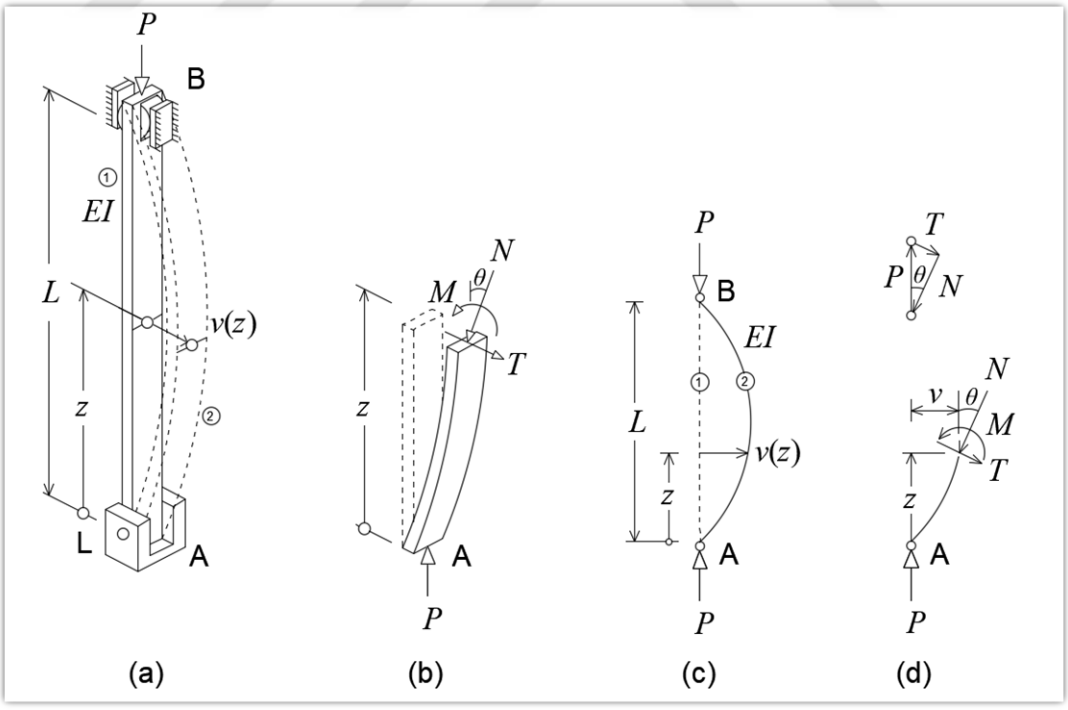
ve Özkol (2005), Özkan ve Keskin Y (2005) gibi birçok kişi DDY'ni çalışmalarında kullanmıştır. (Eskin, 2009)

DDY Taylor serisi açılımına dayanan bir seri çözüme dayalı dönüşüm metodudur. Diferansiyel dönüşüm metodunun en önemli özelliklerinden biri verilen diferansiyel denklemleri sade ve basit bir şekilde cebirsel denklemlere dönüştürüyor olmasıdır. DDY'de sadece türev ifadeleri yer aldığından, Laplace ve Fourier gibi diğer integral dönüşüm yöntemlerine göre çok daha basit hesaplamalar ile daha hızlı sonuçlar elde edilebilmektedir. (Eskin, 2009)

Bu yüksek lisans tez çalışması elastik Euler kolonlarının stabilitesinin DDY kullanılması ile analizlerini içermektedir. İlk olarak elastik çubukların burkulması hakkında genel teorik bilgi verilmiştir. Ardından DDY hakkında temel bilgilere ve bu metodun kullanım alanlarına değinilmiştir. Ardından bir boyutlu DDY tanımlanarak, örneklendirilmiştir. Daha sonra eğilme rijitliği sabit ve değişken kolonların stabilitesinin incelenmesi problemi diferansiyel dönüşüm yöntemi ile açıklanmıştır. Elde edilen sonuçlar tablolar ve grafikler yardımıyla incelenmiş ve bu çalışmada yer verilen yöntemin güvenilirliği hakkındaki değerlendirmeye de sonuç bölümünde yer verilmiştir.

1.ELASTİK ÇUBUKLARIN BURKULMASI

Basınca çalışan taşıyıcı elemanlarda burkulma problemi karşımıza çıkmaktadır. Bu başlık altında sadece doğru eksenli elastik çubuklar ele alınacaktır. Elastik çubukların burkulması ile ilgili bu bölümde verilecek olan bütün teorik bilgiler Omurtag (2018) tarafından yazılmış olan Mukavemet II kitabından alınmıştır. Şekil 1.1.'de görülen boyu L, eğilme rijitliği EI, A ucu sabit B ucu kayıcı mafsallı mesnet olan elastik bir çubuk, P kuvveti ile sıkıştırılmaktadır. 1 numaralı denge durumunun hangi koşullar altında kararlı olduğunun ele alındığı bu problem, giriş bölümünde de bahsedildiği üzere ilk kez 1757 yılında Euler tarafından denge yöntemi ile incelenmiştir. 2 numaralı durumun ise ne zaman gerçekleşebileceğinin tespiti için dengenin konumunu tanımlayan yer değiştirme fonksiyonu v(z) bilinmelidir (Bakınız Şekil 1.1.c ve Şekil 1.1.d).



Şekil 1.1. P yükü altındaki elastik çubuk elemanın burkulması (Omurtag, 2018)

Şekil 1.1.b ve Şekil 1.1.d'de verilen kesitlerin kesit zorları,

$$\begin{cases} N=-P\cos\theta \\ T=P\sin\theta \\ M=Pv \end{cases} \tag{1.1}$$

olacaktır. 1. ve 2. durumun konumları birbirine çok yakın ise, $\theta\approx\tan\theta=v'$, $\sin\theta\approx\theta$, $\cos\theta\approx1$ olur ve Denklem (1.1) ifadeleri,

$$\begin{cases} N=-P \\ T=Pv' \\ M=Pv \end{cases} \tag{1.2}$$

biçiminde yazılabilir. Eğilme momenti 2. durumunun diferansiyel denge denklemi $EIv''+M=0$ da yerine yazılırsa,

$$v''+\frac{P}{EI}v=0 \tag{1.3}$$

denklemini elde ederiz. Denklem (1.3)'ü düzenlersek,

$$v''+\lambda^2 v=0 \tag{1.4}$$

olarak yeniden yazabiliriz. Burada,

$$\lambda^2=\frac{P}{EI} \tag{1.5}$$

İki ucu mafsallı çubuk elemanın sınır koşulları ise aşağıdaki gibidir,

$$v(z)\big|_{Z=0}=v(z)\big|_{Z=L}=0 \tag{1.6}$$

(Bakınız Şekil 1.1.a ve Şekil 1.1.c). Denklem (1.4)'deki homojen diferansiyel denkleme ait iki temel çözüm mevcuttur. Bunlar;

Trival (Bayağı, Aşikar) çözüm : $v(z)\equiv0$ (1. Durum)

Trival (Bayağı, Aşikar) olmayan çözüm : $v(z)\neq0$ (2. Durum)

İstenilen çözüm trival olmayandır, çünkü trivial çözüm yer değiştirmenin olmadığı 1 numaralı denge durumunu ifade etmektedir. Trivial olmayan çözüm yalnızca

diferansiyel denklemin katsayılarının bazı özel değerleri için olasıdır. Çubuk elemanda farksız denge konumu istendiğinden, P kuvvetinin varması gereken sınırlar bu değerleri verir. Denklem (1.4)'ün çözümünün,

$$v(z)=A\sin(\lambda z)+B\cos(\lambda z) \tag{1.7}$$

olduğu bilinmektedir. Denklem (1.6)'daki sınır koşulu $v(z)|_{Z=0}=0$ dan B=0 elde edilir. Elastik eğri aşağıdaki gibi,

$$v(z)=A\sin(\lambda z) \tag{1.8}$$

olmalıdır. Denklem (1.6)'daki $v(z)|_{Z=L}=0$ koşulundan $0=A\sin(\lambda L)$ bulunur. Trival olmayan çözüm için $A\neq 0$ olması gerekir. Bunun için,

$$\sin(\lambda L)=0 \quad \rightarrow \quad \lambda L=n\pi \tag{1.9}$$

elde edilir. Burada n=1,2,3… şeklinde tam sayılardır. Buradan da Denklem (1.5) ile Denklem (1.7) deki λ^2'leri eşitlersek,

$$\sin(\lambda L)=0 \quad \rightarrow \quad P=n^2\frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{1.10}$$

elde edilir. Buradan n=1,2,3… için hesap edilen P değerleri, gerçekte kritik yükler $(P_{kr})_n$'dir. Bunlara Euler kritik yükleri denilmektedir. Şekil 1.2.'de n=1,2,3 sayılarına denk gelen durum 2 denge konumları görülmektedir. $n \geq 2$ durumu için hesap edilecek kritik değerlere yüksek kritik yükler denir. n=1 durumu için en küçük kritik yük aşağıdaki gibi,

$$P_{kr}=\frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{1.11}$$

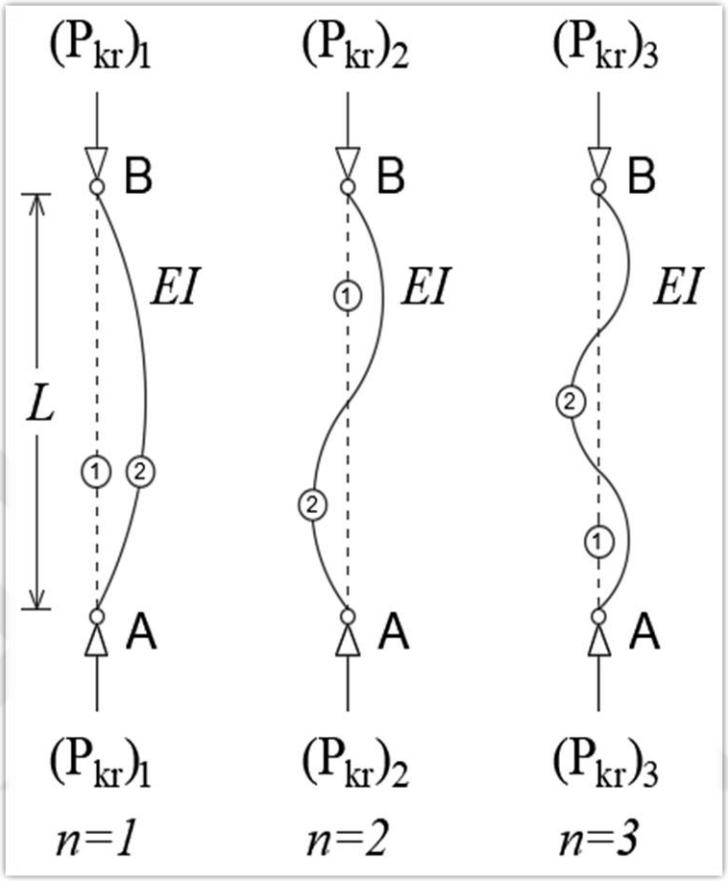
Denklem (1.11) sabit kesitli ve iki ucu mafsallı doğru eksenli çubuk elemanlar için elde edilmiştir. Çubuk elemanın 1.durum konumu için,

$P < P_{kr}$ → kararlı denge

$P = P_{kr}$ → farksız denge

$P > P_{kr}$ → kararsız denge

olur. Dallanma tipi olan elastik çubuk elemanın kararlılık problemi, kritik noktada meydana gelmektedir.



Şekil 1.2. Kritik Euler yüklerini gösteren çubuk elemanlar (Omurtag, 2018)

1.1. Çubuklar İçin Genel Burkulma Kuramı

Burkulma probleminin çözümü kesit değişimi veya farklı mesnetlenme koşulları gibi problemi ifade eden diferansiyel denklemi ve onun sınır koşullarını değiştirecek durumlar nedeni ile çeşitlilik arz edebilir. Problemin denge yöntemi ile çözüleceği var sayılırsa, 1.durumun farksız denge konumu, 2.durum da onun yakın komşuluğundaki denge konumunda olduğu düşünülebilir. Şekil 1.3.'de 2. durumunda görülen arada dış yüklerin etkimediği Δz uzunluğundaki bir elemanın dengesine bakalım. Eğer z kesitindeki kesit zorlarını P, Y, M olarak alırsak, $z+\Delta z$ kesitindekiler P, Y ve $M+\Delta M$ olur ve burada bulunan P iç kuvveti çubuk eleman ekseni z ye paralel olup, $Y \perp P$'dir. Y ile P iç kuvvetlerine ait kesit tesirleri T ile N den şiddetçe farklıdırlar. 2.duruma göre yani şekil değiştirmiş geometri üzerinden yazılacak moment denge denklemine göre,

$$(M+\Delta M)-M-P\Delta v-Y\Delta z=0 \qquad (1.12)$$

elde edilir. İfade Δz ye bölünür ve sadeleştirilip limite geçirilirse,

$$\frac{dM}{dz}=Y+P\frac{dv}{dz} \qquad \rightarrow \qquad M'=Y+Pv' \qquad (1.13)$$

bulunur. Ayrıca buna ek olarak elimizde moment-eğrilik ilişkisi olan,

$$M=-EIv'' \qquad (1.14)$$

denklemi de mevcuttur. Denklem (1.13) ile Denklem (1.14) sabit değerli Y kesme etkisi çözümlenirse,

$$Y=-[(EIv'')'+Pv'] \qquad (1.15)$$

sonucunu elde ederiz. Denklemin türevini aldığımızda,

$$Y'=0 \qquad \rightarrow \qquad (EIv'')''+Pv''=0 \qquad (1.16)$$

sonucu elde edilir.

Denklem (1.16)'da EI sabit ise ifade sadeleşerek $EIv^{iv}+Pv''=0$ şeklinde yazılır. Eğer düşeyde yer alan P kuvveti çubuk ekseni boyunca sabitse, Denklem (1.16) her mesnet durumu için çözülebilir. Bu mesnet koşullarından en basit iki tanesi aşağıdaki gibidir,

Mafsallı uç: Yer değiştirme ve eğilme momenti sıfıra eşittir $v=v''=0$

Ankastre uç: Yer değiştirme ve dönme açısı sıfıra eşittir $v=v'=0$

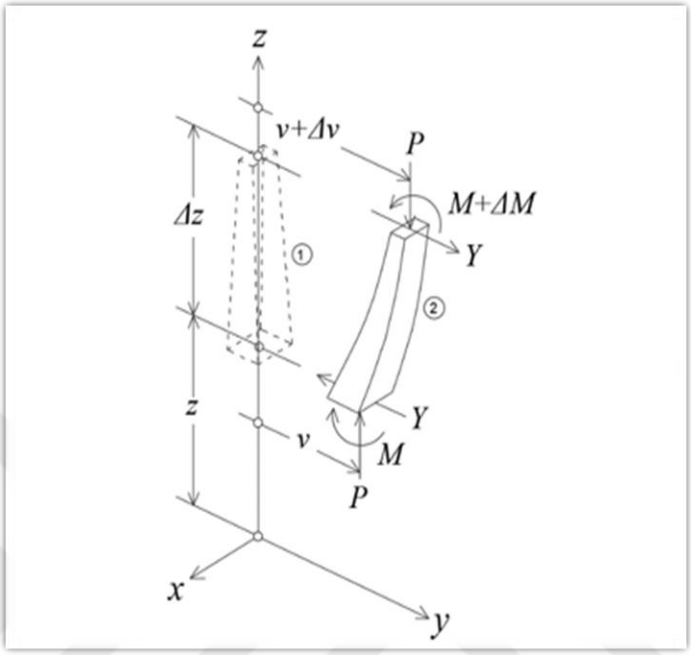
Şekil 1.4.'de de görüldüğü üzere serbest uçta tek dış yük düşey P kuvveti ise, $M=Y=0$ olur. Buna göre Denklem (1.14) ile Denklem (1.15)'den,

Serbest uç: Eğilme momenti ve kesme kuvveti sıfıra eşittir $v''=0$

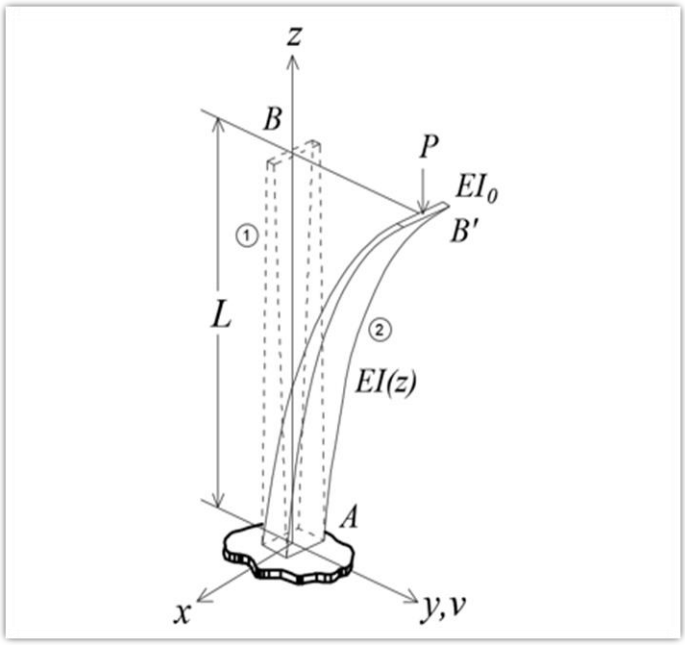
Buradan,

$$(EIv'')'+Pv'=0 \qquad (1.17)$$

Denklem (1.17) elde edilir. Böylelikle Denklem (1.16)'da ki dördüncü dereceden lineer ve homojen diferansiyel denklem ifadesi, homojen sınır şartları altında çözülebilir.



Şekil 1.3. Dış yüklerin etkimediği, P yükü altında şekil değiştiren eleman (Omurtag,2018)



Şekil 1.4. Serbest uçta tek dış yükü düşey P yükü olan eleman (Omurtag, 2018)

1.2. Diferansiyel Denklem Yöntemi

Şekil 1.4.'deki gibi değişken kesitli bir çubuk elemanda, eğilme rijitliği EI(z) eğer EI_0 gibi sabit bir rijitliğe bölünürse, kesitin varyasyonunu gösteren boyutsuz fonksiyon aşağıdaki gibi,

$$\psi(z)=\frac{EI(z)}{EI_0} \tag{1.18}$$

bulunur. Buradan Denklem (1.18), EI_0'a bölünüp $\lambda^2=P/EI_0$ ve $\psi(z)$ yerine yerleştirilmesiyle denklem düzenlenirse,

$$(\psi v'')''+\lambda^2 v''=0 \tag{1.19}$$

Denklem (1.19) elde edilir ve bu değişken katsayılı lineer homojen diferansiyel denklemin genel çözümü aşağıdaki gibi,

$$v(z)=c_1\varphi_1(z,\lambda)+c_2\varphi_2(z,\lambda)+c_3\frac{z}{L}+c_4 \tag{1.20}$$

dir. Denklem (1.20)'da çözüm fonksiyonları $\varphi_1(z,\lambda)$ ile $\varphi_2(z,\lambda)$ transandant olup, integral sabitleri olan c_1,c_2,c_3,c_4 çubuğun iki ucunda yazılacak ikişer sınır durumundan belirlenir. Bu yolla yazılacak dört denklem aşağıdaki gibi,

$$\left.\begin{aligned} g_{11}c_1+g_{12}c_2+g_{13}c_3+g_{14}c_4&=0\\ g_{21}c_1+g_{22}c_2+g_{23}c_3+g_{24}c_4&=0\\ g_{31}c_1+g_{32}c_2+g_{33}c_3+g_{34}c_4&=0\\ g_{41}c_1+g_{42}c_2+g_{43}c_3+g_{44}c_4&=0 \end{aligned}\right\} \tag{1.21}$$

bir homojen denklem gurubudur.

Denklem (1.21)'de yer alan dört integral sabiti c_i (i=1,…,4) nin çarpanları $g_{ij}=g_{ij}(\lambda)$ dır. Denklem (1.21)'in trivial çözümü $c_1=c_2=c_3=c_4=0$ aslında 1.durum konumu olup, $c_i\neq0$, (i=1,…,4), olacak şekilde diğer denge konumu olan 2.durumun araştırılması (Bakınız Şekil 1.4), bizi diferansiyel denklem kuramında kullanılan öz değer problemine ulaştırır. Eğer sabitler $c_i\neq0$, (i=1,…,4), olacak şekilde Denklem (1.21)'i sağlatmak istersek katsayılar determinantı,

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix} = \Delta(\lambda) = 0 \qquad (1.22)$$

olmalıdır.

Burkulma şartı denklemi $\Delta(\lambda)=0$ dır ve burkulma determinantı ise Denklem (1.22)'deki determinanttır. $\Delta(\lambda)=0$ bir transandant denklem olduğundan denklemin sonsuz sayıdaki kökü λ_i, $(i=1,2,\ldots,\infty)$, aynı zamanda öz değerler olduğu için, $\lambda_i^2=P_i/EI_0$ dan kritik yükler hesaplanır. Öz değerleri küçükten büyüğe $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_\infty$ şeklinde sıralandıktan sonra hesap en küçük kök baz alınarak yapılır ise kritik yük,

$$P_{kr}=\lambda_1^2 EI_O \qquad (1.23)$$

şeklinde Denklem (1.23) elde edilir.

Her bir λ_i değeri için Denklem (1.21)'den $c_j(\lambda_i)$, $(j=1,\ldots,4$ ve $i=1,2,\ldots,\infty)$, katsayıları elde edilir ve bu kat sayılar Denklem (1.20)'de yerine yazılırsa, çubuğun elastik eğrisini veren $v_i(z)$ öz fonksiyonlarını elde ederiz.

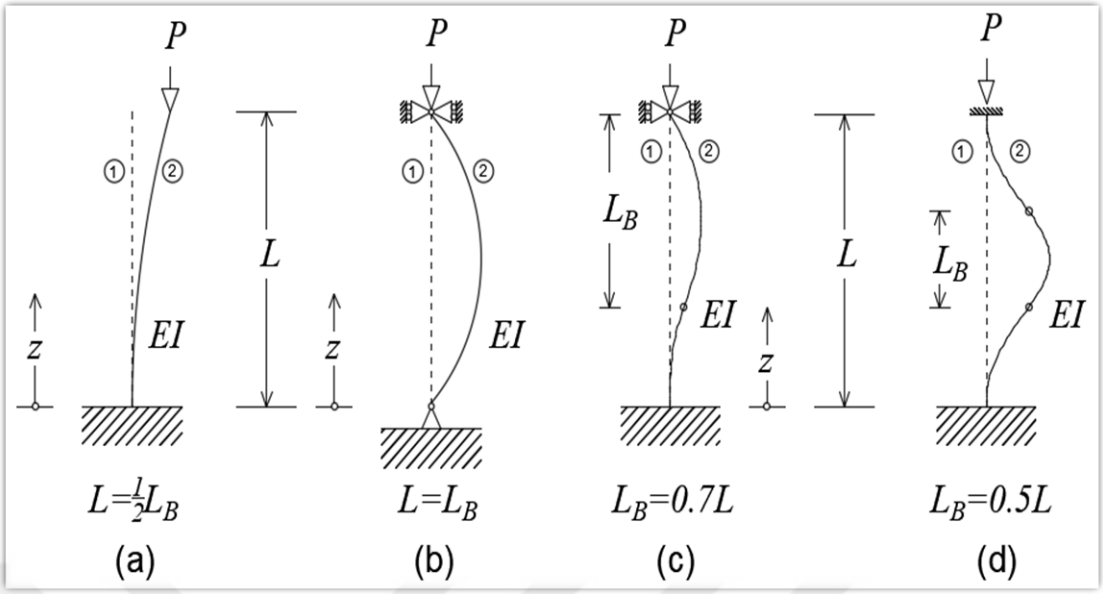
1.3. Euler Halleri

Eğilme rijitliği olan EI=sabit olması halinde Euler durumu olarak da bilinen Şekil.1.5.'de gözlemlediğimiz dört basit hal için kritik yük hesabını yapalım. Sabit katsayılı diferansiyel Denklem (1.16)'yı $\lambda^2=P/EI$ olacak biçimde yeniden düzenlenirse $v^{iv}+\lambda^2 v''=0$ denklemi elde edilir ve Denklem (1.20)'nin genel çözümü yerine,

$$v(z)=C_1\sin(\lambda z)+C_2\cos(\lambda z)+C_3\frac{z}{L}+C_4 \qquad (1.24)$$

Denklem (1.24) yazılır.

Aşağıda bulunan Şekil 1.5.'de çeşitli uç durumları için mevcut olan Euler hallerine yer verilmiştir.



Şekil 1.5. Çeşitli uç durumları için Euler halleri (Omurtag, 2018)

Bir ucu ankastre mesnet diğer ucu serbest mesnet olan Şekil 1.5.a' daki çubukta sınır koşulları aşağıdaki gibi,

$v(z)\big|_{Z=0}=0$, $v'(z)\big|_{Z=0}=0$

$v''(z)\big|_{Z=L}=0$, $v'''(z)\big|_{Z=L}+\lambda^2 v'(z)\big|_{Z=L}=0$

dır. Bu koşulların Denklem (1.23)'de kullanılmasıyla, burkulma determinantı,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 1 & \frac{1}{L} & 1 \\ -\lambda^2 \sin(\lambda L) & -\lambda^2 \cos(\lambda L) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda^2}{L} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\lambda^5}{L}\cos(\lambda L)=0 \qquad (1.25)$$

dır. Bunu sağlayacak olan $\lambda_n L=(2n+1)(\frac{1}{2}\pi)$, (n=0,1,2,…) kökleri özel ifadelerdir. $\lambda_n^2=P_n/EI$ olduğuna göre n=0 değeri en küçük kökü belirtir ve buna göre kritik yük aşağıdaki gibi,

$$P_{kr}=\frac{\pi^2 EI}{4L^2} \qquad (1.26)$$

şeklinde Denklem (1.26) elde edilir.

İki ucu mafsallı mesnet olan Şekil 1.5.b'deki çubukta sınır koşulları aşağıdaki gibi,

$$v(z)\big|_{Z=0}=0 \quad , \qquad v''(z)\big|_{Z=0}=0$$

$$v(z)\big|_{Z=L}=0 \quad , \qquad v''(z)\big|_{Z=L}=0$$

dir. Bu koşulların kullanılmasıyla, burkulma determinantı,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda^2 & 0 & 0 \\ \sin(\lambda L) & \cos(\lambda L) & 1 & 1 \\ -\lambda^2\sin(\lambda L) & -\lambda^2\cos(\lambda L) & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\lambda^4\sin(\lambda L)=0 \tag{1.27}$$

olur. Bunu sağlayacak olan $\lambda_n L=n\pi$, (n=0,1,2,…) kökleri özel ifadelerdir. $\lambda_n^2=P_n/EI$ olduğuna göre n=0 değeri en küçük kökü belirtir ve buna göre kritik yük aşağıdaki gibi,

$$P_{kr}=\frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{1.28}$$

şeklinde elde edilir.

Bir ucu ankastre diğer ucu mafsallı mesnet olan Şekil 1.5.c'deki çubukta sınır koşulları aşağıdaki gibi,

$$v(z)\big|_{Z=0}=0 \quad , \qquad v'(z)\big|_{Z=0}=0$$

$$v(z)\big|_{Z=L}=0 \quad , \qquad v''(z)\big|_{Z=L}=0$$

dır. Bu koşulların kullanılmasıyla, burkulma determinantı,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ \sin(\lambda L) & \cos(\lambda L) & 1 & 1 \\ -\lambda^2\sin(\lambda L) & -\lambda^2\cos(\lambda L) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\lambda^2}{L}[\sin(\lambda L)-\lambda L\cos(\lambda L)]=0 \tag{1.29}$$

olur.

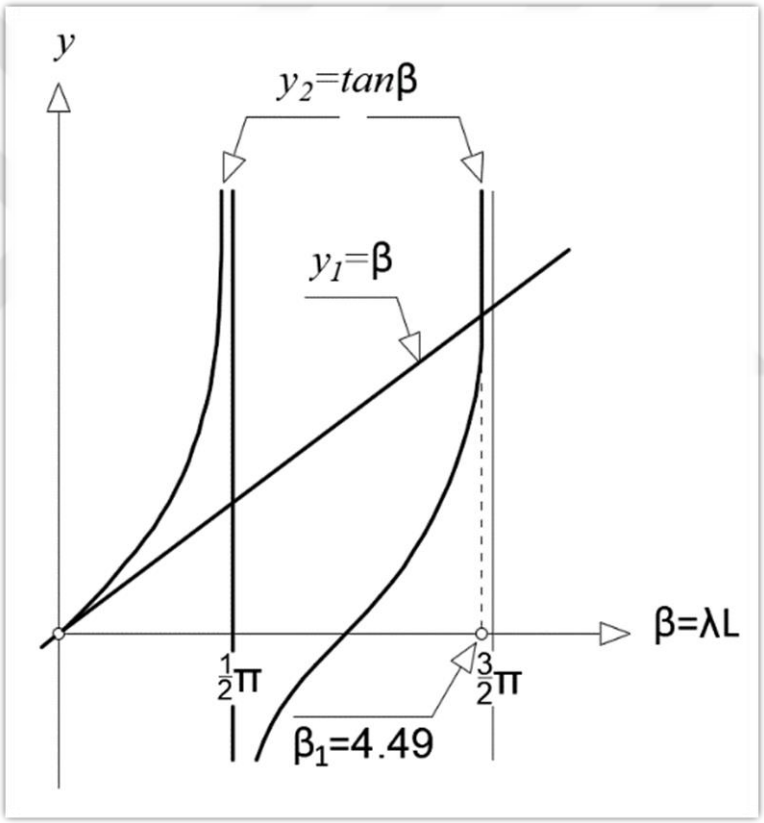
Bu transandant denklemi düzenlediğimizde,

$$\tan(\lambda L) = \lambda L \tag{1.30}$$

sonucu elde edilir. Denklemin sıfır olmayan en küçük kökünü grafik yoluyla buluruz.

$\beta=\lambda L$ olarak alırsak, $y_1=\beta$ ve $y_2=\tan\beta$ eğrilerinin ara kesitine bakılarak, Şekil.1.6.'da görüldüğü gibi $\beta_1=\lambda_1 L \cong 4{,}49$ şeklinde bulunur.

Aşağıda yer alan Şekil 1.6.'da denklemin sıfır olmayan en küçük kökünün tespitinde kullanılan grafiği görebilirsiniz,



Şekil.1.6. Denklemin sıfır olmayan en küçük kökünün tespitinde kullanılan grafik (Omurtag, 2018)

daha sonra $\lambda_1^2=P_{kr}/EI$ dan kritik yük aşağıdaki gibi,

$$P_{kr}=\lambda_1^2 EI=\frac{20{,}19EI}{L^2}=2{,}05\frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{1.31}$$

Denklem (1.31) şeklinde elde edilir.

İki ucu ankastre mesnet olan Şekil 1.5.d'deki çubukta sınır koşulları aşağıdaki gibi,

$v(z)\big|_{Z=0}=0$, $v'(z)\big|_{Z=0}=0$

$v(z)\big|_{Z=L}=0$, $v'(z)\big|_{Z=L}=0$

dır. Bu koşulların kullanılmasıyla, burkulma determinantı $\sin\left(\frac{1}{2}\lambda L\right)=0$ olur. Sıfır olmayan en küçük kökü olan $\frac{1}{2}\lambda L=\pi$ için ise burkulma yükü,

$$P_{kr}=4\frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{1.32}$$

şeklinde Denklem (1.32) elde edilir.

1.4. Burkulma Boyu

Şekil 1.5.'de gördüğümüz dört Euler haline ait burkulma yükü formüllerini gösteren Denklem (1.26), Denklem (1.28), Denklem (1.31) ve Denklem (1.32)'i tek bir formül halinde toplamak için iki ucu mafsallı çubuğa ait Denklem (1.28)'den yola çıkılarak, Euler kritik yükü denilen genel denklem,

$$P_{kr}=\frac{\pi^2 EI}{L_B^2} \tag{1.33}$$

Denklem (1.33) şeklinde yazılır.

Denklem (1.33)'de yer alan L_B burkulma boyu denilen bir büyüklüğü temsil eder. Şekil 1.5.'deki doğru eksenli çubukların mesnet koşullarına göre burkulma boyları aşağıda verilmiştir.

Bir uç ankastre diğer uç serbest $\rightarrow L_B=2L$: Denklem (1.26) için

İki uç da mafsallı $\rightarrow L_B=L$: Denklem (1.28) için

Bir uç ankastre diğer uç kayıcı mafsallı $\rightarrow L_B=0{,}7L$: Denklem (1.31) için

İki uçta ankastre $\rightarrow L_B=0{,}5L$: Denklem (1.32) için

1.5. Elastik Stabilitede Sınırlar

İncelediğimiz problemlerin elastik ve Hooke elemanı olduğu göz önüne alındığında bu kademeye kadar geliştirilen tüm formüller sınırlıdır. Kesit alanı A kabul edildiğinde kritik normal gerilme aşağıdaki gibi,

$$\sigma_{kr}=\frac{P_{kr}}{A} \tag{1.34}$$

olur. σ_{kr} ile orantılılık sınırını gösteren σ_H'nin karşılaştırılması ile burkulmada orantılılık sınırlarını belirlemiş oluruz.

1.6. Elastik Burkulma

Denklem (1.33), Denklem (1.34)'da yerine yerleştirildiğinde kritik gerilme $\sigma_{kr}=\pi^2 EI/(L_B^2 A)$ olur. Burada kesitin eylemsizlik yarıçapının tanımı olan $i_{min}^2=I_{min}/A$ yararlanarak, kritik normal gerilme $\sigma_{kr}=\pi^2 i_{min}^2 E/L_B^2$ olarak düzenlenir ve çubuk için narinlik tanımı olan,

$$\lambda=\frac{L_B}{i_{min}} \tag{1.35}$$

den faydalanılarak kritik normal gerilme için aşağıdaki,

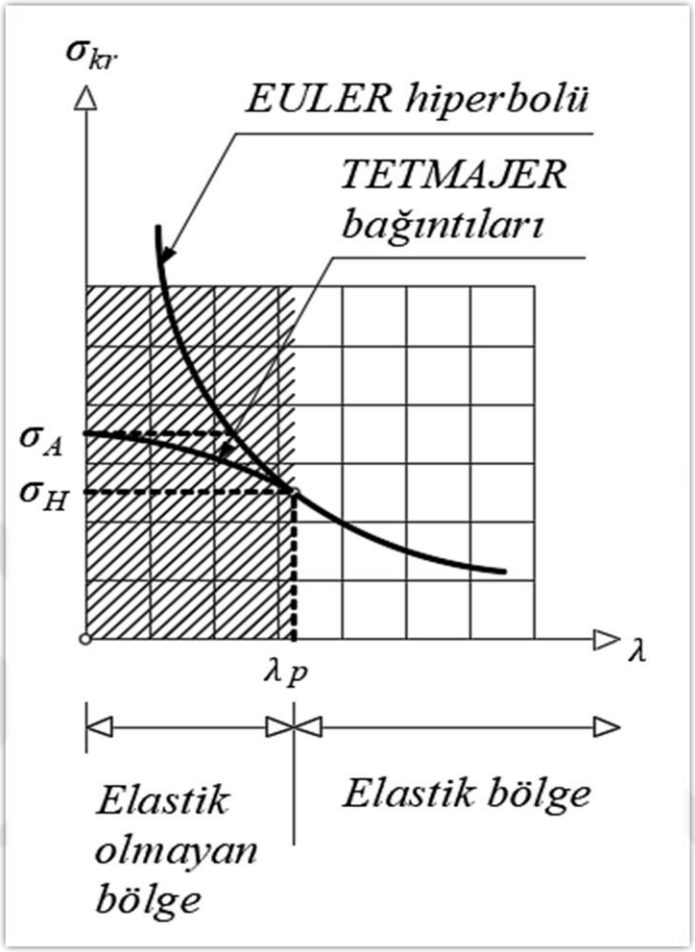
$$\sigma_{kr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \tag{1.36}$$

Denklem (1.36)'da elde edilir ve bu denklemdeki Euler formülünden yararlanılarak (σ_{kr},λ) grafiği malzemeye bağlı olarak Şekil 1.7.'de görüldüğü gibi çizilir. Görüldüğü üzere $\lambda<\lambda_p$ verileri için normal gerilme orantılılık sınırını geçer ($\sigma_{kr}>\sigma_H$). λ_p değerini elde etmek için Denklem (1.36)'da malzeme için bilinen bir değer olan σ_H yerleştirilir. Böylece Hooke yasalarının geçerli olduğu sınırda kalınacak ise $\lambda\geq\lambda_p$ olmalıdır. Buradan Euler bağıntısı olan,

$$\sigma_{kr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad , \quad (\lambda\geq\lambda_p) \tag{1.37}$$

şeklinde olmalıdır. Çubukta elastik ve plastik davranışın birbirinden ayrıldığı sınır değer λ_p ile gösterilmiştir.

Aşağıda yer alan Şekil 1.7.'de Euler hiperbolü grafiği görülmektedir,



Şekil 1.7. Euler hiperbolü grafiği (Omurtag, 2018)

2. DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ İLE İLGİLİ TEMEL BİLGİLER

İlk olarak Zhou (1986) tarafından ortaya konulan diferansiyel dönüşüm yöntemi (DDY), elektrik devre analizlerinde ortaya çıkan lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemlerini çözmek için kullanmıştır. Chen ve Ho (1996), Chen ve Liu (1998), Chen ve Ho (1999), Chen ve Chen (2004), Chen ve Ju (2004) DDY'ni pek çok farklı alanda uygulayarak pek çok farklı mühendislik problemi için kapalı formda analitik çözümler geliştirmiştir.

Fizik, matematik ve mühendislikte yaygın olarak karşımıza çıkmakta olan kısmi diferansiyel denklemler eğer doğrusal değillerse veya değişken katsayılı oldukları pek çok durumda analitik olarak çözümsüz kalmıştır. Bu tip problemlerin analitik formda çözümlerini bilmek oldukça önemlidir. Lineer değişken katsayılı, lineer olmayan, kısmi türevli veya adi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için diferansiyel dönüşüm yöntemi başlangıç değer çözüm problemlerinde, n boyutlu kısmi diferansiyel denklemlerde ve sürekli olmayan sınır koşullarına sahip problemlerde kullanılabilir. (Keskin, 2005, Özkan ve Keskin, 2005)

DDY'nin en önemli özelliği Laplace ve Fourier gibi diğer yöntemlerde denklemin mertebesiyle ilgili olarak karmaşık integraller ile karşılaşılmadan daha basit ve sade bir dönüşüm yardımıyla verilen adi veya kısmi diferansiyel denklemi cebirsel bir denkleme hızlı bir şekilde dönüştürüyor olmasıdır. (Güngör, 2013)

Son dönemde yaygın bir şekilde kullanılmakta olan analitik yöntemlerden biri olan DDY mühendislik, fizik, matematik, elektrik yayılım analizlerinde, nüfus artış modelleri gibi konularda kullanılmaktadır.

Bu bölümde adi türevli diferansiyel denklemlerin ve denklem sistemlerinin çözümü için bir boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu tanımlanacaktır.

2.1. Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Bir boyutlu diferansiyel dönüşüm yönteminin tanımında y(x) orijinal fonksiyon, Y(k) diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olsun,

$$Y(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}y(x)\right]_{x=x_0} \tag{2.1}$$

Y(k)' nın ters diferansiyel dönüşüm fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir,

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(x-x_0)^k Y(k) \tag{2.2}$$

Denklem (2.1) ve Denklem (2.2) denklemlerinden,

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^k}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}y(x)\right]_{x=x_0} \tag{2.3}$$

Denklem (2.3) elde edilir. x_0=0 değeri için;

$$Y(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}y(x)\right]_{x=0} \tag{2.4}$$

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}y(x)\right]_{x=0} \tag{2.5}$$

Denklem (2.4) ve Denklem (2.5) elde edilir. y(x) fonksiyonu için N. mertebe çözüm, $\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k Y(k)$ ifadesi artık terim olduğundan Denklem (2.6) olarak aşağıdaki gibi yazılır,

$$y(x)=\sum_{k=0}^{N}x^k Y(k) \tag{2.6}$$

görüldüğü üzere diferansiyel dönüşüm yöntemi Taylor seri açılımından elde edilir. (Özkan, 2005)

DDY için temel dönüşümler aşağıda yer alan Tablo 2.1.'de verilmiştir.

Tablo 2.1. DDY için temel dönüşümler

Orijinal Fonksiyon	Dönüşüm Fonksiyonu
$y(x)=g(x)\pm h(x)$	$Y[k]=G[k]\pm H[k]$
$y(x)=c.g(x)$	$Y[k]=c.G[k]$
$y(x)=g(x)h(x)$	$Y[k]=\sum_{l=0}^{k} G[l]H[k-l]$
$y(x)=\frac{d^n g(x)}{dx^n}$	$Y[k]=(k+1)\,(k+2)\ldots\,(k+n)G[k+n]$
$y(x)=x^n$	$Y[k]=\delta(k-n)=\begin{cases}1, & k=n\\ 0, & k\neq n\end{cases}$
$y(x)=e^{\lambda x}$	$Y[k]=\frac{\lambda^k}{k!}$

UYGULAMA 2.1: Konunun daha iyi anlaşılabilmesi için literatürden alınmış bir uygulama aşağıda çözülmüştür. (Güngör, 2013)

Diferansiyel dönüşüm yöntemini örnekle açıklamak için aşağıda verilen sınır değer problemini ele alalım,

$y''-3y'+2y=0 \quad ; \; y(0)=0 \, , \, y(1)=1$

Verilen sınır değer probleminin kapalı çözümü,

$$y(x)=\frac{1}{e(e-1)}\left[-e^{x}+e^{2x}\right] \tag{2.7}$$

biçimindedir. Her iki tarafın da diferansiyel dönüşümü yapıldığında,

$$D_T\{y''-3y'+2y\}=D_T\{0\} \quad \rightarrow \quad D_T\{y''\}-3D_T\{y'\}+2D_T\{y\}=D_T\{0\} \tag{2.8}$$

denklemi elde edilir. Buna göre,

$$D_T\{y(x)\}=Y(k) \tag{2.9}$$

$$D_T\{y'(x)\}=(k+1)Y(k+1) \tag{2.10}$$

ve

$$D_T\{y''(x)\}=(k+1)(k+2)Y(k+2) \tag{2.11}$$

olduğundan DDY yardımıyla,

$$(k+1)(k+2)Y(k+2)-3[(k+1)Y(k+1)]+2Y(k)=0 \tag{2.12}$$

yukarıdaki denklem elde edilir. Denklem (2.12) düzenlenirse,

$$Y(k+2)=\frac{3}{k+2}Y(k+1)-\frac{2}{(k+1)(k+2)}Y(k), \qquad k=0,1,2,\ldots \tag{2.13}$$

elde edilir. İlk aşamada Y(0) ve Y(1) değerleri gereklidir. Başlangıç koşulunun diferansiyel dönüşümü yardımı ile $Y(0)=0$ elde edilir. Y(1) değerini bulmak için ise y'(0) koşulu gereklidir. Bu koşulu bulmak için $Y(1)=\alpha$ diyelim. Bu değerler Denklem (2.13)'de yerine yazıldığında,

$$k=0 \quad \rightarrow \quad Y(2)=\frac{3}{2}Y(1)-\frac{2}{2}Y(0) \quad \rightarrow \quad Y(2)=\frac{3\alpha}{2!} \tag{2.14}$$

$$k=1 \quad \rightarrow \quad Y(3)=\frac{3}{3}Y(2)-\frac{2}{6}Y(1) \quad \rightarrow \quad Y(3)=\frac{7\alpha}{3!} \tag{2.15}$$

$$k=2 \quad \rightarrow \quad Y(4)=\frac{3}{4}Y(3)-\frac{2}{12}Y(2) \quad \rightarrow \quad Y(4)=\frac{15\alpha}{4!} \tag{2.16}$$

$$k=3 \quad \rightarrow \quad Y(5)=\frac{3}{5}Y(4)-\frac{2}{20}Y(3) \quad \rightarrow \quad Y(5)=\frac{31\alpha}{5!} \tag{2.17}$$

$$k=4 \quad \rightarrow \quad Y(6)=\frac{3}{6}Y(5)-\frac{2}{30}Y(4) \quad \rightarrow \quad Y(6)=\frac{63\alpha}{6!} \tag{2.18}$$

$$k=5 \quad \rightarrow \quad Y(7)=\frac{3}{7}Y(6)-\frac{2}{42}Y(5) \quad \rightarrow \quad Y(7)=\frac{127\alpha}{7!} \tag{2.19}$$

$$k=6 \quad \rightarrow \quad Y(8)=\frac{3}{8}Y(7)-\frac{2}{56}Y(6) \quad \rightarrow \quad Y(8)=\frac{255\alpha}{8!} \tag{2.20}$$

$$k=7 \quad \rightarrow \quad Y(9)=\frac{3}{9}Y(8)-\frac{2}{72}Y(7) \quad \rightarrow \quad Y(9)=\frac{511\alpha}{9!} \tag{2.21}$$

Şeklinde devam ettiğimizde ters diferansiyel dönüşümü yardımı ile Denklem (2.22) ve Denklem (2.23) aşağıdaki gibi,

$$y(x)=D_T^{-1}\{Y(k)\}=\sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k \tag{2.22}$$

$$y(x)=\alpha x+\frac{3\alpha}{2!}x^2+\frac{7\alpha}{3!}x^3+\frac{15\alpha}{4!}x^4+\frac{31\alpha}{5!}x^5+\frac{63\alpha}{6!}x^6+\frac{127\alpha}{7!}x^7+\ldots \tag{2.23}$$

elde edilir. Denklemde yer alan α değeri problemde verilen y(1)=1 koşulundan elde edilir ve ilk 4 terim için,

$$1=\alpha+\frac{3\alpha}{2!}+\frac{7\alpha}{3!}+\frac{15\alpha}{4!} \quad \rightarrow \quad \alpha=0{,}2330 \tag{2.24}$$

ilk 5 terim için,

$$1=\alpha+\frac{3\alpha}{2!}+\frac{7\alpha}{3!}+\frac{15\alpha}{4!}+\frac{31\alpha}{5!} \quad \rightarrow \quad \alpha=0{,}2197 \tag{2.25}$$

ilk 6 terim için,

$$1=\alpha+\frac{3\alpha}{2!}+\frac{7\alpha}{3!}+\frac{15\alpha}{4!}+\frac{31\alpha}{5!}+\frac{63\alpha}{6!} \quad \rightarrow \quad \alpha=0{,}2156 \tag{2.26}$$

ilk 7 terim için,

$$1=\alpha+\frac{3\alpha}{2!}+\frac{7\alpha}{3!}+\frac{15\alpha}{4!}+\frac{31\alpha}{5!}+\frac{63\alpha}{6!}+\frac{127\alpha}{7!} \quad \rightarrow \quad \alpha=0{,}2144 \tag{2.27}$$

ilk 8 terim için,

$$1=\alpha+\frac{3\alpha}{2!}+\frac{7\alpha}{3!}+\frac{15\alpha}{4!}+\frac{31\alpha}{5!}+\frac{63\alpha}{6!}+\frac{127\alpha}{7!}+\frac{255\alpha}{8!} \quad \rightarrow \quad \alpha=0{,}2141 \tag{2.28}$$

ilk 9 terim için,

$$1=\alpha+\frac{3\alpha}{2!}+\frac{7\alpha}{3!}+\frac{15\alpha}{4!}+\frac{31\alpha}{5!}+\frac{63\alpha}{6!}+\frac{127\alpha}{7!}+\frac{255\alpha}{8!}+\frac{511\alpha}{9!} \quad \rightarrow \quad \alpha=0{,}2141 \tag{2.29}$$

Elde edilen α değeri tekrarlamaya başladığından aradığımız α=0,2141 olarak bulunur. Bu değer bulunan y(x) çözümde yerine yazılırsa,

$$y(x)=0{,}2141\left[x+\frac{3}{2!}x^2+\frac{7}{3!}x^3+\frac{15}{4!}x^4+\frac{31}{5!}x^5+\frac{63}{6!}x^6+\frac{127}{7!}x^7+\ldots\right] \tag{2.30}$$

denklemi elde edilir. Denklem (2.30)'u Denklem (2.31) biçiminde düzenleriz,

$$y(x)=0{,}2141\left[-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)+\left(1+2x+\frac{4x^2}{2!}+\frac{8x^3}{3!}+\ldots\right)\right] \tag{2.31}$$

$$y(x)=0{,}2141[-e^x+e^{2x}] \tag{2.32}$$

dir. $\frac{1}{e(e-1)}=0{,}2141$ olduğunu göz önüne aldığımızda diferansiyel dönüşüm yöntemiyle elde edilen bu çözümün kapalı çözüme eşit olduğunu görürüz.

3. ELASTİK STABİLİTE PROBLEMİNİN DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ İLE FORMÜLASYONU

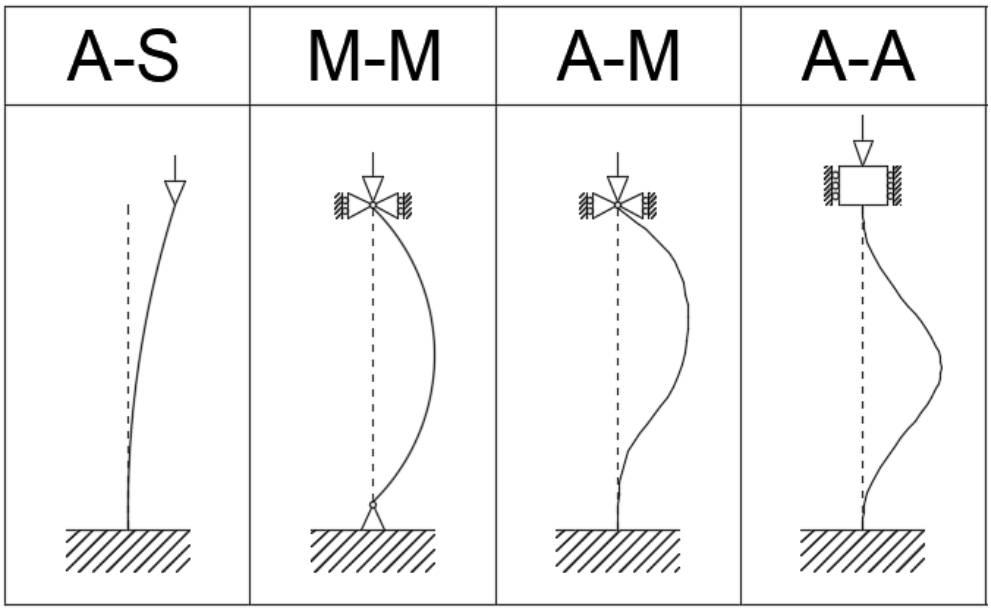
Bu bölümde uniform Euler kolonu ve eğilme rijitliği üslü değişken olan Euler kolonuna ait elastik stabilite probleminin analitik yaklaşık çözümü DDY ile elde edilecektir.

Aşağıda Şekil 3.1'de Euler kolonu için çeşitli uç durumları bulunmaktadır ve burada yer alan kısaltmalar,

A = Ankastre uç durumu,

S = Serbest uç durumu,

M = Mafsallı uç durumu,



Şekil 3.1. Klasik Euler kolonu için çeşitli uç durumlar

3.1. Uniform Euler Kolonu için Formülasyon

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right)+P\frac{d^2y}{dx^2}=0 \tag{3.1}$$

Uniform Euler kolonu için verilen Denklem (3.1)'den,

$$\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{P}{EI}\frac{d^2y}{dx^2}=0 \tag{3.2}$$

Denklem (3.2) elde edilir, buradan da Tablo 2.1.'de verilen DDY temel dönüşümlerini kullanırsak,

$$(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)Y(m+4)+\frac{P}{EI}(m+1)(m+2)Y(m+2)=0 \tag{3.3}$$

Denklemi elde edilir. Denklem (3.3)'ü düzenlersek,

$$Y(m+4)=-\frac{P}{EI}\ \frac{1}{(m+3)(m+4)}\ Y(m+2) \tag{3.4}$$

Denklem (3.4)'ü elde ederiz.

Problemin sınır koşulları x=0'daki ucu ankastre olan kolon için y[0]=0, y'[0]=0'dır. Bu sınır koşullarının diferansiyel dönüşümü yapılırsa, Y[0]=0, Y[1]=0 durumları elde edilir. Eşitlik Y(4)'den itibaren sonuç vereceğinden diğer iki sınır koşulu için Y[2]=A, Y[3]=B alınacaktır.

Problemin sınır koşulları x=0'daki ucu sabit mafsal olan kolon için y[0]=0, y''[0]=0 'dır. Bu sınır koşullarının diferansiyel dönüşümü yapılırsa, Y[0]=0, Y[2]=0 durumları elde edilir. Eşitlik Y(4)'den itibaren sonuç vereceğinden diğer iki sınır koşulu için Y[1]=A, Y[3]=B alınacaktır.

x=0'daki ucu ankastre olan kolonun Y[m+4] 'deki bazı sınır değerlerini elde etmek için m değerine 0,1,2,..,6 arasında olan değerleri sırasıyla verelim.

Denklem (3.4)'de m=0 verildiğinde Y[4] değeri için elde edilen denklem,

$$\frac{B\alpha}{2}+A\left(-\frac{\alpha^2}{12}-\frac{\beta}{12}\right) \tag{3.5}$$

Denklem (3.4)'de m=1 verildiğinde Y[5] değeri için elde edilen denklem,

$$B\left(\frac{3\alpha^2}{20}-\frac{\beta}{20}\right)+A\left(-\frac{\alpha^3}{30}-\frac{\alpha\beta}{20}\right) \tag{3.6}$$

Denklem (3.4)'de m=2 verildiğinde Y[6] değeri için elde edilen denklem,

$$B(\frac{\alpha^3}{30}-\frac{\alpha\beta}{20})+A(-\frac{\alpha^4}{120}-\frac{\alpha^2\beta}{72}+\frac{\beta^2}{360}) \tag{3.7}$$

Denklem (3.4)'de m=3 verildiğinde Y[7] değeri için elde edilen denklem,

$$B\left(\frac{\alpha^4}{168}-\frac{23\alpha^2\beta}{840}+\frac{\beta^2}{840}\right)+A\left(-\frac{\alpha^5}{630}-\frac{\alpha^3\beta}{840}+\frac{\alpha\beta^2}{315}\right) \tag{3.8}$$

Denklem (3.4)'de m=4 verildiğinde Y[8] değeri için elde edilen denklem,

$$B\left(\frac{\alpha^5}{1120}-\frac{3\alpha^3\beta}{280}+\frac{\alpha\beta^2}{560}\right)+A\left(-\frac{\alpha^6}{4032}+\frac{\alpha^4\beta}{1344}+\frac{19\alpha^2\beta^2}{10080}-\frac{\beta^3}{20160}\right) \tag{3.9}$$

Denklem (3.4)'de m=5 verildiğinde Y[9] değeri için elde edilen denklem,

$$B\left(\frac{\alpha^6}{8640}-\frac{67\alpha^4\beta}{20160}+\frac{43\alpha^2\beta^2}{30240}-\frac{\beta^3}{60480}\right)+A\left(-\frac{\alpha^7}{30240}+\frac{\alpha^5\beta}{2240}+\frac{17\alpha^3\beta^2}{22680}-\frac{\alpha\beta^3}{12096}\right) \tag{3.10}$$

Denklem (3.4)'de m=6 verildiğinde Y[10] değeri için elde edilen denklem,

$$B\left(\frac{\alpha^7}{75600}-\frac{29\alpha^5\beta}{33600}+\frac{\alpha^3\beta^2}{1260}-\frac{\alpha\beta^3}{30240}\right)$$

$$+A\left(-\frac{\alpha^8}{259200}+\frac{11\alpha^6\beta}{72576}+\frac{43\alpha^4\beta^2}{201600}-\frac{13\alpha^2\beta^3}{181440}+\frac{\beta^4}{1814400}\right) \tag{3.11}$$

şeklinde bulunur.

x=0'daki ucu sabit mafsallı olan kolonun Y[m+4] 'deki bazı sınır değerlerini elde etmek için m değerine 0,1,2,..,6 arasında olan değerleri verelim.

Denklem (3.4)'de m=0 verildiğinde Y[4] değeri için elde edilen denklem,

$$\frac{B\alpha}{2}+A\left(-\frac{\alpha^2}{12}-\frac{\beta}{12}\right) \tag{3.12}$$

Denklem (3.4)'de m=1 verildiğinde Y[5] değeri için elde edilen denklem,

$$B\left(\frac{3\alpha^2}{20}-\frac{\beta}{20}\right)+A\left(-\frac{\alpha^3}{30}-\frac{\alpha\beta}{20}\right) \tag{3.13}$$

Denklem (3.4)'de m=2 verildiğinde Y[6] değeri için elde edilen denklem,

$$B\left(\frac{\alpha^3}{30}-\frac{\alpha\beta}{20}\right)+A\left(-\frac{\alpha^4}{120}-\frac{\alpha^2\beta}{72}+\frac{\beta^2}{360}\right) \tag{3.14}$$

Denklem (3.4)'de m=3 verildiğinde Y[7] değeri için elde edilen denklem,

$$B\left(\frac{\alpha^4}{168}-\frac{23\alpha^2\beta}{840}+\frac{\beta^2}{840}\right)+A\left(-\frac{\alpha^5}{630}-\frac{\alpha^3\beta}{840}+\frac{\alpha\beta^2}{315}\right) \tag{3.15}$$

Denklem (3.4)'de m=4 verildiğinde Y[8] değeri için elde edilen denklem,

$$B\left(\frac{\alpha^5}{1120}-\frac{3\alpha^3\beta}{280}+\frac{\alpha\beta^2}{560}\right)+A\left(-\frac{\alpha^6}{4032}+\frac{\alpha^4\beta}{1344}+\frac{19\alpha^2\beta^2}{10080}-\frac{\beta^3}{20160}\right) \tag{3.16}$$

Denklem (3.4)'de m=5 verildiğinde Y[9] değeri için elde edilen denklem,

$$B\left(\frac{\alpha^6}{8640}-\frac{67\alpha^4\beta}{20160}+\frac{43\alpha^2\beta^2}{30240}-\frac{\beta^3}{60480}\right)+A\left(-\frac{\alpha^7}{30240}+\frac{\alpha^5\beta}{2240}+\frac{17\alpha^3\beta^2}{22680}-\frac{\alpha\beta^3}{12096}\right) \tag{3.17}$$

Denklem (3.4)'de m=6 verildiğinde Y[10] değeri için elde edilen denklem,

$$B\left(\frac{\alpha^7}{75600}-\frac{29\alpha^5\beta}{33600}+\frac{\alpha^3\beta^2}{1260}-\frac{\alpha\beta^3}{30240}\right)$$

$$+A\left(-\frac{\alpha^8}{259200}+\frac{11\alpha^6\beta}{72576}+\frac{43\alpha^4\beta^2}{201600}-\frac{13\alpha^2\beta^3}{181440}+\frac{\beta^4}{1814400}\right) \tag{3.18}$$

Denklem (3.18) şeklinde bulunur.

Aşağıda yer alan Tablo 3.1.'de uniform Euler kolonu için elde edilen burkulma yükü değerlerini bulabilirsiniz,

Tablo 3.1. Uniform Euler kolonu için elde edilen burkulma yükü değerleri

	A-S		M-M		A-M		A-A	
n	**1.MOD**	**2.MOD**	**1.MOD**	**2.MOD**	**1.MOD**	**2.MOD**	**1.MOD**	**2.MOD**
6	2,2762	5,47003	6		7,06496	30,3615	10,513	37,6684
8	2,4793	26,2436						
10	2,4670	13,1045	9,4780		15,5192	47,5659	23,682	54,6233
12	2,4674	26,6746	9,9143	24,6329				
14	2,4674	21,2013	9,8668		19,9338	76,9338	35,6131	84,0628
16	2,4674	22,323	9,8697	35,7407	20,216	46,2728	41,1233	50,3881
18	2,4674	22,1974	9,8696	41,1657	20,189	108,11	39,3446	116,229
20	2,4674	22,2072	9,8696	39,3448	20,1908	57,3167	39,4916	70,3559
25	2,4674	22,2066	9,8696	39,4785	20,1907	59,6411	39,4785	80,2027
30	2,4674	22,2066	9,8696	39,4784	20,1907	59,6795	39,4784	80,7641

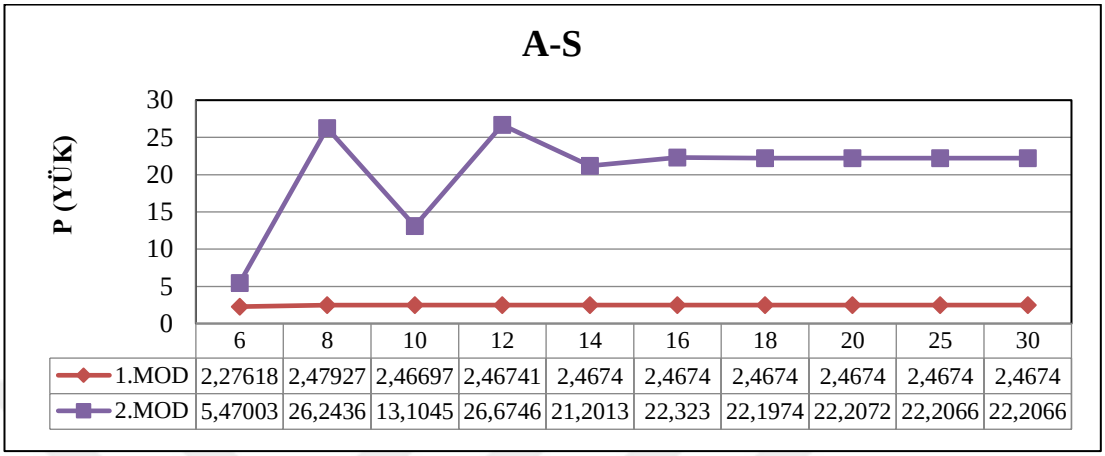
Tablo 3.1.'de yer alan boşluklarda burkulma yükü karmaşık sayı çıktığından fiziksel bir anlamı olmadığı için tabloya işlenmemiştir.

Tablo 3.2. Uniform Euler kolonu için elde edilen kritik burkulma değerlerinin analitik çözümle karşılaştırılması (Wang et al., 2005).

	A-S	**M-M**	**A-M**	**A-A**
Wang et al. (2005)	2,467	9,87	20,19	39,48
Bu çalışma (DDY – 30 terim)	2,4674	9,8696	20,1907	39,4784

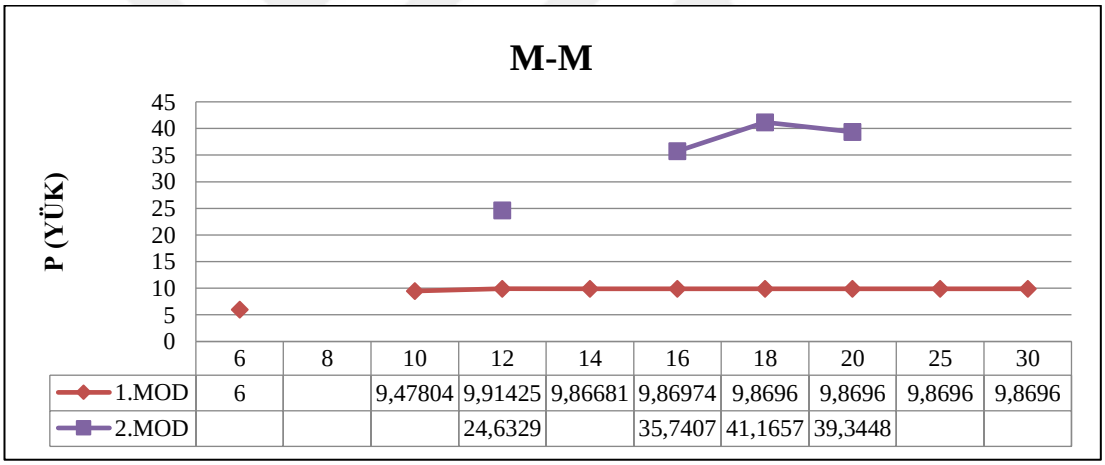
Uniform Euler kolonu için DDY yöntemi yardımıyla elde ettiğimiz burkulma yükü değerlerini analitik çözümler ile karşılaştırdığımızda, 1.mod durumunda mesnet durumu A-S için terim sayısını 10 aldığımızda Tablo 3.2.'de bulunan analitik burkulma yükü değerini yakalamış oluruz, 1.mod durumunda mesnet durumu M-M için terim sayısını 14 aldığımızda Tablo 3.2.'de bulunan analitik burkulma yükü değerini yakalamış oluruz, 1.mod durumunda mesnet durumu A-M için terim sayısını 18 aldığımızda Tablo 3.2.'de bulunan analitik burkulma yükü değerini yakalamış oluruz, 1.mod durumunda mesnet durumu A-A için terim sayısını 25 aldığımızda Tablo 3.3.'de bulunan analitik burkulma yükü değerini yakalamış oluruz. Diferansiyel dönüşüm yöntemi ile elde edilen burkulma yükü değerlerinin sonucunun var olan analitik çözümler ile tutarlı olduğu ve bu çözüm yönteminin bu tarz problemlere uygulanabilir olduğu gözlemlenmiştir.

Aşağıda farklı mesnetlenme koşullarına göre elde edilen uniform Euler kolonuna ait burkulma yüklerinin çözümde yer alan terim sayılarının sayısı ile yakınsamalarını betimleyen grafikler yer almaktadır,



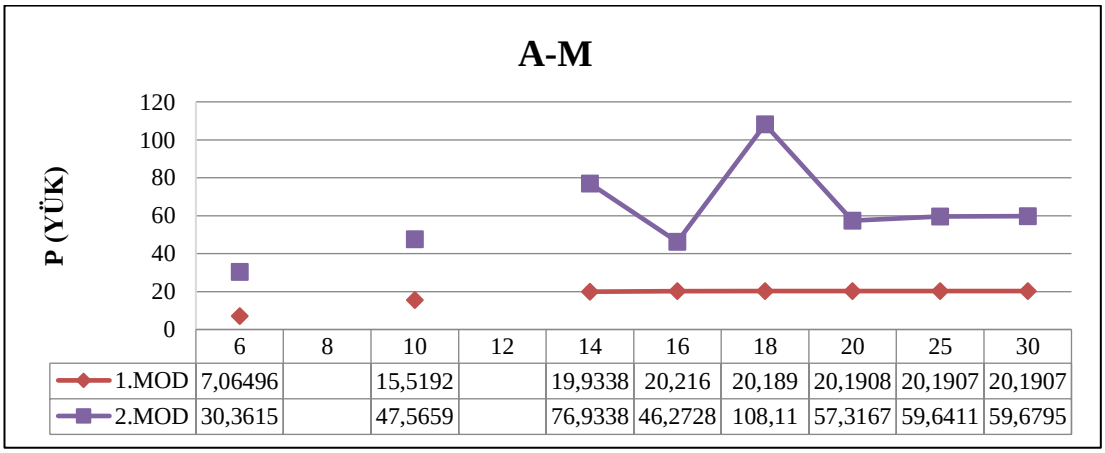
	6	8	10	12	14	16	18	20	25	30
1.MOD	2,27618	2,47927	2,46697	2,46741	2,4674	2,4674	2,4674	2,4674	2,4674	2,4674
2.MOD	5,47003	26,2436	13,1045	26,6746	21,2013	22,323	22,1974	22,2072	22,2066	22,2066

Şekil 3.2. A-S kirişi için ilk iki modun yakınsaması



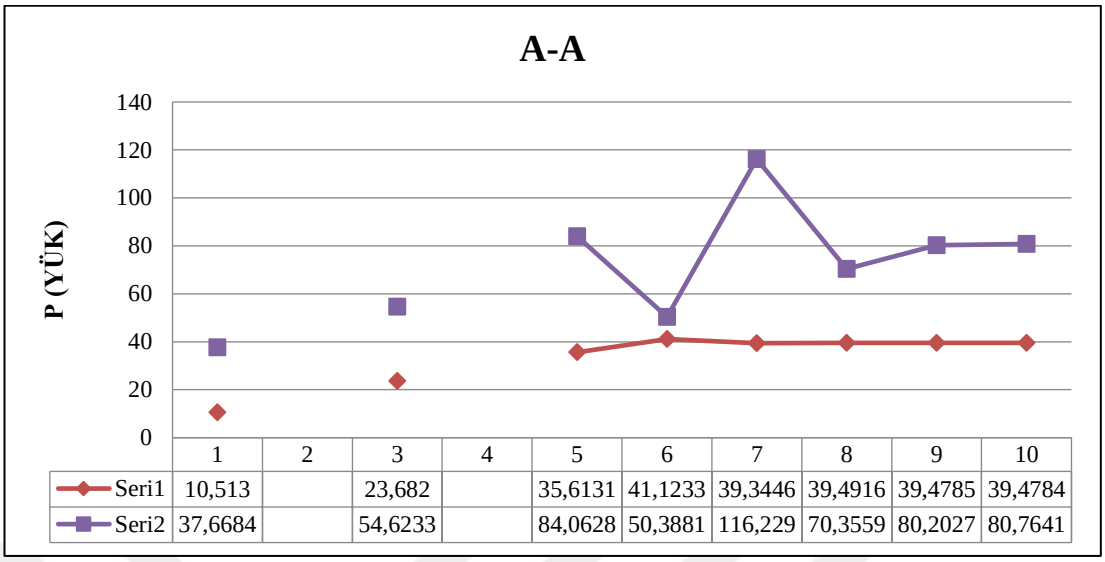
	6	8	10	12	14	16	18	20	25	30
1.MOD	6		9,47804	9,91425	9,86681	9,86974	9,8696	9,8696	9,8696	9,8696
2.MOD				24,6329		35,7407	41,1657	39,3448		

Şekil 3.3. M-M kirişi için ilk iki modun yakınsaması



	6	8	10	12	14	16	18	20	25	30
1.MOD	7,06496		15,5192		19,9338	20,216	20,189	20,1908	20,1907	20,1907
2.MOD	30,3615		47,5659		76,9338	46,2728	108,11	57,3167	59,6411	59,6795

Şekil 3.4. A-M kirişi için ilk iki modun yakınsaması



Şekil 3.5. A-A kirişi için ilk iki modun yakınsaması

3.2. Eğilme Rijitliği Üslü Değişken Olan Euler Kolonu için Formülasyon

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right)+P\frac{d^2y}{dx^2}=0 \tag{3.19}$$

Eğilme rijitliği üslü değişken olan Euler kolonu için Denklem (3.19)'dan türev içeren terimin açılmasıyla,

$$EI(x)\frac{d^4y}{dx^4}+2\frac{dEI(x)}{dx}\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2EI(x)}{dx^2}\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{d^2y}{dx^2}=0 \tag{3.20}$$

Denklem (3.20) elde edilir. Bu denklemi yeniden düzenlersek,

$$\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{2}{EI(x)}\frac{dEI(x)}{dx}\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{1}{EI(x)}\frac{d^2EI(x)}{dx^2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{P}{EI(x)}\frac{d^2y}{dx^2}=0 \tag{3.21}$$

denklemi elde edilir. Eğilme rijitliği üslü değiştiğinden, varsayılan $EI(x)=EI_0e^{-\alpha x}$ ifadesi sırasıyla aşağıda Denklem (3.22) ve (3.23)'de yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{EI(x)}\frac{dEI(x)}{dx}=-\alpha \tag{3.22}$$

$$\frac{1}{EI(x)}\frac{d^2EI(x)}{dx^2}=\alpha^2 \tag{3.23}$$

elde edilir ve Denklem (3.22-3.23), Denklem (3.21)'de yazılırsa problemi yöneten denklem aşağıdaki formu alır,

$$\frac{d^4y}{dx^4}-2\alpha\frac{d^3y}{dx^3}+\left(\frac{P}{EI_0}e^{\alpha x}+\alpha^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}=0 \tag{3.24}$$

Tablo 2.1.'de verilen DDY temel dönüşümlerini kullanırsak, Denklem (3.24)'ün DDY uygulanmış hali,

$$(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)Y(m+4)-2a(m+1)(m+2)(m+3)Y(m+3)$$
$$+\sum_{r=0}^{m}\left[\alpha^2\delta(r)+\frac{P}{EI_0}\frac{\alpha^r}{r!}\right](m-r+1)(m-r+2)Y(m-r+2)=0 \tag{3.25}$$

bu denklemi düzenlersek,

$$Y[m+4]=\frac{2\alpha}{m+4}Y[m+3]-\frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}$$
$$\sum_{r=0}^{m}\left(\left(\alpha^2\delta[r]+\beta\frac{\alpha^r}{r!}\right)(m-r+1)(m-r+2)Y[m-r+2]\right) \tag{3.26}$$

bağıntısı elde edilir. Burada $\beta=P/EI_0$ olarak alınmıştır.

Problemin sınır koşulları uniform kolonda olduğu gibi x=0'daki ucu ankastre olan kolon için sınır koşulları y[0]=0, y'[0]=0'dır. Bu sınır koşullarının diferansiyel dönüşümü yapılırsa, Y[0]=0, Y[1]=0 dönüştürülmüş sınır koşulları elde edilir. Eşitlik Y(4)'den itibaren sonuç vereceğinden diğer iki sınır koşulu için daha önce olduğu gibi Y[2]=A, Y[3]=B alınacaktır.

Problemin sınır koşulları uniform kolonda olduğu gibi x=0'daki ucu sabit mafsal olan kolon için sınır koşulları y[0]=0, y''[0]=0'dır. Bu sınır koşullarının diferansiyel dönüşümü yapılırsa, Y[0]=0, Y[2]=0 dönüştürülmüş sınır koşulları elde edilir. Eşitlik Y(4)'den itibaren sonuç vereceğinden diğer iki sınır koşulu için daha önce olduğu gibi Y[1]=A, Y[3]=B alınacaktır.

y(x) için N. mertebe çözüm aşağıdaki gibi elde edilir,

$$y[x]=\sum_{m=0}^{N} Y[m]x^m \tag{3.27}$$

Denklem (3.26)'de m=0 verildiğinde Y[4] değeri için elde edilen denklem,

$$\frac{B\alpha}{2}-\frac{1}{12}A(\alpha^2+\beta) \tag{3.28}$$

Denklem (3.26)'de m=1 verildiğinde Y[5] değeri için elde edilen denklem,

$$B\left(\frac{3\alpha^2}{20}-\frac{\beta}{20}\right)+A\left(-\frac{\alpha^3}{30}-\frac{\alpha\beta}{20}\right) \tag{3.29}$$

Denklem (3.26)'de m=2 verildiğinde Y[6] değeri için elde edilen denklem,

$$B\left(\frac{\alpha^3}{30}-\frac{\alpha\beta}{20}\right)+A\left(-\frac{\alpha^4}{120}-\frac{\alpha^2\beta}{72}+\frac{\beta^2}{360}\right) \tag{3.30}$$

Denklem (3.26)'de m=3 verildiğinde Y[7] değeri için elde edilen denklem,

$$B\left(\frac{\alpha^4}{168}-\frac{23\alpha^2\beta}{840}+\frac{\beta^2}{840}\right)+A\left(-\frac{\alpha^5}{630}-\frac{\alpha^3\beta}{840}+\frac{\alpha\beta^2}{315}\right) \tag{3.31}$$

Denklem (3.26)'de m=4 verildiğinde Y[8] değeri için elde edilen denklem,

$$B\left(\frac{\alpha^5}{1120}-\frac{3\alpha^3\beta}{280}+\frac{\alpha\beta^2}{560}\right)+A\left(-\frac{\alpha^6}{4032}+\frac{\alpha^4\beta}{1344}+\frac{19\alpha^2\beta^2}{10080}-\frac{\beta^3}{20160}\right) \tag{3.32}$$

Denklem (3.26)'de m=5 verildiğinde Y[9] değeri için elde edilen denklem,

$$B\left(\frac{\alpha^6}{8640}-\frac{67\alpha^4\beta}{20160}+\frac{43\alpha^2\beta^2}{30240}-\frac{\beta^3}{60480}\right)+A\left(-\frac{\alpha^7}{30240}+\frac{\alpha^5\beta}{2240}+\frac{17\alpha^3\beta^2}{22680}-\frac{\alpha\beta^3}{12096}\right) \tag{3.33}$$

Denklem (3.26)'de m=6 verildiğinde Y[10] değeri için elde edilen denklem,

$$B\left(\frac{\alpha^7}{75600}-\frac{29\alpha^5\beta}{33600}+\frac{\alpha^3\beta^2}{1260}-\frac{\alpha\beta^3}{30240}\right)$$

$$+A\left(-\frac{\alpha^8}{259200}+\frac{11\alpha^6\beta}{72576}+\frac{43\alpha^4\beta^2}{201600}-\frac{13\alpha^2\beta^3}{181440}+\frac{\beta^4}{1814400}\right) \tag{3.34}$$

şeklinde elde edilirler.

Benzer şekilde x=0'daki ucu sabit mafsal olan kolon için Denklem (3.26)'de m=0 verildiğinde Y[4] değeri için elde edilen denklem,

$$\frac{B\alpha}{2} \tag{3.35}$$

Denklem (3.26)'de m=1 verildiğinde Y[5] değeri için elde edilen denklem,

$$B\left(\frac{3\alpha^2}{20}-\frac{\beta}{20}\right) \tag{3.36}$$

Denklem (3.26)'de m=2 verildiğinde Y[6] değeri için elde edilen denklem,

$$B\left(\frac{\alpha^3}{30}-\frac{\alpha\beta}{20}\right) \tag{3.37}$$

Denklem (3.26)'de m=3 verildiğinde Y[7] değeri için elde edilen denklem,

$$B\left(\frac{\alpha^4}{168}-\frac{23\alpha^2\beta}{840}+\frac{\beta^2}{840}\right) \tag{3.38}$$

Denklem (3.26)'de m=4 verildiğinde Y[8] değeri için elde edilen denklem,

$$B\left(\frac{\alpha^5}{1120}-\frac{3\alpha^3\beta}{280}+\frac{\alpha\beta^2}{560}\right) \tag{3.39}$$

Denklem (3.26)'de m=5 verildiğinde Y[9] değeri için elde edilen denklem,

$$B\left(\frac{\alpha^6}{8640}-\frac{67\alpha^4\beta}{20160}+\frac{43\alpha^2\beta^2}{30240}-\frac{\beta^3}{60480}\right) \tag{3.40}$$

Denklem (3.26)'de m=6 verildiğinde Y[10] değeri için elde edilen denklem,

$$B\left(\frac{\alpha^7}{75600}-\frac{29\alpha^5\beta}{33600}+\frac{\alpha^3\beta^2}{1260}-\frac{\alpha\beta^3}{30240}\right) \tag{3.41}$$

şeklinde elde edilirler.

UYGULAMA 3.1: x=0'daki ucu ankastre olan kolonun N=6 değeri için denklem düzenlenirse,

$$y[x]=\sum_{m=0}^{6} Y[m]x^m \tag{3.42}$$

$$Ax^2+Bx^3+x^4\left(\frac{B\alpha}{2}-\frac{1}{12}A(\alpha^2+\beta)\right)+x^5\left(\frac{2}{5}\alpha\left(\frac{B\alpha}{2}-\frac{1}{12}A(\alpha^2+\beta)\right)+\frac{1}{120}(-2A\alpha\beta-6B(\alpha^2+\beta))\right)$$

$$+x^6\left(\frac{1}{360}(-6B\alpha\beta-A\alpha^2\beta-12(\alpha^2+\beta)\left(\frac{B\alpha}{2}-\frac{1}{12}A(\alpha^2+\beta)\right)\right)$$

$$+\frac{1}{3}\alpha\left(\frac{2}{5}\alpha\left(\frac{B\alpha}{2}-\frac{1}{12}A(\alpha^2+\beta)\right)+\frac{1}{120}(-2A\alpha\beta-6B(\alpha^2+\beta))\right)\right) \tag{3.43}$$

denklem düzenlenirse,

$$B\left(x^3+\frac{x^4\alpha}{2}+\frac{3x^5\alpha^2}{20}+\frac{x^6\alpha^3}{30}-\frac{x^5\beta}{20}-\frac{1}{20}x^6\alpha\beta\right)$$

$$+A\left(x^2-\frac{x^4\alpha^2}{12}-\frac{x^5\alpha^3}{30}-\frac{x^6\alpha^4}{120}-\frac{x^4\beta}{12}-\frac{1}{20}x^5\alpha\beta-\frac{1}{72}x^6\alpha^2\beta+\frac{x^6\beta^2}{360}\right) \tag{3.44}$$

denklemi elde edilir.

Boyutsuz formda ele alınan problem için boyutsuz uzunluk 1 olacağından diğer uçtaki sınır koşulları için x değerine 1 verilirse denklem aşağıdaki gibi olur,

$$B\left(1+\frac{\alpha}{2}+\frac{3\alpha^2}{20}+\frac{\alpha^3}{30}-\frac{\beta}{20}-\frac{\alpha\beta}{20}\right)+A\left(1-\frac{\alpha^2}{12}-\frac{\alpha^3}{30}-\frac{\alpha^4}{120}-\frac{\beta}{12}-\frac{\alpha\beta}{20}-\frac{\alpha^2\beta}{72}+\frac{\beta^2}{360}\right) \tag{3.45}$$

Bu koşul diğer uçta yer değiştirmenin sıfır olması koşuludur. Eğilme momentinin de sıfır olma koşulu için Denklem (3.44)'ün 2 kere türevi alındığında ve x yerine 1 değeri konulduğunda,

$$B\left(6+6\alpha+3\alpha^2+\alpha^3-\beta-\frac{3\alpha\beta}{2}\right)+A\left(2-\alpha^2-\frac{2\alpha^3}{3}-\frac{\alpha^4}{4}-\beta-\alpha\beta-\frac{5\alpha^2\beta}{12}+\frac{\beta^2}{12}\right) \tag{3.46}$$

denklemi elde edilir. Denklem (3.45-3.46) matris formda yazılacak olursa,

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{\alpha}{2}+\frac{3\alpha^2}{20}+\frac{\alpha^3}{30}-\frac{\beta}{20}-\frac{\alpha\beta}{20} & 1-\frac{\alpha^2}{12}-\frac{\alpha^3}{30}-\frac{\alpha^4}{120}-\frac{\beta}{12}-\frac{\alpha\beta}{20}-\frac{\alpha^2\beta}{72}+\frac{\beta^2}{360} \\ 6+6\alpha+3\alpha^2+\alpha^3-\beta-\frac{3\alpha\beta}{2} & 2-\alpha^2-\frac{2\alpha^3}{3}-\frac{\alpha^4}{4}-\beta-\alpha\beta-\frac{5\alpha^2\beta}{12}+\frac{\beta^2}{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.47}$$

bu denklemin trivial çözümü A=B=0 çözümüdür. Ancak bu çözüm 2. bölümde açıklanan 1 numaralı denge durumuna ait çözüm olup, aradığımız trivial olmayan çözüm ancak katsayı matrisinin determinantının alınarak sıfıra eşitlenmesi ile elde edilecektir. Denklem (3.47)'den elde edilecek olan çözüm 6. mertebeden çözümdür.

UYGULAMA 3.2: x=0'daki ucu sabit mafsal olan kolonun N=6 değeri için denklem düzenlenirse,

$$y[x]=\sum_{m=0}^{6} Y[m]x^m \tag{3.48}$$

$$Ax+Bx^3+\frac{1}{2}Bx^4\alpha+x^5\left(\frac{B\alpha^2}{5}-\frac{1}{20}B(\alpha^2+\beta)\right)$$

$$+x^6\left(\frac{1}{3}\alpha\left(\frac{B\alpha^2}{5}-\frac{1}{20}B(\alpha^2+\beta)\right)+\frac{1}{360}\left(-6B\alpha\beta-6B\alpha(\alpha^2+\beta)\right)\right) \tag{3.49}$$

Denklem düzenlenirse,

$$Ax+B\left(x^3+\frac{x^4\alpha}{2}+\frac{3x^5\alpha^2}{20}+\frac{x^6\alpha^3}{30}-\frac{x^5\beta}{20}-\frac{1}{20}x^6\alpha\beta\right) \tag{3.50}$$

denklemi elde edilir.

Tıpkı bir önceki uygulamada olduğu gibi x değerine 1 verilirse, diğer uçtaki yer değiştirme için denklem aşağıdaki gibi olur,

$$A+B\left(1+\frac{\alpha}{2}+\frac{3\alpha^2}{20}+\frac{\alpha^3}{30}-\frac{\beta}{20}-\frac{\alpha\beta}{20}\right) \tag{3.51}$$

Denklem (3.50)'nin 2 kere türevi alındığında ise diğer uçtaki eğilme momentinin sıfır olması ile ilgili koşul için,

$$B\left(6+6\alpha+3\alpha^2+\alpha^3-\beta-\frac{3\alpha\beta}{2}\right) \tag{3.52}$$

denklemi elde edilir. Bu sefer de Denklem (3.51-3.52) matris formda yazılacak olursa, trivial olmayan çözüm aşağıdaki denkleme ait katsayı matrisinin determinantının sıfıra eşitlenmesiyle elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+\frac{\alpha}{2}+\frac{3\alpha^2}{20}+\frac{\alpha^3}{30}-\frac{\beta}{20}-\frac{\alpha\beta}{20} \\ 0 & 6+6\alpha+3\alpha^2+\alpha^3-\beta-\frac{3\alpha\beta}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.53}$$

Denklem (3.47) ve Denklem (3.53) ile elde edilecek çözümler aşağıda Tablo 3.3.'de n=6 için verilen sütunda yer almaktadır.

Tablo 3.3. Eğilme rijitliği üslü değişken olan Euler kolonu için elde edilen burkulma yükü değerleri

		A-S		**M-M**		**A-M**		**A-A**	
n	**αL**	**1.MOD**	**2.MOD**	**1.MOD**	**2.MOD**	**1.MOD**	**2.MOD**	**1.MOD**	**2.MOD**
6	0,1	2,56833	4,76785	5,76609		7,56819	28,0871	11,1759	35,0466
	0,5	17,5387		5,64286					
	1,0	2,05664		6,4					
	1,5	1,30363		7,73077					
	2,0	0,846677		9,5					
8	0,1	2,36177	21,9471						
	0,5	2,12449	8,26404	7,00659	14,1184	9,09507	31,1267	14,399	35,9592
	1,0	2,25909	4,53537	4,57356	23,7598	7,32751	26,3535	10,6248	32,5562
	1,5	2,03649	5,49046	3,76548	35,547	9,79768	15,3611	11,9231	21,9505
	2,0	1,36787		3,47962	50,1204				
10	0,1	2,39699	15,491	9,08477		17,8937	37,5916	29,4839	44,2664
	0,5	2,09729	32,6313	8,19094					
	1,0	1,79761	8,37005	5,72097	11,2669	8,89999	20,4197		
	1,5	1,71925	4,1042	3,7071	12,5101	5,75206	21,276	9,02257	24,8488
	2,0	1,88749	2,52817	2,6917	14,8837	4,97149	16,2253	7,09902	20,3361

Tablo 3.3. (Devam) Eğilme rijitliği üslü değişken olan Euler kolonu için elde edilen burkulma yükü değerleri

		A-S		M-M		A-M		A-A	
n	**αL**	**1.MOD**	**2.MOD**	**1.MOD**	**2.MOD**	**1.MOD**	**2.MOD**	**1.MOD**	**2.MOD**
12	0,1	2,3944	19,0009	9,40944	24,2426	18,6337	42,8383	33,4077	46,21
	0,5	2,1122	15,9769	7,60513	50,0183	15,2314	54,6788	24,108	61,6757
	1,0	1,77035	28,8438	6,02274	130,647				
	1,5	1,48676	7,58466	4,3883	9,3469	7,76722	13,5137		
	2,0	1,33986	3,51899	2,9085	8,2945	4,57684	15,3553	7,70848	17,0374
14	0,1	2,39448	51,6169	9,38509		19,4321	37,7283		
	0,5	2,11223	15,9342	7,62898	24,811	15,2833	35,5306	29,7411	36,3977
	1,0	1,78065	36,9604	5,83678	37,0033	12,399	48,2806	20,7554	53,503
	1,5	1,46992	23,1355	4,4923	67,8777				
	2,0	1,20798	6,59044	3,2924	7,4999	6,4551	9,3198		
16	0,1	2,39448	20,9352	9,38568	34,9197	19,1708	64,9824	36,395	72,0986
	0,5	2,11213	17,9271	7,63513	153,405	15,7071	35,8211	33,9881	42,6761
	1,0	1,78221	12,4418	5,82087	21,0577	11,7569	33,0425	21,5528	36,0479
	1,5	1,47802	30,4439	4,40401	29,6968	9,60457	39,581	16,6511	43,451
	2,0	1,19933	17,8077	3,3285	45,5685			23,2255	32,0903
18	0,1	2,39448	21,1938	9,38571	38,1158	19,2047	50,2815	37,8123	60,6841
	0,5	2,11213	17,426	7,63452	31,0683	15,6418	74,0511	30,3162	76,2491
	1,0	1,78213	13,3677	5,82597	22,1972	11,9636	28,1633	24,6004	31,4207
	1,5	1,48031	9,77989	4,3855	17,0077	8,98344	28,183	16,3587	30,8265
	2,0	1,2065	23,3954	3,278	23,6637	7,31362	31,1715	12,9456	34,1328
20	0,1	2,39448	21,1655	9,38571	37,5169	19,2016	115,128	37,5155	121,436
	0,5	2,11213	17,4019	7,63449	30,425	15,6388	44,1275	30,5924	54,1155
	1,0	1,7821	13,6225	5,82664	23,9996	11,9984	77,501	23,6503	82,4181
	1,5	1,48039	10,0568	4,3873	16,5532	9,04367	22,5743	17,921	25,5124
	2,0	1,20917	7,66789	3,2624	13,4354	6,79423	23,2241	12,3339	25,2248

Tablo 3.3. (Devam) Eğilme rijitliği üslü değişken olan Euler kolonu için elde edilen burkulma yükü değerleri

		A-S		M-M		A-M		A-A	
n	**αL**	**1.MOD**	**2.MOD**	**1.MOD**	**2.MOD**	**1.MOD**	**2.MOD**	**1.MOD**	**2.MOD**
25	0,1	2,39448	21,1673	9,38571	37,5445	19,2018	56,7575	37,5458	76,6506
	0,5	2,11213	17,4117	7,63449	30,574	15,6399	46,2428	30,598	62,2272
	1	1,7821	13,5332	5,82655	23,4004	11,9883	35,1308	23,4903	46,8039
	1,5	1,48032	10,4532	4,38852	17,825	9,09965	29,4576	17,8545	40,0962
	2	1,20934	7,97687	3,2635	13,2047	6,83845	18,46	13,6183	54,159

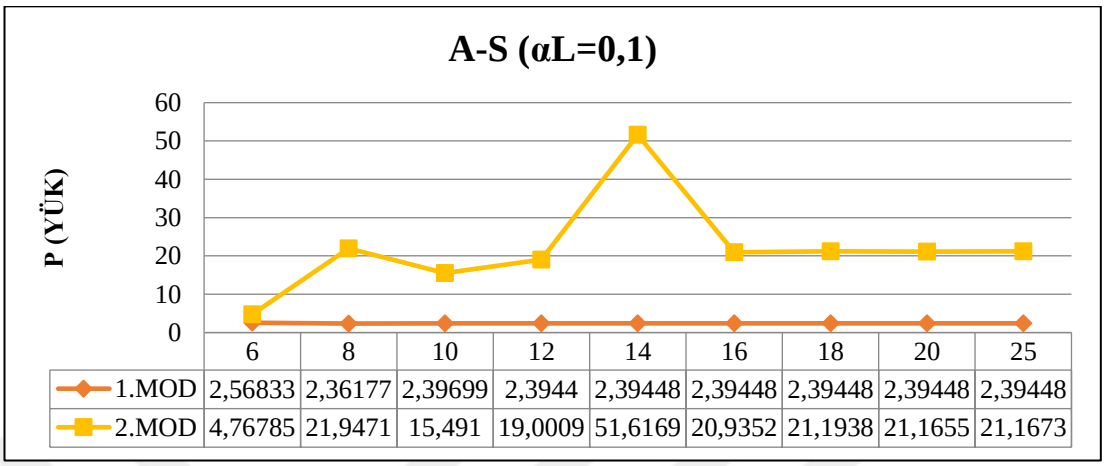
Tablo 3.3.'de yer alan boşluklarda burkulma yükü değeri karmaşık sayı çıktığından tabloya işlenmemiştir.

Tablo 3.4. Eğilme rijitliği üslü değişken olan Euler kolonu için elde edilen kritik burkulma değerlerinin analitik çözümler (Wang et al., 2005) ile karşılaştırılması

	A-S		M-M		A-M		A-A	
αL	**Wang et al. (2005)**	**Bu Çalışma (DDY)**	**Wang et al. (2005)**	**Bu Çalışma (DDY)**	**Wang et al. (2005)**	**Bu Çalışma (DDY)**	**Wang et al. (2005)**	**Bu Çalışma (DDY)**
0,1	2,394	2,39448	9,38	9,38571	19,2	19,20180	37,55	37,5458
0,5	2,11	2,11213	7,634	7,63449	15,64	15,63990	30,6	30,5980
1	1,782	1,78210	5,827	5,82655	11,99	11,98830	23,49	23,4903
1,5	1,48	1,48032	4,389	4,38852	9,098	9,09965	17,86	17,8545
2	1,209	1,20934	3,264	3,26350	6,839	6,83845	13,46	13,6183

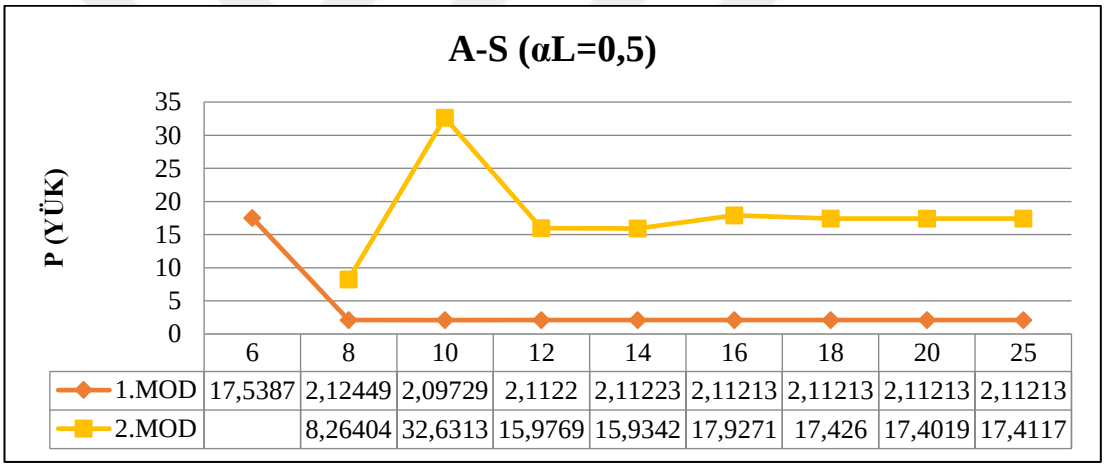
Eğilme rijitliği üslü değişken olan Euler kolonu için DDY yardımıyla elde ettiğimiz Tablo 3.3.'de yer alan burkulma yükü değerlerini αL=2 için dikkate alacak olursak, 1.modda mesnet durumu A-S için terim sayısını 20 aldığımızda Tablo 3.4.'de bulunan burkulma değerini yakalamış oluruz, 1.modda mesnet durumu M-M için terim sayısını 25 aldığımızda Tablo 3.4.'de bulunan burkulma değerini yakalamış oluruz. 1.modda mesnet durumu A-M için ve mesnet durumu A-A için ise 25 terimin yeterli olmadığı ve terim sayısını arttırmak gerektiği gözlemlenmiştir. Diferansiyel dönüşüm yöntemi ile elde edilen burkulma değerlerinin analitik çözüm ile uyumlu olduğu ve DDY'nin stabilite problemlerine başarıyla uygulanabileceği gözlemlenmiştir.

Aşağıda grafiklerle eğilme rijitliğinin farklı değişimleri, farklı mesnetlenme koşulları dikkate alındığında, yakınsama ile terim sayısı arasındaki ilişki betimlenmiştir.



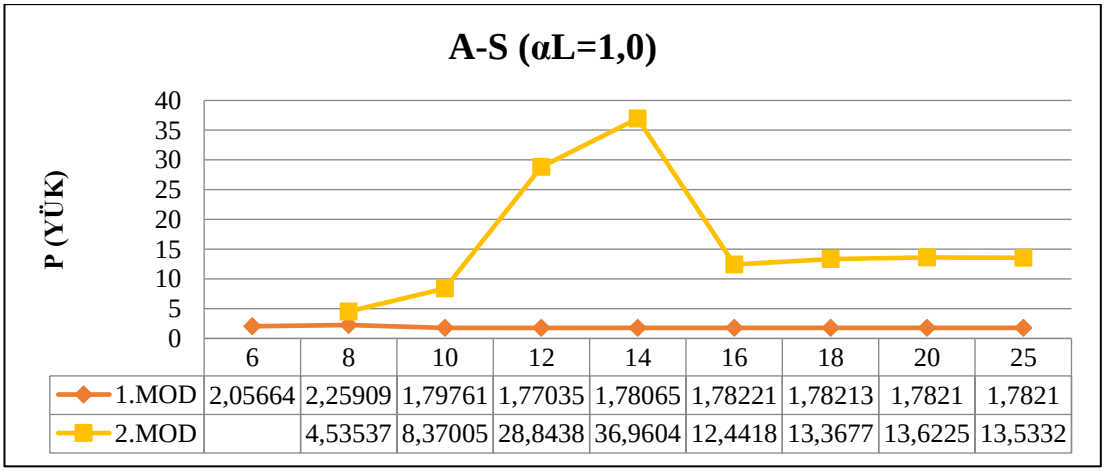
	6	8	10	12	14	16	18	20	25
1.MOD	2,56833	2,36177	2,39699	2,3944	2,39448	2,39448	2,39448	2,39448	2,39448
2.MOD	4,76785	21,9471	15,491	19,0009	51,6169	20,9352	21,1938	21,1655	21,1673

Şekil 3.6. A-S kiriş ve αL=0,1 için ilk iki modun yakınsaması



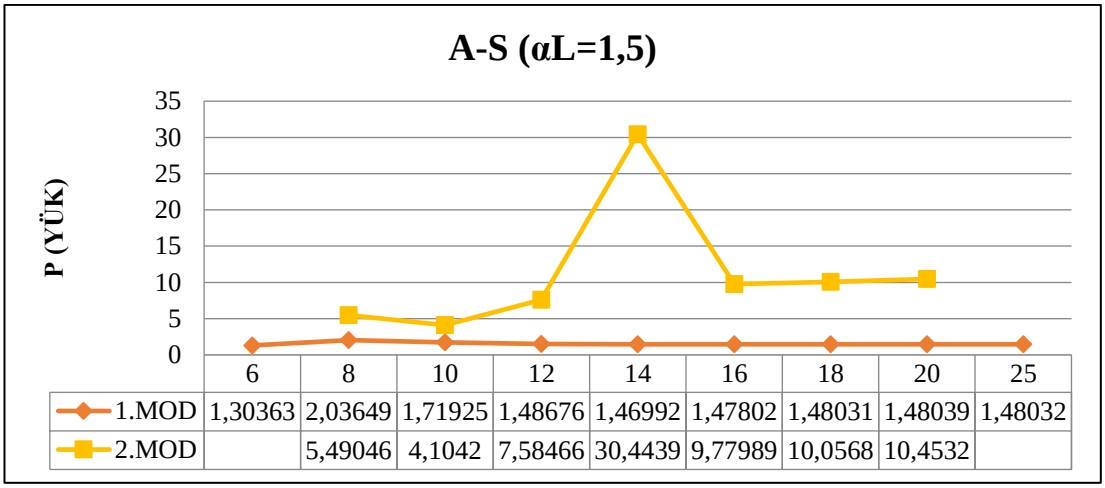
	6	8	10	12	14	16	18	20	25
1.MOD	17,5387	2,12449	2,09729	2,1122	2,11223	2,11213	2,11213	2,11213	2,11213
2.MOD		8,26404	32,6313	15,9769	15,9342	17,9271	17,426	17,4019	17,4117

Şekil 3.7. A-S kiriş ve αL=0,5 için ilk iki modun yakınsaması



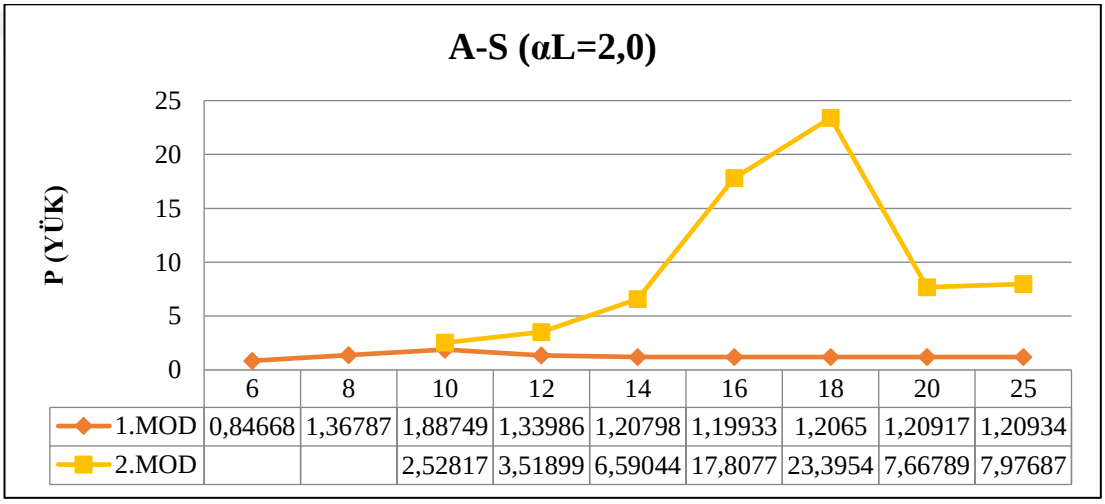
	6	8	10	12	14	16	18	20	25
1.MOD	2,05664	2,25909	1,79761	1,77035	1,78065	1,78221	1,78213	1,7821	1,7821
2.MOD		4,53537	8,37005	28,8438	36,9604	12,4418	13,3677	13,6225	13,5332

Şekil 3.8. A-S kiriş ve αL=1,0 için ilk iki modun yakınsaması



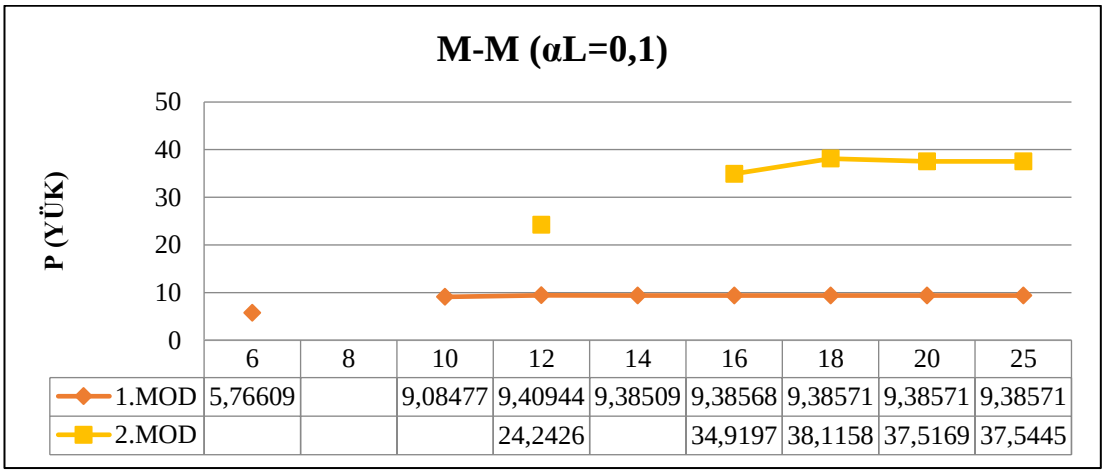
	6	8	10	12	14	16	18	20	25
1.MOD	1,30363	2,03649	1,71925	1,48676	1,46992	1,47802	1,48031	1,48039	1,48032
2.MOD		5,49046	4,1042	7,58466	30,4439	9,77989	10,0568	10,4532	

Şekil 3.9. A-S kiriş ve αL=1,5 için ilk iki modun yakınsaması



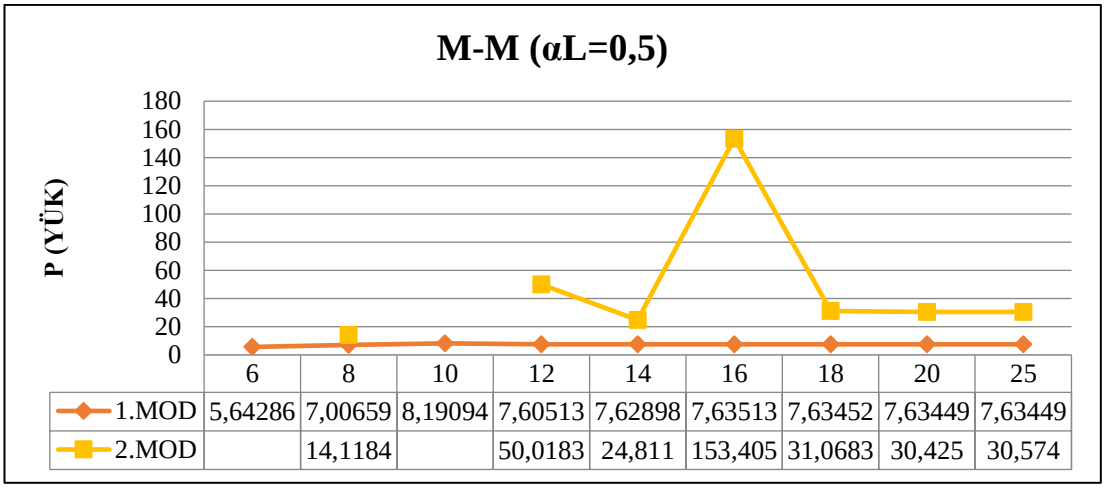
	6	8	10	12	14	16	18	20	25
1.MOD	0,84668	1,36787	1,88749	1,33986	1,20798	1,19933	1,2065	1,20917	1,20934
2.MOD			2,52817	3,51899	6,59044	17,8077	23,3954	7,66789	7,97687

Şekil 3.10. A-S kiriş ve αL=2,0 için ilk iki modun yakınsaması



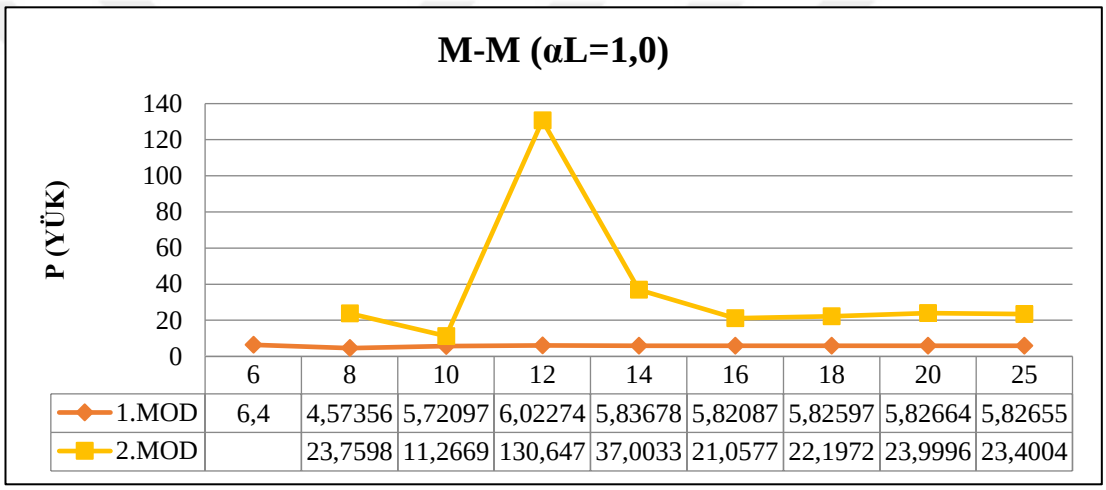
	6	8	10	12	14	16	18	20	25
1.MOD	5,76609		9,08477	9,40944	9,38509	9,38568	9,38571	9,38571	9,38571
2.MOD				24,2426		34,9197	38,1158	37,5169	37,5445

Şekil 3.11. M-M kiriş ve αL=0,1 için ilk iki modun yakınsaması



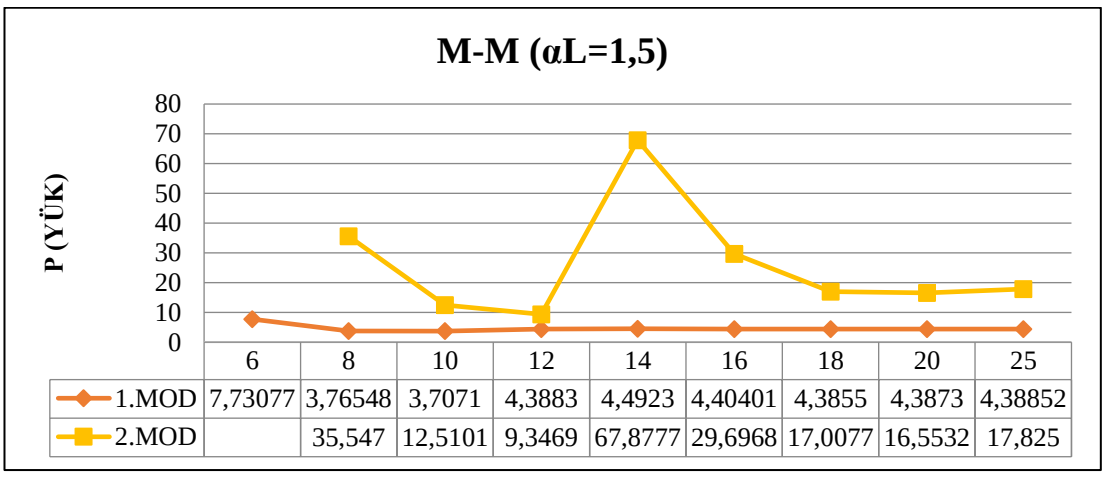
	6	8	10	12	14	16	18	20	25
1.MOD	5,64286	7,00659	8,19094	7,60513	7,62898	7,63513	7,63452	7,63449	7,63449
2.MOD		14,1184		50,0183	24,811	153,405	31,0683	30,425	30,574

Şekil 3.12. M-M kiriş ve αL=0,5 için ilk iki modun yakınsaması



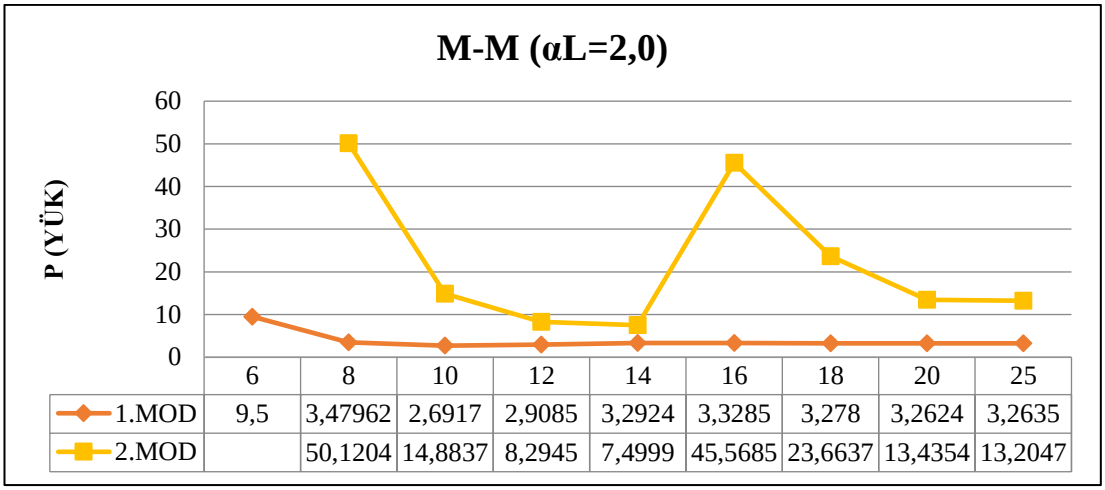
	6	8	10	12	14	16	18	20	25
1.MOD	6,4	4,57356	5,72097	6,02274	5,83678	5,82087	5,82597	5,82664	5,82655
2.MOD		23,7598	11,2669	130,647	37,0033	21,0577	22,1972	23,9996	23,4004

Şekil 3.13. M-M kiriş ve αL=1,0 için ilk iki modun yakınsaması



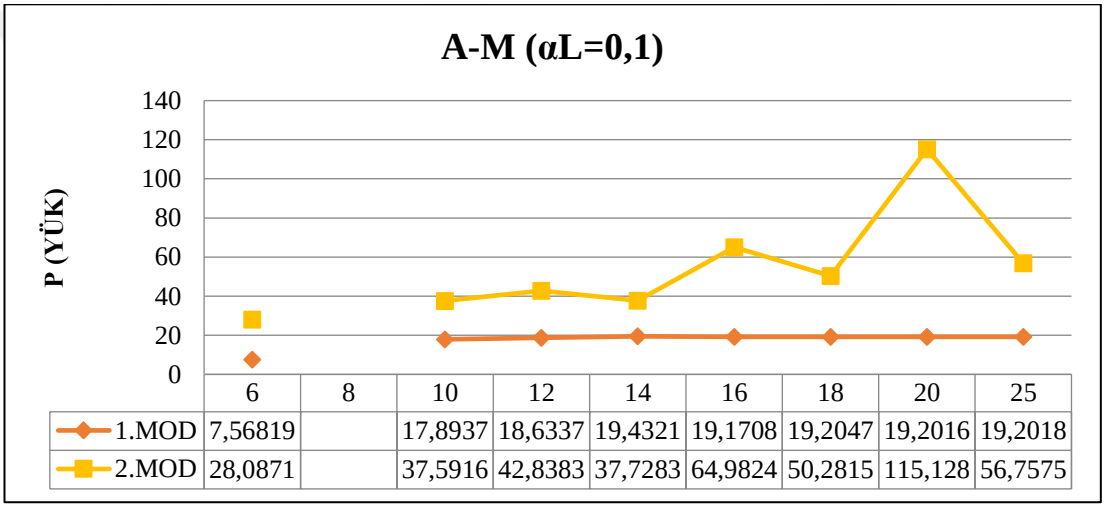
	6	8	10	12	14	16	18	20	25
1.MOD	7,73077	3,76548	3,7071	4,3883	4,4923	4,40401	4,3855	4,3873	4,38852
2.MOD		35,547	12,5101	9,3469	67,8777	29,6968	17,0077	16,5532	17,825

Şekil 3.14. M-M kiriş ve αL=1,5 için ilk iki modun yakınsaması



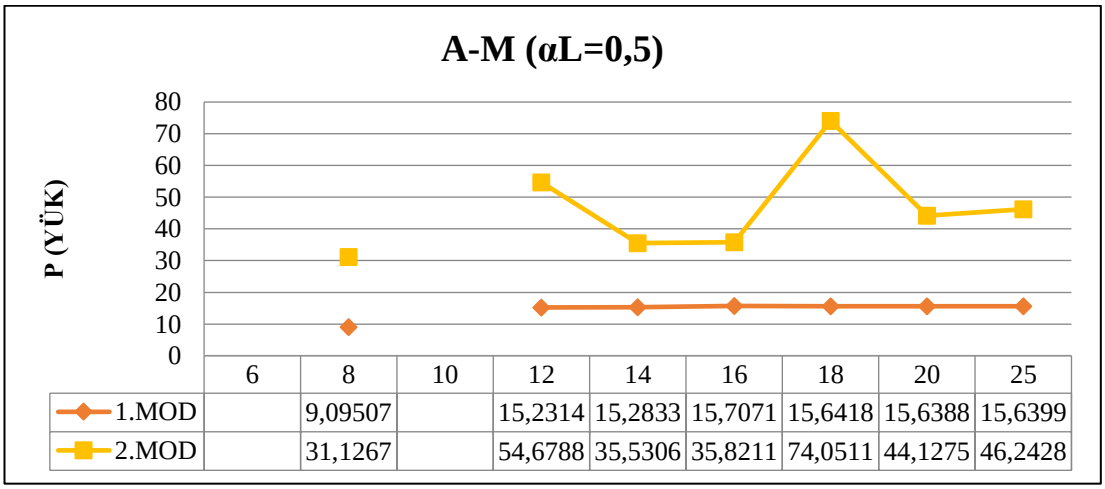
	6	8	10	12	14	16	18	20	25
1.MOD	9,5	3,47962	2,6917	2,9085	3,2924	3,3285	3,278	3,2624	3,2635
2.MOD		50,1204	14,8837	8,2945	7,4999	45,5685	23,6637	13,4354	13,2047

Şekil 3.15. M-M kiriş ve αL=2,0 için ilk iki modun yakınsaması



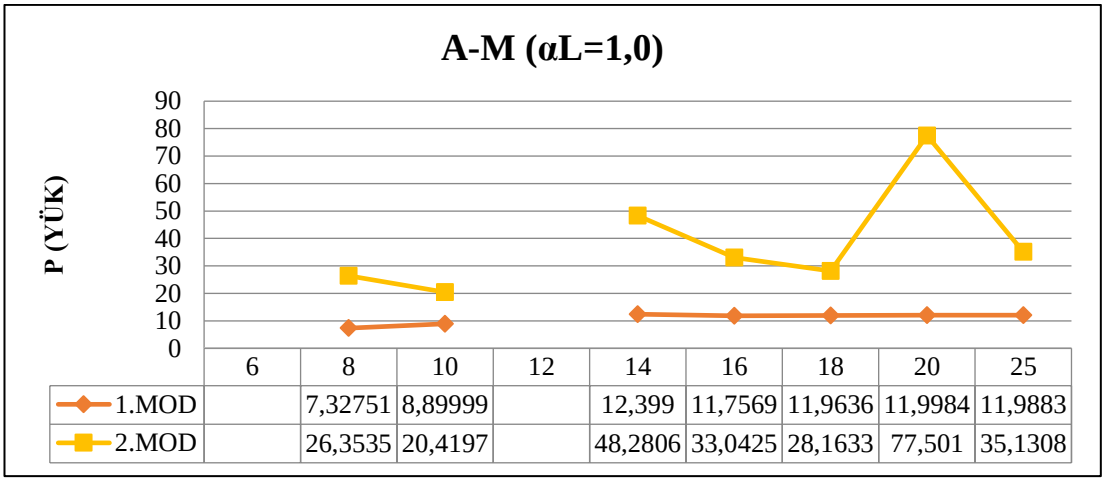
	6	8	10	12	14	16	18	20	25
1.MOD	7,56819		17,8937	18,6337	19,4321	19,1708	19,2047	19,2016	19,2018
2.MOD	28,0871		37,5916	42,8383	37,7283	64,9824	50,2815	115,128	56,7575

Şekil 3.16. A-M kiriş ve αL=0,1 için ilk iki modun yakınsaması



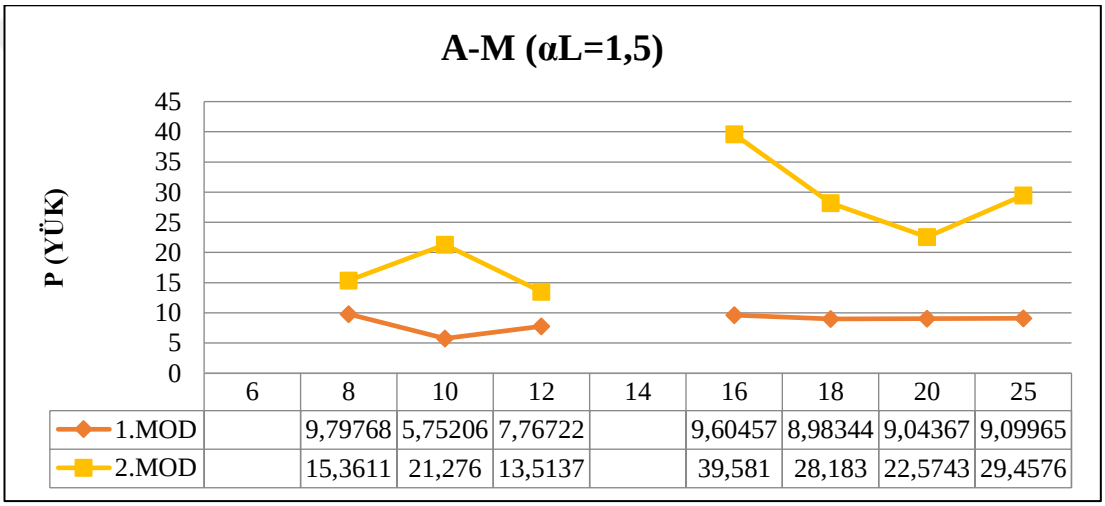
	6	8	10	12	14	16	18	20	25
1.MOD		9,09507		15,2314	15,2833	15,7071	15,6418	15,6388	15,6399
2.MOD		31,1267		54,6788	35,5306	35,8211	74,0511	44,1275	46,2428

Şekil 3.17. A-M kiriş ve αL=0,5 için ilk iki modun yakınsaması



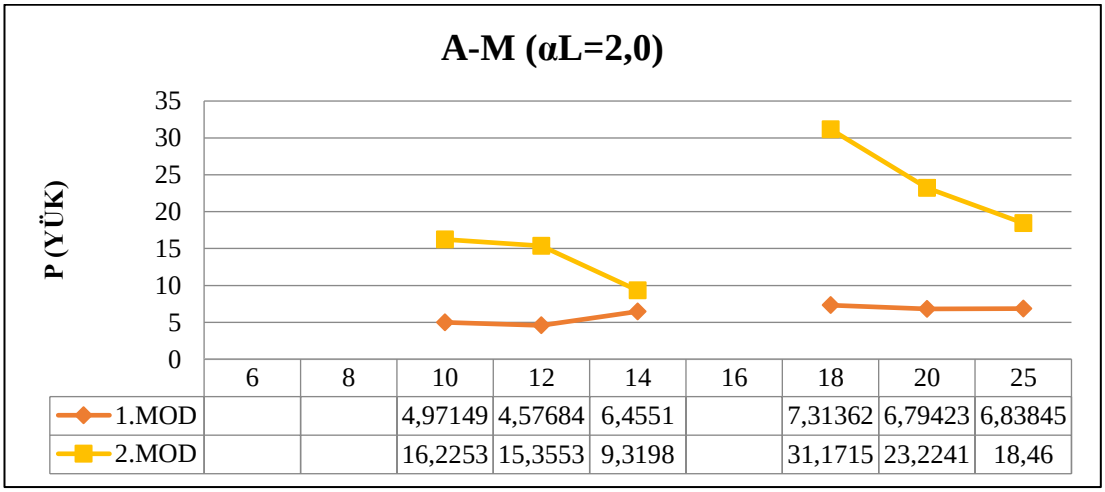
	6	8	10	12	14	16	18	20	25
1.MOD		7,32751	8,89999		12,399	11,7569	11,9636	11,9984	11,9883
2.MOD		26,3535	20,4197		48,2806	33,0425	28,1633	77,501	35,1308

Şekil 3.18. A-M kiriş ve αL=1,0 için ilk iki modun yakınsaması



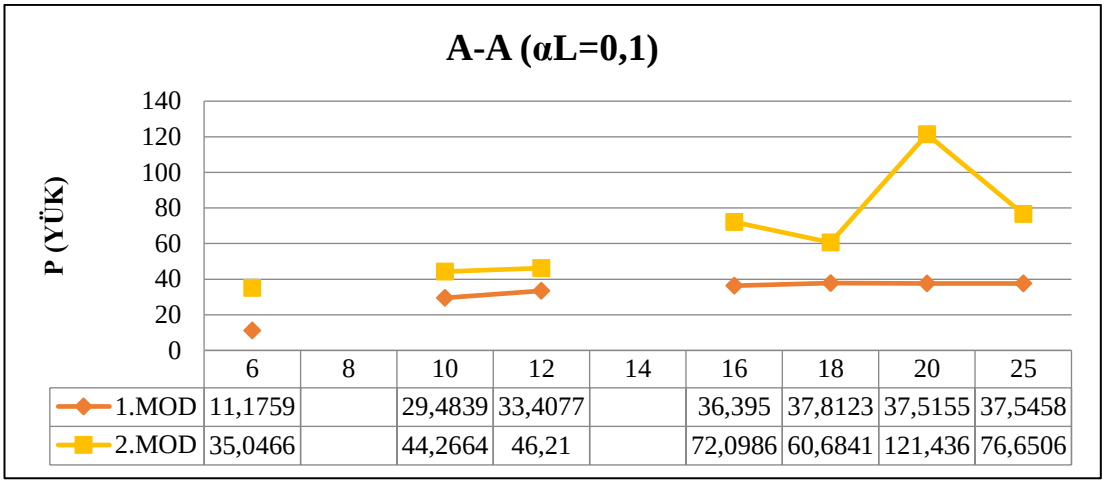
	6	8	10	12	14	16	18	20	25
1.MOD		9,79768	5,75206	7,76722		9,60457	8,98344	9,04367	9,09965
2.MOD		15,3611	21,276	13,5137		39,581	28,183	22,5743	29,4576

Şekil 3.19. A-M kiriş ve αL=1,5 için ilk iki modun yakınsaması



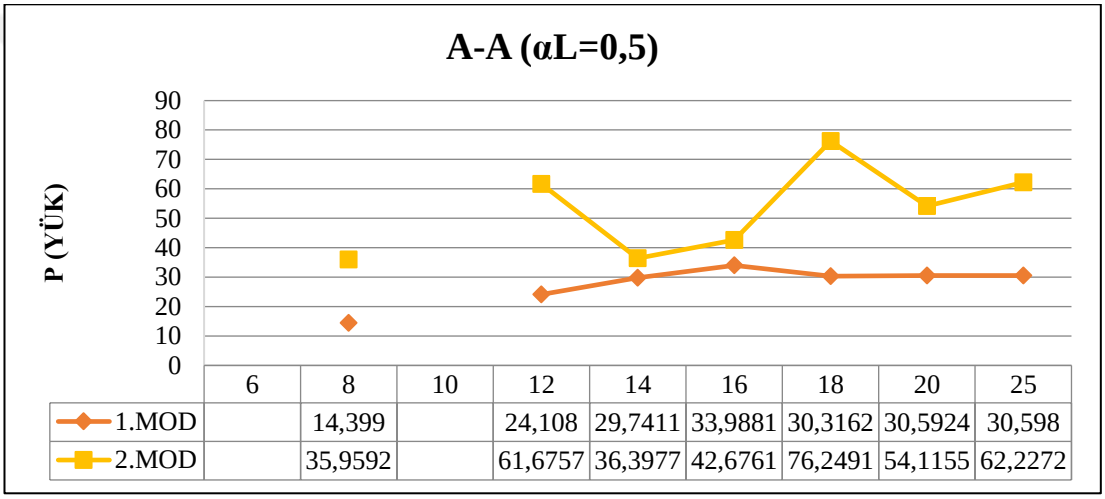
	6	8	10	12	14	16	18	20	25
1.MOD			4,97149	4,57684	6,4551		7,31362	6,79423	6,83845
2.MOD			16,2253	15,3553	9,3198		31,1715	23,2241	18,46

Şekil 3.20. A-M kiriş ve αL=2,0 için ilk iki modun yakınsaması



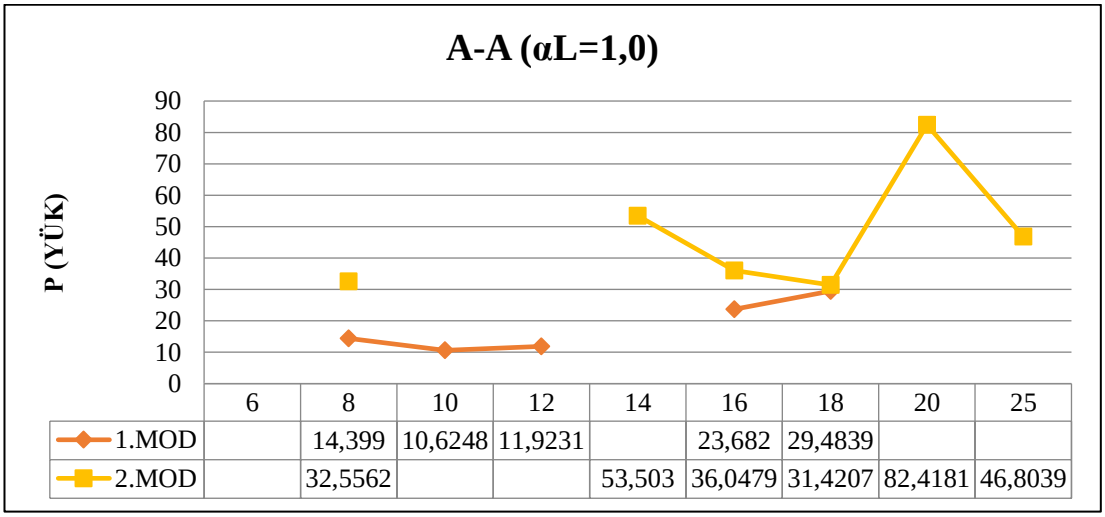
	6	8	10	12	14	16	18	20	25
1.MOD	11,1759		29,4839	33,4077		36,395	37,8123	37,5155	37,5458
2.MOD	35,0466		44,2664	46,21		72,0986	60,6841	121,436	76,6506

Şekil 3.21. A-A kiriş ve αL=0,1 için ilk iki modun yakınsaması



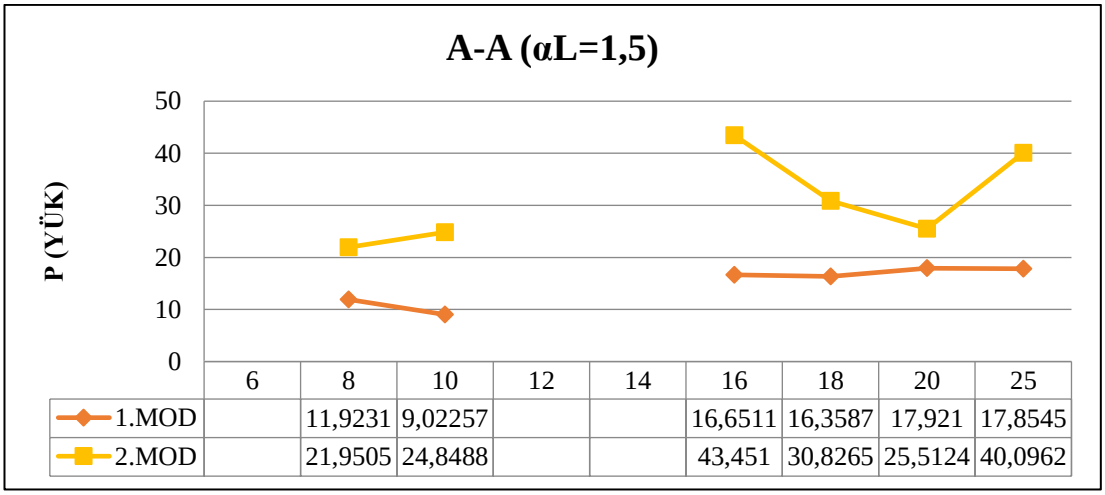
	6	8	10	12	14	16	18	20	25
1.MOD		14,399		24,108	29,7411	33,9881	30,3162	30,5924	30,598
2.MOD		35,9592		61,6757	36,3977	42,6761	76,2491	54,1155	62,2272

Şekil 3.22. A-A kiriş ve αL=0,5 için ilk iki modun yakınsaması



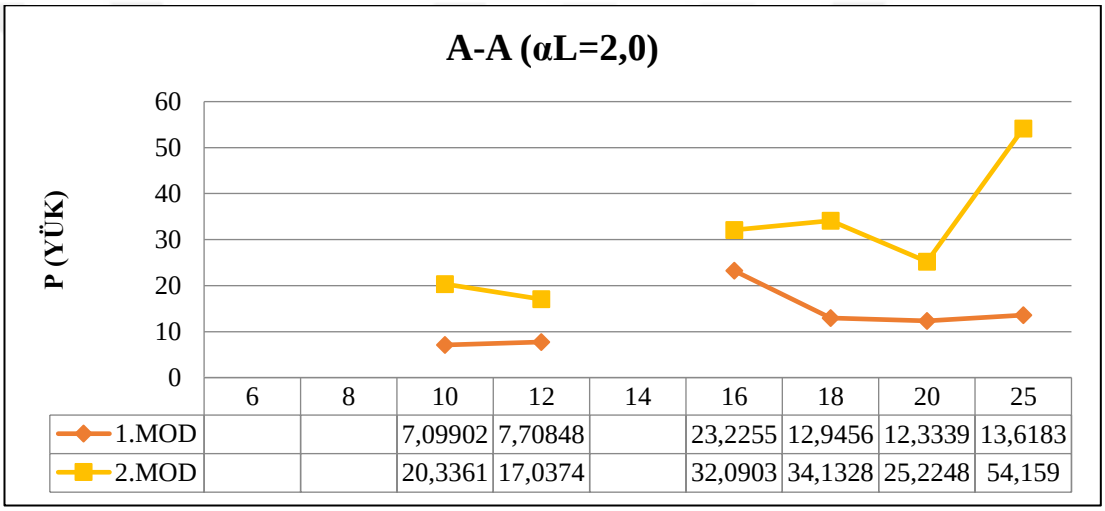
	6	8	10	12	14	16	18	20	25
1.MOD		14,399	10,6248	11,9231		23,682	29,4839		
2.MOD		32,5562			53,503	36,0479	31,4207	82,4181	46,8039

Şekil 3.23. A-A kiriş ve αL=1,0 için ilk iki modun yakınsaması



	6	8	10	12	14	16	18	20	25
1.MOD		11,9231	9,02257			16,6511	16,3587	17,921	17,8545
2.MOD		21,9505	24,8488			43,451	30,8265	25,5124	40,0962

Şekil 3.24. A-A kiriş ve αL=1,5 için ilk iki modun yakınsaması



	6	8	10	12	14	16	18	20	25
1.MOD			7,09902	7,70848		23,2255	12,9456	12,3339	13,6183
2.MOD			20,3361	17,0374		32,0903	34,1328	25,2248	54,159

Şekil 3.25. A-A kiriş ve αL=2,0 için ilk iki modun yakınsaması

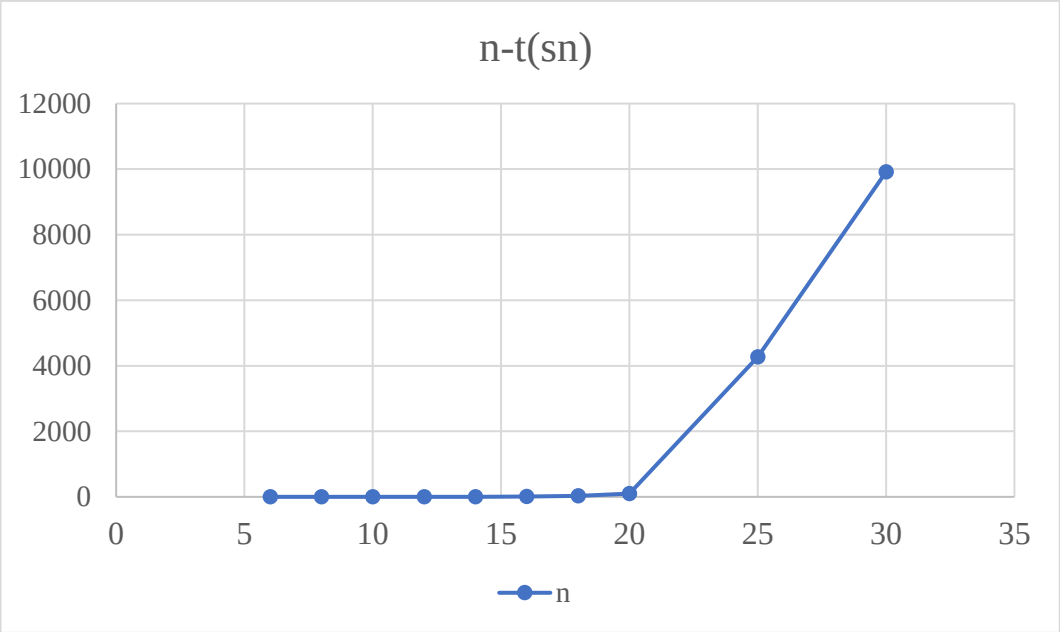
Aşağıda görülmekte olan Şekil 3.26'da ve Tablo 3.5'de DDY ile burkulma yükü değerlerini hesaplamak için kullanılan yazılımda terim sayısını arttırdıkça çözüm için geçen süreyi saniye cinsinden görebilirsiniz. Kullanılan bilgisayarın teknik özellikleri de aşağıda verilmiştir,

Bilgisayar: PC (SSD – Depolama)

İşlemci: Intel(R) Core(TM) i7-8750H CPU @2,20GHz

RAM: 16,0 GB

Sistem Türü: 64 bit İşletim Sistemi, x64 Tabanlı İşlemci



Şekil 3.26. Farklı terim sayıları ile çözüm için geçen süre (saniye)

Tablo 3.5. Farklı terim sayıları ile çözüm için geçen süre (saniye)

n	6	8	10	12	14	16	18	20	25	30
t(sn)	1	1,1	1,5	2,5	4,5	8,3	25,5	100	4269	9915

Şekil 3.25 ve Tablo 3.5.'de görüleceği üzere çözüm için gerekli olan terim sayısı 20 terimi aştığı zaman çözüm için gerekli süre aşırı bir şekilde artmaktadır. 30 terim kullanıldığında geçen süre 165 dakikayı (2 saat 45 dakika) aşmaktadır. Eğilme rijitliğinin değişimi için üslü modelde değişim katsayısı (α) arttıkça da gerekli terim sayısının arttığı görülmektedir. Bununla birlikte Elde edilen çözümlerin kullanılan azami terim sayısı içerisinde analitik çözümlerle iyi bir uyum yakaladığını söyleyebiliriz.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada elastik Euler kolonlarının stabilite problemi incelenmiştir. Bu amaçla önce uniform Euler kolonu ve sonrasında da eğilme rijitliği üslü değişken olan Euler kolonu ele alınmıştır. Problemi yöneten diferansiyel denkleme önce diferansiyel dönüşüm metodu uygulanmış, sonrasında da sınır koşulları uygulanarak problemin öz değerleri yani burkulma yükleri elde edilmiştir. Uygulanan yöntemle ilk iki burkulma modu için analitik çözümlerle uyumlu sonuçlar elde edilmiş, üçüncü modun ise seri çözümü için daha çok terim gerektiği tespit edilmiştir. Uniform kolonlar için çözülen denklem sabit katsayılı olduğundan üçüncü mod daha kolay elde edilebilir olmakla birlikte, eğilme rijitliği değişken kolonlar için ilk yirmi terimden sonra çözüm için çok uzun zaman gerektiği tespit edilmiştir. Bununla birlikte kritik burkulma yükü olan ilk mod karakteristik değerinin makul süreler içerisinde elde edilebildiği gözlemlenmiştir. Sonuç olarak Diferansiyel Dönüşüm Yönteminin elastik Euler kolonlarının stabilite problemlerine rahatlıkla uygulanabileceği, kritik burkulma yüklerinin düşük mertebe çözümlerle elde edilebileceği belirlenmiş ve yöntemin stabilite problemlerinin çözümünde yeterli sayıda terim kullanılmak suretiyle başarıyla kullanılabileceği sonucuna ulaşılmıştır.

KAYNAKLAR

Abdel-Halim Hassan I. H., On Solving Some Eigenvalue Problems by Using a Differential Transformation, *Applied Mathematics and Computation*, 2002, **127**, 1-22.

Abdel-Halim Hassan I. H., Different Applications for The Differential Transformation in The Differential Equations, *Applied Mathematics and Computation*, 2002, **129**, 183-201.

Abdel-Halim Hassan I. H., Differantial Transformation Technique for Solvin Higher-Order Initial Value Problems, *Applied Mathematics and Computation*, 2004, **154**(2), 299-311.

Arikoğlu A., Özkol İ., Solution of Boundary Value Problems for Integro- Differential Equations by Using Differential Transform Method, *Applied and Computation*, 2005, **168**(2), 1145-1158.

Ayaz F., On The Two Dimensional Differential Transform Method, *Applied Mathematics and Computation*, 2003, **143**, 361-374.

Ayaz F., Solutions of The System of Differential Equations by Differential Transform Method, *Applied Mathematics and Computation*, 2004, **147**, 547-567.

Chen C. K., Ho S. H., Application of Differential Transformation to Eigenvalue Problems, *Applied Mathematics and Computation*, 1996, **79**, 173-188.

Chen C. L., Liu Y. C., Differential Transformation Technique for Steady Nonlinear Heat Conduction Problems, *Applied Mathematics and Computation*, 1998, **95**, 155-164.

Chen C. K., Ho S. H., Solving Partial Differential Equations by Two Dimensional Differential Transform Method, *Applied Mathematics and Computation*, 1999, **106**, 171-179.

Chen C. K., Ho S. H., Trnasverse Vibration of a Rotating Twisted Timoshenko Beams Under Axial Loading Using Differential Transform, *International Journal of Mechanical Scienct*, 1999, **41**(11), 1339-1356.

Chen C. K., Chen S. S., Application of The Differential Transformation Method to a Nonlinear Conservative System, *Applied Mathematics and Computation*, 2004, **154**, 431-441.

Chen C. K., Ju S. P., Application of Differential Transformation to Transient Advective-Dispersive Transport Equation, *Applied Mathematics and Computation*, 2004, **155**, 25-38.

Eskin İlan D., Diferansiyel Dönüşüm Metodu ve Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Denizli, 2009, 245795.

Güngör Y., Diferansiyel Denklemlerin Diferansiyel Dönüşümler Yardımıyla Çözümü, Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 2013, 329611.

Keskin, Y., Diferansiyel Dönüşüm Yöntemiyle Diferansiyel Denklemlerin Çözülmesi, Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, 2005, 167548.

Omurtag M.H., *Mukavemet Cilt II*, Birsen Yayınevi, İstanbul, 349-365, 2018.

Özkan O., Keskin Y., An Application of The Differential Transform Method to Boundary Value Problems of The System of Integro Differential Equations, *Selçuk Journal of Applied Mathematics*, 2005, **6**, 43-53.

URL-1:https://www.serdarkorkut.com/2017/05/30/burkulma-buckling-nedir/, (Ziyaret tarihi: 17 Nisan 2019).

URL-2:https://www.bilgiustam.com/leonhard-euler/, (Ziyaret tarihi: 29 Nisan 2019).

URL-3:https://www.ilkkimbuldu.com/leonhard-euler-kimdir/, (Ziyaret tarihi: 18 Mayıs 2019).

Wang C.M., Wang C.Y., Reddy J.N., *Exact Solutions For Buckling Of Structural Members*, CRC Press LLC, USA, 64-68, 2005.

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

Memiş S., Özcan Z., Coşkun S. B., Analysis of Flexural-Torsional Buckling of Rectangular Beams via Ritz and Power Series Methods, *15th International Conference Of Numerical Analysis and Applied Mathematics , AIP Conference Proceedings, 1978, 400003, DOI: 10.10631.5043998,* 2018.

ÖZGEÇMİŞ

1993 yılında İstanbul'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Ataköseoğlu ilköğretim okulunda tamamladı. Lise eğitimini Ertuğrul Gazi Anadolu Lisesi'nde 1'incilik ile tamamladı. 2015 yılında Kocaeli Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nden mezun oldu ve aynı yıl Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı.