T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CAPUTO TÜREVİYLE TANIMLI TELEGRAF DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN THETA METODU İLE YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

Ebru BAZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2019

T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CAPUTO TÜREVİYLE TANIMLI TELEGRAF DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN THETA METODU İLE YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

Ebru BAZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2019

Dr. Öğr. Üyesi Mahmut MODANLI danışmanlığında Ebru BAZ'ın hazırladığı "**Caputo Türeviyle Tanımlı Telegraf Diferansiyel Denklemlerin Theta Metodu ile Yaklaşık Çözümü** " konulu çalışma 08/08/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/ oy çokluğu ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

İmza

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Mahmut MODANLI …….

Üye : Doç. Dr. Ali AKGÜL …….

Üye : Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ …….

Bu Tezin Matemetik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.

Doç. Dr. İsmail HİLALİ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ iv
1.GİRİŞ 1
1.1. Kesirli Türevin Tanımları ve Laplace dönüşümleri 1
1.2. Kesirli Mertebeden Telegraf Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Analitik Çözümleri 4
2. ÖNCEKİ ÇALIŞAMALAR 19
2.1.Kesirli Analizin Ortaya Çıkışı 19
2.2. Kesirli Türevin Uygulama Alanları ve Yapılan Çalışmalar 21
3.METERYAL ve YÖNTEM 23
3.1. Abstract Formundaki Denklemlerin Tam Çözümü Ve Kararlılık Kestirimleri 23
3.2. Theta Metodunun Matris Kararlılığı 34
4.ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA 40
4.1. Nümerik Uygulama 40
5.SONUÇ ve ÖNERİLER 43
KAYNAKÇA 44

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

CAPUTO TÜREVİYLE TANIMLI TELEGRAF DENKLEMLERİN THETA METODUYLA NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Ebru BAZ

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mahmut MODANLI
YIL: 2019, Sayfa:47

Bu çalışmada, kesirli kısmi diferansiyel denklemin başlangıç değer problemi

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) + {}_0^C D_t^{\alpha} u(t,x) - u_{xx}(t,x) + u(t,x) = f(t,x), \\ u(0,x) = h_1(x), \;\; u_t(0,x) = h_2(x), \\ 0 < x < L, \;\; 0 < t < T, \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \end{cases}$$

incelendi. Kesirli diferansiyel denklemler, kesirli kısmi diferansiyel denklemler, kesirli integral diferansiyel denklemler ve dinamik sistemi içeren diferansiyel denklemlerin çözümü için pek çok farklı nümerik metot vardır. Bu metotlar, Sonlu fark şeması metodu, Adomin's decomposition metodu, variational iteration metodu, homotopy metodu, spectral metodu gibi metotlardır. Kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin başlangıç değer koşullarına bağlı analitik ve nümerik çözümleri verildi. Bu çalışmada Kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin Caputo kesirli türevi için sonlu fark metotlarından Theta metodu kullanıldı. Bu nümerik metot, Crank-Nicholson, Implicit ve Explicit metotlarından daha genel bir metottur. Analitik çözümü için Laplace dönüşüm metodu uygulandı. Analitik ve nümerik çözümler karşılaştırılarak elde edilen yaklaşık sonuçlar hata analizi tablosunda verildi. Bu denklemlerin nümerik çözümleri için Matlab programı kullanıldı.

ANAHTAR KELİMELER: Caputo türevi, Telegraf diferansiyel denklemler, Theta metodu, yaklaşık çözüm, kararlılık.

ABSTRACT

MSc Thesis

USING THETA METHOD FOR NUMERICAL SOLUTION OF TELEGRAPH DIFFERENTIAL EQUATION DEFINED BY CAPUTO DERIVATIVE

Ebru BAZ

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Mahmut MODANLI
Year:2019, Page:43

In this work, the following initial-boundray value problem for a fractional partial differential equation

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) + {}_0^C D_t^\alpha u(t,x) - u_{xx}(t,x) + u(t,x) = f(t,x), \\ u(0,x) = h_1(x), \;\; u_t(0,x) = h_2(x), \\ 0 < x < L, \;\; 0 < t < T, \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \end{cases}$$

is investigated. Different several methods are used to solve fractional differential equations, fractional partial differential equations, fractional integro-differential equations and dynamic system containing fractional derivatives, such as Finite difference scheme method, Adomin's decomposition method, variational iteration method, homotopy perturbation method, spectral method. The numerical and analytic solutions of the fractional partial differential equations with the initial condition are presented. Theta Method is constructed for solving a fractional partial differential equation with Caputo fractional derivative. This numerical method more than genarally Crank-Nicholson, Implicit and Explicit diffference method. For numerical solution of this equation, Theta method will be used. For the analytical solution of this equation is used the Laplace transform method. The obtained results are discussed by comparing with exact solutions.

KEYWORDS: Caputo derivative, telegraph differential equation, theta method, approximation solution, stability.

TEŞEKKÜR

Tezin konusunun seçiminde, uygulamasında ve çalışmamda yardımlarını esirgemeyen danışmanım sayın Dr. Öğr. Üyesi Mahmut MODANLI' ya teşekkür ederim.

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

1.GİRİŞ

1.1. Kesirli Türevin Tanımları ve Laplace dönüşümleri

Kesirli türevlerin ve integraller teorisinin genelleştirilmesi ve soyut matematikteki uygulamaları için Riemann-Liouville tipinde kesirli türevinin tanımı önemli rol oynamıştır. Tamsayı mertebeli diferansiyel denklemlerin çözümü, yeni fonksiyon sınıflarının tanımları, serilerin toplamı buna örnek verilebilir.

Bununla birlikte, modern teknolojinin talepleri, iyi kurulmuş soyut matematiksel bir değerlendirmeyi gerektirir. Özellikle viscoelastisite teorisinden ve malzeme özelliklerinin daha iyi tanımlanması için kesirli türevlerin kullanıldığı kalıtsal katı mekaniğinde bir dizi çalışma ortaya çıkmıştır. Gelişmiş reolojik modellere dayalı matematiksel modelleme, doğal olarak, kesirli diferansiyel denklemlere ve başlangıç koşullarının formülünün gerekliliğine yol açar.

Uygulamalı problemler, fiziki olarak yorumlanabilir. Bu da başlangıç koşullarının kullanılmasını sağlayan kesirli türevlerin tanımlamasını gerektirir. Ne yazık ki, Riemann-Liouville yaklaşımını$t = a$alt uçtaki Riemann-Liouville kesirli türevlerinin sınır değerlerini içeren başlangıç koşullarına yol açar. Örneğin;

$$\lim_{t\to a} {}_aD_t^{\alpha-1} f(t) = b_1 \tag{1.1}$$

$$\lim_{t\to a} {}_aD_t^{\alpha-2} f(t) = b_2 \tag{1.2}$$

$$\lim_{t\to a} {}_aD_t^{\alpha-n} f(t) = b_n \tag{1.3}$$

burada b_k, k=1,2,..,n.

Başlangıçtaki problemlerin matematiksel olarak başarıyla çözülebilmesine rağmen matematiksel olarak çözülebildiği gerçeğine rağmen, burada sabitler verilmiştir. Ve verilen çözümler pratikte işe yaramamaktadır. Çünkü bu türler için bilinen bir fiziksel yorum yoktur.

Bu Grünwald –Letnikov ve Riemann-Liouville yaklaşımlarına benzer şekilde Caputo yaklaşımının da tamsayı mertebeli türevleri arasında bir interpolasyon sağladığını söylenebilir.

Caputo tipi kesirli diferansiyel denklemlerin temel avantaj yaklaşımı diferansiyel denklemlerin başlangıç koşulları Caputo türevlerinin tamsayı mertebeli diferansiyel denklemleri ile aynı şekilde ele alınmasının $t = a$ altta bilinmeyen fonksiyonların tamsayı mertebeli türevlerin limit değerlerini içermesidir.

Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşümünün fiziksel olarak sorunlara neden olan tipte başlangıç koşullarının kullanmasına izin verdiğini görüyoruz. Tam tersine Caputo türevinin Laplace dönüşümü bilinen tamsayılı mertebesi türevlerinin başlangıç değerlerinin kullanmasına izin verir.

Uygulanan problemleri çözmek için Laplace dönüşüm metodu sıklıkla kullanılır. Uygun Laplace dönüşüm formülünü seçmek için hangi tür veya hangi tip kesirli türev tanımının kullanılması gerektiğini anlamak çok önemlidir.

Riemann-Liouville ve Caputo tanımı arasındaki bir başka fark bir sabitin Caputo türevinin 0 olmasıdır. Oysa alt ucun bir sonlu değeri durumunda bir sabitin c'nin Riemann-Liouville kesirli türevi 0'a eşit değildir, yani Riemann Liouville kesirli türevinde bir sabitin türevi

$$ {}_0D_t^{\alpha} C = \frac{C t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \tag{1.4} $$

olarak formüle edilmektedir.

Bu gerçek, Ochmann ve Makarov (Ochmann ve Makarov, 1994) 'ün Riemann-Liouville tanımının $\alpha = -\infty$ ile kullanılmasına yol açmıştır. Çünkü bir yandan fiziksel açıdan, sıfıra eşit bir sabit kesirli türeve ihtiyaç duyarlar ve öte yandan formül (1.4) ,0 verirse $\alpha \to -\infty$. Bu adımın fiziksel anlamı, fiziksel işlemin başlangıç zamanı $-\infty$.

Böyle bir durumda geçici etkiler incelenemez. Bununla birlikte istikrarlı durum süreçlerinin göz önünde bulundurulması için gerekli olan soyutlamadır. Örneğin kesirli mertebe dinamik sistemin periyodik giriş sinyaline yanıtı viskoelastik materyallerde dalga yayılımı incelemesi için

Her iki tanımda da yer alan $f(x)$ ve $t \to -\infty$ türevlerinin makul davranışını gerektiren aynı formülüne ulaşıyoruz.

Şimdi bu çalışmamızda kullanılan temel tanımları verelim.

Tanım 1.1 Gamma fonksiyonu bütün $z \in C$ için

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \tag{1.5}$$

olarak tanımlanır. . (Podlubny,1998)

Tanım 1.2. $\beta, n \in N$, $n-1 \leq \alpha \leq n$, ve $\beta \geq [\![\alpha]\!]$ olmak üzere;

$$D^\alpha\left(x^\beta\right) = \frac{x^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}\Gamma(\beta+1) \tag{1.6}$$

olarak tanımlanır.. (Podlubny,1998)

Tanım 1.3. Zamana bağlı α ıncı dereceden $D_t^\alpha u(t,x)$Caputo kesirli türevi $n-1 < \alpha < n$ için

$$D_t^\alpha u(t,x) = \frac{\partial^\alpha u(t,x)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t \frac{1}{(t-p)^{\alpha-n+1}} \frac{\partial^\alpha u(p,x)}{\partial p^\alpha} \partial p \tag{1.7}$$

ve $\alpha = n \in N$ için

$$D_t^\alpha u(t,x) = \frac{\partial^\alpha u(t,x)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n}$$

olarak tanımlanır. . (Podlubny,1998)

Tanım 1.4. Eğer $f(x) \in C([a,b])$ ve $a < x < b$ ise

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) \coloneqq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} \partial t$$

$\alpha \in (-\infty, \infty)$, α. mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali olarak tanımlanır.

$\alpha \in (0,1)$ için aynı şekilde,

$$D_{a^+}^{\alpha} f(x) \coloneqq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} \partial t$$

α. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi olarak tanımlanır.

1.2. Kesirli Mertebeden Telegraf Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Analitik Çözümleri

Kesirli Telegraf Denklemlerin analitik çözümleri için farklı metotlar vardır. Bu metotlar; Laplace döşümü, Fourier dönüşümü ve Fourier seri çözümü metotları olarak bilinir. . Bunun için Laplace Dönüşüm tanımlarını verelim

Tanım 1.5. $\mathrm{F(t)}, \mathrm{t} \geq 0$ ın pozitif değerleri için tanımlı t reel değişkeninin bir fonksiyonu olsun ($t < 0$ için $F(t) = 0$ kabul edilebilir.); $s > 0$ reel veya kompleks bir parametre olmak üzere , t reel değişkeninin bir fonksiyonu e^{-st} olduğuna göre :

$$\int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt$$

integrali var olacak şekilde s parametresi için bir değer bulmak mümkün oluyorsa bu integrale $F(t)$ fonksiyonunun Laplace Dönüşümü denir. Bu dönüşüm $L\{F(t)\}$ veya $f(s)$ ifadeleri ile gösterilir. Bunu

$$f(s) = L\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt$$

şeklinde yazabiliriz. (Yaşar,2005)

Tanım 1.6. Eğer

$L\{F(t)\} = \mathrm{f(s)}$ ise, bu takdirde;

$$L\left\{F^{(n)}(t)\right\} = s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \cdots - sF^{(n-2)}(0) - F^{(n-1)}(0)$$

Dır. Eğer , $F(t), F'(t), \ldots, F^{(n-1)}(t), 0 \le t \le N$ için sürekli ve $t > N$ için üstel mertebeden $F^{(n)}(t)$ de , $0 \le t \le N$ için parçalı süreklidir. (Yaşar,2005)

Riemann-Liouville ve Caputo türevleri arasındaki farkı vurgulamak için aşağıdaki Laplace dönüşüm formüllerini hatırlayalım. Caputo tanımının Laplace dönüşümü için aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 1.7. Caputo kesirli türev için Laplace Dönüşümü

$$L\{D^m f(x)\} = s^m L\{f(x)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} D^k f(0)$$

olarak da yazılabilir. (Podlubny,1998)

Tanım 1.8. Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşümü için her n doğal sayısı ve $n - 1 \le \alpha < n$ olmak üzere,

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\{\,{}_0D_t^{\alpha} f(t)\}\partial t = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k\,{}_0D_t^{\alpha-k-1} f(t) I_{t=0}$$

olarak tanımlanır. (Podlubny,1998)

Fourier seri çözüm metodunun tanımı yerine (1.6) örneğinin çözümünde açıkça verilmiştir.

Aşağıdaki örneğin analitik çözümünü Laplace metodu yardımıyla bulalım. Bu çalışmada başlangıç değer koşullarına bağlı kesirli mertebeden telegraf

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) + {}_0^C D_t^{\alpha} u(t,x) - u_{xx}(t,x) + u(t,x) = f(t,x), \\ u(0,x) = h_1(x), \;\; u_t(0,x) = h_2(x), \\ 0 < x < L, \;\; 0 < t < T, \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

denklemi incelenecektir. Burada, ${}_0^C D_t^{\alpha} u(t,x)$ Caputo türev operatörü, f, h_1, h_2 bilinen belirli fonksiyonlar ve u bilinmeyen fonksiyondur.

Şimdi (1.8) denklemi tipindeki Caputo kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmak için Laplace metodunu kullanalım. Bunun için aşağıdaki problemi ele alalım.

Örnek 1.5. Kesirli Telgraf kısmi diferansiyel denkleminin verilen başlangıç-sınır değer koşullarını kullanarak

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) + {}_0^C D_t^{\alpha} u(t,x) - u_{xx}(t,x) = f(t,x), \\ f(t,x) = \left(6t + 6\frac{t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + (t^3+1)\right)\sin x, \\ 0 < x < \pi,\ 0 < t < 1,\ 0 \le \alpha < 1, \\ u(0,x) = \sin x\,,\ u_t(0,x) = 0,\ 0 \le t \le 1, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0,\ 0 \le x \le \pi \end{cases} \tag{1.9}$$

tam çözümün bulunuz.

Çözüm: Verilen problemin her iki tarafın Laplace dönüşümü alınırsa

$$\mathcal{L}\{u_{tt}(t,x) + D_t^{\propto}(t,x) - u_{xx}(t,x)\} = \mathcal{L}\left\{6t + 6\frac{t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + (t^3+1)\right\}\sin x$$

elde edilir. Başlangıç değer koşulları kullanılırsa,

$$\begin{aligned} &s^2u(s,x) - su(0,x) - u_t(0,x) + s^{\alpha}u(s,x) - u_{xx}(s,x) \\ &= \left(6\frac{1}{s^2} + 6\frac{\Gamma(4-\alpha)}{s^{4-\alpha}\Gamma(4-\alpha)} + \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s}\right)\sin x \end{aligned}$$

olup buradan da

$$s^2u(s,x) - s\,sinx + s^{\alpha}u(s,x) - u_{xx}(s,x) = \left(6\frac{1}{s^2} + 6\frac{1}{s^{4-\alpha}} + \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s}\right)\sin x$$

bulunur. Bu son denklem düzenlenirse,

$$-u_{xx}(s,x)+(s^{\alpha}+s^{2})u(s,x)=\left(6\frac{1}{s^{2}}+6\frac{1}{s^{4-\alpha}}+\frac{6}{s^{4}}+\frac{1}{s}+s\right)\sin x \qquad (1.10)$$

olarak yazılabilir.

Şimdi bu denklemin homojen ve homojen olmayan bölümlerini bulmak için

$$u(s,x)=u^{c}(s,x)+u^{p}(s,x) \qquad (1.11)$$

formülünü alalım. (1.10) denkleminin homojen kısmın çözümü için

$$u^{c}(s,x)=c.e^{mx},$$
$$u_{x}^{c}(s,x)=c.m.e^{mx},$$
$$u_{xx}^{c}(s,x)=c.m^{2}e^{mx}$$

alınıp

$$(s^{\alpha}+s^{2})u(s,x)-u_{xx}(s,x)=0$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$s^{\alpha}+s^{2}-m^{2}=0$$

karakteristik denklemi elde edilir. Bu karakteristik denklemin kökleri

$$m_{1}=\sqrt{s^{\alpha}+s^{2}},\ m_{2}=-\sqrt{s^{\alpha}+s^{2}}$$

olup homojen kısmının çözümü

$$u(s,x)=c_{1}e^{\sqrt{s^{\alpha}+s^{2}}x}+c_{2}e^{-\sqrt{s^{\alpha}+s^{2}}x}$$

dır. (1.10) denkleminin homojen olmayan kısmının çözümü için

$$u^{p}(s,x)=A\sin x$$

alınıp

$$u_x^p(s,x) = A\cos x,$$
$$u_{xx}^p(s,x) = -A\sin x$$

türevleriyle beraber (1.10) denkleminde yerine yazılırsa,

$$(s^\alpha + s^2 + 1)A\sin x = \left(6\frac{1}{s^2} + 6\frac{1}{s^{4-\alpha}} + \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s} + s\right)\sin x$$

elde edilir. Buradan da

$$A = \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s}$$

olarak bulunur. Bu değerler

$$u = u^c + u^p$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$u(s,x) = c_1 e^{\sqrt{s^\alpha + s^2}x} + c_2 e^{-\sqrt{s^\alpha + s^2}x} + \left(\frac{6}{s^4} + \frac{1}{s}\right)\sin x$$

çözümü elde edilir. $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ sınır değer koşulları kullanılırsa

$$c_1 = c_2 = 0$$

olduğu görülebilir. Böylece

$$u(s,x) = \left(\frac{6}{s^4} + \frac{1}{s}\right)\sin x$$

çözümü elde edilir. Bu son denklemin ters Laplace dönüşümü alınırsa,

$$u(t,x) = L^{-1}\big(u(s,x)\big) = L^{-1}\left(\left(\frac{6}{s^4} + \frac{1}{s}\right).\sin x\right) = (t^3 + 1)\sin x$$

olur. Buradan (1.9) denkleminin tam çözümü

$$u(t,x) = (t^3 + 1)\sin x$$

olarak bulunur.

Örnek 1.6.

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) + D_t^{3/2}u(t,x) - u_{xx}(t,x) + u(t,x) \\ \left(2 + 2t^2 + \frac{4t^{1/2}}{\sqrt{\pi}}\right)\sin x, \\ 0 < x < \pi\,, 0 < t < 1,\ 0 < \alpha \le 1, \\ u(0,x) = u_t(0,x) = 0\,,\ 0 \le t \le 1 \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0\,,\ 0 < x < \pi \end{cases} \tag{1.12}$$

kesirli Bagley-Torvik denklemini Fourier serisi çözüm metoduyla çözünüz?

Çözüm: Bu denklemin tam çözümünü bulmak için

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)\sin kx \tag{1.13}$$

formülünü alalım.

Bu formülün x'e göre türevleri alınıp

$$u_x = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)k\cos kx\,,$$

$$u_{xx} = -\sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)(k)^2\sin kx\,,$$

$$u_{tt} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k''(t)\sin kx,$$

$$D_t^{3/2}u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{3/2}(t)\sin kx$$

(1.12) denklemde yerine yazılırsa,

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k''(t)\sin kx + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{3/2}(t)\sin kx + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)(k)^2\sin kx + \sum_{k=1}^{\infty} A_k''(t)\sin kx$$
$$= \left(2 + 2t^2 + \frac{4t^{1/2}}{\sqrt{\pi}}\right)\sin x$$

denklemi elde edilir. (1.12) denklemi ve bu denklem için verilen başlangıç değerleri kullanılırsa,

$$A_k(0) = 0, A_k(\pi) = 0, k = 0,1,2,\ldots,$$
$$A_1''(t) + A_1^{3/2}(t) + 2A_1(t) = \left(2 + 2t^2 + \frac{4t^{1/2}}{\sqrt{\pi}}\right), \qquad (1.14)$$
$$A_1(0) = 0, A'(0) = 0$$

denklemi bulunur.

Şimdi (1.13) denklemini elde etmek için

$$A_1(t) = \sum_{k=2}^{\infty} A_{k1}(t)t^{k/2}$$

formülünü alalım. Bu son formülün türevleri alınırsa,

$$A_1'(t) = \sum_{k=2}^{\infty} A_{1k}\frac{k}{2}t^{\frac{k}{2}-1},$$

$$A_1^{3/2}(t) = \sum_{k=2}^{\infty} A_{1k}\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)t^{\frac{k}{2}-\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2}-\frac{3}{2}+1)},$$

$$A_1''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} A_{1k}\frac{k}{2}\left(\frac{k}{2}-1\right)t^{\frac{k}{2}-2}$$

olup bu değerler (1.14) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\sum_{k=2}^{\infty} A_{1k}\frac{k}{2}\left(\frac{k}{2}-1\right)t^{\frac{k}{2}-2}+\sum_{k=2}^{\infty} A_{1k}\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)t^{\frac{k}{2}-\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2}-\frac{3}{2}+1)}+2\sum_{k=2}^{\infty} A_{k1}(t)t^{k/2}$$
$$=\left(2+2t^2+\frac{4t^{1/2}}{\sqrt{\pi}}\right)$$

olur.

Buradan (1.14) denkleminin katsayıları eşitlenirse,

$$t^{-1/2};\ A_{12}\frac{1}{\sqrt{\pi}}+A_{13}\frac{3}{2}\frac{1}{2}=0\ ise\ A_{12}=A_{13}=0,$$

$$t^{0};\ A_{14}21+A_{13}\,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=2\ \text{ ise }\ A_{14}=1,$$

$$t^{\frac{1}{2}};\qquad ise\ A_{15}=0,$$

$$t^{1};\ A_{16}2.1+A_{15}\frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(2)}+A_{12}=0,\ \text{ise}\ A_{16}=0,$$

$$t^{3/2};\ A_{17}\frac{7}{2}\left(\frac{7}{2}-1\right)+2\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(5)}A_{13}=0,\ \text{ise}\ A_{17}=0,$$

$$t^{2};\ A_{17}\frac{(\frac{7}{2}+1)}{(\frac{7}{2}-\frac{3}{2}+1)}+2A_{14}=2,\ \text{ise}\ A_{14}=1$$

olur. Buradan da $A_{14}=\sum_{k=2}^{\infty}A_{1k}t^{k/2}=A_{14}t^2=t^2,\ k\neq 4$ dışındaki diğer değerler için A_k sıfırdır.

Bu değerler (1.13) denkleminde yerine yazılırsa,

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k(t)\sin x=A_1(t)\sin x$$

olup buradan da (1.13) denkleminin tam çözümü

$$u(t,x)=t^2\sin x$$

olarak bulunur.

Örnek 1.7. Aşağıdaki kesirli telegraf kısmi diferansiyel denklemini

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) + {}_0^C D_t^{\alpha} u(t,x) - u_{xx}(t,x) + u(t,x) \\ = \sin x \left(6t + 6\frac{t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + 2(t^3+1) \right), \\ 0 < x < \pi\,, 0 < t < 1, 0 < \alpha \leq 1,\ \lambda = 1, \\ u(0,x) = \sin x\,, u_t(0,x) = 0\,, 0 \leq t \leq 1, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0\,, 0 < x < \pi \end{cases} \tag{1.15}$$

tam çözümünü Laplace Dönüşüm metodunu kullanarak bulunuz?

Çözüm:

Verilen problemin her iki tarafın Laplace dönüşümü alınırsa,

$$L\{u_{tt}(t,x) + D^{\alpha}u(t,x) - u_{xx}(t,x) + u(t,x)\} = L\{\sin x \left(6t + 6\frac{t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + 2(t^3+1) \right)\}$$

elde edilir. Başlangıç değer koşulları kullanılırsa,

$$s^2u(s,x) - su(0,x) - u_t(0,x) + s^{\alpha}u(s,x) + s^{\alpha-1}u(0,x) - u_{xx}(s,x) + u(s,x) = [\frac{6}{s^2} + 6\frac{\Gamma(4-\alpha)}{s^{4-\alpha}\Gamma(4-\alpha)} + 2\left(\frac{6}{s^4} + \frac{1}{s}\right)] \sin x$$

$$s^2u(s,x) - s\sin x + s^{\alpha}u(s,x) + s^{\alpha-1}\sin x - u_{xx}(s,x) + u(s,x) = [\frac{6}{s^2} + 6\frac{1}{s^{4-\alpha}} + 2\left(\frac{6}{s^4} + \frac{1}{s}\right)] \sin x$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse,

$$-u_{xx}(s,x) + (s^{\alpha}+s^2+1)u(s,x) = [\tfrac{6}{s^2} + 6\tfrac{1}{s^{4-\alpha}} + 2\left(\tfrac{6}{s^4} + \tfrac{1}{s}\right) + s] \sin x \tag{1.16}$$

olarak yazılabilir.

Şimdi bu denklemi

$$u(s,x) = u^c(s,x) + u^p(s,x)$$

alalım. (1.16) denkleminin homojen kısmının çözümü için,

$$u^c(s,x) = ce^{mx},$$
$$u_x^c(s,x) = cme^{mx,}$$
$$u_{xx}^c(s,x) = cm^2e^{mx},$$

alınıp,

$$-u_{xx}(s,x) + (s^{\alpha}+s^2+1)u(s,x) = 0$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$s^{\alpha}+s^2+1-m^2 = 0$$

karakteristik denklemi elde edilir. Bu karakteristik denklemin kökleri,

$$m_1 = \sqrt{s^{\alpha}+s^2+1}\,, \quad m_2 = -\sqrt{s^{\alpha}+s^2+1}$$

olup homojen kısmının çözümü,

$$u^c(s,x) = c_1e^{\left(\sqrt{s^{\alpha}+s^2+1}\right)x} + c_2e^{-\left(\sqrt{s^{\alpha}+s^2+1}\right)x}$$

dir. (1.16) denkleminin homojen olmayan kısmının çözümü için;

$$u^p(s,x) = A\sin x,$$
$$u_x^p(s,x) = A\cos x,$$
$$u_{xx}^p(s,x) = -A\sin x$$

türevleriyle beraber (1.15) denkleminde yerine yazılırsa,

$$(s^{\alpha}+s^2+2)A\sin x=[\frac{6}{s^2}+6\frac{1}{s^{4-\alpha}}+\frac{12}{s^4}+\frac{2}{s}+\frac{1}{s}+\frac{1}{s^{1-\alpha}}]\sin x$$

olup gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$(s^{\alpha}+s^2+2)A=\frac{6}{s^4}(s^{\alpha}+s^2+2)+\frac{1}{s}(s^{\alpha}+s^2+2)$$

buradan da

$$(s^{\alpha}+s^2+2)A=(s^{\alpha}+s^2+2)(\frac{6}{s^4}+\frac{1}{s})$$

denkleminden

$$A=\frac{6}{s^4}+\frac{1}{s}$$

sonucu elde edilir.

Buradan da

$$u(s,x)=c_1e^{(\sqrt{s^{\alpha}+s^2+1})x}+c_2e^{-(\sqrt{s^{\alpha}+s^2+1})x}+(\frac{6}{s^4}+\frac{1}{s})\sin x$$

çözümü bulunur. Başlangıç değer koşulları yerine yazıldığında $c_1=c_2=0$ olur. Yani;

$$u(s,x)=(\frac{6}{s^4}+\frac{1}{s})\sin x$$

ifadesi elde edilir. Bu denklemin de ters Laplace dönüşümü alınırsa;

$$L^{-1}\{u(s,x)\}=L^{-1}\left\{(\frac{6}{s^4}+\frac{1}{s})\sin x\right\}$$

$$u(t,x)=(t^3+1)\sin x$$

tam çözümü elde edilir.

Örnek 1.8. Aşağıdaki kesirli telegraf kısmi diferansiyel denklemini

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + {}_0^C D_t^\alpha u(t,x) - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + 6u(t,x) \\ = 6(x^2 - 3x + 2)(t^3 + t + 1 + \frac{t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - 2(t^3 + 1), \\ 1 < x < 2, 0 < t < 1, \ \ 0 \le \alpha \le 1, \ \ \lambda = 1, \\ u(0,x) = x^2 - 3x + 2, \ \ u_t(0,x) = 0, \ \ 0 \le t \le 1 \ , \\ u(t,1) = u(t,2) = 0, \ \ 1 \le x \le 2 \end{cases} \tag{1.17}$$

göz önüne alalım. Bu denklemin tam çözümünü Laplace dönüşüm yöntemini kullanarak bulunuz?

Çözüm:

Verilen problemin her iki tarafın Laplace dönüşümü alınırsa,

$$L\{u_{tt}(t,x) + D^\alpha u(t,x) - u_{xx}(t,x) + 6u(t,x)\}$$
$$= L\{6(\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} + 2)\left(t^3 + t + 1 + \frac{t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - 2(t^3 + 1)\right)\}$$

elde edilir. Başlangıç değer koşulları kullanılırsa,

$$s^2 u(s,x) - su(0,x) - u_t(0,x) + s^\alpha u(s,x) + s^{\alpha-1}u(0,x) - u_{xx}(s,x) + 6u(s,x)$$
$$= [6(\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} + 2)][\frac{6}{s^4} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^{4-\alpha}} - 2\left(\frac{6}{s^4} + \frac{1}{s}\right)]$$

olup buradan

$$s^2 u(s,x) - s(\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} + 2) + s^\alpha u(s,x) + \mathrm{s}^{\alpha-1}(\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} + 2) - u_{xx}(s,x)$$
$$+ 6u(s,x) = [6(\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} + 2)][\frac{6}{s^4} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^{4-\alpha}} - 2\left(\frac{6}{s^4} + \frac{1}{s}\right)]$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse,

$$-u_{xx}(s,x) + (s^\alpha + s^2 + 6)u(s,x)$$
$$= [6(\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} + 2)][\frac{6}{s^4} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^{4-\alpha}} - 2\left(\frac{6}{s^4} + \frac{1}{s}\right)] \tag{1.18}$$

olarak yazılabilir.

Şimdi bu denklemi

$$u(s,x) = u^c(s,x) + u^p(s,x)$$

alalım. (1.18) denkleminin homojen kısmının çözümü için,

$$u^c(s,x) = ce^{mx},$$
$$u_x^c(s,x) = cme^{mx},$$
$$u_{xx}^c(s,x) = cm^2e^{mx},$$

alınıp,

$$-u_{xx}(s,x) + (s^{\alpha}+s^2+6)u(s,x) = 0$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$s^{\alpha}+s^2+6-m^2 = 0$$

karakteristik denklemi elde edilir. Bu karakteristik denklemin kökleri,

$$m_1 = \sqrt{s^{\alpha}+s^2+6}\,, \quad m_2 = -\sqrt{s^{\alpha}+s^2+6}$$

olup homojen kısmının çözümü,

$$u^c(s,x) = c_1e^{\left(\sqrt{s^{\alpha}+s^2+6}\right)x} + c_2e^{-\left(\sqrt{s^{\alpha}+s^2+6}\right)x} \tag{1.19}$$

dir.

(1.18) denkleminin homojen olmayan kısmının çözümü için;

$$u^p(s,x) = (Ax^2+Bx+C)\left(\frac{6}{s^4}+\frac{1}{s}\right),$$
$$u_x^p(s,x) = (2Ax+B)\left(\frac{6}{s^4}+\frac{1}{s}\right),$$
$$u_{xx}^p(s,x) = 2A\left(\frac{6}{s^4}+\frac{1}{s}\right)$$

alınıp

$$-2A + (s^{\alpha} + s^2 + 6)(Ax^2 + Bx + C)$$
$$= 6(x^2 - 3x + 2)\left(\frac{6}{s^4} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^{4-\alpha}}\right) + 2(\frac{6}{s^4} + \frac{1}{s})$$

denklemde yerine yazılıp katsayılar eşitlenirse, $A = 1, B = -3$ ve $C = 2$ bulunur. Böylece homojen olmayan kısmın çözümü

$$u^p(s,x) = (x^2 - 3x + 2)\left(\frac{6}{s^4} + \frac{1}{s}\right) \tag{1.20}$$

elde edilir. (1.19) ve (1.20) denklemlerinden

$$u(s,x) = c_1 e^{\left(\sqrt{s^{\alpha}+s^2+6}\right)x} + c_2 e^{-\left(\sqrt{s^{\alpha}+s^2+6}\right)x} + (x^2 - 3x + 2)\left(\frac{6}{s^4} + \frac{1}{s}\right)$$

denklemi bulunur. (1.17) denklemindeki başlangıç değerleri kullanılırsa, $c_1 = c_2 = 0$ olur.

Böylece,

$$u(s,x) = (x^2 - 3x + 2)\left(\frac{6}{s^4} + \frac{1}{s}\right) \tag{1.21}$$

bulunur. (1.21) denkleminin ters Laplace dönüşümü alınırsa,

$$u(t,x) = (x^2 - 3x + 2)(t^3 + 1)$$

(1.17) denkleminin tam çözümü olarak bulunur.

Gelecek bölümde, (1.8) denklemini abstract formda yazılıp denklemin tam çözümü için bir formül bulmaktır. Daha sonra elde edilen bu tam çözüm kararlılığı incelenecektir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞAMALAR

2.1.Kesirli Analizin Ortaya Çıkışı

İntegrallenebilme ve türevlenebilme kavramını temel matematiği okuyan herkes bilir. Örneğin; eğer $f(x) = x^2$ ise o zaman $f(x)$ fonksiyonunun 1. mertebeden integrali $\int f(x)dx = \frac{1}{3}x^3 + c_1$ ve aynı fonksiyonun 2. mertebeden integrali $\iint f(x)dx\,dx = \frac{1}{12}x^4 + c_1x + c_2$ olur.Benzer şekilde $\frac{d}{dx}f(x) = 2x$ ve $\frac{d^2}{dx^2}f(x) = 2$ dir. Ancak, eğer $f(x)$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden integrali alınmak istiyorsa veya $\frac{1}{2}$. mertebeden türevi alınmak isteniyorsa operatör nasıl tanımlanır? Bunun için bilinen tamsayı mertebesindeki türev ve integrallerle karşılaştırabilir mi?

Bu soru ilk olarak 30 Eylül 1695 tarihinde L'Hospital tarafından gündeme getirildi. Burada $f(x) = x$ fonksiyonu verildiğinde bu fonksiyonun kesirli mertebeden türevi veya integralinin ne olacağı soruldu. Birgün bu sorunun cevabı verildiğinde, o zaman bu cevap matematik literatüründe çok önemli gelişmelere kapı açacağını belirtti. Bu sorunun cevabı

m pozitif tamsayı olmak üzere

$y = x^m$ ifadesinin türevinin genel türev tanımını kullanarak

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n},\ m > 0 \tag{2.1}$$

olarak verildi. Daha sonra Legendre'in Γ sembolü kullanılarak

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}x^{m-n} \tag{2.2}$$

denklemi olarak yeniden yazılabilir. (2.2) formülünde $m = 1$ ve $n = \frac{1}{2}$ alınırsa,

$$\frac{d^{1/2}y}{dx^{1/2}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

formülü elde edilir.

Daha sonra Euler, Laplace, Fourier, Lacroix, Abel, Riemann, Liouville dahil pek çok bilim adamı kesirli türev kavramını geliştirdiler. 1819'da Lacroix, kesirli bir türevden bahseden makaleyi yayınlayan ilk matematikçilerdir.Bununla birlikte, kesirli operatörlerin ilk kullanımı Lacroix tarafından değil, 1823 yılında Abel tarafından yapılmıştır. Tautochrone problemin formüle edilmesinde ortaya çıkan bir integral denkleminin çözümünde kesirli hesabı uygulandı. Eğrinin şeklini belirleme problemi, bu eğrinin tekdüze yerçekimi altında aşağı kaydığı bir nesnenin iniş zamanının, nesnenin başlangıç noktasından bağımsızdır.

İntegrallenebilme ve türevlenebilme kavramının genelleştirilmesi için diğer bazı yaklaşımlar arasında Caputo tarafından önerilen ve genelleştirilmiş fonksiyonların temeline dayalı yaklaşımlara uygulanan problemlerin ve problemlerin açık çözümleri ve formülasyonları için olası faydalarından dolayı dikkatte etmeye karar verdik.

Caputo tarafından geliştirilen yaklaşım, en alt uç başlangıç zamanında türevleri y', y'' gibi sadece tamsayı mertebeli türevlerin limit değerlerini kapsayan bir formda kesirli mertebeli diferansiyel denklemlerin başlangıç değer problemleri için başlangıç koşullarının formulasyonuna izin verdi

Genelleştirilmiş fonksiyonlar yaklaşımı, Dirac delta fonksiyonunun ($\delta(t)$) ve heaviside fonksiyonunun $H(t)$ değerlendirilmesine ve kullanılmasına izin verir. Her iki fonksiyon da test modelleri için sıklıkla kullanılmaktadır.

2.2. Kesirli Türevin Uygulama Alanları ve Yapılan Çalışmalar

Kısmi diferansiyel denklemler birçok bilim dalında uygulama alanına sahiptir. Bu alanlardan bazıları sıvı akışkanları, elastik teorisi, fizik, termodinamik ve hidrodinamiktir. Kesirli diferansiyel denklemler mühendislik, finans, fizik ve sismoloji gibi bilim dallarında pek çok uygulamalara sahiptir (Çelik ve Duman, 2012), (Gorial, 2011) ve (Jafari ve Gejii, 2006). Bu diferansiyel denklemler zaman ve uzay değişkenlerine göre çözülebilir (Karatay, ve ark., 2011), (Su, ve ark., 2009),(Tadjeran, ve ark., 2006). Kesirli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için farklı metotlar vardır. Uzay kesirli ısı denklemleri için fark şemaları sunulmuştur.

Matris metodu kullanılarak zaman kesirli adveksiyon dağılım denkleminin karalılığı ve yakınsaklığı çalışıldı (Karatay, ve ark., 2014). (Aslefallah, ve ark.,2014) de zaman kesirli diferansiyel difüzyon denklemin yaklaşık çözümünü theta metodu yardımıyla hesapladı. Srivastava, Awasthi ve Tamsir zamana bağlı kesirli mertebeden Caputo hiperbolik telegraf denkleminin nümerik sonuçlarını RDTM (Reduced Differential Transform Method) metoduyla buldu (Srivastava ve ark.,2013). Ashyralyev ve Dal sonlu fark ve iterasyon metotlarını kullanarak $\alpha = 1/2$ için kesirli hiperbolik kısmi diferansiyel denkleminin Neumann koşuluna bağlı yaklaşık çözümünü çalıştı (Ashyralyev ve Dal, 2012).

(Chen, ve ark. ,2017), de üç boyutlu kesirli evrim denklemi için geriye doğru Euler dönüşümlü yön bindirme fark şeması metodu kullanıldı. (Szekeres, ve Izsák,2015) de Neumann sınır koşullarıyla kesirli difüzyon denklemlerinin nümerik çözümleri sonlu fark metoduyla hesaplandı. (Changpin, ve ark., 2013) çalışmasında kesirli adi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü sonlu fark metoduyla elde verdi. İkinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri sonlu fark şeması ve reproducingkernel metotlarıyla yapıldı (Modanli ve Akgul,, 2017).

Modanlı ve Akgül kesirli telegraf diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini hesaplamak için Theta metodunu kullandı. Son olarak, kesirli telegraf denklemlerin farklı α. mertebeden değerleri için sonlu fark şeması metodu kullanılarak yaklaşık çözümleri hesaplandı (Modanli, 2018).

Bu çalışmada ise (1.5) denklemi ile verilen kesirli mertebeden telegraf denkleminin yaklaşık çözümü için Theta metodu kullanılacaktır. Dolayısıyla 3. bölümde (3.1) denkleminin tam çözümü ile tam çözümünün kararlılığı ile Theta metodu ve Theta metodunun kararlılığı için kestirim teoremleri verilecektir. 4. bölümde kesirli mertebeden telegraf denklemlerin yaklaşık çözümleri için Theta metonunun nümerik uygulamaları verilecektir. 5. Bölümde ise metodun bu denklem için elverişliliği ve ileriye öneriler yapılarak tez sonuçlandırılacaktır.

3.METERYAL ve YÖNTEM

3.1. Abstract Formundaki Denklemlerin Tam Çözümü Ve Kararlılık Kestirimleri

Bu bölümde, abstract (adi diferansiyel denkleme indirgenmiş) denklemlerin tam çözümü ve bu tam çözüm için kararlılık kestirimlerini göstereceğiz.

(1.5) problemi $H = L_2[0, L]$ Hilbert uzayında

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2} + D_t^{\alpha} u(t) + Au(t) = f(t), (0 < t < T) \\ u(0) = \varphi, u'(0) = \psi, 0 < \alpha \leq 1, \end{cases} \tag{3.1}$$

olarak yeniden yazılabilir.

Burada, $f(t) = f(t, x)$, $[0, T]$ aralığında tanımlanan abstract bir fonksiyondur. $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(x)$, $H = L_2[0, T]$ uzayının elemanlarıdır. $u(t) = u(t, x)$, $H = L_2[0, T]$ değerleriyle [0,T] aralığında tanımlanan, bilinmeyen abstract bir fonksiyondur.

$A: D(A) \to H$,

$D(A) = \{u: u, u', u'' \in L_2[0, L]; u(0) = u(L) = 0\}$

bölgesinde

$Au(x) = -u''(x) + u(x)$

ile tanımlanan diferansiyel operatördür.

Burada $\delta > 0$, $\delta \geq \frac{\lambda^2}{4}$ için

$< Au, v > = < u, Av >, \left(u, v \in D(A)\right)$

ve

$< Au, u > \geq \delta < u, u >$

dir. Yani A operatörü self-adjoint (öz eşlenik) bir operatördür.

Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşümü altında fiziksel yorumlamasında sorunlara neden olabilen $t = a$ daki uç noktasında Riemann-Liouville kesirli türevlerinin sınır değerlerini içeren tipteki başlangıç koşullarının kullanılmasına izin verir. Diğer yandan; Caputo türevinin Laplace dönüşümü, bilinen fiziksel yorumlamaya sahip, tam sayılı mertebeli türevlerinin başlangıç değerlerinin kullanılmasına izin verir. Uygun Laplace dönüşüm formülünü seçmek için hangi başlangıç koşullarının kullanılması gerektiğini anlamak çok önemlidir.

Caputo türevinde sabitin türevi 0 iken, Riemann-Liouville türevinde başlangıç noktasının bir sonlu değerinde bir c sabitinin türevi sıfır olmadığı (1.1) formülüyle belirtilmiştir. Bu yüzden bu çalışmada Caputo türevini çalışmamız bize avantaj sağlanmaktadır.

Lemma 3.1. (3.1) probleminin çözümü için $|\lambda s^{\alpha-2}| \leq 1$ ve $|A| \leq |s^2 + \lambda s^{\alpha}|$olmak üzere,

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-A)^n (-\lambda)^k \binom{n+k}{k} \frac{t^{2k-\alpha k+2n}}{\Gamma(2k-\alpha k+2n+1)} \left[u(0) + \frac{t}{2k-\alpha k+2n+1} u'(0)\right] +$$

$$\int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-A)^n (-\lambda)^k \binom{n+k}{k} \frac{(t-p)^{2k-\alpha k+2n+1}}{\Gamma(2k-\alpha k+2n+1)} f(p)\partial p \qquad (3.2)$$

ile verilir.

İspat. (3.1) problemine Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$s^2 u(s) - su(0) - u'(0) + \lambda s^{\alpha} u(s) + Au(s) = F(s)$$

olup buradan gerekli işlemler yapılırsa

$(s^2 + \lambda s^{\alpha} + A)u(s) = F(s) + su(0) + u'(0)$

ve buradan da

$$u(s) = \frac{s}{s^2 + \lambda s^\alpha + A} u(0) + \frac{1}{s^2 + \lambda s^\alpha + A} u'(0) + \frac{1}{s^2 + \lambda s^\alpha + A} F(s)$$

denklemi elde edilir.

(Modanli ve Akgül, 2018) yöntemini ve (3.1) probleminde verilen başlangıç değerleri kullanılırsa,

$$u(s) = \frac{s}{s^2+\lambda s^\alpha+A} u(0) + \frac{1}{s^2+\lambda s^\alpha+A} u'(0) + \frac{1}{s^2+\lambda s^\alpha+A} F(s) \tag{3.3}$$

bulunur. Şimdi (3.3) denkemindeki

$\frac{s}{s^2+\lambda s^\alpha+A}$ ve $\frac{1}{s^2+\lambda s^\alpha+A}$ ifadelerine karşılık gelen seri açılımlarını yazalım. $\frac{s}{s^2+\lambda s^\alpha+A}$

ifadesinin seri açılımı yapılırsa,

$$\frac{s}{s^2 + \lambda s^\alpha + A} = \frac{s}{(s^2 + \lambda s^\alpha)\left(1 + \frac{A}{s^2+\lambda s^\alpha}\right)} = \frac{1}{(s + \lambda s^{\alpha-1})\left(1 + \frac{A}{s^2+\lambda s^\alpha}\right)}$$

$$= \frac{s}{s^2 + \lambda s^\alpha}\left[1 - \frac{A}{s^2 + \lambda s^\alpha} + \left(\frac{A}{s^2 + \lambda s^\alpha}\right)^2 - \left(\frac{A}{s^2 + \lambda s^\alpha}\right)^3 + \cdots\right]$$

olur. Bu formülden de

$$\frac{1}{s + \lambda s^{\alpha-1}} \sum_{n=0}^{\infty} (-A)^n \left(\frac{1}{s + \lambda s^\alpha}\right)^n$$

$$= \frac{1}{s + \lambda s^{\alpha-1}} \sum_{n=0}^{\infty} (-A)^n \frac{1}{(s + \lambda s^\alpha)^n}$$

$$= \frac{1}{s + \lambda s^{\alpha-1}} \sum_{n=0}^{\infty} (-A)^n \frac{1}{s^n (s + \lambda s^{\alpha-1})^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-A)^n \frac{1}{s^n (s + \lambda s^{\alpha-1})^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-A)^n \frac{1}{s^{2n+1}(1+\lambda s^{\alpha-2})^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-A)^n (-\lambda)^k \frac{1}{s^{2n+1}} (s^{\alpha-2})^k \binom{n+k}{k}$$

formülü elde edilir. Böylece,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-A)^n (-\lambda)^k \binom{n+k}{k} \frac{s^{\alpha k-2k}}{s^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-A)^n (-\lambda)^k \binom{n+k}{k} \quad (3.4)$$

bulunur.

$\frac{1}{s^2+\lambda s^{\alpha}+A}$ terimi, kuvvet serisine açılırsa

$$\frac{1}{s^2+\lambda s^{\alpha}+A} = \frac{1}{(s^2+\lambda s^{\alpha})\left(1+\frac{A}{s^2+\lambda s^{\alpha}}\right)} = \frac{1}{s^{n+1}}[1-\lambda s^{\alpha-2}+(\lambda s^{\alpha-2})^2-\cdots]$$

olur. Bu da

$$\frac{1}{s^2+\lambda s^{\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} (-A)^n \left(\frac{1}{s^2+\lambda s^{\alpha}}\right)^n$$

$$= \frac{1}{s^2+\lambda s^{\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} (-A)^n \frac{1}{(s^2+\lambda s^{\alpha})^n} \sum_{n=0}^{\infty} (-A)^n \frac{1}{(s^2+\lambda s^{\alpha})^{n+1}}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-A)^n \frac{1}{s^{2n+2}} \frac{1}{(1+\lambda s^{\alpha-2})^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-A)^n \frac{1}{s^{2n+2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k \binom{n+k}{k} s^{\alpha k-2k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-A)^n (-\lambda)^k \binom{n+k}{k} \frac{1}{s^{2k-\alpha k+2n+2}} \quad (3.5)$$

formülü olarak elde edilir.

(3.4) ve (3.5) denklemlerinin ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\lambda s^{\alpha}+A}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-A)^n(-\lambda)^k\binom{n+k}{k}\frac{t^{2k-\alpha k+2n}}{\Gamma(2k-\alpha k+2n+1)} \quad (3.6)$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+\lambda s^{\alpha}+A}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-A)^n(-\lambda)^k\binom{n+k}{k}\frac{t^{2k-\alpha k+2n+1}}{\Gamma(2k-\alpha k+2n+1)} \quad (3.7)$$

bulunur.

$\frac{1}{s^2+\lambda s^{\alpha}+A}F(s)$ denkleminde Laplace dönüşümü için konvülasyon özelliği uygulanırsa,

$$\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}^2+\lambda\mathrm{s}^{\alpha}+\mathrm{A}}\mathrm{F(s)}\right]=\int_0^{\mathrm{t}}\sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty}\sum_{\mathrm{k=0}}^{\infty}(-\mathrm{A})^{\mathrm{n}}(-\lambda)^{\mathrm{k}}\binom{\mathrm{n+k}}{\mathrm{k}}\frac{(\mathrm{t-p})^{2\mathrm{k}-\alpha\mathrm{k}+2\mathrm{n}+1}}{\Gamma(2\mathrm{k}-\alpha\mathrm{k}+2\mathrm{n}+1)}\mathrm{f(p)dp} \quad (3.8)$$

elde edilir.

(3.3), (3.6), (3.7) ve (3.8) formülleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}u(t)=&\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-A)^n(-\lambda)^k\binom{n+k}{k}\frac{t^{2k-\alpha k+2n}}{\Gamma(2k-\alpha k+2n+1)}u(0)\\&+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-A)^n(-\lambda)^k\binom{n+k}{k}\frac{t^{2k-\alpha k+2n+1}}{\Gamma(2k-\alpha k+2n+2)}u'(0)\\&+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-A)^n(-\lambda)^k\binom{n+k}{k}\frac{t^{2k-\alpha k+2n+1}}{\Gamma(2k-\alpha k+2n+2)}L^{-1}\{F(s)\}\\=&\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-A)^n(-\lambda)^k\binom{n+k}{k}\frac{t^{2k-\alpha k+2n}}{\Gamma(2k-\alpha k+2n+1)}\Big[u(0)\\&+\frac{t}{2k-\alpha k+2n+1}u'(0)+L^{-1}\{F(s)\}\frac{1}{2k-\alpha k+2n+1}\Big]\end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 3.2. Her $\mathbf{k},\mathbf{n}\in\mathbf{Z}^{+}\cup\{\mathbf{0}\}$ **ve** $\mathbf{0}<\boldsymbol{\alpha}\leq\mathbf{1}$ için

$$\frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(2k-\alpha k+2n+1)}\leq 1$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat:

$n = 1,\ k = 1\ ve\ \alpha = \frac{1}{2}$ alınırsa;

$$\frac{\Gamma(1+1+1)}{\Gamma\left(2-\frac{1}{2}+2+1\right)} = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = \frac{2}{\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{32}{105\sqrt{\pi}} \leq 1$$

$n = 2,\ k = 2\ ve\ \alpha = \frac{1}{2}$ alınırsa;

$$\frac{\Gamma(2+2+1)}{\Gamma(4-1+4+1)} = \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(8)} = \frac{4!}{7!} = \frac{1}{210} \leq 1$$

Benzer şekilde devam edilirs,e $\forall\, n, k \in Z^+ \cup \{0\}$ için Lemma (3.2) eşitsizliğinin sağlandığı açıkça görülür.

Lemma 3.3. (3.2) denklemi için

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-A)^n(-\lambda)^k\binom{n+k}{k}\frac{t^{2k-\alpha k+2n}}{\Gamma(2k-\alpha k+2n+1)}\left[u(0)+\frac{t}{2k-\alpha k+2n+1}u'(0)\right]+$$
$$\int_0^t \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-A)^n(-\lambda)^k\binom{n+k}{k}\frac{(t-p)^{2k-\alpha k+2n+1}}{\Gamma(2k-\alpha k+2n+1)}f(p)dp \leq e^{-(At^2+\lambda t^{2-\alpha})}[u(0)+$$
$$u'(0)] + \int_0^t e^{-\left(A(t-p)^2+\lambda(t-p)^{2-\alpha}\right)}f(p)dp \qquad (3.9)$$

eşitliği doğrudur.

İspat: Lemma 3.2 kullanılırsa,

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-A)^n(-\lambda)^k\binom{n+k}{k}\frac{t^{2k-\alpha k+2n}}{\Gamma(2k-\alpha k+2n+1)}\left[u(0)\right.$$
$$\left.+\frac{t}{2k-\alpha k+2n+1}u'(0)\right]$$
$$+\int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-A)^n(-\lambda)^k\binom{n+k}{k}\frac{(t-p)^{2k-\alpha k+2n+1}}{\Gamma(2k-\alpha k+2n+1)}f(p)\partial p$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-At^2)^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t^{2-\alpha)^k}}{k!} \frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(2k-\alpha k+2n+1)} \Big[u(0)$$

$$+ \frac{t}{2k-\alpha k+2n+1} u'(0)\Big]$$

$$+ \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-A(t-p)^2)^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda(t-p)^{2-\alpha})^k}{k!} \frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(2k-\alpha k+2n+1)} f(p)dp$$

elde edilir. O zaman buradan da

$$u(t) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-At^2)^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t^{2-\alpha})^k}{k!} \Big[u(0) + \frac{t}{2k-\alpha k+2n+1} u'(0)\Big]$$

$$+ \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-A(t-p)^2)^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda(t-p)^{2-\alpha})^k}{k!} f(p)dp$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-At^2)^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t^{2-\alpha})^k}{k!} [u(0) + u'(0)]$$

$$+ \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-A(t-p)^2)^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda(t-p)^{2-\alpha})^k}{k!} f(p)dp$$

$$= \mathrm{e}^{-(\mathrm{At}^2+\lambda \mathrm{t}^{2-\alpha})}[\mathrm{u}(0) + \mathrm{u}'(0)] + \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{e}^{-\left(\mathrm{A}(\mathrm{t}-\mathrm{p})^2+\lambda(\mathrm{t}-\mathrm{p})^{2-\alpha}\right)} \mathrm{f}(\mathrm{p})\mathrm{dp}$$

sonucu bulunur.

Şimdi (3.2) denklemi için kararlılık kestirimlerini aşağıdaki teorem yardımıyla verelim.

Teorem 3.1. Kabul edelim ki $A \geq \delta I,\ \Phi \in D(A),\ \psi \in D(A)\ ve\ f(t),\ [0,T]$ aralığında sürekli türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Böylece (2.9) problemi bir tek çözüme sahip olup aşağıdaki kararlılık kestirimleri elde edilir.

$$\max_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|_H \leq M \left[\|\Phi\|_H + \|\psi\|_H + \max_{0\leq t\leq T} \|f(t)\|_H\right] \qquad (3.10)$$

İspat: Lemma 3.2, Lemma 3.3 ve aşağıdaki

$$\begin{cases} \left|e^{-(At^2+\lambda t^{2-\alpha})}\right| \le 1, \ \ for \ \ all \ A \ge \delta I, \qquad \lambda > 0, \\ \left|e^{-(A(t-P)^2+\lambda(t-P)^{2-\alpha})}\right| \le 1, t \in (0,T), \ \ 0 \le p \le t, \\ \left|te^{-(A(t-P)^2+\lambda(t-P)^{2-\alpha})}\right| \le 1, t \in (0,T), 0 \le p \le t \end{cases}$$

eşitsizlik kullanılırsa,

$$\max_{0\le t\le T}\|u(t)\|_H = \left\| \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-A)^n(-\lambda)^k \binom{n+k}{k} \frac{t^{2k-\alpha k+2n}}{\Gamma(2k-\alpha k+2n+1)} \left[u(0) + \frac{t}{2k-\alpha k+2n+1}u'(0)\right] + \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-A)^n(-\lambda)^k \binom{n+k}{k} \frac{(t-p)^{2k-\alpha k+2n+1}}{\Gamma(2k-\alpha k+2n+1)} f(p)dp \right\|$$

$$\le \left\| e^{-\left(At^2+\lambda t^{2-\alpha}\right)}[u(0)+u'(0)] + \int_0^t e^{-\left(A(t-P)^2+\lambda(t-P)^{2-\alpha}\right)} f(p)dp \right\|$$

$$\le \|u(0)+u'(0)\| + \left\| \int_0^t f(p)\partial p \right\|$$

$$\le \|u(0)\| + \|u'(0)\| + \left\| \int_0^t f(p)dp \right\|$$

$$\max_{0\le t\le T}\|u(t)\|_H \le M\left[\|\Phi\|_H + \|\psi\|_H + \max_{0\le t\le T}\|f(t)\|_H\right]$$

elde edilir ki bu da teoremin ispatını tamamlanır.

Kesirli kısmi diferansiyel denklemler için pek çok nümerik metot vardır. Theta metodu bu nümerik metotlardan biridir. Theta metodu Crank – Nicholson, explicit ve inplicit metotlarından daha genel bir metottur. Şimdi abstract (3.1) Teoreminin uygulamasını verelim. İlk olarak, telegraf denklemlerinin sınır değer problemini göz önüne alalım.

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) + \alpha u_t(t,x) - (a(x)u_x)_x + \delta u(t,x) + \beta u(t,x) = f(t,x), \\ 0 < t < T\,, \quad 0 < x < L\,, \\ u(0,x) = \varphi(x), \;\; u_t(0,x) = \psi(x), \;\; 0 \le x \le L\,, \\ u(t,0) = u(t,L), \quad u_x(t,0) = u_x(t,L), \;\; 0 \le t \le T \end{cases} \tag{3.11}$$

$u(t,x),\ a(x) \ge a \ge 0,\ x \in (0,L),\ \delta > 0,\ a(L) = a(0),\ \varphi(x),\ \psi(x)\ (x \in [0,L]\ ve\ f(t,x)\ \ (t \in (0,T),\ x \in (0,L))$ fonksiyonları için (3.11) probleminin kendine has bir çözümü vardır. Bu formülün tanımladığı öz-eşlenik pozitif A^x operatörü ile (3.11) problemi, $H = L_2[0,L]$ Hilbert uzayında başlangıç değerleri ile (3.1) problemine indirgenir. Şimdi (3.11) abstract teoreminin (3.1) problemi için sonucunu gösterelim.

Teorem 3.2. Problemin (3.11) çözümleri için kararlılık eşitsizlikleri

$$\max_{0\le t\le T}\|u(t,.)\|_{w_2^1[0,L]}$$

$$\le M_1\left[\max_{0\le t\le T}\|f(t,.)\|_{L_2[0,L]} + \|\varphi\|_{w_2^1[0,L]} + \|\psi\|_{L_2[0,L]}\right], \tag{3.12}$$

$$\max_{0\le t\le T}\|u(t,.)\|_{w_2^2[0,L]} + \max_{0\le t\le T}\|u_{tt}(t,.)\|_{L_2[0,L]}$$

$$\le M_1\left[\max_{0\le t\le T}\|f_t(t,.)\|_{L_2[0,L]} + \|f(0,.)\|_{L_2[0,L]} + \|\varphi\|_{w_2^2[0,L]} + \|\psi\|_{w_2^1[0,L]}\right] \tag{3.13}$$

sağlanır.

Burada, $M_1(\alpha,\beta,\delta)\ \ f(t,x),\ \varphi(x)\ ve\ \psi(x)$ değerlerine bağlı değildir.

İspat: Problem (3.11) soyut form da yazılabilir.

$$\begin{cases} \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \alpha\frac{du(t)}{dt} + Au(t) + \beta u(t) = f(t), (0 \le t \le T) \\ u(0) = \varphi\,, \;\; u'(0) = \psi \end{cases} \tag{3.14}$$

$[0,L]$ 'de tanımlanan integrallenebilir kare fonksiyonların $L_2[0,L]$ kendinden eklemeli (eşlenik) pozitif kesin operatör $A = A^x$ ile tanımlanmış tüm fonksiyonların Hilbert uzayına soyut

$$A^x u(x) = -(a(x)u_x)_x + \sigma u(x) \tag{3.15}$$

biçimde yazılabilir.

$$D(A^x) = \{u(x): u, u_x, (a(x)u_x)_x \in L_2[0,L], u(0) = u(L), u'(0) = u'(L)\}.$$

Burada $f(t) = f(t,x)$ ve $u(t) = u(t,x)$, $[0,L]$ ile tanımlanan ve $H = L_2[0,L]$ ' deki değerlerle bilinen soyut işlevlerdir. Bu nedenle (3.12) ve (3.13) hesaplamaları (3.5), (3.6) ve (3.7) hesaplamalarından sonra gelmektedir. Böylece teorem 3.2. kanıtlanır. İkinci olarak, $\Omega \subset R$ 'nin düz sınırlarla $S, \Omega^- = \Omega \cup S$ açık alana bağlanmasına izin verir.

Telegraf denklemleri $[0,T] \times \Omega$ için sınır değer problemini

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) + \alpha u_t(t,x) - \sum_{r=1}^{n} (a_r(x)u_{x^r})x_r + \beta u(t,x) = f(t,x) \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, \ \ 0 < t < T, \\ u(0,x) = \varphi(x), \ \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = \psi(x), \ \ x \in \Omega' \\ u(t,x) = 0\,, \quad x \in S, \ \ 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{3.16}$$

göz önüne alıyoruz.

Burada $a_r(x), (x \in \Omega), \varphi(x), \psi(x)\ (x \in \Omega')$ ve $f(t,x), t \in (0,T), x \in \Omega$ fonksiyonlar ve $a_r(x) > 0$

ve

$$\|f\|_{L_2(\Omega')} = \left\{ \int \dots \int_{x \in \Omega'} |f(x)|^2 dx_1 \dots dx_n \right\}^{\frac{1}{2}}$$

normuyla verilen formül Ω' bölgesinde ve Hilbert $L_2(\Omega')$ uzayında tanımlanan integrallenebilir fonksiyondur.

Teorem 3.3. (3.16) probleminin çözümü için denge eşitsizlikleri

$$\max_{0 \le t \le T} \|u(t,.)\|_{w_2^1(\Omega')}$$

$$\le M_1 \left[\max_{0 \le t \le T} \|f(t,.)\|_{L_2(\Omega')} + \|\varphi\|_{w_2^1(\Omega')} + \|\psi\|_{L_2(\Omega')} \right], \tag{3.17}$$

$$\max_{0 \le t \le T} \|u(t,.)\|_{w_2^2(\Omega')} + \max_{0 \le t \le T} \|u_{tt}(t,.)\|_{L_2(\Omega')}$$

$$\le M_1 \left[\max_{0 \le t \le T} \|f_t(t,.)\|_{L_2(\Omega')} + \|f(0,.)\|_{L_2(\Omega')} + \|\varphi\|_{w_2^2(\Omega')} + \|\psi\|_{w_2^1(\Omega')} \right] \tag{3.18}$$

M_1 değeri $f(t,x)$ ve $\varphi(x),\ \psi(x)$ fonksiyonlarına bağlı değildir.

İspat: Problem (3.16) pozitif özeşlenik (sel-adjoint positive operator) olan $A = A^x$ operatörü, $L_2(\Omega')$ Hilbert uzayında

$$A^x u(x) = -\sum_{r=1}^{n}(a_r(x)u_{x^r})x_r + \sigma u(x) \tag{3.19}$$

formülüyle

$$D(A^x) = \Big\{u(x): u(x), u_{x_r}, \big(a_r(x)u_{x_r}\big)_{x_r} \in L_2(\Omega'), \qquad 1 \le r \le n,$$
$$u(x) = 0, x \in S\Big\}$$

bölgesinde tanımlıdır.

Burada $f(t) = f(t,x)$ bilinen ve $u(t) = u(t,x)$ bilinmeyen soyut fonksiyonlar $H = L_2(\Omega')$ değeriyle Ω' 'de tanımlanmıştır. Bu yüzden (3.17), (3.18), (3.5), (3.6) ve (3.7) formülleri kullanılarak teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.4. Eliptik diferansiyel problemin çözümleri için (Sobolevskii,1975 bakınız.)

$$\begin{cases} A^x u(x) = w(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in S, \end{cases}$$

formülü ve aşağıdaki eşitsizlik

$$\sum_{r=1}^{n} \left\| u_{x_r x_r} \right\|_{L_2(\Omega')} \le M_1 \|w\|_{L_2(\Omega')}.$$

doğrudur. Burada $M_1,\ w(x)$ fonksiyonuna bağlı değildir.

Bir sonraki bölümde, problem (3.1) 'in yaklaşık çözümü için birinci ve ikinci dereceden doğruluk farkı şemaları incelenmiştir. Birinci ve ikinci doğruluk farkı şemalarının çözümü için kararlılık tahminleri (hesaplamaları) oluşturulmuştur.

Uygulamalarda iki karışık problem (3.11) ve (3.16) 'in yaklaşık çözümü için fark şemaları sunulmuştur. İki karışık problem (3.11) ve (3.16) fark şemalarının çözümü için kararlılık tahminleri (hesaplamaları) oluşturulmuştur.

3.2. Theta Metodunun Matris Kararlılığı

Tanım 3.2.1. Theta metodu $0 \leq \theta \leq 1$ olmak üzere ikinci mertebeden $u_{xx}(t,x)$ için

$$u_{xx}(t,x) \cong \frac{1}{h^2}\theta\delta_{2,x}U_{n,k+1} + (1-\theta)\delta_{2,x}U_{n,k}$$

genel fark yaklaşımı şeklinde tanımlanır. Bu denklem aynı zamanda

$$\delta_{2,x}U_{n,k} = \frac{1}{\Delta x}(U_{n+1,k} - 2U_{n,k} + U_{n-1,k})$$

olarak da yazılabilir.

Burada $h = \frac{x_R - x_L}{M}$, x ekseni ve $U_{n,k} = U_n^k = U(t_k, x_n)$ için nümerik yaklaşık çözümü temsil eder. Diğer bir deyişle; x değişkenine göre Taylor açılımı yapılırsa, uzaya bağlı bu denklem

$$u_{xx}(t,x) \cong \frac{1}{h^2}\{[\theta[U_{n+1}^{k+1} - 2U_n^{k+1} + U_{n-1}^{k+1}] + (1-\theta)[U_{n+1}^k - 2U_n^k + U_{n-1}^k]\} \quad (3.20)$$

şeklinde de ifade edilir.Eğer (3.20) formülünde

θ=0 ise Explicit fark metodu
θ=1 ise Implicit fark metodu
$\theta = \frac{1}{2}$ ise Crank-Nicholson fark metodu
olarak bilinir.

t değişkenine göre Taylor açılımı kullanılarak

$$u_{tt}(t,x) = \frac{U_n^{k+1} - 2U_n^k + U_n^{k-1}}{\tau^2} \tag{3.21}$$

formülü elde edilir.

Tanım 3.2.2. Caputo türevi için birinci mertebeden yaklaşık metodu verilen problemin hesaplanması için:

$$D_t^\alpha U_n^k \cong g_{\alpha,\tau} \sum_{j=1}^{k} w_j^{(\alpha)} (U_n^{k-j+1} - U_n^{k-j}) \tag{3.22}$$

formülünden yararlanılır.

Burada $g_{\alpha,\tau} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}$ ve $w_j^{(\alpha)} = j^{1-\alpha} - (j-1)^{1-\alpha}$

(1.5) denklemi denklemine karşılık gelen birinci mertebeden fark şeması

$$\frac{\partial^\alpha u(t_k,x_n)}{\partial t^\alpha} = g_{\alpha,\tau}[w_1 U_n^k - w_k U_n^0 + \sum_{j=1}^{k-1}(w_{k-j+1} - w_{k-j}) u_n^j] \tag{3.23}$$

şeklinde olur.

Farz edelim ki $h = \frac{x_R - x_L}{M}$ x-ekseni ve $\tau = \frac{T}{N}$ t-ekseni grid karşılığı olarak,
o zaman;

$$x_n = x_L + nh;\ n = 1,2,\dots,M\, t_k = k\tau\ ,\ k = 1,2,\dots,N$$

Theta metodu için (3.17), (3.18) ve (3.20) formülleri kullanılarak, (3.1) telegraf kısmi diferansiyel denklemi için fark şeması

$$\begin{cases} \frac{U_n^{k+1} - 2U_n^k + U_n^{k-1}}{\tau^2} + \lambda g_{\alpha,\tau} \sum_{j=1}^{k} w_j^{(\alpha)} \left(U_n^{k-j+1} - U_n^{k-j}\right) + \theta U_n^{k+1} + (1-\theta) U_n^k \\ -\frac{1}{h^2}\theta\left\{\left(U_{n+1}^{k+1} - 2U_n^{k+1} + U_{n-1}^{k+1}\right) + (1-\theta)U_{n+1}^k - 2U_n^k + U_{n-1}^k\right\} = f_n^k \\ f_n^k = f(t_k, x_n), \\ U_n^0 = \emptyset(x_n), \frac{U_n^1 - U_n^0}{\tau} = \psi(x), \\ U_0^k = U_M^k = 0, 0 \le k \le N \end{cases}$$

(3.24)

şeklinde elde edilir.

(3.24) formülü

$$\begin{cases} \left[\left(-\frac{\theta}{h^2}\right)U_{n-1}^{k+1}+\left(\frac{2\theta}{h^2}+\frac{1}{\tau^2}+\theta\right)U_n^{k+1}+\left(-\frac{\theta}{h^2}\right)U_{n+1}^{k+1}\right] \\ +\left[\left(-\frac{1-\theta}{h^2}\right)U_{n-1}^{k}+\left(\frac{2(1-\theta)}{h^2}-\frac{2}{\tau^2}+1-\theta\right)U_n^{k}+\left(-\frac{1-\theta}{h^2}\right)U_{n+1}^{k}\right] \\ +\frac{1}{\tau^2}U_n^{k-1}+g_{\alpha,\tau}[w_1U_n^k-w_kU_n^0+\sum_{j=1}^{k-1}(w_{k-j+1}-w_{k-j})u_n^j] \\ =f_n^k=f(t_k,x_n), \\ U_n^0=\emptyset(x_n),\frac{U_n^1-U_n^0}{\tau}=\psi(x),1\le n\le M \\ U_0^k=U_M^k=0,0\le k\le N \end{cases} \tag{3.25}$$

olarak yeniden yazılabilir.

Başlangıç değer koşullarını kullanarak, (3.25) fark şeması formülü matris formunda

$$\begin{cases} U^1=U^0+\tau\psi \\ AU^{k+1}=BU^k+CU^{k-1} \\ -\lambda g_{\alpha,\tau}\left[w_1U_n^k-w_kU_n^0+\sum_{j=1}^{k-1}(w_{k-j+1}-w_{k-j})U^j\right]+\varphi_n^k, \\ f_n^k=f(t_k,x_n), \\ U_n^0=\Phi(x_n),\ \frac{U_n^1-U_n^0}{\tau}=\psi(x_n)\ ,1\le n\le M. \\ U_0^k=U_M^k=0\ ,0\le k\le N. \end{cases} \tag{3.26}$$

olarak yazılabilir.

Burada $\varphi_n^k=\left[\varphi_0^k,\varphi_1^k,\dots,\varphi_M^k\right]^T$, $\varphi_n^0=\Phi(x_n)$, $\varphi_n^k=f_n^k=f(t_k,x_n),1\le n\le M$, $1\le k\le N$ ve $U^k=\left[U_0^k,U_1^k,\dots,U_M^k\right]^T$. Burada A ve B simetrik tridiogonal matrisler ve C diyagonal matristir.

$$A=\begin{bmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ y & x & y & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & y & x \end{bmatrix}_{(N-1)x(N-1)},$$

burada $x = \frac{2\theta}{h^2} + \frac{1}{\tau^2} + \theta\,, y = -\frac{\theta}{h^2}$,

$$B = \begin{bmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & a \end{bmatrix}_{(N-1)x(N-1)}$$

burada $a = -\frac{2(1-\theta)}{h^2} + \frac{2}{\tau^2} - 1 + \theta, b = \frac{1-\theta}{h^2}$, ve

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau^2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{\tau^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau^2} \end{bmatrix}_{(N-1)x(N-1)}$$

dır.

Şimdi metodun kararlılığı için, $\|A\| = \|A\|_\infty = \max_{1\le k\le N-1}\{\sum_{i=1}^{N-1}|a_{ki}|\}$ normunu kullanalım.

Burada $A = [a_{ki}]_{(N-1)x(N-1)}$, I birim matrisi ifade ediyor.

Lemma 3.3. Eğer $\frac{2}{\tau^2} - \frac{2(1-\theta)}{h^2} - (1-\theta) - \lambda g_{\alpha,\tau} w_1 > 0$ eşitliği sağlanırsa

$$\|A^{-1}B\| \le 1$$

dır.

İspat: Yukarıdaki A ve B matrisleri kullanılırsa,

$$\|A^{-1}B\| \leq \|A^{-1}\|\|B\| \leq \frac{1}{\min\limits_{1\leq k\leq N-1}\left\{|a_{kk}| - \sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{N-1}|a_{km}|\right\}}\|B\|$$

$$\leq \frac{\left|\frac{2}{\tau^2} - \frac{2(1-\theta)}{h^2} - 1 + \theta - \lambda g_{\alpha,\tau} w_1\right| + \left|\frac{1-\theta}{h^2}\right| + \left|\frac{1-\theta}{h^2}\right|}{\left|\frac{2\theta}{h^2} + \frac{1}{\tau^2} + \theta\right| - \frac{\theta}{h^2}} - \frac{\theta}{h^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{\tau^2} - \frac{2(1-\theta)}{h^2} - 1 + \theta - \lambda g_{\alpha,\tau} w_1 + \frac{1-\theta}{h^2} + \frac{1-\theta}{h^2}}{\frac{2\theta}{h^2} + \frac{1}{\tau^2} + \theta - \frac{\theta}{h^2} - \frac{\theta}{h^2}}$$

$$= \frac{\frac{2}{\tau^2} - 1 + \theta - \lambda g_{\alpha,\tau} w_1}{\frac{1}{\tau^2} + \theta} \leq 1$$

sonucu elde edilir.

Lemma 3.4. Eğer $\frac{2}{\tau^2} - \frac{2(1-\theta)}{h^2} - ((1-\theta) - \lambda g_{\alpha,\tau} w_1) > 0$ koşulu sağlanıyorsa,

$$\left\|A^{-1}(B - \lambda g_{\alpha,\tau} w_1)\right\| + \left\|A^{-1}\lambda g_{\alpha,\tau} w_1\right\| \leq 1$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat:

$$\left\|A^{-1}(B - \lambda g_{\alpha,\tau} w_1)\right\| + \left\|A^{-1}\lambda g_{\alpha,\tau} w_1\right\| \leq \|A^{-1}\|\left\|B - \lambda g_{\alpha,\tau} w_1\right\| + \left\|A^{-1}\lambda g_{\alpha,\tau} w_1\right\|$$

$$\leq \frac{\frac{2}{\tau^2} - 1 + \theta - \lambda g_{\alpha,\tau} w_1}{\frac{1}{\tau^2} + \theta} + \frac{\lambda g_{\alpha,\tau} w_1}{\frac{1}{h^2} + \theta} \leq 1.$$

Lemma 3.5. $\|A^{-1}C\| \leq 1.$

İspat:

$$\|A^{-1}C\| \leq \|A^{-1}\|\|C\|$$

$$\leq \frac{1}{\min\limits_{1\leq k\leq N-1}\left\{|a_{kk}| - \sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{N-1}|a_{km}|\right\}}\|C\|$$

$$\leq \frac{\left|-\frac{1}{\tau^2}\right|}{\left|\frac{2\theta}{h^2} + \frac{1}{\tau^2} + \theta\right| - \left\{\left|-\frac{\theta}{h^2}\right| + \left|-\frac{\theta}{h^2}\right|\right\}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\tau^2}}{\frac{2\theta}{h^2} + \frac{1}{\tau^2} - \frac{\theta}{h^2} - \frac{\theta}{h^2}} = \frac{\frac{1}{\tau^2}}{\frac{1}{\tau^2} + \theta} \leq 1.$$

Teorem 3.5: Eğer

$$\frac{2}{\tau^2} - \frac{2(1-\theta)}{h^2} - (1-\theta) - \lambda \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} > 0$$

şartı sağlanmak koşuluyla, o zaman (3.26) denklemi kararlıdır.

İspat: (Modanli ve Akgül, 2018) deki benzer prosedürü kullanılır ve 3.3-3.5 Lemmaları uygulanırsa yukarıda ifade edilen teoremin ispatı tamamlanır.

4.ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Nümerik Uygulama

Uygulamalarda problemlerin çözümü için kararlılık kestirimleri teoremleri oluşturulabilir. Fark şemalarının çözümü için teorik ifadeler, sayısal deney sonucunu destekleyebilir. Kararlılık eşitsizliği tespit eden sabitler için net bir kestirim elde edemedik. Bu nedenle sınır değer problemi için sayısal deneylerin sonuçlarını vereceğiz.

Örnek 4.1: Kesirli telegraf kısmi diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümünü

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}+\frac{\partial^\alpha u(t,x)}{\partial t^\alpha}-\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+u(t,x)=\sin x\left(6t+6\frac{t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}+2(t^3+1)\right), \\ 0<x<\pi\,,0<t<1,0\le\alpha\le 1,\lambda=1 \\ u(0,x)=\sin x\,,u_t(0,x)=0\,,0\le t\le 1 \\ u(t,0)=u(t,\pi)=0\,,0<x<\pi \end{cases} \tag{4.1}$$

Theta metodu yardımıyla bulalım. Bu problemin tam çözümünün $u(t,x)=(t^3+1)\sin x$ olduğunu 1. Bölümden biliyoruz. (4.1) problemine karşılık gelen fark yaklaşımı için, başlangıç-sınır değer probleminin yaklaşık çözümü için τ ve h 'nin küçük parametrelerine bağlı olarak bir grid noktası(ızgara noktası) $w_{\tau,h}=[0,1]_\tau x[0,\pi]_h$ ailesi kümesi olarak tanımlanır. Bu problemin yaklaşık çözümü için, x fark şemasında birinci mertebeden doğruluk derecesini, t ikinci mertebeden doğruluk derecesi olmak üzere,

$$\begin{cases} \frac{u_n^{k+1}-2u_n^k+u_n^{k-1}}{\tau^2}+\frac{u_n^{k+1}-u_n^k}{\tau}-\frac{u_{n+1}^{k+1}-2u_n^{k+1}+u_{n-1}^{k+1}}{h^2}+u_n^{k+1} \\ =\exp(-t_{k+1})\sin x_n\,,x_n=nh\,,t_{k+1}=(k+1)\tau, \\ 1\le k\le N-1,1\le n\le M-1, \\ u_n^0=\sin x_n, \\ \frac{u_n^1-u_n^0}{\tau}=0 \\ u_0^k=u_M^k=0,0\le k\le N \end{cases} \tag{4.2}$$

olarak elde edilebilir.

Bu fark denklemlerini çözmek için Modifiye Gauss Eliminasyon metodunun bir prosedürü uygulanır. Bu nedenle aşağıdaki formda bir matris denkleminin çözümünü

$$u_j = \alpha_{j+1}u_{j+1} + \beta_{j+1}, u_M = 0,\ j = M-1, \dots, 2, 1 \tag{4.3}$$

arayalım.

Burada $\alpha_j\ (j = 1,2, \dots, M), (N+1)x(N+1)$ tipinde kare matrisi ve $\beta_j\ (j = 1,2, \dots, M,\ (N+1)x1$ tipinde kolon matrisidir.

(4.3) formülü kullanılarak

$$\alpha_{j+1} = -\left(B + C\alpha_j\right)^{-1}A,$$
$$\beta_{j+1} = \left(B + C\alpha_j\right)^{-1}\left(D\Phi - C\beta_j\right), j = 1,2, \dots, M-1$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Burada $\alpha_1\ (j = 1,2, \dots, M), (N+1) \times (N+1)$ tipinde sıfır matrisi ve $\beta_1\ (j = 1,2, \dots, M,\ (N+1) \times 1$ tipinde sıfır matrisidir.

Theta metoduyla telegraf denklemlerin yaklaşık çözümünü elde etmek için

$$E_M^N = \max_{1 \le k \le N-1, 1 \le n \le M-1} |u(t_k, x_n) - u_n^k|,$$

formülü yardımıyla tanımlanan hata analizi kullanılır. Burada $u(t_k, x_n)$ tam çözümü ve $u_n^k(t_k, x_n)$ de yaklaşık çözümü gösterir.

Aşağıdaki Örnek

Örnek 4.2: Aşağıdaki kesirli telegraf kısmi diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + \frac{\partial^\alpha u(t,x)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + 6u(t,x) \\ = 6(x^2 - 3x + 2)(t^3 + t + 1 + \frac{t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - 2(t^3 + 1), \\ 1 < x < 2, 0 < t < 1, \ \ 0 \le \alpha \le 1, \ \ \lambda = 1, \\ u(0,x) = x^2 - 3x + 2, \ \ u_t(0,x) = 0, \ \ 0 \le t \le 1 \ , \\ u(t,1) = u(t,2) = 0, \ \ 1 \le x \le 2. \end{cases} \tag{4.4}$$

Laplace dönüşüm yöntemi kullanılarak (4.4) denkleminin tam çözümü $u(t,x) = (t^3 + 1)(x^2 - 3x + 2)$ olarak elde edilir. (4.4) denklemine karşılık gelen fark şeması yani Theta metodu fark şeması için (4.2) formülü kullanılarak yaklaşık çözümü için aşağıdaki Tablo'daki nümerik sonuçlar elde edilir.

Hata Analizi Tablosu

$\tau = \frac{1}{N}, h = \frac{\pi}{M}$ aralığında (4.1) örneğinin uygulaması					$\tau = \frac{1}{N}, h = \frac{1}{M}$ aralığında (4.4) örneğinin uygulaması		
	$\propto/\theta$	0.1	0.5	0.9	0.1	0.5	0.9
$N = M = 40$	0.1	0.0594	0.0248	0.0092	0.0149	0.0019	0.0116
	0.5	0.0587	0.0242	0.0097	0.0148	0.0019	0.0113
	0.9	0.0691	0.0341	0.0020	0.0162	0.0030	0.0095
$N = M = 80$	0.1	0.0298	0.0126	0.0046	0.0073	9.9850×10^{-4}	0.0059
	0.5	0.0290	0.0118	0.0052	0.0072	9.6160×10^{-4}	0.0058
	0.9	0.0338	0.0166	8.8958×10^{-4}	0.0079	0.0015	0.0048
$N = M = 160$	0.1	0.0149	0.0063	0.0023	0.0036	5.1297×10^{-4}	0.0030
	0.5	0.0144	0.0058	0.0028	0.0036	5.0779×10^{-4}	0.0029
	0.9	0.0166	0.0081	4.0349×10^{-4}	0.0039	4.7704×10^{-4}	0.0025

5.SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tezde, Caputo kesirli türeviyle tanımlana kesirli mertebeden telegraf kısmi diferansiyel denklemin abstract formunun tam çözümleri ve bu tam çözüm için kararlılık kestirimleri verildi. Bu denklem için birinci mertebeden fark şemaları inşa edildi. Bu Theta metodu yardımıyla oluşturulan fark şemaları için kararlılık eşitsizlikleri ispatlandı. Matlab programı yardımıyla elde edilen algoritmalar kullanılarak bu denklemlerin yaklaşık çözümleri θ nın farklı değerleri için hesaplandı. Bulunan bu yaklaşık sonuçlar tam çözümlerle karşılaştırılarak hata analizi yapıldı.

KAYNAKÇA

AKGÜL, A., INC, M. ve BALEANU, D., 2017. On solutions of variable-order fractional differential equations, An International Journal of Optimization and Control**:** Theories and Applications**,** 3(7-1):112-116.

ASHYRALYEV, A. and DAL, F., 2012.Finite Difference and Iteration Methods for Fractional Hyperbolic Partial Differential Equations with the Neumann Condition, Discrete Dynamicsin Nature and Society, 1-15.

ASHYRALYEV, A. and MODANLI, M., 2015. An operator method for telegraph partial differential and difference equations, Boundary Value Problems, 1:1-17.

ASHYRALYEV, A. and SOBOLEVSKII, P.E., 2014. New Difference Schemes for Partial Differential Equations, Birkhauser**,**Verlag**,** Basel**,** Boston**,** Berlin.

ASLEFALLAH, M., ROSTAMY, D. ve HOSSEİNKHANİ, K., 2014. Solving time fractional differential diffusion equation by theta method, International Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2:1-8.

CELİK, C. ve DUMAN M., 2012. Crank Nicholson method for the fractional equation with the Riezs fractional derivative**,** Journal of computational physics, 231:1743-1750.

CHANGPİN, L. and FANHAİ, Z., 2013. The Finite Difference Methods for Fractional Ordinary Differential Equations, Numerical Functional Analysis and Optimization, 34(2):149-179.

CHEN, H., XU, D., CAO, J. and ZHOU, J., 2017. A. back ward Euler alternating direction implicit difference scheme for the three-dimensional fractional evolution equation, Numerical Methods for Partial Differential Equation**,** 226p.

GORIAL, I.I., 2011. Numerical methods for fractional reaction-dispersion equation with Rieszspace fractional derivative, Engineering**.** And Techology Journal, 29:709-715.

JAFARI, H. and GEJII, V.D., 2006. Solving linear and nonlinear fractional diffusionan dwave equations by adomian decomposition, *Applied Mathematicsand Computation*, 180:488-497.

KARATAY, I., BAYRAMOĞLU, S. R. ve SAHİN, A., 2011. Implicit difference approximation for the time fractional heat equation with the nonlocal condition, Applied Numerical Mathematics**,** 61:1281-1288.

KARATAY, I., BAYRAMOĞLU, S. R. and SAHİN, A., 2013. A new difference scheme for time fractional heat equation based on the Crank-Nicholson method, Fractional Calculus and Applied Analysis, 16:892-910.

KARATAY, I., KALE, N. ve BAYRAMOĞLU ERGUNER S.R., 2014. Stability and Convergence of a Finite Partial Diferential Equations by Matrix Method,International Mathematical Forum, 9:1757-1765.

KUMAR, S., 2014. A new analytical modelling for fractional telegraph equation via Laplace transform**,** Applied Mathematical Modelling**,** 38:3154-3163.

MODANLI ,M., 2018. Kesirli Telegraf kısmi diferansiyel denklemlerin fark şeması metodu ile numeric çözümü , BAUN Fen bilimleri Enstitüsüsü Dergisi, 1-10.

MODANLI , M., 2018. Two numerical methods for franctional partial differential equation with nonlocal boundary value problem , advance in differential equation (Under Review).

MODANLI, M. ve AKGÜL, A., 2017. On solution stothe second-order partial differential equations by two accurate methods, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 1-15.

PODLUBNY, I., 1994. Fractional-order systems and fractional-order controllers. Institute of Experimental Physics, Slovak Academy of Sciences, Kosice, 12(3):1-18.

PODLUBNY, I., 1998. Fractional differential equations: an introduction to fractionalderivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. Elsevier.

SRIVASTAVA, V. K., AWASTHI, M. K. and TAMSIR, M., 2013. RDTM solution of Caputo time fractional-order hyperbolic telegrap hequation, AIP advances**,** 3:1-11.

SU, L., WANG, W. and YANG, Z., 2009. Finited ifference approximations for the fractional advection-diffusion equation, Physics LettersA, 373:4405 4408.

SZEKERES, B. and IZSAK, F., A finite difference method for fractional diffusion equations with Neumann boundary conditions, Open Mathematics, 13(1), pp. -. Retrieved 21 Feb. (2018), from doi:10.1515/math-2015-0056.

TADJERAN, C.,Meerschaert, M. M. and Scheffler, H. P., 2006. A Second-order Accurate Numerical Approximationfor the Fractional Diffusion Equation, Journal of Computational Physics, 213:205-213.

YAŞAR,İ.B., 2005. Laplace Transform Metodu, Uygulamalı Matematik Siyasal kitabevi

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Ebru BAZ
Uyruğu	:T.C
Doğum Yeri ve Tarihi	:BATMAN/15.07.1990
Telefon	:0553 833 22 41
E-mail	:umutbazik72@icloud.com

EĞİTİM

Derece	**Adı, İlçe, İl,**	**Bitirme Yılı**
Lise	:Sason Anadolu Lisesi Sason BATMAN	2007
Üniversite	:Harran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	2014
Yüksek Lisans	:Harran Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü , Matematik Bölümü Haliliye ŞANLIURFA	2019

İŞ DENEYİMLERİ

YIL	**KURUM**	**GÖREVİ**
2014-2015	MEB	Matematik Öğretmeni
2014-2015	MEB	Sınıf öğretmeni
2015-2017	MEB	Matematik Öğretmeni
2017-2018	MEB	Matematik Öğretmeni
2018-2019	MEB	Matematik Öğretmeni

YABANCIDİLLER

İngilizce

Arapça

Kürtçe