T.C
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SZASZ OPERATÖRLERİNİN BİR GENELLEŞTİRMESİ

Naıruz OUSMAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2019

Doç. Dr. Aydın İZGİ danışmanlığında, Nairuz OUSMAN'ın hazırladığı **"Szasz Operatörlerinin Bir Genelleştirmesi"** konulu bu çalışma 27/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

İmza

Danışman : Doç. Dr. Aydın İZGİ .....

Üye : Doç. Dr. Sevilay KIRCI SERENBAY .....

Üye : Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN .....

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım

Doç. Dr. İsmail HİLALİ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET.....i
ABSTRACT.....ii
TEŞEKKÜR.....iii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....iv
ÇİZELGELER DİZİNİ.....v
SİMGELER DİZİNİ.....vi
1.GİRİŞ.....1
1.1 Temel Kavramlar.....1
2.ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....10
3. MATERYAL ve YÖNTEMLER.....12
3.1 Materyal.....12
3.2 Yöntem.....12
4.ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA.....13
5.SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....29
5.1 Sonuçlar.....29
5.2 Öneriler.....30
KAYNAKLAR.....31
ÖZGEÇMİŞ.....32

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SZASZ OPERATÖRLERİNİN BİR GENELLEŞTİRMESİ

Naıruz OUSMAN

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Aydın İZGİ
Yıl: 2019, Sayfa:32

Bu çalışmada, fonksiyonel analizdeki yaklaşım teorisi konusu üzerinde yapılan çalışmalardan bahs edilmiştir.Yaklaşım teorisinde kullanılan Szasz polinomlar tanıtılmıştır. $N_n(f,x)$ operatörünün reel eksenin kapalı alt aralıkları üzerinde yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızı incelenmiştir. Sonra Voronovskaya tipi yaklaşım ve Lipschitz şartı sağlayan fonksiyonlar kullanılarak $N_n(f,x)$ operatörünün yaklaşımı incelenmiştir.Son olarak $N_n(f,x)$ operatörünün sürekli bir fonksiyona yaklaşımı Mapple programı yardımıyla grafik çizilerek gösterilmiştir. $N_n(f,x)$ operatörünün "n" ve "x" in bazı değerleri için sürekli bir fonksiyona yaklaşımın sayısal değerler tablosu hazırlanmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Lineer pozitif operatörler ,yaklaşım hızı, korovkin teoremi, voronovskaya tip yaklaşım, lipschitz şartıö

ABSTRACT

MSc Thesis

A GENERALİZATİON OF SZASZ OPERATORS

Naıruz OUSMAN

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Aydın İZGİ
Year:2019, Page:32

In this study, in the functional analysis studies on the theory of approach are mentioned. Szasz polynomials which the used in the approximation theory were introduced. $N_n(f,x)$ operator Rate of approach and approach properties were examined on the real axis closed lower ranges. Then, the approach of $N_n(f,x)$ operator is examined by using Voronovskaya type approach and Lipschitz condition functions. Finally, approximation of the operator $N_n(f,x)$ to a continuous function was graphed with the use of Mapple program. A numerical table was given for some "n" and "x " values of the approach to a continuous function.

KEY WORDS: Linear positive operators ,rate of approximation, korovkin theorem, voronovskaya type approach, lipschitz conditions.

TEŞEKKÜR

Tez konusunun seçiminde ve çalışmalarım boyunca fikir ve yönlendirmeleriyle yardımlarını esirgemeyen değerli danışmanım Doç. Dr. Aydın İZGİ' ye sonsuz teşekkür ederim.Her zaman yanımda olduklarını hissettiren sevgili aileme çok teşekkür ederim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 4.1. $f(x) = e^{\frac{-x}{5}} \sin 3\pi x, n$=30 için yaklaşım grafiği.....25
Şekil 4.2. $f(x) = e^{\frac{-x}{5}} \sin 3\pi x\,, n$=200 için yaklaşım grafiği.....25
Şekil 4.3. $g(x) = \frac{e^{\frac{-x}{3}} \sin \pi x}{1+x}\,, n$=30 için yaklaşım grafiği.....26
Şekil 4.4. $g(x) = \frac{e^{\frac{-x}{3}} \sin \pi x}{1+x}\,, n$=300 için yaklaşım grafiği.....26

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

Çizelge 4.1. $f(x) = e^{\frac{-x}{5}} \sin 3\pi x$ fonksiyonuna yaklaşımının sayısal değerler tablosu.....27
Çizelge 4.2. $K(x)=\left|\frac{N_n(f;x)-f(x)}{S_n(f;x)-f(x)}\right|, N_n(f;x)\ ile\ S_n(f;x)$ operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşımının karşılaştırılmasının sayısal değerler tablosu.....28

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

f_n : ($n \in \mathbb{N}$ için) bir fonksiyon dizisi
$T_n(f;x)$: (T_n) operatör dizisi
$f_n \rightrightarrows f$: (f_n) fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması
$S_n(f;x)$: Szasz polinomlar dizisi
$N_n(f;x)$: Modifie edilmiş Szasz polinomlar dizisi
$W(f;\delta)$: f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\| \quad \|$: Norm fonksiyonu
$\| \quad \|_{C[a,b]}$: $C[a,b]$ sınıfında, $\| \quad \|_{C[a,b]} = max_{a \le x \le b} | \quad |$ ile tanımlı standart norm

1.GİRİŞ

Yaklaşımlar teorisi 1885 yılında weiertrass ile başladı 1912 de Bernstein'ın weiertrass teoremine verdiği örnekle devam etti .

1951 yılında korovkin teormi ile birlikte, Bernstein polinomları ve onun geneleştirmeleri üzerindeki çalışmalar hız kazandı ve hala devam etmektedir.

Düzgün olmayan eğri ve yüzeylere, düzgün eğri ve yüzeyler elde etmek için (Bernstein polinomlarının $[0,1]$ aralığnda iken) szasz opreatörleri ile $[0,\infty)$ aralığında yaklaşım yapılmaktadır.

Bu tezde 1950 yılında Bernstein polinomlarının bir genelleştirmesi olarak O.Szasz tarafından Szasz operatörlerinin bir genelleştirmesini çalışacaktır. Szasz operatorleri aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$S_n(f;x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\right)\ 0 \le x < \infty \tag{1.1}$$

Bu tezde $a, b \in \mathbb{N}$ ve $0 \le a \le b$ olmak üzere aşağıda tanımlanan $N_n(f;x)$ operatörler dizisi çalışılacaktır,

$$N_n(f;x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\frac{n+a}{n+b}\right)\ 0 \le x < \infty \tag{1.2}$$

Burada $a = b$ olması durumunda Szasz operatörleri elde edilir. Bu neden ile $N_n(f;x)$, $S_n(f;x)$ in bir genellemesidir.

1.1. Temel Kavramlar

Tanım 1.1.1

X ve Y reel değerli fonksiyon sınıfları olsun, $T: X \to Y$şeklinde tanımlanan dönüşümlere operatör denir.

Tanım 1.1.2

X ve Y reel değerli fonksiyon sınıfları olsun, $T: X \to Y$

şeklindeki T operatörü $\forall f, g \in$ X ve $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için,

$$T(af + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g) \tag{1.3}$$

eşitliğini sağlıyorsa T operatörüne lineer operatör denir.

Tanım 1.1.3

X ve Y reel değerli fonksiyon sınıfları olsun. Kabul edelim ki

$X^+ = \{f \in X: f \geq 0\}$, $Y^+ = \{g \in Y: g \geq 0\}$ olsun.

$T: \mathrm{X}^+ \to \mathrm{Y}^+$ dönüşümü sağlanıyorsa T operatörüne pozitif operatör denir.

hem lineer hem de pozitif olan operatöre lineer pozitif operatör denir.

Teorem 1.1.1

T lineer pozitif operatörler monoton artandır. Yani,

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow T(f;x) \leq T(g;x) \tag{1.4}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

T lineer pozitif operatörü için $T(X^+) \subset Y^+$ sağlanır. Yani $f(x) \geq 0$ olduğunda $T(f;x) \geq 0$ olur.

O halde $\forall\, x$ için,

$$f(x) \leq g(x)$$

olduğunda,

$$g(x) - f(x) \geq 0$$

Olur. T operatörü pozitif olduğundan,

$$T(g(x) - f(x);x) \geq 0$$

T operatörü lineer olduğundan,

$$T(g(x);x) - T(f(x);x) \geq 0 \Rightarrow T(g;x) \geq T(f;x)$$

sağlanır ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 1.1.2

T lineer pozitif operatörü olmak üzere,

$$|T(f)| \leq T(|f|) \tag{1.5}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

Herhangi bir f fonksiyonu için,

$$-|f| \leq f \leq |f| \tag{1.6}$$

(1.6)'den ve T operatörünün lineer, pozitif ve monotonluğundan yararlanarak,

$$T(-|f|) \leq T(f) \leq T(|f|)$$

yazabiliriz. T lineer olduğundan,

$$-T|f| \leq T(f) \leq T(|f|) \Rightarrow |T(f)| \leq T(|f|)$$

olurki bu da ispatı tamamlar .

Tanım 1.1.4

$X \subset \mathbb{R}$ ve X üzerinde tanımlı bütün fonksiyonların kümesi $F(X)$ olsun. $d: \mathbb{N} \to F(X)$ şeklinde tanımlı d fonksiyonuna bir fonksiyon dizisi denir. Fonksiyon dizisi (f_{n}), terimleri ise f_1, f_2, f_3 ... şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.5

$l = \{T: C[a.b] \to C[a,b]: T \text{ lineer pozitif operatör }\}, \mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$ olsun $T: \mathbb{N} \to l$ şeklinde tanımlı T fonksiyonuna lineer pozitif operatör dizisi adı verilir ve (T_n) ile gösterilir. $T(\mathbb{N}) = (T_1, T_2, T_3, \dots\dots)$ şeklindedir.

Tanım 1.1.6

$f \in C[a,b]$olmak üzere $C[a,b]$ üzerinde tanımlı norm

$$\|f\|_{C[a,b]} = max_{a \leq x \leq b}|f(x)| \qquad (1.7)$$

şeklinde gösterilir .

Tanım 1.1.7

$A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyon ve $a \epsilon A$ olmak üzere $\forall\, \varepsilon > 0$ için $|x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon)$sayısı varsa f fonksiyonu a noktasında süreklidir denir (Balcı, 2012).

Tanım 1.1.8

$X \subset \mathbb{R}$ $f: X \to \mathbb{N}$ bir fonksiyon olsun, Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $x_1, x_2 \epsilon X$ noktaları için $|x_1 - x_2| < \delta$ olduğunda $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde yalnızca ε 'na bağlı $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı var ise f fonksiyonu X kümesi üzerinde düzgün süreklidir denir.

Tanım 1.1.9

$(f_n), C[a,b]$ fonksiyon sınıfında olmak üzere, (f_n) fonksiyon dizisinin bir f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C[a,b]} = 0 \tag{1.8}$$

eşitliklerinin sağlanması demektir.

Düzgün yakınsama $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.10

f, $[a,b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon ve $x_0 \in (a,b)$ olsun.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1.9}$$

limiti var ve sonlu ise f fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilirdir denir. Bu değer

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \tag{1.10}$$

dir(Thomas,Finney, 1984).

Tanım 1.1.11

f fonksiyonu a noktasını içeren bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k \tag{1.11}$$

serisine a noktasında f fonksiyonu tarafından türetilen Taylor serisi denir.

Tanım 1.1.12 (Lipschitz sınıfı fonksiyonlar)

$0 \leq \alpha \leq 1$ olmak üzere,

$$|f(t) - f(x)| \leq M|t-x|^{\alpha} \tag{1.12}$$

şartını sağlayan fonksiyonlar sınıfına Lipschitz sınıfı fonksiyonlar, M'ye de Lipschitz sabiti denir ve $f \in Lip_M(\alpha)$ ile gösterilir.

Teorem 1.1.3 (Korovkin Teoremi)

$$T_n(1;x) \rightrightarrows 1 \tag{1.13}$$

$$T_n(t;x) \rightrightarrows x \tag{1.14}$$

$$T_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2 \tag{1.15}$$

Eğer (T_n) lineer pozitif operatör dizisi $[a,b]$ aralığında (1.13), (1.14), (1.15) şartlarını gerçekliyorsa o takdirde $C[a,b]$ sınıfında olan ve bütün reel eksende sınırlı herhangi bir f fonksiyonu için $n \to \infty$ olduğunda,

$$T_n(f;x) \rightrightarrows f(x) \qquad a \le x \le b \tag{1.16}$$

olur.

Ya da bu ifadeye eşdeğer olarak aşağıdaki gösterimi de kullanabiliriz.

$$\|T_n(f) - f\|_{C[a,b]} \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{1.17}$$

İspat

f fonksiyonu reel eksende sınırlı olduğu için öyle bir $M > 0$ sayısı bulabiliriz ki, tüm x' ler için

$$|f(x)| \le M \tag{1.18}$$

Sağlanır. Kabul edelim ki, $f \in C[a,b]$ olsun. Sürekli fonksiyonlarının tanımı gereği $\forall\, \varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $\delta > 0$ bulabiliriz ki $t \in (-\infty, +\infty)$ve $x \in [a,b]$için,

$$|t - x| \le \delta \tag{1.19}$$

Olduğunda,

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \tag{1.20}$$

Sağlanır.

(1.20) eşitsizliği, $x, t \in [a,b]$ olduğunda f fonksiyonu $[a,b]$'de sürekli olduğu için, $x \in [a,b]$, $t \in [a,b]$ olduğunda ise f fonksiyonuna a ve b noktalarında, sırasıyla soldan ve sağdan sürekli bir fonksiyon olduğu için gerçeklenir.

$\forall\, x \in [a,b], \qquad f(x) \le M, \quad M > 0$

vardır.

$$|t - x| \ge \delta \Rightarrow \frac{|t-x|}{\delta} \ge 1 \;\Rightarrow 1 \le \frac{|t-x|}{\delta} \le \frac{|t-x|^2}{\delta^2}$$

$|t - x| \ge \delta$ olduğunda ise (1.19) ve üçgen eşitsizliğinden,

$$|f(t) - f(x)| \le |f(t)| + |f(x)| \le 2M \le 2M\frac{|t-x|^2}{\delta^2} \tag{1.21}$$

olur.

O halde,

$$|t - x| \le \delta \text{ için } |f(t) - f(x)| \le \varepsilon$$

$$|t-x| \geq \delta \text{ için } |f(t)-f(x)| \leq 2M\frac{|t-x|^2}{\delta^2} \tag{1.22}$$

elde edilir.

Dolayısıyla $\forall\, t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a,b]$ için,

$$|f(t)-f(x)| \leq \varepsilon + 2M\frac{|t-x|^2}{\delta^2} \tag{1.23}$$

dir.

Şimdi $(1.13), (1.14)$ ve (1.15) şartlarını gerçekleyen (T_n) lineer operatör dizisinin

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n(f)-f\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliğini sağladığını göstermelidir.

T_n operatörünün lineerliğinden,

$$\begin{aligned} |T_n(f(t);x)-f(x)| &= |T_n(f(t);x)-f(x)+T_n(f(x);x)-T_n(f(x);x)| \\ &= |T_n(f(t);x)-T_n(f(x);x)+T_n(f(x);x)-f(x)| \\ &= |T_n(f(t)-f(x);x)+f(x)(T_n(1;x)-1)| \end{aligned}$$

dir. Burada üçgen eşitsizliği kullanılarak,

$$|T_n(f(x);x)-f(x)| \leq |T_n(f(t)-f(x);x)| + \left|f(x)|T_n(1;x)-1|\right| \tag{1.24}$$

elde edilir. (1.6)' den

$$|T_n(f(t);x)-f(x)| \leq |T_n(f(t)-f(x);x)| \text{olur,}$$

operatör pozitif ve $|f(t)-f(x)| \geq 0$ olduğundan,

$$|T_n(f(t)-f(x);x)| \leq T_n(|f(t)-f(x)|;x) \tag{1.25}$$

şeklinde yazılır.

Bu durumda (1.13) yardımıyla (1.24) eşitsizliği,

$$|T_n(f(x);x)-f(x)| \leq T_n(|f(t)-f(x)|;x) + M|T_n(1;x)-1| \tag{1.26}$$

olarak yazılabilir.

(T_n) monoton artan olduğundan (1.23)'den,

$$|T_n(f(x);x)-f(x)| \leq T_n\left(\left(\varepsilon + 2M\frac{|t-x|^2}{\delta^2}\right);x\right) + M|T_n(1;x)-1| \tag{1.27}$$

elde edilir.

Diğer taraftan (T_n) lineer pozitif olduğu dikkate alınırsa,

$$T_n\left(\left(\varepsilon + 2M\frac{|t-x|^2}{\delta^2}\right);x\right) = T_n(\varepsilon;x) + T_n\left(2M\frac{|t-x|^2}{\delta^2};x\right)$$

$$= \varepsilon T_n(1;x) + 2\frac{M}{\delta^2}T_n(t^2 - 2xt + x^2;x)$$

$$= \varepsilon T_n(1;x) + 2\frac{M}{\delta^2}\{T_n(t^2;x) - x^2 - x^2 + 2x^2 - 2xT_n(t;x) + x^2T_n(1;x)\}$$

$$= \varepsilon T_n(1;x) + 2\frac{M}{\delta^2}\{T_n(t^2;x) - x^2 + 2x^2 - 2xT_n(t;x) + x^2T_n(1;x) - x^2\}$$

$$= \varepsilon T_n(1;x) + 2\frac{M}{\delta^2}\{(T_n(t^2;x) - x^2) - 2x(T_n(t;x) - x) + x^2(T_n(1;x) - 1)\}$$

elde edilir. Bu ifadenin (1.24)'de yerine yazılmasıyla,

$$|T_n(f(t);x) - f(x)| \leq \varepsilon T_n(1;x) + 2\frac{M}{\delta^2}\{(T_n(t^2;x) - x^2) - 2x(T_n(t;x) - x) + x^2(T_n(1;x) - 1)\} + M|T_n(1;x) - 1| \quad (1.28)$$

elde edilen bu ifade de $(1.13), (1.14)$ ve (1.15) şartlarının kullanılmasıyla,

$$|T_n(f(t);x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\varepsilon\frac{M}{\delta^2} = \varepsilon\left(1 + 2\frac{M}{\delta^2}\right) \quad (1.29)$$

elde edilen bu ifadeyi $\forall\, \varepsilon'$ için,

$$|T_n(f(t);x) - f(x)| \leq \varepsilon' \quad (1.30)$$

sağlanır. Yani

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n(f) - f\|_{C[a,b]} \to 0$$

olur. Böylece ispat tamamlanır (Korovkin, 1953).

Tanım 1.1.13

$f \in C[a,b]$ olsun. f fonksiyonunun süreklilik modülü,

$$W(f;\delta) = sup_{\substack{x,t\in[a,b],\\ |t-x|<\delta}} |f(x) - f(t)| \quad (1.31)$$

şeklinde tanımlıdır.

süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri sağlar,

1) $W(f;\delta) \geq 0$

2) $\delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow W(f;\delta_1) \leq W(f;\delta_2)$

3) $W(f+g;\delta) \leq W(f;\delta) + W(g;\delta)$

4) $m \in \mathbb{N}$ için $W(f; m\delta) = mW(f; \delta)$

5) $\partial \in \mathbb{R}^+$ için $W(f; \partial\delta) \leq (1 + \partial)W(f; \delta)$

6) $|f(t) - f(x)| \leq W(f; |t - x|)$

7) $|f(t) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) W(f; \delta)$

Teorem 1.1.4 (Minkowski eşitsizliği)

$p > 1$ için, $a_1, a_2, \ldots a_n > 0$ ve $b_1, b_2, \ldots b_n > 0$ olsun. Bu takdirde,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j{}^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} b_j{}^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.32}$$

eşitsizliğini sağlar.

Teorem 1.1.5 (Hölder eşitsizliği)

$1 < p < \infty$ ve q, p'nin eşleniği olsun. $a_1, a_2, \ldots a_n$ ve $b_1, b_2, \ldots b_n$ sayıları

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.33}$$

$p = q = 2$ ise cauchy-Schwartz-Bunyakovsky eşitsizliği denir.

Özellik 1.1.1

Szasz operatörü için aşağıdakiler sağlanır.

$$S_n(f; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) \; 0 \leq x < \infty$$

olarak tanımlanan Sasaz operatörler için,

$$S_n(1; x) = 1 \tag{1.34}$$

$$S_n(t; x) = x \tag{1.35}$$

$$S_n(t^2; x) = x^2 + \frac{x}{n} \tag{1.36}$$

Eşitlikleri sağlanır.Kapalı ve sınırlı bir $C[0, A]$ aralığı üzerinde,

$(n \to \infty)$ için $S_n(1;x) \rightrightarrows 1, S_n(t;x) \rightrightarrows x$ ve $S_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$olacağından, Korovkin'in şartları sağlanır.

Yani tüm reel eksende sınırlı olan her $f \in C[0,A]$ için $(n \to \infty)$için

$$\|S_n(f) - f\|_{C[0,A]} \to 0 \tag{1.37}$$

2.ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

1950'de Otto Szasz, operatörlerini $[0,\infty)$ aralığında tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir. Szasz operatörleri olarak tanımlanan bu operatörler şu şekildedir,

$S_n: C[0,\infty) \to C[0,\infty)$ olmak üzere,

$$S_n(f;x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{2.1}$$

Szasz operatörlerinin $[0,A]$ aralığında sınırlı ve belli bir x noktasında 2. türeve sahip f fonksiyonları için aşağıdaki eşitliği sağladığını göstermiştir.

$$\lim_{n\to\infty} n[S_n(f;x) - f(x)] = \frac{x}{2} f''(x) \tag{2.2}$$

Popoviciu, Szasz operatörlerinin süreklilik modülünü aşağıdaki şekilde hesaplamıştır (popoviciu, 1935)

$$\|S_n(f;x) - f(x)\|_{C[0,A]} \leq \left(1+\sqrt{A}\right) W\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tag{2.3}$$

Szasz operatörleriyla Lipschitz şartı sağlayan fonksiyonlara yaklaşması ispatlamıştır (Kac, 1938). Bu teoreme göre $f \epsilon Lip(\alpha)$

$0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için,

$$\|S_n(f;x) - f(x)\|_{C[0,A]} = O\left(\left(\frac{A}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right) \text{'dir.} \tag{2.4}$$

D.D Stancu nun Bernstein polinomlarını $0 \leq \alpha \leq \beta$ ve $0 \leq x \leq 1$ olmak üzere,

$$B_n^{\alpha,\beta}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right), \tag{2.5}$$

şeklinde genelleştrimesinden haraket ile Devdhara ve Mishra da Szasz operatörlerini

$1/b_n \to 0$, $n \to \infty$, $b_n \geq 1$ için,

$$S_n^{\alpha,\beta}(f;x) = e^{-b_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b_n)^k}{k!} f\left(\frac{k+\alpha}{b_n+\beta}\right) \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlamışlar. $\alpha = \beta = 0$ için klasik Szasz-Mirakjan operatörleri elde edilir.

Bu tezde çalıştığımız operatör ile Devdhara ve Mishra nın yukarıda çalıştığı operatör benzerlik gösterse de aynı olmayıp düğüm noktaları farklıdır.

Z.Walczak, fix (sabit) bir $q > 0$ için,

$$S_n[f, a_n, b_n, q](x) \equiv S_n[f, a_n, b_n, q, x]$$

$$:= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(a_n x)\, f\left(\frac{k}{b_n+q}\right), x\epsilon\mathbb{R}_{0,} n\epsilon\mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Burada (a_n), (b_n) artan ve sınırlı birer reel sayı dizi olup , $b_n \geq a_n \geq 1$ ve (a_n/b_n) azalmayan bir dizidir ve öyleki

$$a_n / b_n = 1 + o(1/b_n) \tag{2.8}$$

dır.

(2.6) ve (2.7) operatörlerinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaklığı, yakınsaklık hızı , Voronovskaja yaklaşımları çalışılmıştır.

Szasz operatörleri ile ilgili yapılan çok fazla çalışma olup, hepsine yer verirsek, ciltle dolusu olur. Çalıştığımız operatöre yakın olanlardan birkaç tanesini ald

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Materyal

Çalışma oluşturulurken kütüphane ve internetten bulduğumuz konu ile ilgili kaynak kitap, makale ve dergilerle benzer konularda çalışılmış yüksek lisansüstü ve doktora tezlerinden yararlanılmıştır.

3.2 Yöntem

$N_n(f;x)$ operatörü diğer operatörler ve bunlar ile yapılmış çalışmalar incelenmiştir. Araştırmalar $[0,\infty)$ aralığında ağırlıklı sınıflarda ve $[0,\infty)$'un kapalı ve sınırlı alt aralıklarında yapılmıştır. $N_n(f;x)$ operatörünün kapalı ve sınırlı alt aralıklarında sürekli olan fonksiyona yaklaşım grafikleri ve yaklaşımın sayısal değerleri Mapple bilgisayar programı kullanılarak verilmiştir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Burada, aşağıdaki şekilde olan Szasz Operatorünün bir genellemesini tanımlayacak ve inceleyeceğiz.

$$S_n(f;x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\right)\ 0 \le x < \infty \qquad (*)$$

Tanım 4.1.

Kabul edelim ki a ve $b \in \mathbb{N}$ ve $0 \le a \le b, 0 \le x < \infty$ olmak üzere bir lineer pozitif dizi,

$$N_n(f;x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\frac{n+a}{n+b}\right) \qquad (4.1)$$

şeklinde tanımlı lineer pozitif operatöre $N_n(f;x)$ operatörü denir.

(4.1) operatöründe $a= b$ alınırsa, (*) operatörleri elde edilir.

$N_n(f;x)$ operatörünün lineer ve pozitif olduğunu gösterelim.

Lineerlik:

Her $f, g \in C[0,A]$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için,

$$N_n\big((\alpha f+\beta g);x\big) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}(\alpha f+\beta g)\left(\frac{k}{n}\frac{n+a}{n+b}\right)$$

$$= \alpha e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}(f)\left(\frac{k}{n}\frac{n+a}{n+b}\right) + \beta e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}(g)\left(\frac{k}{n}\frac{n+a}{n+b}\right)$$

$$= \alpha N_n(f;x) + \beta N_n(g;x) \qquad (4.2)$$

olduğundan $N_n(f;x)$ lineer bir operatördür.

Pozitiflik:

Her $x \in [0,A]$ için,

$e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!} \ge 0$ olduğundan,

$$f \ge 0 \Rightarrow N_n(f;x) = e^{-nx}\sum_{0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\frac{n+a}{n+b}\right) \ge 0 \qquad (4.3)$$

$N_n(f;x)$ pozitif bir operatördür.

Lemma 4.1.1

(4.1) 'de tanımlı olduğun operatör, her $x \in [0,\infty)$ için aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

1) $N_n(1;x) = 1$

2) $N_n(t;x) = x - \frac{b-a}{n+b}x$

3) $N_n(t^2;x) = x^2 - \frac{2(b-a)n + b^2 - a^2}{(n+b)^2}x^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^2 x$

4) $N_n(t^3;x) = x^3 - \frac{3(n+b)(n+a)(b-a) + (b-a)^3}{(n+b)^3}x^3$
$+ \frac{3}{n}\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^3 x^2 + \frac{1}{n^2}\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^3 x$

5) $N_n(t^4;x) =$
$x^4 + \frac{(b-a)(n+b)[-4(n+b)^2 + 6(b-a)(n+b) - 4(b-a)^2] + (b-a)^4}{(n+b)^4}x^4$
$+ \frac{6}{n}\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^4 x^3 + \frac{7}{n^2}\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^4 x^2 + \frac{1}{n^3}\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^4 x$

İspat:

1)

$$N_n(1;x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{n}\frac{(nx)^k}{k!}\ 1 = \ e^{-nx}e^{+nx} = 1 \qquad (4.4)$$

2)

$$N_n(t;x) = \frac{n+a}{n+b}e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}\frac{k}{n}$$
$$= \frac{n+a}{n+b}e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(nx)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{nx}{n}$$
$$= \frac{n+a}{n+b}e^{-nx}x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(nx)^{k-1}}{(k-1)!}$$
$$= \frac{n+a}{n+b}e^{-nx}xe^{+nx}$$

$$= \frac{n+a}{n+b}x$$

$$N_n(t;x) = x - \frac{b-a}{n+b}x \tag{4.5}$$

3)

$$N_n(t^2;x) = \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^2 e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}\left(\frac{k}{n}\right)^2$$

$$= \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^2\left[e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}\frac{k(k-1)}{n^2} + e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}\frac{k}{n^2}\right]$$

$$= \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^2\left[e^{-nx}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(nx)^{k-2}}{(k-2)!}\frac{(nx)^2}{n^2} + e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(nx)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{nx}{n^2}\right]$$

$$= \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^2\left[x^2e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{(k)!} + \frac{x}{n}e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{(k)!}\right]$$

$$= \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^2\left[x^2 + \frac{x}{n}\right]$$

$$N_n(t^2;x) = x^2 - \frac{2(b-a)n + b^2 - a^2}{(n+b)^2}x^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^2 x \tag{4.6}$$

4)

$$N_n(t^3;x) = \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^3 e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}\left(\frac{k}{n}\right)^3$$

$$= \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^3\left[e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}\frac{k^2(k-1)}{n^3} + e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}\frac{k^2}{n^3}\right]$$

$$= \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^3\left[e^{-nx}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(nx)^{k-3}}{(k-3)!}\frac{(nx)^3}{n^3} + e^{-nx}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(nx)^{k-2}}{(k-2)!}\frac{2(nx)^2}{n^3} + e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}\frac{k^2}{n^3}\right]$$

$$= \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^3\left[x^3 + \frac{2}{n}x^2\right] + \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^3\left[\frac{1}{n}x^2 + \frac{1}{n^2}x\right]$$

$$= \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^3\left[x^3 + \frac{3}{n}x^2 + \frac{1}{n^2}x\right]$$

$$N_n(t^3;x) = x^3 - \frac{3(n+b)(n+a)(b-a) + (b-a)^3}{(n+b)^3}x^3 + \frac{3}{n}\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^3 x^2 + \frac{1}{n^2}\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^3 x \tag{4.7}$$

5)

$$N_n(t^4;x) = \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^4 e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}\left(\frac{k}{n}\right)^4$$

$$= \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^4\left[e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}\frac{k^3(k-1)}{n^4} + e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}\frac{k^3}{n^4}\right]$$

$$= \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^4\left[e^{-nx}\sum_{k=4}^{\infty}\frac{(nx)^{k-4}}{(k-4)!}\frac{(nx)^4}{n^3} + 5\,e^{-nx}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(nx)^{k-3}}{(k-3)!}\frac{(nx)^3}{n^3}\right.$$

$$\left. + 4e^{-nx}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(nx)^{k-2}}{(k-2)!}\frac{(nx)^2}{n^4} + e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{(k)!}\frac{k^3}{n^4}\right]$$

$$= \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^4\left[x^4 + \frac{5}{n}x^3 + \frac{4}{n^2}x^2\right] + \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^4\left[\frac{1}{n}x^3 + \frac{3}{n^2}x^2 + \frac{1}{n^3}x\right]$$

$$= \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^4\left[x^4 + \frac{6}{n}x^3 + \frac{7}{n^2}x^2 + \frac{1}{n^3}x\right]$$

$$= x^4 + \frac{(b-a)(n+b)[-4(n+b)^2 + 6(b-a)(n+b) - 4(b-a)] + (b-a)^4}{(n+b)^4}x^4$$

$$+ \frac{6}{n}\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^4 x^3 + \frac{7}{n^2}\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^4 x^2 + \frac{1}{n^3}\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^4 x \qquad (4.8)$$

Lemma 4.1.2

$N_n(f;x)$ operatörü için merkezi momentlerin bazıları şöyledi.

1) $N_n\big((t-x);x\big) = -\dfrac{b-a}{n+b}x$

2) $N_n((t-x)^2;x) = \dfrac{(b-a)^2}{(n+b)^2}x^2 + \dfrac{(n+a)^2}{n(n+b)^2}\,x$

3) $N_n((t-x)^3;x) = \dfrac{-(b-a)^3}{(n+b)^3}x^3 + \dfrac{3}{n}\left[\dfrac{(n+a)^2(a-b)}{(n+b)^3}\right]x^2 + \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{n+a}{n+b}\right)^3 x$

4) $N_n((t-x)^4;x) =$

$$(b-a)(n+b)\left[\frac{6(b-a)(n+b) - 4(b-a) + (b-a)^4}{(n+b)^4}\right.$$

$$\left. + \frac{4(b-a)^2 - 6(n+b)(b+a) + 12(n+b)}{(n+b)^4}\right]x^4 + \frac{6(n+a)^2(a-b)^2}{n(n+b)^4}x^3$$

$$+\frac{(n+a)^3[7(n+a) - 4(n+b)]}{n^2(n+b)^4}x^2 + \frac{1}{n^3}x$$

İspat

1)

$$N_n\big((t-x);x\big) = N_n(t;x) - xN_n(1;x)$$

yazılabilir. (4.4) ve (4.5)'den dolayı,

$$N_n\big((t-x);x\big) = \left(\frac{n+a}{n+b}\right)x - x$$

$$N_n\big((t-x);x\big) = -\frac{b-a}{n+b}x \qquad (4.9)$$

2)

$$N_n((t-x)^2;x) = N_n(t^2;x) - 2xN_n(t;x) + x^2$$

yazılabilir.(4.4) , (4.5) ve (4.6)'den dolay,

$$= \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^2 x^2 + \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^2 \frac{1}{n}x - 2\left(\frac{n+a}{n+b}\right)x^2 + x^2$$

$$N_n((t-x)^2;x) = \frac{(b-a)^2}{(n+b)^2}x^2 + \frac{(n+a)^2}{n(n+b)^2}\,x \qquad (4.10)$$

3)

$$N_n((t-x)^3;x) = N_n(t^3;x) - 3xN_n(t^2;x) + 3x^2N_n(t;x) - x^3$$

yazılabilir.(4.4) , (4.5) , (4.6)ve (4.7)'dan dolayı,

$$= \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^3 \left[x^3 + \frac{3}{n}x^2 + \frac{1}{n^2}x\right] - 3x\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^2 \left[x^2 + \frac{1}{n}x\right]$$

$$+3x^2\frac{n+a}{n+b}[x] - x^3$$

$$N_n\big((t-x)^3;x\big) = -\frac{(b-a)^3}{(n+b)^3}x^3 + \frac{3}{n}\left[\frac{(n+a)^2(a-b)}{(n+b)^3}\right]x^2 + \frac{1}{n^2}\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^3 x \qquad (4.11)$$

4)

$$N_n((t-x)^4;x) = N_n(t^4;x) - 4xN_n(t^3;x) + 6x^2N_n(t^2;x) - 4x^3N_n(t;x) + x^4N_n(1;x)$$

yazılabilir.(4.4) , (4.5) , (4.6) ,(4.7) ve (4.8)'dan dolayı,

$$= \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^4 \left[x^4 + \frac{6}{n}x^3 + \frac{7}{n^2}x^2 + \frac{1}{n^3}x\right]$$

$$-4x\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^3 \left[x^3 + \frac{3}{n}x^2 + \frac{1}{n^2}x\right] + 6x^2\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^2 \left[x^2 + \frac{1}{n}x\right]$$

$$-4x^3\left(\frac{n+a}{n+b}\right)[x] + x^4$$

$$N_n((t-x)^4;x) = (b-a)(n+b)\left[\frac{6(b-a)(n+b)-4(b-a)+(b-a)^4}{(n+b)^4}\right.$$
$$\left.+\frac{4(b-a)^2-6(n+b)(b+a)+12(n+b)}{(n+b)^4}\right]x^4+\frac{6(n+a)^2(a-b)^2}{n(n+b)^4}x^3$$
$$+\frac{(n+a)^3[7(n+a)-4(n+b)]}{n^2(n+b)^4}x^2+\frac{1}{n^3}x \qquad (4.12)$$

Teorem 4.1.1

$f \in C[0,A]$ ve f bütün reel eksende sınırlı olsun o halde,

$$\lim_{n\to\infty} \| N_n f - f \|_{C[0,A]} = 0 \quad \text{dır.}$$

İspat

(1.1.3)'de verilen Korovkin teoreminden faydalanılarak $n \to \infty$ için

$N_n(1;x) \rightrightarrows 1$

$N_n(t;x) \rightrightarrows x$

$N_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$

olduğunu gösterirsek ispatı tamamlamış

$\| N_n 1 - 1 \|_{C[0,A]} = 0$ olduğu açıktır.

(4.5) ve (4.6) de sonuçları yerine yazarsak,

$$\| N_n t - x \|_{C[0,A]} = max_{0\le x\le A}\left|x-\frac{b-a}{n+b}x-x\right| = \left|-\frac{b-a}{n+1}A\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|-\frac{b-a}{n+1}A\right| = 0$$

$$\| N_n t^2 - x^2 \|_{C[0,A]} = max_{0\le x\le A}\left|x^2-\frac{2(b-a)n+b^2-a^2}{(n+1)^2}x^2+\frac{1}{n}\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^2 x-x^2\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|-\frac{2(b-a)n+b^2-a^2}{(n+1)^2}A^2+\frac{1}{n}\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^2 A\right| = 0$$

ispat tamamlanır , $\lim_{n\to\infty} \| N_n f - f \|_{C[0,A]} = 0$ (4.13)

Teorem 4.1.2

$N_n(f;x)$ süreklilik modülü yardımı ile yaklaşım hızı her $f \in C[0,A]$ için,

$$\|N_n(f;x) - f(x)\| \le 2W\left(f;\sqrt{\frac{n^2+2b(b+1)n+b^2}{n(n+b)^2}A}\right)$$'dır.

İspat

$$|N_n(f;x)-f(x)| = |N_n(f(t)-f(x);x)|$$
$$\leq N_n(|f(t)-f(x)|;x)$$
$$|N_n(f;x)-f(x)| \leq N_n(W(f;|t-x|);x) \quad (4.14)$$

$W(f;|t-x|) \leq \left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)W(f;\delta)$ süreklilik modülü özelliklerinden,

$$|N_n(f;x)-f(x)| \leq N_n\left(\left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right);x\right)W(f;\delta)$$
$$= \left(1+\frac{1}{\delta}N_n(|t-x|;x)\right)W(f;\delta)$$

Burada Cauchy-Schwartz eşitsizliği kullanırsak,

$$|N_n(f;x)-f(x)| \leq \left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{N_n((t-x)^2;x)}\right)W(f;\delta)$$
$$= \left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{(b-a)^2}{(n+b)^2}x^2+\frac{(n+a)^2}{n(n+b)^2}x}\right)W(f;\delta)$$

$0 \leq x \leq A$, bu son ifade maksimum olması için $x = A$ yazarsak,

$$|N_n(f;x)-f(x)| \leq \left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{(b-a)^2}{(n+b)^2}A^2+\frac{(n+a)^2}{n(n+b)^2}A}\right)W(f;\delta)$$
$$\leq \left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{n^2+2b(b+1)n+b^2}{n(n+b)^2}A}\right)W(f;\delta)$$

$\delta = \sqrt{\frac{n^2+2b(b+1)n+b^2}{n(n+b)^2}A}$

seçilirse,

$$|N_n(f;x)-f(x)| \leq 2W\left(f;\sqrt{\frac{n^2+2b(b+1)n+b^2}{n(n+b)^2}A}\right) \quad (4.15)$$

ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.3

f fonksiyonu Lipschitz şartı sağlıyorsa,

$$\| N_n(f;x)-f(x) \|_{C[0,A]} = O\left(\left(\frac{n^2+2b(b+1)n+b^2}{n(n+b)^2}A^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right)$$'dır.

İspat

$N_n(1;x) = 1$ olduğundan ve operatörün lineerliğinden,

$$|N_n(f;x) - f(x)| = |N_n(f;x) - f(x)N_n(1;x)|$$
$$= |N_n(f;x) - N_n(f(x);x)|$$
$$|N_n(f;x) - f(x)| \leq (N_n(|f(t) - f(x)|;x) \quad (4.16)$$

f fonksiyonu Lipschitz şartı sağladığından,

$$|f(t) - f(x)| \leq M|t - x|^{\alpha}$$

bu ifade (4.16)'de yerine yazılırsa,

$$|N_n(f;x) - f(x)| \leq MN_n(|t - x|^{\alpha};x) \quad (4.17)$$

Hölder eşitsizliğinden,

$$N_n(|t - x|^{\alpha};x) \leq N_n((t - x)^2;x)^{\frac{\alpha}{2}}$$

O halde,

$$|N_n(f;x) - f(x)| \leq M\left(\frac{(b-a)^2}{(n+b)^2}x^2 + \frac{(n+a)^2}{n(n+b)^2}x\right)^{\frac{\alpha}{2}} \quad (4.18)$$

$$|N_n(f;x) - f(x)| \leq M\left(\frac{n^2 + 2b(b+1)n + b^2}{n(n+b)^2}A^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

Böylece,

$$\| N_n(f;x) - f(x) \|_{C[0,A]} \leq M\left(\frac{n^2 + 2b(b+1)n + b^2}{n(n+b)^2}A^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \quad (4.19)$$

ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.4

f fonksiyonu türevlenebilir ve türevi $[0, A]$ aralığında sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda belirli bir n'den sonra,

$$|N_n(f;x) - f(x)|$$
$$\leq \frac{M}{n} + 2\sqrt{\frac{n^2 + 2b(b+1)n + b^2}{n(n+b)^2}}A\,W\left(f';\sqrt{\frac{n^2 + 2b(b+1)n + b^2}{n(n+b)^2}}A\right)$$

İspat

f fonksiyonu türevlenebilir ve türevi $[0,A]$ aralığında sürekli ve tüm reel eksende sınırlı bir fonksiyon olduğundan $t,x \in [0,A]$için ortalama değer teoreminden t ile x arasında öyle bir u vardır ki

$$f'(u) = \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \tag{4.20}$$

Eşitliğin sol tarafına $-f(x)' + f(x)'$ eklenirse,

$$f(t)-f(x) = (t-x)f'(x) + (t-x)\big(f'(u)-f'(x)\big) \tag{4.21}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} N_n(f;x)-f(x) &= f'(x)N_n(t-x;x) + N_n\Big((t-x)\big(f'(u)-f'(x)\big);x\Big) \\ &= f'(x)\left(-\frac{(b-a)x}{n+b}\right) + N_n\Big((t-x)\big(f'(u)-f'(x)\big);x\Big) \\ N_n(f;x)-f(x) &= \frac{-x(b-a)f'(x)}{n+b} + N_n\Big((t-x)\big(f'(u)-f'(x)\big);x\Big) \end{aligned} \tag{4.22}$$

elde edilir.

u, t ile x arasında olduğundan,

$$|u-x| \le |t-x| \tag{4.23}$$

Süreklilik modülü özelliğinden,

$$\begin{aligned} |f'(u)-f'(x)| &\le W(f';|u-x|) \\ &\le W(f';|t-x|) \\ |f'(u)-f'(x)| &\le \left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right) W(f';\delta_n) \end{aligned} \tag{4.24}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} |N_n(f;x)-f(x)| &\le \frac{|-x(b-a)f'(x)|}{n+b} + N_n(|(t-x||f'(\mathrm{u})-f'(x)|;x) \\ &\le \frac{|-x(b-a)f'(x)|}{n+b} + N_n\left(|(t-x|\left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right);x\right) W(f';\delta_n) \\ |N_n(f;x)-f(x)| &\le \frac{|-x(b-a)f'(x)|}{n+b} + N_n\left(|(t-x| + \frac{1}{\delta_n}(t-x)^2;x\right) W(f';\delta_n) \end{aligned} \tag{4.25}$$

Cauchy Schwartz eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} |N_n(f;x)-f(x)| &\le \frac{|-x(b-a)f'(x)|}{n+b} \\ &+ \left(\big(N_n((t-x)^2;x)\big)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\delta_n}\big(N_n((t-x)^2;x)\big)\right) W(f';\delta_n) \end{aligned} \tag{4.26}$$

sağlanır.

$$N_n((t-x)^2;x) = \frac{(b-a)^2}{(n+b)^2}x^2 + \frac{(n+a)^2}{n(n+b)^2}x$$

olduğunu biliyoruz.

$$max_{0\le x\le A}\left(\frac{(b-a)^2}{(n+b)^2}x^2 + \frac{(n+a)^2}{n(n+b)^2}x\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{(b-a)^2}{(n+b)^2}A^2 + \frac{(n+a)^2}{n(n+b)^2}A\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \left(\frac{(b-a)^2 n + (n+a)^2}{n(n+b)^2}A^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\frac{n^2+2b(b+1)n+b^2}{n(n+b)^2}A^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{n^2+2b(b+1)n+b^2}{n(n+b)^2}}A$$

olur. Bu durumda,

$$|N_n(f;x) - f(x)| \le \frac{|x(b-a)|}{n+b}|f'(x)|$$

$$+\left(\sqrt{\frac{n^2+2b(b+1)n+b^2}{n(n+b)^2}}A + \frac{1}{\delta_n}\frac{n^2+2b(b+1)n+b^2}{n(n+b)^2}A^2\right)W(f';\delta_n) \qquad (4.27)$$

f' bütün reel eksende sınırlı olduğundan $|f'(x)| \le M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır.

$$|N_n(f;x) - f(x)| \le \frac{M}{n+b}$$

$$+\left(\sqrt{\frac{n^2+2b(b+1)n+b^2}{n(n+b)^2}}A + \frac{1}{\delta_n}\frac{n^2+2b(b+1)n+b^2}{n(n+b)^2}A^2\right)W(f';\delta_n) \qquad (4.28)$$

$$|N_n(f;x) - f(x)| \le \frac{M}{n}$$

$$+\left(\sqrt{\frac{n^2+2b(b+1)n+b^2}{n(n+b)^2}}A + \frac{1}{\delta_n}\frac{n^2+2b(b+1)n+b^2}{n(n+b)^2}A^2\right)W(f';\delta_n) \qquad (4.29)$$

$$\delta_n = \sqrt{\frac{n^2+2b(b+1)n+b^2}{n(n+b)^2}}A$$

olarak seçilirse,

$$|N_n(f;x)-f(x)| \le \frac{M}{n}$$
$$+2\sqrt{\frac{n^2+2b(b+1)n+b^2}{n(n+b)^2}}AW\left(f';\sqrt{\frac{n^2+2b(b+1)n+b^2}{n(n+b)^2}}A\right) \quad (4.30)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.5

$f \in C\,[0,A]$ ve f, f', f'' fonksiyonları $[0,A]$ aralığında sınırlı ise bu, takdirde

$$\lim_{n\to\infty}(n+b)\left(N_n(f;x)-f(x)\right) = (a-b)f'(x)+\frac{1}{2}x\,f''(x)$$'dır.

İspat

f fonksiyonunun x noktasındaki Taylor açılımı,

$$f(t) = f(x)+\frac{1}{1!}f'(x)(t-x)+\frac{1}{2!}f''(x)(t-x)^2+\frac{1}{3!}f'''(x)(t-x)^3 + \frac{1}{4!}f^4(x)(t-x)^4+\cdots$$

$$f(t)-f(x) = \frac{1}{1!}f'(x)(t-x)+\frac{1}{2!}f''(x)(t-x)^2+(t-x)^2\mu(t-x) \quad (4.31)$$

$$\mu(t-x) = \left(\frac{1}{3!}f'''(x)(t-x)+\frac{1}{4!}f^4(x)(t-x)^2+\ldots\right)$$

$$N_n(f;x)-f(x) = N_n\big((t-x);x\big)f'(x)+\frac{1}{2}N_n((t-x)^2;x)f''(x) + N_n((t-x)^2\mu(t-x);x) \quad (4.32)$$

Şimdi (4.9) ve (4.10) de sonuçları yerine yazarsak,

$$N_n(f;x)-f(x) = \left(-\frac{b-a}{n+b}x\right)f'(x)+\frac{1}{2}\left(\frac{(b-a)^2}{(n+b)^2}x^2+\frac{(n+a)^2}{n(n+b)^2}\,x\right)f''(x) + N_n((t-x)^2\mu(t-x);x) \quad (4.33)$$

eşitliğin her iki tarafını $n+b$ çarpılırsa,

$$(n+b)\big(N_n(f;x)-f(x)\big) =$$

$$(n+b)\left(-\frac{b-a}{n+b}x\right)f'(x)+\frac{1}{2}(n+b)\left(\frac{(b-a)^2}{(n+b)^2}x^2+\frac{(n+a)^2}{n(n+b)^2}\,x\right)f''(x) + (n+b)\,N_n((t-x)^2\mu(t-x);x) \quad (4.34)$$

Burada,

$$\lim_{t\to x}\mu(t-x)=0 \tag{4.35}$$

Olduğun için μ fonksiyonu sınırlıdır,

$$(n+b)N_n((t-x)^2\mu(t-x);x)\le\sqrt{(n+b)N_n((t-x)^4;x)}\sqrt{(n+b)N_n(\mu(t-x)^2;x)}$$

Lemma 4.1.2 deki,

$$N_n((t-x)^4;x)=$$
$$(b-a)(n+b)\left[\frac{6(b-a)(n+b)-4(b-a)+(b-a)^4}{(n+b)^4}\right.$$
$$\left.+\frac{4(b-a)^2-6(n+b)(b+a)+12(n+b)}{(n+b)^4}\right]x^4+\frac{6(n+a)^2(a-b)^2}{n(n+b)^4}x^3$$
$$+\frac{(n+a)^3[7(n+a)-4(n+b)]}{n^2(n+b)^4}x^2+\frac{1}{n^3}x$$

Burda eşitliğin her iki tarafını $n+b$ çarpılırsa,

$$(n+b)N_n((t-x)^4;x)\le$$
$$\frac{(b-a)(n+b)[6(b-a)(n+b)+(b-a)^4+4(b-a)^2+12(n+b)]}{(n+b)^3}x^4$$
$$+\frac{6(n+a)^2(a-b)^2}{n(n+b)^3}x^3+\frac{(n+a)^3[7(n+a)]}{n^2(n+b)^3}x^2+\frac{(n+a)^4}{n^3(n+b)^3}x$$

Olduğundan,

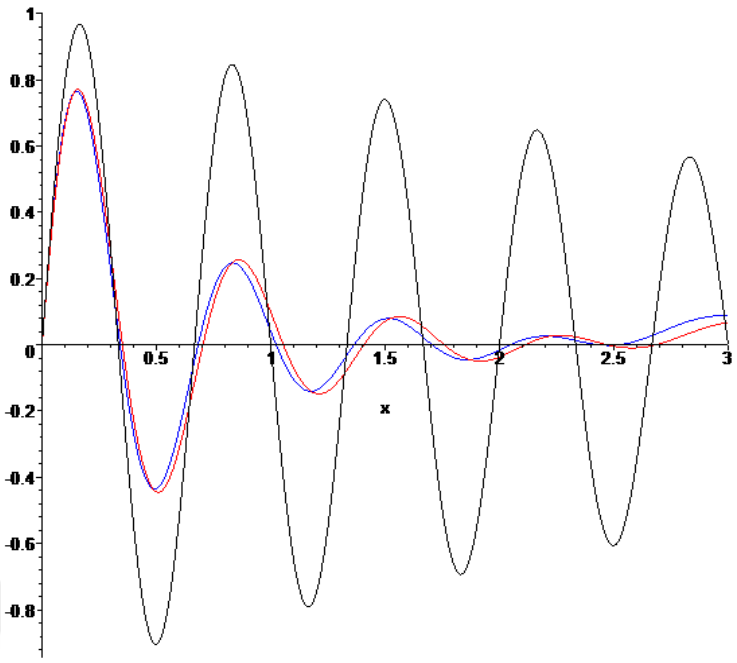
$$\lim_{n\to\infty}(n+b)N_n((t-x)^4;x)=0 \tag{4.36}$$

Şimdi (4.34) eşitliğin her iki tarafını limiti alırsa,

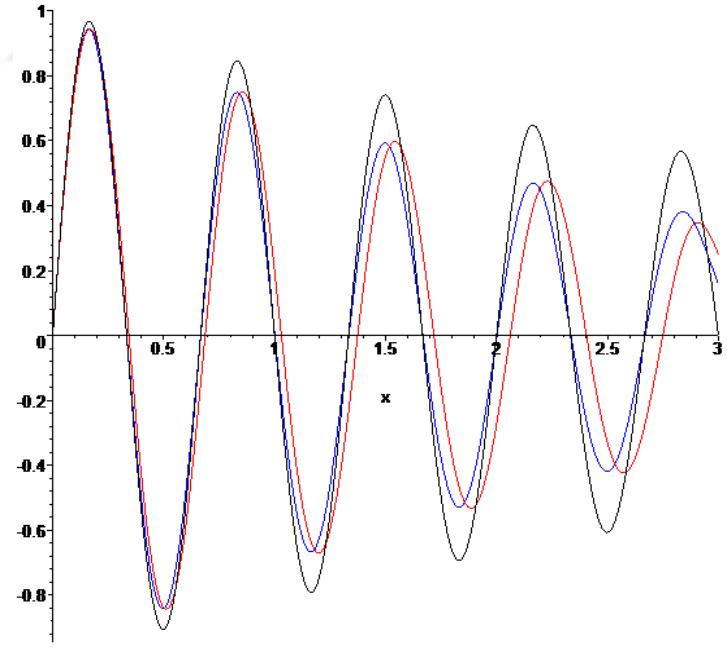
$$\lim_{n\to\infty}(n+b)\left(N_n(f;x)-f(x)\right)=(a-b)f'(x)+\frac{1}{2}x\,f''(x) \tag{4.37}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

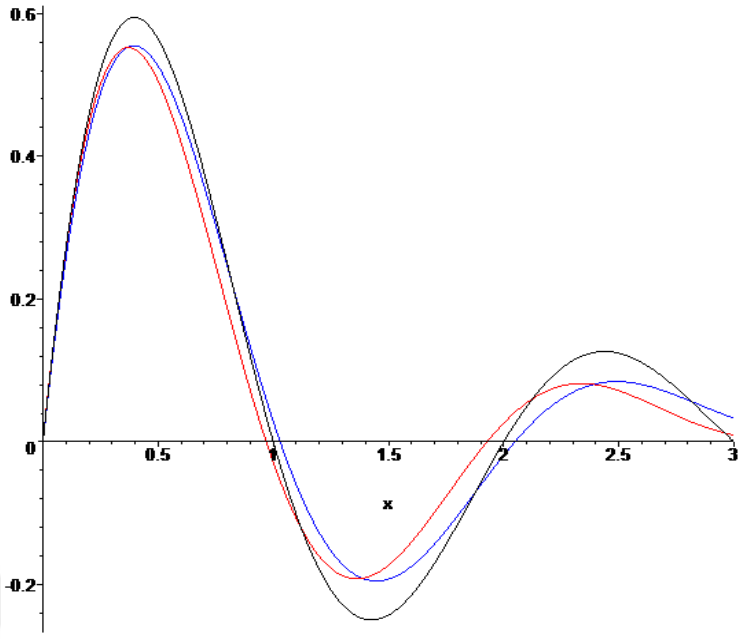
Son olarak üzerinde çalıştığımız $N_n(f;x)$ operatörünün farklı n değerleri için, $f(x)=e^{\frac{-x}{5}}\sin 3\pi x$ fonksiyonuna yaklaşımını gösteren grafikleri ve yaklaşımın sayısal değerlerini tablo halinde verelim.



Şekil 4.1. $N_n(f;x)$ (Kırmızı), $S_n(f;x)$ (Mavı) n=30 ve a=0.9 , b=1 için,
$f(x) = e^{\frac{-x}{5}} \sin 3\pi x$ (Siyah)'a yaklaşım grafiği.

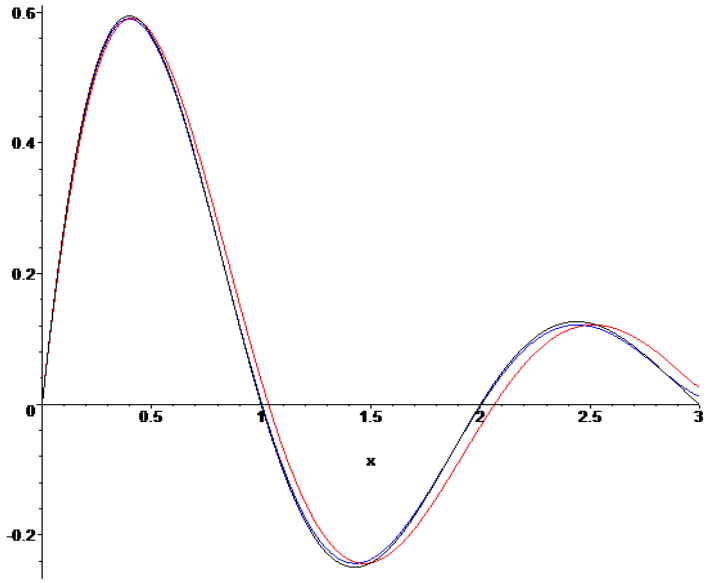


Şekil 4.2 .$N_n(f;x)$ (Kırmızı), $S_n(f;x)$ (Mavı) , n=300 ve a=1 , b=10 için,
$f(x) = e^{\frac{-x}{5}} \sin 3\pi x$ (Siyah)'a yaklaşım grafiği.



Şekil 4.3. $N_n(g\,;x)$ (kırmızı), $S_n(g\,;x)$ (Mavı) n =30 ve a=0.9 , b=1 için,

$g(\mathrm{x}) = \frac{e^{\frac{-x}{3}} \sin \pi x}{1+x}$ (Siyah) 'a yaklaşım grafiği.



Şekil 4.4. $N_n(g\,;x)$ (kırmızı) , $S_n(g\,;x)$ (Mavı) n =300 ve a=1 , b=10 için,

$g(\mathrm{x}) = \frac{e^{\frac{-x}{3}} \sin \pi x}{1+x}$ (Siyah)'a yaklaşım grafiği.

Çizelge 4.1. $|N_n(f;x) - f(x)|$ değrinin bazı x değerleri ve n'nin farklı değerleri için saysal değerler

n \ x	0.2	0.5	0.8	1.2	1.5	1.8
5	0.6834	0.9359	0.8137	0.7479	0.7396	0.6681
50	0.1418	0.3224	0.4221	0.4783	0.545	0.5384
100	0.075	0.1794	0.2477	0.3011	0.3596	0.3721
200	0.0386	0.0948	0.1347	0.1707	0.2095	0.2229
500	0.0157	0.0392	0.0567	0.0739	0.0923	0.0997
990	0.008	0.02	0.0291	0.0383	0.0481	0.0525

n değeri büyüdükçe $N_n(f;x)$ ile $f(x)$ arasındaki farkın sıfıra yaklaştığı görülmektedir.

Şimdide $N_n(f;x)$ operatörü ile $S_n(f;x)$ operatörünün $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşımlarını karşılaştıran sayısal bir tablo vereceğiz. Yukarıdaki tablo ile şimdi vereceğimiz tabloda kullandığımız noktalar, çizdirdiğimiz grafiklerde, operatör ile fonksiyon arasındaki farkın çok gözüktüğü yerlerdir.

Çizelge 4.2. $K(x)=\left|\frac{N_n(f;x)-f(x)}{S_n(f;x)-f(x)}\right|, N_n(f;x)\ ile\ S_n(f;x)$ operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşımının karşılaştırılmasının sayısal değerler tablosu

n \ x	0.2	0.5	1.2	1.8	2.5
5	0.9886	1.0016	1	1.0017	1.0112
50	0.99	0.9974	0.9951	1.0025	0.9998
100	0.9911	0.9982	0.9936	1.0037	0.9997
200	0.9918	0.9988	0.993	1.0048	0.9995
500	1.0006	1	0.9999	1.0009	0.9998
990	1.0003	1	0.9999	0.9999	0.9999

Yukarıdaki tablodan görüldüğü gibi oran 1 civarındadır, yani sabit bir sayı,ve her iki operatörün fonksiyona yaklaşımlarının denk olduğunu göstermektedir.

5.SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

$N_n(f;x)$ operatörünün lineer pozitif olduğu gösterilmiş, $1, t, t^2, t^3, t^4$ için, operatör merkezi momentlerden bazıları hesaplanmış ve neticeleri 4. Bölümde verilmiştir.

$$\lim_{n\to\infty} \| N_n f - f \|_{C[0,A]} = 0 \tag{5.1}$$

Süreklilik modülü yardımıyla $N_n(f;x)$ operatörünün yaklaşım hızı hesaplanmış ve aşağıdaki eşitsizlik elde edilmiştir.

$$\|N_n(f;x) - f(x)\| \le 2W\left(f; \sqrt{\frac{n^2+2b(b+1)n+b^2}{n(n+b)^2}A}\right) \text{'dır} \tag{5.2}$$

f fonksiyonu Lipschitz şartı sağlıyorsa, $N_n(f;x)$ operatörü için sonuç elde edilmiştir.

$$\| N_n(f;x) - f(x) \|_{C[0,A]} = O\left(\left(\frac{n^2+2b(b+1)n+b^2}{n(n+b)^2}A\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right) \text{'dır} \tag{5.3}$$

f fonksiyonu türevlenebilir ve türevi $[0, A]$ aralığında sürekli ve tüm reel eksende sınırlıbir fonksiyon olsun. Bu durumda belirli bir n'den sonra

$$|N_n(f;x) - f(x)| \le \frac{M}{n} + 2\sqrt{\frac{n^2+2b(b+1)n+b^2}{n(n+b)^2}}AW\left(f'; \sqrt{\frac{n^2+2b(b+1)n+b^2}{n(n+b)^2}}A\right) \tag{5.4}$$

eşitsizliği elde edilir.

$f \in C[0,A]$ ve f, f', f'' fonksiyonları $[0,A]$ aralığında sınırlı ise bu takdirde,

$$\lim_{n\to\infty}(n+b)\left(N_n(f;x) - f(x)\right) = (a-b)f'(x) + \frac{1}{2}x\,f''(x) \text{'dır} \tag{5.5}$$

Son olarak $f(x) = e^{\frac{-x}{5}} \sin 3\pi x$ yaklaşımı mapple bilgisayar programı desteğiyle yaklaşım grafiği çizilmiştir ve yaklaşımları sayısal değerler hesaplanarak bir tablo verilmiştir.

5.2 Öneriler

Tezimizde kullandığımız operatör, a ve b değerleri arasındaki fark küçüldükçe operatörümüz ile Szasz operatörü daha güzel yaklaşmaktadır. a ve b değerleri birbirine yakın seçildiğinde operatörümüz ile Szasz operatörü denk olmaktadır. Daha iyi bir yaklaşım elde etmek için a ve b değerlerini değiştirerek denemek gerekir.

KAYNAKLAR

SZASZ, O., 1950. Genelalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite J. Research Nat. Bur. Standars, 45: 239-245.

HACISALİHOĞLU ,H. and HACIYEV ,A. 1995. Lineer Operatör 1-94, Ankara.

KOROVKİN, P. P., 1960. Liner Operators and Approximation Theory. Hindustan publishing Corporation, Delhi.

GADJİEV AD. On p.p. Korovkin type theorems. Math Zametik 1976 ; 20 :781-786.

MAZHAR SM, 1985.Totik V.Approximation by modified Sz´asz operators. ActaSci Math; 49:257-269.

ALTOMARE, F. and CAMPITI, M., 1994. Korovkin-type Approximation Theory and its Applications. De Gruyter Series Studies in Mathematics ,Vol.17 , Walter de Gruyter, Berlin-New-York.

CİUPAT ,A., 2006.Voronovskaya – Type Theoremfor a Positive Linear Operators. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences,(ID 42368) : 1–7.

POPOVICIU ,T., 1998. On the Proof of Weierstrass Theorem Using Interpolation Polynomials.Lucraile Sesiunii Gen.Şt.Acad.Romane,2:2-12.

KAC, M., 1938. Une Remarque Sur Les Polynomes De M. S. Bernstein. Studia Math. 7: 49-51.

STANCU, D. D., 1983. Approximation of functions by means of a new generalized Bernstein Operator, Calcolo 20: 211-229.

WALCZAK, Z., 2003. On modified Szasz - Mirakjan operators , Novi Sad Journal of Mathematics,33(1):93-107.

BALCI, M., 2012. Reel Analiz, Balcı Yayınları, 144s, Ankara.

KOROVKİN , P. P., 1953. On Convergence of Linear Positive Operators in the Space of Continuous Functions (Russian). Dokl. Akad. Nauk. SSSR(N. S.) 90:961-964.

THOMAS, G.B., Finney, R.L. (1984). "Calculus and Analytic Geometry", 1142s, Addison – Wesley Publishing Company.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSE BİLGİLER

Adı Soyadı :Naıruz OUSMAN
Uyruğu : Suriye
Doğum Yeri ve Tarihi : Halep– 20/02/1988
e-mail : mryammryam1990@gmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Şam Fen Lisesi	2008
Üniversite	:Şam Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü	2014
Yüksek Lisans	: Harran Üniversitesi, Şanlıurfa	2019

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2015----	UNICEF	Matematik Öğretmeni

YABANCI DİLLER: Fransızca