T.C.

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ANALİTİK FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARI İÇİN DÖRDÜNCÜ HANKEL DETERMİNANTI

Büşra KÖRFECİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR

Haziran 2019

T.C. DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ
DİYARBAKIR

Büşra KÖRFECİ tarafından yapılan "Analitik Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları için Dördüncü Hankel Determinantı" konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Halit ORHAN

Üye : Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY (Danışman)

Üye : Prof. Dr. Sevtap SÜMER EKER

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 28 / 06 / 2019

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../.....

Prof. Dr. Sevtap SÜMER EKER

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında ve yüksek lisans eğitimim boyunca hoşgörü, samimiyet ve alçak gönüllülüğü ile daima yanımda olan, kıymetli bilgi ve deneyimlerini paylaşan, her konuda yardımını esirgemeyen ve öğrencisi olduğum için kendimi çok şanslı bulduğum değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY ´e,

Bana duydukları sevgi, güven ve anlayışlarıyla daima yanımda olan anneme, babama, ağabeyime ve kardeşlerime sonsuz teşekkür ve şükranlarımı sunuyorum…

Büşra KÖRFECİ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEŞEKKÜR I
İÇİNDEKİLER II
ÖZET III
ABSTRACT IV
ŞEKİL LİSTESİ V
KISALTMA VE SİMGELER VI
1. GİRİŞ 1
2. KAYNAK ÖZETLERİ 7
3. MATERYAL VE METOT 9
3.1. Materyal 9
3.2. Metot 9
3.3. Temel Tanımlar 9
3.4. Yalınkat Fonksiyonlar 13
3.5. Pozitif Gerçel Kısımlı Fonksiyonlar Sınıfı 21
3.6. Yalınkat Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları 22
3.7. Subordinasyon İlkesi 28
3.8. Hankel Determinantları 30
3.9. Sigmoid Fonksiyonu 32
4. ARAŞTIRMA BULGULARI 35
4.1. $S^*(\gamma,\phi)$ Sınıfında Katsayı Tahminleri 35
4.2. $S^*(\gamma,\phi)$ İçin Üçüncü Hankel Determinantının Modülü İçin Bir Üst Sınır 39
4.3. $S^*(\gamma,\phi)$ İçin Dördüncü Hankel Determinantının Modülü İçin Bir Üst Sınır 40
5. TARTIŞMA VE SONUÇ 47
6. KAYNAKLAR 49
ÖZGEÇMİŞ 53

ÖZET

ANALİTİK FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARI İÇİN DÖRDÜNCÜ HANKEL DETERMİNANTI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Büşra KÖRFECİ

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2019

Bu tez çalışmasında modifiye edilmiş Sigmoid fonksiyonlarla ilişkili yıldızıl fonksiyonların bir alt sınıfı için dördüncü Hankel determinantı ele alınmıştır. Öncelikle bu sınıfa ait fonksiyonlar için bir katsayı tahmininde bulunulmuş daha sonra da dördüncü Hankel determinantı için üst sınır belirlenmiştir.

Başlangıçta, karmaşık fonksiyonlar kuramının temel tanım ve teoremlerine yer verilmiştir. Ardından yalınkat fonksiyonlar, yalınkat fonksiyonların önemli bazı altsınıfları, birim diskte yalınkat olan fonksiyonların önemli bazı alt sınıfları, pozitif gerçel kısımlı fonksiyonların sınıfları tanıtılmış ve bu sınıflarla ilgili önemli bazı teoremler ifade edilmiştir. Subordinasyon ilkesi ve bu ilkenin özelliğinden bahsedilmiş, Hankel matrisi tanımlanmıştır. Daha sonra Sigmoid fonksiyonu ve özelliklerinden söz edilmiş ve Sigmoid fonksiyonlar ile ilişkili yıldızıl fonksiyonlar için bir alt sınıf tanımlanarak, bu sınıf için bazı katsayı tahminleri elde edilmiştir. Son olarak bu katsayılar yardımıyla dördüncü Hankel Determinantının bir üst sınırı elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Analitik Fonksiyon, Yalınkat Fonksiyon, Yıldızıl Fonksiyon, Konveks Fonksiyon, Hankel Determinantı, Sigmoid Fonksiyonu, Modifiye Edilmiş Sigmoid Fonksiyonu.

ABSTRACT

FOURTH HANKEL DETERMINANT FOR SOME SUBCLASSES OF ANALYTIC FUNCTIONS

MSc THESIS

Büşra KÖRFECİ

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF DICLE

2019

In the thesis, the fourth Hankel determinant for a subclass of starlike functions related to modified Sigmoid functions is discussed. Firstly, a coefficient estimation for the functions of this class has been made and then the upper bound for the fourth Hankel determinant has been determined.

First of all, the basic definitions and theorems of complex functions theory are given. Then, univalent functions, its some important subclasses, some important subclasses in the unit disc of univalent functions and positive real functions classes have been introduced. Also some theorems about these classes have been stated. Subordination principles and their features have been explained, and then Hankel matrice has been defined. After that, Sigmoid function and its properties are mentioned and a subclass is defined for starlike functions related to Sigmoid functions and some coefficient estimations are obtained for this class. Finally, with these coefficients, an upper bound of the fourth Hankel determinant is obtained.

Key Words: Analytic Function, Univalent Function, Starlike Function, Convex Function, Hankel Determinant, Sigmoid Function, Modified Sigmoid Function.

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil No		Sayfa
Şekil 1.1.	Paul Koebe (1882-1945)	1
Şekil 1.2.	J.W.Alexander (1888-1971)	1
Şekil 1.3.	Ludwig Bieberbach (1886-1982)	1
Şekil 1.4.	Bernard Riemann (1826-1866)	2
Şekil 1.5.	Bieberbach Kestiriminin İlanı	3
Şekil 3.1.	Yalınkat fonksiyonun görüntüsü	13
Şekil 3.2.	$f(z)=(1+z)^2$ fonksiyonunun resmi	14
Şekil 3.3.	$f(z)=(1+z)^3$ fonksiyonunun resmi	14
Şekil 3.4.	Koebe fonksiyonunun grafiği	17
Şekil 3.5.	Yıldızıl küme	22
Şekil 3.6.	z noktasına göre yıldızıl küme	22
Şekil 3.7.	Konveks küme	23
Şekil 3.8.	Subordinasyon ilkesi	29
Şekil 3.9.	$1+z \prec \frac{1+z}{1-z}$	29
Şekil 3.10.	Sigmoid fonksiyonunun grafiği	33

KISALTMA VE SİMGELER

$\mathbb{C}$: Karmaşık Sayılar Kümesi

$\mathbb{C}_\infty$: $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, Genişletilmiş Karmaşık Sayılar Kümesi

$\mathbb{R}$: Gerçel Sayılar Kümesi

$\mathbb{N}$: $\{1,2,3,...\}$, Doğal Sayılar Kümesi

$\mathbb{N}_0$: $\mathbb{N} \cup \{0\}$

U : $\{z : |z|<1\}$, Birim disk

$L_0(z)$: Möbius Fonksiyonu

$k(z)$: $\frac{z}{(1-z)^2}$ Koebe Fonksiyonu

A : U birim diskinde analitik olan fonksiyonların sınıfı

S : Yalınkat fonksiyonlar sınıfı

S^* : Yıldızıl fonksiyonlar sınıfı

C : Konveks fonksiyonlar sınıfı

$\wp$: Pozitif gerçel kısımlı fonksiyonlar sınıfı

$C(\gamma)$: γ mertebeli konveks fonksiyonlar sınıfı

$S^*(\gamma)$: γ mertebeli yıldızıl fonksiyonlar sınıfı

$S^*(\gamma,\phi)$: Sigmoid fonksiyonları ile ilişkili yıldızıl fonksiyonların sınıfı

H_{n-1} : Hankel Matrisi

H_∞ : Sonsuz mertebeden Hankel matrisi

$H_q(n)$: q. Dereceden Hankel determinantı

1. GİRİŞ

Karmaşık analizin önemli bir dalı olan Geometrik Fonksiyonlar Teorisi, analitik fonksiyonların geometrik özellikleri ile ilgilenmektedir. Bir fonksiyonun analitik özellikleri ile analitik bir fonksiyonun görüntüsünün geometrik özellikleri arasındaki bağıntıyı anlatmak geometrik fonksiyon teorisinin amaçlarından biridir. Bu teoriyi önemli kılan birincil sebep analitik fonksiyonları temsil eden serinin katsayılarının, fonksiyonun geometrik özellikleri üzerinde veya fonksiyonun geometrik özelliklerinin, analitik fonksiyonları temsil eden serinin katsayılarının üzerinde etkisinin olmasıdır. Bu durumda analitik fonksiyonların geometrik özelliklerini incelemek için, onun katsayıları üzerinde çalışmayı tercih etmek isabetli bir seçim olacaktır.

20. yüzyılın başlarında katsayı tahminleri ile çalışılmaya başlanan Yalınkat Fonksiyonlar Teorisi ise Geometrik Fonksiyonlar Teorisinin en önemli dallarından biri olup, belirli bir karmaşık bölgede analitik ve yalınkat olan fonksiyonlar ile ilgilenir. Bu alanda ilk önemli çalışma P. Koebe tarafından 1907 yılında yapılmıştır. Bu çalışma, 1915 ve 1916 yıllarında sırasıyla J.W.Alexander ve L. Bieberbach tarafından takip edilmiştir.



Şekil 1.1.
Paul Koebe (1882-1945)



Şekil 1.2.
J.W.Alexander (1888-1971)

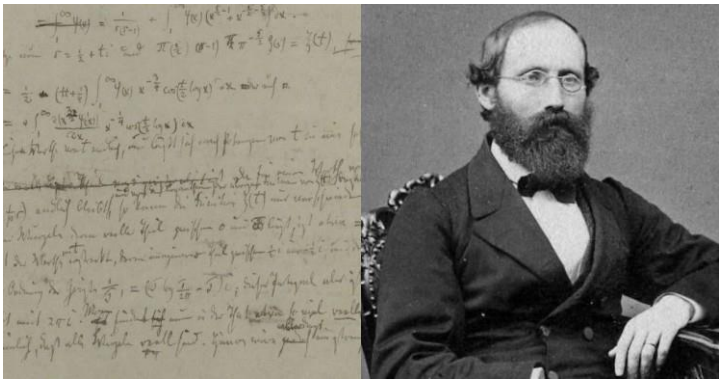


Şekil 1.3.
Ludwig Bieberbach (1886-1982)

Yalınkat fonksiyonlarda ilgi çekici birçok sonucun açıklamaları Montel (Paul Montel 1933) tarafından 1933 yılında Paris'te yayınlanan *'Leçons sur les Fonctions Univalentes ou Multivalentes'* başlıklı inceleme yazısında yayınlanmıştır. Montel bu çalışmasında, yalınkat fonksiyonlar teorisinin orijininin, basit bağlantılı bir bölgeyi $\mathbb{C}$

karmaşık düzleminde basit bağlantılı bölgeye dönüştüren genel konformal dönüşüm probleminden geldiğini belirtmiştir. Bernardi tarafından sırasıyla 1966 ve 1977 yıllarında hazırlanan bibliyografi makalelerinde (Bernardi 1966, 1977) ABD, İngiltere, Almanya, Fransa, Japonya gibi birçok ülkede yaklaşık 220 matematik dergisinde yer alan 570'den fazla yazarın yayınlarına yapılan 1964 tane referansa yer verilmiştir. Bu iki cilt bibliyografya bu konudaki birçok araştırmacıya değerli referanslar sağlamıştır. *'Les Fonctions Multivalentes'*, 1938 yılında Biernacki (M. Biernacki 1938) tarafından yazılan yalınkat ve çok katlı fonksiyonlar ile ilgili dikkat çekici bir inceleme yazısıdır. Bununla birlikte Yalınkat Fonksiyonlar Teorisine katkıda bulunan birçok kitap vardır. Bunlara Goluzin (Goluzin 1947), Nehari (Nehari 1952), Jenkins (Jenkins 1958), Hayman (Hayman 1958) ve Ahlfors (Ahlfors 1960) tarafından yazılan kitaplar örnek verilebilir. Bu kitaplar bazı açık problemleri ve kapsamlı incelemeleri içermektedir. Son zamanlarda bu konuyu derinlemesine ele alan diğer kitaplar, 1975 te Pommerenke (Pommerenke 1975), 1983 te Goodman (Goodman 1983) ve Duren (Duren 1983) tarafından ayrı ayrı yazılmış Yalınkat Fonksiyonlar başlıklı üç ayrı kitaptır.

Koebe'den önce 1851 yılında Riemann, Riemann Dönüşüm Teoremi olarak bilinen ve '*karmaşık düzlemde basit bağlantılı bölgeyi, basit bağlantılı bölge üzerine dönüştüren tek bir analitik fonksiyon vardır'* şeklinde ifade edilen Geometrik Fonksiyonlar Teorisinin önemli bir sonucunu vermiştir. 1907 de Koebe Yalınkat Fonksiyonlar Teorisini çalışmaya başlamış ve ardından Riemann Dönüşüm Teoremi ışığında, analitik ve yalınkat fonksiyonların özellikleri ile ilgili çalışmaları devam etmiştir.

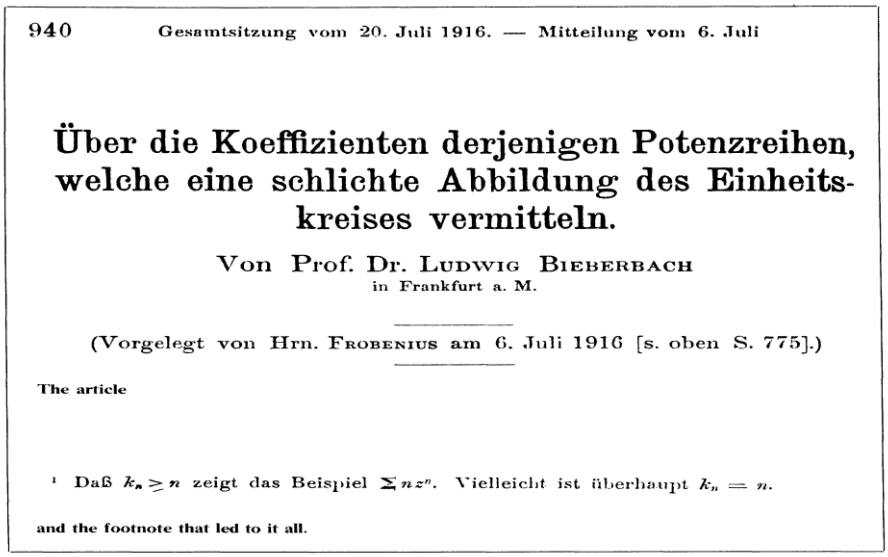


Şekil 1.4. Bernard Riemann (1826-1866)

Karmaşık düzlemin basit bağlantılı bir bölgesinde analitik olan ve belli normalizasyon koşullarını sağlayan tüm fonksiyonların A sınıfı tanımlanmıştır. Tanım kümesinde analitik, yalınkat ve normalize edilmiş tüm $S \subset A$ fonksiyonlarının sınıfı Yalınkat Fonksiyonlar Teorisi çalışmalarının merkezi olmuştur. Bu S fonksiyon sınıfı dünyada birçok araştırmacı tarafından ilgi görmüştür. Riemann Dönüşüm Teoreminin gerekliliklerini sağlamak için tanım bölgesi genel olarak, karmaşık düzlemdeki basit bağlantılı bölgenin en iyi bilinen örneklerinden biri olan $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ açık birim diski olarak seçilir.

S sınıfındaki tüm analitik fonksiyonlar, karmaşık düzlemde U birim diskini basit bağlantılı bir bölge üzerine konformal ve bire-bir olarak dönüştürürler. Bu sınıftaki fonksiyonların en ilginç tarafı, U birim diski üzerinde gerçel veya karmaşık katsayılı bir kuvvet serisi ile ifade edilebilmesi ve yakınsak olmasıdır.

Karmaşık analiz için son derece heyecanlı bir yıl olan 1984 yılının en büyük matematiksel başarısı, 68 yıl önce Alman matematikçi Ludwig Bieberbach (Bieberbach 1916) tarafından ortaya konulan Bieberbach Kestiriminin L. de Branges (L. de Branges 1984) tarafından ispatlanmasıdır. Bu kestirim, ilk olarak 1916 yılında Bieberbach'ın *Über die Koeffizienten derjenigen Potezreihen welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln* başlıklı makalesinin bir dipnotu olarak verilmiştir.



940 Gesamtsitzung vom 20. Juli 1916. — Mitteilung vom 6. Juli

Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln.

Von Prof. Dr. Ludwig Bieberbach
in Frankfurt a. M.

(Vorgelegt von Hrn. Frobenius am 6. Juli 1916 [s. oben S. 775].)

The article

[1] Daß $k_n \geq n$ zeigt das Beispiel $\sum n z^n$. Vielleicht ist überhaupt $k_n = n$.

and the footnote that led to it all.

Şekil 1.5. Bieberbach Kestiriminin İlanı

Bieberbach (Bieberbach 1916) bu makalesinde S sınıfındaki her $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ fonksiyonu için $|a_2|\le 2$ olduğunu ispatlamıştır. Bu makalesindeki dipnotta ise $f\in S$ için genel olarak $|a_n|\le n$ olabileceğine dikkat çekmiştir. Bu kestirim matematikçilerin doğruluğunu göstermek için uzunca yıllar çalıştığı bir problem olmuştur. Bieberbach'ın ardından kestirim sırasıyla üçüncü katsayı için 1923 de K. Löwner (Löwner 1923), dördüncü katsayı için 1955 te P. R. Garabedian ve M. Schiffer (Garabedian ve Schiffer 1955) tarafından ispatlanmıştır. Altıncı katsayı için 1968 de P. N. Pederson (Pederson 1968) ve bağımsız olarak 1969 da M.Ozawa (Ozawa 1969) tarafından ispat verilmiştir. 1972 de Pederson ve Schiffer (Pederson ve Schiffer 1972) beşinci katsayı için Bieberbach kestirimini ispatlamışlardır. Bieberbach kestiriminin diğer kalan tüm katsayılar için ispatı ise 1984 yılında L. De Branges tarafından yapılmış ve 1985 yılında yayımlanmıştır (L. De Branges 1985). Bieberbach kestiriminin ispatı ile beraber pek çok matematikçi katsayı problemi ile ilgilenmiştir.

Yalınkat Fonksiyonlar Teorisinde, S sınıfının bazı alt sınıfları için katsayı sınırlarının tahmini ve bunlar arasındaki bağıntılar önemli bir yere sahiptir. Yıldızıl ve konveks fonksiyon sınıfları bu alt sınıfların en iyi bilinenleridir. Bu fonksiyonların en önemli özelliği, $f(U)$ görüntü bölgesinde sırasıyla yıldız ve konveks bir geometriye sahip olmalarıdır. Bununla birlikte S sınıfının bu ve benzeri alt sınıfları ve bu alt sınıflardaki fonksiyonların bazı özellikleri 20. yüzyılın ikinci yarısında bazı araştırmacılar tarafından tanımlanmış ve ayrıntılı olarak çalışılmıştır. Duren (Duren 1983) yıldızıl ve konveks fonksiyonların analitiksel tanımını yapmıştır. Kaplan (Kaplan 1952) ise konvekse yakın fonksiyonları tanımlamış ve özelliklerini çalışmıştır.

Karmaşık analiz ve yalınkat fonksiyonlar teorisinin ilgilendiği önemli problemlerden biri de Hankel determinant problemidir. Hankel determinantı $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ fonksiyonunun katsayılarının bir kombinasyonu için bir üst sınır bulmada yardımcıdır. Dolayısıyla yaklaşık yüzyıl boyunca matematikçileri meşgul eden katsayı problemi için önemli bir yere sahiptir. 1976 yılında Noonan ve Thomas (Noonan ve Thomas 1976) $q,n\in\mathbb{N}=1,2,...$ olmak üzere $H_q(n)$, $q-uncu$ Hankel determinantını tanımlamışlardır.

$H_q(n)$, q ve n nin özel değerlerine göre özel olarak isimlendirilebilir. Örneğin $a_3 - \mu a_2^2$ Fekete-Szegö problemi, $H_2(2) = a_2 a_4 - a_3^2$ ikinci Hankel determinantı ve $H_3(1) = a_3(a_2 a_4 - a_3^2) - a_4(a_4 - a_2 a_3) + a_5(a_3 - a_2^2)$ üçüncü Hankel determinantı olarak bilinir. Bu katsayı kombinasyonlarının kesin üst sınırını bulma problemi üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Li ve Srivastava (Li ve Srivastava 1998), Babalola (Babalola 2010) ve Zaprawa (Zaprawa 2016) başta olmak üzere birçok matematikçi Hankel determinantının üst sınırları üzerinde çalışmalar yapmıştır ve bugün $H_q(n)$ 'e ilgi büyük bir hızla devam etmektedir.

Aktivasyon fonksiyonu, beyin süreçleri gibi biyolojik sinir sisteminden ilham alan bir bilgi sürecidir. Son zamanlarda Geometrik Fonksiyonlar Teorisinde kullanılan etkili bir fonksiyon da bir aktivasyon fonksiyonu olan modifiye edilmiş Sigmoid fonksiyonudur. Yalınkat fonksiyonlar teorisinde katsayı sınırları belirlenmesinde ayrı bir öneme sahiptir.

Bu çalışmamızdaki amacımız, modifiye edilmiş Sigmoid fonksiyonu ile ilişkili yıldızıl fonksiyonların bir alt sınıfında dördüncü Hankel determinantı problemini ele alıp, bazı katsayı tahminleri elde ederek bu alt sınıf için $|H_4(1)|$ in bir üst sınırını elde etmektir.

Bu amaç doğrultusunda bu çalışma beş bölümden oluşmuştur.

Giriş bölümünde Yalınkat fonksiyonlar, Hankel determinantları ve Sigmoid fonksiyonunun genel bir tarihçesinden söz edilmiştir.

Kaynak özetlerinde tezi oluştururken faydalandığımız bazı temel makalelerden özetle bahsedilmiştir.

Materyal ve metot kısmında tez yazımı süresince faydalanılacak başlıca tanımlar ile bazı teorem ve sonuçlar bulunmaktadır. Bu kısımda yer alan teoremler kolaylık olması açısından ispat için ulaşılacak kaynaklar belirtilerek ispatsız olarak verilmiştir.

Araştırma bulguları kısmında tanımlanan sınıfa ait fonksiyonların beşinci, altıncı ve yedinci katsayıları için tahminlerde bulunup, dördüncü Hankel determinantının modülü için bir üst sınıra ulaşılmıştır.

Tartışma ve sonuç kısmında ise araştırma bulguları kısmında oluşturulan teoremler ile ilgili elde ettiğimiz sonuçlara yer verilmiştir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Son yıllarda Hankel determinantı ile ilgili matematikçiler tarafından pek çok çalışma yapılmıştır. Tez çalışması süresince birçok makale incelenmiş olup, özellikle tezi oluştururken faydalandığımız bazı temel makalelerin içeriğinden özetle bahsedilmiştir.

İlk olarak 1976 da *Noonan ve Thomas* (1976), $H_q(n)$ ile gösterilen $q-uncu$ Hankel determinantını tanımlanmıştır. Bu determinant bir çok matematikçinin ilgisini çekmiş olup, q ve n in farklı değerleri için determinantın bir üst sınırı elde edilmeye çalışılmıştır.

2007 de *Janteng ve ark.* konveks ve yıldızıl fonksiyonlar için ikinci Hankel determinantının modülünün üst sınırlarını yıldızıl fonksiyonlar için

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le 1$$

ve konveks fonksiyonlar için

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le \frac{1}{8}$$

olarak elde etmiştir.

2010 da *Babalola (2010)* yalınkat fonksiyonların yıldızıl ve konveks alt sınıfları için üçüncü Hankel determinantının modüllerinin üst sınırlarını sırasıyla

$$\left|H_3(1)\right|\le 16$$

ve

$$\left|H_3(1)\right|\le \frac{32+35\sqrt{3}}{72\sqrt{3}}$$

olarak elde etmiştir.

2016 da *Olubunmi ve ark.* analitik fonksiyonların belirli yeni sınıflarını Sigmoid fonksiyonu kullanarak tanımlamışlar ve bu sınıf için katsayı eşitsizlikleri, büyüme ve bükülme teoremleri üzerine çalışmışlardır.

2018 de *Olubunmi ve ark.* Salagean operatörünü ve modifiye edilmiş Sigmoid fonksiyonunu kapsayan yalınkat fonksiyonların yeni bir alt sınıfı için katsayı sınırlarını $\mathrm{A}=2^n\ B=3^n(2)\ \mathrm{A}'=2^{n+1}\ B'=3^{n+1}\ C'=2^n3^n\ C=4^n(3)$ olmak üzere

$$|a_2|\le(1-\beta)\left|\frac{1}{2\gamma\mathrm{A}}\right| \quad , \quad |a_3|\le(1-\beta)^2\left|\frac{\gamma^2\mathrm{A}'-4\gamma^2\mathrm{A}-\gamma(\gamma-1)}{8\gamma^3\mathrm{A}B}\right|$$

olarak ve Fekete-Szegö fonksiyoneli için

$$\left|a_3-\sigma a_2^2\right|\le\frac{(1-\beta)^2}{4\gamma^2\mathrm{A}^2}\left|\frac{\gamma\mathrm{A}\mathrm{A}'-4\gamma\mathrm{A}^2-\gamma\mathrm{A}+\mathrm{A}}{2B}-\sigma\right|$$

olarak elde etmişlerdir.

2018 de *Keerthi ve Revathi*, Sigmoid fonksiyonlar ile ilişkili Sakaguchi tipi fonksiyonların yeni bir alt sınıfı için Fekete-Szegö fonksiyoneli için,

$\tau\in\mathbb{C}-\{0\}$, $0\le\lambda\le1$, $|t|\le1$, $t\ne1$ *ve* $\mu\in\mathbb{C}$ olmak üzere

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right|\le\frac{|\tau|^2}{16(1+\lambda)^2(1-t)^2(n+1)^2}\left[\frac{8(1-t^2)(1+\lambda)^2(n+1)}{3(n+2)(1+2\lambda)(2-t-t^2)}-\mu\right]$$

ve ikinci Hankel determinantının modülünün bir üst sınırını

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le\left|\frac{\tau^2}{192(n+1)^2(n+2)(n+3)}\left[-1+\frac{3\tau^2}{2}-\frac{4\tau^2(n+3)}{3(n+2)}\right]\right|$$

olarak elde etmişlerdir.

2018 de *Muhammad Arif ve ark.* sınırlı dönmeli fonksiyonların ailesi için dördüncü Hankel determinantı üzerine çalışıp dördüncü Hankel determinantının modülünün üst sınırını

$$\left|H_4(1)\right|\le\frac{73757}{94500}\approx0.7805$$

olarak elde etmişlerdir.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, tezde kullanılacak temel tanımlara ve önemli bazı teoremlere ispatsız olarak yer verilmiştir.

3.1 Materyal

Bu tez çalışması analitik fonksiyonların bir alt sınıfı olan yıldızıl fonksiyonların bir sınıfı için dördüncü Hankel determinantının modülünün bir üst sınırının bulunması metodu üzerine kurulmuştur. Yalınkat Fonksiyonlar Teorisindeki katsayı problemi ile ilgili sonuçların elde edildiği birçok bilimsel makale ve bu konu ile ilgili hazırlanan kitaplar temel materyallerimiz olmuştur.

3.2 Metot

Modifiye edilmiş Sigmoid fonksiyonuyla ilişkili yıldızıl fonksiyonların bir alt sınıfında dördüncü Hankel determinantının modülünün bir üst sınırını elde edebilmek için bazı yardımcı önermeler ile birlikte verilen sınıfa ait katsayı eşitsizlikleri elde edilip, ardından bu değerler dördüncü Hankel determinantının modülünün bir üst sınır bulmada kullanılacaktır.

3.3 Temel Tanımlar

Tanım 3.3.1 $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar kümesi, z_0 bir karmaşık sayı ve ε sıfırdan büyük bir gerçel sayı olmak üzere z_0 noktasının ε komşuluğu, $B(z_0,\varepsilon)=\{z:|z-z_0|<\varepsilon\}$ olarak tanımlanır. Bu z_0 noktasına komşuluk merkezi, ε sayısına komşuluk yarıçapı denir. $B(z_0,\varepsilon)$ kümesine aynı zamanda açık disk adı verilir. $\overline{B}(z_0,\varepsilon)=\{z:|z-z_0|\leq\varepsilon\}$ kümesi ise kapalı disk olarak tanımlanır.

Tanım 3.3.2 Bir $M\subset\mathbb{C}$ kümesi verilsin. $M'=\{z\in\mathbb{C}:z\notin M\}$ ile tanımlı küme M nin tümleyeni olarak tanımlanır.

Tanım 3.3.3 Bir $M\subset\mathbb{C}$ kümesi ve $z_0\in\mathbb{C}$ noktası alalım. Eğer M nin z_0 dan farklı bir z noktası her $B(z_0,\varepsilon)$ komşuluğunda mevcutsa "z_0 a M nin bir yığılma noktasıdır" denir.

Tanım 3.3.4 Bir $z \in M$ noktası için $B(z,\varepsilon) \subset M$ şeklinde ε sayısı varsa z, M nin bir iç noktasıdır denir.

Tanım 3.3.5 Her $z \in M$ noktası M nin iç noktası ise M ye açık küme adı verilir.

Tanım 3.3.6 M nin tümleyeni M' açık küme ise M kapalıdır.

Tanım 3.3.7 $M \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. $\mathbb{C}$ 'de

$$M \subseteq K \cup L,\ M \cap K \neq \varnothing,\ M \cap L \neq \varnothing \text{ ve } M \cap K \cap L = \varnothing$$

özelliklerine sahip ayrık ve açık K ve L kümeleri yoksa M ye bağlantılı küme adı verilir. Örneğin $\mathbb{C}$ bağlantılıdır.

Tanım 3.3.8 Bağlantılı olmayan kümeye bağlantısız küme denir.

Tanım 3.3.9 Açık ve bağlantılı olan küme bölge olarak adlandırılır. Örneğin $\mathbb{C}$ bölgedir.

Tanım 3.3.10 $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonunu alalım. $z_0 \in A$ olsun. Sıfırdan büyük her ε için $|z - z_0| < \delta$ iken $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ şartını sağlayacak biçimde $\delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$ mevcutsa f fonksiyonuna z_0 da süreklidir denir.

Tanım 3.3.11 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde eğri (yol) adı verilir.

Tanım 3.3.12 $B \subset \mathbb{C}$, $f : B \to \mathbb{C}$ ve z_0 B 'nin içinde olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti mevcutsa $z_0 \in B$ noktasında f fonksiyonuna diferansiyellenebilirdir (türevlenebilir) denir. Yukarıdaki limitin gösterimi $f'(z_0)$ veya $\frac{df}{dz}(z_0)$ şeklindedir bununla beraber bu limite f nin z_0 daki türevi adı verilir.

Tanım 3.3.13 B bölgesinde tanımlı bir f fonksiyonunu ele alalım. Eğer fonksiyon, B nin her noktasında diferansiyellenebilirse B bölgesinde analitiktir denir. f, z_0 ın belli bir komşuluğundaki noktaların tamamında diferansiyellenebilir ise o zaman z_0 da

analitiktir denir. Karmaşık düzlemin tümünde analitiklik özelliğini gösteren fonksiyonlar ise tam fonksiyon olarak adlandırılır.

Aşağıda vereceğimiz teorem *Cauchy-Türev Formülü* olarak bilinir.

Teorem 3.3.14 Yönü pozitif olan basit kapalı γ çevresinin üstünde ve içerisinde analitik olan f fonksiyonu ve z_0 bu eğrinin içinde ise tüm n doğal sayıları için;

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

olur (Ponnusamy ve Silverman 2006).

Cauchy-Türev Formülünün en göze çarpan neticelerinden biri: f herhangi bir bölgede analitik bir fonksiyon ise o bölgede f nin her mertebeden türevi mevcuttur. Aynı zamanda bu türevler de o bölgede analitiktir. O halde f fonksiyonunun z_0 noktasında

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \qquad (3.1)$$

biçiminde bir seri açılımı vardır. Bununla birlikte bilindiği üzere, bir noktada birinci mertebeden türevi olan gerçel değişkenli bir fonksiyonun bu noktada daha yüksek mertebeden türevi olduğu sonucu her zaman çıkarılamaz.

Aşağıda vereceğimiz teorem *Maksimum Modül Teoremi* dir.

Teorem 3.3.15 f sürekli fonksiyonu kapalı, sınırlı bir R bölgesinde analitik olsun. R bölgesinde sabit olmadığı müddetçe f fonksiyonu, $|f(z)|$ maksimum değerini R bölgesinin sınırında alır (Duren 1983).

Aşağıda vereceğimiz önerme *Schwarz Yardımcı Önermesi* olarak bilinir ve Yalınkat fonksiyonlar teorisinde ayrı bir öneme sahiptir. Bu önerme maksimum modül teoreminin sonuçlarından biridir.

Yardımcı Önerme 3.3.16 f fonksiyonu U da analitik ve $f(0)=0$ olsun. U da $|f(z)|\le 1$ ise $|f'(0)|\le 1$ ve $|f(z)|\le |z|$ eşitsizlikleri elde edilir. Eşitlik yalnızca $\theta\in\mathbb{R}$ olmak kaydıyla $f(z)=e^{i\theta}z$ ile gerçekleşir. (Ponnusamy ve Silverman 2006).

Aşağıda vereceğimiz teorem *Minimum Modül Teoremi* olarak bilinir.

Teorem 3.3.17 $B\subset\mathbb{C}$ ve B sınırlı bir bölge olmak üzere f, B de hiçbir yerde sıfır olmayan bir analitik fonksiyonsa ve B nin sınırında sürekli ise, $|f(z)|$ minimum değerini herhangi bir $z_0\in B$ noktasında alamaz. Minimum değerini B bölgesinin sınırında alır (Duren 1983).

Tanım 3.3.18 Karmaşık düzlemin bir B bölgesinde sürekli olan $f:B\to\mathbb{C}$ dönüşümü ile herhangi bir $z_0\in B$ noktasından geçen, aralarındaki açı θ olan eğriler φ_1 ve φ_2 olarak verilsin. w_0 noktasında bu eğrilerin $f(\varphi_1)$ ve $f(\varphi_2)$ resim eğrileri de aralarında yön ve büyüklük bakımından θ açısı yapıyorsa, f fonksiyonu z_0 noktasında konform dönüşüm özelliği gösterir. f tüm $z_0\in B$ noktaları için konform ise bu fonksiyon B bölgesinde de konformdur.

Möbius dönüşümü konform dönüşümlerin en önemlilerindendir. a,b,c,d karmaşık sabitleri için bu dönüşüm

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d},\quad ad-bc\neq 0$$

şeklindedir ve $\mathbb{C}_\infty=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ genişletilmiş karmaşık düzlemi kendisi üzerine konform olarak resmeder.

Teorem 3.3.19 f fonksiyonunun analitik olduğu her z_0 noktasında $f'(z_0)\neq 0$ şartı karşılanıyorsa, f fonksiyonu konformdur (Duren 1983).

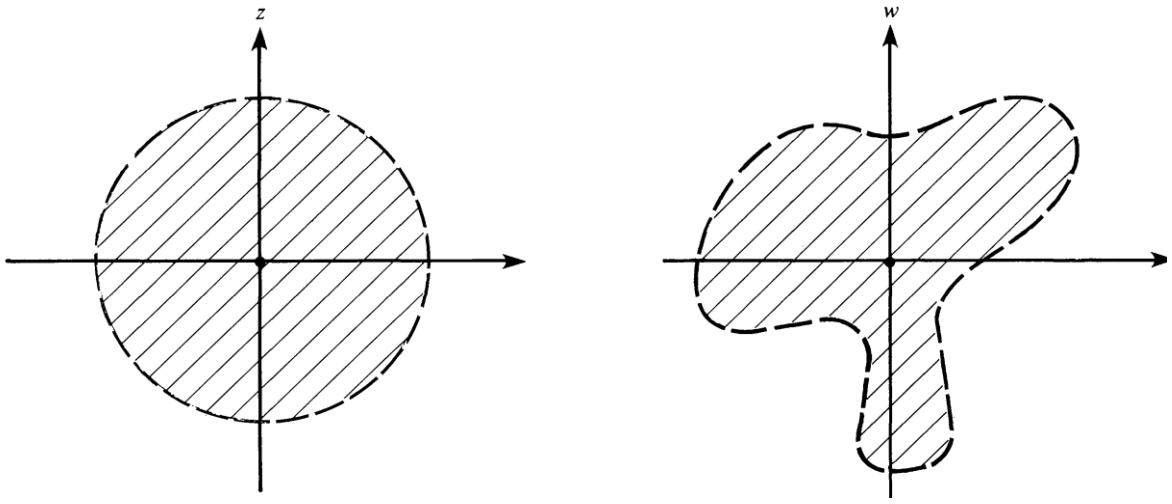
Geometrik Fonksiyon Teorisinde oldukça önemli olan Riemann Dönüşüm Teoremi aşağıdaki gibidir

Teorem 3.3.20 $D \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bölgesini U üzerine birebir ve konform olarak resmeden ve $z_0 \in D$ için $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ şeklinde tek bir f fonksiyonu mevcuttur (Pakla 1991).

3.4 Yalınkat Fonksiyonlar

Tanım 3.4.1 $D \subseteq \mathbb{C}$ de tanımlı analitik f fonksiyonunu alalım. D bölgesindeki z_1, z_2 elemanları için z_1 ve z_2 birbirinden farklı değerler iken $f(z_1) \neq f(z_2)$ koşulu sağlanıyorsa veya $f(z_1) = f(z_2)$ durumu yalnızca z_1 ve z_2 nin eşitliğini gerekli kılıyorsa f ye D de yalınkat (univalent) fonksiyon denir.

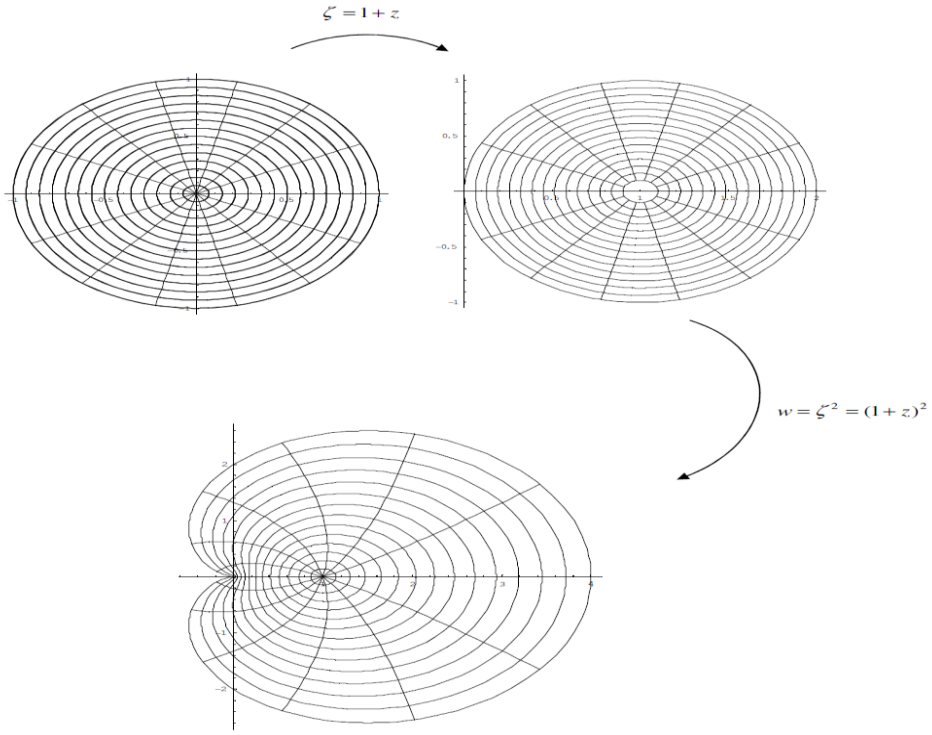
"Analitik yalınkat" ifadesinin eş anlamlıları olarak Almanca'da basit, iddiasız anlamına gelen schlicht ve Rusça'da tek dallı anlamına gelen odnolistni terimleri kullanılır. Bu terimler $w = f(z)$ yalınkat fonksiyonunun "z *düzlemindeki* U *birim diskini w-düzlemindeki bir* $f(U)$ *bölgesi üzerine birebir dönüştürür*" şeklindeki geometrik özelliğini vurgular (Şekil 3.1).



Şekil 3.1. Yalınkat fonksiyonun görüntüsü

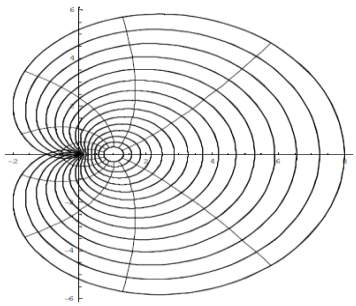
U birim diskinde $f(z) = (1+z)^2$ fonksiyonu yalınkattır. Gerçekten, $f(z) = (1+z)^2$ fonksiyonun yalınkatlığını geometrik olarak incelediğimizde görebiliriz

ki $1+z$ kısmı birim diskin yerini 1 birim sağa doğru kaydırır ve ardından $1+z$ nin karesini alınca ortaya çıkacak durumun resmi aşağıda gösterildiği gibidir (Şekil 3.2).



Şekil 3.2. $f(z)=(1+z)^2$ fonksiyonunun resmi

Bununla birlikte, $f(z)=(1+z)^3$ fonksiyonu U birim diskinde yalınkat değildir. Bu fonksiyon için aşağıdaki grafik çizilir.



Şekil 3.3. $f(z)=(1+z)^3$ fonksiyonunun resmi

Tanım 3.4.2 Bir D bölgesinde tanımlanan herhangi bir f fonksiyonu bir D noktasının en az bir komşuluğunda yalınkatsa f ye $z_0 \in D$ de yerel yalınkattır denir.

Teorem 3.4.3 f, z_0 noktasında analitik bir fonksiyon olsun. f nin yerel yalınkat olabilmesi $f'(z_0)\neq 0$ gerekli ve yeterli koşulu ile sağlanır. (Duren 1983).

Bir bölgede yerel yalınkat olan analitik bir fonksiyon yalınkat olmak durumunda değildir. Bu duruma örnek vermek gerekirse $f(z)=e^{kz}$ fonksiyonu tüm $k\in\mathbb{C}$ değerleri için U birim diskinde yerel yalınkattır fakat $|k|>\pi$ olması durumunda yalınkat değildir. Başka bir örnek olan $f(z)=z^2$, $D=\{z:1<|z|<2\ ,\ 0<\arg z<3\pi/2\}$ de yerel yalınkat fonksiyondur fakat yalınkat fonksiyon değildir. $f(z)=z^2$, $D=\{z:1<|z|<2\ ,\ 0<\arg z<3\pi/2\}$ de analitik ve D deki her z_0 için $f'(z_0)\neq 0$ gerçekleştiğinden yerel yalınkattır. Buna karşın;

$$f\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}+\frac{3}{2\sqrt{2}}i\right)=f\left(-\frac{3}{2\sqrt{2}}-\frac{3}{2\sqrt{2}}i\right)=\frac{9}{4}i$$

olduğu için f fonksiyonu D bölgesinde yalınkat değildir.

Yalınkat Fonksiyonlar Teorisinin en önemli sınıflarından biri aşağıda tanımlayacağımız S sınıfıdır.

Tanım 3.4.4 S ile gösterilen normalize edilmiş yalınkat fonksiyon sınıfı, U da yalınkat ve analitik olan ve $f(0)=0$ ile $f'(0)=1$ normalizasyon koşullarını karşılayan f fonksiyonlarının sınıfıdır. Bu normalizasyon koşulları, $f\in S$ fonksiyonunun

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\ ,\quad |z|<1\ ,\quad a_n\in\mathbb{C} \tag{3.2}$$

biçiminde bir Taylor serisine sahip olduğunu söyler.

S sınıfına ait bazı fonksiyon örnekleri aşağıdaki gibi verilebilir:

U birim diskini,

- $\{w:\mathrm{Re}(w)\geq -1/2\}$ sağ yarı düzlemine resmeden $f(z)=w=z(1-z)^{-1}$ fonksiyonu,
- $\mathbb{C}-\{(-\infty,-1/2]\cup(1/2,\infty)\}$ bölgesi üzerine resmeden $f(z)=w=z(1-z^2)^{-1}$ fonksiyonu,

- kendisi üzerine resmeden $f(z)=z$ fonksiyonu,
- bir kardioidin içine resmeden $f(z)=z-z^2/2$ fonksiyonu.

Bununla birlikte, ismini Paul Koebe'den alan $k(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonu aşikar olmayan en önemli yalınkat fonksiyondur. Koebe fonksiyonunun $k(z)=z\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$ gerçeği kullanılarak her $z\in U$ için yakınsak olan

$$k(z)=z+2z^2+3z^3+\ldots=z+\sum_{n=2}^{\infty}nz^n \tag{3.3}$$

şeklinde Taylor seri açılımına sahip olduğunu görmek oldukça kolaydır. Bu fonksiyon bir takım dönüşümler sonucu yazılır.

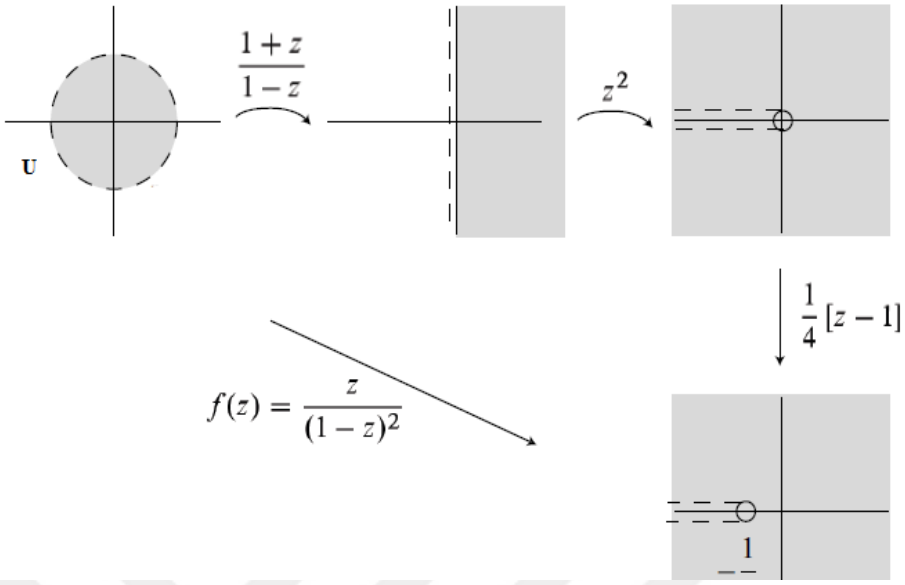
$$t(z)=\frac{1+z}{1-z}\quad,\quad u(z)=t^2(z)\quad,\quad f(z)=\frac{1}{4}\left(u(z)-1\right)$$

dizisini ele alalım. $t(z)$ fonksiyonu U yu $\mathrm{Re}\,t>0$ yarı düzlemi üzerine dönüştürür. Böylece $u(z)=t^2(z)$ fonksiyonu bir yarı düzlemi negatif gerçel eksen hariç bütün karmaşık düzlem üzerine resmeder ve $f(z)=\dfrac{1}{4}\left(u(z)-1\right)$ fonksiyonu da bir normalize işleminin sonucudur. O halde f fonksiyonu

$$f(z)=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2-1\right]=\frac{(1+z)^2-(1-z)^2}{4(1-z)^2}=\frac{z}{(1-z)^2}$$

şeklinde yazılabilir ve böylece (3.3) te belirttiğimiz Koebe fonksiyonu elde edilir.

Koebe fonksiyonunun U birim diskini $-1/4$ den $-\infty$ a kadarki negatif reel ekseni hariç karmaşık düzlemin üstüne konform olarak dönüştürdüğü aşağıdaki şekilde verilmiştir (Şekil 3.4).



Şekil 3.4. Koebe fonksiyonunun grafiği

S sınıfı toplama işlemine göre kapalı değildir. Gerçekten, $u(z)=\frac{z}{1-z}$ ve $v(z)=\frac{z}{1+iz}$ fonksiyonları S sınıfında olduğu halde

$$u'(z)=\frac{1}{(1-z)^2} \quad \text{ve} \quad v'(z)=\frac{1}{(1+iz)^2}$$

değerlerinden $u'(z)+v'(z)=\frac{2-2(1-i)z}{(1-z)^2(1+iz)^2}$ bulunur ve $z=\frac{1+i}{2}\in U$ da $u'(z)+v'(z)=0$ olduğu görünür. Bundan dolayı $u(z)+v(z)\notin S$ olur.

S sınıfı bazı temel transformasyonlar altında korunur. Bu transformasyonların bazılarını şöyle sıralayabiliriz:

i. Eşlenik Alma: $\overline{f(\overline{z})}=z+\sum_{n=2}^{\infty}\overline{a}_n z^n$

ii. Genişleme (Dilatasyon): $\frac{1}{t}f(tz)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n t^{n-1}z^n \quad , \quad 0<t\le 1$

iii. Döndürme (Rotasyon): $e^{i\alpha}f(e^{i\alpha}z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n e^{i(n-1)\alpha}z^n \quad , \quad \alpha\in\mathbb{R}$

iv. **n. Kök Dönüşümü:** Eğer $k \in \mathbb{N}$ ise

$$\left[f\left(z^k\right)\right]^{1/k} = z + \frac{a_2}{k} z^{k+1} + \frac{1}{2k^2}\left(2ka_3 - (k-1)z^{2k+1} + ...\right)$$

v. **Atılmış Değer:** D bölgesinde $f(z) = \phi$ denkleminin z ile çözümü yoksa $f(z)$ fonksiyonuna D bölgesinde ϕ çıkarılmış denir. $f(z) \in S$ U da ϕ çıkarılmış ise

$$g(z) = \frac{f(z)}{1 - f(z)/\phi} = z + (a_2 + 1/\phi)z^2 + ..$$

fonksiyonu da S sınıfındadır.

vi. **Disk Otomorfizmi:** $f \in S$ ve $a \in U$ olmak kaydıyla

$$g(z) = \frac{f\left(\frac{z+a}{1+a\bar{z}}\right) - f(a)}{\left(1 - |a|^2\right) f'(a)}, \qquad (z \in U)$$

fonksiyonu S sınıfında yer almaktadır.

vii. **Değer Bölgesi Dönüşümü:** S sınıfındaki f için, t fonksiyonu $f(U)$ da yalınkat ve $t(0) = 0$ ve $t'(0) = 1$ şartlarını sağlıyorsa $(t \circ f) \in S$ dir.

S sınıfındaki bir fonksiyonun a_2 (ikinci) katsayısının modülünün sınırını hesaplamak için 1916 yılında ortaya çıkan Bieberbach Teoremi yalınkat fonksiyonlar teorisi için son derece önemli olup aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.4.5 $f \in S$ ise $|a_2| \leq 2$ eşitsizliği sağlanır. f fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun bir dönmesi olması eşitliğin sağlanması için gerekli ve yeterlidir (Bieberbach 1916).

Bieberbach Teoreminin ilk uygulaması, Koebe'ye ait bir örtme teoremidir. Her $g \in S$ fonksiyonu $g(0) = 0$ şartını sağlayan açık bir dönüşüm olduğundan g fonksiyonunun görüntüsü orijin merkezli en az bir diski kapsar. 1907 de Koebe, δ mutlak sabit olmak üzere, S sınıfındaki fonksiyonların görüntü kümelerinin, ortak bir $|w| < \delta$ diski kapsadıklarını göstermiştir. Koebe fonksiyonu, $\delta \leq 1/4$ olmasını gerektirir.

Ardından da Bieberbach, δ mutlak sabitinin $1/4$ olarak alınabileceğini ifade eden ve aşağıda belirttiğimiz Koebe Dörtte Bir Teoremini ispatlamıştır.

Teorem 3.4.6 S sınıfının her fonksiyonunun resmi $\{w:|w|<1/4\}$ diskini kapsar. Eşitsizlik, Koebe fonksiyonunun dönmeleri için kesindir (Duren 1983).

Bieberbach'ın $|a_2|\le 2$ eşitsizliği, konform dönüşümlerin geometrik teorisinde yer alan büyüme ve bükülme teoremleri gibi daha üst seviye pratik sahalarına sahip teoremlerin bulunmasına yol açmıştır. Bunlardan biri $f\in S$ için $|f'(z)|$ nin kesin alt ve üst sınırlarını veren Koebe Bükülme Teoremidir. Bükülme Teoreminin oluşması f dönüşümü altında, $|f'(z)|$ nin sonsuz küçük büyütme çarpanı olarak geometrik açıklamasından veya $|f'(z)|^2$ Jacobieninin, alanın sonsuz küçük büyütme çarpanı olmasından ileri gelmiştir. Aşağıdaki iki teoremde sırasıyla *Bükülme ve Büyüme Teoremleri* verilmiştir.

Teorem 3.4.7 S sınıfındaki her f için,

$$\frac{1-r}{(1+r)^3}\le|f'(z)|\le\frac{1+r}{(1-r)^3}\quad,\quad |z|=r<1$$

şeklindedir (Goodman 1983).

Teorem 3.4.8 S sınıfındaki her f için,

$$\frac{r}{(1+r)^2}\le|f(z)|\le\frac{r}{(1-r)^2}\quad,\quad |z|=r<1$$

şeklindir (Goodman 1983).

Büyüme ve Bükülme Teoremlerinin kombinlendiği kimi durumlarda aşağıdaki teorem daha kullanışlı olabilmektedir.

Teorem 3.4.9: S sınıfındaki her bir f için $|z|=r<1$ iken,

$$\frac{1-r}{1+r}\le\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|\le\frac{1+r}{1-r}$$

şeklindedir (Duren 1983).

Karmaşık analiz için son derece heyecanlı bir yıl olan 1984 yılının en büyük matematiksel başarısı 68 yıl önce Bieberbach (Bieberbach 1916) tarafından ortaya konulan Bieberbach Kestiriminin L. de Branges (L.de Branges 1984) tarafından ispatlanmasıdır. Aşağıdaki teoremde *Bieberbach Kestirimi* belirtilmiştir.

Teorem 3.4.10 Her $f \in S$ ve $n = 2,3,..$ için $|a_n| \le n$ eşitsizliği sağlanır. f , Koebe fonksiyonu veya onun bir dönmesi olmadıkça eşitsizlik tüm n değerleri için sağlanır.

1984 senesinde, Fransız Matematikçi L. de Branges bu kestirimi kanıtlayıncaya dek katsayılar ile ilgili elde edilen bazı sınırlar kronolojik olarak aşağıdaki gibi verilebilir:

$|a_2| \le 2$ (Bieberbach 1916),

$|a_3| \le 3$ (Löwner 1923),

$|a_n| \le e.n$ (Littlewood 1925),

$|a_4| \le 4$ (Garabedian and Schiffer 1955),

$|a_6| \le 6$ (Pederson 1968), (Ozawa 1969),

$|a_5| \le 5$ (Pederson and Schiffer 1972),

$|a_n| \le \sqrt{7.6n} < 1.081n$ (FitzGerald 1972),

$|a_n| \le n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ (L. de Branges 1984).

3.5 Pozitif Gerçel Kısımlı Fonksiyonlar Sınıfı

$\wp$ sınıfı,

$$f(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots + p_n z^n + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \qquad (3.4)$$

formunda, U da mevcut analitik z noktaları için $\mathrm{Re}\{f(z)\} > 0$ şartını gerçekleyen bütün fonksiyonların sınıfı olsun. $\wp$ sınıfındaki fonksiyonlara U birim diskinde pozitif gerçel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı ya da Carathéodory Sınıfı denir. Burada

f fonksiyonlarının yalınkat olması gerekmemektedir. Örnek vermek gerekirse, $f(z)=1+z^n$ fonksiyonu herhangi bir $n\geq 0$ tamsayısı için $\wp$ sınıfındandır fakat $n\geq 2$ koşulunda yalınkat değildir.

Koebe fonksiyonunun S sınıfının en önemli örneği olması gibi

$$L_0(z)=\frac{1+z}{1-z}=1+2z+2z^2+\cdots=1+2\sum_{n=1}^{\infty}z^n$$

Mobius fonksiyonu da $\wp$ sınıfı için önemli bir örnektir. Bu fonksiyon $\wp$ sınıfındandır, birim diskte analitik ve yalınkattır. Ayrıca birim diski $\mathrm{Re}\,w>0$ yarı düzlemi üzerine dönüştürür. Bununla birlikte $L_0(z)$ fonksiyonunun karakteri ile Koebe fonksiyonu arasında fark vardır. Koebe fonksiyonu, bir çok ekstremal problemde S sınıfı için tek çözüm olmasına rağmen, $L_0(z)$ fonksiyonu $\wp$ sınıfında yer alan $|p_n|$ değerini maksimize eder ayrıca $\wp$ sınıfının $n\geq 2$ ise $p_n=2$ şartlarını sağlayan sonsuz sayıda farklı fonksiyonları mevcuttur ve bu fonksiyonların hiçbirinin, diğerlerinin dönmesi ile elde edilmesi mümkün değildir.

$\wp$ sınıfındaki fonksiyonların katsayıları için son derece elverişli olan aşağıdaki teorem Carathéodory (1907) tarafından 1907 yılında verilmiştir.

Teorem 3.5.1 $N\geq 1$ belirli bir tamsayı olmak üzere, (3.4) ile verilen f fonksiyonu $\wp$ sınıfında yer alıyorsa $|p_N|\leq 2$ kesin eşitsizliği sağlanır. Eşitlik durumu için $\zeta=e^{2\pi i/N}$ ve $k=1,2,\cdots,N$ için $\varphi_k\geq 0$ olmak kaydıyla

$$F(z)=\sum_{k=1}^{N}\varphi_k\frac{1+\zeta^k z}{1-\zeta^k z}=1+\sum_{n=1}^{\infty}P_n z^n$$

ve $\sum_{k=1}^{N}\varphi_k=1$ ise $F(z)$ fonksiyonu $\wp$ sınıfındandır ve $P_N=2$ olarak elde edilir.

Teorem 3.5.2 $f\in\wp$ ve $z=re^{i\theta}$ ise

$$\frac{1-r}{1+r}\leq|f(z)|\leq\frac{1+r}{1-r}$$

ve

$$\left|f'(z)\right| \le \frac{2}{(1-r)^2}$$

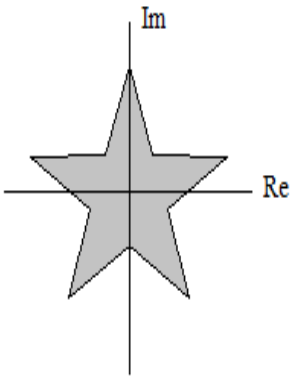
kesin eşitsizlikleri sağlanır. Burada eşitliklerin gerçeklenmesi için $f(z)=L_0\left(e^{i\alpha}z\right)$ fonksiyonunu almak gerek ve yeterdir (Goodman 1983).

3.6 Yalınkat Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları

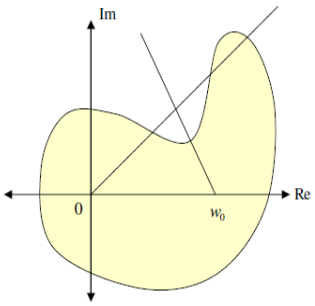
Tanım 3.6.1 Bir $D \subset \mathbb{C}$ kümesi ve $z_0 \in D$ noktasını ele alalım. Bu noktayı, diğer tüm $z \in D$ noktalarıyla bağlayan doğru parçasının tamamı D kümesinin içinde kalıyorsa, D ye $z_0 \in D$ a göre yıldızıl küme denir. Orijine göre yıldızıl olan kümeye yıldızıl küme denir. Bir f fonksiyonu yalınkat ve $F = f(U)$ görüntü bölgesi orijine göre yıldızıl ise yani

$$w \in F \ , \ 0 \le t \le 1 \ \Rightarrow \ tw \in F$$

önermesi doğruysa f ye yıldızıl fonksiyon denir. Yıldızıl fonksiyonlar sınıfının gösterimi S^* şeklindedir ve Alexander 1915 yılında Yıldızıl fonksiyonların sınıfını ilk olarak tanımlamıştır.



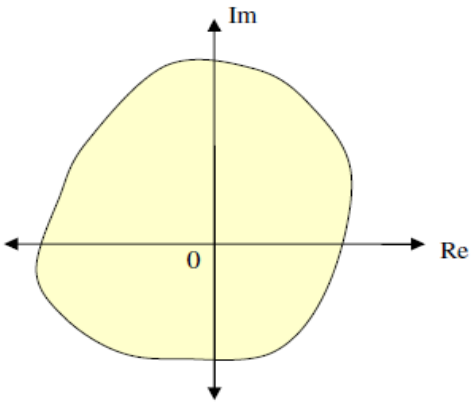
Şekil 3.5. Yıldızıl Küme



Şekil 3.6. z noktasına göre yıldızıl küme

Şekil 3.6 daki bölge z noktasına göre yıldızıldır fakat orijine göre yıldızıl değildir.

Tanım 3.6.2 Bir D kümesi, noktalarının her birine göre yıldızıl ise D konveks kümedir. Geometrik olarak, D kümesinin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasının tamamı D nin içindeyse bu kümeye konveks küme adı verilir. Konveks bir kümeyi konveks bir kümeye dönüştüren fonksiyon konveks fonksiyondur. Başka bir deyişle, bir f fonksiyonu yalınkat ve $f(U)$ görüntü bölgesi konveks ise f ye konveks fonksiyon adı verilir ve bu sınıf C ile gösterilir.



Şekil 3.7. Konveks Küme

$g(z)=\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ ve $h(z)=\frac{z}{1-z}$ fonksiyonları konveks fonksiyonlara örnek olarak verilebilir.

Konveks ve yıldızıl fonksiyon sınıfları için

$$C \subset S^* \subset S$$

kapsama bağıntısı yazılabilir.

$k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$ yıldızıl fonksiyon olmasına rağmen konveks bir fonksiyon değildir.

Konveks ve yıldızıl fonksiyonlar, pozitif gerçel kısımlı fonksiyonlar yardımı ile tanımlanabilir. Bir başka ifade ile U da analitik ve $f(0)=0$, $f'(0)=1$ normalize koşullarını gerçekleyen bir f fonksiyonu için

$$f \in S^* \Leftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} \in \wp$$

ve

$$f \in C \Leftrightarrow 1+\frac{zf''(z)}{f'(z)} \in \wp$$

önermeleri doğrudur. Buna eşdeğer olarak

$$f \in S^* \Leftrightarrow \Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$$

ve

$$f \in C \Leftrightarrow \Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0 \tag{3.5}$$

yazılabilir.

Konveks ve yıldızıl fonksiyonlar arasındaki temel bir bağıntı ilk kez J.W.Alexander (1915) tarafından ifade edilmiştir.

Herhangi bir $f(z)$ fonksiyonu için

$$F(z) = f'(z)$$

olsun. Bu durumda

$$\frac{zF'(z)}{F(z)} = z\frac{f'(z)+zf''(z)}{zf'(z)}$$

olur. Böylece $F(z) \neq 0$ iken

$$\frac{zF'(z)}{F(z)} = 1+\frac{zf''(z)}{f'(z)} \tag{3.6}$$

yazılır. Eğer $f(z)$ nin orijinde $k.$ mertebeden bir sıfırı varsa, son eşitliğin her iki tarafı da orijinde analitiktir. Son eşitlik ile (3.5) ve (3.6) da verdiğimiz eşitsizlikleri karşılaştırdığımızda

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zF'(z)}{F(z)}\right]=\operatorname{Re}\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki *Alexander Teoremi* ni verebiliriz.

Teorem 3.6.3 $f:D\to\mathbb{C}$ analitik fonksiyonunu alalım. f nin konveks olması için gerekli ve yeterli koşul zf' nün yıldızıl olması durumudur (Alexander 1915).

U yu $\operatorname{Re}w>-1/2$ yarı düzlemi üzerine dönüştüren

$$f(z)=\frac{z}{1-z}=z+\sum_{n=2}^{\infty}z^n$$

fonksiyonunu örnek olarak verebiliriz. Bu fonksiyon U birim diskinde konveks olduğu için

$$F(z)=zf'(z)=z\frac{(1-z)-z(-1)}{(1-z)^2}=\frac{z}{(1-z)^2}$$

fonksiyonu birim diskte yıldızıl bir fonksiyondur.

1984 yılına kadar $f\in S$ fonksiyonunun $|a_n|$ katsayılarının kesin sınırları bilinmemesine rağmen, bu problem S^* ve C altsınıfları için çözülmüştür. S^* sınıfına ait fonksiyonlar için Nevanlinna (1921) tarafından aşağıdaki teorem ispat edilmiştir.

Teorem 3.6.4 Eğer $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ fonksiyonu S^* sınıfındaysa, her n pozitif tamsayısı için $|a_n|\le n$ eşitsizliği gerçeklenir. Bu eşitsizlik her n için kesindir ve eşitlik sadece bir $n\ge 2$ için sağlanıyorsa, bu durumda f fonksiyonu Koebe fonksiyonunun bir dönmesi olur.

C sınıfı için Loewner (1917) aşağıdaki sonucu elde etmiştir:

Teorem 3.6.5 Eğer $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ fonksiyonu C sınıfında ise, her $n\in\mathbb{Z}^+$ için $|a_n|\le 1$ eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik her bir n için kesindir ve eşitlik sadece bir $n\ge 2$ için sağlanıyorsa, o halde $f(z)$ fonksiyonu $\frac{z}{1-z}$ fonksiyonunun bir dönmesi olur.

S^* sınıfındaki fonksiyonlar ve bunların türevleri için alt ve üst sınırlar aşağıdaki teoremde belirtildiği gibidir.

Teorem 3.6.6 $f\in S^*$ olsun. O halde

$$\frac{r}{(1+r)^2}\le|f(z)|\le\frac{r}{(1-r)^2}$$

$$\frac{1-r}{(1+r)^3}\le|f'(z)|\le\frac{1+r}{(1-r)^3}$$

ve her bir $k\ge 2$ için

$$|f^{(k)}(z)|\le\frac{k!(k+r)}{(1-r)^{k+2}}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizliklerin hepsi kesindir. $f(z)$ nin Koebe fonksiyonunun bir dönmesi olması eşitlik durumunda gerek ve yeterdir.

Konveks fonksiyonlar için ise aşağıdaki sınırlar yazılır:

Teorem 3.6.7 $f\in C$ olsun. O halde

$$\frac{r}{1+r}\le|f(z)|\le\frac{r}{1-r}$$

$$\frac{1}{(1+r)^2}\le|f'(z)|\le\frac{1}{(1-r)^2}$$

ve her bir $k \geq 2$ için

$$\left| f^{(k)}(z) \right| \leq \frac{k!}{(1-r)^{k+1}}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizliklerin hepsi kesindir. Eşitlik durumunda $f(z)$ fonksiyonunun, $\frac{z}{1-z}$ fonksiyonunun bir dönmesi olması gerek ve yeterdir.

Teorem 3.4.6 daki sınırlar C sınıfındaki fonksiyonlar ve bunların türevleri için Gronvall (1916) ve Loewner (1917) tarafından birbirinden bağımsız bir şekilde elde edilmiştir.

γ mertebeli konveks ve γ mertebeli yıldızıl fonksiyonları Robertson (1936) 1936 yılında aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

Tanım 3.6.8 $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu,

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \geq \gamma \quad ; \quad \forall z \in U$$

şartını gerçekliyorsa, bu fonksiyona γ mertebeli yıldızıl fonksiyon denir. $S^*(\gamma)$ gösterimi bu fonksiyonların sınıfını temsil eder.

Tanım 3.6.9 $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu,

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \geq \gamma \quad ; \quad \forall z \in U$$

şartını sağlıyorsa, bu fonksiyona γ mertebeli konveks fonksiyon adı verilir ve $C(\gamma)$ gösterimi bu fonksiyonların kümesini temsil eder.

$$\left. \frac{zf'(z)}{f(z)} \right|_{z=0} = 1 + \left. \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right|_{z=0} = 1$$

olduğundan $\gamma \leq 1$ şartı gereklidir. Aksi halde $S^*(\gamma)$ ve $C(\gamma)$ kümeleri boş olur. Ayrıca $\gamma = 1$ ise $S^*(\gamma)$ ve $C(\gamma)$ kümeleri bir tek $f(z) = z$ fonksiyonuna sahip olur. Biz genellikle $0 \leq \gamma < 1$ doğal şartını kullanacağız. Burada γ değeri arttıkça $S^*(\gamma)$ ve $C(\gamma)$ kümeleri küçülmektedir.

3.7 Subordinasyon İlkesi

Son yıllarda Subordinasyon konusunda karmaşık analizle ilgilenen birçok matematikçi çalışmalar yapmıştır. E. Lindelöf (Lindelöf 1909) 1909 senesinde subordinasyon terimini ortaya çıkarmasına rağmen J.E. Littlewood (Littlewood 1925) ile W.W. Rogosinski (Rogosinski 1943) temel bağıntıları bulmuşlardır.

Tanım 3.7.1 Birim diskte analitik olan f ve g fonksiyonlarını alalım. U da

$$f(z) = g(\varphi(z)) \tag{3.7}$$

biçiminde $|\varphi(z)| < 1$ ve $\varphi(0) = 0$ şartlarını gerçekleyen bir φ analitik (yalınkat olmasına gerek duyulmayan) fonksiyonu mevcutsa, f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir denir. $f \prec g$ biçiminde ifade edilir. Aynı zamanda g fonksiyonu f fonksiyonuna süperordinedir de denir.

Pozitif gerçel kısma sahip her fonksiyon, $\frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonuna subordinedir. Başka bir ifade ile

$$p(z) \in \wp \Leftrightarrow p(z) \prec \frac{1+z}{1-z}$$

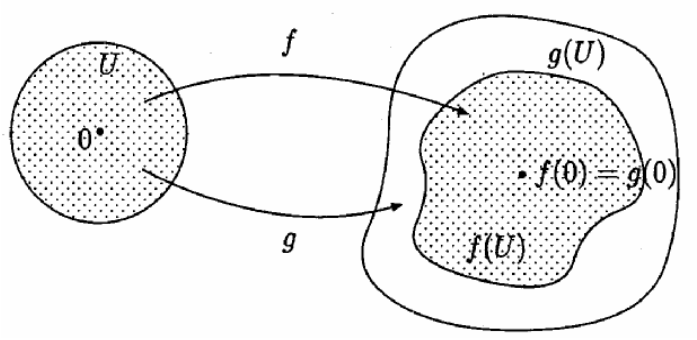
şeklindedir.

Subordine olunan bir fonksiyonun yalınkat olması en önemli durumdur.

g , U birim diskinde yalınkat olmak üzere

$$f \prec g \Leftrightarrow f(0) = g(0) \text{ ve } f(U) \subset g(U) \tag{3.8}$$

önermesi doğrudur (Duren 1983).



Şekil 3.8. Subordinasyon ilkesi

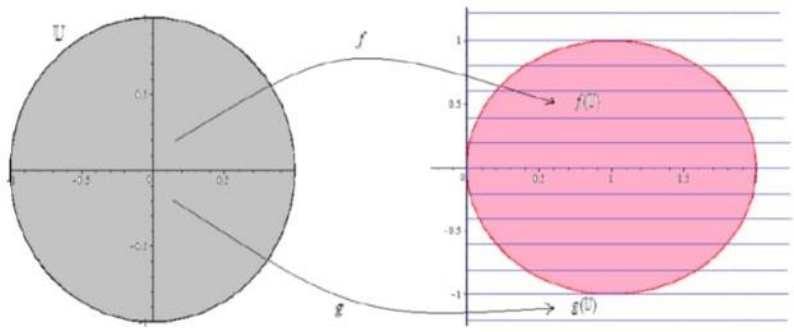
U birim diskinde analitik olan $f(z)=1+z$ ve $g(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonları örnek olarak verilirse, $f \prec g$ dir. Bunu görmek için $\forall z \in U$ için $f(z)=g(\varphi(z))$ biçiminde $|\varphi(z)|<1$ ve $\varphi(0)=0$ şartlarını gerçekleyen bir φ fonksiyonunun varlığı gösterilmelidir.

$$f(z)=g(\varphi(z)) \Rightarrow 1+z=\frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)} \Rightarrow \varphi(z)=\frac{z}{z+2}$$

elde edilir. Buradan,

$$\varphi(0)=0 \text{ ve } |\varphi(z)|=\left|\frac{z}{z+2}\right| \le \frac{1}{|z+2|} \le 1$$

yazılır ve bu da f fonksiyonunun g fonksiyonuna subordine olduğunu gösterir yani $f \prec g$ yazılır. Yine g fonksiyonunun yalınkatlığı bilindiğinden $f(0)=g(0)$ ve $f(U) \subset g(U)$ olduğunu görmek de oldukça kolaydır.



Şekil 3.9. $1+z \prec \dfrac{1+z}{1-z}$

Teorem 3.7.2 g fonksiyonu U da yalınkat ve

$U_r = \{z : |z| < r \ , \ 0 < r < 1\}$ iken $f(0) = g(0)$ ve $f(U) \subset g(U)$,

$$f(U_r) \subset g(U_r)$$

kapsamasını verir (Duren 1983).

3.8 Hankel Determinantları

Tanım 3.8.1 $n \geq 1$ için $H_{n-1}(x,x) = \sum_{i,j=0}^{n-1} h_{i,j} x_i x_j$ kuadratik formuna Hankel formu adı verilir. Bu forma uyan matris $H_{n-1} = \left[h_{i+j} \right]_{i,j=0}^{n-1}$ ile gösterilir ve Hankel matrisi olarak adlandırılır. Bu matris açık olarak

$$H_{n-1} = \begin{vmatrix} h_0 & h_1 & \cdots & h_n & h_{n-1} \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_{n+1} & h_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ h_n & h_{n+1} & \cdots & h_{2n-4} & h_{2n-3} \\ h_{n+1} & h_{n+2} & \cdots & h_{2n-3} & h_{2n-2} \end{vmatrix}$$

yazılabilir ve simetriktir.

Sonsuz mertebeden Hankel matrisi ise

$$H_\infty = \left(h_{i+j} \right)_{i,j=0}^{\infty}$$

şeklinde yazılır.

U da tanımlı $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ şeklindeki yalınkat fonksiyonunu göz önüne alalım. 1976 senesinde Noonan ve Thomas $q \geq 1$ ve $n \geq 1$ için $q-uncu$ Hankel determinantını

$$H_q(n)=\begin{vmatrix} a_q & a_{q+1} & \cdots & a_{q+n-1} \\ a_{q+1} & a_{q+2} & \cdots & a_{q+n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{q+n-1} & a_{q+n} & \cdots & a_{q+2n-2} \end{vmatrix} \tag{3.9}$$

şeklinde ifade etmiştir. Bu determinant bir çok matematikçi tarafından ele alınmıştır. Örneğin Noor 1983 te $n\to\infty$ iken $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ fonksiyonu için $H_q(n)$ nin bir sınırını belirlemiştir. Layman 2001 de bir tamsayı dizisinin Hankel Dönüşümü ve bazı özelliklerini ele almıştır.

(3.9) da tanımlanan $H_q(n)$ determinantında

i-) $q=2$ ve $n=1$ için

$$H_2(1)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}=a_3-a_2^2 \ , \qquad (a_1=1)$$

elde edilir ki bu determinant Fekete-Szegö fonksiyoneli olarak bilinir. Fekete-Szegö(1933) bu değeri reel μ için $\left|a_3-\mu a_2^2\right|$ ye genelleştirmiştir.

ii-) $q=2$ ve $n=2$ için

$$H_2(2)=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix}=a_2a_4-a_3^2$$

determinantı ikinci Hankel determinantı,

iii-) $q=3$ ve $n=1$ için

$$H_3(1)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix}=a_3(a_2a_4-a_3^2)-a_4(a_4-a_2a_3)+a_5(a_3-a_2^2), \quad (a_1=1) \tag{3.10}$$

determinantı üçüncü Hankel determinantı,

iv-) $q=4$ ve $n=1$ için

$$\Delta_1=(a_3a_6-a_4a_5)-a_2(a_2a_6-a_3a_5)+a_4(a_2a_4-a_3^2)$$

$$\Delta_2=(a_4a_6-a_5^2)-a_2(a_3a_6-a_4a_5)+a_3(a_3a_5-a_4^2)$$

ve

$$\Delta_3 = a_2(a_4a_6 - a_5^2) - a_3(a_3a_6 - a_4a_5) + a_4(a_3a_5 - a_4^2)$$

olmak üzere

$$H_4(1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_4 & a_3 & a_5 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \end{vmatrix} = a_7H_3(1) - a_6\Delta_1 + a_5\Delta_2 - a_4\Delta_3 \qquad (3.11)$$

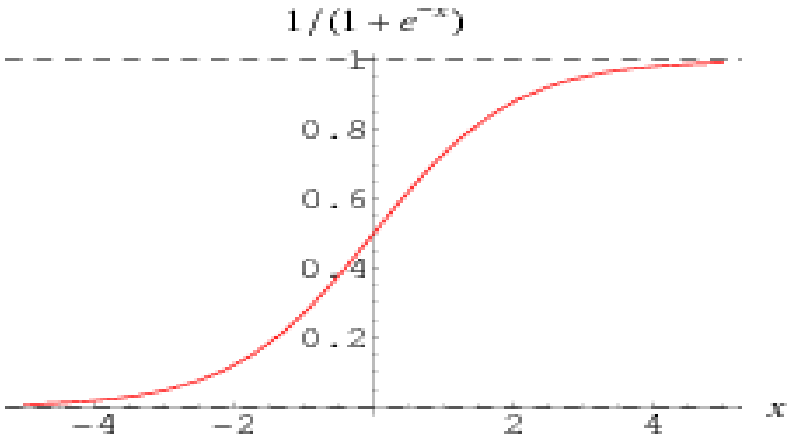
determinantı dördüncü Hankel determinantı olarak bilinir.

3.9 Sigmoid Fonksiyonu

Özel fonksiyonlar teorisi mühendisler ve matematikçiler için çok önemli olmakla birlikte spesifik bir tanımı yoktur. Bu fonksiyonların fizik, bilgisayar gibi pek çok uygulama alanı vardır. Fakat son zamanlarda özel fonksiyonlar teorisi gerçel analiz, fonksiyonel analiz, topoloji gibi diğer dallar tarafından gölgede kalmıştır.

Geleneksel olarak aktivasyon fonksiyonunun, beyin işlem bilgisi gibi sinir sistemi ile yapılması gerektiğine inanılır. Fakat bu fonksiyon belirli bir görevi yerine getirmeye çalışan çok sayıda birbirine bağlı işlem nöronundan ibarettir. En yaygın sigmoid fonksiyon, bir sıfır (0) alt sınırına ve bir (1) üst sınıra sahip olan lojistik fonksiyondur.

Aktivasyon fonksiyonu 3 e ayrılır. Bunlar eşik fonksiyonları, rampa fonksiyonları ve sigmoid fonksiyonlardır. Aralarında en popüler olanı ise sigmoid fonksiyonlardır.



Şekil 3.10. Sigmoid fonksiyonunun grafiği

Sigmoid fonksiyonunu hesaplamanın birçok yolu vardır. Özellikle kesik seri açılımları ile bu fonkisyonlar hesaplanabilir. Lojistik sigmoid fonksiyonu

$$h(z)=\frac{1}{1+e^{-z}}$$

ile gösterilir ve aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- 0 ile 1 arasındaki reel sayıları çıktı olarak verir.
- Çok geniş bir girdi alanını küçük bir çıktı aralığına dönüştürür.
- Bilgiyi asla kaybetmez çünkü bire-bir fonksiyondur.
- Monoton olarak artar.

Yukarıda belirtilen dört özellik sigmoid fonksiyonun geometrik fonksiyonlar teorisinde önemli bir rolü olduğunu göstermektedir.

Teorem 3.9.1 h sigmoid fonksiyonu ve $\phi(z)=2h(z)$ ise o zaman $|z|<1$ de $\phi(z)\in\wp$ dir (Fadipe-Joseph 2016).

Teorem 3.9.2 Eğer $\phi(z)\in\wp$ ise o zaman f normalize edilmiş yalınkat fonksiyondur (Fadipe-Joseph 2016).

h Sigmoid fonksiyonu olmak üzere

$$\phi(z) = 2h(z) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^m} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n \right)^m$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 3.9.3 $\phi(z) = 2h(z) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^m} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n \right)^m$ olsun. Bu durumda $\left|\phi_{n,m}(z)\right| < 2$ dir (Fadipe-Joseph 2016).

Teorem 3.9.3 de $m = 1$ alınırsa; $C_n = \frac{-(-1)^n}{2n!}$ olmak üzere eğer $\phi(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$ ise $|C_n| \leq 2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ bulunur ve bu sonuç kesindir (Fadipe-Joseph 2016).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölüm elde edilen bulguları içermektedir. Modifiye edilmiş Sigmoid fonksiyonuyla ilişkili yıldızıl fonksiyonların bir alt sınıfında Hankel determinant problemini ele alıp, bazı katsayı tahminleri elde ederek bu alt sınıf için $H_4(1)$ dördüncü Hankel determinantının üst sınırını elde edeceğiz.

4.1 $S^*(\gamma,\phi)$ Sınıfında Katsayı Tahminleri

Bu kesimde $S^*(\gamma,\phi)$ sınıfındaki fonksiyonların bazı katsayıları için üst sınır elde edilmektedir.

(3.10) ve (3.11) eşitlikleri ile verilen üçüncü Hankel ve dördüncü Hankel determinantlarının modülü alındığında sırasıyla

$$\left|H_3(1)\right| \le |a_3|\left|a_2a_4 - a_3^2\right| + |a_4|\left|a_4 - a_2a_3\right| + |a_5|\left|a_3 - a_2^2\right| \tag{4.1}$$

ve

$$\Delta_1 = (a_3a_6 - a_4a_5) - a_2(a_2a_6 - a_3a_5) + a_4(a_2a_4 - a_3^2) \tag{4.2}$$

$$\Delta_2 = (a_4a_6 - a_5^2) - a_2(a_3a_6 - a_4a_5) + a_3(a_3a_5 - a_4^2) \tag{4.3}$$

$$\Delta_3 = a_2(a_4a_6 - a_5^2) - a_3(a_3a_6 - a_4a_5) + a_4(a_3a_5 - a_4^2) \tag{4.4}$$

olmak üzere

$$\left|H_4(1)\right| \le |a_7|\left|H_3(1)\right| + |a_6|\left|\Delta_1\right| + |a_5|\left|\Delta_2\right| + |a_4|\left|\Delta_3\right| \tag{4.5}$$

elde edilir.

2013 yılında Babalola (Babalola 2013), $\gamma(0 \le \gamma < 1)$ mertebeli λ-Pseudo yıldızıl fonksiyonların

$$\Re\left(\frac{z\left(f'(z)\right)^{\lambda}}{f(z)}\right) > \gamma, \qquad (z \in U, \lambda \ge 1, \lambda \in \Re) \tag{4.6}$$

analitik şartını sağlayan yeni bir alt sınıfını $L_{\lambda}(\gamma)$ ile tanımlamıştır.

Özel olarak $\lambda = 1$ alınırsa

$$\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \gamma \tag{4.7}$$

şartını sağlayan γ mertebeli 1- Pseudo yıldızıl fonksiyonların sınıfı bir başka ifade ile γ mertebeli yıldızıl fonksiyonların sınıfı olan $S^*(\gamma)$ elde edilir.

Daha sonra 2015 yılında G. Murugusundaramoorthy ve ark. (Murugusundaramoorthy ve ark. 2015) sigmoid fonksiyonlarıyla ilgili ve (4.6) şartını sağlayan λ- Pseudo yıldızıl fonksiyonların $L_\lambda^\gamma(\phi)$ sınıfını tanımlamışlardır. Özel olarak $L_1^\gamma(\phi) = S^*(\gamma,\phi)$ şeklindedir. Yine Murugusundaramoorthy ve ark. $L_\lambda^\gamma(\phi)$ sınıfındaki fonksiyonların a_2, a_3 ve a_4 katsayıları için sınırlar elde etmiş ve özellikle $L_1^\gamma(\phi) = S^*(\gamma,\phi)$ sınıfı için aşağıdaki teoremi ve sonucu vermişlerdir.

Teorem 4.1.1 Eğer $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in A$ fonksiyonu $L_\lambda^\gamma(\phi)$, $(\lambda \geq 1 \in \mathbb{R})$ sınıfına ait ise

$$|a_2| \leq \frac{(1-\gamma)}{2(2\lambda-1)}$$

$$|a_3| \leq \frac{(1-\gamma)^2(4\lambda-2\lambda^2-1)}{4(2\lambda-1)^2(3\lambda-1)}$$

ve

$$|a_4| \leq \frac{(1-\gamma)}{24(4\lambda-1)} + (1-\gamma)^3 \frac{24\lambda^4-80\lambda^3+84\lambda^2-28\lambda+3}{24(2\lambda-1)^3(3\lambda-1)(4\lambda-1)}$$

şeklindedir.

Sonuç 4.1.2 Eğer ve $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in A$ fonksiyonu $L_1^\gamma(\phi) = S^*(\gamma,\phi)$ sınıfına ait ise

$$|a_2| \leq \frac{(1-\gamma)}{2}, \tag{4.8}$$

$$|a_3| \leq \frac{(1-\gamma)^2}{8} \tag{4.9}$$

ve

$$|a_4| \leq \frac{(1-\gamma)^3}{48} + \frac{(1-\gamma)}{72} \tag{4.10}$$

şeklindedir.

$S^*(\gamma,\phi)$ sınıfındaki fonksiyonların a_5, a_6 ve a_7 katsayılarının modülü için üst sınırlarını da aşağıdaki gibi elde edebiliriz.

Teorem 4.1.3 $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \in A$ fonksiyonu $S^*(\gamma,\phi)$ sınıfında ise aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur.

$$|a_5| \le \frac{(1-\gamma)^4}{384}+\frac{(1-\gamma)^2}{144}, \tag{4.11}$$

$$|a_6| \le \frac{(1-\gamma)^5}{3840}+\frac{(1-\gamma)^3}{576}+\frac{(1-\gamma)}{1200} \tag{4.12}$$

ve

$$|a_7| \le \frac{(1-\gamma)^6}{46080}+\frac{(1-\gamma)^4}{3456}+\frac{133(1-\gamma)^2}{259200} \tag{4.13}$$

İspat: Teorem 3.9.2 den modifiye edilmiş sigmoid fonksiyonunun 0 merkezli Taylor serisi açılımı

$$\phi(z)=1+\frac{1}{2}z-\frac{1}{24}z^3+\frac{1}{240}z^5-\frac{17}{40320}z^7+\dots \tag{4.14}$$

şeklindedir. Bununla birlikte Teorem 3.9.1 den birim diskte $\phi(z)\in\wp$ olduğunu biliyoruz.

Şimdi $f\in S^*(\gamma,\phi)$ olsun. Bu durumda subordinasyon ilkesi gereğince

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=\gamma+(1-\gamma)\phi(z) \quad , (z\in U) \tag{4.15}$$

yani

$$zf'(z)=f(z)\left[\gamma+(1-\gamma)\phi(z)\right] \tag{4.16}$$

olacak şekide $\phi(z)\in\wp$ vardır.

(3.2), (4.14) ve (4.16) denklemleri göz önüne alındığında,

$$zf'(z) = z + 2a_2z^2 + 3a_3z^3 + \cdots = z + \left[\frac{(1-\gamma)}{2} + a_2\right]z^2 + \left[\frac{(1-\gamma)a_2}{2} + a_3\right]z^3 + \left[\frac{-(1-\gamma)}{24} + \frac{(1-\gamma)a_3}{2} + a_4\right]z^4$$
$$+\left[\frac{-(1-\gamma)a_2}{24} + \frac{(1-\gamma)a_4}{2} + a_5\right]z^5 + \left[\frac{(1-\gamma)}{240} - \frac{(1-\gamma)a_3}{24} + \frac{(1-\gamma)a_5}{2} + a_6\right]z^6$$
$$+\left[\frac{(1-\gamma)a_2}{240} - \frac{(1-\gamma)a_4}{24} + \frac{(1-\gamma)a_6}{2} + a_7\right]z^7$$

elde ederiz. Buradan polinomların eşitliği yardımıyla

$$5a_5 = \frac{-(1-\gamma)(1-\gamma)}{48} + \frac{(1-\gamma)^4}{96} - \frac{(1-\gamma)^2}{144} + a_5$$

$$6a_6 = \frac{-(1-\gamma)(1-\gamma)^2}{192} + \frac{(1-\gamma)}{240} + \frac{(1-\gamma)}{2}\left[\frac{-(1-\gamma)^2}{192} + \frac{(1-\gamma)^4}{384} - \frac{(1-\gamma)^2}{576}\right] + a_6$$

ve

$$7a_7 = \frac{(1-\gamma)^2}{480} - \frac{(1-\gamma)}{24}\left[\frac{(1-\gamma)^3}{48} - \frac{(1-\gamma)}{72}\right]$$
$$+\frac{(1-\gamma)}{2}\left[\frac{(1-\gamma)}{1200} - \frac{(1-\gamma)^3}{960} - \frac{(1-\gamma)^3}{1920} + \frac{(1-\gamma)^5}{3840} - \frac{(1-\gamma)^3}{5760}\right] + a_7$$

yazılır. Gerekli işlemler yapıldığında

$$a_5 = \frac{(1-\gamma)^4}{384} - \frac{(1-\gamma)^2}{144}, \tag{4.17}$$

$$a_6 = \frac{(1-\gamma)^5}{3840} - \frac{(1-\gamma)^3}{576} + \frac{(1-\gamma)}{1200} \tag{4.18}$$

ve

$$a_7 = \frac{(1-\gamma)^6}{46080} - \frac{(1-\gamma)^4}{3456} + \frac{133(1-\gamma)^2}{259200} \tag{4.19}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak (4.17), (4.18) ve (4.19) eşitliklerinin her iki tarafının modulü alındığında,

$$|a_5| \le \frac{(1-\gamma)^4}{384} + \frac{(1-\gamma)^2}{144},$$

$$|a_6| \le \frac{(1-\gamma)^5}{3840} + \frac{(1-\gamma)^3}{576} + \frac{(1-\gamma)}{1200}$$

ve

$$|a_7| \le \frac{(1-\gamma)^6}{46080} + \frac{(1-\gamma)^4}{3456} + \frac{133(1-\gamma)^2}{259200}$$

olarak bulunur. Bu da istenilen sonuçtur.

Sonuç 4.1.4 A sınıfındaki $f(z)$ fonksiyonu $S^*(0,\phi) = S^*(\phi)$ da ise, bu durumda

$$|a_5| \le \frac{11}{1152}, \tag{4.20}$$

$$|a_6| \le \frac{163}{57600} \tag{4.21}$$

ve

$$|a_7| \le \frac{1709}{2073600} \tag{4.22}$$

elde edilir.

4.2 $S^*(\gamma,\phi)$ Sınıfında Üçüncü Hankel Determinantının Modülü İçin Bir Üst Sınır

Bu kesimde $H_3(1)$ üçüncü Hankel determinantının modülü için bir üst sınır elde edilecektir.

Teorem 4.2.1 $f \in S^*(\gamma,\phi)$ olsun. O halde

$$|H_3(1)| \le \frac{(1-\gamma)^6}{9216} + \frac{(1-\gamma)^4}{3456} + \frac{(1-\gamma)^2}{5184} \tag{4.23}$$

olarak elde edilir.

İspat: (3.10) dan $H_3(1) = a_3\left(a_2a_4 - a_3^2\right) - a_4\left(a_4 - a_2a_3\right) + a_5\left(a_3 - a_2^2\right)$ olduğunu biliyoruz. Sonuç 4.1.1 de verilen katsayı sınırları göz önüne alındığında,

$$H_3(1)=\frac{(1-\gamma)^2}{8}\left[\frac{(1-\gamma)^4}{96}-\frac{(1-\gamma)^2}{144}-\frac{(1-\gamma)^4}{64}\right]+\left[\frac{(1-\gamma)^3}{16}-\frac{(1-\gamma)^3}{48}+\frac{(1-\gamma)}{72}\right]\left[\frac{(1-\gamma)^3}{48}-\frac{(1-\gamma)}{72}\right]$$
$$+\left[\frac{(1-\gamma)^4}{384}-\frac{(1-\gamma)^2}{144}\right]\left[\frac{(1-\gamma)^2}{8}-\frac{(1-\gamma)^2}{4}\right]$$

eşitliği bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapıldığında,

$$H_3(1)=(1-\gamma)^6\left[\frac{2}{768}-\frac{1}{512}-\frac{1}{2304}-\frac{1}{3072}\right]+(1-\gamma)^4\left[\frac{1}{3456}-\frac{1}{1152}+\frac{1}{3456}\right]-\frac{(1-\gamma)^2}{5184}$$

ve buradan da

$$H_3(1)=-(1-\gamma)^6\left[\frac{1}{9216}\right]-(1-\gamma)^4\left[\frac{1}{3456}\right]-(1-\gamma)^2\left[\frac{1}{5184}\right] \tag{4.24}$$

yazılır.

Her iki tarafın modülü alındığında (4.23) elde edilir. Bu da istenilen sonuçtur.

Sonuç 4.2.2 Teorem 4.2.1 de $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n\in A$ fonksiyonu $S^*(\gamma,\phi)$ da ise, o halde $S^*(0,\phi)=S^*(\phi)$ ve

$$\left|H_3(1)\right|\le\frac{49}{82944} \tag{4.25}$$

elde edilir.

4.3 $S^*(\gamma,\phi)$ Sınıfında Dördüncü Hankel Determinantının Modülü İçin Bir Üst Sınır

Bu kesimde $H_4(1)$ dördüncü Hankel determinantının modülü için bir üst sınır elde edilecektir.

Teorem 4.3.1 $f\in S^*(\gamma,\phi)$ olsun. O halde $S^*(\gamma,\phi)$ sınıfında dördüncü Hankel determinantının modülü için bir üst sınır

$$\begin{aligned}|H_4(1)| \le (1-\gamma)^3 10^{-9} \big[&(1-\gamma)^9 (16.60099736) + (1-\gamma)^7 (33.847911823) \\ &+ (1-\gamma)^5 (48.292288237) + (1-\gamma)^3 (30.128884755) \\ &+ (1-\gamma)(30.932665562) \big]\end{aligned} \tag{4.26}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: $f \in S^*(\gamma,\phi)$ olsun. (4.2), (4.3) ve (4.4) ile verilen Δ_1, Δ_2 ve Δ_3 eşitsizliklerini fonksiyonun katsayıları yardımıyla aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\Delta_1 = (a_3a_6 - a_4a_5) - a_2(a_2a_6 - a_3a_5) + a_4(a_2a_4 - a_3^2)$$

için

$$(a_3a_6 - a_4a_5) = \frac{(1-\gamma)^7}{30720} - \frac{(1-\gamma)^5}{4608} + \frac{(1-\gamma)^3}{9600} - \frac{(1-\gamma)^7}{18432} + \frac{(1-\gamma)^5}{6912} + \frac{(1-\gamma)^5}{27648} - \frac{(1-\gamma)^3}{10368},$$

$$a_2(a_2a_6 - a_3a_5) = \frac{(1-\gamma)^7}{15360} - \frac{(1-\gamma)^5}{2304} + \frac{(1-\gamma)^3}{4800} - \frac{(1-\gamma)^7}{6144} + \frac{(1-\gamma)^5}{2304}$$

ve

$$a_4(a_2a_4 - a_3^2) = \frac{(1-\gamma)^7}{4608} - \frac{(1-\gamma)^7}{3072} + \frac{(1-\gamma)^5}{4608} - \frac{(1-\gamma)^5}{3456} + \frac{(1-\gamma)^3}{10368}$$

eşitsizlikleri kullanıldığında

$$\begin{aligned}\Delta_1 = &\left(\frac{(1-\gamma)^7}{30720} - \frac{(1-\gamma)^5}{4608} + \frac{(1-\gamma)^3}{9600} - \frac{(1-\gamma)^7}{18432} + \frac{(1-\gamma)^5}{6912} + \frac{(1-\gamma)^5}{27648} - \frac{(1-\gamma)^3}{10368} \right) \\ &- \left(\frac{(1-\gamma)^7}{15360} - \frac{(1-\gamma)^5}{2304} + \frac{(1-\gamma)^3}{4800} - \frac{(1-\gamma)^7}{6144} + \frac{(1-\gamma)^5}{2304} \right) \\ &+ \left(\frac{(1-\gamma)^7}{4608} - \frac{(1-\gamma)^7}{3072} + \frac{(1-\gamma)^5}{4608} - \frac{(1-\gamma)^5}{3456} + \frac{(1-\gamma)^3}{10368} \right)\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında,

$$\Delta_1 = \left(-\frac{(1-\gamma)^7}{30720} - \frac{(1-\gamma)^5}{9216} - \frac{(1-\gamma)^3}{9600} \right) \tag{4.27}$$

olur.

$$\Delta_2 = (a_4a_6 - a_5^2) - a_2(a_3a_6 - a_4a_5) + a_3(a_3a_5 - a_4^2)$$

için

$$(a_4a_6 - a_5^2) = \frac{(1-\gamma)^8}{184320} - \frac{(1-\gamma)^6}{27648} + \frac{(1-\gamma)^4}{57600} - \frac{(1-\gamma)^6}{276480} + \frac{(1-\gamma)^4}{41472} - \frac{(1-\gamma)^2}{86400} - \frac{(1-\gamma)^8}{147456} - \frac{(1-\gamma)^4}{20736} + \frac{(1-\gamma)^6}{27648}$$

$$a_2(a_3a_6 - a_4a_5) = \frac{(1-\gamma)^8}{61440} - \frac{(1-\gamma)^6}{9216} + \frac{(1-\gamma)^4}{19200} - \frac{(1-\gamma)^8}{36864} + \frac{(1-\gamma)^6}{13824} + \frac{(1-\gamma)^6}{55296} - \frac{(1-\gamma)^4}{20736}$$

ve

$$a_3(a_3a_5 - a_4^2) = \frac{(1-\gamma)^8}{24576} - \frac{(1-\gamma)^6}{9216} - \frac{(1-\gamma)^8}{18432} + \frac{(1-\gamma)^6}{13824} - \frac{(1-\gamma)^4}{41472}$$

eşitlikleri kullanıldığında

$$\Delta_2 = \left(\frac{(1-\gamma)^8}{184320} - \frac{(1-\gamma)^6}{27648} + \frac{(1-\gamma)^4}{57600} - \frac{(1-\gamma)^6}{276480} + \frac{(1-\gamma)^4}{41472} - \frac{(1-\gamma)^2}{86400} - \frac{(1-\gamma)^8}{147456} - \frac{(1-\gamma)^4}{20736} + \frac{(1-\gamma)^6}{27648} \right)$$
$$- \left(\frac{(1-\gamma)^8}{61440} - \frac{(1-\gamma)^6}{9216} + \frac{(1-\gamma)^4}{19200} - \frac{(1-\gamma)^8}{36864} + \frac{(1-\gamma)^6}{13824} + \frac{(1-\gamma)^6}{55296} - \frac{(1-\gamma)^4}{20736} \right)$$
$$+ \left(\frac{(1-\gamma)^8}{24576} - \frac{(1-\gamma)^6}{9216} - \frac{(1-\gamma)^8}{18432} + \frac{(1-\gamma)^6}{13824} - \frac{(1-\gamma)^4}{41472} \right)$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında,

$$\Delta_2 = \left(\frac{-(1-\gamma)^8}{245760} - \frac{(1-\gamma)^6}{55296} - \frac{(1-\gamma)^4}{28800} - \frac{(1-\gamma)^2}{86400} \right) \qquad (4.28)$$

olur.

Son olarak,

$$\Delta_3 = a_2(a_4a_6 - a_5^2) - a_3(a_3a_6 - a_4a_5) + a_4(a_3a_5 - a_4^2)$$

için

$$a_2(a_4a_6 - a_5^2) = \frac{(1-\gamma)^9}{368640} - \frac{(1-\gamma)^7}{55296} + \frac{(1-\gamma)^5}{115200} - \frac{(1-\gamma)^7}{552960} + \frac{(1-\gamma)^5}{82944} - \frac{(1-\gamma)^3}{172800} - \frac{(1-\gamma)^9}{294912} - \frac{(1-\gamma)^5}{41472} + \frac{(1-\gamma)^7}{55296}$$

$$a_3(a_3a_6-a_4a_5)=\frac{(1-\gamma)^9}{245760}-\frac{(1-\gamma)^7}{36864}+\frac{(1-\gamma)^5}{76800}-\frac{(1-\gamma)^9}{147456}+\frac{(1-\gamma)^7}{552960}+\frac{(1-\gamma)^7}{221184}-\frac{(1-\gamma)^5}{82944},$$

$$a_4(a_3a_5-a_4^2)=\left(\frac{(1-\gamma)^9}{147456}-\frac{(1-\gamma)^7}{55296}-\frac{(1-\gamma)^9}{110592}+\frac{(1-\gamma)^7}{82944}-\frac{(1-\gamma)^5}{248832}-\frac{(1-\gamma)^7}{221184}\right.$$
$$\left.+\frac{(1-\gamma)^5}{82944}+\frac{(1-\gamma)^7}{165888}-\frac{(1-\gamma)^5}{124416}+\frac{(1-\gamma)^3}{373248}\right)$$

eşitlikleri kullanıldığında,

$$\Delta_3=\left(\frac{(1-\gamma)^9}{368640}-\frac{(1-\gamma)^7}{55296}+\frac{(1-\gamma)^5}{115200}-\frac{(1-\gamma)^7}{552960}+\frac{(1-\gamma)^5}{82944}-\frac{(1-\gamma)^3}{172800}-\frac{(1-\gamma)^9}{294912}-\frac{(1-\gamma)^5}{41472}+\frac{(1-\gamma)^7}{55296}\right)$$
$$-\left(\frac{(1-\gamma)^9}{245760}-\frac{(1-\gamma)^7}{36864}+\frac{(1-\gamma)^5}{76800}-\frac{(1-\gamma)^9}{147456}+\frac{(1-\gamma)^7}{552960}+\frac{(1-\gamma)^7}{221184}-\frac{(1-\gamma)^5}{82944}\right)$$
$$+\left(\frac{(1-\gamma)^9}{147456}-\frac{(1-\gamma)^7}{55296}-\frac{(1-\gamma)^9}{110592}+\frac{(1-\gamma)^7}{82944}-\frac{(1-\gamma)^5}{248832}-\frac{(1-\gamma)^7}{221184}+\frac{(1-\gamma)^5}{82944}+\frac{(1-\gamma)^7}{165888}-\frac{(1-\gamma)^5}{124416}+\frac{(1-\gamma)^3}{373248}\right)$$

elde edilir.

Gerekli işlemler yapıldığında,

$$\Delta_3=\frac{-(1-\gamma)^9}{4423680}-\frac{(1-\gamma)^7}{276480}-\frac{(1-\gamma)^5}{230400}-\frac{29(1-\gamma)^3}{9331200} \tag{4.29}$$

olur.

(4.27), (4.28) ve (4.29) eşitliklerinin her iki tarafının modülü alınırsa

$$|\Delta_1|\le\frac{(1-\gamma)^7}{30720}+\frac{(1-\gamma)^5}{9216}+\frac{(1-\gamma)^3}{9600}, \tag{4.30}$$

$$|\Delta_2|\le\frac{(1-\gamma)^8}{245760}+\frac{(1-\gamma)^6}{55296}+\frac{(1-\gamma)^4}{28800}+\frac{(1-\gamma)^2}{86400} \tag{4.31}$$

ve

$$|\Delta_3|\le\frac{(1-\gamma)^9}{4423680}+\frac{7(1-\gamma)^7}{276480}+\frac{(1-\gamma)^5}{230400}+\frac{29(1-\gamma)^3}{9331200} \tag{4.32}$$

olarak bulunur.

(3.11) den $H_4(1)$ dördüncü Hankel determinantının $H_4(1)=a_7H_3(1)-a_6\Delta_1+a_5\Delta_2-a_4\Delta_3$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$|H_4(1)|\le|a_7||H_3(1)|+|a_6||\Delta_1|+|a_5||\Delta_2|+|a_4||\Delta_3|$$

elde edilir. Teorem 4.1.2 deki katsayı sınırları (4.24), (4.30), (4.31) ve (4.32) kullanılarak,

$$|a_7||H_3(1)|\le\left(\frac{(1-\gamma)^{12}}{424673280}+\frac{(1-\gamma)^{10}}{159252480}+\frac{(1-\gamma)^{8}}{238878720}+\frac{(1-\gamma)^{10}}{31850496}+\frac{(1-\gamma)^{8}}{11943936}+\frac{(1-\gamma)^{6}}{17915904}+\frac{133(1-\gamma)^{8}}{2388787200}+\frac{133(1-\gamma)^{6}}{895795200}+\frac{133(1-\gamma)^{4}}{1343692800}\right),$$

$$|a_6||\Delta_1|\le\left(\frac{(1-\gamma)^{12}}{117964800}+\frac{(1-\gamma)^{10}}{17694720}+\frac{(1-\gamma)^{8}}{36864000}+\frac{(1-\gamma)^{10}}{35389440}+\frac{(1-\gamma)^{8}}{5308416}+\frac{(1-\gamma)^{6}}{11059200}+\frac{(1-\gamma)^{8}}{36864000}+\frac{(1-\gamma)^{6}}{5529600}+\frac{(1-\gamma)^{4}}{11520000}\right),$$

$$|a_5||\Delta_2|\le\left(\frac{(1-\gamma)^{12}}{94371840}+\frac{(1-\gamma)^{10}}{212233664}+\frac{(1-\gamma)^{8}}{11059200}+\frac{(1-\gamma)^{6}}{30067200}+\frac{(1-\gamma)^{10}}{35389440}+\frac{(1-\gamma)^{8}}{7962624}+\frac{(1-\gamma)^{6}}{4147200}+\frac{(1-\gamma)^{4}}{12441600}\right),$$

$$|a_4||\Delta_3|\le\left(\frac{(1-\gamma)^{12}}{2122336640}+\frac{7(1-\gamma)^{10}}{13271040}+\frac{(1-\gamma)^{8}}{11059200}+\frac{29(1-\gamma)^{6}}{447897600}+\frac{(1-\gamma)^{10}}{318504960}+\frac{7(1-\gamma)^{8}}{19906560}+\frac{(1-\gamma)^{6}}{16588800}+\frac{29(1-\gamma)^{4}}{671846400}\right)$$

olarak bulunur. Buradan,

$$|H_4(1)| \le \left(\frac{(1-\gamma)^{12}}{424673280} + \frac{(1-\gamma)^{10}}{159252480} + \frac{(1-\gamma)^{8}}{238878720} + \frac{(1-\gamma)^{10}}{31850496} + \frac{(1-\gamma)^{8}}{11943936} + \frac{(1-\gamma)^{6}}{17915904} + \frac{133(1-\gamma)^{8}}{2388787200} + \frac{133(1-\gamma)^{6}}{895795200} + \frac{133(1-\gamma)^{4}}{1343692800} \right)$$

$$+ \left(\frac{(1-\gamma)^{12}}{11796400} + \frac{(1-\gamma)^{10}}{17694720} + \frac{(1-\gamma)^{8}}{36864000} + \frac{(1-\gamma)^{10}}{35389440} + \frac{(1-\gamma)^{8}}{5308416} + \frac{(1-\gamma)^{6}}{11059200} + \frac{(1-\gamma)^{8}}{36864000} + \frac{(1-\gamma)^{6}}{5529600} + \frac{(1-\gamma)^{4}}{11520000} \right)$$

$$+ \left(\frac{(1-\gamma)^{12}}{94371840} + \frac{(1-\gamma)^{10}}{212233664} + \frac{(1-\gamma)^{8}}{11059200} + \frac{(1-\gamma)^{6}}{30067200} + \frac{(1-\gamma)^{10}}{35389440} + \frac{(1-\gamma)^{8}}{7962624} + \frac{(1-\gamma)^{6}}{4147200} + \frac{(1-\gamma)^{4}}{12441600} \right)$$

$$+ \left(\frac{(1-\gamma)^{12}}{2122336640} + \frac{7(1-\gamma)^{10}}{13271040} + \frac{(1-\gamma)^{8}}{11059200} + \frac{29(1-\gamma)^{6}}{447897600} + \frac{(1-\gamma)^{10}}{318504960} + \frac{7(1-\gamma)^{8}}{19906560} + \frac{(1-\gamma)^{6}}{16588800} + \frac{29(1-\gamma)^{4}}{671846400} \right)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$|H_4(1)| \le (1-\gamma)^3 10^{-9} \left[(1-\gamma)^9 (16.60099736) + (1-\gamma)^7 (33.847911823) + (1-\gamma)^5 (48.292288237) + (1-\gamma)^3 (30.128884755) + (1-\gamma)(30.932665562) \right]$$

olarak bulunur. Bu da istenilen sonuçtur.

Sonuç 4.3.2 Teorem 4.3.1 de A sınıfındaki $S^*(0,\phi) = S^*(\phi)$ fonksiyonu $S^*(\gamma,\phi)$ da ise, o halde $S^*(0,\phi) = S^*(\phi)$ ve

$$|H_4(1)| \le (159.802747737)10^{-9} \tag{4.33}$$

elde edilir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmamızda modifiye edilmiş sigmoid fonksiyonları ile ilişkili yıldızıl fonksiyonların alt sınıflardan biri olan $S^*(\gamma,\phi)$ sınıfına ait bazı katsayı tahminlerinde bulunup, dördüncü Hankel determinantının bir üst sınırını elde ettik. Bu bölümde, elde edilen sonuçlar verilmektedir.

Teorem 5.1 $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \in A$ fonksiyonu $S^*(\gamma,\phi)$ sınıfında ise aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur.

$$|a_5|\le\frac{(1-\gamma)^4}{384}+\frac{(1-\gamma)^2}{144},$$

$$|a_6|\le\frac{(1-\gamma)^5}{3840}+\frac{(1-\gamma)^3}{576}+\frac{(1-\gamma)}{1200}$$

ve

$$|a_7|\le\frac{(1-\gamma)^6}{46080}+\frac{(1-\gamma)^4}{3456}+\frac{133(1-\gamma)^2}{259200}.$$

Sonuç 5.2 A sınıfında $f(z)$ fonksiyonu $S^*(0,\phi)=S^*(\phi)$ da ise, bu durumda

$$|a_5|\le\frac{11}{1152},$$

$$|a_6|\le\frac{163}{57600}$$

ve

$$|a_7|\le\frac{1709}{2073600}$$

bulunur.

Teorem 5.3 $f\in S^*(\gamma,\phi)$ olsun. O halde

$$|H_3(1)|\le\frac{(1-\gamma)^6}{9216}+\frac{(1-\gamma)^4}{3456}+\frac{(1-\gamma)^2}{5184}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 5.4 Teorem 4.2.1 de $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \in A$ fonksiyonu $S^*(\gamma,\phi)$ da ise, o halde $S^*(0,\phi)=S^*(\phi)$ ve

$$\left|H_3(1)\right| \le \frac{49}{82944}$$

elde edilir.

Teorem 5.5 $f \in S^*(\gamma,\phi)$ olsun. O halde $S^*(\gamma,\phi)$ sınıfında dördüncü Hankel determinantının modülü için bir üst sınır

$$\begin{aligned}\left|H_4(1)\right| \le (1-\gamma)^3 10^{-9}\big[&(1-\gamma)^9\left(16.60099736\right)+(1-\gamma)^7\left(33.847911823\right)\\&+(1-\gamma)^5\left(48.292288237\right)+(1-\gamma)^3\left(30.128884755\right)\\&+(1-\gamma)\left(30.932665562\right)\big]\end{aligned}$$

eşitsizliği doğrudur.

Sonuç 5.6 Teorem 4.3.1 de $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \in A$ fonksiyonu $S^*(\gamma,\phi)$ da ise, o halde $S^*(0,\phi)=S^*(\phi)$ ve

$$\left|H_4(1)\right| \le (159.802747737)10^{-9}$$

elde edilir.

6. KAYNAKLAR

Ahlfors, LV., Sario, L. 1960. Riemann Surfaces. Princeton University Press, page: 382. Princeton.

Alexander, JW., 1915. Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions, ***Ann. Of Math.***, 17: 12-22.

Arif, M., Noor, Kl., Raza, M. and Haq, SW. 2012. Some properties of generalized class of analytic functions related with Janowski functions. ***Abst. Appl. Anal.***, Article ID 279843.

Arif, M., Noor, Kl. and Raza, M., 2012. Hankel determinant problem of a subclass of analytic functions. ***J. Inequal. Appl.***, 2012-22.

Arif, M., Rani, L., Raza, M. and Zaprawa, P. 2018. Fourth Hankel determinant for the family of functions with bounded turning. ***Bull. Korean Math.***, Soc.55, No. 6, pp: 1703-1711.

Babalola, K.O. 2007. On $H_3(1)$ Hankel determinant for some classes of univalent functions. ***Inequal Theory Appl***, 6: 1-7

Babalola, KO. 2013. On λ-Pseudo- star like functions, ***J. Classical Anal.***, 3(2): 137-147.

Bernardi, SD. 1966. Bibliography of Schlicht functions. Part 1, Mariner Pub. Co., page: 353. Florida.

Bernardi, SD. 1977. Bibliography of Schlicht functions. Part 2. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York.

Bieberbach, L., 1916. Über die Koeffizienten derjenigen Pottenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, Sitzungsber. ***Preuss. Akad. Wiss. Phys- Math***. Kl. Pp: 940-955.

Biernacki, M. 1938. Les fonctions multivalentes.Paris, Hermann, page: 66.

Carathéodory, C. 1907. Über den variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen , ***die gegebene Werte nicht annehmen Math. Ann.***, 64: 95-115.

de Branges, LA. 1985. Proof of the Bieberbach Conjecture. ***Acta Math***., 154: 137-152,

Duren, PL. 1983. Univalent Functions. Springer- Verlag, Newyork, page: 384.

Fadipe–Joseph, OA., Oladipo, AT., Ezeafalukwe, UA. 2013. Modified sigmoid function in univalent function theory, ***Inter. J. Math. Sci. Eng. Appl***. 7: 313–317.

Fadipe-Joseph, O.A., Ademosu, W.T., Murugusundaramoorthy, G. 2018. Coefficient bounds for a new class of univalent functions involving Salagean operator and the modified sigmoid fonctio. ***Int. J. Nonlinea Anal. Appl***., 9 No. 2: 59-69.

Fadipe–Joseph, OA., Moses, BO., Oluwayemi, MO. 2016. Certain new classes of Analytic functions defined by using sigmoid function. ***Advances in Mathematics: Scientific Journal***, 5 no. 1: 83-89.

Fekete, M., Szegö, G. 1933. Eine Bemerkung über ungerade schlichte Funktionen. ***J. London Math. Soc***., 8: 85-89.

Fitzgerald, C. 1972. Quadratic inequalities and coefficient estimates for schlicht functions. ***Arch. Rational Mech. Anal.***, 46: 356-368.

Garabedian, R. and Schiffer, M. 1955. A Proof of the Bieberbach Conjecture for the Fourth Coefficient. ***J. Rational Mech. Anal.***, 4: 427-465.

Goluzin, GM. 1947. Interior problems of the theory of schlicht functions. Office of Naval Research, Navy Dept., page: 138. Washington, D.C.

Goodman, AW. 1983. Univalent Functions, Vols. I and II. Polygonal Publishing House, Washington, New Jersey.

Gronwall, T.H. 1916. Sur la deformation dans la representation conforme. ***C. R. Acad . Sci. Paris*** vol 162: 249-252.

Hayman, WK., 1958. Multivalent functions. Cambridge University Press, page: 168. Cambridge.

Janteng, A., Halim SA., Darus M., 2007. Hankel Determinant for Starlike and Convex Functions. ***Int. Journal of Math. Analysis***, Vol. 1, no. 13: 619-625.

Jenkins, JA. 1958. Univalent Functions and Conformal Mapping. Springer-Verlag, page: 170. Berlin, Heidelberg.

Kaplan, W. 1952. Close-to-convex schlicht functions. ***The Michigan Math. J.*** Vol. 1, no. 2: 169-185.

Keerthi, BS., Revathi, M. 2018. On certain new subclass of sakaguchi type function related to sigmoid functions. ***International Journal of Engineering& Technology***, 7(4.36): 766-768.

Koebe, P. 1907. Über die Uniformisierung beliebeger analytischer Kurven. ***Nach. Ges. Wiss.***, Gottingen: 191-210.

Layman, JW. 2001. The Hankel transform and some of its properties. ***Journal of integer sequences***, 4: 1-11.

Li, JL., Srivastava, HM. 1998. Some questions and conjectures in the theory of univalent functions. ***Rocky Mountain J. Math***, 28: 1035-1041.

Lindelöf, E. 1909. Mémoire sur certaines inegualitiés dans la théorie des fonctions onogénes etsur quelques propriétes nouvelles de ces fonctions dans la voisinage d'un point singulier essentiel. ***Acta. Sos. Sci. Fenn.***, 35, 7: 1-35.

Littlewood, JE. 1925. On inequalities in the theory of functions. ***Proc. London Math. Soc.***, 23: 481-519.

Loewner, C. 1917. Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitskreises $|z|<1$, die durch Funktionen mit nicht verschwindender Ableitung geliefert werden. ***Ber. Verh. Sachs. Ges. Wiss. Leipzig,*** 69: 89-106.

Löwner, K. 1923. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. ***I. Math. Ann.***, 89: 103-121.

Montel, P., Cartan, H., Marty, F. 1933. Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes. Gauthier-Villars, page: 159. Paris.

Murugusundaramoorthy,G., Janani, T. 2015. Sigmoid function in the space of Univalent λ–pseudo starlike functions. ***Inter. J. Pure Appl. Math.***, 101: 33–41.

Nehari, Z. 1952. Conformal mapping (International series in pure and applied mathematics) 1st Edition. McGraw-Hill; 1st edition, page: 396.

Nevanlinna, R. 1920. *Über die Konforme Abbildung von Sternebieten , Översikt av Finska Vetenskaps.* ***Societetens Förhandlingar***, No 6, 63: 1-21.

Noonan, JW., Thomas, DK. 1976. On the second Hankel determinant of areally mean p-valent functions. ***Trans. Amer. Math. Soc.***, 223 (2): 337-346.

Noor, KI., 1983. Hankel determinant problem for the class of functions with bounded boundary rotation. ***Rev. Roum. Math. Pures Et Appl.***, 28(8): 731-739.

Ozawa, M. 1969. On the Bieberbach Conjecture for the Sixth Coefficient. ***Kodai Math. Sem. Rep.***, 21: 97-128.

Palka, BP. 1991. An Introduction to Complex Function Theory. Springer- Verlag, New York, page: 560.

Pederson, RN. 1968. A Proof of the Bieberbach Conjecture for the Sixth Coefficient. ***Arch. Rational Mech. Anal.*** 31: 331-351.

Pederson, R., Schiffer, M. 1972. A Proof of the Bieberbach Conjecture for the Fifth Coefficient. ***Arch. Rational Mech. Anal.***, 45: 161-193.

Ponnusamy, S., Silverman H. 2006. Complex variables with Applications. Birkäuser, page: 514. Boston.

Pommerenke, Ch. 1975. Univalent Functions. Vandenhoeck and Ruprecht, page: 376. Göttingen.

Robertson , MS. 1936. On the theory of univalent functions. ***Ann of Math.***, 37: 374-408.

Rogosinski, W. 1943. On the coefficients of subordinate functions. ***Proc. London Math. Soc***., 2:48-82.

Zaprawa, P. 2016. Second Hankel Determinants for the Class of Typically Real Functions. ***Abstract and Applied Analysis Volume*** , 7 pages.

ÖZGEÇMİŞ

06.09.1991 yılında Diyarbakır'da doğdum. İlkokul, ortaokul ve liseyi Diyarbakır´da okudum. 2011 yılında girdiğim Dicle Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2016 yılında mezun oldum. 2017 yılında Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında Tezli Yüksek Lisans programına kayıt yaptırdım.

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ İNTİHAL FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ	
ADI VE SOYADI	BÜŞRA KÖRFECİ
ÖĞRENCİ NO	17 804 003
EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI	2018-2019
YARIYIL	☐ Güz ☒ Bahar
ANABİLİM DALI	MATEMATİK
PROGRAM	Yüksek Lisans
TEZ KONUSU	ANALİTİK FONKSİYONLARIN BAZI ALTSINIFLARI İÇİN DÖRDÜNCÜ HANKEL DETERMİNANTI
İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ	
RAPOR TÜRÜ	Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	61
BENZERLİK ORANI	%24
RAPORLAMA TARİHİ	08/07/ 2019

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 61 sayfalık kısmına ilişkin, 08/07/2019 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından *TURNİTİN* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı %24 'tür.

Uygulanan filtrelemeler:

☐ Kabul/Onay sayfaları hariç,
☐ Kaynakça hariç
☐ Alıntılar hariç
☐ Diğer

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Büşra KÖRFECİ
(08.07.2019)

Prof.Dr.Hatun Özlem GÜNEY
Tez Danışmanı
(08.07.2019)

Dr. Öğr. Üyesi Arife ATAY
Anabilim Dalı Başkanı V.
(08.07.2019)

Formdaki bilgiler bilgisayar ortamında doldurulmalıdır. El yazısı ile doldurulan formlar geçersiz sayılmaktadır.