T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONTAKT-KOMPLEKS RİEMANN SUBMERSİYONLAR

Esra BAŞARIR NOYAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR
Haziran - 2019

T.C

DİCLE UNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Esra BAŞARIR NOYAN tarafından yapılan "Kontakt-Kompleks Riemann Submersiyonlar" konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyesinin

	Ünvanı	Adı Soyadı	
Başkan:	Doç. Dr.	Mehmet GÜLBAHAR	
Üye :	Doç. Dr	Yılmaz GÜNDÜZALP	
Üye :	Dr. Öğr. Üyesi	Yasin KAYA	

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 05/07/2019

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

/ /2019

Prof. Dr. Sevtap SÜMER EKER

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

TEŞEKKÜR

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca bana yol gösterip destek olan, akademik bilgileri ve tecrübesi ile tezimin hazırlanmasında yardımcı olan ayrıca bana her türlü olanağı sağlayan, çok değerli hocam ve tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Yılmaz GÜNDÜZALP' e en içten duygularımla teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca her zaman yanımda olan, her türlü desteğini benden esirgemeyen değerli aileme sonsuz sevgilerimi ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEŞEKKÜR..... **I**

İÇİNDEKİLER..... **II**

ÖZET..... **III**

ABSTRACT..... **IV**

KISALTMA VE SİMGELER..... **V**

1. GİRİŞ..... **1**

2. KAYNAK ÖZETLERİ..... **3**

2.1. Temel Tanım ve Teoremler..... 3

3. MATERYAL VE METOT..... **9**

3.1. Riemann Submersiyonları ve Temel Tensörler..... 9

3.2. Hemen Hemen Hermityen Manifoldlar..... 14

3.3. Hemen Hemen Kontakt Metrik Manifoldlar..... 16

4. BULGULAR VE TARTIŞMA..... **21**

4.1. Kontakt-Kompleks Riemann Submersiyonlar ve Özellikleri..... 21

4.2. O'Neill Tensörleri ve Özellikleri..... 26

4.3. Yapıların Transferi..... 31

4.4. Hemen Hemen Kontakt- Kompleks Riemann Submersiyonlar için Eğrilik ilişkileri..... 37

5. TARTIŞMA VE SONUÇ..... **41**

6. KAYNAKLAR..... **43**

ÖZGEÇMİŞ..... 45

ÖZET

KONTAKT-KOMPLEKS RİEMANN SUBMERSİYONLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Esra BAŞARIR NOYAN

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2019

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmı olup, burada genel bir literatür bilgisi verilmiştir.

İkinci bölümde tez için gerekli temel tanım ve teoremler tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde Riemann submersiyonlar ve temel tensörler ele alınmış. Ayrıca hemen hemen Hermityen manifoldlar ve hemen hemen kontakt metrik manifoldlar incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, önce Kontakt-kompleks Riemann submersyonları ve özellikleri verilmiştir. Daha sonra O'Neill tensörleri, yapıların transferi ve hemen hemen kontakt-kompleks Riemann submersiyonlar için eğrilik ilşkileri incelenmiştir.

Son kısımda ise tartışma ve sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hemen hemen Hermityen manifold, Hemen hemen kontakt metrik manifold, Kontakt-kompleks Riemann submersyonlar,.

ABSTRACT

CONTACT-COMPLEX RİEMANNİAN SUBMERSİONS

MASTER THESIS

Esra BAŞARIR NOYAN

UNIVERSITY OF DICLE
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2019

This graduate thesis consist of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction section and provide a general knowladge of literature.

In the second chapter, the necessary basic definitions and theorems are introduced.

In the third chapter, Riemannian submersions and basics tensors are considered. Moreover ,almost Hermitian manifolds and almost contact product manifolds were examined.

In the fourth chapter, primarily, the definitions, examples and properties of contact-complex Riemannian submersions are mentioned. Then we studied O'neill tensors, transfer of structures and curvature properties for contact-complex Riemannian submersions.
In the fifth chapter, discussions and conclusions were given.

Keywords: Almost Hermitian manifolds, Almost contact product manifolds, contact-complex Riemannian submersions.

KISALTMA VE SİMGELER

E^n	: n-boyutlu Euclid Uzayı
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cümlesi
M , B	:Manifold
T_yM	:Tanjant uzayı
TM	:Tanjant demet
$\|\ \|$	:Norm
$[,]$	:Lie braketi
∇	:Riemann konneksiyon
$\chi(M)$	:Vektör alanlarının uzayı
g	:Metrik tensör
R	:Riemann eğrilik tensörü
K	:Kesit eğriliği
V_x	:Dikey uzay
H_x	:Yatay uzay
A	:Yatay tensör alanı
T	: Dikey tensör alanı
Φ	:Temel-2 form
B	:Bi-Kesit eğriliği
H	:Holomorfik kesit eğriliği
J	:Hemen hemen kompleks yapı

Remove Watermark Now

1. GİRİŞ

Manifoldlardaki yapıların teorisi Riemann geometrisi için geniş ve verimli bir alana sahiptir. Manifoldlar teorisinde çeşitli diferansiyel geometrik yapıların teorisi ve bazı yapılarlarla uygun dönüşümleri tanımlamaktır. Bu dönüşümlerden en önemlisi submersiyon dönüşümleridir. Submersiyonlar teorisinde izometrik immersiyonların karşılığı olarak Riemann submersiyonlar,O'Neill tarafından 1966 yılında tanımlandı (O'Neill 1966). O'Neill makalesinde, iki tane tensör alanı tanımladı ve bunların temel özelliklerini inceledi. Bu temel tensörler O'Neill tensörleri olarak adlandırılıp Riemann submersiyonlar için önemli araçlardır. Ayrıca bu tezde manifoldlar arasındaki submersiyondan yararlanılarak,manifoldların eğrilikleri incelenmiştir. O'Neill in makalesinden sonra bu konu üzerine birçok makale yayınlanmıştır. Böylece Riemann submersiyonların diferansiyel geometride geniş bir alana sahip olduğu gösterildi. Bu konu ile ilgili sonuçlar Falcitelli, Ianus ve Pastore tarafından derlendi(Falcitelli,Ianus ve Pastore 2004).

Chinea kontakt submersiyonların geometrisini ve bu tür dönüşümlerin baz manifoldu üzerindeki hemen hemen kontakt yapıya etkisini inceledi. Watson 3-kontakt yapılar için benzer tanımı göz önüne aldı ve bu tür submersiyonların geometrisini inceledi(Watson 1984).

1930 yılında Schouten ve Dantzng'ın Riemann manifoldları için bulduğu sonuçları Hermit denilen uzaya taşımasıyla kompleks manifoldlarla ilgili çalışmalar başlar.

Bu tezde kontakt-kompleks Riemann submersiyonlar çalışıldı. Hemen hemen kontakt metrik manifolddan hemen hemen hermityen manifolda bir holomorfik dönüşüm tanımlandı. Bu dönüşüm kullanılarak hemen hemen kontakt-kompleks Riemann submersiyon tanımlanmıştır.

$(M_1, g_1, \varphi, \eta, \xi)$ hemen hemen kontakt metrik manifold ve (M_2, J, g_2) hemen hemen Hermityen manifold olsun.

$$F : M_1 \to M_2$$

dönüşümü için

$$F_* \circ \varphi = J \circ F_*$$

şartı sağlanıyorsa F ye (φ, J) −holomorfik dönüşüm denir.

$(M_1, g_1, \varphi, \eta, \xi)$ hemen hemen kontakt metrik manifold ve (M_2, J, g_2) hemen hemen Hermityen manifold olsun.

Remove Watermark Now

$$F : M_1 \to M_2$$

dönüşümü verilsin.

(i) F bir Riemann submersiyonudur.

(ii) $F_* \circ \varphi = J \circ F_*$

şartları sağlanıyorsa F ye bir kontakt-kompleks Riemann submersiyon denir (Falcitelli ve ark. 2004).

Bu çalışmalardan yararlanılarak kontakt-kompleks Riemann submersiyonlar,O'Neill tensörleri,yapılar arasında transferler ve hemen hemen kontakt-kompleks Riemann submersiyonlar için eğrilik ilişkileri incelenmiştir.

pdfelement

Remove Watermark Now

2.KAYNAK ÖZETLERİ

Bu bölümde diğer bölümlerde kulanılacak olan temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1. E^n üzerinde bir $f : E^n \to \mathbb{R}$ reel fonksiyonu verilmiş olduğunu varsayalım. $W \in E^n$ için

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(y+tW) - f(y)}{t}$$

limiti mevcut ise bu limit değerine $f'nin\ y \in E^n$ noktasında ve W **yönündeki türevi** denir. Bu türev

$$W_y[f] = df(W_y) = \frac{d}{dt}(f(y+tW))\,|_{t=0}$$

şeklinde gösterilir (Hacısalihoğlu 1982).

Tanım 2.1.2. M_1 bir manifold ve $y \in M_1$ olsun.

$$C^\infty(M_1\ ,\ R) = \{f | f : W \to R,\ f \in C^\infty(W)\}$$

cümlesini ele alalım. Bir

$$Wy : C^\infty(M_1, R) \to R$$

$$f \to W_y[f] = \sum_{i=1}^{n} w_i|_y \frac{df}{dx_i}|_y$$

dönüşümü için $a, b \in R, \forall f, g \in C^\infty(M_1, R)$ olmak üzere

1) $W_y(af + bg) = aW_y[f] + bW_y[g]$

2) $W_y(fg) = W_y[f]\, g(y) + f(y)\, W_y[g]$

özellikleri sağlanıyorsa W_y fonksiyonuna M_1 nin y noktasındaki **tanjant vektörü** denir. M_1 manifoldunun bir $y \in M_1$ noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesini

$$T_yM_1 = \{W_y | W_y \colon C^\infty(M_1, R) \to R\}$$

ile gösterelim. Bu cümle

Remove Watermark Now

$$\begin{aligned}(+) \ : T_yM_1 \times T_yM_1 &\rightarrow T_yM_1 \\ (W_y, U_y) &\rightarrow W_y + U_y \colon C^{\infty}(M_1, R) \rightarrow R \\ (W_y + U_y)[f] &= W_y[f] + U_y[f]\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(.) \ : R \times T_yM_1 &\rightarrow T_yM_1 \\ (a, W_y) &\rightarrow aW_y \colon C^{\infty}(M_1, R) \rightarrow R \\ (aW_y)[f] &= aW_y[f], \qquad \forall f \in C^{\infty}(M_1, R)\end{aligned}$$

işlemlerine göre R üzerinde vektör uzayı olur. Bu uzaya M_1 nin y noktasındaki **tanjant uzayı** denir (Hacısalihoğlu 1982).

Tanım 2.1.3. M_1 diferansiyellenebilir bir manifold olduğunu varsayalım. Her $y \in M_1$ noktasına $X_y \in T_yM_1$ tanjant vektörünü karşılık getiren dönüşümüne **vektör alanı** denir.

$$TM_1 = \bigcup_{y \in M} T_yM_1$$

tanjant demeti olsun.

$$\begin{aligned}X \colon M_1 &\rightarrow T\ M_1 \\ y &\rightarrow X_y\end{aligned}$$

dönüşümüne bir vektör alanı adı verilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}X_y &= \sum_{i=1}^{n} a_i(y) \frac{\partial}{\partial x_i} y \\ (Xf) &= \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla X vektör alanı M_1 üzerindeki diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesinden fonksiyonların kümesine bir dönüşümdür. $X(f)$ diferansiyellenebilir ise

Remove Watermark Now

X **vektör alanına da diferansiyellenebilirdir** denir (Do Carmo 1992).

Tanım 2.1.4. M_1 ve M_2 manifoldları arasında bir

$$\pi : M_1 \to M_2$$

C^∞ dönüşümünün türev dönüşümü

$$d\pi : \chi(M_1) \to \chi(M_2)$$

biçiminde gösterilir. Bu dönüşüm her $y \in M$ noktasında

$$(\pi_*)_y = d\pi_y : T_y M_1 \to T_{\pi(y)} M_2$$

lineer dönüşümünü verir ve buna da π **nin** y **noktasındaki türev dönüşümü** denir (Do Carmo 1992).

Tanım 2.1.5. M_1, M_2 diferansiyellenebilir iki manifold ve $F : M_1 \to M_2$ türevlenebilir bir dönüşüm olduğunu varsayalım. M_1 üzerindeki vektör alanı E, M_2 üzerindeki vektör alanı G olacak şekilde $p \in M_1$ için

$$F_*(E_p) = G_{F(p)}$$

oluyorsa E ve G, **F−bağlıdır** denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.6. W_1 ve W_2, M_1 manifoldu üzerinde iki vektör alanı olduğunu varsayalım. $f \in C^\infty(M_1)$ fonksiyonunu alalım.

$$[,] : \chi(M_1) \times \chi(M_1) \to \chi(M_1)$$

$$[W_1, W_2] f = W_1(W_2 f) - W_2(W_1 f) \tag{2.1.1}$$

ile tanımlanan [,] fonksiyonuna W_1 ve W_2 nin **Lie (parantez) operatörü** denir ve bu operatör aşağıdaki özellikleri sağlar. $f, g \in C^\infty(M_1)$ ve $W_1, W_2, W_3 \in \chi(M_1)$ olmak üzere;

(i) $[W_1, W_2] = -[W_2, W_1]$

(ii) $[aW_1 + bW_2, W_3] = a[W_1, W_3] + b[W_2, W_3] \quad \forall a,b \in R$

(iii) $[[W_1, W_2], W_3] + [[W_2, W_3], W_1] + [[W_3, W_1], W_2] = 0$

Remove Watermark Now

(iv) $[fW_1, gW_2] = fg[W_1, W_2] + f(W_1 g)W_2 - g(W_2 f)W_1$

dır (Do Carmo 1992).

Tanım 2.1.7. M_1 bir diferansiyellenebilir manifold ve manifold üzerindeki diferansiyellenebilir vektör alanlarının kümesi $\chi(M_1)$ olsun. $W_1, W_2, W_3 \in \chi(M_1)$ ve $a, b \in R$ ve

$$g: \chi(M_1) \times \chi(M_1) \to C^{\infty}(M_1)$$

olmak üzere

1) $g(W_1, W_2) = g(W_2, W_1)$,

2) $g(W_1, W_1) \geq 0, \forall W_1$ için $g(W_1, W_1) = 0 \Longleftrightarrow W_1 = 0$,

3) Bilineer;

$$\begin{aligned} g(aW_1 + bW_2, W_3) &= ag(W_1, W_3) + bg(W_2, W_3) \\ g(W_1, aW_2 + bW_3) &= ag(W_1, W_2) + bg(W_1, W_3) \end{aligned}$$

şartları sağlanıyorsa g dönüşümü **Riemann metriği (veya metrik tensör)** ve (M_1, g) ikilisi de **Riemann manifoldu** olarak adlandırılır (Gundmundson 2006).

Tanım 2.1.8. M_1 diferansiyellenebilir bir manifold olduğunu varsayalım. M_1 üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M_1)$,$\forall f \in C^{\infty}(M_1)$ ve $W_1, W_2, W_3 \in \chi(M_1)$ olmak üzere;

(i) $\nabla_{W_1+W_2} W_3 = \nabla_{W_1} W_3 + \nabla_{W_2} W_3$

(ii) $\nabla_{W_1}(W_2 + W_3) = \nabla_{W_1} W_2 + \nabla_{W_1} W_3$

(iii) $\nabla_{fW_1} W_2 = f \nabla_{W_1} W_2$

(iv) $\nabla_{W_1}(fW_2) = W_1[f] W_2 + f \nabla_{W_1} W_2$

özellikleri sağlanıyorsa ∇, M_1 manifoldu üzerinde bir **afin konneksiyonudur** denir (Do Carmo 1992).

Tanım 2.1.9. M_1 $n-boyutlu$ bir diferansiyellenebilir manifold ve M_1 üzerindeki konneksiyon ∇ olduğunu varsayalım. Böylece

$$T: \chi(M_1) \times \chi(M_1) \to \chi(M_1)$$

$$(W_1, W_2) \to T(W_1, W_2) = \nabla_{W_1} W_2 - \nabla_{W_2} W_1 - [W_1, W_2] \qquad (2.1.2)$$

Remove Watermark Now

olarak tanımlanan vektör değerli tensöre M_1 üzerinde tanımlı ∇ konneksiyonun **torsiyon tensörü** denir (Hacısalihoğlu 1982).

Tanım 2.1.10. (M_1, g) n-boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold olsun. $\forall W_1, W_2, W_3 \in \chi(M_1)$ için

1) $[W_1, W_2] = \nabla_{W_1} W_2 - \nabla_{W_2} W_1$

2) $W_1 g(W_2, W_3) = g(\nabla_{W_1} W_2, W_3) + g(W_2, \nabla_{W_1} W_3)$

şartları sağlanıyorsa ∇ konneksiyonuna M_1 manifoldu üzerinde **Riemann konneksiyonu, Levi-Civita konneksiyonu** veya **metrik konneksiyon** denir. M_1 üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu;

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{W_1} W_2, W_3) &= W_1(g(W_2, W_3)) + W_2(g(W_3, W_1)) \\ &\quad - W_3(g(W_1, W_2)) - g(W_1, [W_2, W_3]) \\ &\quad + g(W_2, [W_3, W_1]) + g(W_3, [W_1, W_2]) \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Kozsul eşitliği ile görülür (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.11. M_1 bir Riemann manifoldu, g de M_1 nin Riemann metriği ve ∇, M_1 üzerinde bir Riemann konneksiyon olduğunu varsayalım. $\forall W_1, W_2, W_3 \in \chi(M_1)$ için

$$R: \chi(M_1) \times \chi(M_1) \times \chi(M_1) \to \chi(M_1)$$

$$(W_1, W_2, W_3) \to R(W_1, W_2, W_3) = R(W_1, W_2) W_3 \tag{2.1.4}$$

$$R(W_1, W_2) W_3 = \nabla_{W_1} \nabla_{W_2} W_3 - \nabla_{W_2} \nabla_{W_1} W_3 - \nabla_{[W_1, W_2]} W_3 \tag{2.1.5}$$

olarak tanımlanan R tensör alanına ∇ konneksiyonunun **eğrilik tensörü** denir (Gundmundson 2006).

Tanım 2.1.12. $n - boyutlu$ diferansiyellenebilir bir manifold M_1 ve bu manifold üzerindeki ∇ konneksiyonunun torsiyon tensörü T olsun. Eğer $T = 0$ ise ∇ konneksiyonuna **simetriktir** veya **sıfır torsiyonludur** denir (Hacısalihoğlu 1982).

Remove Watermark Now

Tanım 2.1.13. (M_1, g) bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda

$$K : \chi(M_1) \times \chi(M_1) \times \chi(M_1) \times \chi(M_1) \to C^{\infty}(M_1)$$

$$(W_1, W_2, W_3, W_4) \to K(W_1, W_2, W_3, W_4) = g(R(W_1, W_2) W_3, W_4)$$

olarak tanımlanan 4.mertebeden kovaryant tensöre M_1 üzerinde **Riemann Christoffel eğrilik tensörü** denir (Hacısalihoğllu 1982).

Önerme 2.1.1. (M_1, g) bir Riemann manifoldu ve ∇, M_1 üzerinde Riemann konneksiyon olsun. Bu durumda $\forall W_1, W_2, W_3, W_4 \in \chi(M_1)$ için

(i) $R(W_1, W_2) W_3 + R(W_2, W_3) W_1 + R(W_3, W_1) W_2 = 0$

(ii) $R(W_1, W_2) W_3 = -R(W_2, W_1) W_3$

(iii) $g(R(W_1, W_2) W_3, W_4) = -g(R(W_1, W_2) W_4, W_3)$

(iv) $g(R(W_1, W_2) W_3, W_4) = g(R(W_3, W_4) W_1, W_2)$

eşitlikleri sağlanır (O'Neill 1983).

Önerme 2.1.2. (M_1, g) bir Riemann manifoldu ve ∇, M_1 üzerinde Riemann konneksiyon olsun. Bu durumda $\forall W_1, W_2, W_3, W_4 \in \chi(M_1)$ için

(i) $K(W_1, W_2, W_3, W_4) + K(W_2, W_3, W_1, W_4) + K(W_3, W_1, W_2, W_4) = 0$

(ii) $K(W_1, W_2, W_3, W_4) = -K(W_2, W_3, W_1, W_4)$

(iii) $K(W_1, W_2, W_3, W_4) = -K(W_1, W_2, W_4, W_3)$

(iv) $K(W_1, W_2, W_3, W_4) = K(W_3, W_4, W_1, W_2)$

özellikleri sağlanır (Hacısalihoğlu 1982).

Tanım 2.1.14. (M_1, g) iklisi bir Riemann manifoldu ve bir $y \in M$ noktasındaki tanjant uzayının iki boyutlu bir altuzayının Y olduğunu varsayalım. Y nin bir bazı $\{W_1, W_2\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} K(Y) &= \frac{g(R(W_1, W_2) W_2, W_1)}{\|W_1\|^2 \|W_2\|^2 - g(W_1, W_2)^2} \\ &= \frac{K(W_1, W_2, W_1, W_2)}{\|W_1\|^2 \|W_2\|^2 - g(W_1, W_2)^2} \end{aligned}$$

olarak ifade edilen $K(Y)$ **reel sayısına** Y **nin kesit eğriliği** denir (Gundmundson 2006)**.**

Remove Watermark Now

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölüm, üç alt bölüme ayrılmıştır. Birinci alt bölümde Riemann submersiyonları ve temel tensörlere yer verilmiştir. İkinci alt bölümde hemen hemen Hermityen manifoldlar ve üçüncü alt bölümde de hemen hemen kontakt metrik manifoldlara değinilmiştir.

3 .1. Riemann Submersiyonları ve Temel Tensörler

Tanım 3.1.1. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2), sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları olsun.

$$\pi : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

örten bir C^∞ dönüşümü için

$$rank\pi_{*x} = boyM_2$$

oluyorsa π ye $x \in M_1$ noktasında bir submersiyon denir. $\forall x \in M_1$ için π bir submersiyon ise π **ye** M_1 **üzerinde bir submersiyon** denir (Falcıtellı ve ark. 2004).

Tanım 3.1.2. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2), sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları olsun.

$$\pi : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

bir C^∞ dönüşümü olsun. $y \in M_1$ için

$$V_y = V_y(\pi) = Ker\pi_{*y} = \{Y \in T_yM_1 | \pi_*(Y) = 0\} \subset T_yM_1$$

ve

$$H_y = H_y(\pi) = V_y^\perp \subset T_yM_1$$

olarak tanımlayalım. V_y uzayına π nin y noktasındaki **dikey uzayı** denir. M_1 deki g_1 metriğine göre V_y dikey uzayının dik tümleyeni olan H_y uzayına ise π nin y noktasındaki **yatay uzayı** denir. Böylece

$$T_yM_1 = V_y \oplus H_y = V_y \oplus V_y^\perp$$

Remove Watermark Now

ortogonal ayrışımı yazılabilir (Baird and Wood 2007).

Tanım 3.1 3. M_1 $n-boyutlu$ bir manifold olsun. M_1 üzerinde

$$\begin{aligned} W: M_1 &\rightarrow T_yM_1 \\ y &\rightarrow V_y \subset T_yM_1 \end{aligned}$$

ile tanımlanan W **dönüşümüne bir distribüsyon** denir.

$X \in \chi(M_1)$ için $p \in M_1$ olacak şekilde $X_p \in W_p$ oluyorsa X vektör alanı W ya aittir denir. Eğer her p noktası için W ye ait q tane diferansiyellenebilir lineer bağımsız vektör alanı mevcut ise W ya diferansiyellenebilirdir denir (Şahin 1996).

Tanım 3.1.4. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları ve

$$\pi: (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir C^∞ dönüşümü olsun. Her $y \in M_1$ ve $V_y, W_y \in T_yM_1$ için

$$g_1(V_y, W_y) = g_2(\pi_*(V_y), \pi_*(W_y))$$

oluyorsa π ye M_1 den M_2 ye bir **izometri** denir.

Bu tanımda π nin izometri olması durumunda π_* dönüşümü T_yM_1 ile $T_{\pi(y)}M_2$ uzaylarındaki iç çarpımları korur. Yani π_* dönüşümü V_y ve $\pi_*(V_y)$ tanjant vektörlerinin uzunluklarını da korur (Hacısalihoğlu 2003).

Tanım 3.1.5. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları olsun.

$$\pi: (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir C^∞- submersiyonu aşağıdaki özelliklere sahip ise π ye bir **Riemann submersiyonu** denir.

(i) π dönüşümü maksimal ranka sahiptir.

(ii) Her $p \in M_1$ noktasında π_{*p} dönüşümü yatay vektörlerinin uzunluğunu korur. Yani

$$g_{1p}(v, w) = g_{2\pi(p)}(\pi_{*p}v, \pi_{*p}w), \qquad v, w \in H, \quad p \in M$$

Remove Watermark Now

dır. Bu da bir $p \in M_1$ noktasında π_* türev dönüşümünün H_p yatay uzayından $T_{\pi(p)}M_2$ üzerine bir lineer izometri olduğunu gösterir (O'Neill ,Falcitelli 1966,2004).

Önerme 3.1.1. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları olsun.

$$\pi : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

bir Riemann submersiyonu ∇ ve ∇' sırasıyla M_1 ve M_2 nin Levi-Civita konneksiyonları olduğunu varsayalım. M_1 üzerindeki W_1 ve W_2 temel vektör alanları $W_1^{'}$, $W_2^{'}$ vektör alanlarına $\pi-$bağlı olsun. Buna göre

(i) $g_1(W_1, W_2) = g_2\left(W_1^{'}, W_2^{'}\right) \circ \pi$

(ii) $h[W_1, W_2]$ temel vektör alanı, $\left[W_1^{'}, W_2^{'}\right]$ vektör alanına $\pi-$bağlıdır.

(iii) $h(\nabla_{W_1} W_2)$ temel vektör alanı ve $\nabla^{'}_{W_1^{'}} W_2^{'}$ $\pi-$bağlıdır.

(iv) Herhangi bir $W_3 \in \chi^v(M_1)$ için $[W_1, W_3]$ dikey vektör alanıdır (Falcitelli ve ark. 2004).

Tanım 3.1.6. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları olsun.

$$\pi : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

bir Riemann submersiyon olsun. Buradan $E, F \in \chi(M_1)$ için $(1,2)$ mertebeli T **temel tensör alanı**

$$T(E, F) = T_E F = h\nabla_{vE} vF + v\nabla_{vE} hF$$

şeklinde tanımlanır (O'Neill 1966).

Tanım 3.1.7. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları olsun.

$$\pi : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

bir Riemann submersiyon olsun. $E, F \in \chi(M_1)$ için $(1,2)$ mertebeli A **temel tensör alanı**

$$A(E, F) = A_E F = v\nabla_{hE} hF + h\nabla_{hE} vF$$

şeklinde tanımlanır (O'Neill 1966).

Remove Watermark Now

Lemma 3.1.1. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları olsun.

$$\pi\colon (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

bir Riemann submersiyon olsun. T_E ve A_E anti-simetrik operatörler olsun. Buradan $X, Y, Z \in \chi(M_1)$ için

$$g_1(T_X Y, Z) = -g_1(T_X Z, Y) \tag{3.1.1}$$

$$g_1(A_X Y, Z) = -g_1(A_X Z, Y) \tag{3.1.2}$$

dır (Falcitelli ve ark. 2004).

Önerme 3.1.2. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları olsun.

$$\pi\colon (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

bir Riemann submersiyon olsun. T ve A tensör alanları aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i) $T_V W = T_W V, \quad U, W \in \chi^v(M_1)$

(ii) $A_V W = -A_W V, \quad V, W \in \chi^h(M_1)$

(iii) $A_V W = \frac{1}{2} v[X, Y], \quad V, W \in \chi^h(M_1)$

dır (O'Neill 1966).

Lemma 3.1.2. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları olsun.

$$(M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

bir Riemann submersiyon olacak şekilde X ve Y yatay vektör alanları, V ve W dikey vektör alanları için;

(i) $\nabla_V W = T_V W + \hat{\nabla}_V W$

(ii) $\nabla_V X = T_V X + h\nabla_V X$

(iii) $A_X V = h\nabla_V X = h\nabla_X V$, X temel olduğunda

(iv) $\nabla_X V = A_X V + v\nabla_X V$

(v) $\nabla_X Y = A_X Y + h\nabla_X Y$

dır (O'Neill 1966).

Teorem 3.1.1. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları olsun.

$$\pi : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

Remove Watermark Now

bir Riemann submersiyon olsun. (M_1, g_1) üzerindeki yatay distribüsyonu H olsun. Buradan H yatay distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $A = 0$ olmasıdır (O'Neill 1966).

Teorem 3.1.2. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları olsun.

$$\pi : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

bir Riemann submersiyon olsun. R, R' ve $\hat{R}$ sırasıyla M, B ve $\left(\pi^{-1}(x), \hat{g_x}\right)$ lifinin Riemann eğrilik tensörleri olduğunu varsayalım. Bu durumda herhangi bir $X, Y, Z, H \in \chi^h(M_1)$ ve $U, V, F, W \in \chi^v(M_1)$ için

$$\begin{aligned} R(U,V,W,F) &= \hat{R}(U,V,W,F) + g(T_U F, T_V W) - g(T_V F, T_U W) && (3.1.5) \\ R(X,Y,Z,H) &= R'(X,Y,Z,H) - 2g(A_X Y, A_Z H) \\ &\quad + g(A_Y Z, A_X H) - g(A_X Z, A_Y H) && (3.1.6) \\ R(X,Y,V,F) &= g((\nabla_V A)_X Y, F) - g((\nabla_F A)_X Y, V) + g(A_X V, A_Y F) \\ &\quad - g(A_X F, A_Y V) - g(T_V X, T_F Y) + g(T_F X, T_V Y) && (3.1.7) \end{aligned}$$

dır (O'Neill 1966).

Teorem 3.1.3. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları olsun.

$$\pi : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

bir Riemann submersiyon olsun. K, K' ve $\hat{K}$ sırasıyla M_1, M_2 ve $\left(\pi^{-1}(x), \hat{g_x}\right)$ lifinin kesit eğrilikleri olduğunu varsayalım. V_1, V_2 ortonormal yatay vektörler W_1, W_2 ortonormal dikey vektörler olmak üzere

(i) $K(W_1, W_2) = \hat{K}(W_1, W_2) + \|T_{W_1} W_2\|^2 + g(T_{W_1} W_1, T_{W_2} W_2)$

(ii) $K(V_1, V_2) = K'(V_1, V_2) \circ \pi - 3\|A_{V_1} V_2\|^2$

(iii) $K(V_1, W_2) = g\left((\nabla_{V_1} T)_{W_2} W_2, V_1\right) - \|T_{W_2} V_1\|^2 + \|A_{V_1} W_2\|^2$

dır (O'Neıll ve Falcıtellı ve ark.1966,2004).

Remove Watermark Now

3.2. Hemen Hemen Hermityen Manifoldlar

Tanım 3.2.1. M_1, $2n-$ *boyutlu* reel bir manifold ve J, M_1 üzerinde $(1,1)$ mertebeli tensör alanı olacak şekilde her $p \in M_1$ için

$$J\colon T_pM_1 \to T_pM_1$$

lineer dönüşümü için $J^2 = -I$ ile tanımlı J endomorfizmi varsa M_1 ye **hemen hemen kompleks manifold**, J ye **hemen hemen kompleks yapı** denir (Kon ve Yano 1984).

Tanım 3.2.2. (M_1, J) hemen hemen kompleks manifold ve $\forall W_1, W_2 \in \chi(M_1)$ için

$$g(JW_1, JW_2) = g(W_1, W_2) \tag{3.2.1}$$

şartını sağlayan Riemann metriği varsa g fonksiyonuna **Hermityen metrik**, M_1 ye **Hermityen manifold**, $(M_1, g, J)-$üçlüsüne de **hemen hemen Hermityen manifold** denir (Kon ve Yano 1984).

Ayrıca $\forall W_1, W_2 \in \chi(M_1)$ için (3.2.1) den

$$g(JW_1, W_2) = -g(W_1, JW_2) \tag{3.2.2}$$

elde edilir.

Tanım 3.2.3. (M_1, g, J) bir hemen hemen Hermityen manifold olsun. $\forall W_1, W_2 \in \chi(M_1)$ için

$$\Phi(W_1, W_2) = g(W_1, JW_2) \tag{3.2.3}$$

şartını sağlayan tensöre **temel-2 form** denir (Kon ve Yano 1984).

Ayrıca

$$\begin{aligned} \Phi(W_1, W_2) &= g(W_1, JW_2) = -g(JW_1, W_2) = -g(W_2, JW_1) \\ &= -\Phi(W_2, W_1) \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

olduğundan Φ temel-2 formunun anti-simetrik olduğu kolayca görülür.

Remove Watermark Now

Tanım 3.2.4. (M_1, g, J) bir hemen hemen Hermityen manifold olduğunu varsayalım. M_1 nin temel-2 formu kapalı ise yani $(d\Phi = 0)$ g ye **Kähler metrik** ve (M_1, g, J) ye **Kähler manifold** denir (Kon ve Yano 1984).

Teorem 3.2.1. (M_1, g, J) hemen hemen Hermityen manifoldunun Kähler manifold olması için $\nabla J = 0$ olmalıdır. Yani $\forall W_1, W_2 \in \chi(M_1)$ için

$$(\nabla_{W_1} J) W_2 = \nabla_{W_1} JW_2 - J\nabla_{W_1} W_2 \tag{3.2.5}$$

dır (Bejancu 1986).

Buradan

$$(\nabla_{W_1} J) W_2 = 0 \Rightarrow \nabla_{W_1} JW_2 = J\nabla_{W_1} W_2 \tag{3.2.6}$$

dır.

Tanım 3.2.5. (M_1, J) bir hemen hemen kompleks manifold olsun. $\forall W_1, W_2 \in \chi(M_1)$ için

$$N_J(W_1, W_2) = J^2[W_1, W_2] + [JW_1, JW_2] - J[JW_1, W_2] - J[W_1, JW_2]$$

ile tanımlı tensör alanına J nin **Nijenhuis tensörü** denir (Şahin 1996).

Tanım 3.2.6. (M_1, J) hemen hemen kompleks manifold olacak şekilde $N_J = 0$ koşuluyla J **dönüşümüne integrallenebilirdir** denir (Kon ve Yano 1984).

Tanım 3.2.7. $M_1 \times R$ de bir hemen hemen kompleks yapı olan J integrallenebilir ise (φ, ξ, η) hemen hemen kontakt yapısına **normaldir** denir (Kon ve Yano 1984).

Tanım 3.2.8. (M_1, g, J) hemen hemen Hermityen manifold olsun. $\forall W_1 \in \chi(M_1)$ için

$$(\nabla_{W_1} J) W_1 = 0$$

ise M_1 ye **nearly Kähler manifold** denir (Kon ve Yano 1984).

Nearly Kähler manifold için W_1 yerine $W_1 + W_2$ yazarsak aşağıdaki denklem de elde edilebilir.

Remove Watermark Now

$$
\begin{aligned}
\left(\nabla_{W_1+W_2}J\right)\left(W_1+W_2\right) &= 0 \\
\left(\nabla_{W_1+W_2}J\right)\left(W_1+W_2\right) &= \left(\nabla_{W_1}J\right)W_1+W_2+\left(\nabla_{W_2}J\right)W_1+W_2=0 \\
\left(\nabla_{W_1+W_2}J\right)\left(W_1+W_2\right) &= \left(\nabla_{W_1}J\right)W_1+\left(\nabla_{W_1}J\right)W_2+\left(\nabla_{W_2}J\right)W_1+\left(\nabla_{W_2}J\right)W_2=0
\end{aligned}
$$

$$\left(\nabla_{W_1}J\right)W_2+\left(\nabla_{W_2}J\right)W_1=0 \tag{3.2.7}$$

3.3. Hemen hemen Kontak Metrik Manifoldlar

Tanım 3.3.1. $(2n+1)$ boyutlu diferansiyellenebilir bir Riemann manifoldu M_1 olduğunu varsayalım. φ,η,ξ de M_1 üzerinde, sırasıyla,(1,1)-tipinde bir tensör alanı, 1-form ve bir vektör alanı varsayalım. Buna göre φ,η,ξ için $W_1\in\chi\left(M_1\right)$ olacak şekilde

$$\eta\left(\xi\right)=1 \tag{3.3.1}$$

ve

$$\varphi^2W_1=-W_1+\eta\left(W_1\right).\xi \tag{3.3.2}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa (φ,η,ξ) üçlüsüne M_1 üzerinde **hemen hemen kontakt yapı**, (M_1,φ,η,ξ) ye ise **hemen hemen kontakt manifold** denir (Kon ve Yano 1984).

Teorem 3.3.1. (M_1,φ,η,ξ) bir hemen hemen kontakt manifold olsun. Bu durumda;

(i) $\varphi\left(\xi\right)=0$

(ii) $\eta\left(\varphi W\right)=0$

(iii) $rank\varphi=2n$

dır (Kon ve Yano 1984).

Tanım 3.3.2. (M_1,φ,η,ξ) bir hemen hemen kontakt manifold olsun. M_1 üzerinde g Riemann metriği verilsin. Bu durumda (φ,η,ξ,g) dörtlüsüne bir **hemen hemen kontakt metrik yapı,** (M_1,φ,η,ξ,g) beşlisine ise **hemen hemen kontakt metrik manifold** denir (Kon ve Yano 1984).

pdfelement

Remove Watermark Now

Teorem 3.3.2. $(M_1, \varphi, \eta, \xi, g)$ bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. $W_1, W_2 \in \chi(M_1)$ için

$$\eta(W_1) = g(W_1, \xi) \tag{3.3.3}$$

ve

$$g(\varphi W_1, \varphi W_2) = g(W_1, W_2) - \eta(W_1)\eta(W_2) \tag{3.3.4}$$

olacak şekilde vardır (Kon ve Yano 1984).

Tanım 3.3.3. $(M_1, \varphi, \eta, \xi, g)$ bir hemen hemen kontakt metrik manifold olduğunu varsayalım. $\forall W_1, W_2 \in \chi(M_1)$ için

$$\Phi(W_1, W_2) = g(W_1, \varphi W_2) \tag{3.3.5}$$

ile tanımlı Φ **dönüşümüne** M_1 **nin temel-2 formu** denir (Kon ve Yano 1984).

Teorem 3.3.3. $(M_1, \varphi, \eta, \xi, g)$ bir hemen hemen kontakt metrik manifold olduğunu varsayalım.M_1 nin temel-2 formu olan Φ dönüşümü anti-simetriktir. Yani;

$$\Phi(W_1, W_2) = g(W_1, \varphi W_2) = -g(\varphi W_1, W_2) = -\Phi(W_2, W_1)$$

olduğundan

$$\Phi(W_1, W_2) = -\Phi(W_2, W_1) \tag{3.3.6}$$

dır (Kon ve Yano 1984).

Tanım 3.3.4. $(2n+1)$ boyutlu diferansiyellenebilir bir riemann manifoldu M_1 olsun. M_1 nin her noktasında

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

koşulunu sağlayan global bir η formu varsa η ya **kontakt form** denir. M_1 ise **kontakt yapıya** sahiptir ve **kontakt manifold** olarak adlandırılır. Buradaki $(d\eta)^n$ n inci mertebeden dış kuvveti gösterir şöyle ki;

$$(d\eta)^n = d\eta \,\Lambda ... \Lambda\, d\eta$$

dır (Kon ve Yano 1984).

Remove Watermark Now

Tanım 3.3.5. (M_1, η) bir kontakt manifold olsun.

$$\eta(\xi) = 1 \qquad\qquad d\eta(\xi, W) = 0$$

olacak şekilde bir tek $\xi \in \chi(M_1)$ vektör alanı varsa ξ ye η kontakt yapısının **karakteristik vektör alanı** olarak adlandırılır. ξ ye aynı zamanda **Reeb vektör alanı** da denir (Kon ve Yano 1984).

Tanım 3.3.6. $\left(M_1^{2n+1}, \varphi, \eta, \xi, g\right)$ bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun.Buna göre,

$$d\Phi = 0 \quad , \quad d\eta = 0$$

koşullarını sağlıyorsa M_1^{2n+1} manifolduna **hemen hemen kosimplektik manifold** denir. Hemen hemen kosimplektik manifoldun normal olması şartıyla bu manifolda **kosimplektik manifold** adı verilir (Olszak 1981).

Teorem 3.3.4. $\left(M_1^{2n+1}, \varphi, \eta, \xi, g\right)$ bir hemen hemen kontakt metrik manifold olduğunu varsayalım. M_1^{2n+1} manifoldunun kosimplektik manifold olması için $\nabla\Phi$ ve $\nabla\eta$ kovaryant türevlerinin sıfıra eşit olması gerekir (Olszak 1981).

Tanım 3.3.7. $\left(M_1^{2n+1}, \varphi, \eta, \xi, g\right)$ bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. M_1^{2n+1} manifoldunun **Kenmatsu manifold** olmasını sağlayan gerek ve yeter şart $\forall W_1, W_2 \in \chi(M_1)$ için

$$(\nabla_{W_1}\varphi) W_2 = g(\varphi W_1, W_2)\,\xi - \eta(W_2)\,\varphi W_1$$

dır (Kenmatsu 1972).

Tanım 3.3.8. $\left(M_1^{2n+1}, \varphi, \eta, \xi, g\right)$ bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. Eğer M_1 nin kontakt metrik yapısı normal ise M_1 **Sasakian yapıya sahiptir** denir (Kon ve Yano,1984).

Teorem 3.3.5. $\left(M_1^{2n+1}, \varphi, \eta, \xi, g\right)$ bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. M_1^{2n+1} manifoldunun **Sasakian manifold** olmasını sağlayan gerek ve yeter şart $\forall W_1, W_2 \in \chi(M_1)$ için

Remove Watermark Now

$$(\nabla_{W_1}\varphi)W_2 = g(W_1, W_2)\xi - \eta(W_2)W_1$$

dır (Kon ve Yano 1984).

Teorem 3.3.6. $\left(M_1^{2n+1}, \varphi, \eta, \xi, g\right)$ bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. Hemen hemen kontakt yapı için φ nin kovaryant türevi $\forall W_1, W_2, W_3 \in \chi(M_1)$ için

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_{W_1}\varphi)W_2, W_3) &= 3d\Phi(W_1, \varphi W_2, \varphi W_3) - 3d\Phi(W_1, W_2, W_3) \\ &\quad + g(S(W_2, W_3), \varphi W_1) + S^{(2)}(W_2, W_3)\eta(W_1) \\ &\quad + 2d\eta(\varphi W_2, W_1)\eta(W_3) \\ &\quad - 2d\eta(\varphi W_3, W_1)\eta(W_2) \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

ile verilir (Zamkovoy 2009).

Tanım 3.3.9. $\left(M_1^{2n+1}, \varphi, \eta, \xi, g\right)$ bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. Hemen hemen kontakt yapı ile birlikte Sasaki-Hatakeyama tensör alanı $\forall E, F \in \chi(M_1)$ için

$$S(E, F) = N_\varphi + 2d\eta(E, F)\xi \tag{3.3.8}$$

dır. Eğer hemen hemen kontakt yapı normal ise

$$S(E, F) = 0 \tag{3.3.9}$$

dır. Benzer olarak

$$[\varphi, \varphi](\varphi E, F) + 2d\eta(\varphi E, F)\xi = 0$$

olup η uygulanırsa

$$\eta\left(\left[\varphi^2 E, \varphi F\right]\right) + \varphi E\eta(F) - \eta([\varphi E, F]) = 0$$

olur. Açıkça görülür ki

$$S^2(E, F) = 0 \tag{3.3.10}$$

dır (Kon ve Yano 1984).

Remove Watermark Now

(IV) $[fX_1, gX_2] = fg[X_1, X_2] + f\ (X_1 g)\, X_2 - g\ (X_2 f)\, X_1$ dır.

pdfelement

Remove Watermark Now

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölüm dört alt bölümden oluşmuştur. Birinci alt bölümde Kontakt-Kompleks Riemann Submersiyonlar ve Özellikleri tanımlanmakta ve örnek verilmektedir. İkinci alt bölümde O'Neıll tensörlerinin özellikleri ve ispatlarına yer verilmiştir. Üçüncü alt bölümde Yapıların transferi ve dördüncü alt bölümde de hemen hemen kontakt-kompleks Riemann submersiyonlar için eğrilik ilişkileri incelenmiştir.

4.1. Kontakt-Kompleks Riemann Submersiyonlar ve Özellikleri

Tanım 4.1.1. $(M_1, g_1, \varphi, \eta, \xi)$ hemen hemen kontakt metrik manifold ve (M_2, J, g_2) hemen hemen Hermityen manifold olsun.

$$F : M_1 \to M_2$$

dönüşümü için

$$F_* \circ \varphi = J \circ F_*$$

şartı sağlanıyorsa F ye $(\varphi, J)-$**holomorfik dönüşüm** denir (Falcitelli ve ark. 2004).

pdfelement

Tanım 4.1.2. $(M_1, g_1, \varphi, \eta, \xi)$ hemen hemen kontakt metrik manifold ve (M_2, J, g_2) hemen hemen Hermityen manifold olsun.

$$F : M_1 \to M_2$$

dönüşümü verilsin.

(i) F bir Riemann submersiyonudur.

(ii) $F_* \circ \varphi = J \circ F_*$

şartları sağlanıyorsa F ye bir **kontakt-kompleks Riemann submersiyon** denir (Falcitelli ve ark. 2004).

Örnek 4.1.1. R^5 üzerinde $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ koordinatları verilsin. $\eta = \partial w_5$

Remove Watermark Now

1-form, $\xi = \frac{\partial}{\partial w_5}$ karakteristik vektör alanı ve

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ile verilsin. Bu durumda (φ, η, ξ) −üçlüsü R^5 üzerinde hemen hemen kontakt yapıdır. $(R^5, \varphi, \eta, \xi)$ −dörtlüsü de hemen hemen kontakt manifold olur.

Örnek 4.1.2. R^4 üzerinde $\{w_1, w_2\}$ koordinatları verilsin. g_2 standart Riemann metrik ve

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

bir hemen hemen kompleks yapı olduğunu varsayalım. Bu durumda (R^2, g_2, J) bir hemen hemen Hermityen manifold olur.

Bu iki örnekten yola çıkarak aşağıdaki örneği elde edebiliriz.

Örnek 4.1.3. $F : R^5 \to R^2$ dönüşümü $F(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) = (w_1 + w_3, w_2 + w_4, w_5)$ dönüşümünü hemen hemen kontakt metrik manifold ve R^2 hemen hemen hermityen manifold olsun.

$F : R^5 \to R^2, F(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) = \left(\frac{w_1+w_3}{\sqrt{2}}, \frac{w_2+w_4}{\sqrt{2}}\right)$ dönüşümünü ele alalım. Doğrudan yapılan işlemlerle

$$F_* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. $rank F_* = boy R^2 = 2$ olduğundan F örtendir. Diğer taraftan,

$$(Ker F_*) = Span\{U = (-1, 0, 1, 0, 0), V = (0, -1, 0, 1, 0)\}$$

ve

$$(Ker F_*)^{\perp} = Span\{W_1 = (1, 0, 1, 0, 0), W_2 = (0, 1, 0, 1, 0)\}$$

olur. R^5 ve R^2 üzerindeki standart Riemann metrikleri g_1 ve g_2 olmak üzere

Remove Watermark Now

$$g_1(W_1, W_1) = 2 \qquad g_1(W_2, W_2) = 2$$
$$F_*W_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}, 0\right), \qquad F_*W_2 = \left(0, \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$g_1(W_1, W_1) = g_2(F_*W_1, F_*W_1) = 2$$

$$g_1(W_2, W_2) = g_2(F_*W_2, F_*W_2) = 2$$

dir. Böylece yatay vektörlerin uzunluğunun korunduğu görülür. Buradan F in bir Riemann submersiyon olduğu açıktır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} F_* \circ \varphi W_1 &= F_*(0,1,0,1,0) = \left(0, \frac{2}{\sqrt{2}}\right) \\ J \circ F_*W_1 &= J\left(\frac{2}{\sqrt{2}}, 0\right) = \left(0, \frac{2}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

buradan

$$F_* \circ \varphi W_1 = J \circ F_*W_1$$

olduğu görülür. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} F_* \circ \varphi W_2 &= F_*(-1,0,-1,0,0) = \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}, 0\right) \\ J \circ F_*W_2 &= J\left(0, \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}, 0\right) \end{aligned}$$

$$F_* \circ \varphi W_2 = J \circ F_*W_2$$

olup F in holomorfik olduğu görülür. Her iki şart sağlandığından F bir kontakt-kompleks riemann submersiyondur.

Önerme 4.1.1. $(M_1, g_1, \varphi, \eta, \xi)$ hemen hemen kontakt metrik manifold ve (M_2, J, g_2) hemen hemen Hermityen manifold olsun.

$$F : M_1 \to M_2$$

bir kontakt-kompleks Riemann submersiyon olsun.

Remove Watermark Now

Eğer M_1 üzerinda temel vektör alanları , M_2 üzerinde $X^{'}, Y^{'}$ ne $F-bağlı$ ise bu durumda aşağıdaki iddialar doğrudur (Falcitelli ve ark. 2004).

(i) φW_1, $W_1^{'}$ ne $F-bağlıdır$.

(ii) $h\left(\left(\nabla_{W_1}\varphi\right)W_2\right), \left(\nabla^{'}_{W_1^{'}}J\right)W_2^{'}$ ne $F-bağlıdır$.

(iii) $h\left[W_1,W_2\right], \left[W_1^{'},W_2^{'}\right]$ ne $F-bağlıdır$.

İspat:

(i) Kontakt-kompleks Riemann submersiyonun tanımını kullanırsak $F_*\circ\varphi = J\circ F_*$ olur. $F_*W_1 = W_1^{'}$ olduğundan $F_*\varphi W_1 = JF_*W_1 = JW_1^{'}$ elde edilir. Dolayısıyla,M_1 üzerindeki φW_1 temel vektör alanı M_2 üzerindeki $JW_1^{'}$ ne $F-bağlıdır$.

(ii) $F_*W_1 = W_1^{'}$ ve $F_*W_2 = W_2^{'}$ dır. (3.2.5) kullanılırsa $\left(\left(\nabla_{W_1}\varphi\right)W_2\right) = \nabla_{W_1}\varphi W_2 - \varphi\nabla_{W_1}W_2$ olur. Doğrudan hesaplamalarla

$$F_*\left(h\left(\nabla_{W_1}\varphi\right)W_2\right) = F_*h\left(\nabla_{W_1}\varphi W_2\right) - F_*\left(h\varphi\nabla_{W_1}W_2\right)$$

olur. F bir holomorfik dönüşüm olduğundan

$$F_*\left(h\left(\nabla_{W_1}\varphi\right)W_2\right) = F_*h\left(\nabla_{W_1}\varphi W_2\right) - JF_*\left(h\nabla_{W_1}W_2\right)$$

olur. Önerme 3.1.1 (iii) den

$$\begin{aligned}
F_*\left(h\left(\nabla_{W_1}\varphi\right)W_2\right) &= \nabla^{'}F_*^{F_*\varphi W_2}W_1 - J\nabla^{'}F_*^{F_*W_2}W_1\\
F_*\left(h\left(\nabla_{W_1}\varphi\right)W_2\right) &= \nabla^{'}_{W_1^{'}}JW_2^{'} - J\nabla^{'}_{W_1^{'}}W_2^{'}\\
F_*\left(h\left(\nabla_{W_1}\varphi\right)W_2\right) &= \left(\nabla^{'}_{W_1^{'}}J^{'}\right)W_2^{'}
\end{aligned}$$

olur.

(iii) $F_*W_1 = W_1^{'}$ ve $F_*W_2 = W_2^{'}$ dır. Önerme 3.1.1 (ii) den

$$F_*h\left[W_1,W_2\right] = \left[F_*W_1,F_*W_2\right] = \left[W_1^{'},W_2^{'}\right]$$

dır.

Önerme 4.1.2. $(M_1,g_1,\varphi,\eta,\xi)$ hemen hemen kontakt metrik manifold ve (M_2,J,g_2) hemen hemen Hermityen manifold olsun.

$$F: M_1 \to M_2$$

Remove Watermark Now

kontakt-kompleks Riemann submersiyon olsun. Bu durumda yatay ve dikey distribüsyonlar $\varphi - invaryanttır\,(değismezdir)$ (Falcitelli ve ark. 2004).

İspat. F bir holomorfik dönüşüm olduğundan

$$F_*\varphi U = JF_*U$$

dır. U dikey vektör alanı ve F bir Riemann submersiyon olduğundan

$$F_*U = 0$$

dır. Böylece

$$F_*\varphi U = 0$$

dır. Yani φU dikeydir.

X yatay vektör alanını ele alalım. M_1 hemen hemen kontakt metrik manifold ve (3.2.2) denklemi kullanılırsa

$$g_1(\varphi X, U) = -g_1(X, \varphi U) = 0$$

dır. Burada φU dikey, X yatay vektör alanıdır.

Böylece

$$g_1(\varphi X, U) = 0$$

dır. O halde φX yatay vektör alanıdır.

Teorem 4.1.1. $F : M_1 \to M_2$ bir kontakt-kompleks Riemann submersiyon olsun. Eğer M_1 bir quàsi-Sasakian manifold ise o zaman lifler minimal altmanifoldlardır (Falcitelli ve ark. 2004).

İspat: M_1 bir hemen hemen kontakt metrik manifold olduğundan $W_1, W_2, W_3 \in \chi(M)$ için (3.3.7) denklemini kullanalım.

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_{W_1}\varphi)W_2, W_3) &= 3d\Phi(W_1, \varphi W_2, \varphi W_3) - 3d\Phi(W_1, W_2, W_3) \\ &\quad + g(S(W_2, W_3), \varphi W_1) + S^{(2)}(W_2, W_3)\eta(W_1) \\ &\quad + 2d\eta(\varphi W_2, W_1)\eta(W_3) - 2d\eta(\varphi W_3, W_1)\eta(W_2) \end{aligned}$$

Eğer M_1 bir quàsi-Sasakian manifold ise $d\Phi = 0$ dır. (3.3.9) ve (3.3.10) kullanılırsa

Remove Watermark Now

$$g\left(\left(\nabla_{W_1}\varphi\right)W_2, W_3\right) = d\eta\left(\varphi W_2, W_1\right)\eta\left(W_3\right) - d\eta\left(\varphi W_3, W_1\right)\eta\left(W_2\right)$$

denklemi elde edilir. $W_1 = W_2 = U$ dikey vektör alanı ve $W_3 = X$ yatay vektör alanı olsun.

$$g\left(\left(\nabla_U\varphi\right)U, X\right) = 0 \Rightarrow g\left(\nabla_U\varphi U - \varphi\nabla_U U, X\right) = 0$$

dır. $X \neq 0$ olduğundan

$$\nabla_U\varphi U - \varphi\nabla_U U = 0$$

dır.

$$T_U\varphi U + v\nabla_U\varphi U - \varphi T_U U - \varphi v\nabla_U U = 0$$

dır. Dikey ve yatay bileşenler ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse ;

$$T_U\varphi U - \varphi T_U U = 0 \Rightarrow T_U\varphi U = \varphi T_U U$$

dır. Buradan T simetrik olduğundan

$$T_{\varphi U}U = \varphi T_U U$$

olur. T nin özellikleri kullanılırsa

$$T_U U + T_{\varphi U}\varphi U = 0$$

elde edilir. $U = \xi$ alalım.

$$T_\xi\xi + T_{\varphi\xi}\varphi\xi = 0 \Rightarrow T_\xi\xi = 0$$

dır. Böylece lifler total jeodeziktir gerek ve yeter şart lifler minimal altmanifoldlardır.

4.2. O'Neill Tensörleri ve Özellikleri

Teorem 4.2.1 $F : M_1 \to M_2$ bir kontakt-kompleks Riemann submersiyon olsun. Eğer M_1 Nearly-K-cosymplectic manifold ise aşağıdaki ifadeler doğrudur (Chinea 1984). $W_1 \in \chi^h\left(M\right)$ için

i) $A_{W_1}\varphi W_1 = \varphi A_{W_1}W_1$

ii) $A_{\varphi W_1}W_1 = -\varphi A_{W_1}W_1$

Remove Watermark Now

iii) $A_{W_1}\varphi W_1 = A_{\varphi W_1}W_1$

iv) $A_{W_1}\xi = 0$

İspat:

i) M_1 Nearly-K-cosymplectic manifold olduğundan $W_1 \in \chi^h(M)$ için

$$(\nabla_{W_1}\varphi)W_1 = 0 \qquad \nabla_{W_1}\xi = 0$$

(3.2.5) kullanılırsa

$$\nabla_{W_1}\varphi W_1 - \varphi\nabla_{W_1}W_1 = 0$$

dır. Lemma 3.1.2 (v) kullanılırsa

$$A_{W_1}\varphi W_1 + h\nabla_{W_1}\varphi W_1 - \varphi\left(A_{W_1}W_1 + h\nabla_{W_1}W_1\right) = 0$$

olur. Eşitliğin sağlanması için dikey ve yatay terimler ayrı ayrı sıfıra eşitlenir.

$$\begin{aligned} A_{W_1}\varphi W_1 - \varphi A_{W_1}W_1 &= 0 \\ A_{W_1}\varphi W_1 &= \varphi A_{W_1}W_1 \end{aligned}$$

dır.

ii) A alterleyen olduğundan (i) den

$$A_{\varphi W_1}W_1 = -A_{W_1}\varphi W_1 = -\varphi A_{W_1}W_1$$

olduğu kolayca görülür.

iii) (i) ve (ii) den (iii) elde edilir.

iv) M_1 Nearly-K-cosymplectic manifold olduğundan

$$\nabla_{W_1}\xi = 0$$

$$\nabla_{W_1}\xi = 0 \quad \Rightarrow A_{W_1}\xi + v\nabla_{W_1}\xi = 0$$

dır. Burada

$$A_{W_1}\xi = 0 \quad \text{ve} \quad v\nabla_{W_1}\xi = 0$$

Remove Watermark Now

dır.

Teorem 4.2.2. $F : M_1 \to M_2$ bir kontakt-kompleks Riemann submersiyon olsun. Eğer M_1 Nearly-K-cosymplectic manifold ise aşağıdaki ifadeler doğrudur (Chinea 1984). $W_2 \in \chi^v(M)$ için

i) $T_{W_2}\varphi W_2 = \varphi T_{W_2} W_2$

ii)$T_{\varphi W_2} W_2 = \varphi T_{W_2} W_2$

iii)$T_{W_2}\varphi W_2 = T_{\varphi W_2} W_2$

İspat:

i) M_1 Nearly-K-cosymplectic manifold olduğundan $W_2 \in \chi^h(M)$ için $(\nabla_{W_2}\varphi) W_2 = 0$ dır.

$$(\nabla_{W_2}\varphi) W_2 = 0$$

(3.2.5) kullanılırsa

$$\nabla_{W_2}\varphi W_2 - \varphi\nabla_{W_2} W_2 = 0$$

Lemma 3.1.2 (i) kullanılırsa

$$T_{W_2}\varphi W_2 + \hat{\nabla}_{W_2}\varphi W_2 - \varphi T_{W_2} W_2 - \varphi\hat{\nabla}_{W_2} W_2 = 0$$

yatay ve dikey terimler ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse

$$\begin{aligned} T_{W_2}\varphi W_2 - \varphi T_{W_2} W_2 &= 0 \\ T_{W_2}\varphi W_2 &= \varphi T_{W_2} W_2 \end{aligned}$$

elde edilir.

ii) T simetrik olduğu için

$$T_{\varphi W_2} W_2 = T_{W_2}\varphi W_2$$

(i) yi kullanırsak

$$T_{\varphi W_2} W_2 = \varphi T_{W_2} W_2$$

elde edilir.

Remove Watermark Now

iii) (i) ve (ii) den

$$T_{W_2}\varphi W_2 = T_{\varphi W_2}W_2$$

dır.

Teorem 4.2.3. $F : M_1 \to M_2$ bir kontakt-kompleks Riemann submersiyon olsun. Eğer M_1 nearly-K-cosymplectic manifold ise aşağıdaki ifadeler doğrudur. $W_1, W_2, W_3 \in \chi^v(M), W_3 \in \chi^h M$

için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir (Chinea 1984).

i) $2\varphi T_{W_1}W_2 = T_{W_1}\varphi W_2 + T_{\varphi W_1}W_2$

ii)$2T_{W_1}\varphi W_3 = \varphi T_{W_1}W_3 - T_{\varphi W_1}W_3$

İspat:

i) Lemma 3.1.2 (i) kullanılırsa

$$\begin{aligned} T_{W_1}\varphi W_1 &= \nabla_{W_1}\varphi W_1 - \hat{\nabla}_{W_1}\varphi W_1 \\ T_{W_1}\varphi W_1 &= (\nabla_{W_1}\varphi)W_1 + \varphi\nabla_{W_1}W_1 - \left(\hat{\nabla}_{W_1}\right)\varphi W_1 - \varphi\hat{\nabla}_{W_1}W_1 \\ T_{W_1}\varphi W_1 &= \varphi\left(\nabla_{W_1}W_1 - \hat{\nabla}_{W_1}W_1\right) \\ T_{W_1}\varphi W_1 &= \varphi T_{W_1}W_1 \end{aligned}$$

olur. Buradan W_1 yerine $W_1 + W_2$ yazılırsa;

$$\begin{aligned} T_{W_1+W_2}\varphi(W_1+W_2) &= \varphi T_{W_1+W_2}W_1 + W_2 \\ T_{W_1+W_2}\varphi W_1 + T_{W_1+W_2}\varphi W_2 &= \varphi T_{W_1+W_2}W_1 + W_2 \\ T_{W_1}\varphi W_1 + T_{W_2}\varphi W_1 + T_{W_1}\varphi W_2 + T_{W_2}\varphi W_2 &= \varphi T_{W_1}W_1 + \varphi T_{W_1}W_2 \\ &\quad + \varphi T_{W_2}W_1 + \varphi T_{W_2}W_2 \end{aligned}$$

Teorem 4.2.2 (i) kullanılırsa

$$T_{W_2}\varphi W_1 + T_{W_1}\varphi W_2 = \varphi T_{W_1}W_2 + \varphi T_{W_2}W_1$$

T simetrik olduğundan

Remove Watermark Now

$$T_{W_1}\varphi W_2 + T_{\varphi W_1} W_2 = 2\varphi T_{W_1} W_2$$

elde edilir.

ii) Lemma 3.1.1 (i) den

$$\begin{aligned} g\left(2T_{W_1}\varphi W_3, W_2\right) &= -g\left(\varphi W_3, 2T_{W_1} W_2\right) \\ &= g\left(W_3, 2\varphi T_{W_1} W_2\right) \end{aligned}$$

(i) kullanılır daha sonra Teorem 4.2.2 (i) kullanılırsa

$$\begin{aligned} g\left(2T_{W_1}\varphi W_3, W_2\right) &= g\left(W_3, T_{W_1}\varphi W_2 + T_{\varphi W_1} W_2\right) \\ g\left(2T_{W_1}\varphi W_3, W_2\right) &= g\left(W_3, T_{W_1}\varphi W_2\right) + g\left(W_3, T_{\varphi W_1} W_2\right) \\ g\left(2T_{W_1}\varphi W_3, W_2\right) &= -g\left(T_{W_1} W_3, \varphi W_2\right) - g\left(T\varphi_{W_1} W_3, W_2\right) \\ g\left(2T_{W_1}\varphi W_3, W_2\right) &= g\left(\varphi T_{W_1} W_3, W_2\right) - g\left(T\varphi_{W_1} W_3, W_2\right) \\ g\left(2T_{W_1}\varphi W_3, W_2\right) &= g\left(\varphi T_{W_1} W_3, W_2 - gT\varphi_{W_1} W_3, W_2\right) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$2T_{W_1}\varphi W_3 = \varphi T_{W_1} W_3 - T_{\varphi W_1} W_3$$

elde edilir.

Teorem 4.2.4 $F : M_1 \to M_2$ bir kontakt-kompleks Riemann submersiyon olsun. Eğer M_1 cosymplectic manifold ise $\forall U, V \in \chi^v(M_1)$,$W \in \chi^h(M_1)$ için aşağıdakieşitlikler geçerlidir(Chinea 1984).

i) $T_U \varphi V = \varphi T_U V$

ii)$A_U \varphi V = \varphi A_U V$

İspat:

i) T nin tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} T_U \varphi V &= h\nabla_{vU} v\varphi V + v\nabla_{vU} h\varphi V \\ &= h\left(\nabla_{vU}\varphi\right) vV + h\varphi\left(\nabla_{vU} vV\right) + \left(v\nabla_{vU}\varphi\right) hV + v\varphi\left(\nabla_{vU} hV\right) \end{aligned}$$

Remove Watermark Now

$$\begin{aligned} T_U\varphi V &= h\varphi\left(\nabla_{vU}vV\right)+v\varphi\left(\nabla_{vU}hV\right) \\ T_U\varphi V &= \varphi\left[h\nabla_{vU}vV+v\nabla_{vU}hV\right] \\ T_U\varphi V &= \varphi T_U V \end{aligned}$$

olur.

ii) A nın tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} A_U\varphi V &= v\nabla_{hU}h\varphi V+h\nabla_{hU}v\varphi V \\ &= v\left(\nabla_{hU}\varphi\right)hV+v\varphi\left(\nabla_{hU}hV\right)+\left(h\nabla_{hU}\varphi\right)vV+h\varphi\left(\nabla_{hU}vV\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_U\varphi V &= \varphi\left[v\nabla_{hU}hV+h\nabla_{hU}vV\right] \\ A_U\varphi V &= \varphi A_U V \end{aligned}$$

olur.

pdfelement

4.3 Yapıların Transferi

Teorem.4.3.1. $\pi : M_1 \to M_2$ bir kontakt-kompleks Riemann submersiyon olsun. Eğer

$$M_1 = \left\{\begin{array}{l} a)Normal \\ b)Sasakian \\ c)Nearly-K-Sasakian \\ d)Cosymplectic \\ e)Almost\ Cosymplectic \\ f)Nearly-K-Cosymplectic \\ g)Kenmatsu \end{array}\right. \quad \text{ise} \quad M_2 = \left\{\begin{array}{l} a)Hermityen \\ b)Kähler \\ c)Nearly\ Kähler \\ d)Kähler \\ e)Almost\ Kähler \\ f)Nearly\ Kähler \\ g)Kähler \end{array}\right.$$

transferi vardır (Falcitelli ve ark. 2004).

İspat:

Remove Watermark Now

a) M_1 üzerinde X ve Y yatay vektör alanlarını temel vektör alanları varsayalım. Bu durumda $F_*X = X'$ ve $F_*Y = Y'$ dır. M nin hemen hemen kontakt yapısı normal olduğundan;

$$N(X,Y) = [\varphi,\varphi](X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi$$

dır. F bir Riemann submersiyon olduğundan

$$F_*N(X,Y) = F_*\left([\varphi,\varphi](X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi\right)$$

dır. Nijenhuis tensörünün tanımı kullanılırsa

$$F_*N(X,Y) = F_*\left(\varphi^2[X,Y] + [\varphi X,\varphi Y] - \varphi[\varphi X,Y] - \varphi[X,\varphi Y] + 2d\eta(X,Y)\xi\right)$$

reeb vektör alanı tanımı gereğince

$$F_*2d\eta(X,Y)\xi = 0$$

dır. N, φ nin Nijenhuis tensör alanı olduğundan ve kontak manifoldun tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} F_*[\varphi,\varphi](X,Y) &= F_*(-[X,Y] + \eta[X,Y])\xi + [\varphi X,\varphi Y] - \varphi[\varphi X,Y] - \varphi[X,\varphi Y] \\ &= -[F_*X,F_*Y] + g_1([X,Y]\xi)F_*\xi + [F_*\varphi X,F_*\varphi Y] \\ &\quad -F_*\varphi[\varphi X,Y] - F_*\varphi[X,\varphi Y] \end{aligned}$$

Önerme 3.1.1 (ii) kullanılarak

$$\begin{aligned} &= -\left[X',Y'\right] + g_2(F_*[X,Y],F_*\xi) + [JF_*X,JF_*Y] \\ &\quad -J[F_*\varphi X,F_*Y] - J[F_*X,F_*\varphi Y] \\ &= \left[X',Y'\right] + \left[JX',JY'\right] - J\left[JX',Y'\right] - J\left[X',JY'\right] \end{aligned}$$

$$[J,J](X',Y') = N\left(X',Y'\right)$$

elde edilir. Yani M_1 nin kontakt yapısı normal ise M_2 uzayı bir Hermityen mani-

Remove Watermark Now

folddur.

b) M_1 üzerinde X ve Y yatay vektör alanlarını temel vektör alanları varsayalım. Bu durumda $F_*X = X'$ ve $F_*Y = Y'$ dır. M_1 nin hemen hemen kontakt yapısı Sasakian manifold olduğundan;

$$(\nabla_X \varphi Y) = g(X,Y)\,\xi - \eta(Y)\,X$$

(3.2.5) kullanılırsa

$$F_*\left[\nabla_X \varphi Y - \varphi \nabla_X Y\right] = 0 \Rightarrow F_* \nabla_X \varphi Y - F_* \varphi \nabla_X Y = 0$$

dır. Önerme 3.1.1 (ii) ve kontakt kompleks Riemann submersiyonu tanımı kullanılırsa

$$\nabla'_{F_*X} F_* \varphi Y - J F_* \nabla_X Y = 0 \Rightarrow \nabla'_{X'} JY' - J\nabla_{X'} Y' = 0 \Rightarrow \left(\nabla'_{X'} J\right) Y' = 0$$

$\forall X', Y' \in \chi^h(M_2)$ için doğru olduğundan

$$\nabla' J = 0$$

dır.

c)ispat b deki gibidir.

d)ispat d deki gibidir.

e)ispat d deki gibidir.

g) M_1, $Nearly - K - Cosymplectic$ olup $X \in \chi(M_1)$ için;

$$(\nabla_{X\varphi})\,X = 0$$

dır. Önerme 3.1.1 (ii) den

$$\left(\nabla'_{X'} J\right) X' = 0$$

olur. Buradan M_1 nin kontakt yapısı Nearly-K-cosymplectic ise M_2 uzayı $Nearly\ Kähler$ dir.

h) $M_1, Kenmatsu$ manifold olup X ve Y yatay vektör alanları için;

$$(\nabla_{X\varphi})\,Y = g(\varphi X, Y)\,\xi - \eta(Y)\,\varphi X$$

pdfelement

Remove Watermark Now

dır. $F_*X = X'$ ve $F_*Y = Y'$ olsun ve F bir Riemann submersiyon olduğundan

$$F_* (\nabla_{X\varphi}) Y = g(\varphi X, Y) F_*\xi - g(Y, \xi) F_*\varphi X$$

(3.2.5) kullanılırsa

$$\begin{aligned} F_* (\nabla_{X\varphi}) Y &= 0 \Rightarrow F_* [\nabla_X \varphi Y - \varphi \nabla_X Y] = 0 \\ &\Rightarrow F_* \nabla_X \varphi Y - F_* \varphi \nabla_X Y = 0 \end{aligned}$$

Önerme 3.1.1 (ii) ve Kontak-kompleks Riemann submersiyon tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} \nabla_{F_*X} F_*\varphi Y - J F_* \nabla_X Y &= 0 \\ \nabla'_{X'} JY' - J\nabla'_{X'} Y' &= 0 \Rightarrow \left(\nabla'_{X'} J\right) Y' = 0 \end{aligned}$$

$\forall X', Y' \in \chi^h(M_1)$ için doğru olduğundan $\nabla' J = 0$ dır.O halde M_1 Kenmatsu manifold ise M_2 Kähler manifolddur.

Önerme 4.3.1. $F : M_1 \to M_2$ bir kontakt-kompleks Riemann submersiyon olsun. Eğer M_1 cosymplectic manifold ise yatay distribüsyonu integrallenebilirdir (Chinea 1984).

İspat: M_1 cosymplectic manifold olduğundan $d\Phi = 0$ dır. X_1 ve X_2 yatay vektör alanları U dikey vektör alanı olsun. Doğrudan hesaplamalarla

$$\begin{aligned} d\Phi(X_1, X_2, U) &= 0 \Rightarrow X_1 \Phi(X_2, U) - X_2 \Phi(X_1, U) + U\Phi(X_1, X_2) \\ &\quad -\Phi([X_1, X_2], U) + \Phi([X_1, U], X_2) - \Phi([X_2, U], X_1) \end{aligned}$$

Temel-2 formun tanımından

$$\begin{aligned} d\Phi(X_1, X_2, U) &= 0 \Rightarrow X_1 (g(X_2, \varphi U)) - X_2 (g(X_1, \varphi U)) + U (g(X_1, \varphi X_2)) \\ &\quad - g([X_1, X_2], \varphi U) + g([X_1, U], UX_2) - g([X_2, U], \varphi X_1) \end{aligned}$$

Dikey ve yatay distribüsyonlar invaryant olduğundan önerme 3.3.1 (iv) kullanılırsa

Remove Watermark Now

$$d\Phi\left(X_1, X_2, U\right) = U\left(g\left(X_1, \varphi X_2\right)\right) - g\left(\left[X_1, X_2\right], \varphi U\right) = 0$$

elde edilir. Eğer X_1 temel ise Lemma 3.1.2 (iii) denklemi kullanılırsa

$$U\left(g\left(X_1, \varphi X_2\right)\right) = g\left(h\nabla_U X_1, \varphi X_2\right) + g\left(h\nabla_U \varphi X_2, X_1\right)$$

$$= g\left(A_{X_1} U, \varphi X_2\right) + g\left(A_{\varphi X_2} U, X_1\right)$$

dır. A anti-simetrik operatör olduğundan Lemma 3.1.1 denklemi kullanılırsa

$$U\left(g\left(X_1, \varphi X_2\right)\right) = -g\left(A_{X_1} \varphi X_2, U\right) - g\left(A_{\varphi X_2} X_1, U\right) = 0$$

dır. A alterleyen operatör olduğundan Teorem 3.1.11 (iv) denklemi kullanılırsa

$$U\left(g\left(X_1, \varphi X_2\right)\right) = g\left(A_{\varphi X_2} X_1, U\right) - g\left(A_{\varphi X_2} X_1, U\right) = 0$$

dır. Buradan

$$g\left(\left[X_1, X_2\right], \varphi U\right) = 0 \Rightarrow g\left(\nabla_{X_1} X_2 - \nabla_{X_2} X_1, \varphi U\right) = 0$$

dır. $\varphi U \neq 0$ olduğundan

$$\nabla_{X_1} X_2 - \nabla_{X_2} X_1 = 0$$

dır.Lemma 3.1.2 (v) kullanılırsa

$$A_{X_1} X_2 + h\nabla_{X_1} X_2 - A_{X_2} X_1 - h\nabla_{X_2} X_1 = 0$$

dır. Dikey ve yatay bileşenler ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse

$$\begin{aligned} A_{X_1} X_2 - A_{X_2} X_1 &= 0 \\ &\Rightarrow A_{X_1} X_2 + A_{X_1} X_2 = 0 \\ &\Rightarrow 2A_{X_1} X_2 = 0 \\ &\Rightarrow A_{X_1} X_2 = 0 \\ &\Rightarrow A = 0 \end{aligned}$$

dır. O halde yatay distribüsyon integrallenebilirdir.

Remove Watermark Now

4.4. Hemen hemen kontakt-kompleks Riemann submersiyonlar için eğrilik ilişkileri

Tanım.4.4.1. (M_1, g) n-boyutlu Riemann manifold ve M_1 manifoldunun bir P noktasındaki tanjant uzayı $T_P M_1$ olsun. $T_P M_1$ uzayının 2- boyutlu bir altuzayı P olsun. P düzlemini geren birim vektörler W_1 ve W_2 olmak üzere

$$K(P) = K(W_1, W_2) = \frac{g(R(W_1, W_2)W_2, W_1)}{g(W_1, W_1)g(W_2, W_2) - g(W_1, W_2)^2}$$

değerine M_1 manifoldunun P düzlemine göre **kesit eğriliği** denir (Falcitelli ve ark. 2004).

Tanım.4.4.2. $(M_1, \varphi, \eta, \xi, g_1)$ hemen hemen kontakt metrik manifold,(M_2, J, g_2) hemen hemen Hermityen manifold ve

$$F : M_1 \to M_2$$

bir kontakt-kompleks Riemann submersiyon olsun.

$\varphi - holomorfik\ bi - kesit\ eğriliğini$ B_1 ile ifade edelim. M_1 üzerinde ξ ye ortogonal sıfırdan farklı X_1 ve X_2 vektörleri için $\varphi - holomorfik\ bi - kesit\ eğriliği$;

$$B_1(X_1, X_2) = \frac{R_1(X_1, \varphi X_1, X_2, \varphi X_2)}{\|X_1\|^2 \|X_2\|^2}$$

ile tanımlanır.

M_1 üzerinde ξ ye ortogonal X_1 vektör alanı için $\varphi - holomorfik\ kesit\ eğriliği$;

$$H_1(X) = B_1(X_1, X_2)$$

ile tanımlanır (Falcitelli ve ark. 2004).

M_2 nin $J-$holomorfik kesit eğriliği sırasıyla B_2 ve H_2, $\hat{\varphi}-$holomorfik bi-kesit eğriliğini ise $\hat{B}$ ve $\hat{H}$ ile ifade edeceğiz.

Önerme.4.4.1. $\pi : M_1 \to M_2$ bir kontakt-kompleks Riemann submersiyon olsun. Ayrıca V_1 ve V_2 birim dikey vektör alanları, W_1 ve W_2 birim yatay vektör alanları için;

a) $B(V_1, V_2) = \hat{B}(V_1, V_2) + g(T_{V_1}\varphi V_2, T_{V_2}\varphi V_1) - g(T_{V_1}V_2, T_{\varphi V_1}\varphi V_2)$

b) $B(W_1, V_2) = g((\nabla_{V_2} A)(W_1, \varphi W_1), \varphi V_2) - g(A_{W_1}\varphi V_2, A_{\varphi W_1} V_2)$
$+ g(A_{W_1} V_2, A_{\varphi W_1}\varphi V_2) - g((\nabla_{\varphi V_2} A)(W_1, \varphi W_1), V_2)$

Remove Watermark Now

$$+g\left(T_{\varphi V_2}W_1, T_{V_2}\varphi W_1\right) - g\left(T_{V_2}W_1, T_{\varphi V_2}\varphi W_1\right)$$

c) $B\left(W_1, W_2\right) = B^{'}\left(\pi_* W_1, \pi_* W_2\right) - \left\{ \begin{array}{c} 2g\left(A_{W_1}\varphi W_1, A_{W_2}\varphi W_2\right) \\ -g\left(A_{\varphi W_1}W_2, A_{W_1}\varphi W_2\right) + g\left(A_{W_1}W_2, A_{\varphi W_1}\varphi W_2\right) \end{array} \right\}$

dır (Falcitelli ve ark. 2004).

İspat: Bu önermeler (3.1.5), (3.1.6), (3.1.7) denklemleri kullanılarak elde edilir.

Önerme.4.4.2. $\pi : M_1 \to M_2$ bir kontakt-kompleks Riemann submersiyon olsun. Ayrıca V_1 birim dikey vektör alanı, W_1 birim yatay vektör alanı için;

a) $H\left(V_1\right) = \hat{H}\left(V_1\right) + \left\|T_{V_1}\varphi V_1\right\|^2 - g\left(T_{V_1}V_1, T_{\varphi V_1}\varphi V_1\right)$

b)$H\left(W_1\right) = H^{'}\left(\pi_* W_1\right) - 3\left\|A_{W_1}\varphi W_1\right\|^2$ dır (Falcitelli ve ark. 2004).

İspat:

a) Önerme 4.4.1 (a) kullanılırsa

$$B\left(V_1, V_2\right) = \hat{B}\left(V_1, V_2\right) + g\left(T_{V_1}\varphi V_2, T_{V_2}\varphi V_1\right) - g\left(T_{V_1}V_2, T_{\varphi V_1}\varphi V_2\right)$$

ve V_2 yerine V_1 yazalım

$$\begin{aligned} B\left(V_1, V_1\right) &= \hat{B}\left(V_1, V_1\right) + g\left(T_{V_1}\varphi V_1, T_{V_1}\varphi V_1\right) - g\left(T_{V_1}V_1, T_{\varphi V_1}\varphi V_1\right) \\ B\left(V_1, V_1\right) &= \hat{B}\left(V_1, V_1\right) + \left\|T_{V_1}\varphi V_1\right\|^2 - g\left(T_{V_1}V_1, T_{\varphi V_1}\varphi V_1\right) \end{aligned}$$

den

$$B\left(V_1, V_1\right) = H\left(V_1\right)$$

ise

$$H\left(V_1\right) = \hat{H}\left(V_1\right) + \left\|T_{V_1}\varphi V_1\right\|^2 - g\left(T_{V_1}V_1, T_{\varphi V_1}\varphi V_1\right)$$

dır.

b) Önerme 4.4.1 (c) kullanılırsa

$$B\left(W_1, W_2\right) = B^{'}\left(\pi_* W_1, \pi_* W_2\right) - \left\{ \begin{array}{c} 2g\left(A_{W_1}\varphi W_1, A_{W_2}\varphi W_2\right) \\ -g\left(A_{\varphi W_1}W_2, A_{W_1}\varphi W_2\right) + g\left(A_{W_1}W_2, A_{\varphi W_1}\varphi W_2\right) \end{array} \right\}$$

W_2 yerine W_1 yazalım

Remove Watermark Now

$$B(W_1,W_1) = B^{'}(\pi_* W_1, \pi_* W_1) - \left\{ \begin{array}{c} 2g(A_{W_1}\varphi W_1, A_{W_1}\varphi W_1) \\ -g(A_{\varphi W_1} W_1, A_{W_1}\varphi W_1) + g(A_{W_1} W_1, A_{\varphi W_1}\varphi W_1) \end{array} \right\}$$

A alterleyen olduğundan;

$$B(W_1,W_1) = B^{'}(\pi_* W_1, \pi_* W_1) - \left\{ \begin{array}{c} 2g(A_{W_1}\varphi W_1, A_{W_1}\varphi W_1) \\ -g(A_{W_1}\varphi W_1, A_{W_1}\varphi W_1) + g(A_{W_1} W_1, A_{\varphi W_1}\varphi W_1) \end{array} \right\}$$

Önerme 4.3.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned} B(W_1,W_1) &= B^{'}(\pi_* W_1, \pi_* W_1) - 3g(A_{W_1}\varphi W_1, A_{W_1}\varphi W_1) \\ B(W_1,W_1) &= B^{'}(\pi_* W_1, \pi_* W_1) - 3\|A_{W_1}\varphi W_1\|^2 \end{aligned}$$

den

$$B(W_1,W_1) = H(W_1)$$

ise

$$H(W_1) = H^{'}(\pi_* W_1) - 3\|A_{W_1}\varphi W_1\|^2$$

dır.

Teorem.4.4.1. $\pi : M_1 \to M_2$ ye total uzayı sasakian manifold olan bir kontakt-kompleks Riemann submersiyon olsun. Bu durumda ξ ye ortogonal sıfırdan farklı V_1 ve V_2 birim dikey vektör alanları için;

a)$B(V_1,V_2) = \hat{B}(V_1,V_2) + 2\|T_{V_1}V_2\|^2$

b)$H(V_1) = \hat{H}(V_1) + 2\|T_{V_1}V_1\|^2$ dır (Falcitelli ve ark. 2004).

İspat.

a) Önerme 4.4.1 (a) dan

$$B(V_1,V_2) = \hat{B}(V_1,V_2) + g(T_{V_1}\varphi V_2, T_{V_2}\varphi V_1) - g(T_{V_1}V_2, T_{\varphi V_1}\varphi V_2)$$

$T_{V_2}\varphi V_1 = T_{\varphi V_1}V_2 = \varphi T_{V_1}V_2$ eşitliğini yazalım. Ayrıca (3.3.2) ve (3.3.3) kullanılarak

Remove Watermark Now

$$B(V_1,V_2)=\hat{B}(V_1,V_2)+g_1(\varphi T_{V_1}V_2,\varphi T_{V_1}V_2)+g_1(T_{V_1}V_2,T_{V_1}V_2)$$

elde edilir.

$$g_1(\varphi T_{V_1}V_2,\varphi T_{V_1}V_2)=g_1(T_{V_1}V_2,T_{V_1}V_2)-\eta(T_{V_1}V_2)\eta(T_{V_1}V_2)$$

$\eta(T_{V_1}V_2)\eta(T_{V_1}V_2)=0$ olduğundan

$$g_1(\varphi T_{V_1}V_2,\varphi T_{V_1}V_2)=g_1(T_{V_1}V_2,T_{V_1}V_2)$$

olur. Bu eşitlik kullanılırsa

$$\begin{aligned}B(V_1,V_2) &= \hat{B}(V_1,V_2)+g_1(T_{V_1}V_2,T_{V_1}V_2)+g_1(T_{V_1}V_2,T_{V_1}V_2)\\ B(V_1,V_2) &= \hat{B}(V_1,V_2)+2g_1(T_{V_1}V_2,T_{V_1}V_2)\\ B(V_1,V_2) &= \hat{B}(V_1,V_2)+2\|T_{V_1}V_2\|^2\end{aligned}$$

dır.

Sonuç.4.4.1 $F:M_1\to M_2$ bir kontakt-kompleks Riemann submersiyon olsun. Eğer M_1 bir sasakian manifold ise $V_1,V_2\in\chi^v(M_1)$ için;

$$B(V_1,V_2)\geq\hat{B}(V_1,V_2)$$

dır (Falcitelli ve ark. 2004).

b)Teorem 4.4.1 (a) kullanılırsa

$$B(V_1,V_2)=\hat{B}(V_1,V_2)+2\|T_{V_1}V_2\|^2$$

ve V_2 yerine V_1 yazalım.

$$B(V_1,V_1)=\hat{B}(V_1,V_1)+2\|T_{V_1}V_1\|^2$$

den

$$B(V_1,V_1)=H(V_1)$$

ise

$$H(V_1)=\hat{H}(V_1)+2\|T_{V_1}V_1\|^2$$

Remove Watermark Now

dır.

pdfelement

Remove Watermark Now

5.TARTIŞMA VE SONUÇ

Riemann submersiyonlarında hemen hemen kontakt metrik manifolddan hemen hemen Hermityen manifolda bir holomorfik dönüşüm tanımlandı. Bu dönüşüm kullanılarak hemen hemen kontakt -kompleks submersiyon tanımlanmıştır. Bu submersiyonlarda belli manifoldlar üzerine O'Neill tensörleri çalışılmış ve yapılar arasında transferler incelenmiştir. Son olarak hemen hemen kontakt-kompleks Riemann submersiyonlar için eğrilik ilişkileri incelenmiştir.

pdfelement

Remove Watermark Now

pdfelement

Remove Watermark Now

6. KAYNAKLAR

Baird, P. and Wood, J. C. 2003. *Harmonic Morphisms Between Riemannian Manifolds*,Clarendon Press, Oxford.

Bejancu, A. 1986. Geometry of CR-submanifolds. D.Reidel publishing company, Dordrecht Holland.

Chinea, D. 1984. Quasi-K-Cosymplectic Submersions. *Rendiconti Del Circolo Matematico Di Palermo Serie II.* pp.319-330.

Do CARMO, M.P. 1992. Riemannian Geometry Birkhauser Boston

Falcitelli, M., Ianus S., Pastore, A. M. 2004. Riemannian Submersions and Related Topics. World Scientific.

Gundmundsson, S. 2006. An Introduction Riemannian Geometry. Lectures Notes, University of Land, Mathematics, Faculty of Science.

Hacısalihoğlu, H.H. 1982. Diferansiyel Geometri. İnönü Üniversitesi, Fen-Ed. Fak. Mat. No:2.

Hacısalihoğlu, H.H. 2003. Diferansiyel Geometri.Cilt: 1,2,3. Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi

Kenmotsu, K., 1972. A Class of Contact Riemannian Manifold. Tohoku Mathematican Journal, 24:93-103.

Kon, M. , Yano, K. 1984. Structures on Manifolds.World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Olszak Z. 1981. Almost Cosymplectic Manifolds With Kaehlerian Leaves.Journal Tensor, 46:117-124

O'Neill, B. 1966. The Fundamental Equations of a Submersions. *Michigan Math. J.* 13, 458-469.

O'Neill, B. 1983. Semi-Riemannian geometry with applications to relativity. Academic Press.

pdfelement

Remove Watermark Now

Şahin, B.1996. CR- Alt Manifoldların Geometrisi Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi.

Watson,B. 1976. Almost Hermitian Submersions. J.Diff.Geom. 11(1), 147-165.

Zamkovoy, S. 2009. Canonical connections on paracontact manifolds, Ann. Glob. Anal. Geom. 36,37-60

pdfelement

Remove Watermark Now

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Diyarbakır ilinin Bismil ilçesinde doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Bismil'de tamamladım. 2010 yılında Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Anabilim Dalında lisans öğrenimime başladım. 2017 yılında Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansa başladım.2014 yılından beri Milli Eğitim Bakanlığına bağlı kadrolu öğretmen olarak çalışmaktayım.

pdfelement

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ İNTİHAL FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ	
ADI VE SOYADI	Esra BAŞARIR NOYAN
ÖĞRENCİ NO	17 804 004
EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI	2018-2019
YARIYIL	☐ Güz ☒ Bahar
ANABİLİM DALI	MATEMATİK
PROGRAM	Yüksek Lisans
TEZ KONUSU	Kontakt- Kompleks Riemann Submersiyonlar
İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ	
RAPOR TÜRÜ	Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	51
BENZERLİK ORANI	%20
RAPORLAMA TARİHİ	08/07/ 2019

Yukarıda başlığı gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan Toplam 51 sayfalık kısmına ilişkin, 08/07/2019 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 20'dir.

Uygulanan filtrelemeler:

☐ Kabul/Onay sayfaları hariç,
☒ Kaynakça hariç
☒ Alıntılar hariç
☐ Diğer

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Esra BAŞARIR NOYAN
(08.07.2019)

Doç. Dr. Yılmaz GÜNDÜZALP **Tez Danışmanı** (08.07.2019)	Dr. Öğr. Üyesi Arife ATAY **Anabilim Dalı Başkanı V.** (08.07.2019)

Formdaki bilgiler bilgisayar ortamında doldurulmalıdır. El yazısı ile doldurulan formlar geçersiz sayılmaktadır.

KGK-FRM-340/00