T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK MERTEBEDEN DALGA DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN AZALMASI

Ezgi HARMAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR
Haziran - 2019

T.C

DİCLE UNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Ezgi HARMAN tarafından yapılan "Yüksek Mertebeden Dalga Denklem Sistemlerinin Çözümlerinin Azalması" konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyesinin

	Ünvanı	Adı Soyadı
Başkan:	Doç.Dr.	Ali AKGÜL
Üye :	Doç.Dr.	Halis YILMAZ
Üye :	Doç.Dr.	Erhan PİŞKİN

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 27/06/2019

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../20

Prof. Dr. Sevtap SÜMER EKER

ENSTİTÜ MÜDÜR V.

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın planlanması ve yürütülmesinde çalışmalarım süresince benden destek ve ilgisini esirgemeyen, bilgi ve sonsuz hoşgörülerinden yararlandığım sayın çok değerli hocam Doç. Dr. Erhan Pişkin'e, yaşamım boyunca benden desteğini esirgemeyen aileme ve sabrı için eşimeçok teşekkür ederim.

Ayrıca Yüksek Lisansım veçalışma hayatında bana destek olan yöneticim Barış Hatipoğlu ve Müdürüm Mehmet Akif Köse' ye teşekkürlerimi borç bilirim.

Son olarak, bu yüksek lisans çalışmasına destek sunan Dicle Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'ne (ZGEF.18.009) teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEŞEKKÜR..... **I**

İÇİNDEKİLER..... **II**

ÖZET..... **III**

ABSTRACT..... **IV**

KISALTMA VE SİMGELER..... **V**

1. GİRİŞ..... **1**

1.1. Enerji Azalması..... 2

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR..... **5**

3. MATERYAL VE METOT..... **7**

3.1. Temel Kavramlar..... 7

3.2. Diferansiyel Denklemlerin Elde Edilişleri..... 9

3.3. Diferansiyel Denklemlerin Çözümü..... 10

3.4. İyi Konulmuş Problemler..... 11

3.5. Normlu Uzay, İç Çarpım Uzayı ve Hilbert Uzayı..... 13

3.6. Lebesgue Uzayı..... 15

3.7. Sobolev Uzayı..... 16

3.8. Bazı Önemli Eşitlik ve Eşitsizlikler..... 18

3.9. Nakao Eşitsizliği..... 22

4. BULGULAR VE TARTIŞMA..... **25**

4.1. Yüksek Mertebeden Doğrusal Olmayan Viskoelastik Dalga Denklemi..... 25

4.1.1. Lokal Varlık..... 29

4.1.2. Global Zayıf Çözümler..... 36

4.2. Kirchhoff Tipli Dalga Denklem Sistemi..... 45

4.2.1. Giriş..... 45

4.2.2. Global Varlık ve Enerji Azalması..... 47

5. SONUÇ VE ÖNERİLER..... **61**

6. KAYNAKLAR..... **63**

ÖZGEÇMİŞ..... 67

ÖZET

YÜKSEK MERTEBEDEN DALGA DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN AZALMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ezgi HARMAN

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2019

Bu tezin ilk bölümünde fen ve mühendislik gibi uygulamalı bilimlerde ortaya çıkan diferansiyel denklemlere kısaca değinilmiş ve enerji azalması ile ilgili temel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde yüksek mertebeden doğrusal olmayan dalga denklemleri ile ilgili yapılan çalışmalar özetlenmiştir.

Üçüncü bölümde diferansiyel denklem sistemleri, fonksiyonel analiz ve Sobolev uzayları ile ilgili temel kavramlar ve bazı eşitsizlikler verilmiştir. Daha sonra enerji azalması ile ilgili kullandığımız lemma verilmiştir.

Dördüncü bölümün birinci kısmında yüksek mertebeden doğrusal olmayan viskoelastik dalga denkleminin çözümlerini varlığı ele alınmıştır. İkinci kısım ise tezin esas kısmı olup, yüksek mertebeden Kirchhoff tipli dalga denklem sisteminin çözümlerinin global varlığı ve enerji azalması ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Dalga Denklem Sistemi, Global Varlık, Enerji Azalması, Nakao Eşitsizliği.

ABSTRACT

DECAY OF SOLUTIONS FOR A SYSTEM OF HIGHER-ORDER WAVE EQUATIONS

MASTER THESIS

Ezgi HARMAN

UNIVERSITY OF DICLE
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2019

In the first chapter of this thesis, differential equations emerging in applied sciences, such as engineering and science, are briefly dealt with, and the basic information regarding decay of solutions is given.

In the second chapter, the studies on high order nonlinear wave equations are summarized.

In the third chapter, the basic concepts of differential equations, functional analysis and Sobolev spaces and some inequalities are given. After that, we used the lemma of energy reduction.

In the first part of the fourth chapter, the existence of solutions of high order nonlinear viscoelastic wave equation is discussed. The second part of the thesis is the global existence and energy decay of the solutions of the higher order Kirchhoff type wave equation system has been proven.

Keywords: System of Wave Equation, Global Existence, Energy Decay, Nakao Inequality.

KISALTMA VE SİMGELER

R^n : n-boyutlu Euclid Uzayı

Ω : R^n de sınırlı bir bölge

$\partial\,\Omega$: Ω bölgesinin sınırı

$C(\Omega)$: Sürekli Fonksiyonlar Uzayı

$L^p(\Omega)$: p. mertebeden Lebesgue İntegrallenebilir Fonksiyonlar Uzayı

$W^{m,p}(\Omega)$: Sobolev Uzayı

∇ : Nabla operatörü (Gradiyent)

Δ : Laplace operatörü

$\|u\|$: u nun L^2 normu

$\|u\|_{p=}\|u\|_{L^p(\Omega)}=(\int_\Omega |u(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$

$\|u\| =\|u\|_{L^2(\Omega)} = (\int_\Omega |u(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$

$\Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \cdots + u_{x_nx_n}$

$\Delta^2 u = u_{x_1x_1x_1x_1} + u_{x_2x_2x_2x_2} + \cdots + u_{x_nx_nx_nx_n}$

$\nabla^2 u = \Delta u$

$u_{t=} \dfrac{\partial u}{\partial t}$

$u_{tt} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

$A=(-\Delta)^m$

1. GİRİŞ

Kısmi diferansiyel denklemler bilinmeyen bir fonksiyon ve onun kısmi türevleri arasındaki ilişki olarak tanımlanır. Bu denklemler fizik ve mühendisliğin hemen hemen tüm alanlarında ortaya çıkar. Ayrıca biyoloji, kimya, bilgisayar ve ekonomi gibi birçok alanda kısmi diferansiyel denklemler kullanılmaktadır. Aslında bağımsız değişkenler arasındaki etkileşimin olduğu her alanda kısmi diferansiyel denklemler ortaya çıkmaktadır.

Genel olarak, bilinmeyen fonksiyonların belirli bir noktadaki değeri, yalnızca bu noktanın komşuluğundaki noktaların değerlerine bağlı oluyorsa kısmi diferansiyel denklemleri elde ederiz. Bir $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fonksiyonu için kısmi diferansiyel denklemin genel formu,

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n}, \ldots) = 0,$$

şeklindedir. Burada $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bağımsız değişkenler, u bilinmeyen fonksiyon ve u_{x_i}, $\frac{\partial u}{\partial_{x_i}}$ nın kısmi türevini göstermektedir. Genel olarak denklem, başlangıç ve sınır koşulları gibi ek koşullarla birlikte verilir.

Kısmi diferansiyel denklemlerin fiziğin farklı dallarındaki muazzam önemi nedeniyle, yeni bir kısmi diferansiyel denklem sınıfının çözümünü mümkün kılan her matematiksel gelişmeye, fizikteki önemli gelişmeler katkı sağlamıştır. Bu nedenle, Hamilton tarafından bulunan karakteristikler metodu, optik ve analitik mekanikte büyük gelişmelere yol açmıştır. Fourier yöntemi, ısı transferi ve dalga yayılımının çözümüne olanak sağladı ve Green metodu, elektromanyetizma teorisinin geliştirilmesinde etkili oldu. Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin analizi pek çok özelliği barındırmaktadır. 19. yüzyılda egemen olan klasik yaklaşım açık çözümleri bulmak için çeşitli metodları geliştirmekti.

Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin pek çok özelliği vardır. Teknik ilerlemeleri, çözümün yapısını anlamayı amaçlayan teorik gelişmeler takip eder. Amaç, işlem yapmadan hatta açık çözüm bulmadan çözümün bazı özelliklerini bulmaktır. Kısmi diferansiyel denklemlerin teorik incelenmesi sadece akademik amaçla değildir aynı zamanda bir çok uygulaması vardır. İleri teknolojik araçlarla bile çözülemeyen karmaşık denklemler vardır. Bu durumda yapabileceğimiz tek şey, çözüm hakkında

nitel (qualitative) bilgi edinmeye çalışmaktır. Genel olarak denklem mühendislik ve fiziksel problemin modellenmesiyle oluşur. Kısmi difernasiyel denklemleri çözmek için bir kaç yol vardır. Her yol belirli bir denklem türüne uygulanabilir. Bu yüzden denklemi çözerken ve çözmeden önce denklemin tam olarak analiz edilmesi önemlidir. Temel teorik soru denklemi ve ilgili yan koşullarını oluşturan problemin iyi konulmuş olup olmadığıdır.

Fransız matematikçi Jacques Hadamarda (1865-1963) göre bir problem aşağıdaki koşulları sağlarsa iyi konulmuştur.

I) Varlık: problem bir çözüme sahip olmalı,

II) Teklik: problemin çözümü tek olmalı,

III) Kararlılık: başlangıç ve/veya sınır koşullarındaki küçük bir değişiklik çözümde küçük bir değişikliğe sebep olmalıdır.

Eğer yukarıdaki koşulların bir ya da daha fazlası yoksa problemin kötü konumlu olduğunu söyleyebiliriz. Matematiksel problemlerin çoğunun iyi konumlu olduğu açıkça söylenebilir. Günümüz ileri teknoloji sistemlerindeki gelişmeler matematiksel modellemelerden ayrı düşünülemez. Yani matematik bilimi başta mühendislik olmak üzere birçok alanda karşılaşılan problemlere yönelik matematiksel yöntemler sunarak sorunların daha anlaşılır olup gerçek dünyaya uygulanabilir olmasına olanak sağlar.

Esasen matematik bilimi için doğada karşılaşılan her olay matematiksel olarak bir problem olabilmektedir. Ve problemlere yönelik matematiksel modellemeler oluşturmak yadsınamaz derecede bilimin gelişmesine katkı sağlayacaktır.

Bu modellemeler öncelikli olarak karşılaşılan problemi matematiksel ifadelerle formülüze eder. Sonrasında ise bu probleme yönelik yaklaşık bir çözüm bulur. Veya çözümün davranışıyla ilgili bir fikre sahip olmamızı sağlar. Denklemleri başlangıç ve sınır koşullarıyla sınırlandırarak iyi tanımlı bir çözüm bulmak için öncelikli olarak çözümün varlığını, çözüm varsa eğer çözümün tekliğini ve başlangıç verilerine bağımlılığını araştırılmış olur.

Yapılan çalışmalar gösteriyor ki lineer olmayan diferansiyel denklemler lineer olan denklemlere oranla gerçek dünyayla daha çok bağlantılı olduğu için elde edilen matematiksel modellemelerin çoğu lineer olmayan diferansiyel denklemlerle olur (Pinchover ve Rubinstenin 2005).

1.1. Enerji Azalması

Tanım 1.1. $E(t)$ enerji fonksiyonu ve $\forall t > 0$, $\alpha, \beta, k > 0$ olmak üzere

i. $E(t) \leq ke^{-\alpha t}$ *üstel enerji azalması,*

ii. $E(t) \leq kt^{-\beta}$ *polinomal enerji azalması* söz konusudur.

Örneğin:

$$\begin{cases} u'(t) = -u^p(t), \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

başangıç değer probleminde

$p = 1$ için

$$u(t) = e^{-t}$$

üstel azalma söz konusudur.

$p = 2$ için

$$u(t) = (1 + t)^{-1}$$

polinomal azalma söz konusudur.

.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu tezin esas amacı, yüksek mertebeden doğrusal olmayan

$$\begin{cases} u_{tt} - M\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)Au + \int_0^t g(t-s)Au(s)ds + |u_t|^{p-1}u_t = f_1(u,v), \\ v_{tt} - M\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)Av + \int_0^t h(t-s)Av(s)ds + |v_t|^{q-1}v_t = f_2(u,v) \end{cases} \tag{2.1}$$

dalga denklem sisteminin çözümlerinin global varlığı ve enerji azalmasını ispatlamaktır. Burada $A = (-\Delta)^m$ ve $M(s) = m_0 + \alpha s^\gamma$ dır.

(2.1) denklemi, $M\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)$ terimi yerine $M\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2\right)$ terimi ve viskoelstik terimin yokluğunda

$$\begin{cases} u_{tt} + M\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2\right)Au + |u_t|^{p-1}u_t = f_1(u,v), \\ v_{tt} + M\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)Av + |v_t|^{q-1}v_t = f_2(u,v) \end{cases} \tag{2.2}$$

denklemine dönüşür. (2.2) denkleminin çözümlerinin enerji azalması ve negatif başlangıç enerjisi için patlaması Pişkin ve Polat (2013) tarafından çalışıldı. Daha sonra aynı denklemin çözümlerinin patlaması pozitif başlangıç enerjisi için Pişkin (2014) tarafından çalışılmıştır. Ye (Ye 2015a) tarafından (2.2) sisteminin global varlığı ve enerji azalması çalışılmıştır. Payravi (Peyravi 2017) (2.2) denkleminin çözümlerinin lokal varlığını ve patlamasını çalıştı.

(2.2) denkleminde $M\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2\right) \equiv 1$ ve $m \geq 1$ olduğunda

$$\begin{cases} u_{tt} + Au + |u_t|^{p-1}u_t = f_1(u,v), \\ v_{tt} + Av + |v_t|^{q-1}v_t = f_2(u,v) \end{cases} \tag{2.3}$$

olur. Bu denklemin çözümlerinin global varlığı, patlaması ve enerji azalması; Pişkin ve Polat (2012a, 2012b), Ye (2013, 2015b) tarafından çalışılmıştır.

(2.3) denkleminde $m = 2$ alınırsa

$$\begin{cases} u_{tt} + \triangle^2 u + |u_t|^{p-1}u_t = f_1(u,v), \\ v_{tt} + \triangle^2 v + |v_t|^{q-1}v_t = f_2(u,v) \end{cases}$$

Petrovsky denklem sistemi elde edilir. Bu denklemin çözümlerinin enerji azalması

ve patlaması Li ve ark. tarafından 2011 yılında çalışılmıştır.

(2.3) denkleminde $m = 1$ alınırsa

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle u + |u_t|^{p-1} u_t = f_1(u, v), \\ v_{tt} - \triangle v + |v_t|^{q-1} v_t = f_2(u, v) \end{cases}$$

dalga denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümlerinin varlık-tekliği, patlaması ve enerji azalması Agre ve Rammaha (2006), Houari (2010) ve Houari (2012) tarafından çalışılmıştır.

Wu, $m = 1$ için (2.1) denkleminin çözümlerinin global varlığı, enerji azalması ve patlamasını çalıştı (Wu 2012).

Bu tez çalışmasının dördüncü bölümünün ikinci kısmında (2.1) denklem sisteminin global çözümlerinin varlığı ve enerji azalması ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir. Dolayısıyla (Wu 2012) deki sonuçlar genelleştirilmiştir.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, diferansiyel denklemler ve fonksiyonel analiz ile ilgili bazı temel kavramlar verilecektir. Daha sonra Lebesgue uzayı, Sobolev uzayı, bazı önemli eşitlik ve eşitsizlikler ve çözümlerin patlaması ile ilgili bazı lemmalara yer verilecektir [Adams ve Fournier 2003, Kesavan 1989, Pişkin 2013, Pişkin 2017, Pişkin 2018].

3.1. Temel Kavramlar

Tanım 3.1.1. Bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun çeşitli mertebeden türevlerini içeren denklemlere diferansiyel denklem denir.

Tanım 3.1.2. Bir tek bağımsız değişken içeren diferansiyel denkleme adi diferansiyel denklem denir. n. mertebeden adi diferansiyel denklem

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

şeklinde gösterilir. Eğer $y^{(n)}$ yalnız bırakılabiliyorsa

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$$

biçiminde yazılır.

Tanım 3.1.3. İki ya da daha fazla bağımsız değişken içeren diferansiyel denklemlere kısmi diferansiyel denklem denir. Örneğin n. mertebeden bir kısmi diferansiyel denklem

$$F\left(x, y, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, ..., \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) = 0,$$

$$f\left(x, y, t, u, u_x, u_y, u_t, u_{xx}, ...\right) = 0$$

dır.

Tanım 3.1.4. Bir diferansiyel denklemde bulunan en yüksek basamaktan türevin basamağına denklem basamağı (mertebesi) denir.

Örneğin; $u_{tt} + u_t = u_{xx}$ sönümlü dalga denklemi ikinci basamaktandır.

Tanım 3.1.5. Bir diferansiyel denklem lineer ve lineer olmayan olmak üzere iki şekilde sınıflandırılır. Eğer bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken ve türevlerinin çarpımları yok ve bunların cebirsel kuvvetleri bir ise denkleme lineer (doğrusal) diferansiyel denklem denir**.** Aksi halde lineer olmayan denklemdir.

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = D(x,y)$$

denklemi birinci dereceden bir bağımlı (u), iki bağımsız değişkenli (x ve y) lineer kısmi türevli denklemlerin genel halidir.

$$A(x,y)u_{xx} + B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + D(x,y)u_x + E(x,y)u_y + F(x,y)u = G(x,y)$$

denklemi ikinci dereceden iki bağımsız değişkenli lineer kısmi türevli denklemlerin genel halidir.

Tanım 3.1.6. Kısmi türevli denklem, bilinmeyen fonksiyonun en yüksek basamaktan türevlerine göre lineer ise, o denkleme yarı lineer denklem denir. Her lineer denklem yarı-lineerdir, fakat her yarı lineer denklem lineer değildir.

$$P(x,y,u)u_x + Q(x,y,u)u_y = R(x,y,u)$$

denklemi iki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci basamaktan yarı lineer denklemin genel halini temsil eder.

Tanım 3.1.7. Bir yarı lineer denklemde en yüksek basamaktan türevin katsayıları, sadece bağımsız değişkenleri kapsıyorsa o denkleme hemen hemen lineer denir.

$$A(x,y)u_{xx} + B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + D(x,y,u,u_x,u_y) = 0$$

denklemi ikinci basamaktan hemen hemen lineer kısmi türevli denklemi temsil eder.

Diferansiyel denklem bir fiziksel olayın modeli olduğundan kolaylık olması açısından genellikle ikinci mertebeden sabit katsayılı bir kısmi diferansiyel denklem alınarak sınıflandırmaya gidilmiştir, ikinci mertebeden bir kısmi diferansiyel denklemin genel hali

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu + g = 0$$

şeklinde yazılabilir. Burada a, b, c, d, e, f ve g sabitleri ve $\Delta = b^2 - 4ac$ olmak üzere

I) $\Delta = 0$ ise denklem Paraboliktir

II) $\Delta > 0$ ise denklem Hiperbolik

III) $\Delta < 0$ ise denklem Eliptik olarak sınıflandırılır.

3.2. Diferansiyel Denklemlerin Elde Edilişleri

Diferansiyel denklemlerin elde edilişleri genellikle

I. Problem cebirsel olarak verilebilinir;

İçinde keyfi sabitlerin bulunduğu bir cebirsel denklem, düzlemde bir eğri ailesi oluşturur. Cebirsel denklemdeki keyfi sabitler, denklem ve onun türevleri arasında yok edilerek diferansiyel denklem elde edilir.

Örneğin; c keyfi sabit olmak üzere, $y = ce^{3x}$ fonksiyonunun diferansiyel denklemini bulalım. Bunun için fonksiyonun x e göre türevi alınır daha sonra fonksiyon ile türev arasında c sabiti yok edilirse

$$y' = 3y$$

diferansiyel denklemi bulunur.

II. Problem geometrik özellikleri ile tanımlanabilir;

Verilen özelliklere uyan eğrinin bulunması da bize bir diferansiyel denklemin özel çözümlerini temsil eder.

Örneğin; Herhangi bir noktasındaki eğimi, bu noktadaki kordinat toplamına eşit olan eğriyi bulmak istersek, bir eğrinin eğimi o noktadaki türevi olduğundan $y' = x + y$ diferansiyel denklemi problemi tanımlayan eğrinin özelliğidir. Bu diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$y' = -x - 1 + ce^x$$

dir. Bu istenen eğri ailesidir.

III. Uyglamalı Bilimlerde problemin matematiksel modeli genellikle bir diferansiyel denklemdir.

Örneğin; 200 gram şeker suda eritilmektedir. Erimenin hızı, henüz erimiş olan kısım ile orantılıdır. t dakika sonra erimenin hızını veren diferansiyel denklemi elde

edelim. Burada t dakikada şekerin eriyen kısmı q gram olsun. Bu durumda erimemiş olan kısım $(200 - q)$ gramdır. k orantı katsayısı olmak üzere erimenin hızı

$$\frac{dq}{dt} = k(200 - q)$$

diferansiyel denklemi olarak ifade edilir.

3.3. Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Tanım 3.3.1.

$$f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0 \tag{3.1.1}$$

diferansiyel denklemi verilsin. $c_1, c_2, c_{3,...}, c_n$ birbirinden bağımsız keyfi sabitler olmak üzere

$$F\left(x, y, c_1, c_2, ..., c_n\right) = 0 \tag{3.1.2}$$

bağıntısıyla tanımlanan n parametreli bir fonksiyon ailesini göz önüne alalım. Eğer ailedeki her fonksiyon (3.1.1) denkleminin bir çözümü ise, bu fonksiyona (3.1.2) denkleminin genel çözümü denir.

Tanım 3.3.2. Keyfi sabitlere özel değerler vererek genel çözümden elde edilen çözümlere özel çözümler denir.

Tanım 3.3.3. Genel çözümde keyfi sabitlere özel değerler vererek elde edilemeyen çözümlere tekil (singüler, aykırı) çözüm denir.

Tanım 3.3.4. Bir özel çözümün grafiğine *integral eğrisi*, genel çözümün grafiğine ise integral eğriler ailesi denir.

Örneğin

$$y' - 4\sqrt{y} = 0$$

diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$y = (2x + c)^2$$

dır. Burada c ye özel değerler vererek elde edilen çözümler özel çözüm olacaktır.

Örneğin;

$$\begin{aligned} y &= (2x-3)^2, \\ y &= (2x+1)^2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

özel çözümlerdir. Burada genel çözümde c ye keyfi değer vererek elde edemediğimiz fakat denklemi sağlayan

$$y = 0$$

tekil çözümdür.

Tanım 3.3.5. Uygulamalı bilimlerde genellikle bir diferansiyel denklemin genel çözümü yerine onun bazı ek koşulları sağlayan çözümlerinin bulunması istenir, eğer ek koşullar bağımlı değişken ve türevlerine göre tek bir noktada verilmişse probleme başlangıç-değer problemi, eğer koşullar en az iki farklı noktada verilmişse probleme sınır-değer problemi denir.

Bir diferansiyel denklemin tek bir çözümünün elde edilebilmesi için, başlangıç ve sınır değer problemindeki koşul sayısı denklemin mertebesine (yani genel çözümdeki keyfi sabit sayısına) eşit olmalıdır.

3.4. İyi Konulmuş Problemler

Bir diferansiyel denklem aşağıdaki üç şartı sağlıyorsa *iyi konulmuş (well posed)* olarak adlandırılır:

I. *Varlık*: Problem gerçekte bir çözüme sahip olmalı,

II. *Teklik*: Bu çözüm tek olmalı,

III. *Sürekli Bağımlılık*: Çözüm, problemde verilen verilere sürekli bağımlı olmalıdır. Bu koşul özel olarak fiziksel uygulamalarda ortaya çıkan problemler için önemlidir. Problemi belirleyen verilerdeki küçük bir değişiklik, tek çözümde de küçük değişikliklere neden olmalıdır. Diğer taraftan birçok problem için tek çözüm olması beklenmemektedir. Bu durumda matematiksel olarak çözümleri sınıflandırma ve karakterize etme önemlidir. Örneğin;

$$u_t + u_{xx} = 0$$

denkleminin

$$u_1(x,0) = 0$$

başlangıç koşulunu sağlayan tek çözümü

$$u_1(x,t) = 0$$

dır. Başlangıç koşulu

$$u_2(x,t) = \frac{\sin(nx)}{10^{50}}$$

alınırsa, çözüm

$$u_2(x,t) = e^{n^2 t}\frac{\sin(nx)}{10^{50}}$$

olur. Görüldüğü gibi başlangıç verilerinde küçük

$$|u_1(x,0) - u_2(x,0)| = \left|\frac{\sin(nx)}{10^{50}}\right|$$

bir değişiklik yapıldığında,çözümde

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| = \left|e^{n^2 t}\frac{\sin(nx)}{10^{50}}\right|$$

$n \to \infty$ için $\left|e^{n^2 t}\frac{\sin(nx)}{10^{50}}\right| \to \infty$ büyük değişiklik olmaktadır. Dolayısıyla verilen problem iyi konulmuş değildir.

3.4.1. Varlık Teoremi. $f(x,y)$ fonksiyonu $D = \{(x,y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ bölgesinde sürekli ve $|f(x,y)| \leq K$ olacak şekilde sınırlı ise

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

verilen başlangıç değer problemi en az bir $y(x)$ çözümü mevcuttur.

3.4.2. Teklik Teoremi.

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

başlangıç değer problemi verilmiş olsun. $f(x,y)$ ve $\frac{\partial f}{\partial y}$; R bölgesinin her bir (x,y)

noktasında sürekli ve

$$|f| \leq K, \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq M$$

olacak şekilde sınırlı ise verilen başlangıç değer probleminin en fazla bir $y(x)$ çözümü vardır.

3.5. Normlu Uzay, İç Çarpım Uzayı ve Hilbert Uzayı

Tanım 3.5.1. X, K reel veya kompleks sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$\|.\| : X \to R^+$, $x \to \|x\|$ dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in K$ için

I. $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

II. $\|ax\| = |a| \|x\|$;

III. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Üçgen eşitsizliği)*

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde *norm* adını alır ve bu durumda $(X, \|.\|)$ ikilisine bir *normlu uzay* adı verilir, $\|x\|$ sayısına da $x \in X$ elemanının normu denir.

Tanım 3.5.2. (x_n), $(X, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq N$ olduğunda

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir N doğal sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 3.5.3 Bir uzay metrik uzay olma özelliğini sağlıyorsa ve buna ek olarak her Cauchy dizisinde limiti de bu uzayda bulunuyorsa buna tam metrik denilir.

Tanım 3.5.4. (x_n), $(X, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine *yakınsaktır* denir ve $x_n \to x$ ile gösterilir.

Tanım 3.5.5. Bir X normlu uzayında her Cauchy dizisi X in bir elemanına yakınsıyor ise bu uzaya *tam uzay* denir. $(X, \|.\|)$ uzayı tam ise bu uzaya Banach uzayı denir.

Tanım 3.5.6. X vektör uzayı üzerinde tanımlı iki norm, $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ olsun. $A, B > 0$ sabitleri için

$$A\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq B\|x\|_1$$

eşitsizliği X uzayındaki her x noktası için geçerli ise, $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ normlarına denk normlar denir.

Tanım 3.5.7. K cismi üzerinde bir X vektör uzayı verildiğinde, $X \times X$ uzayı üzerinde tanımlı K değerli

$$(.,.) : X \times X \to K$$

bir fonksiyonun her $x, y \in X$ ve $a, b \in C$ için aşağıdaki özellikleri varsa, bu fonksiyona *iç çarpım* denir;

I. $(x, x) \geq 0;\ (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

II. $(x, y) = (y, x)$

III. $(ax + by, z) = a(x, z) + b(y, z).$

$K = R$ halinde $(x, y) = (y, x)$ olduğu hemen görülür.

Bir iç çarpım ile

$$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$$

tanımlanan $\|.\| : X \to R$ fonksiyonunun norm olduğunu görmek oldukça kolaydır. Normu yukarıda olduğu gibi bir iç çarpım tarafından tanımlanan uzaya iç çarpım uzayı denir.

Tanım 3.5.8. Tam iç çarpım uzayına *Hilbert uzayı* denir.

Tanım 3.5.9. n boyutlu R^n gerçel Euclid uzayında bir nokta $x = (x_1, ..., x_n)$ ise bu noktanın normu

$$|x| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ile tanımlanır. x ve y nin iç çarpımı

$$x.y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

şeklindedir.

3.6. Lebesgue Uzayı $(L^p(\Omega))$

Tanım 3.6.1. Ω, R^n de bir bölge ve p pozitif gerçel sayı olsun. Ω da tanımlı ölçülebilir bütün u fonksiyonları sınıfı aşağıdaki koşul altında

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty$$

$L^p(\Omega)$ *uzayı* denir. Bu uzay bir vektör uzayıdır. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere bu uzay

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

normuyla Banach uzaydır.

Tanım 3.6.2. Ω, R^n uzayında bir bölge, $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere Ω bölgesinde her kompakt altkümesinde $p.$ kuvveti integrallenebilir bütün ölçülebilir fonksiyonlar uzayı $L^p_{loc}(\Omega)$ uzayıdır.

Tanım 3.6.3. $vol(\Omega) = \int_\Omega 1dx < \infty$ (Ω bölgesi sınırlı), $1 \leq p \leq q \leq \infty$ olsun. Bu durumda $u \in L^q(\Omega)$ ise $u \in L^p(\Omega)$ ve

$$\|u\|_p \leq c \|u\|_q$$

dır. Burada $c = (vol(\Omega))^{(1/p)-(1/q)}$ dır. Yani

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmesi geçerlidir.

Tanım 3.6.4. $L^2(\Omega)$,

$$(u, v) = \int_\Omega u(x) \overline{v(x)} dx$$

iç çarpımına göre Hilbert uzaydır.

3.7. Sobolev Uzayı $(W^{m,p}(\Omega))$

Tanım 3.7.1. $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve α çoklu-indisi verilsin. $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx$$

ise $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonuna u nun α. *zayıf türevi* denir ve $v = D^\alpha u$ şeklinde yazılır.

Tanım 3.7.2. Ω, R^n de bir bölge, m negatif olmayan herhangi bir tamsayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya Sobolev uzayı denir ve bu uzay

$1 \leq p < \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L_p(\Omega)} \right)^{1/p}$$

ve $p = \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)}$$

normları ile Banach uzaydır.

$W^{m,p}(\Omega)$ uzayında $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ dır. Burada

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmesi geçerlidir.

Tanım 3.7.3. $p = 2$ ise $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ dır. $H^m(\Omega)$ uzayındaki norm

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L_2(\Omega)} \right)^{1/2}$$

şeklindedir.

Tanım 3.7.4. $H^m(\Omega)$,

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)$$

iç çarpımı ile Hilbert uzaydır. Burada $(u,v) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx$ şeklinde $L^2(\Omega)$ deki iç çarpımdır.

$H_0^1(\Omega)$ uzayında iç çarpım

$$(u,v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

dır ve norm

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}$$

şeklindedir.

3.7.5. Sobolev Gömülme Teoremi.

Ω, R^n de koni özeliğine sahip açık bölge, $m \geq 1$ ve $j \geq 0$ şeklindeki tamsayılar ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda

(i) $mp > n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

dır.

(ii) $mp = n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \qquad p \leq q < \infty$$

veya

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad p \leq q < \infty$$

dır. Ayrıca $p = 1$ ise

$$W^{j+m,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

dır.

(iii) $mp < n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \qquad p \leq q \leq p^*$$

veya

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad p \leq q \leq p^*$$

dır. Burada

$$p^* = \begin{cases} \frac{np}{n-mp}, & n > mp \\ +\infty, & n \leq mp \end{cases}$$

dır.

$W^{m,p}$ yerine $W_0^{m,p}$ uzayı alınırsa, Ω bölgesinde herhangi bir kısıtlama yapılmaksızın gömülmeler yine geçerli olur.

3.8. Bazı Eşitlik ve Eşitsizlikler

Lemma 3.8.1. Young eşitsizliği

Eğer $\varepsilon > 0, a, b \in R$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise, o zaman

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

eşitsizliği veya

$$|ab| \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}} . q^{-1}$$

dir. Eğer $a = \delta X$ ve $b = \frac{Y}{\delta}$ olarak alınır ve $|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$ eşitsizliğinde yerine yazılırsa;

$$|X.Y| \leq \frac{\delta^p |X|^p}{p} + \frac{\delta^{-q} |Y|^q}{q}$$

formunda ifade edilebilinir.

Lemma 3.8.2. Hölder eşitsizliği

$u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, $p \geq 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise, o zaman

$$uv \in L^1(\Omega)$$

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

eşitsizliği geçerlidir.

$p = 1$ durumunda,

$$q = \infty$$

$$\|v\|_{L^q(\Omega)} = ess\sup |v|$$

alırız.

Lemma 3.8.3. Minkowski Eşitsizliği

$u, v \in L^p(\Omega)$ ve $p \geq 1$ olmak üzere

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 3.8.4. Gronwall eşitsizliği

$u(t)$, $[0, T]$ aralığında negatif olmayan mutlak sürekli bir fonksiyon, $\phi(t)$ ve $\psi(t)$ negatif olmayan $[0, T]$ üzerinde toplanabilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$u'(t) \leq \phi(t).u(t) + \psi(t)$$

eşitsizliği sağlansın bu durumda $0 \leq t \leq T$ için,

$$u(t) \leq e^{\int_0^t \phi(\zeta)d\zeta}(u(0) + \int_0^t \psi(\zeta)d\zeta)$$

yazılabilir.

Lemma 3.8.5. Sobolev Poincare eşitsizliği

p sayısı $2 \leq p < \infty$ $(n = 1, 2)$ ve $2 \leq p \leq \frac{2n}{n-2}$ $(n \geq 3)$ şeklinde olsun. Bu durumda $C_* = C_*(\Omega, p)$ sabit sayısı ve $u \in H_0^1(\Omega)$ için,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_* \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

olur.

Lemma 3.8.6. Green özdeşliği

$$\int_\Omega v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n}ds - \int_\Omega \bigtriangledown v \bigtriangledown u dx$$

dır. Burada n dışa doğru yönlendirilmiş birim vektör ve $\frac{\partial u}{\partial n} = n.\bigtriangledown u$ dır.

İspat. Tek boyutta

$$(vu_x)_x = v_x u_x + vu_{xx}$$

tir. Benzer şekilde daha yüksek boyutlarda da

$$\begin{aligned} \bigtriangledown(v\bigtriangledown u) &= \bigtriangledown v\bigtriangledown u + v\Delta u \\ v\Delta u &= \bigtriangledown(v\bigtriangledown u) - \bigtriangledown v\bigtriangledown u \end{aligned}$$

dır. Buradan integral alınırsa

$$\int_\Omega v\Delta u dx = \int_\Omega \bigtriangledown(v\bigtriangledown u)\,dx - \int_\Omega \bigtriangledown v\bigtriangledown u dx$$

olur. Burada $\int\int\int \ldots dxdydz = \int_\Omega \ldots dx$ olarak gösterilmiştir. Diverjans teoreminden $\int_\Omega \bigtriangledown F dx = \int_{\partial\Omega} F.nds$ olduğundan

$$\begin{aligned} \int_\Omega v\Delta u dx &= \int_{\partial\Omega} v\bigtriangledown u.nds - \int_\Omega \bigtriangledown v\bigtriangledown u dx \\ \int_\Omega v\Delta u dx &= \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n}ds - \int_\Omega \bigtriangledown v\bigtriangledown u dx \end{aligned}$$

bulunur.

Tanım 3.8.7. (Sabit Nokta). $\mathbf{X} \neq 0$ bir küme ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun.

$$T(x) = x$$

olacak şekilde x noktasına T nin sabit noktası denir.

Tanım 3.8.8. Daralma (Büzülme) Dönüşümü.

(X, d) bir metrik uzay $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in X$ için

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

olacak şekilde $\alpha \geq 0$ sayısı varsa T ye Lipschitz sürekli fonksiyon denir. Eğer $0 \leq \alpha < 1$ ise T ye daralma dönüşümü denir.

Teorem 3.8.1. (Banach Sabit Nokta Teoremi).

(X, d) bir tam metrik uzay ve T daralma dönüşümü olsun. Bu durumda T fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

İspat. T daralma dönüşümü olduğundan $\forall x, y \in X$ için

$$d\left(T(x), T(y)\right) \leq \alpha d(x, y)$$

olacak şekilde $0 \leq \alpha < 1$ sayısı vardır. $x_0 \in X$ keyfi bir sabit nokta ve

$$x_n = T_{x_{n-1}}$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} x_1 &= T_{x_0} \\ x_2 &= T_{x_1} = T^2 x_0 \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= T_{x_{n-2}} = T^{n-1} x_0 \\ x_n &= T_{x_{n-1}} = T^n x_0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) \\ &\leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq \alpha^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\vdots \\ &\leq \alpha^n d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

dır. Böylece $m \geq n$ için genelleştirilmiş üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \alpha^n d(x_0, x_1) + \alpha^{n+1} d(x_0, x_1) + \cdots + \alpha^{m-1} d(x_0, x_1) \\ &= \left(\alpha^n + \alpha^{n+1} + \cdots + \alpha^{m-1}\right) d(x_0, x_1) \\ &= \frac{\alpha^n - \alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

olur. $0 \leq \alpha < 1$ olduğunda $\frac{\alpha^n - \alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \to 0$ olur. Yani (x_n) dizisi X uzayında bir Cauchy dizisidir. Dolayısıyla (X, d) uzayı tamdır. X tam olduğunda $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ olacak şekilde $x \in X$ vardır. Ayrıca

$$\begin{aligned} T_x &= T(\lim_{n\to\infty} x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} T(x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \\ &= x \end{aligned}$$

olduğundan bu x noktası T nin sabit noktasıdır.

Şimdi sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. x ve x' gibi iki tane sabit nokta olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$d(x, x') = d(Tx, Tx') \leq \alpha d(x, x')$$

olur. $0 \leq \alpha < 1$ olduğundan $d(x, x') = 0$ dolayısıyla $x = x'$ olur.

Banach sabit nokta teoremi yeterli koşul olup, gerekli değildir. Yani daralma dönüşümü olmayıp sabit noktaya sahip dönüşümler de vardır.

3.9. Nakao Eşitsizliği

Teorem 3.9.1. $\phi(t)$, $[0, \infty]$ aralığında tanımlı, artmayan ve negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere; $w_0 > 0$ ve $\alpha \geq 0$ için

$$\phi^{1+\alpha}(t) \leq w_0(\phi(t) - \phi(t+1)), \quad t \geq 0 \tag{3.9.1}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $\forall t \geq 0$ için

$$\begin{cases} \phi(t) \leq \phi(0)\ e^{-w_1[t-1]^+}, & \alpha = 0, \\ \phi(t) \leq (\phi(0)^{-\alpha} + w_0^{-1}\alpha[t-1]^+)^{\frac{-1}{\alpha}}, & \alpha > 0 \end{cases}$$

dır. Burada $[t-1]^+ = \max\{t-1, 0\}$ ve $w_1 = \ln(\frac{w_0}{w_0-1})$ dır. (Nakao 1977, Nakao 1978).

İspat. i. $\alpha > 0$ için

$$y(t) = \phi^{-\alpha}(t)$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} y(t+1) - y(t) &= \int_0^1 \frac{d}{d\theta} \left[\theta\phi\left(t+1\right) + \left(1-\theta\right)\phi(t)\right]^{-\alpha} d\theta \\ &= \int_0^1 \left\{-\alpha \left[\theta\phi\left(t+1\right) + \left(1-\theta\right)\phi(t)\right]^{-\alpha-1} \left[\phi(t+1) - \phi\left(t\right)\right]\right\} d\theta \\ &\geq \alpha \int_0^1 \left[\theta\phi\left(t+1\right) + \left(1-\theta\right)\phi(t)\right]^{-\alpha-1} w_0^{-1}\phi^{1+\ \alpha}(t) d\theta \\ &= \alpha w_0^{-1}\phi^{1+\alpha}(t) \int_0^1 \left[\theta\phi\left(t+1\right) + \left(1-\theta\right)\phi(t)\right]^{-\alpha-1} d\theta \\ &\geq \alpha w_0^{-1}\phi^{1+\alpha}(t)\phi^{-1-\alpha}(t) \\ &= \alpha w_0^{-1} \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$y(t+1) \geq y(t) + \alpha w_0^{-1}$$

ve

$$y(t+1) \geq y(0) + \alpha w_0^{-1} t$$

yazılabilir. $y(t)$ nin tanımından

$$\phi^{-\alpha}(t+1) \geq \phi^{-\alpha}(0) + \alpha w_0^{-1} t$$

ve

$$\phi^{-\alpha}(t) \geq \phi^{-\alpha}(0) + \alpha w_0^{-1}\left[t-1\right]^+$$

elde edilir. Böylece

$$\phi(t) \leq \left(\phi^{-\alpha}(0) + \alpha w_0^{-1} [t-1]^+\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

bulunur.

ii. Şimdi $\alpha = 0$ olsun. (3.9.1) eşitsizliğinden

$$\phi(t+1) \leq \left(1 - \frac{1}{w_0}\right) \phi(t)$$

dır. Ayrıca eğer $t \geq 0$ alınırsa n tamsayısı için $n \leq t \leq n+1$ dir. Buradan

$$\phi(t) \leq \left(1 - \frac{1}{w_0}\right) \phi(t-1)$$

yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned} \phi(t) &\leq \left(1 - \frac{1}{w_0}\right)^2 \phi(t-2) \\ &\vdots \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{w_0}\right)^n \phi(t-n) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \phi(t) &\leq \left(1 - \frac{1}{w_0}\right)^n \phi(t-n) \leq \phi(0) \left(1 - \frac{1}{w_0}\right)^{[t-1]^+} \\ &= \phi(0) e^{-[t-1]^+ \ln\left(1-\frac{1}{w_0}\right)^{-1}} \\ &= \phi(0) e^{-w_1 [t-1]^+} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $w_1 = \ln(\frac{w_0}{w_0 - 1})$ dır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Yüksek Mertebeden Doğrusal Olmayan Viskoelastik Dalga Denklemi

Bu kısımda

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta)^m u - \int_0^t g(t-s)\,(-\Delta)^m u(s)ds = |u|^{p-2}\,u\ , & (x,t) \in \Omega \times R^+ \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), & x \in\ \Omega \\ \frac{\partial^i u}{\partial v^i} = 0,\ i = 0,1,2,...,m-1, & (x,t) \in\ \partial\Omega \times R^+ \end{cases} \tag{4.1.1}$$

denklemi incelenecektir (Ye 2015c). Burada $m \geq 1$ doğal sayı, $p > 2$ reel sayıdır. Ω, R^n de $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip bir bölgedir. v, $\partial\Omega$ da dış normal vektördür ve $\frac{\partial^i u}{\partial v^i}$, u nun i.mertebeden türevini gösterir.

Aşağıdaki kabulleri yapalım:

(A1) C^2 de sınırlı $g : R^+ \to R^+$ fonksiyonu

$$\begin{cases} g(0) > 0, \\ \beta = 1 - \int_0^\infty g(s)ds > 0 \end{cases}$$

olsun.

(A2) η_1 ve η_2 pozitif sabitleri aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun

$$\begin{cases} -\eta_1 \leq g^{'}(t) \leq 0, \\ 0 \leq g^{''}(t) \leq \eta_2. \end{cases}$$

(A3) $m \geq 1$ doğal sayısı için

$$\begin{cases} \text{Eğer}\ \ n \leq 2m \text{ ise} \quad 2 \leq p < \infty, \\ \text{Eğer}\ \ n > 2m \text{ ise}\ \ 2 \leq p \leq \frac{2(n-m)}{n-2m} \end{cases}$$

olsun.

$u \in H_0^m(\Omega)$ olmak üzere

$$\begin{cases} J(u(t)) = \frac{1}{2}(1 - \int_0^\infty g(s)ds)\,\|A^m u(t)\|^2 + \frac{1}{2}(g \diamond A^m)(t) - \frac{1}{p}\,\|u(t)\|_p^p\,, \\ K(u(t)) = (1 - \int_0^\infty g(s)ds)\,\|A^m u(t)\|^2 + (g \diamond A^m)(t) - \|u(t)\|_p^p \end{cases} \tag{4.1.2}$$

olsun. Burada

$$(g \diamond A^m)(t) = \int_0^t g(t-s) \left\| A^m u(s) - A^m u(t) \right\|^2 ds$$

dır.

$$d = \inf_{u \in H_0^m(\Omega), u \neq 0} \sup_{\lambda \geq 0} J(\lambda u)$$

olmak üzere, [Alves ve ark. 2009] kararlı küme

$$W = \{u \mid u \in H_0^m(\Omega),\ K(u) > 0,\ J(u) < d\} \cup \{0\}$$

ve kararsız küme

$$\vartheta = \{u \mid u \in H_0^m(\Omega),\ K(u) < 0,\ J(u) < d\}$$

dır. Ayrıca

$$N = \{u \mid u \in H_0^m(\Omega), u \neq 0, K(u) = 0\}$$

olsun. Buradan

$$d = \inf_{u \in N} J(u)$$

olduğu görülür. $u \in H_0^m(\Omega)$ için enerji fonksiyonu

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \left\| u_t(t) \right\|^2 + \frac{1}{2}(1 - \int_0^t g(s)ds) \left\| A^m u(t) \right\|^2 \\ &\quad + (g \diamond A^m u)(t) - \frac{1}{p} \left\| u(t) \right\|_p^p \qquad (4.1.3) \\ &= \frac{1}{2} \left\| u_t(t) \right\|^2 + J(u(t)) \end{aligned}$$

dır. Başlangıç enerjisi

$$E(0) = \frac{1}{2} \left\| u_1 \right\|^2 + J(u_0)$$

olur.

Tanım 4.1.1. u fonksiyonu (4.1.1) probleminin $[0, T]$ aralığında bir çözümü ve $u_0 \in H_0^m(\Omega))$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ ise

$$u \in C([0,T]; H_0^m(\Omega)), u_t \in C([0,T]; L^2(\Omega))$$

dır. $\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ test fonksiyonları için u fonksiyonu

$$\begin{aligned} & \langle u_t(t), \phi \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle u_1, \phi \rangle_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \langle A^m u, A^m \phi \rangle_{L^2(\Omega)} \, d\tau \\ & - \int_0^t g(s-\tau) \langle A^m u, A^m \phi \rangle_{L^2(\Omega)} \, d\tau \\ = & \int_0^t \left\langle |u_t|^{p-2} u, \phi \right\rangle_{L^2(\Omega)} d\tau \end{aligned}$$

eşitliğini sağlar.

Lemma 4.1.1. q reel sayısı için

$$\begin{cases} \text{Eğer} \;\; n \leq 2m \;\; \text{ise} \quad 2 \leq q \leq \infty, \\ \text{Eğer} \;\; n > 2m \;\; \text{ise} \;\; 2 \leq q \leq \frac{2n}{n-2m} \end{cases}$$

olsun. Bu durumda $\forall u \in H_0^m(\Omega)$ için

$$\|u\|_q \leq B \|A^m u\|$$

dır. Burada B pozitif sabiti Ω ve q ya bağlıdır.

Lemma 4.1.2. (A1) in sağlandığını varsayalım. Bu durumda $E(t)$ artmayan bir fonksiyondur ve

$$\frac{d}{dt} E(t) = \frac{1}{2}(g' \diamond A^m u)(t) - \frac{1}{2} g(t) \|A^m u(t)\|^2 \leq 0 \tag{4.1.4}$$

dır. Burada

$$(g' \diamond A^m u)(t) = \int_0^t g'(t-s) \|A^m u(s) - A^m u(t)\|^2 \, ds$$

dır. $t \geq 0$ ve başlangıç koşullarında sürekli ve integrallenebilir olan $E(t)$ fonksiyonu (4.1.4) eşitliğindeki gibi yazılır.

İspat. (4.1.1) denklemini u_t ile çarpıp $[0,t]$ aralığında integrali alınırsa

$$E(t) = E(0) + \int_0^t \left[\frac{1}{2}(g' \diamond A^m u)(s) - \frac{1}{2} g(s) \|A^m u(s)\|^2 \right] ds \tag{4.1.5}$$

elde edilir.

Lemma 4.1.3. $u \in H_0^m(\Omega)$ olsun ve (A3) durumu sağlansın. Bu durumda d pozitif sayıdır.

İspat. (4.1.3) denkleminden;

$$J(\lambda u) = \frac{\lambda^2}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\|A^m u(t)\|^2 + \frac{\lambda^2}{2}(g \diamond A^m u)(t) - \frac{\lambda^p}{p}\|u(t)\|_p^p$$

dır. Burada daha sonra λ ya göre türev alındığında;

$$\frac{d}{d\lambda}J(\lambda u) = \lambda\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\|A^m u(t)\|^2 + \lambda(g \diamond A^m u)(t) - \lambda^{p-1}\|u(t)\|_p^p$$

olur. Burada $\frac{d}{d\lambda}J(\lambda u) = 0$ olsun. Bu durumda (4.1.6) eşitliği yazılır.

$$\lambda_1 = \left(\frac{(1 - \int_0^t g(s)ds)\|A^m u(t)\|^2 + (g \diamond A^m u)(t)}{\|u\|_p^2}\right)^{\frac{1}{p-2}} \tag{4.1.6}$$

$\lambda = \lambda_1$ iken λ ya göre ikinci türev alındığında aşağıdaki eşitlik yazılır.

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}J(\lambda u) = (2-p)\,(1 - \int_0^t g(s)ds)\|A^m u(t)\|^2 + (g \diamond A^m u)(t) < 0$$

Böylece;

$$\begin{aligned}
\sup_{\lambda \geq 0} J(\lambda u) &= J(\lambda_1 u) \\
&= \frac{\lambda_1^2}{2}\left[\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\|A^m u(t)\|^2 + (g \diamond A^m u)(t)\right] - \frac{\lambda_1^p}{p}\|u(t)\|_p^p \\
&= \frac{p-2}{2p}\left(\frac{\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\|A^m u(t)\|^2 + (g \diamond A^m u)(t)}{\|u\|_p^p}\right)^{\frac{p}{p-2}}
\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

eşitliği elde edilir. Lemma 4.1.1 den, $\beta \geq 0$ için,

$$\begin{aligned}
\|u\|_p^p &\leq B^2\|A^m u\|^2 \\
&\leq \frac{B^2}{\beta^2}\left(\beta\|A^m u\|^2\right) \\
&\leq \left(\frac{B}{\beta}\right)^2 . \left((1 - \int_0^t g(s)ds)\|A^m u(t)\|^2 + (g \diamond A^m u)(t)\right)
\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

dır. (4.1.7) ve (4.1.8) denklemlerinden;

$$\begin{cases} \sup_{\lambda\geq 0} J(\lambda u) \geq \frac{p-2}{2p}\left(\frac{\beta}{B}\right)^{\frac{2p}{p-2}} > 0, \\ d = \inf_{u\in H_0^m(\Omega), u\neq 0} \sup_{\lambda\geq 0} J(\lambda u) > 0 \end{cases}$$

yazılır. Böylece Lemma 4.1.3 ispatlanmış olur.

4.1.1. Lokal Varlık

Denklemimizin lokal varlığını belirtmek için önce problemimize karşılık gelen basit bir problem alalım. Sonra (4.1.1) probleminin çözümünün lokal varlığını Daralma (Büzülme) dönüşümü prensibiyle ispatlayalım. $T > 0$ iken, V için verilen aşağıdaki problemi göz önüne alalım.

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta)^m u - \int_0^t g(t-s)(-\Delta)^m u(s)ds = |v|^{p-2} v\ , & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial^i u}{\partial v^i} = 0,\ i = 0,1,2,...,m-1, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \end{cases} \tag{4.1.1.1}$$

dır. Aşağıdaki Lemma, (4.1.1) probleminin Lokal çözümünün varlığını için önemli rol oynamaktadır. Bu Lemmayı daha sonra Galerkin metodu kullanarak kanıtlayacağız.

Lemma 4.1.1.1. (A1) ve (A3) varsayımlarının sağlandığını kabul edelim. Eğer $u_0 \in H_0^m(\Omega) \cap H_0^{2m}(\Omega)$ ve $u_1 \in H_0^m(\Omega)$ ise , (4.1.1.1) denkleminin u çözümü

$$\begin{cases} u \in L^\infty([0,T); H_0^m(\Omega) \cap H_0^{2m}(\Omega)) \\ u_t \in L^\infty([0,T); H_0^m(\Omega)) \\ u_{tt} \in L^\infty([0,T); L^2(\Omega)) \end{cases} \tag{4.1.1.2}$$

uzayındadır [Barbu 1993, Lions 1969, Strauss 1966, Wu ve Tsai 2006].

Teorem 4.1.1.1. (A1) ve (A3) varsayımları sağlansın. Eğer $u_0 \in H_0^m(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, $v \in C([0,T); H_0^m(\Omega))$ ise bu durumda u,

$$\begin{cases} u_0 \in C([0,T); H_0^m(\Omega)) \\ u_t \in C([0,T); L^2(\Omega)) \end{cases} \tag{4.1.1.3}$$

uzayında (4.1.1.1) probleminin tek ve zayıf bir çözümüdür.

İspat. $C_0^\infty(\Omega)$ uzayında $\left\{u_0^\vartheta\right\}$ ve $\left\{u_1^\vartheta\right\}$ dizileri sırasıyla u_0 ve u_1 e yaklaşsın. $C\left([0,T);C_0^\infty(\Omega)\right)$ da $\left\{v^\vartheta\right\}$ dizisi v ye yaklaşsın. Daha sonra aşağıdaki problemi ele alalım..

$$\begin{cases} u_{tt}^\vartheta + (-\Delta)^m u^\vartheta - \int_0^t g(t-s)(-\Delta)^m u^\vartheta(s)ds = \left|v^\vartheta\right|^{p-2} v^\vartheta \ , \\ u^\vartheta(x,0) = u_0^\vartheta(x),\ u_t^\vartheta(x,0) = u_1^\vartheta(x) \\ \frac{\partial^i u^\vartheta}{\partial v^i} = 0, \quad i = 0,1,2,...,m-1, \end{cases} \tag{4.1.1.4}$$

Lemma (4.1.1.1) den her bir ϑ için (4.1.1.2) denklemini sağlayan, (4.1.1.4) probleminin bir tek $\left\{u^\vartheta\right\}$ çözümü vardır.

Sonra $\left\{u_t^\vartheta\right\}$ ve $\left\{v_t^\vartheta\right\}$ dizilerinin W de birer Cauchy dizileri olduğunu göstermeye çalışacağız.

$$W = \left\{w \mid w \in C\left([0,T);H_0^m(\Omega)\right), w_t \in C\left[0,T\right);L^2(\Omega)\right\}$$

olmak üzere

$$\begin{cases} U = u^\vartheta - u^v \\ V = v^\vartheta - v^v \end{cases}$$

olduğunu kabul edelim. U aşağıdaki denklemi sağlar.

$$\begin{cases} U_{tt} + (-\Delta)^m U - \int_0^t g(t-s)(-\Delta)^m U(s)ds = \left|v^\vartheta\right|^{p-2} v^\vartheta - \ \left|v^v\right|^{p-2} v^v, \\ U(x,0) = U_0(x) = u_0^\vartheta(x) - u_0^v(x \\ U_t(x,0) = U_1(x) = u_1^\vartheta(x) - u_1^v(x); \\ \frac{\partial^i U}{\partial v^i} = 0,\ i = 0,1,2,...,m-1, \end{cases} \tag{4.1.1.5}$$

(4.1.1.5) denklemini U_t ile çarpıp $[0,t]$ aralığında integral alınırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left\|U_t\right\|^2+\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\left\|A^mU(t)\right\|^2+\frac{1}{2}(g\diamond A^mU)(t) \\ & -\int_0^t\left[\frac{1}{2}(g'\diamond A^mU)(s)-\frac{1}{2}g(s)\left\|A^mU(s)\right\|^2\right]ds \qquad (4.1.1.6) \\ = \ & \frac{1}{2}\left\|U_1\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|A^mU_0\right\|^2+\int_0^t\int_\Omega\left(\left|v^\vartheta\right|^{p-2}v^\vartheta-\ \left|v^v\right|^{p-2}v^v\right)U_t(x,s)dxds \end{aligned}$$

Burada daha önceden Lemma 4.1.2 de tanımladığımız fonksiyon ve eşiti aşağıdaki gibidir.

$$(g'\diamond A^mU)=\int_0^t g'(t-s)\left\|A^mU(s)-A^mU(t)\right\|^2ds$$

Hölder eşitsizliği kullanarak,

$$\begin{aligned} & \int_\Omega\left(\left|v^\vartheta\right|^{p-2}v^\vartheta-\ \left|v^v\right|^{p-2}v^v\right)U_t(x,s)dx \\ \leq \ & \int_\Omega\left|\left(\left|v^\vartheta\right|^{p-2}v^\vartheta-\ \left|v^v\right|^{p-2}v^v\right)\right|\cdot\left|U_t(x,s)\right|dx \\ \leq \ & C_1\int_\Omega\left|V(x,s)\right|\left(\left|\left|v^\vartheta\right|^{p-2}-\ \left|v^v\right|^{p-2}\right|\right)\left|U_t(x,s)\right|dx \qquad (4.1.1.7) \\ \leq \ & C_2\left\|U_t\right\|.\left\|V\right\|_{\frac{2n}{n-2m}}.\left[\left\|v^\vartheta\right\|_{\frac{n(p-2)}{m}}^{p-2}+\left\|v^v\right\|_{\frac{n(p-2)}{m}}^{p-2}\right] \end{aligned}$$

bulunur.

(A3) durumu varsayımından (4.1.1.7) ve Lemma 4.1.1 den

$$\int_\Omega\left(\left|v^\vartheta\right|^{p-2}v^\vartheta-\ \left|v^v\right|^{p-2}v^v\right)U_t(x,s)dx\leq C_3\left\|U_t\right\|\left\|A^mV\right\|\left[\left\|A^mv^\vartheta\right\|^{p-2}+\left\|A^mv^v\right\|^{p-2}\right] \qquad (4.1.1.8)$$

elde edilir.

Böylece (A1)-(A2) durumlarının varsayımı ve (4.1.1.6), (4.1.1.8) denklemlerinden,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left\|U_t\right\|^2+\frac{1}{2}\beta\left\|A^mU\right\|^2 \\ \leq \ & \frac{1}{2}\left(\left\|U_1\right\|^2+\left\|A^mU_0\right\|^2\right) \\ & +C_4\int_0^t\left\|U_t(s)\right\|\cdot\left\|A^mV(s)\right\|\left[\left\|A^mv^\vartheta(s)\right\|^{p-2}+\left\|A^mv^v(s)\right\|^{p-2}\right]ds \\ \leq \ & \frac{1}{2}\left(\left\|U_1\right\|^2+\left\|A^mU_0\right\|^2\right)+C_4\int_0^t\left\|U_t(s)\right\|\left\|A^mV(s)\right\|ds \qquad (4.1.1.9) \end{aligned}$$

elde ederiz.

Burada C_4, C_3 e bağlı pozitif bir sabittir ve $\{v^\vartheta\}$, $\{v^v\}$ dizilerini içeren $C([0,T]$ $;H_0^m(\Omega))$ uzayında yuvarın yarıçapıdır. Young eşitsizliği ve (4.1.1.9) denklemi yardımıyla,

$$\max_{0\leq t\leq T}\left(\|U_t\|^2+\|A^mU\|^2\right)\leq 2\left(\|U_1\|^2+\|A^mU_0\|^2\right)+4C_4^2T^2\max_{0\leq t\leq T}\|A^mV\|^2 \tag{4.1.1.10}$$

denklemi elde edilir.

$\{u^\vartheta\}$, $H_0^m(\Omega)$ uzayında ve $\{u_1^\vartheta\}$ dizisi de $L^2(\Omega)$ uzayında birer Cauchy dizisidirler. $\{v^\vartheta\}$ dizisi, $C([0,T]$ $;H_0^m(\Omega))$ da Cauchy dizisiyken. $\{u^\vartheta\}$ ve $\{u_1^\vartheta\}$ de sırasıyla $C([0,T];H_0^m(\Omega))$ ve $C([0,T];L^2(\Omega))$ uzaylarında birer Cauchy dizileri olduğu sonucuna varılır.

(4.1.1.4) denkleminin her iki tarafını $\phi(x)$ ile çarpıp ve Ω bölgesi üzerinde integralini alırsak;

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t^\vartheta(x,t)\phi(x)dx+\int_\Omega A^mu^\vartheta(x,t)A^m\phi(x)dx\\&-\int_\Omega\int_0^t g(t-s)A^mu^\vartheta(s)A^m\phi(x)dsdx\\=&\int_\Omega\left|v^\vartheta\right|^{p-2}v^\vartheta\phi(x)dx\end{aligned} \tag{4.1.1.11}$$

elde ederiz.

$\vartheta\to+\infty$ iken;

$$\begin{cases}\int_\Omega A^mu^\vartheta(x,t)A^m\phi(x)dx\to\int_\Omega A^mu(x,t)A^m\phi(x)dx\\\int_\Omega\left|v^\vartheta\right|^{p-2}v^\vartheta\phi(x)dx\to\int_\Omega|v|^{p-2}v\phi(x)dx\end{cases}$$

ve

$$\int_\Omega\int_0^t g(t-s)A^mu^\vartheta(s)A^m\phi(x)dsdx\to\int_\Omega\int_0^t g(t-s)A^mu(s)A^m\phi(x)dsdx$$

elde edilir.

Böylece;

$$\lim_{\vartheta\to+\infty}\int_\Omega u_t^\vartheta(x,t)\phi(x)dx=\int_\Omega u_t(x,t)\phi(x)dx$$

olur.

$\vartheta \to +\infty$ için (4.1.1.11) denkleminden,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\int_\Omega u_t(x,t)\phi(x)dx + \int_\Omega A^m u(x,t)A^m\phi(x)dx \\ & -\int_\Omega\int_0^t g(t-s)A^m u(s)A^m\phi(x)dsdx \qquad (4.1.1.12) \\ = & \int_\Omega |v|^{p-2}v\phi(x)dx \end{aligned}$$

elde edilir.

Burada Tanım 4.1.1 den $\left\{u^\vartheta\right\}$ dizisinin u limiti, (4.1.1.1) probleminin zayıf bir çözümüdür. Yani, hemen hemen $\forall t \in [0,T]$ dır. Şimdi (4.1.1.1) probleminin çözümünün w_1 ve w_2 olduğunu gösterelim.

$$w = w_1 - w_2$$

olsun.

Böylece w ,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|w_t\|^2 + \frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\|A^m w(t)\|^2 + \frac{1}{2}(g\diamond A^m w)(t) \\ & -\int_0^t\left[\frac{1}{2}(g'\diamond A^m w)(s) - \frac{1}{2}g(s)\|A^m w\|^2\right]ds \qquad (4.1.1.13) \\ = & \ 0 \end{aligned}$$

denklemi sağlanır.

(A1) ve (A2) durumlarının yardımıyla,

$$\frac{1}{2}\|w_t\|^2 + \frac{1}{2}\beta\|A^m w(t)\|^2 \le 0 \qquad (4.1.1.14)$$

yazılabilir.

Daha sonra (4.1.1.1) çözümünün tekliğini sağlayan (4.1.1.14) eşitsizliğinde $w \equiv 0$ yazabiliriz. Böylece teorem ispatlanır.

Teorem 4.1.1.2. (Lokal Varlık). $(u_0,u_1) \in (H_0^m(\Omega)\cap H^{2m}(\Omega)\times H_0^m(\Omega)$ ve (A1) ve (A3) varsayımları sağlansın. Bu durumda $T>0$ için (4.1.1) problemini

sağlayan bir tek $u(t)$, lokal çözümü vardır ve

$$\begin{cases} u \in C([0,T]\,; H_0^m(\Omega)) \\ u_t \in C([0,T]\,; L^2(\Omega)) \end{cases}$$

dır.

İspat. $T>0$ için (4.1.1) denkleminin lokal çözümünün varlığını ispatlamak için, (4.1.1) denkleminin başlangıç koşullarını sağlayan bütün w fonksiyonlarını içeren bir $X_{R,T}$ fonksiyon sınıfını kullanacağız. Yani;

$$X_{R,T} = \left\{ w \in W : \|w(t)\|_w \leq R^2, t \in [0,T] \right\}$$

olsun

$$\|w(t)\|_w = \max_{0\leq\, t\, \leq T} (\frac{1}{2}\|w_t\|^2 + \beta \|A^m w(t)\|^2)$$

dır. $X_{R,T}$, $d(w_1,w_2) = \|w_1 - w_2\|_w$ normuna sahip bir tam metrik uzaydır. Sonra ϕ nin bir lineer olmayan dönüşümünü tanımlayacağız.

$v \in X_{R,T}$ için (4.1.1.1) denkleminin tekil çözümü $u = \phi v$ dır. $T>0$ ve $R>0$ için ϕ nin $X_{R,T}$ den kendisine doğrusal olmayan bir daralma (büzülme) dönüşümü olduğunu göstereceğiz. $t \in [0,T]$ için $V \in X_{R,T}$ ele alalım. (A1) , (A3) varsayımları ve (4.1.5) denkleminin yardımıyla,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\beta\|A^m u\|^2 &\leq \frac{1}{2}\left(\|u_1\|^2 + \|A^m u_0\|^2\right) + \int_0^t \int_\Omega |v|^{p-1}|u_t|\,dxds \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\|u_1\|^2 + \|A^m u_0\|^2\right) \\ &\quad + \int_0^t \|u_t(s)\|\,.\,\|A^m v(s)\|^{p-1}\,ds \\ &\leq \Pi(u_0,u_1,R,T) + \frac{1}{2}\int_0^t \|u_t(s)\|^2\,ds \end{aligned} \tag{4.1.1.15}$$

eşitliği yazılabilir. Burada;

$$\Pi(u_0,u_1,R,T) = \frac{1}{2}\left(\|u_1\|^2 + \|A^m u_0\|^2\right) + 2^{p-2}TR^{2(p-1)}$$

dır. Bu eşitliği, Hölder eşitsizliği, Lemma 4.1.1.1 ve Young eşitsizliğini kullanarak

bulduk. Sonuç olarak,

$$\|u\|_w \leq \Pi(u_0,u_1,R,T) + \frac{1}{2}\int_0^t \|u(s)\|_w \, ds \tag{4.1.1.16}$$

olup, (4.1.1.16) ve Gronwall eşitsizliğinden

$$\|u\|_w \leq \Pi(u_0,u_1,R,T)e^{\frac{T}{2}} \tag{4.1.1.17}$$

yazılır. R yi yeterince büyük, T yi yeterince küçük seçersek,

$$\Pi(u_0,u_1,R,T)e^{\frac{T}{2}} \leq R^2$$

olur.

(4.1.1.17) de $u \in X_{R,T}$ olduğunu görüyoruz. Bu da, ϕ nin $X_{R,T} \to X_{R,T}$ dönüşümü olduğunu gösterir. Şimdi, $X_{R,T} \to X_{R,T}$ ye ϕ nin daralma dönüşümü olduğunu göstereceğiz. (4.1.1.1) probleminin çözümü, v_1, $v_2 \in X_{R,T}$ için $u_1 = \phi v_1$, $u_2 = \phi v_2$ olsun.

$$\begin{cases} U = u_1 - u_2 \\ V = v_1 - v_2 \end{cases}$$

şeklinde ele alalım, sonra U,

$$\begin{cases} U_{tt} + (-\Delta)^m U - \int_0^t g(t-s)\,(-\Delta)^m U(s)ds = \left|v^\vartheta\right|^{p-2} v^\vartheta - \left|v^v\right|^{p-2} v^v, \\ U(x,0) = U_t(x,0) = 0, \\ \frac{\partial^i U}{\partial v^i} = 0, \ i = 0,1,2,...,m-1 \end{cases} \tag{4.1.1.18}$$

sistemini sağlar.

(4.1.1.18) denklemini U_t ile çarpıp $\Omega \times [0,t]$ üzerinde integralini alırsak;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|U_t\|^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\|A^m U(t)\|^2 + \frac{1}{2}(g \diamond A^m U)(t) \\ & - \int_0^t \left[\frac{1}{2}(g' \diamond A^m U)(s) - \frac{1}{2}g(s)\|A^m U\|^2\right] ds \\ = & \int_0^t \int_\Omega \left(\left|v^\vartheta\right|^{p-2} v^\vartheta - |v^v|^{p-2} v^v\right) U_t(x,s)dxds \end{aligned} \tag{4.1.1.19}$$

bulunur. $t \in [0,T]$ için , (A1)-(A3), (4.1.1.18), (4.1.1.19) ve Young eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|U_t\|^2 + \frac{1}{2}\beta\|A^m U\|^2 \\ \leq\ & C_3 \int_0^t \|U_t(s)\|\,\|A^m V(s)\| \left[\|A^m v_1(s)\|^{p-2} + \|A^m v_2(s)\|^{p-2}\right] ds \\ \leq\ & 2C_3 R^{p-2} \int_0^t \|U_t(s)\|\,\|A^m V(s)\|\, ds \\ \leq\ & C_3 R^{p-2} \int_0^t \|A^m V(s)\|^2 ds + C_3 R^{p-2} \int_0^t \|U_t(s)\|^2 ds \end{aligned} \tag{4.1.1.20}$$

dır. Burada

$$\left\{ \|U\|_W \leq C_3 R^{p-2} T \|V\|_W + C_3 R^{p-2} \int_0^t \|U(s)\|_W \ ds \right. \tag{4.1.1.21}$$

sağlanır. Böylece, (4.1.1.21) denklemi ve Gronwall eşitsizliğinden

$$\|U\|_W \leq C_3 R^{p-2} T e^{C_3 R^{p-2} T} \|v\|_W$$

olur.

$\|U\|_W \leq C_3 R^{p-2} T e^{C_3 R^{p-2} T} < 1$ iken T yi yeterince küçük seçtiğimizde, ϕ bir daralma dönüşümüdür. Böylece Banach sabit nokta teoremine göre, lokal varlığın sonucunu elde ederiz. Bu, Teorem 4.1.1.2 nin ispatını tamamlar.

4.1.2. Global Zayıf Çözümler

Bulduğumuz ilk sonuç (4.1.1) probleminin global zayıf çözümünün varlığını gösterir.

Teorem 4.1.2.1. (A1) ve (A3) durumlarının sağlandığını kabul edelim. Eğer $u_0 \in W$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ ve başlangıç enerjisi $E(0) < d$ ise bu durumda, (4.1.1) denkleminin $u(x,t)$ gibi bir global zayıf çözümü vardır. Öyle ki;

$$\begin{cases} u(x,t) \in L^\infty([0,+\infty); H_0^m(\Omega) \cap H_0^{2m}(\Omega)) \\ u_t(x,t) \in L^\infty([0,+\infty); H_0^m(\Omega) \cap L^2(\Omega)) \\ u_{tt}(x,t) \in L^\infty([0,+\infty); L^2(\Omega)) \end{cases}$$

dır.

İspat. $(-\Delta)^m$ ile gösterilen poly-harmonik operatörünün öz fonksiyonları

$\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$ olmak üzere Drichlet sınır koşulları;

$$\begin{cases} (-\Delta)^m w_i = \lambda_i w_i \\ w_i \mid_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

şeklindedır. $L^2(\Omega)$ de tam bir ortonormal sistem oluşturan $H_0^m(\Omega) \cap H_0^{2m}(\Omega)$ uzayında bir $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$ tabanını seçelim. V_k nın, $k \in N$ olmak üzere, $\{w_1, w_2, ..., w_k\}$ tarafından üretilen bir $H_0^m(\Omega) \cap H_0^{2m}(\Omega)$ alt uzayı olduğunu varsayalım. $u_k(t) = \sum_{i=1}^{k} g_{ik}(t)\, w_i$ yaklaşık çözümlerini sağlayan Cauchy problemini inceleyeceğiz.

$$\begin{aligned} & (u_k''(t), w_i) + \left((-\Delta)^m u_k(t), w_i\right) - \int_0^t g(t-s)\left((-\Delta)^m u_k(s), w_i\right) ds \\ = \; & \left(|u_k(t)|^{p-2} u_k(t), w_i\right), \quad i = 0, 1, 2, ..., k, \end{aligned} \tag{4.1.2.1}$$

$$u_k(0) = u_{0k} = \sum_{i=1}^{k} (u_0, w_i)\, w_i \to u_0,\ H_0^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega), \quad k \to \infty, \tag{4.1.2.2}$$

$$u_k'(0) = u_{1k} = \sum_{i=1}^{k} (u_1, w_i)\, w_i \to u_1,\ H_0^m(\Omega) \cap L^2(\Omega), \quad k \to \infty \tag{4.1.2.3}$$

şeklindedir. Adi diferansiyel denklemlerde, Picard iterasyon metoduyla (4.1.2.1) - (4.1.2.3) denklemlerini çözebiliriz. Böylece bazı $T_k > 0$ için $[0, T_k]$ aralığında bir çözüm vardır ve aşağıdaki ön kestrimini kullanarak herhangi bir $T > 0$ için, $[0, T]$ aralığını genişletebiliriz.

(4.1.2.1) denklemini $g_{ik}'(t)$ ile çarpıp i üzerinde 1 den k ya kadar toplayıp ve sonra $[0, t]$ üzerinde integralini alırsak,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left\|u_k'(t)\right\|^2 + J\left(u_k(t)\right) &= \frac{1}{2}\left\|u_{1k}\right\|^2 + J\left(u_{0k}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t (g' \diamond A^m u_k)(s) ds \\ &- \frac{1}{2}\int_0^t g(s)\left\|A^m u_k(s)\right\|^2 ds \end{aligned} \tag{4.1.2.4}$$

denklemi elde edilir. (4.1.2.4) eşitliğini kullanarak, $\forall t \in [0, +\infty)$ için

$$u_k(t) \in w \tag{4.1.2.5}$$

yazılır. (4.1.2.5) ifadesinin yanlış olduğunu ve t_1 in $u_k(t_1) \notin w$ için en küçük değer

olduğunu kabul edelim. Daha sonra $u_k(t)$ sürekli olduğundan, $u_k \in \partial w$ olduğunu görüyoruz. w nin tanımı ve $J(u(t))$, $K(u(t))$ nin t deki sürekliliğinden;

$$J(u_k(t_1)) = d \tag{4.1.2.6}$$

veya

$$K(u_k(t_1)) = 0 \tag{4.1.2.7}$$

yazılır. $E(0) < d$ iken (A1)-(A2) varsayımları ve (4.1.1.4) denklemi yardımıyla;

$$\begin{aligned} J(u_k(t_1)) &\leq \frac{1}{2}\|u_{1k}\|^2 + J(u_{0k}) + \frac{1}{2}(g' \diamond A^m u_k)(t_1) - \frac{1}{2}g(t_1)\|A^m u_k\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\|u_{1k}\|^2 + J(u_{0k}) \\ &= E(u_k(0)) < d \end{aligned} \tag{4.1.2.8}$$

elde edilir. Böylece bu durum (4.1.2.6) denklemini imkansız kılar. Farzedelim ki (4.1.2.7) denklemi sağlansın. Bu durumda

$$\frac{d}{d\lambda}J(u_k(t_1)) \leq \lambda\left(1-\lambda^{p-2}\right)\left(\left(1-\int_0^{t_1} g(s)ds\right)\|A^m u_k(t_1)\|^2 + (g \diamond A^m u_k)(t_1)\right)$$

elde edilir.

Böylece

$$\sup_{\lambda \geq 0} J(u_k(t_1)) = J(\lambda u_k(t_1))\,|_{\lambda=1} = J(u_k(t_1)) < d$$

sağlanır. Bu, d nin tanımına ters düşmektedir. Sonuç olarak bu durumda (4.1.2.7) eşitliği de imkansızdır.

(A1)-(A2) durumları ve (4.1.2.2) denklemi ve (4.1.2.5) ifadesi yardımıyla

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|u_k'(t)\|^2 + \frac{p-2}{2p}\left(\beta\|A^m u_k(t)\|^2 + (g \diamond A^m u_k)(t)\right) \\ \leq\ & \frac{1}{2}\|u_{1k}'(t)\|^2 + J(u_k(t)) \\ \leq\ & \frac{1}{2}\|u_{1k}\|^2 + J(u_{0k}) \leq C_1 \end{aligned} \tag{4.1.2.9}$$

yazılabilir. (4.1.2.9) daki denklemde,

$$\begin{cases} \{u_k(t)\};\ L^{\infty}([0,+\infty);H_0^m(\Omega)) \text{ uzayında düzgün sınırlı,} \\ \{u_k'(t)\};\ L^{\infty}([0,+\infty);L^2(\Omega)) \text{ uzayında düzgün sınırlı} \end{cases} \tag{4.1.2.10}$$

dır. Daha fazla ön kestirimler elde etmek için (4.1.2.1) denkleminin t 'ye göre türevini alalım.

$$\begin{aligned} & (u_k'''(t),w_i)+(A^m u_k'(t),A^m w_i)-\int_0^t g'(t-s)\,(A^m u_k(s),A^m w_i)\,ds \\ & -g(0)\,(A^m u_k'(t),A^m w_i)-(p-1)\left(|u_k(t)|^{p-2}u_k'(t),w_i\right) \\ = \ & 0 \end{aligned} \tag{4.1.2.11}$$

elde ederiz. (4.1.2.11) denkleminin her iki tarafını $g_{ik}''(t)$ ile çarpıp, i üzerinde 1 den k ya kadar toplarsak,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u_k''(t)\|^2+\frac{1}{2}\|A^m u_k'(t)\|^2\right)-\frac{d}{dt}\int_0^t g'(t-s)\,(A^m(s),A^m u_k'(t))\,ds \\ & +\int_0^t g''(t-s)\,(A^m u_k(s),A^m u_k'(t))\,ds+g'(0)\,(A^m u_k(t),A^m u_k'(t)) \\ & -g'(0)\frac{d}{dt}\,(A^m u_k(t),A^m u_k'(t))+g(0)\,(A^m u_k'(t),A^m u_k'(t)) \\ & -(p-1)\left(|u_k(t)|^{p-2}u_k'(t),u_k''(t)\right) \\ = \ & 0 \end{aligned} \tag{4.1.2.12}$$

denklemi elde ederiz.

Hölder eşitsizliği, Lemma 4.1.1, Young eşitsizliği ve (4.1.2.9) eşitsizliği yardımıyla,

$$\begin{aligned} & \left|(p-1)\left(|u_k(t)|^{p-2}u_k'(t),u_k''(t)\right)\right| \\ \leq \ & (p-1)\,\|u_k(t)\|_{2(p-1)}^{p-2}\,\|u_k'(t)\|_{2(p-1)}\,\|u_k''(t)\| \\ \leq \ & (p-1)\,B^{p-1}\,\|A^m u_k(t)\|^{p-2}\,\|A^m u_k'(t)\|\,\|u_k''(t)\| \\ \leq \ & C_2\,\|A^m u_k'(t)\|\,\|u_k''(t)\| \\ \leq \ & C(\varepsilon)\,\|A^m u_k'(t)\|^2+\varepsilon\,\|u_k''(t)\|^2 \end{aligned} \tag{4.1.2.13}$$

yazılır. Burada C_2 sabitinin değeri;

$$C_2 = (p-1)\, B \left(\frac{2pB^2 C_1}{(p-2)\,\beta} \right)^{\frac{P-2}{2}}$$

dir.

(4.1.2.13) denklemini (4.1.2.12) eşitsizliğinde yerine yazıp, keyfi T sabitiyle birlikte $t \in [0,T]$ değerleri için $[0,t]$ aralığında integral alırsak,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\left\|u_k^{''}(t)\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|A^m u_k^{'}(t)\right\|^2 \\
\leq\ & \frac{1}{2}\left\|u_k^{''}(0)\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|A^m u_k^{'}(0)\right\|^2 - g(0)\left(A^m u_k(0), A^m u_k^{'}(0)\right) \\
& + \int_0^t g^{'}(t-s)\left(A^m(s), A^m u_k^{'}(t)ds\right) \\
& - \int_0^t \int_0^\zeta g^{''}(\zeta - s)\left(A^m u_k(s), A^m u_k^{'}(\zeta)dsd\zeta\right) \\
& - g^{'}(0)\int_0^t \left(A^m u_k(s), A^m u_k^{'}(s)ds\right) \\
& + g(0)\left(A^m u_k(t), A^m u_k^{'}(t)\right) - g(0)\int_0^t \left\|A^m u_k^{'}(s)\right\|^2 ds \\
& + C(\varepsilon)\int_0^t \left\|A^m u_k^{'}(s)\right\|^2 ds + \varepsilon \int_0^t \left\|u_k^{''}(s)\right\|^2 ds
\end{aligned} \tag{4.1.2.14}$$

elde edilir.

(4.1.2.2) ve (4.1.2.3) denklemlerinden,

$$\left| \frac{1}{2}\left\|A^m u_k^{'}(0)\right\|^2 - g(0)\left(A^m u_k(0), A^m u_k^{'}(0)\right) \right| \leq C_3 \tag{4.1.2.15}$$

bulunur. Burada C_3 , k dan bağımsız pozitif bir sabittir. (4.1.2.1) denkleminin her iki tarafını da $g_{ik}^{''}(t)$ ile çarpıp daha sonra $t = 0$ iken i üzerinde 1'den k ya kadar toplarsak, aşağıdaki denklemi buluruz.

$$\left\|u_k''(0)\right\|^2 + A^m u_k(0), u_k''(0) - \left(|u_k(0)|^{p-2}\, u_k(0), u_k''(t)\right) = 0 \tag{4.1.2.16}$$

(A3) durumunu kabul edelim. Young eşitsizliği, (4.1.2.2) ve (4.1.2.3) den

$$\left\|u_k''(0)\right\| \leq C_4 \tag{4.1.2.17}$$

yazabiliriz.

C_4 , k dan bağımsız pozitif bir sabittir. Young eşitsizliği, (4.1.2.9) denklemi ve (A2) den

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t g'(t-s)\left(A^m u_k(s), A^m u_k'(t)\right)ds\right| &\leq \int_\Omega \left|A^m u_k'(t)\int_0^t g'(t-s)A^m u_k(s)ds\right|dx \\ &\leq \varepsilon\left\|A^m u_k'(s)\right\|^2 \\ &\quad +C(\varepsilon)\int_\Omega\left(\int_0^t g'(t-s)A^m u_k(s)ds\right)^2 dx \\ &\leq \varepsilon\left\|A^m u_k'(t)\right\|^2 + C(\varepsilon)\eta_1^2\int_0^t\left\|A^m u_k(s)\right\|^2 ds \\ &\leq \varepsilon\left\|A^m u_k'(s)\right\|^2 + C_5 \qquad (4.1.2.18)\end{aligned}$$

bulunur.

Burada $C_5 = \frac{2\eta_1^2 C_1 pTC(\varepsilon)}{(p-2)\beta}$ dir.

$$\begin{aligned}&\left|-\int_0^t\int_\Omega^\zeta g''(t-s)\left(A^m u_k(s), A^m u_k'(\zeta)\right)dsd\zeta\right| \\ \leq\ &\int_0^t\left|\int_\Omega A^m u_k'(\zeta)\int_0^\zeta g''(\zeta-s)A^m u_k(s)dsdx\right|d\zeta \\ \leq\ &\int_0^t\left\|A^m u_k'(s)\right\|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega\left(\int_0^\zeta g''(\zeta-s)A^m u_k(s)ds\right)^2 dxd\zeta \\ \leq\ &\frac{1}{2}\int_0^t\left\|A^m u_k'(s)\right\|^2 ds + \frac{T\eta_2^2}{2}\int_0^t\left\|A^m u_k(s)\right\|ds \\ \leq\ &\frac{1}{2}\int_0^t\left\|A^m u_k'(s)\right\|^2 ds + C_6 \qquad (4.1.2.19)\end{aligned}$$

Burada $C_6 = \frac{2pC_1\eta_2^2T^2}{(p-2)\beta}$ dir.

$$\begin{aligned}&\left|-g'(0)\int_0^t\left(A^m u_k(s), A^m u_k'(s)\right)ds\right| \\ \leq\ &\eta_1\int_0^t\left(\left\|A^m u_k(s)\right\|\left\|A^m u_k'(s)\right\|\right)ds \\ \leq\ &\frac{\eta_1}{2}\int_0^t\left\|A^m u_k'(s)\right\|^2 ds + \frac{\eta_1}{2}\int_0^t\left\|A^m u_k(s)\right\|^2 ds \\ \leq\ &\frac{\eta_1}{2}\int_0^t\left\|A^m u_k'(s)\right\|^2 ds + C_7 \qquad (4.1.2.20)\end{aligned}$$

Burada $C_7 = \frac{pC_1\eta_1 T}{(p-2)\beta}$ dir.

$$|g(0)(A^m u_k(t), A^m u_k'(t))| \leq \varepsilon \|A^m u_k'(t)\|^2 + C_8 \tag{4.1.2.21}$$

Burada $C_8 = \frac{2pC_1 C(\varepsilon)}{(p-2)\beta}$ dir.

$\varepsilon > 0$ ve ε yeterince küçük seçilirse, (4.1.2.14)-(4.1.2.15) ve (4.1.2.17)-(4.1.2.21) denklemleri yardımıyla;

$$\|u_k''(t)\|^2 + \|A^m u_k'(t)\|^2 \leq C_9 \int_0^t \left(\|u_k''(s)\|^2 + \|A^m u_k'(s)\|^2 \right) ds + C_{10} \tag{4.1.2.22}$$

bulunur.

(4.1.2.22) denklemi ve Gronwall lemması yardımıyla $\forall t \in [0,T]$ için

$$\|u_k''(t)\|^2 + \|A^m u_k'(t)\|^2 \leq C_{11} \tag{4.1.2.23}$$

yazılabilir. C_{11}, k 'dan bağımsız pozitif bir sabittir. (4.1.2.23) deki türev terimleri,

$$\begin{cases} \{u_k'(t)\};\ L^\infty([0,+\infty); H_0^m(\Omega)) \text{ uzayında düzgün sınırlı,} \\ \{u_k''(t)\};\ L^\infty([0,+\infty); L^2(\Omega)) \text{ uzayında düzgün sınırlı} \end{cases} \tag{4.1.2.24}$$

şeklindedir. (4.1.2.1) eşitsizliğinin her iki tarafını $\lambda_i g_{ik}'(t)$ ile çarparak, i üzerinde 1 'den k' ya kadar toplayıp ve daha sonra $\forall t \in [0,T]$ için $[0,t]$ aralığında integralini alırsak,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left[\|A^m u_k'(t)\|^2 + \left(1 - \int_0^t g(s)ds\right) \|\Delta^m u_k(t)\|^2 + (g \diamond \Delta^m u_k)(t) \right] \\ = \ & \|A^m u_{1k}\|^2 + \|\Delta^m u_{0k}\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t (g' \diamond \Delta^m u_k)(s)ds \\ & -\frac{1}{2}\int_0^t g(s) \|\Delta^m u_k(s)\|^2 ds \\ & + \int_0^t \left(A^m \left(|u_k(s)|^{p-2} u_k(s) \right), A^m u_k'(s) \right) ds \end{aligned} \tag{4.1.2.25}$$

eşitisizliğini elde ederiz.

Young eşitsizliği, (A1)- (A2) varsayımları, (4.1.2.2), (4.1.2.3) ve (4.1.2.25) den,

$$\begin{aligned} & \left\|A^m u_k'(t)\right\|^2 + \beta \left\|\Delta^m u_k(t)\right\|^2 + (g \diamond \Delta^m u_k)(t) \\ \leq\ & C_{12} + \int_0^t \left(\left\|A^m u_k(s)\right\|^{p-1} \left\|A^m u_k'(s)\right\|\right) ds \\ \leq\ & C_{12} + \frac{1}{2}\int_0^t \left\|A^m u_k(s)\right\|^{2(p-1)} ds + \frac{1}{2}\int_0^t \left\|A^m u_k'(s)\right\|^2 ds \end{aligned} \tag{4.1.2.26}$$

yazılır. (4.1.2.9) ve (4.1.2.23) ten

$$\left\|A^m u_k'(t)\right\|^2 + \beta \left\|\Delta^m u_k(t)\right\|^2 + (g \diamond \Delta^m u_k)(t) \leq C_{13} \tag{4.1.2.27}$$

eşitsizliği yazılır.

Burada $C_{13} = C_{12} + \frac{1}{2}C_{11}T + \frac{T}{2}\left(\frac{2pC_1}{p-2}\right)^{p-1}$, k 'dan bağımsız pozitif bir sabittir. (4.1.2.27) den

$$\{u_k(t)\}; \qquad L^\infty\left([0,+\infty); H^{2m}(\Omega)\right) \text{ düzgün sınırlıdır.} \tag{4.1.2.28}$$

yazılır. Ayrıca, (A3) durumu, Lemma 4.1.1.1 ve 4.1.2.10 dan,

$$\left\{|u_k|^{p-2} u_k\right\} \ ; L^\infty\left([0,+\infty); L^2(\Omega)\right) \text{ da düzgün sınırlı} \tag{4.1.2.29}$$

olduğu görülür.

Şimdi, (4.1.2.10), (4.1.2.24), (4.1.2.28) ve (4.1.2.29) 'dan, $\{u_k\}$ tarafından gösterilmiş olan bir $\{u_k\}$ alt dizisinin var olduğunu kolayca görebiliriz. Öyle ki,

$$\begin{cases} u_k \to u \ ; & L^\infty\left([0,T); H_0^m(\Omega) \cap H_0^{2m}(\Omega)\right) \text{ uzayında zayıf yıldızıl yakınsak,} \\ u_k' \to u' \ ; & L^\infty\left([0,T); L^2(\Omega)\right) \text{ uzayında zayıf yıldızıl yakınsak,} \\ u_k' \to u' \ ; & L^\infty\left([0,T); H_0^m(\Omega)\right) \text{ uzayında zayıf yıldızıl yakınsak,} \\ u_k'' \to u'' & ; L^\infty\left([0,T); L^2(\Omega)\right) \text{ uzayında yakınsak,} \\ |u_k|^{p-2} u_k \to X & ; L^\infty\left([0,T); L^2(\Omega)\right) \text{ uzayında yakınsak} \end{cases} \tag{4.1.2.30}$$

dır.

Aubin – Lions kompaktlık lemmasından [Lions 1969, Zheng 2004] ve (4.1.2.30)

dan,

$$\begin{cases} u_k \to u; \quad C\left([0,T)\,; H_0^m(\Omega)\right) \text{ uzayında güçlü yakınsak,} \\ u_k' \to u'; \quad C\left([0,T)\,; L^2(\Omega)\right) \text{ uzayında güçlü yakınsak} \end{cases} \tag{4.1.2.31}$$

ve

$$[0,T] \times \Omega \text{ da hemen heryerde } u_k \to u \tag{4.1.2.32}$$

sonucunu çıkarabiliriz. [Wu and Tsai 2006, Strauss 1966] daki Lemma 1.3 ve (4.1.2.32) 'den,

$$L^{\infty}\left([0,T)\,; L^2(\Omega)\right) \text{ da } |u_k|^{p-2} u_k \to |u|^{p-2} u \tag{4.1.2.33}$$

olur. (4.1.2.30) ve (4.1.2.33) deki son formüller ile

$$\chi = |u|^{p-2} u \tag{4.1.2.34}$$

elde ederiz.

(4.1.2.1) de $k \to \infty$ için limit alınırsa,

$$(u'', w_i) + ((-\Delta)^m u, w_i) - \int_0^t g(t-s)\left((-\Delta)^m u(s), w_i\right) ds = \left(|u|^{p-2} u, w_i\right), i = 1, 2, ... \tag{4.1.2.35}$$

elde ederiz.

Çalıştığımız uzayda, $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$ bir temel olduğundan dolayı u nun (4.1.1) denklemini sağladığı sonucunu çıkarırız. [Wu -Tsai 2006] da Lemma 3.1.3 den ve (4.1.2.30) den sırasıyla $B = H_0^m(\Omega)$ ve $B = L^2(\Omega)$,

$$\begin{cases} H_0^m(\Omega) \text{ da } u_k(0) \to u(0) \\ L^2(\Omega) \text{ da } u_k'(0) \to u'(0) \end{cases} \tag{4.1.2.36}$$

çıkarımı yapılabilir.

(4.1.2.2), (4.1.2.3) ve (4.1.2.36) dan

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \\ u'(0) = u_1 \end{cases}$$

yazılır. Böylece, 4.1 Teorem i tanımlanmış olur.

4.2. Kirchhoff Tipli Dalga Denklem Sistemi

4.2.1. Giriş

Bu kısımda

$$\begin{cases} u_{tt} + M\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)Au + \int_0^t g(t-s)Au(s)ds + |u_t|^{p-1}u_t = f_1(u,v), \\ v_{tt} + M\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)Av + \int_0^t h(t-s)Av(s)ds + |v_t|^{q-1}v_t = f_2(u,v), \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \\ v(x,0) = v_0(x),\ v_t(x,0) = v_1(x), \\ \frac{\partial^i u}{\partial v^i} = \frac{\partial^i v}{\partial v^i} = 0,\ i = 0,1,2,...,m-1, \end{cases} \tag{4.2.1.1}$$

yüksek mertebeden Kirchhoff tipli dalga denklem sistemi çalışılacaktır. Burada $A = (-\Delta)^m$ ve $p, q \geq 1$ ve Ω , R^n de $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölge ve

$$M(s) = m_0 + \alpha s^\gamma$$

dır. Ayrıca $m_0 \geq 0$, $\alpha \geq 0$, $m_0 + \alpha > 0$, $\gamma > 0$ ve $g, h : R^+ \to R^+$, $f_i(.,.) : R^2 \to R$, $i = 1, 2$ olsun.

(4.2.1.1) denkleminin çözümü için kullanacağımız bazı lemmaları yazalım. Standart Lebesque uzayı $L^p(\Omega)$, Sobolev uzayı $H_0^m(\Omega)$ ve $2 \leq p \leq \frac{2(n-m)}{n-2m}$ $(n > 2m)$ veya $2 \leq p$ $(n \leq 2m)$ için $H_0^m \hookrightarrow L^p(\Omega)$ dır. Yani

$$\|u\|_p \leq C_* \left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|$$

dır.

Şimdi $M(s)$, g ve h için bazı varsayımları verelim:

(A1) $M(s)$ negatif olmayan bir fonksiyon ve $s \geq 0$ ise

$$\begin{cases} M(s) > 0, \\ \alpha \geq 0,\ \gamma > 0, \\ M(s) = m_0 + \alpha s^\gamma \end{cases}$$

olsun.

(A2) g ve h fonksiyonu C^1 de tanımlı $s \geq 0$ ise

$$\begin{cases} g(s) \geq 0,\ m_0 - \int_0^\infty g(s)ds = \ell > 0,\ g'(s) \leq 0 \\ h(s) \geq 0,\ m_0 - \int_0^\infty h(s)ds = k > 0,\ h'(s) \leq 0 \end{cases}$$

olsun.

Burada $f_1(u,v)$ ve $f_2(u,v)$ fonksiyonları $a, b > 0$ için

$$\begin{cases} f_1(u,v) = (r+1)(a\,|u+v|^{r-1}(u+v) + b\,|u|^{\frac{r-3}{2}}|v|^{\frac{r+1}{2}}u, \\ f_2(u,v) = (r+1)(a\,|u+v|^{r-1}(u+v) + b\,|v|^{\frac{r-3}{2}}|u|^{\frac{r+1}{2}}v \end{cases} \tag{4.2.1.3}$$

olsun. Buradan $\forall (u,v) \in R^2$ olmak üzere

$$uf_1(u,v) + vf_2(u,v) = (r+1)F(u,v)$$

yazılabilir. Burada

$$F(u,v) = a\,|u+v|^{r+1} + 2b\,|uv|^{\frac{r+1}{2}} \tag{4.2.1.4}$$

dır.

(A3) r aşağıdaki şartları sağlasın

$$\begin{cases} \text{Eğer}\ \ n = 1,2\ \ \text{ise}\ \ \ r > 1, \\ \text{Eğer}\ \ n = 3\ \text{ise}\ \ 1 < r \leq 3. \end{cases} \tag{4.2.1.5}$$

Lemma 4.2.1.1. c_0 ve c_1 pozitif sabitleri için $\forall (u,v) \in R^2$ olmak üzere

$$C_0(|u|^{r+1} + |v|^{r+1}) \leq F(u,v) \leq C_1(|u|^{r+1} + |v|^{r+1})$$

eşitsizliği sağlanır (Messaoudi ve Houari 2010).

Lemma 4.2.1.2. (4.2.1.5) sağlansın. $\forall (u,v) \in H_0^m(\Omega) \times H_0^m(\Omega)$ için

$$\|u+v\|_{r+1}^{r+1} + 2\,\|uv\|_{\frac{r+1}{2}}^{\frac{r+1}{2}} \leq \tau \left(\ell \left\| A^{\frac{1}{2}}u \right\|^2 + k \left\| A^{\frac{1}{2}}v \right\|^2 \right)^{\frac{r+1}{2}}$$

dır. Burada $\tau > 0$ dır (Messaoudi ve Houari 2010).

Lemma 4.2.1.3. $g \in C^1$ ve $\phi \in H_0^1(0,T)$ için

$$-2\int_0^t \int_\Omega g(t-s)\phi\phi_t dxds = \frac{d}{dt}((g \diamond \phi)(t) - \int_0^t g(s)ds \|\phi\|^2) + g(t)\|\phi\|^2 - (g' \diamond \phi)(t)$$

olsun burada

$$(g \diamond \phi)(t) = \int_0^t g(t-s) \int_\Omega |\phi(s) - \phi(t)|^2 dxds$$

dır (Messaoudi ve Houari 2010).

Şimdi lokal varlık teoremini ifade edelim. İspat için [Messaoudi and Houari 2010, Messaoudi and Tatar 2007, Miao 1995, Nakao and Kuwahara 1987, Strauss 1966, Ye 2015c] deki çalışmalardan faydalanılabilir

Teorem 4.2.1.1

(4.2.1.1) başlangıç koşullarında ve (A1)-(A3) varsayımlarıyla (u,v) çözümleri için; $T > 0$ ve

$$\begin{cases} u, v \in C([0,T], H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)) \\ u_t \in C([0,T], H_0^m(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)) \\ v_t \in C([0,T], H_0^m(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega)) \end{cases}$$

dır.

4.2.2. Global Varlık ve Enerji Azalması

Aşağıdaki fonksiyonelleri tanımlayalım:

$$\begin{aligned} I_1(t) \equiv\ & I_1(u(t),v(t)) = (m_0 - \int_0^t g(s)ds) \left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 \\ & +(m_0 - \int_0^t h(s)ds) \left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2 + (g \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) \\ & +(h \diamond A^{\frac{1}{2}}v)(t) - (r+1)\int_\Omega F(u,v)\ dx, \end{aligned} \tag{4.2.2.1}$$

$$\begin{aligned} I_2(t) \equiv\ & I_2(u(t),v(t)) = (m_0 - \int_0^t g(s)ds) \left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 \\ & +(m_0 - \int_0^t h(s)ds) \left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2 + \alpha\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2\right)^{\gamma+1} \\ & +(g \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) + (h \diamond A^{\frac{1}{2}}v)(t) - (r+1)\int_\Omega F(u,v)\ dx \end{aligned} \tag{4.2.2.2}$$

ve

$$\begin{aligned} J(t) \equiv\ & J(u(t),v(t)) = \frac{1}{2}(m_0 - \int_0^t g(s)ds)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 \\ & + \frac{1}{2}(m_0 - \int_0^t h(s)ds)\left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2 \\ & + \frac{\alpha}{2(\gamma+1)}\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)^{\gamma+1} \\ & + \frac{1}{2}(g \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) + \frac{1}{2}(h \diamond A^{\frac{1}{2}}v)(t) - \int_\Omega F(u,v)\ dx. \end{aligned} \tag{4.2.2.3}$$

Burada enerji fonksiyoneli

$$E(t) \equiv E(u(t),v(t)) = \frac{1}{2}(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2) + J(t) \tag{4.2.2.4}$$

dır.

Şimdi (4.2.2.4) enerji fonksiyonelinin artmayan olduğunu gösterelim.

Lemma 4.2.2.1. (4.2.1.1) denkleminin (A1), (A2), (A3) durumlarını sağlasın. $\forall\ t \geq 0$ için

$$\begin{aligned} E'(t) =\ & -\|u_t(t)\|_{p+1}^{p+1} - \|v_t(t)\|_{q+1}^{q+1} + \int_0^t \int_\Omega g(t-s)A^{\frac{1}{2}}u(s)A^{\frac{1}{2}}u_t dxds \\ & + \int_0^t \int_\Omega h(t-s)Av(s)^{\frac{1}{2}}Av_t^{\frac{1}{2}} dxds \leq 0 \end{aligned} \tag{4.2.2.5}$$

dır.

İspat. $M(s) = m_0 + \alpha s^\gamma$ olduğundan (4.2.1.1) denklem sisteminde ilk denklemi u_t, ikinci denklemi v_t ile çarpıp integralini alırsak

$$\begin{aligned} & \int_\Omega u_{tt}u_t dx - \int_\Omega M(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2)u_t Au \\ & + \int_\Omega (\int_0^t g(t-s)Au(s)ds)u_t + \int_\Omega |u_t|^{p-1}\, u_t u_t dx \\ & + \int_\Omega v_{tt}v_t dx - \int_\Omega M(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2)v_t Av \\ & + \int_\Omega (\int_0^t h(t-s)Av(s)ds)v_t + \int_\Omega |v_t|^{q-1}\, v_t v_t dx \\ =\ & \int_\Omega \left[u_t f_1(u,v) + v_t f_2(u,v)\right] dx \end{aligned}$$

olur. Bu denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) &= -\|u_t(t)\|_{p+1}^{p+1} - \|v_t(t)\|_{q+1}^{q+1} + \int_0^t \int_\Omega g(t-s)A^{\frac{1}{2}}u(s)A^{\frac{1}{2}}u_t dxds \\ &\quad + \int_0^t \int_\Omega h(t-s)A^{\frac{1}{2}}v(s).A^{\frac{1}{2}}v_t dxds\end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 4.2.2.2. (A1), (A2), (A3) koşulları sağlansın ve (u, v), (4.2.1.1) probleminin çözümü olsun. Ayrıca $I_1(0) \geq 0$ ve

$$\alpha_1 = (r+1)\eta\left(\frac{2(r+1)}{r-1}E(0)\right)^{\frac{m-1}{2}} < 1 \tag{4.2.2.6}$$

ise bu durumda $\forall t \geq 0$ için

$$I_1(t) > 0 \tag{4.2.2.7}$$

olur.

İspat. $I_1(0) > 0$ olduğundan, süreklilikten, $t_{\max} > 0$ maksimum zamanı vardır ($t_{\max} = T$) öyle ki $t \in [0, t_{\max}]$ için $I_1(t) \geq 0$ dır.

Böylece $t \in [0, t_{\max}]$ için

$$\begin{aligned}J(t) &\geq \frac{r-1}{2(r+1)}\left[(m_0 - \int_0^t g(s)ds)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + (m_0 - \int_0^t h(s)ds)\left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right] \\ &\quad + \frac{r-1}{2(r+1)}\left(((g \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) + (h \diamond A^{\frac{1}{2}}v)(t)\right) + \frac{1}{r+1}I_1(t) \\ &\geq \frac{r-1}{2(r+1)}\left[(m_0 - \int_0^t g(s)ds)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + (m_0 - \int_0^t h(s)ds)\left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right] \\ &\quad + \frac{r-1}{2(r+1)}\left(((g \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) + (h \diamond A^{\frac{1}{2}}v)(t)\right) \\ &\geq \frac{r-1}{2(r+1)}\left(\ell\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + k\left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)\end{aligned} \tag{4.2.2.8}$$

olur. Burada

$$\begin{cases} \ell = m_0 - \int_0^t g(s)ds \\ k = m_0 - \int_0^t h(s)ds \end{cases}$$

dir. (4.2.2.8), (4.2.2.4) ve (4.2.2.5) ten

$$\begin{aligned} \ell \left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + k \left\| A^{\frac{1}{2}} v \right\|^2 &\leq \frac{2\,(r+1)}{(r-1)} J(t) \\ &\leq \frac{2\,(r+1)}{(r-1)} E(t) \\ &\leq \frac{2\,(r+1)}{(r-1)} E(0) \end{aligned} \tag{4.2.2.9}$$

olur. Lemma 4.2.1.2 ile (4.2.2.9), (4.2.2.6) eşitsizliklerini ve (A2) den, $t \in [0, t_{\max}]$ için

$$\begin{aligned} & (r+1) \int_\Omega F(u,v)\, dx \\ \leq\ & (r+1)\eta \left(\ell \left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + k \left\| A^{\frac{1}{2}} v \right\|^2 \right)^{\frac{r+1}{2}} \\ \leq\ & (r+1)\eta \left(\frac{2(r+1)}{r-1} E(0) \right)^{\frac{r-1}{2}} \left(\ell \left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + k \left\| A^{\frac{1}{2}} v \right\|^2 \right) \\ =\ & \alpha_1 (\ell \left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + k \left\| A^{\frac{1}{2}} v \right\|^2) \\ <\ & \left[\left(m_0 - \int_0^t g(s) ds \right) \left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + \left(m_0 - \int_0^t h(s) ds \right) \left\| A^{\frac{1}{2}} v \right\|^2 \right] \end{aligned} \tag{4.2.2.10}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \left(m_0 - \int_0^t g(s) ds \right) \left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + \left(m_0 - \int_0^t h(s) ds \right) \left\| A^{\frac{1}{2}} v \right\|^2 \\ &\quad + (g \diamond A^{\frac{1}{2}} u)(t) + (h \diamond A^{\frac{1}{2}} v)(t) - (r+1) \int_\Omega F(u,v)\, dx \\ &> 0 \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde devam edilir ve

$$\lim_{t \to t_{\max}} (r+1)\eta \left(\frac{2(r+1)}{r-1} E(t) \right)^{\frac{m-1}{2}} \leq \alpha_1 < 1$$

göz önünde bulundurulursa $t_{\max} = T$ olur.

Lemma 4.2.2.3. Lemma 4.2.2.2 nin varsayımları altında, $0 < \eta_1 < 1$ için

$$\begin{aligned} & (r+1)\int_\Omega F(u,v)\,dx \\ \leq\ & (1-\eta_1)\left[\left(m_0-\int_0^t g(s)ds\right)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2\right. \\ & \left.+\left(m_0-\int_0^t h(s)ds\right)\left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right] \end{aligned} \tag{4.2.2.11}$$

dır. Burada $\eta_1 = 1-\alpha_1$ dır.

İspat. (4.2.2.10) denkleminden

$$(r+1)\int_\Omega F(u,v)\,dx \leq \alpha_1\left[\ell\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + k\left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right]$$

dır. $\alpha_1 = 1-\eta_1$ yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.2.1. (A1), (A2), (A3) koşullarının sağlandığını kabul edelim. Ayrıca $u_0, v_0 \in H_0^m(\Omega)\cap H^{2m}(\Omega)$ ve $u_1, v_1 \in H_0^m(\Omega)$ fonksiyonları $I_1(0) > 0$ ve (4.2.2.6) denklemini sağlasın. Bu durumda (4.2.1.1) probleminin çözümü sınırlıdır. Ayrıca

$$m_0 > \frac{5+2\eta_1}{2\eta_1}\max\left\{\int_0^\infty g(s)ds, \int_0^\infty h(s)ds\right\} \tag{4.2.2.12}$$

ise aşağıdaki enerji kestirimleri yazılabilir: $\forall t \geq 0$ için

(i) $p = q = 1$ ise

$$E(t) \leq E(0)e^{-\varrho_1 t}$$

(ii) $\max\{p,q\} > 1$ ise

$$E(t) \leq \left[E(0)^{-\max\{\frac{p-1}{2},\frac{q-1}{2}\}} + \varrho_2 \max\{\frac{p-1}{2},\frac{q-1}{2}\}[t-1]^+\right]^{-\frac{2}{\max\{p,q\}-1}}$$

olur. Burada $\varrho_{1=}\varrho_1(m_0,\alpha,\gamma)$ ve $\varrho_{2=}\varrho_2(m_0,\alpha,\gamma,E(0))$ pozitif sabitlerdir.

İspat. (Global Varlık) Önce $T=\infty$ olduğunu ispatlayalım. Bunun için t den bağımsız olarak,

$$\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \ell\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + k\left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2$$

ifadesinin sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. (4.2.2.4) ve (4.2.2.8) ifadelerinden

$$\begin{aligned} E(0) &\geq E(t) = \frac{1}{2}(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2) + J(t) \\ &\geq \frac{1}{2}(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2) + \frac{r-1}{2(r+1)}\left(\ell\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + k\left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \ell\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + k\left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2 \leq \alpha_2 E(0)$$

yazılabilir. Burada $\alpha_2 = \left\{2, \frac{2(r+1)}{r-1}\right\}$ dır. Böylece global varlık elde edilir.

(Enerji Azalması) Şimdi problem için enerji azalmasını Nakao metoduyla [Nakao 1977, Nakao 1978] gösterelim:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &= -\|u_t(t)\|_{p+1}^{p+1} + \frac{1}{2}(g' \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 \\ &\quad -\|v_t(t)\|_{q+1}^{q+1} + \frac{1}{2}(h' \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) - \frac{1}{2}h(t)\left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2 \\ &< 0 \end{aligned}$$

ifadesinin $[t,\ t+1]$ üzerinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned} E(t) - E(t+1) &= \int_t^{t+1}\|u_t(t)\|_{p+1}^{p+1}\,ds - \frac{1}{2}\int_t^{t+1}(g' \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(s)ds \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_t^{t+1} g(s)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 ds + \int_t^{t+1}\|v_t(t)\|_{q+1}^{q+1}\,ds \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_t^{t+1}(h' \diamond A^{\frac{1}{2}}v)(s)ds + \frac{1}{2}\int_t^{t+1} h(s)\left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2 ds, \end{aligned}$$

$$E(t) - E(t+1) = D_1^{p+1}(t) + D_2^{q+1}(t) \tag{4.2.2.13}$$

olur. Burada

$$\begin{cases} D_1^{p+1}(t) = \int_t^{t+1}\|u_t(t)\|_{p+1}^{p+1}\,ds - \frac{1}{2}\int_t^{t+1}(g' \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(s)ds \\ \qquad\qquad + \frac{1}{2}\int_t^{t+1} g(s)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 ds, \\ D_2^{q+1}(t) = \int_t^{t+1}\|v_t(t)\|_{q+1}^{q+1}\,ds - \frac{1}{2}\int_t^{t+1}(h' \diamond A^{\frac{1}{2}}v)(s)ds \\ \qquad\qquad + \frac{1}{2}\int_t^{t+1} h(s)\left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2 ds \end{cases} \tag{4.2.2.14}$$

dır. (4.2.2.14) ve Hölder eşitsizliğinden

$$\int_t^{t+1}\int_\Omega |u_t|^2\,dxdt+\int_t^{t+1}\int_\Omega |v_t|^2\,dxdt\le c_1(\Omega)D_1(t)^2+c_2(\Omega)D_2(t)^2 \qquad (4.2.2.15)$$

yazılabilir. Burada $c_1(\Omega)=vol(\Omega)^{\frac{p-1}{p+1}}$ ve $c_2(\Omega)=vol(\Omega)^{\frac{q-1}{q+1}}$dir. Ortalama değer teoreminden, $t_1\in\left[t,\ t+\frac{1}{4}\right]$ ve $t_2\in\left[t+\frac{3}{4},\ t+1\right]$ olmak üzere

$$\|u_t(t_i)\|^2+\|v_t(t_i)\|^2\le 4c_1(\Omega)D_1(t)^2+c_2(\Omega)D_2(t)^2 \qquad (4.2.2.16)$$

olur. (4.2.1.1) denklem sisteminde birinci denklemi u ile ikinci denklemi v ile çarpılır ve $\Omega\times[t_1,t_2]$ üzerinde integral alınırsa

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} I_2(t) \ \le\ & \sum_{i=1}^{2}\|u_t(t_i)\|\,\|u(t_i)\|+\sum_{i=1}^{2}\|v_t(t_i)\|\,\|v(t_i)\|+\int_{t_1}^{t_2}(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2)dt\\ &-\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega(|u_t|^{p-1}u_tu+|v_t|^{q-1}v_tv)dxdt\\ &+\int_{t_1}^{t_2}(g\diamond A^{\frac12}u)(t)+(h\diamond A^{\frac12}v)(t)dt\\ &+\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega\int_0^t g(t-s)A^{\frac12}u)(t)[A^{\frac12}u(s)-A^{\frac12}u(t)]dsdxdt\\ &+\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega\int_0^t h(t-s)A^{\frac12}v)(t)[A^{\frac12}v(s)-A^{\frac12}v(t)]dsdxdt \qquad (4.2.2.17)\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\int_0^t g(t-s)A^{\frac12}u(t)[A^{\frac12}u(s)-A^{\frac12}u(t)]dsdx\\ =\ &\frac12\int_0^t g\,(t-s)\left(\left\|A^{\frac12}u(t)\right\|^2+\left\|A^{\frac12}u(s)\right\|^2\right)ds\\ &-\frac12\int_0^t g(t-s)\left(\left\|A^{\frac12}u(t)-A^{\frac12}u(s)\right\|^2\right)ds\\ &-\int_\Omega\int_0^t g(s)\left|A^{\frac12}u(t)\right|^2dsdx\\ =\ &-\frac12\int_\Omega\int_0^t g(s)\left|A^{\frac12}u(t)\right|^2dsdx+\frac12\int_0^t g(t-s)(\left\|A^{\frac12}u(s)\right\|^2)ds\\ &-\frac12(g\diamond A^{\frac12}u)(t)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_0^t h(t-s)A^{\frac{1}{2}}v)(t)[A^{\frac{1}{2}}v(s) - A^{\frac{1}{2}}v(t)]dsdx \\
= \; & -\frac{1}{2}\int_\Omega \int_0^t h(s)\left|A^{\frac{1}{2}}v(s)\right|^2 dsdx + \frac{1}{2}\int_0^t h(t-s)(\left\|A^{\frac{1}{2}}v(s)\right\|^2)ds \\
& -\frac{1}{2}(h \diamond A^{\frac{1}{2}}v)(t)
\end{aligned}$$

olduğundan, (4.2.2.17) ifadesi

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} I_2(t) \; \leq \; & \sum_{i=1}^{2} \|u_t(t_i)\| \, \|u(t_i)\| + \sum_{i=1}^{2} \|v_t(t_i)\| \, \|v(t_i)\| + \int_{t_1}^{t_2} (\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2)dt \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega (|u_t|^{p-1} u_t u + |v_t|^{q-1} v_t v)dxdt \\
& + \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (g \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) + (h \diamond A^{\frac{1}{2}}v)(t)dt \\
& + \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \int_0^t g(t-s)\left\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|^2 dsdt \\
& + \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \int_0^t h(t-s)\left\|A^{\frac{1}{2}}v(t)\right\|^2 dsdt \qquad (4.2.2.18)
\end{aligned}$$

olur. (4.2.2.18) denkleminin sağ tarafındaki ilk iki terim için kestirim elde edelim: Young eşitsizliği, (4.2.2.16) ve (4.2.2.9) dan

$$\begin{aligned}
\|u_t(t_i)\| \, \|u(t_i)\| \; & \leq \; C_* \sqrt{4c_1 D_1(t)^2 + 4c_2 D_2(t)^2} \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} \left\|A^{\frac{1}{2}}u(s)\right\| \\
& \leq \; C_* \left(\frac{2(r+1)}{\ell(r-1)}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{4c_1 D_1(t)^2 + 4c_2 D_2(t)^2} \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E(s)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \; C_* \left(\frac{2(r+1)}{\beta(r-1)}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{4c_1 D_1(t)^2 + 4c_2 D_2(t)^2} E(t)^{\frac{1}{2}} \qquad (4.2.2.19)
\end{aligned}$$

ve

$$\|v_t(t_i)\| \, \|v(t_i)\| \leq C_* \left(\frac{2(r+1)}{\beta(r-1)}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{4c_1 D_1(t)^2 + 4c_2 D_2(t)^2} E(t)^{\frac{1}{2}} \qquad (4.2.2.20)$$

olur. Burada $\beta = \min\{\ell, k\}$ dır. Ayrıca Hölder eşitsizliği ve (4.2.2.9) dan

$$\begin{aligned}\left|\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}(|u_t|^{p-1}u_t u dx dt\right| &\leq \int_{t_1}^{t_2}\|u_t(t)\|_{p+1}^{p}\|u\|_{p+1}dt \\ &\leq C_*\int_{t_1}^{t_2}\|u_t(t)\|_{p+1}^{p}\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|dt \\ &\leq C_*\left(\frac{2(r+1)}{\ell(r-1)}\right)^{\frac{1}{2}}\sup_{t_1\leq s\leq t_2}E(s)^{\frac{1}{2}}\int_{t_1}^{t_2}\|u_t(t)\|_{p+1}^{p}dt \\ &\leq C_*\left(\frac{2(r+1)}{\ell(r-1)}\right)^{\frac{1}{2}}E(t)^{\frac{1}{2}}D_1(t)^p \qquad (4.2.2.21)\end{aligned}$$

ve

$$\left|\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}(|v_t|^{q-1}v_t v dx dt\right| \leq C_*\left(\frac{2(r+1)}{\beta(r-1)}\right)^{\frac{1}{2}}E(t)^{\frac{1}{2}}D_2(t)^q \qquad (4.2.2.22)$$

elde edilir.

Konvolüsyon tipli Young eşitsizliğinden ($\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+\frac{1}{s}-1, 1\leq q,r,s$ için $\|\phi*\psi\|_q \leq \|\phi\|_r\|\psi\|_s$), (4.2.2.18) eşitsizliğinin son iki terimi

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\int_0^t g(t-s)\left\|A^{\frac{1}{2}}u(s)\right\|^2 ds dt &\leq \int_{t_1}^{t_2}g(t)dt\int_{t_1}^{t_2}\left\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|^2 dt \\ &\leq (m_0-\ell)\int_{t_1}^{t_2}\left\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|^2 dt \\ &\leq (m_0-\beta)\int_{t_1}^{t_2}\left\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|^2 dt \quad (4.2.2.23)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\int_0^t h(t-s)\left\|A^{\frac{1}{2}}v(t)\right\|^2 ds dt &\leq \int_{t_1}^{t_2}h(t)dt\int_{t_1}^{t_2}\left\|A^{\frac{1}{2}}v(t)\right\|^2 dt \\ &\leq (m_0-\beta)\int_{t_1}^{t_2}\left\|A^{\frac{1}{2}}v(t)\right\|^2 dt \quad (4.2.2.24)\end{aligned}$$

olur. (4.2.2.22) ve (4.2.2.23) eşitsizliklerini taraf tarafa toplanırsa

$$\ell\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + k\left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2 \leq \frac{1}{\eta_1}I_2(t) \qquad (4.2.2.25)$$

olur. (4.2.2.11) ve (4.2.2.2) deki $I_2(t)$ nin tanımından

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_0^t g(t-s)(\left\|A^{\frac{1}{2}}u(s)\right\|^2 dsdt + \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_0^t h(t-s)(\left\|A^{\frac{1}{2}}v(t)\right\|^2 dsdt \\ \leq & \frac{m_0-\beta}{2\beta}\int_{t_1}^{t_2}(\ell\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + k\left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2)dt \leq \frac{m_0-\beta}{2\beta\eta_1}\int_{t_1}^{t_2} I_2(t)dt \end{aligned} \tag{4.2.2.26}$$

elde edilir. Böylece (4.2.2.18) in sağ tarafındaki son iki terim; (4.2.2.23)-(4.2.2.25) ten

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(g\diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) + (h\diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t)dt \\ = & \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_0^t g(t-s)\left\|A^{\frac{1}{2}}u(s) - A^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|^2 dsdt \\ & + \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_0^t h(t-s)\left\|A^{\frac{1}{2}}v(t) - A^{\frac{1}{2}}v(t)\right\|^2 dsdt \\ \leq & \int_{t_1}^{t_2}\int_0^t g(t-s)(\left\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|^2 + \left\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|^2)dsdt \\ & + \int_{t_1}^{t_2}\int_0^t h(t-s)(\left\|A^{\frac{1}{2}}v(t)\right\|^2 + \left\|A^{\frac{1}{2}}v(t)\right\|^2)dsdt \\ \leq & \frac{2(m_0-\beta)}{\beta}\int_{t_1}^{t_2}(\ell\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + k\left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2)dt \\ \leq & \frac{2(m_0-\beta)}{\beta}\int_{t_1}^{t_2} I_2(t)dt \end{aligned} \tag{4.2.2.27}$$

olur. Buradan (4.2.2.18) ifadesi yukarıdaki eşitsizliklerden

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} I_2(t)dt \leq & \; c_1(\Omega)D_1(t)^2 + c_2(\Omega)D_2(t)^2 \\ & + 4c_3\sqrt{4c_1(\Omega)D_1(t)^2 + 4c_2(\Omega)D_2(t)^2}E(t)^{\frac{1}{2}} \\ & + c_3E(t)^{\frac{1}{2}}(D_1(t)^p + D_2(t)^q) + c_4\int_{t_1}^{t_2} I_2(t)dt \end{aligned} \tag{4.2.2.28}$$

ifadesine dönüşür. Burada $c_3 = C_*(\frac{2(r+1)}{\beta(r-1)})^{\frac{1}{2}}$ ve $c_4 = \frac{5(m_0-\beta)}{2\beta\eta_1}$ dır. (4.2.2.28) denklemini aşağıdaki gibi yeniden yazabiliriz

$$\begin{aligned} \beta_2\int_{t_1}^{t_2} I_2(t)dt \leq & \; c_1(\Omega)D_1(t)^2 + c_2(\Omega)D_2(t)^2 \\ & + 4c_3\sqrt{4c_1(\Omega)D_1(t)^2 + 4c_2(\Omega)D_2(t)^2}E(t)^{\frac{1}{2}} \\ & + c_3E(t)^{\frac{1}{2}}(D_1(t)^p + D_2(t)^q). \end{aligned}$$

Burada $\beta_2 = 1 - \frac{5(m_0-\beta)}{2\beta\eta_1}$ ve $m_0 > \frac{5+2\eta_1}{2\eta_1}.\max\left\{\int_0^\infty g(s)ds, \int_0^\infty h(s)ds\right\}$ dır. Böylece $\beta_2 > 0$ dır. Buradan

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} I_2(t)dt &\leq c_5[\sqrt{4c_1(\Omega)D_1(t)^2 + 4c_2(\Omega)D_2(t)^2}E(t)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + D_1(t)^2 + D_2(t)^2 + E(t)^{\frac{1}{2}}(D_1(t)^p + D_2(t)^q)] \quad (4.2.2.29)\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $c_5 = \frac{\max\{c_1(\Omega), c_2(\Omega), 4c_3\}}{\beta_2}$ dır. Diğer taraftan (4.2.2.4) denklemindeki $E(t)$ fonksiyonunun tanımı ve (4.2.2.1) ile (4.2.2.2) denklemleri arasındaki ilişki gereğince

$$I_2(t) = I_1(t) + \alpha\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2)^{\gamma+1}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}E(t) &= \frac{1}{2}(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2) \\ &\quad + \frac{r-1}{2(r+1)}\left[\left(m_0 - \int_0^t g(s)ds\right)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + (m_0 - \int_0^t h(s)ds\left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)\right] \\ &\quad + \frac{r-1}{2(r+1)}(g \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) + (h \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) \\ &\quad + \frac{\alpha}{2(\gamma+1)}(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2)^{\gamma+1} + \frac{1}{r+1}I_1(t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(t) &\leq \frac{1}{2}(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2) \\ &\quad + \frac{r-1}{2(r+1)}\left[\left(m_0 - \int_0^t g(s)ds\right)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + (m_0 - \int_0^t h(s)ds\left\|Av^{\frac{1}{2}}\right\|^2\right)\right] \\ &\quad + \frac{r-1}{2(r+1)}\left((g \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) + (h \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t)\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{r+1} + \frac{1}{2(\gamma+1)}\right)I_2(t) \quad (4.2.2.30)\end{aligned}$$

yazılabilir. (4.2.2.30) eşitsizliğinin (t_1, t_2) aralığında integrali alınır ve (4.2.2.15),

(4.2.2.25), (4.2.2.27) ve (4.2.2.29) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} E(t)dt &\leq \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2)dt \\ &\quad +\frac{r-1}{2(r+1)}\int_{t_1}^{t_2}\left(m_0-\int_0^t g(s)ds\right)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 dt \\ &\quad +\frac{r-1}{2(r+1)}\int_{t_1}^{t_2}\left(m_0-\int_0^t h(s)ds\right)\left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2 dt \\ &\quad +\frac{r-1}{2(r+1)}\int_{t_1}^{t_2}\Big((g\diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t)+(h\diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t)\Big)dt \\ &\quad +\left(\frac{1}{r+1}+\frac{1}{2(\gamma+1)}\right)\int_{t_1}^{t} I_2(t)dt \\ &\leq c_1(\Omega)D_1(t)^2+4c_2(\Omega)D_2(t)^2+c_6\int_{t_1}^{t} I_2(t)dt \\ &\leq c_7[\sqrt{4c_1(\Omega)D_1(t)^2+4c_2(\Omega)D_2(t)^2}E(t)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad +D_1(t)^2+D_2(t)^2+E(t)^{\frac{1}{2}}(D_1(t)^p+D_2(t)^q)] \qquad (4.2.2.31)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $c_6=\frac{1}{r+1}+\frac{1}{2(\gamma+1)}\frac{r-1}{2(r+1)\eta_1}+\frac{2(r-1)(m_0-\beta)}{(r+1)\beta\eta_1}$ ve $c_7=\max\{c_1(\Omega),c_2(\Omega),c_6c_5\}$ dır. Diğer taraftan (4.2.2.5) ifadesinin (t_1,t_2) aralığında integrali alınır ve (4.2.2.14) kullanılırsa $t_2-t_1\geq\frac{1}{2}$ olduğundan

$$E(t_2)\leq 2\int_{t_1}^{t_2}E(t)dt$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}E(t) &= E(t_2)+\int_t^{t_2}\|u_t\|_{p+1}^{p+1}ds-\frac{1}{2}\int_t^{t_2}(g'\diamond A^{\frac{1}{2}}u)(s)ds \\ &\quad +\frac{1}{2}\int_t^{t_2}g(s)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 ds+\int_t^{t_2}\|v_t\|_{q+1}^{q+1}ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_t^{t_2}(h'\diamond A^{\frac{1}{2}}v)(s)ds+\frac{1}{2}\int_t^{t+1}h(s)\left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2 ds \\ &\leq 2\int_t^{t_2}E(t)dt+D_1(t)^{p+1}+D_2(t)^{q+1} \qquad (4.2.2.32)\end{aligned}$$

yazılır. Sonuç olarak (4.2.2.31) ve (4.2.2.32) den

$$\begin{aligned}E(t) &\leq c_8\sqrt{4c_1(\Omega)D_1(t)^2+4c_2(\Omega)D_2(t)^2}E(t)^{\frac{1}{2}}+D_1(t)^2+D_2(t)^2 \\ &\quad +E(t)^{\frac{1}{2}}D_1(t)^p+E(t)^{\frac{1}{2}}D_2(t)^q+D_1(t)^{p+1}+D_2(t)^{q+1}\end{aligned}$$

olur. Young eşitsizliğinden, $t \geq 0$ için

$$E(t) \leq c_9 \left[D_1(t)^2 + D_2(t)^2 + D_1(t)^{2p} + D_2(t)^{2q} + D_1(t)^{p+1} + D_1(t)^{q+1} \right] \quad (4.2.2.33)$$

olur. Burada c_8 ve c_9 pozitif sabitlerdir. Böylece aşağıdaki enerji kestirimleri elde edilir: $\forall\ t \geq 0$ için

(i) $p = q = 1$ ise

(4.2.2.33) ve (4.2.2.13) den

$$E(t) \leq c_{10} \left[E(t) - E(t+1) \right]$$

olur. Burada $c_{10} > 1$ dır. Nakao eşitsizlğinden

$$E(t) \leq E(0) e^{-\varrho_1 t}$$

yazılabilir. Burada $\varrho_1 = \ln(\frac{w_0}{w_0 - 1})$ dır.

(ii) $\max\{p, q\} > 1$ ise

(4.2.2.33) denkleminden

$$E(t) \leq c_9 \left[D_1(t)^2 (1 + D_1(t)^{2p-2} + D_1(t)^{p-1}) + D_2(t)^2 (1 + D_2(t)^{2q-2} + D_2(t)^{q-1}) \right]$$

yazılabilir.

$$\begin{cases} D_1(t) \leq E(t)^{\frac{1}{p+1}} \leq E(0)^{\frac{1}{p+1}} \\ D_2(t) \leq E(t)^{\frac{1}{q+1}} \leq E(0)^{\frac{1}{q+1}} \end{cases}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} E(t) &\leq c_9 \left[D_1(t)^2 \left(1 + E(0)^{\frac{P-1}{P+1}} + E(0)^{\frac{2p-2}{p+1}} \right) + D_2(t)^2 \left(1 + E(0)^{\frac{q-1}{q+1}} + E(0)^{\frac{2q-2}{q+1}} \right) \right] \\ &\leq c_9 \left(D_1(t)^2 + D_2(t)^2 \right) \left(1 + E(0)^{\frac{p-1}{p+1}} + E(0)^{\frac{2p-2}{p+1}} + E(0)^{\frac{q-1}{q+1}} + E(0)^{\frac{2q-2}{q+1}} \right. \\ &= c_{10} E(0) \left(D_1(t)^2 + D_2(t)^2 \right) \end{aligned}$$

Burada $\lim_{E(0)\to 0} c_{10}(E(0)) = c_9$ ve $\rho = \max\left\{\frac{p-1}{2}, \frac{q-1}{2}\right\}$ dır. Böylece

$$\begin{aligned} E(t)^{1+\rho} &\leq \left[c_{10}\left(D_1(t)^2 + D_2(t)^2\right)\right]^{1+\rho} \\ &\leq c_{11}E(0)\left(D_1(t)^{2\rho+2} + D_2(t)^{2\rho+2}\right) \\ &= c_{11}E(0)\left(D_1(t)^{p+1}D_1(t)^{2\rho+2-p-1} + D_2(t)^{q+1}D_2(t)^{2\rho+2-q-1}\right) \\ &= c_{11}E(0)\left(D_1(t)^{p+1}D_1(t)^{2\rho-p+1} + D_2(t)^{q+1}D_2(t)^{2\rho-q+1}\right) \\ &\leq c_{11}E(0)\left(D_1(t)^{p+1}E(0)^{\frac{2\rho-p+1}{P+1}} + D_2(t)^{q+1}E(0)^{\frac{2\rho-q+1}{q+1}}\right) \\ &\leq c_{12}E(0)\left(D_1(t)^{p+1} + D_2(t)^{q+1}\right) \\ &\leq c_{12}E(0)\left(E(t) - E(t+1)\right) \end{aligned} \tag{4.2.2.34}$$

olur. Burada

$$c_{11}\left(E(0)\right) = 2^{\rho}\left(c_{10}\left(E(0)\right)^{1+\rho}\right.$$

ve

$$c_{12}\left(E(0)\right) = c_{11}\left(E(0)\right)\max\left\{E(0)^{\frac{2\rho-p+1}{P+1}}, E(0)^{\frac{2\rho-q+1}{q+1}}\right\}$$

dır. Nakao eşitsizlğinden

$$E(t) \leq \left(E(0)^{-\rho} + \varrho_2\rho\left[t-1\right]^{+}\right)^{-\frac{1}{\rho}}$$

olur. Burada $\varrho_2 = c_{12}^{-1}\left(E(0)\right)$ dir. Böylece teorem ispatlanır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada yüksek mertebeden doğrusal olmayan

$$\begin{cases} u_{tt} - M\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)Au + \int_0^t g(t-s)Au(s)ds + |u_t|^{p-1}u_t = f_1(u,v), \\ v_{tt} - M\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)Av + \int_0^t h(t-s)Av(s)ds + |v_t|^{q-1}v_t = f_2(u,v) \end{cases}$$

dalga denklem sisteminin başlangıç ve sınır değer koşulları ile birlikte sınırlı bölgede çalışılmıştır. Burada $A = (-\Delta)^m$ ve $M(s) = m_0 + \alpha s^\gamma$ dır.

Bu denklem sisteminin çözümlerinin global varlığı ve enerji azalması için yeter şartlar verilmiştir.

Ele alınan denklem sisteminin çözümlerinin global varlığı ve enerji azalması farklı şartlar altında çalışılabilir. Ayrıca denklem sisteminin çözümlerinin patlaması, enerji azalması gibi farklı matematiksel davranışları çalışılabilir.

.

.

6. KAYNAKLAR

Adams, R. A. 2003. Fournier, J. J. F., Sobolev Spaces, ***Academic Press.***, New York.

Agre, K., Rammaha, M. A. 2006. Systems of nonlinear wave equations with damping and source terms, ***Diff. Integral Eqns.***,19 (11): 1235–1270.

Alves, C. O., Cavalcanti, M. M., Domingos, V. N., Rammaha, M.,Toundykov, D. 2009. On existence uniform decay rates and blow up for solutions of systems of nonlinear wave equations with damping and source terms, ***Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser.***, S2 :583–608.

Barbu, V. 1993. Analysis and Control of Nonlinear Infinite Dimensional Systems, ***Academic Press***, New York.

Houari, B. S. 2010. Global nonexistence of positive initial-energy solutions of a system of nonlinear wave equations with damping and source terms, ***Diff. Integral Eqns.***, 23 (1–2): 79–92.

Houari, B. S. 2012. Global existence and decay of solutions of a nonlinear system of wave equations, ***Appl. Anal.***, 91 (3): 475–489.

Kesavan, S. 1989. Topics in functional analysis and applications, ***John Wiley Sons***, India.

Li G., Sun Y., Liu W. 2011. Global existence, uniform decay and blow-up of solutions for a system of Petrovsky equations, ***Nonlinear Anal.***,74: 1523–1538.

Lions, J. L. 1969. Quelques Méthodes De Résolution Des Problémes Aux Limites Nonlinéaires, ***Dund Gautier − Villars***, Paris.

Messaoudi, S. A., Tatar, N. 2007. Global existence and uniform decay of solutions for a quasilinear viscoelastic problem, ***Math. Mathods Appl. Sci.***, 30: 665–680.

Messaoudi, S. A. Tatar, N. 2008. General decay of the solution energy in a viscoelastic equation with a nonlinear source, ***Nolinear Anal. TMA.***, 69: 2589–2598.

Messaoudi, S. A., Said-Houari, B. 2010. Global nonexistence of positive initial-energy solutions of a system of nonlinear viscoelastic wave equations with damping and source terms, ***J. Math. Anal. Appl.***, 365: 277–287.

Miao, C. X. 1995. The time space estimates and scattering at low energy for nonlinear higher order wave equations, ***Acta Math. Sin. Ser. A,*** 38: 708–717.

Nakao, M. 1977. Asymptotic stability of the bounded or almost periodic solution of the wave equation with nonlinear dissipative term, ***J.Math. Anal. Appl.***, 58 (2): 336–343.

Nakao, M. 1978. A difference inequality and its application to nonlinear evolution equations, ***J.Math.Soc.Japan***, 30(4): 747–762.

Peyravi, A. 2017. Blow up Solutions to a System of Higher-order Kirchho -type Equations with Positive Initial Energy, ***Taiwanese Journal of Mathematics***, 21(4): 767-789.

Pinchover, Y., Rubinstenin, J. 2005. An Introduction to Partial Differential Equations, Cambridge University Press.

Pişkin, E., Polat, N. 2012a. Exponential decay and blow up of a solution for a system of nonlinear higher-order wave equations, ***AIP Conf. Proc.***,1470: 118-121

Pişkin, E., Polat, N. 2012b. Global existence, exponential and polynomial decay solutions for a system class of nonlinear higher-order wave equations with damping and source terms, ***Int. J. Pure Appl. Math.***, 76(4): 559–570.

Pişkin, E., Polat, N. 2013. Uniform decay and blow up of solutions for a system of nonlinear higher-order Kirchhoff-type equations with damping and source terms, ***Contemp. Anal. Appl. Math.***, 1(2): 181-199.

Pişkin, E. 2013. Doğrusal olmayan evolüsyon denklemlerin çözümlerinin azalması ve patlaması, Doktora Tezi, Dicle Üniversitesi.

Pişkin, E. 2014. Blow up of Solutions for a System of Nonlinear Higher-order Kirchhoff-type Equations, ***Mathematics and Statistics***, 2(6) : 219-229.

Pişkin, E. 2017. Sobolev Uzayları, Seçkin Yayıncılık.

Pişkin, E. 2018. Kısmi Türevli Denklemler, Seçkin Yayıncılık.

Strauss, W. A. 1966. On continuity of functions with values in various Banach spaces, ***Pacific J.Math.***,19: 543–551.

Wu, S.T., Tsai, L.Y. 2006. blow-up solutions for some nonlinear wave equations of Kirchhoff type with same dissipation, ***Nonlinear Anal.***, 65: 243-264.

Wu, S.T. 2012. One decay and blow-up of solutions for a system of nonlinear wave equations, ***Journal of Mathematical Analysis and Applications***, 394: 360-377.

Ye, Y. 2013. Global existence and asymptotic behaviour for systems of nonlinear hyperbolic equations, ***Applicable Analysis***, 92(11): 2424–2437.

Ye,Y. 2015a. Global existence and asymptotic behavior of solutions for a system of higher-order Kirchhoff-type equations, ***Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations***, 21-12.

Ye, Y. 2015b. Existence and asymptotic behavior for systems of nonlinear hyperbolic equations, ***Appl. Math. J. Chinese Univ.***, 30(4):453-465.

Ye, Y. 2015c. Global existence and blow-up of solutions for higher-order viscoelastic wave equation with a nonlinear source term, ***Nonlinear Analysis***, 112: 129-146.

Zheng, S. 2004. Nonlinear Evolution Equations, ***Chapman and Hall/CRC***, New York.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Diyarbakır'da doğdum. İlk ve orta öğrenimimi aynı şehirde tamamladım. Diyarbakır Anadolu Öğretmen Lisesi'nden mezun olduktan sonra 2009 yılında Fırat Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Bilgisayar Mühendisliği Bölümüne kayıt yaparak lisans öğrenimime başladığım okulumdan 2013 yılında mezun oldum. 2015 yılında Dicle Teknokent'de Yazılım Geliştirme Mühendisi olarak çalıştım. 2016 yılında EKSİM Holding bünyesinde Dicle Elektrik Dağıtım Şirketinde Proje Yönetim Uzman Yardımcısı olarak göreve başladım. Yine aynı yılda Dicle Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik programına kayıt yaptırdım. Aynı şirkette Proje ve Kurumsal Performans İzleme Uzmanı olarak çalışmaktayım.

Proje:

Yüksek Mertebeden Dalga Denklem Sisteminin Çözümlerinin Azalması (ZGEF.18.009) (Proje Yürütücüsü: Doç.Dr. Erhan Pişkin, Araştırmacı: Ezgi Harman).

Bildiri:

Erhan Pişkin, Ezgi Harman, Decay of solutions for a system of higher-order wave equations, International Workshop on Dynamical Systems and Applications (IWDSA 2019), May 3-4, 2019, Gazi University, Ankara, sf. 17.

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ İNTİHAL FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ	
ADI VE SOYADI	Ezgi HARMAN
ÖĞRENCİ NO	16804006
EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI	2018-2019
YARIYIL	☐ Güz ☒ Bahar
ANABİLİM DALI	Matematik
PROGRAM	Yüksek Lisans
TEZ KONUSU	Yüksek Mertebeden Dalga Denklem Sistemlerinin Çözümlerinin Azalması
İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ	
RAPOR TÜRÜ	Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	75
BENZERLİK ORANI	%23
RAPORLAMA TARİHİ	08/07/ 2019

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 75 sayfalık kısmına ilişkin, 08/07/2019 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı %23 'tür.

Uygulanan filtrelemeler:

☐ Kabul/Onay sayfaları hariç,
☐ Kaynakça hariç
☒ Alıntılar ~~hariç~~/dâhil
☐ Diğer

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Ezgi HARMAN
08/07/2019

Doç.Dr. Erhan PİŞKİN
Tez Danışmanı
08/07/2019

Dr. Öğr. Üyesi Arife ATAY
Anabilim Dalı Başkanı V.
08/07/2019

Formdaki bilgiler bilgisayar ortamında doldurulmalıdır. El yazısı ile doldurulan formlar geçersiz sayılmaktadır.