T.C.

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TAM VE MEROMORFİK FONKSİYONLARIN BÜYÜMELERİ

Fuat SAÇI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR

Haziran 2019

T.C

DİCLE UNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Fuat SAÇI tarafından yapılan "Tam ve Meromorfik Fonksiyonların Büyümeleri" konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyesinin

ÜnvanıAdı Soyadı

Başkan: Prof.Dr.Sezai OĞRAŞ (Danışman)

Üye : Prof.Dr.H.Özlem GÜNEY

Üye : Doç.Dr.Ali AKGÜL

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 27/06/2019

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

..../..../2019

Prof.Dr.Sevtap SÜMER EKER

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında ve yüksek lisans eğitimim boyunca bana zaman ayıran, engin matematik bilgisini ve deneyimlerini yardımlarıyla benden esirgemeyen, hoşgörü ve alçak gönüllülüğü ile yanımda olan değerli danışmanım Prof. Dr. Sezai OĞRAŞ' a teşekkürlerimi sunarım.

Matematiği sevmemde ve kendimi geliştirmemde büyük katkıları olan, değerli hocalarım Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY ve Dr. Öğr. Üyesi Abdullah BAYKAL'a teşekkür ederim.

Ayrıca, benim bu noktaya gelmemde büyük emekleri olan ve maddi, manevi desteklerini her zaman arkamda hissettiğim sevgili aileme de teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR…… I

İÇİNDEKİLER…… II

ÖZET…… III

ABSTRACT…… IV

KISALTMA VE SİMGELER…… V

1.GİRİŞ…… 1

2. KAYNAK ÖZETLERİ…… 5

3. MATERYAL VE METOT…… 9

3.1. Materyal…… 9

3.2. Metot…… 9

3.3. Temel Tanımlar ve Bunlarla İlgili Bazı Teoremler…… 9

4. BULGULAR VE TARTIŞMA…… 21

4.1. Nevanlinna Teorisinin Temelleri…… 22

4.2 Tam Fonksiyonların Büyümeleri……48

4.3 Tam Fonksiyonların Mertebe ve Tipleri……50

4.4 Meromorfik Fonksiyonların Defo Değerleri……52

5. SONUÇ VE ÖNERİLER…… 55

6. KAYNAKLAR……57

ÖZGEÇMİŞ…… 59

ÖZET

NEVANLİNNA TEORİSİNDE TAM VE MEROMORFİK FONKSİYONLARIN BÜYÜMELERİ VE DEĞER DAĞILIMLARI ÜZERİNE ARAŞTIRMALAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fuat SAÇI

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2019

Nevanlinna Teorisi, karmaşık düzlemde tam ve meromorfik fonksiyonların büyümelerini, değer dağılımlarını ve davranışlarını incelemek için kullanılan bir araçtır.

Bu çalışmada, çalışmada kullanılacak olan temel tanımlar, gösterimler ve teoremler verilmiş, daha sonra Nevanlinna Teorisi tanımlanmış ve bu teoriye ait bazı özelliklerin ispatları verilmiştir. Daha sonra ise tam ve meromorfik fonksiyonların tanımı ve bunların basamak ve tipleri ile ilgili özellikler, teoremler ve bunların ispatları üzerinde durulup uygun örnekler verilmiştir.

Nevanlinna Teorisi genellikle literatürde Dağılım Teorisi olarak bilinen meromorfik fonksiyonların değer dağılımlarıyla ilgilidir. Bu teoride özellikle Cebirin Temel Teoremi , Picard Teoremi ve Weierstrass-Casorati Teoremi önemli yer tutar.

Nevanlinna Teorisi, Küçük Picard Teoremi'nin bir genelleştirilmesidir. Bu çalışmada amacımız, bu teoriden yararlanarak, tam ve meromorfik fonksiyonların değer dağılımlarını, büyümelerini ve diğer önemli özelliklerini ortaya koymaktır.

Anahtar Kelimeler: Nevanlinna Teorisi, Tam ve Meromorfik Fonksiyonlar, Büyümeler, Değer Dağılımları, Defo Değeri.

ABSTRACT

INVESTIGATIONS ON THE GROWTH AND VALUE DISTRIBUTIONS OF ENTIRE AND MEROMORPHIC FUNCTIONS IN NEVANLINNA THEORY

THESIS OF MASTER DEGREE

Fuat SAÇI

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF DICLE

2019

Nevanlinna Theory is a tool to investigate growth, value distributions and behaviors of entire and meromorphic functions on the complex plane.

In this study,basic notions, definitions, and theorems that are used in the study are given and then Nevanlinna theory is explained and some of its properties are proven. Lastly,order snd type of entire and meromorphic functıons are studıed, related thereoms are gıven and some examples are presented.

In literature, Nevanlinna theory is studied ın relation to the value distributions of meromorphic functions also known as distribution theory. In Nevanlinna theory, Fundamental theory of algebra, Pecard Theorem and Weierstrass-Casorati theorem has great importance.

Nevanlınna theory is a generalization of Little Picard Theorem. In this study, our goal is to present value distributions of meromorphic functions, their growth and its other properties using Nevanlinna theory.

Key Words: Nevanlinna Theory, Entire and Meromorphic Functions, Growth, Value Distribution, Deficient Value

KISALTMA VE SİMGELER

$\mathbb{C}$: Karmaşık sayılar kümesi

R : Gerçel sayılar kümesi

$\overset{+}{\log}$: Pozitif logaritma

$\bar{B}(0,r)$: Sıfır merkezli r yarıçaplı kapalı disk

$n(r, f)$: f fonksiyonunun kutuplarının sayısı (katlılıkları da dahil)

$\bar{n}(r, f)$: f fonksiyonunun kutuplarının sayısı (katlılıkları dahi değil)

T : $\{z \in C : |z| = 1\}$ kümesi (birim çember)

U : $\{z \in C : |z| < 1\}$ kümesi (açık birim disk)

$D(z_0, r)$: $\{z \in C : |z - z_0| < 1\}$ kümesi

$\overline{D}(z_0, r)$: $\{z \in C : |z - z_0| \leq 1\}$ kümesi

$\overline{A}$: A kümesinin kapanışı

∂D : D kümesinin sınırı

CA : $C - A$ (A kümesinin tümleyeni)

$|\Gamma|$: Γ eğrisinin uzunluğu

Γ^- : Negatif yönlendirilmiş Γ eğrisi

D_r : $\{z : |z| < r\}$ kümesi

1.GİRİŞ

Nevanlinna Teorisi karmaşık düzlemde tam ve meromorfik fonksiyonların büyüme ve davranışları ile ilgili çalışmalar için güçlü bir araçtır.

Nevanlinna'nın Değer Dağılımı Teorisi yaklaşık bir asırdır ve hala aktif bir araştırma alanıdır. Karmaşık Analizin içinde ve dışında geniş bir uygulama alanına sahiptir.

Nevanlinna Teorisi özellikle *"Sabit olmayan bir tam fonksiyon, en fazla sonlu bir değer hariç, diğer tüm değerleri sonsuz kez alır"* şeklindeki *Picard Teorem*inin, *Weierstrass-Casorati ve Cebirin Temel Teoremi* ile ilgili bir genelleştirme olarak düşünülebilir. (Buck 2008, Charak 2009, Laaksonen 2010, Bergweiler 2018)

Nevanlinna'nın tam ve meromorfik fonksiyonlar için tanımladığı $T(r, f)$ *karakteristik fonksiyonu*, bu fonksiyonlara ait Sıfırların ve Kutupların dağılımlarıyla ilgili büyüme oranlarını inceleyerek, verilen fonksiyonun büyümesi ile ilgili bir takım sonuçları ortaya koyar.

Bu çalışmada literatürde tam ve meromorfik fonksiyonların değer dağılımları olarak adlandırılan Nevanlinnna teorisinin temelleri üzerinde duracağız ve teori ile ilgili birtakım sonuçları ve örnekleri vereceğiz.

f bir tam fonksiyon ve a da karmaşık bir sayı olmak üzere $f(z) = a$ denkleminin kökleri belli teorik ve pratik problemleri çözmede önemli bir rol oynar.

Dağılımlar teorisinin önemli sonuçlarından biri Gauss'un 1799'da doktora tezinde, *"n. dereceden bir polinomun n tane karmaşık köke sahip olacağı*" şeklindeki *Cebirin Temel Teoremi* 'dir. (Charak 2009)

Bunun yanında e^z tam fonksiyonu, bir polinom fonksiyonunun davranışından tamamen farklılık gösterir. Bu fonksiyon sıfır ve sonsuz değerleri hariç, verilen her değeri sonsuz defa alır. On dokuzuncu yüzyılda, ünlü matematikçi E. Picard, Transcedental bir f tam fonksiyonun *"En çok bir değer hariç verilen her sonlu karmaşık değeri sonsuz defa alacağını"* göstermiştir. (Buck 2008, Charak 2009, Laaksonen 2010, Bergweiler 2018)

Daha sonra *E.Borel* aşağıdaki gibi bir tam fonksiyonun *"mertebe"* kavramını tanımlamıştır.

$\log^{+} x = \max\{\log x, 0\}$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $\log^{+} M(r, f) = O(r^{p+\varepsilon}),\ r \to \infty$ oluyorsa, bu durumda f tam fonksiyonuna *" p mertebedendir"* denir (Tanımda geçen semboller ve kavramlar daha sonra detaylı bir şekilde verilecektir). Mertebe kavramının tanımıyla, Picard Teoremi "*a sonlu bir karmaşık sayı olmak üzere,* $\rho(0 < \rho < \infty)$ *mertebeden* f *tam fonksiyonu,*

$$\lim_{r\to\infty} Sup \frac{\log(r, a, f)}{\log r} = \rho$$

özelliğini" sağlar. (Charak 2009, Laaksonen 2010, Wong 2012, Memoir 2013)

Genellikle Picard-Borel Teoremi olarak bilinen bu sonuç, Değer Dağılımı Teorisinin temeli olmuştur. Hemen belirtelim ki meromorfik fonksiyonlar için, Maksimum Modül Teoremi sağlanmadığından, bu tür fonksiyonların büyümeleri ve değer dağılımları Picard-Borel Teoremi dışında kalır.

Meromorfik fonksiyonların kutupların varlığından dolayı r nin sonlu değerleri için $|z| < r$ bölgesinde fonksiyon yeteri kadar büyüdüğünden, Maksimum Modül Teoremi bu tür fonksiyonlar için uygun bir araç olmaz.

Rolf Nevanlinna 1924 yılında $|z| < R\ (R \le \infty, 0 < r < R)$ bölgesinde f meromorfik fonksiyonu için

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(\mathrm{Re}^{i\varnothing}\right)\right| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2RrCos(\theta - \varnothing) + r^2} d\varnothing + \sum_{i=1}^{M} \log\left|\frac{R(z - a_i)}{R^2 - \overline{a_i} z}\right|$$

$$- \sum_{j=1}^{N} \log\left|\frac{R(z - b_j)}{R^2 - \overline{b_j} z}\right|$$

şeklindeki *Poisson-Jensen* bağıntısından hareketle, $T(r, f)$ *Nevanlinna Karakteristik fonksiyonunu* tanımlayarak, meromorfik fonksiyonların davranışları hakkında çalışmalarda bulunmuştur. (Hayman 1959, Charak 2009, Buck 2013)

Diğer taraftan tam fonksiyonlar *"Zamanla Değişen Sinyaller ve Mekansal Olarak Değişen Alanlar"* gibi fiziksel olaylar için faydalı modellerdir. Mühendislikte kullanılan tam fonksiyon modelleri, lineer açılım (genişleme) teknikleri olarak düşünülebilir (Fourier serileri ve İntegralleri). (Requicha 1980)

Requicha(1980) makalesinde, karmaşık değişkenli Tam Fonksiyonlar Teorisinin örnek uygulamalarını vermektedir. Çalışma özellikle, üstel tipteki tam fonksiyonların B *-Fonksiyonları* şeklinde bir sınıfını ele alıyor. Bu sınıf B çeşitli bantlandırma tanımlarına göre bant sınırlı olan tam fonksiyonları içerir. Bir B -fonksiyonunun reel ve karmaşık sıfırlarını bilgi taşıma işlemlerine öncülük eder.

Birer tam fonksiyon olan polinomlar, mühendislik matematiğinde yoğun olarak kullanılmaktadır. Örneğin, Klasik Toplu Elemanlı Lineer Sistem büyük ölçüde polinomların oranı olan meromorf fonksiyonların özelliklerine dayanmaktadır. Yine Hesaplamalı Geometride ve Bilgisayar Grafiklerinde kullanılan eğriler ve yüzeyler, Sayısal Entegrasyon ve İstatistiksel Eğriler genellikle cebirsel birer polinomdurlar.

Eğer f fonksiyonu $n > 0$ dereceden bir kompleks polinom ise, bu durumda f ve sabit bir $a \in \mathbb{C}$ için $f - a$ kompleks polinomu da n tane sıfıra sahip olur. Böylece f fonksiyonu $a \in \mathbb{C}$ değerini n defa alır.

$a \in \mathbb{C}$ sayısı için $f - a$ denkleminin sıfırlarına, f fonksiyonunun $a-$*noktaları* adı verilir.

Aynı köklere sahip herhangi iki kompleks polinom bir sabit çarpanla farklılık gösterdiklerinden, polinomların değer dağılımları basittir.

Bilindiği gibi Maksimum Modül Teoremiyle, f fonksiyonu $D_r = \{z : |z| \le r\}$ bölgesi üzerinde maksimum modül değerini ∂D sınırı üzerinde alır.

f ve g fonksiyonları için

$$f(z) = O(g(z))$$

gösteriminin anlamı $r \to \infty$ için $|f(z)| \le C|g(z)|$ olacak şekilde bir C sayısının varlığıdır.

Böylece polinomlar için Maksimum Prensibi $r \to \infty$ için

$$Sup_{|z|\le r} |f(z)| = O(r^n)$$

şeklini alır. Bu yapılanlardan Cebirin Temel Teoremini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

" Sabit olmayan kompleks bir polinom, $r \to \infty$ için ∂D *sınırı üzerinde* f *fonksiyonunun maksimum modülünün büyüme mertebesiyle belirlenen her sonlu değeri kabul eder".*

Diğer taraftan *Liouville Teoremiyle*, "*Her sınırlı tam fonksiyonun verilen bölgede sabit olması gerektiği*" dir. (Wong 2012)

Bu Teoremin değişik bir ifadesini, "*Tam Fonksiyonlar, belki bir değer hariç, verilen her değeri sonsuz defa alır*" şeklinde verebiliriz.

Örneğin $f(z) = e^z$ tam fonksiyonu $z = 0$ noktası hariç, diğer her karmaşık değeri sonsuz defa kabul eder. Bu ise bazı tam fonksiyonların asla sıfırlara sahip olamayacağı sonucunu verir. Daha açık bir ifadeyle Cebirin Temel Teoreminin bir genelleştirilmesi doğru değildir. Tam Fonksiyonlar belli değerleri sonsuz kez aldıklarından, bu durum $r \to \infty$ için

$$D_r = \{z : |z| \le r\}$$

bölgesi üzerinde tanımlanmış tam fonksiyonların büyüme oranları hakkında bize fikir verir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Niko Laaksonen, "*Nevanlinna Theory on Meromorphic Functions and Their Value Distribution Theory, October* 26 2010" adlı makalesinde, "*Dağılım Teorisi kapsamında bir karmaşık fonksiyon ne kadar sıklıkta farklı değerler kabul ederi* " ve "*İki meromorfik fonksiyon kaç kez aynı değeri kabul edebilir* " sorularını ortaya atarak, teorinin daha da gelişmesi için önerilerde bulunuyor.

Felix Wong, "*Fundamentals of Nevanlinna Theory, December10, 2012*" adlı çalışması meromorfik fonksiyonların değer dağılımları ile ilgilidir. Özellikle " *Picard, Weierstrass-Casorati ve Cebir'in Temel Teoremleri*" hakkında bilgi ve yorumda bulunuyor. Bunun yanında "*Nevanlinna teorisini, Picard teoreminin bir genelleştirmesi olarak*" düşünmektedir.

Felix Wong çalışmasının son kısmında Nevanlinna teorisinin hızlı bir şekilde gelişmekte olduğunu belirterek, Nevanlinna teorisinde önemli bir problemin," *Nevanlinna'nın İkinci Temel Teoremindeki* $S(r, f)$ *hata terimi için iyi tahminlerde bulunmak"* olduğunu belirtmektedir.

Dinh Tuan Huynh, "*Nevanlinna Theory-Üniversity Paris-Sud XI Orsay-2013*" adlı doktora tezinde amacının, "*Analitik ve Meromorfik fonksiyonlar için Cebirin Temel Teoremini genelleştirmek* " olduğudur.

Matthew M. Buck, " *MMath, Thesis submitted to The University of Nottingham for degree of Doctor of Philosoph, July* 2013 " adlı doktora tez çalışmasında, Nevanlinna teorisinde meromorfik fonksiyonların diferansiyel polinomlarla ilgili birkaç problemi incelemiş ve tam değerli meromorfik fonksiyonlar için bir sonuç vermiştir.

Walter Bergweiler, " *Entire and Meromorphic Functions, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel Ludewig-Meyn-Str. 4D-24098 Kiel -2018"* adlı seminerinde, Nevanlinna teorisinde tam ve meromorfik fonksiyonlarla ilgili birkaç sonuç (Weierstrass ve Hadamard Çarpanlar Teoremi) ve bu teoriye birkaç uygulama (Diferansiyel denklemler, iterasyon,…gibi) vermiştir.

Boris Yakovlevich tarafından yazılan " *Lectures on Entire Functions -1993"* kitabın birinci kısmında, tam fonksiyonlar için $M(r, f)$ teriminin *büyüme ölçüsü* üzerinde durarak, bu fonksiyonun *ne kadar hızla büyüyebileceği* sorusunu ortaya atmaktadır.

Adem Ersin Üreyen, " *Distance Between a Maximum Modulus Point and The zero Set of An Entire Function- Bilkent Üniversitesi-2006* " adlı doktorasında, bir polinomun sıfırlarının kümesiyle asimptotik davranışını arasında yakın bir ilginin olabileceğine dikkat çekerek, bir tam fonksiyonun sıfırları kümesi ile fonksiyonu yeteri kadar büyüten noktalar arasındaki uzaklığı incelemiştir.

K. S. Charak, " *Value Distribution Theory of Meromorphic Functions-Mathematics Newsletter, Vol. 18, 4 March 2009* " adlı makalesinde, kısaca Nevanlinna teorisine değinmiş, bu teorinin sayılar teorisine, kompleks dinamiklere, kompleks ve differansiyel denklemlere uygulamaları üzerinde durmuş ve ileri araştırmalar için birkaç açık problem ortaya koymuştur.

WK Hayman, " *Lectures on Meromorphic Function, WK Hayman, K GowriSankaran, KM Rao-1959-math.tifr.res.in* " adlı kitabı, tamamen tam ve meromorfik fonksiyonların davranışları ile ilgilidir. Nevanlinna teorisinde geçen tanım ve semboller tümü burada açıkça ifade edilmiş ve çoğu teoremler ispatlanmışlardır.

Aristides A. G. Requicha, " *The zeros of Entire Functions, Theory and Engineering Applications, Procedings of The IEEE, Vol. 68, No. 3. March 1980* " adlı çalışmada, tam fonksiyonların " *Zamanla Değişen Sinyaller ve Mekansal Olarak Değişen Alanlar* " gibi fiziksel olaylar için faydalı modeller oluşturabileceği ve bu modellerin mühendislikte sıkça kullanılabileceklerini belirtmektedir. Örneğin; Klasik toplu elemanlı lineer sistemlerin büyük ölçüde polinomların oranı olan meromorf fonksiyonların özelliklerine dayandığını ortaya koymaktadır.

Kai Liu " *Meromorphic functions sharing a set with applications to difference equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications , 359 (2009) 384-393* " makalesinde fark operatörü $\Delta_c f$ olan f tam fonksiyonuna ait $f(z+c)$ ötelemesi ile ilgili lineer olmayan fark denklemlerinin çözümlerinin uygulamasını vermektedir.

S.Ogras and O.Ince, " *On The Distribution of Zeros of The Equation of State, Journal of Math and Comp.Sci.. (Math Ser.), Vol 9, No :1 (1996) 67-73* " *adlı makalede, Yang-Lee Yoğunluk Teorisinde* sıkça kullanılan *Grand Partition fonksiyonunun sıfırlarının dağılımının* Nevanlinna teorisinde incelenebileceği *ve* Grand Partition fonksiyonuna ait sıfırların*, "Orjinden geçen bir ışın üzerinde yer alabileceği"* gösterilmiştir.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, Nevanlinna teorisinde gerekli olan bazı temel kavramlar, tanımlar, örnekler ve teoremler verilecektir.

3.1 Materyal

Literatürde tam ve meromorfik fonksiyonları içeren çalışmalar bulunmaktadır. Bu çalışmamızı hazırlarken birçok bilimsel makale okunmuş ve bunların arasından konu ile ilgili tanım, kavram ve teoremler üzerine çalışmalara yoğunlaştırılmıştır. Nevanlinna teorisi özellikle tam ve meromorfik fonksiyonlarının değer dağılımları ve büyümeleri ile ilgilidir. Bu teori ile ilgili sonuçların elde edildiği birçok bilimsel makale temel materyalimizi oluşturmaktadır.

3.2 Metot

Nevanlinna Teorisinde geçen Nevanlinna Fonksiyonlarının özellikleri, değer dağılımları,büyümeler,defo ve asimptotiklik değerler, matematiğin diğer ilgili dallarında sıkça kullanıldıklarından, ileri çalışma yapacaklar için bir temel oluşturulmuştur.

3.3 Temel Tanımlar ve Bunlarla İlgili Bazı Teoremler

Öncelikle Nevanlinna teorisinde kullanılan fonksiyonlar için bazı temel terimler tanımlanacak, daha sonra bu teorinin genel detayı ortaya konulacaktır.

Teoriye girmeden önce karmaşık analizde bilinen ve konuyla ilgili bazı önemli teoremleri verelim.

3.3.1 Tam ve Meromorfik Fonksiyonlar

Eğer f fonksiyonu karmaşık $\mathbb{C}$ düzleminin tüm noktalarında analitikse, bu durumda f fonksiyonuna bir *tam fonksiyon* adı verilir. Kutup noktaları hariç, düzlemin tamamında analitik olan fonksiyona da *meromorfik fonksiyon* denir.

$h(z)$ ve $q(z) \neq 0$ ortak sıfırları olmayan birer polinom olmak üzere rasyonel f fonksiyonu, $f(z) = \dfrac{h(z)}{q(z)}$ şeklinde yazılabilir.

Örneğin $\sin z, \cos z, e^z$ ve herhangi bir $h(z)$ polinomu birer tam fonksiyon ve $\frac{e^z}{(z-1)(z+i)}$ fonksiyonu da $z=1$ ve $z=-i$ noktalarında basit kutuplara sahip meromorfik bir fonksiyondur. Hemen belirtelim ki $z=0$ noktası $e^{1/z}$ fonksiyonunun bir kutbu olmadığından $e^{1/z}$ fonksiyonu düzlemde meromorfik veya kısaca meromorf bir fonksiyon değildir.

Teorem 3.3.2 (Cauchy Eşitsizliği)

Eğer $f(z)$ fonksiyonu $z=a$ merkezli r yarıçaplı C çemberinin içinde ve üzerinde analitik ve C çemberi üzerine

$$|f(z)| < M$$

olacak şekilde bir M sabiti varsa, bu halde $n=0,1,2,...$ için

$$|f^{(n)}(a)| \le \frac{M.n!}{r^n}$$

olur. Özel olarak $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ olarak alınırsa yukarıdaki *Cauchy Eşitsizliği,*

$$|a_n| \le \frac{M}{r^n} \qquad (3.3.1)$$

şeklini alır.

Teorem 3.3.3 (Liouville Teoremi)

Sınırlı bir tam (düzlemin tamamında analitik) fonksiyon, verilen bölgede sabit olmak zorundadır.

Başka bir ifadeyle tüm karmaşık z değerleri için,

1) $f(z)$ analitik

2) $|f(z)| < M$, $M-sabit$ olacak şekilde sınırlı ise, bu halde $f(z)$ sabit olmalıdır.

Teorem 3.3.4 (Cebirin Temel Teoremi)

$n \geq 1$ dereceden ve $a_n \neq 0$ olmak üzere

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n = 0$$

şeklindeki her polinom denklemi, *en az bir gerçel veya karmaşık köke* sahiptir. Daha genel bir ifadeyle $P(z) = 0$ polinom denkleminin tam *n tane kökü* vardır.

Teorem 3.3.5 (Gauss Ortalama Değer Teoremi)

Eğer $f(z)$ fonksiyonu a merkezli ve r yarıçaplı C çemberinin içinde ve üzerinde analitikse, bu halde

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta \qquad (3.3.2)$$

olur.

Başka bir ifadeyle, "*analitik bir fonksiyonun çemberin merkezine aldığı değer, çember üzerindeki ortalama değerine eşittir*."

Teorem 3.3.6 (Maksimum Modül Teoremi)

Eğer $f(z)$ fonksiyonu " *basit kapalı bir C eğrisinin içinde ve üzerinde analitik ve sabit değilse, bu durumda $|f(z)|$ modülü, maksimum değerini C eğrisinin üzerinde (sınırında) alır*.

Teorem 3.3.7 (Minimum Modül Teoremi)

Eğer $f(z)$ fonksiyonu *basit kapalı bir C eğrisinin içinde ve üzerinde analitik ve C eğrisinin içinde sıfır değilse, bu halde $|f(z)|$ modülü, minimum değerini C eğrisinin üzerinde (sınırında) alır.*

Teorem 3.3.8 (Argüman Teoremi)

S ve K, sırasıyla basit kapalı C eğrisinin içinde $f(z)$ fonksiyonunun sıfır ve kutup yerlerinin sayısını göstermek üzere, eğer $f(z)$ fonksiyonu kutup yerleri hariç C eğrisinin içinde ve üzerinde analitikse, o zaman

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = S - K$$

olur.

Eğer $f(z)$ fonksiyonu basit kapalı C eğrisi içinde p mertebeden (veya katlılığından) $z=\alpha$ kutup noktası hariç analitik bir fonksiyon, aynı şekilde $f(z)$ fonksiyonu C eğrisi içinde (sınırında değil) n mertebeden (katlılığından) $z=\beta$ noktasında bir sıfırına sahipse, bu halde

Argümam Teoremi

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = n - p \qquad (3.3.3)$$

şeklini alır.

Teorem 3.3.9 (Rouche Teoremi)

Eğer $f(z)$ ve $g(z)$, *basit kapalı bir C eğrisi içinde ve üzerinde analitik ve C eğrisi üzerinde*

$$|g(z)| < |f(z)|$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman $f(z)+g(z)$ ve $f(z)$ fonksiyonlarının C çemberinin içindeki sıfırlarının sayısı aynıdır.

Şimdi [Polatoğlu,Y., Bolcal,M., Şen,A., Yavuz,E.,Berberoğlu,A., Özkan,H. 2004. Konu ve Problemleri İle Kompleks Fonksiyonlar Teorisi. T.C. İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ YAYINLARI:44, 334, İSTANBUL.] adlı kitapta ispatı verilen Bir Çember için Poisson İntegral Teoremini verelim.

Teorem 3.3.10 (Bir Çember için Poisson İntegral Teoremi)

$f(z)$, $|z| = R$ çemberi tarafından tanımlanmış C eğrisinin içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon olsun. Eğer $z = re^{i\theta}$, C eğrisinin içinde karmaşık bir sayı ise, bu durumda

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)(f(\mathrm{Re}^{i\phi})}{R^2 - 2Rrc\cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi \qquad (3.3.4)$$

olur. Eğer $u(r,\theta)$ ve $v(r,\theta)$ sırasıyla $f(re^{i\theta})$ fonksiyonunun, $u(R,\phi)$ ve $v(R,\phi)$ da $f(\mathrm{Re}^{i\phi})$ fonksiyonunun gerçel ve sanal kısımları ise, bu halde

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)u(R,\phi)}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi \qquad (3.3.5)$$

ve

$$v(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)v(R,\phi)}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi \qquad (3.3.6)$$

eşitlikleri vardır.

(3.3.5) ve (3.3.6) ifadeleri C çemberi için *Poisson İntegral Formülleri* adını alırlar.

İspat

$z = re^{i\theta}$ noktası C eğrisi içinde bir nokta olduğundan, *Cauchy İntegral Teoremi* yardımıyla,

$$f(z) = f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{w - z} dw \qquad (A)$$

olarak yazılabilir. Diğer taraftan $z = re^{i\theta}$ noktasının C eğrisine göre yansıması $R^2 / \bar{z}$ olup, bu noktada C eğrisinin dışında kalacağından, Cauchy Teoremiyle

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{w - R^2/\bar{z}}dw \qquad \text{(B)}$$

çıkar. (A) ve (B) bağıntılarından

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \left\{\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w - R^2/\bar{z}}\right\} f(w)dw = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z - R^2/\bar{z}}{(w-z)(w - R^2/\bar{z})} f(w)dw \qquad \text{(C)}$$

elde edilir. $z = re^{i\theta}$ ve $w = \mathrm{Re}^{i\phi}$ olarak alınırsa, (C) ifadesi

$$\begin{aligned} f(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\left\{re^{i\theta} - (R^2/r)e^{i\theta}\right\} f(\mathrm{Re}^{i\phi}) i\,\mathrm{Re}^{i\phi}\, d\phi}{\left\{\mathrm{Re}^{i\phi} - re^{i\theta}\right\}\left\{\mathrm{Re}^{i\phi} - (R^2/r)e^{i\theta}\right\}} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(r^2 - R^2)e^{i(\theta+\phi)} f(\mathrm{Re}^{i\phi}) d\phi}{(\mathrm{Re}^{i\phi} - re^{i\theta})(re^{i\phi} - \mathrm{Re}^{i\theta})} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(r^2 - R^2)e^{i(\theta+\phi)} f(\mathrm{Re}^{i\phi}) d\phi}{(\mathrm{Re}^{i\phi} - re^{i\theta})(\mathrm{Re}^{-i\phi} - re^{-i\theta})} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(r^2 - R^2) f(\mathrm{Re}^{i\phi}) d\phi}{(R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} \end{aligned}$$

çıkar. Diğer taraftan

$$f(re^{i\theta}) = u(r,\theta) + iv(r,\theta) \text{ ve } f(\mathrm{Re}^{i\phi}) = u(R,\phi) + iv(R,\phi)$$

olduklarından,

$$u(r,\theta) + iv(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)\{u(R,\phi) + iv(R,\phi)\} d\phi}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2}$$

eşitliğinin her iki yanının gerçel ve sanal kısımlarından

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)u(R,\phi)}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi$$

ve

$$v(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)v(R,\phi)}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi$$

oldukları görülür.

Teorem 3.3.11 (Laurent Serisi)

$f(z)$ fonksiyonu $z = z_0$ noktasında ayrık tekil noktaya sahip olsun. Aynı z_0 merkezli, yarıçapları sırasıyla r_1 ve r_2 olan γ_1 ve γ_2 çemberlerinin belirlediği $D = \{z : r_2 < |z - z_0| < r_1\}$ halka bölgesinde, katsayıları

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

ve

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz \quad n = 1, 2, 3\ldots.$$

şeklinde olan ve adına Laurent Serisi veya Açılımı adı verilen

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} \tag{3.3.7}$$

serisi vardır.

Eğer γ, D halka bölgesinde aynı z_0 merkezli kapalı bir çember ise, bu halde yukarıda belirtilen a_n ve a_{-n} katsayıları yerine tek olarak

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

katsayıları alınırsa, bu durumda D halka bölgesindeki tüm z değerleri için

$$f(z) = a_0 + a_1 (z - z_0)^2 + \ldots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \ldots. \tag{3.3.8}$$

tek değerli analitik fonksiyonu yazılabilir.

$$f_1(z) = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \ldots$$

ve

$$f_2(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \ldots$$

ifadeleri sırasıyla D bölgesi için geçerli olan Laurent Serisinin *Analitik ve Esas kısımları* adını alırlar. Bu halde D bölgesindeki analitik $f(z)$ fonksiyonu $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ şeklinde yazılabilir.

3.3.12 Tekil Noktaların Sınıflandırılması

Basit bir ifadeyle karmaşık değerli bir f fonksiyonuna D bölgesindeki bir $z_o \in \mathbb{C}$ noktasında analitiktir demek "*Bu noktanın açık bir komşuluğunda fonksiyonun yakınsak bir kuvvet serisiyle ifade edilebilmesi"* ile aynı anlamdadır.

Bir fonksiyonun diferansiyellenemediği veya analitikliğinin bozulduğu noktaya *Tekil* (*veya Singüler*) nokta adı verilir.

Eğer tek değerli $f(z)$ fonksiyonu, $\exists \delta > 0$ için $0 < |z - z_0| < \delta$ bölgesinde analitik, ancak $|z - z_0| < \delta$ bölgesinde analitik değilse, bu durumda z_0 noktasına bir *ayrık tekil nokta* adı verilir.

Örneğin $z = a$ noktasında

$$f(z) = \frac{1}{z - a}$$

fonksiyonu bir tekil noktaya sahiptir. Bununla birlikte

$$f(z) = \begin{cases} 1\,; & z \neq 0 \\ 0\,; & z = 0 \end{cases}$$

şekilde tanımlanmış fonksiyon sadece orijinde bir tekilliğe sahiptir. Hemen belirtelim ki $z = 0$ noktası çok katlı $f(z) = \sqrt{z} = z^{1/2}$ fonksiyonunun bir ayrık tekil noktası değildir. Gerçekten fonksiyon $z = 0$ noktasında bir türeve sahip olmadığı gibi, fonksiyonu tek değerli yapacak $z = 0$ noktasının bir komşuluğunu da bulamayız.

Ayrık tekil noktalarda bir fonksiyonun davranışını karakterize etmek için genellikle Laurent serisini kullanırız ve bu seri yardımıyla bir $f(z)$ fonksiyonunun tekil (singüler) noktalarını sınıflandırabiliriz.

Tanım 3.3.13

$D=\{z: r_2<|z-z_0|<r_1\}$ halka bölgesi için $r_2=0$ ve $z=a$ ayrık tekil noktası hariç, $f(z)$ fonksiyonu $0<|z-a|<r_1$ halka bölgesinin belirttiği γ_1 eğrisinin içinde ve üzerinde analitik olsun.

Bu halde;

i. Eğer Teorem 3.3.11 de, (3.3.8) ile verilen

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)^2+\ldots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots.$$

açılımındaki

$$\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{a_{-3}}{(z-z_0)^2}+\ldots$$

esas kısımda sonlu tane a_{-n} $(n=1,2,3,\ldots)$ katsayıları hariç, diğer katsayılar sıfır ise bu durumda, $f(z)$ fonksiyonunun Laurent Açılımı

$$f(z)=\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{a_{-3}}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$$

şeklinde olacak ve $z=a$ noktası $f(z)$ fonksiyonunun *n. mertebeden kutup noktası* adını alacaktır.

Hemen belirtelim ki $z=a$ kutup noktasında $\lim_{z\to a} f(z)=\infty$ olur. Yani ayrık tekil noktanın bir komşuluğunda analitik bir fonksiyon sınırlı olamaz.

ii. Eğer tek değerli $f(z)$ fonksiyonu $z=a$ noktasında tanımlanmamış, ancak

$$\lim_{z\to a} f(z)$$

limiti varsa, bu durumda a noktasına *kaldırılabilir tekil nokta* adı verilir.

Başka bir ifadeyle, z_0 noktasında $f(z)$ fonksiyonunu $f(z_0)=a_0$ şeklinde yeniden tanımlarsak, bu durumda $f(z)$ fonksiyonu $|z-z_0|\le r$ bölgesinde analitik, dolayısıyla z_0 noktası fonksiyon için *kaldırılabilir tekil nokta* olur.

iii. Eğer $z=a$, tek değerli $f(z)$ fonksiyonu için ne bir kutup ve ne de bir kaldırılabilir tekil noktaysa, o zaman $z=a$ noktasına bir esas tekil nokta adı verilir. Bu halde $f(z)$ fonksiyonun Laurent Açılımındaki esas kısım

$$a_0+a_1(z-z_0)^2+\ldots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots.+\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+\ldots$$

şeklini alacaktır.

Aşağıdaki teorem, esas tekil noktaya sahip fonksiyonların davranışını ortaya koymaktadır.

Teorem 3.3.14 (Weierstrass Teoremi)

Bir ayrık esas tekil noktanın komşuluğunda analitik bir fonksiyon, her karmaşık değere keyfi yaklaşır.

Picard Teoremi ise bir esas tekil noktanın her komşuluğunda analitik bir fonksiyon, *belki bir değer hariç her sonlu karmaşık değeri* aldığını belirtir.

Bunun yanında meromorf fonksiyonlar için Picard Teoremi '*sabit olmayan herhangi bir meromorf fonksiyon, $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde en fazla iki değeri ihmal eder.'* şeklindedir.

Picard Teoremi, beraberinde *" Sabit olmayan bir tam fonksiyonunun sıfırı olmayabilirmi?* sorusunu getirmektedir.

Böyle bir durum *" Aynı sıfırlara sahip iki tam fonksiyonun, yalnız bir sabit farkıyla değil, aynı zamanda bir üstel çarpanla da farklılık gösterebileceği*" sorusunu beraberinde getirmektedir.

Weierstras, Cebirin Temel Teoremine benzer olarak aşağıdaki teoremi vermiştir.

Teorem 3.3.15

$\{a_n\}$, $\lim|a_n| = \infty$ olacak şekilde karmaşık sayıların sıfır olmayan bir dizisi olsun. Bu halde g bir tam fonksiyon ve E_n *kanonik (canonical factors) çarpanları*

$$E_k(z) = (1-z)e^{z+\frac{z^2}{2}+...+\frac{z^k}{k}}$$

şeklinde tanımlanmak üzere, orjinde m mertebeden herhangi bir tam fonksiyon

$$f(z) = e^{g(z)}z^m\prod_{n=1}^{\infty}E_n(\frac{z}{a_n})$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 3.3.16

Eğer, kompleks sayıların dizisi $\{b_n\}, m \in N$ ve $n \geq m$ olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=m}^{n}b_k = \lim_{n\to\infty}(b_m.b_{m+1}...b_n)$$

sıfırdan farklı kompleks değerleri için yakınsak ise,

$$\prod_{n=1}^{\infty}b_n = b_1.b_2.b_3...$$

sonsuz çarpımı da yakınsaktır. Bu durumda

$$\prod_{n=1}^{\infty}b_n = b_1.b_2...b_{m-1}.p$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu tanım m 'nin seçiminden bağımsızdır. Eğer

$$\prod_{n=1}^{\infty}b_n = b_1.b_2.b_3...$$

sonsuz çarpımı yakınsak değilse ıraksaktır. Bu da ancak ya $\{b_n\}$ dizisinin sonsuzda birçok sıfırının mevcut olmasıyla ya da

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=m}^{n} b_k = \lim_{n\to\infty}(b_m.b_{m+1}...b_n)$$

limitinin sıfırdan farklı kompleks değerleri için ıraksak veya sıfıra yakınsak olmasıyla mümkündür. Bu durumda sonsuz çarpımların sıfıra ıraksadığı söylenebilir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Derleme ağırlıklı olan bu çalışmanın girişinde "*Verilen bölgede sınırlı bir tam fonksiyonun sabit olması* " gerektiği şeklindeki Liouville Teoreminin akabinde, Picard'ın " *Tam fonksiyonlar, belki bir değer hariç verilen her değeri sonsuz kez alır* " teoremi, tam ve meromorfik fonksiyonların davranışlarının incelenmesine yol açmıştır. Özellikle Finli Matematikçi Rolf Nevanllinna, kendi adıyla anılan *Nevanlinna Teorisi*'nde (veya *kuramında*) yukarıdaki teoremlerin genelleştirmelerini yapmıştır.

Tam ve meromorfik fonksiyonların büyüme oranları ile bunların sıfır ve kutup yerlerinin sayıları arasında yakın bir ilgi vardır. Örneğin eğer f tam fonksiyonu ρ-mertebeden bir büyüme oranına sahipse, bu halde f fonksiyonunun sıfırlarının sayısı için bir üst sınır $n(r) = O(r^{\rho})$ şeklindedir. Borel daha sonra üst sınırı daha da keskinleştirerek, büyüme oranını

$$\rho = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log n(r)}{\log r}$$

şeklinde tanımlamıştır.

Bilindiği gibi sonlu mertebeden tam fonksiyonlar kendi mertebeleri tarafından belirlenmiş değer dağılımlarına sahiptir. Peki meromorf fonksiyonlar için durum ne olur?

Meromorf fonksiyonlar Maksimum Modül özellğini sağlamadıklarından, büyüme oranlarını ölçmek pek kolay olmaz. Ancak meromorf fonksiyonları, polinom şeklinde iki polinomun bölümü olarak alırsak, Borel'in yaptığı gibi pay ve paydanın büyüme oranları hakkında bir fikir ortaya atmak mümkündür.

Nevanlinna Teorisinin önemli sorularından biri de,

$$m(r, f) + \sum_{j=1}^{q} m(r, \frac{1}{f - a_j}) \le 2T(r, f) - N_1(r) + S(r, f)$$

ile verilen Nevanlinna'nın İkinci Temel Teoremindeki $S(r, f)$ hata terimi için iyi bir tahmin yapmaktır. Ayrıca $S(r, f)$ hata terimi Sayılar Teorisi gibi Matematiğin diğer branşlarında da önem taşımaktadır.

4.1 Nevanlinna Teorisinin Temelleri

Nevanlinna Kuramı**,** Lars Ahlfors'ın doktora danışmanı olan Finlandiyalı matematikçi Rolf Nevanlinna (1929) tarafından ortaya konulmuş ve geliştirilmiştir. Bu teori genellikle literatürlerde de adı geçen meromorfik fonksiyonların değer dağılımları ile ilgilidir. Özellikle, Picard'ın teoremleri, Weierstrass-Casorati teoremi ve hatta Cebir'in Temel Teoremi hakkında daha fazla bilgi ve yorum sağlar.

Tanım 4.1.2

f düzlemde verilmiş meromorfik bir fonksiyon olsun. Sıfır merkezli r yarıçaplı kapalı $\bar{B}(0,r)$ diskinde f fonksiyonunun kutuplarının sayısını (katlılıkları da dahil) hesaplayan $n(r, f)$ terimine f fonksiyonunun *sayma fonksiyonu* adı verilir. Örneğin eğer f basit bir kutba sahipse 1ekler, iki katlı kutba sahip ise 2 ekler,….,

$n(r, f)$ sayma fonksiyonu yardımıyla verilen bölgede f fonksiyonunun kutup sayılarını hesaplayabiliriz. Bunun yanında $\bar{n}(r, f)$ terimi de $\bar{B}(0,r)$ bölgesinde f fonksiyonunun katlılıkları göz önüne alınmaksızın toplam kutup sayılarını verir.

Örnekler 4.1.3

I. $\bar{B}(0,r)$ diskinde e^z fonksiyonu kutuplara sahip olmadığından $n(r, f) = \bar{n}(r, f) = 0$.

II. $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$ fonksiyonu π'nin tam katlarında basit kutuplara sahip olup, $\| \ \|$ verilen sayının tam değerini göstermek üzere

$$n(r, f) = n(r, \frac{1}{\sin z}) = \bar{n}(r, \frac{1}{\sin z}) = 1 + 2\left\|\frac{r}{\pi}\right\| \quad \text{olur.}$$

III. $f(z)=\frac{1}{\tan^2 z}$ fonksiyonu π'nin tam katlarında çift katlı kutuplara sahip olduğundan

$$n(r,\frac{1}{\tan^2 z})=2+4\left\|\frac{r}{\pi}\right\|$$

ve

$$\bar{n}(r,\frac{1}{\tan^2 z})=1+2\left\|\frac{r}{\pi}\right\|.$$

IV. $f(z)=\frac{1}{e^z-1}$ fonksiyonu $2\pi i$'nin tam katlarında basit kutuplara sahip olduğundan

$$n(r,f)=n(r,\frac{1}{e^z-1})=\bar{n}(r,\frac{1}{e^z-1})=1+2\left\|\frac{r}{2\pi}\right\|.$$

V. $f(z)=\frac{1}{\sin^2 z}=\cos\sec^2 z$ fonksiyonu π'nin tam katlarında çift katlı kutuplara sahip olduğundan

$$n(r,\frac{1}{\sin^2 z})=n(r,\cos ec^2 z)=2+4\left\|\frac{r}{\pi}\right\|$$

ve

$$\bar{n}(r,\cos ec^2 z)=1+2\left\|\frac{r}{\pi}\right\|$$

VI. $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ fonksiyonu i ve $-i$ noktalarında birer basit kutba sahip olduğundan,

$$n(r,f)=n(r,\frac{1}{z^2+1})=\bar{n}(r,\frac{1}{z^2+1})=2$$

olarak bulunur.

Maksimum Prensibi olarak bilinen aşağıdaki teorem, tam veya sınırlı bir bölge üzerinde analitik olan fonksiyonları karakterize etmek için oldukça faydalı bir araçtır.

Teorem 4.1.4 (**Maksimum Prensibi**)

f fonksiyonu sınırlı bir D bölgesi üzerinde analitik ve bu bölgenin sınırında sürekli olsun. Bu durumda D bölgesindeki tüm z değerleri için

$$|f(z)| \le |f(z_0)|$$

olacak şekilde bölgenin sınırı üzerinde bir z_0 noktası vardır.

Hemen belirtelim ki meromorfik fonksiyonlar her zaman için bu özelliğe uymazlar. Gerçekten

$$f(z) = \frac{e^z}{z}\text{-}$$

olarak alırsak, bu durumda $|z| = 1$ çemberi üzerinde

$$|f(z)| = \left|\frac{e^z}{z}\right| = \frac{|e^z|}{|z|} = e^x = e^{r\cos\theta} < e^1 = e$$

olduğu halde, çemberin merkezindeki $z_0 = 0$ noktası için $|f(0)| = \infty$ olup, Maksimum Prensibi sağlanmaz.

Nevanlinna Teorisi, "Sabit olmayan bir tam fonksiyon belki sonlu bir değer hariç, diğer kompleks değerleri sonsuz kez alır" şeklindeki Picard Teoremini kanıtlamakla kalmayıp, değer dağılımlarla ilgili diğer ilginç sonuçlara da el atmaktadır.

Konunun dayanağı olan R. Nevanlinna'nın karakteristik fonksiyonunu verebilmek için, [Charak, K.S. 2009. Value Distribution Theory of Meromorphic Function. Mathematics Newsletter, 18(4):1–20.] de ispatı verilen *Poisson-Jensen formülünden* başlamak yararlı olacaktır.

Teorem 4.1.5 (Poisson-Jensen Bağıntısı)

R sonlu pozitif bir sayı, $f(z) \neq 0, \infty$ fonksiyonu $\bar{B}(0,R) = \{z : |z| \le R,\ 0 < R < \infty\}$ kapalı dairesinde özdeş olarak sıfır olmayan meromorf bir fonksiyon ve

$z = re^{i\phi} \in B(R,0)$ olsun. Bu durumda $a_1, a_2, ..., a_m$ ve $b_1, b_2, ..., b_n$ sırasıyla, $0 < |z| < R$ bölgesinde f meromorf fonksiyonunun katlılıkları da sayılan sıfırlarının ve kutuplarının yerlerini göstermek üzere,

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\mathrm{Re}^{i\theta})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi)} d\theta + d\log\left|\frac{z}{R}\right| + \sum_{j=1}^{m} \log\left|\frac{R(z - a_j)}{R^2 - \overline{a_j} z}\right| - \sum_{k=1}^{n} \log\left|\frac{R(z - b_k)}{R^2 - \overline{b_k} z}\right| \tag{4.1.1}$$

olur.

İspat

$w = z$ için $u = 0$ olacak şekilde $|w| \langle R$ bölgesinden $|u| \langle 1$ birim diski üzerine olan üzerine

$$u = \frac{R(w - z)}{R^2 - \bar{z}\, \mathrm{w}} \tag{4.1.2}$$

dönüşümünü göz önüne alalım. Böyle bir dönüşüm altında $|w| = R$ çemberine $|u| = 1$ çemberi karşılık gelir .(4.1.2) eşitliğinde

$$\log u = \log\left\{\frac{R(w - z)}{R^2 - \bar{z}w}\right\} = \log\left\{R(w - z) - \log\left(R^2 - \bar{z}w\right)\right\}$$

yazılabilir. Bu son ifadenin her iki yanının logaritmik türevinden,

$$\frac{du}{u} = \frac{dw}{w - z} + \frac{\bar{z}dw}{R^2 - \bar{z}w} = \frac{\left(R^2 - |z|^2\right)dw}{\left(R^2 - \bar{z}w\right)(w - z)} \tag{4.1.3}$$

çıkar. (4.1.3) eşitliğini,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R} \log f(w) \frac{dw}{w - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R} \log f(w) \frac{\bar{z}dw}{R^2 - \bar{z}w} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R} \log f(w) \frac{\left(R^2 - |z|^2\right)dw}{\left(R^2 - \bar{z}w\right)(w - z)}$$

şeklinde yazabiliriz.

$\log f(z)$, $|z| \le R$ dairesinde regüler olduğu için sol taraftaki ilk integral Cauchy Rezidü Teoreminden dolayı,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R} \log f(w)\frac{dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi i}\left\{2\pi i \sum \mathrm{Re}\, z\left(f(w), z\right)\right\}$$

$$= \sum \mathrm{Re}\, z\left(f(w), z\right) = \lim_{w\to z}(w-z).\frac{\log f(w)}{w-z} = \mathrm{logf}(z)$$

olur. Burada $w = z$ noktası basit kutup olarak alınmıştır.

Öte yandan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R} \log f(w)\frac{\bar{z}dw}{R^2 - zw}$$

İntegrali Cauchy teoreminden dolayı sıfırdır. Gerçekten $|z| < R$ ise $|\bar{z}| < R$ ve $\frac{R^2}{|z|} \ge R$ yazılabilir. Bu halde $w = \frac{R^2}{|z|}$ noktası $|w| = R$ çemberinin dışındadır. Böylece, (4.1.3) ifadesinin değeri

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R} \log f(w)\frac{\left(R^2 - |z|^2\right)dw}{\left(R^2 - \bar{z}w\right)(w-z)} \qquad (4.1.4)$$

olur.

Diğer taraftan, $|w| = R$, $w = \mathrm{Re}^{i\phi}$, $dw = i\,\mathrm{Re}^{i\phi}\,d\phi$ ve $z = re^{i\theta}$ olduklarından,

$$\left(R^2 - \bar{z}w\right)(w-z) = \left(w.\bar{w} - \bar{z}.w\right)(w-z) = w\left(\bar{w} - \bar{z}\right)(w-z) = w\left(\mathrm{Re}^{-i\phi} - re^{-i\theta}\right)\left(\mathrm{Re}^{i\phi} - re^{i\theta}\right)$$

$$= \mathrm{Re}^{i\phi}\left(R^2 - 2RrCos(\phi - \theta) + r^2\right)$$

şeklinde yazılır. Bunu (4.1.4) eşitliğinde kullanırsak,

$$\log f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f\left(\mathrm{Re}^{i\phi}\right)\frac{R^2-r^2}{R^2-2RrCos(\theta-\phi)+r^2}d\phi \qquad (4.1.5)$$

bulunur. (4.1.5) ifadesinin iki yanının gerçel kısmı alınırsa,

$$\log\left|f(z)\right|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f\left(\mathrm{Re}^{i\phi}\right)\right|\frac{R^2-r^2}{R^2-2RrCos(\theta-\phi)+r^2}d\phi \qquad (4.1.6)$$

sonucu elde edilir.

Şimdi de $f(z)$ meromorf bir fonksiyon ve

$$F(w)=f(w)\prod_{j=1}^{N}\left\{\frac{R(w-b_j)}{R^2-b_jw}\right\}\Big/\prod_{i=1}^{M}\left\{\frac{R(w-a_i)}{R^2-\overline{a}_iw}\right\} \qquad (4.1.7)$$

olarak alınsın.

Bu halde, $|w|<R$ bölgesinde $F(w)\neq 0,\infty$ olur. $w=\mathrm{Re}^{i\phi}$ ve $|a|<R$ ise,

$$\left|\frac{R(w-a)}{R^2-\overline{a}w}\right|=\left|\frac{R\left(\mathrm{Re}^{i\phi}-a\right)}{w\overline{w}-\overline{a}w}\right|=\left|\frac{R(w-a)}{\overline{w}-\overline{a}}\right|\frac{1}{|w|}=\frac{1}{|w|}\left|\frac{R(w-a)}{w-a}\right|=1$$

çıkar.

$|w|=R$ çemberi üzerinde

$$|F(w)|=|f(w)|$$

olduğundan, $(4.1.5)$ ifadesinde f fonksiyonunun yerine F fonksiyonu alınırsa,

$$\log F(w)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log F\left(\mathrm{Re}^{i\phi}\right)\frac{R^2-r^2}{R^2-2RrCos(\theta-\phi)+r^2}d\phi \qquad (4.1.8)$$

elde edilir. $F(w)$ fonksiyonunun değeri (4.1.7) eşitliğinden alınıp (4.1.8) ifadesinde kullanılır ve $w = z$ yazılırsa,

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log F\left(\mathrm{Re}^{i\phi}\right)\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2RrCos(\theta-\phi) + r^2}d\phi + \sum_{i=1}^{M}\log\left\{\frac{R(z-a_i)}{R^2 - \overline{a_i}z}\right\} - \sum_{j=1}^{N}\log\left\{\frac{R(z-b_j)}{R^2 - \overline{b_j}z}\right\} \quad (4.1.9)$$

bulunur. Yine $k = 0,1,2,...,$ değerleri için,

$$\log f(z) = \log|f(z)| + 1 \qquad (\arg f(z) + 2k\pi)$$

olduğu göz önüne alınır ve $|z| = R$ çemberi üzerinde

$$|F(z)| = |f(z)|$$

olduğu düşünülürse, (4.1.9) eşitliğinin her iki tarafının gerçel kısımlarından,

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(\mathrm{Re}^{i\phi}\right)\right|\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2RrCos(\theta-\phi) + r^2}d\phi + \sum_{i=1}^{M}\log\left|\frac{R(z-a_i)}{R^2 - \overline{a_i}z}\right| - \sum_{j=1}^{N}\log\left|\frac{R(z-b_j)}{R^2 - \overline{b_j}z}\right| \quad (4.1.10)$$

sonucu bulunur.

Yukarıdaki bağıntıya **Poisson-Jensen** formülü adı verilir ve bu bağıntıda özel olarak $z = 0$ alınırsa, $f(0) \neq 0,\infty$ olmak koşuluyla

$$\begin{aligned}\log|f(0)| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(\mathrm{Re}^{i\theta})d\theta\right| - \sum_{j=1}^{m}\log\left|\frac{R}{a_j}\right| + \sum_{k=1}^{n}\log\left|\frac{R}{b_k}\right| \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(\mathrm{Re}^{i\theta})d\theta\right| + \sum_{j=1}^{m}\log\left|\frac{a_j}{R}\right| - \sum_{k=1}^{n}\log\left|\frac{b_k}{R}\right|\end{aligned} \quad (4.1.11)$$

şeklindeki *Jensen Formülü* elde edilir.

Poisson-Jensen bağıntısındaki $f(z) \neq 0, \infty$ koşulunu göz önüne almazsak, yani, $f(0) = 0$ veya ∞ şeklindeyse, bu durumda $n(r, f)$ ve $n(r, \frac{1}{f})$, sırasıyla $|z| \leq r,\ 0 \leq r < \infty$ bölgesinde f fonksiyonunun katlılıkları da sayılan kutup ve sıfırlarının sayısını ve

$$m = n(0, \frac{1}{f}) - n(0, f)$$

göstermek üzere, $c_m \neq 0$ ve $m \in \mathbb{Z}$ için $f(z)$ fonksiyonunun orjin merkezli Laurent açılımı

$$f(z) = \sum_{k=l}^{\infty} c_k z^k = c_l z^l + c_{l+1} z^{l+1} + \ldots \tag{4.1.12}$$

şeklinde olacaktır. (Charak 2009)

Daha açıkçası yukarıdaki serinin merkez noktası l dereceden bir sıfır ise $l > 0$ ve l dereceden bir kutup ise $l < 0$ olur. Bu halde, $g(0) \neq 0, \infty$ fonksiyonu $0 < |z| < R$ halka bölgesinde $f(z)$ fonksiyonu ile aynı sıfır ve kutuplara sahipse, (4.1.11) ile verilen Jensen bağıntısı

$$g(z) = \begin{cases} f(z)(\frac{R}{z})^m & z \neq 0 \\ c_m & z = 0 \end{cases}$$

$g(z)$ fonksiyonuna uygulanarak,

$$\log|c_l| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left| f(\mathrm{Re}^{i\theta}) d\theta \right| - \sum_{j=1}^{m} \log\left|\frac{R}{a_j}\right| + \sum_{k=1}^{n} \log\left|\frac{R}{b_k}\right| - l \log R \tag{4.1.13}$$

bulunur. (4.1.13) ifadesinde l mertebesi için

$$l = n(0, \frac{1}{f}) - n(0, f)$$

olarak alınırsa, bu halde $f(0) \neq 0, \infty$ koşulu olmaksızın, c_l, sıfır noktasında (orijinde) f fonksiyonunun Laurent açılımdaki sıfır olmayan ilk katsayıyı göstermek üzere, Teorem (4.1.5)' den

$$\log|c_l| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(\mathrm{Re}^{i\theta})d\theta\right| - \sum_{j=1}^{m}\log\left|\frac{R}{a_j}\right| - n(0,\frac{1}{f})\log R + \sum_{k=1}^{n}\log\left|\frac{R}{b_k}\right| + n(0,f)\log R \tag{4.1.14}$$

olur.

Teorem 4.1.6 (Genelleştirilmiş Jensen Formülü)

f, $\bar{D}(0,r)$ bölgesinde meromorf bir fonksiyon, $a_1, a_2, ...a_m$ ve $b_1, b_2, ...b_n$'ler sırasıyla $D(0,r) - \{0\}$ bölgesinde katlılıkları da sayılan sıfır ve kutup yerleri olsunlar. Bu halde $c_l \neq 0$ olmak üzere, orjin (sıfır) noktasında f fonksiyonunun Laurent açılımı $f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k z^k$ olarak alındığında,

$$\log|c_l| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(r\,\mathrm{e}^{i\theta})d\theta\right| - \sum_{j=1}^{m}\log\left|\frac{r}{a_j}\right| + \sum_{k=1}^{n}\log\left|\frac{r}{b_k}\right| - l\log r \tag{4.1.15}$$

bağıntısı vardır. (Bergweiler 2018)

Eğer $f(0) \neq 0, \infty$ ise, bu durumda $l = 0$ ve $c_l = \log|f(0)|$ olur.

Eğer $f(z)$ fonksiyonunun R dairesi içinde kutup ve sıfır yerleri yoksa, $(4.1.1)$ bağıntısı

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log f\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2RrCos(\theta - \phi) + r^2}d\theta \tag{4.1.16}$$

şeklini alır ki, bu bağıntıya da *Poisson bağıntısı* adı verilir.

Tanım 4.1.7

f bir tam fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun büyüme mertebesi, $A,B>0$ olmak üzere

$$\rho=\inf\left\{\rho>0:\left|f(z)\right|\le Ae^{B|z|^{\rho}}\right\} \tag{4.1.17}$$

şeklinde tanımlıdır.

Jacques Hadamard Teoremi , ρ büyüme mertebeden bir polinomun derecesi en çok ρ sayısı kadar olabileceğini belirtmektedir. Eğer $f(0)\neq 0$ şeklindeyse, bu halde $a_1,a_2,a_3,...,a_n$, $|z|<R$ bölgesinde f fonksiyonunun sıfırlarını göstermek üzere, Jensen bağıntısını

$$\log\left|f(0)\right|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(\mathrm{Re}^{i\theta})d\theta\right|-\sum_{k=1}^{n}\log\left|\frac{R}{a_k}\right| \tag{4.1.18}$$

şeklinde yeniden yazabiliriz. (Laaksonen 2010)

Eğer $n(r,0)$, $|z|<r$ açık diskinde f fonksiyonunun sıfırlarının sayısını ve $r\le|a_k|$ diskinde

$$\chi_k(r)=\begin{cases}0 & ;\ r\le|a_k|\\ 1 & ;\ r>|a_k|\end{cases} \tag{4.1.19}$$

karakterisitik fonksiyonunu tanımlarsak, bu halde (4.1.18) bağıntısındaki

$$\sum_{k=1}^{n}\log\left|\frac{R}{a_k}\right|$$

terimi

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\log\left|\frac{R}{a_k}\right|&=\sum_{k=1}^{n}\int_{|a_k|}^{R}\frac{1}{t}dt\\ &=\sum_{k=1}^{n}\int_0^R\chi_k(t)\frac{1}{t}dt\\ &=\int_0^R\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{n}\chi_k(t)dt=\int_0^R\frac{n(t,0}{t}dt\end{aligned} \tag{4.1.20}$$

şeklinde yazılabilecektir.

Böylece (4.1.18) ile verilen Jensen Formülü

$$\int_0^r n(t,0)\frac{dt}{t} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(\mathrm{Re}^{i\theta})d\theta\right| - \log\left|f(0)\right| \qquad (4.1.21)$$

şeklini alır.

Eğer f fonksiyonu sonlu mertebeden büyümeye sahipse, bu durumda (4.1.21) bağıntısı $n(r,0) = O(r^{\rho})$ şeklinde, f fonksiyonunun sıfırlarının sayısı için asimptotik bir üst sınır verir.

Borel , en çok bir $a \in \mathbb{C}$ noktası hariç

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log n(r,a)}{\log r} = \rho$$

olduğunu göstermiştir.

(4.1.18) ile verilen Jensen bağıntısı f fonksiyonunun sıfırlarının dağılımı hakkında bilgi verir.

Aynı şekilde Poisson-Jensen formülü Nevanlinna teorisininde temelini teşkil eder ve çoğu problemlerin çözümünde önemli rol oynar.

4.1.8 Nevanlinna Fonksiyonları

Bu çalışma boyunca kullanacağımız temel araçlar, Nevanlinna Teorisinde kullanılan ve aşağıda tanımlanan fonksiyonlardır. Bu temel araçlar, Meromorfik fonksiyonların davranışlarını incelemek içindir. Teori boyunca Hayman(1959) tarafından tanımlanan fonksiyonlar ve notasyonlar kullanılacaktır.

Tanım 4.1.9

Negatif olmayan reel x sayısı için bu sayının *pozitif logaritması*

$$\overset{+}{\log} x = \begin{cases} \log x & ; \ x > 1 \\ 0 & ; \ x \le 1 \end{cases}$$

veya

$$\overset{+}{\log} x = \max\{0, \log x\}$$

şeklinde tanımlıdır. (Hayman 1959, Charak 2009)

Pozitif logaritmanın tanımıyla

$$\log x = \overset{+}{\log} x - \overset{+}{\log}(\frac{1}{x}) \tag{4.1.22}$$

şeklinde yazılabileceği açıktır.

Bunun yanında

1. $\log x \le \overset{+}{\log} x$
2. $\overset{+}{\log} x \le \overset{+}{\log} y, \quad x \le y$
3. $\log|x| = \overset{+}{\log} x - \overset{+}{\log} \frac{1}{x}$
4. $\overset{+}{\log}(\prod_{k=1}^{n} x_k) \le \sum_{k=1}^{n} \overset{+}{\log} x$
5. $\overset{+}{\log}(\sum_{k=1}^{n} x_k) \le \log n + \sum_{k=1}^{n} \overset{+}{\log} x_k$

bağıntıları da yazılabilir.

(4.1.22) özelliğinden yararlanarak

$$\int_0^{2\pi} \log\left| f(\mathrm{Re}^{i\phi})\right| d\phi = \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\left| f(\mathrm{Re}^{i\phi})\right| d\phi - \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(\mathrm{Re}^{i\phi})}\right| d\phi$$

bağıntısını yazabiliriz.

Tanım 4.1.10

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\left| f(re^{i\theta})\right| d\theta \tag{4.1.23}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona *Ortalama (proximity) Fonksiyon* adı verilir.

$m(r, f)$ *Ortalama fonksiyonu,* $|z| = r$ çemberi üzerinde f fonksiyonunun ne kadar hızlı büyüdüğünün bir ölçüsünü verir.

Tanım 4.1.11

f, $|z| \le t$ kapalı bölgesinde meromorfik bir fonksiyon olsun., $0 \le t < r$ için $n(t, f)$, $|z| \le t$ bölgesinde katlılıkları da hesaplanan f fonksiyonunun kutuplarının sayısını göstermek üzere f fonksiyonunun kutuplarının *Nevanlinna Sayma* (*hesaplayıcı*) *fonksiyonu*

$$N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt + n(0, f) \log r \tag{4.1.24}$$

şeklinde tanımlıdır .

Eğer $f(0) \neq \infty$ ve $n(0, f) = 0$ ise, bu halde

$$N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, f)}{t} dt \tag{4.1.25}$$

olur. $0 < r_0 < r$ için *Nevanlinna Sayma Fonksiyonu*

$$\begin{aligned} N(r, f) &= \int_0^{r_0} \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt + \int_{r_0}^r \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt + n(0, \infty) \log r \\ &= N(r_0, f) + \int_{r_0}^r \frac{n(t)}{t} dt \end{aligned} \tag{4.1.26}$$

şeklinde de yazılabilir. (Charak 2009, Buck 2013, Bergweiler 2018)

$a \in \mathbb{C}$ için $f - a$ ifadesinin sıfırlarına f fonksiyonunun $a - noktaları$ olarak adlandırılır.

f fonksiyonunun sıfırları $1/f$ fonksiyonun kutupları olacağından, aynı şekilde $f - a$ fonksiyonunun sıfırları $\frac{1}{f - a}$ fonksiyonunun kutupları olacaklardır. Böylece $n(r, \frac{1}{f - a})$ ve $N(r, \frac{1}{f - a})$ terimleri, f fonksiyonunun $a - noktalarını$ hesaplayan pozitif reel değerli fonksiyonlardırlar.

Nevanlinna Teorisinde bu terimlerin yerine geçen

$$n(r,a)=n(r,\frac{1}{f-a}),\quad n(r,\infty)=n(r,f),$$

$$N(r,a)=N(r,\frac{1}{f-a}),\ N(r,\infty)=N(r,f)$$

gösterimleri de sıkça kullanılacaktır.

Yukarıdaki gösterimler altında f meromorfik fonksiyonunun $|z|\le t,\ 0<t<R$ bölgesinde $a-noktalarının\ sayma\ fonksiyonu\ a\neq\infty$ için

$$N(r,\frac{1}{f-a})=N(r,a)=\int_0^R\frac{n(t,a)-n(0,a)}{t}dt+n(0,a)\log R$$

ve

$$N(r,f)=N(R,\infty)=\int_0^R\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt+n(0,f)\log R$$

şeklinde olacaklardır. Bunun yanında (4.1.23) bağıntısıyla tanımlanan $m(r,f)$ *Ortalama Fonksiyonu* için,

$$m(R,\frac{1}{f-a})=m(R,a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^{+}\frac{1}{|f(\mathrm{Re}^{i\phi})-a|}d\phi$$

ve

$$m(R,f)=m(R,\infty)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^{+}|f(\mathrm{Re}^{i\phi})|\,d\phi$$

gösterimleri kullanılacaktır.

$a-noktalarının\ sayma\ fonksiyonu$ olan $N(R,a)$ terimi, $|z|<R$ diskinde $f(z)=a$ denkleminin köklerinin ortalamada ne kadar yoğunlukta dağıldığını ölçmektedir. $|z|<R$ bölgesinde $a-noktalarının$ sayısı ne kadar çoksa, $N(R,a)$ fonksiyonu R yarıçapına bağlı olarak, o kadar hızlı büyür.

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\mathrm{Re}^{i\phi})d\theta| + \sum_{j=1}^{m}\log\left|\frac{a_j}{R}\right| - \sum_{k=1}^{n}\log\left|\frac{b_k}{R}\right|, \qquad f(0)\neq 0,\infty \qquad (4.1.27)$$

şeklindeki (4.1.22) ifadesinde $\log x = \overset{+}{\log} x - \overset{+}{\log}\frac{1}{x}$ özelliği uygulanırsa,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\mathrm{Re}^{i\phi})|d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\log}|f(\mathrm{Re}^{i\phi})|d\phi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\log}\frac{1}{|f(\mathrm{Re}^{i\varphi})|}d\phi$$
$$= m(R, f) - m(r, \frac{1}{f})$$

elde edilir. (4.1.27) ifadesinde $|b_k| = r_k$ alınırsa,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\log\frac{R}{r_k} = \int_0^R \log\frac{R}{t}d\left[n(t, f) - n(0, f)\right]dt$$
$$= \left[n(t, f) - n(0,t)\right]\log\frac{R}{t}\Big|_0^R + \int_0^R \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t}dt$$
$$= \int_0^R \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t}dt$$

bulunur. Yukarıdaki işlemlere benzer olarak,

$$\sum_{k=1}^{n}\log\frac{R}{|a_j|} = \int_0^R \frac{n(t, \frac{1}{f}) - n(0, f)}{t}dt$$

yazabiliriz.

$$\log|c_m| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\mathrm{Re}^{i\phi})d\phi| + \sum_{j=1}^{m}\log\left|\frac{a_j}{R}\right| - \sum_{k=1}^{n}\log\left|\frac{b_k}{R}\right| - m\log R$$

ve

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\mathrm{Re}^{i\phi})d\theta| + \sum_{j=1}^{m}\log\left|\frac{a_j}{R}\right| - \sum_{k=1}^{n}\log\left|\frac{b_k}{R}\right|, \qquad f(0)\neq 0,\infty$$

özelliklerini kullanarak,

$$m = n(0,\frac{1}{f}) - n(0,f)$$

özelliği ile beraber sırasıyla

$$m(R,f) - m(R,\frac{1}{f}) - N(R,\frac{1}{f}) + N(R,f) = \log|f(0)|$$

ve

$$m(R,f) - m(R,\frac{1}{f}) - N(R,\frac{1}{f}) + N(R,f) = \log|c_m|$$

yazılabilir.

$$N(R,f) = N(R,\infty) = \sum_{j=1}^{N} \log\frac{R}{|b_j|} = \int_0^R n(t,f)\frac{dt}{t}$$

ve

$$N(R,\frac{1}{f}) = N(R,0) = \sum_{i=1}^{M} \log\frac{R}{|a_i|} = \int_0^R n(t,\frac{1}{f})\frac{dt}{t}$$

gösterimleriyle, *Jensen formülü*

$$m(R,f) + N(R,f) = m(R,\frac{1}{f}) + N(R,\frac{1}{f}) + \log|f(0)|$$

şeklini alır.

$$T(R,f) = m(R,f) + N(R,f) \qquad (4.1.28)$$

şeklinde tanımlı fonksiyona *Nevanlinna Karakteristik Fonksiyonu* adı verilir.

Diğer taraftan

$$m(R,f) + N(R,f) = T(R,f)$$

ve

$$m(R,\frac{1}{f}) + N(R,\frac{1}{f}) = T(R,\frac{1}{f})$$

oldukları göz önüne alınırsa, $f(0) \neq 0$ ve ∞ için

$$m(R, f) + N(R, f) = m(R, \frac{1}{f}) + N(R, \frac{1}{f}) + \log|f(0)|$$

bağıntısından

$$T(R, f) = T(R, \frac{1}{f}) + \log|f(0)|$$

özelliği çıkar. Gösterilebilir ki

$$M(R, f) = \max_{|z|=R}|f(z)|$$

olarak alındığında, $T(R, f)$ karakteristik fonksiyonu $\log R$ teriminin konveks artan bir fonksiyonu olur ve bu halde f bir tam fonksiyon olduğu zaman $\log M(R, f)$ ile aynı davranışı gösterir

Tanım 4.1.12

$z \to a$ için $f(z) = O(1)$ gösteriminin anlamı, a noktasının bir komşuluğunda $f(z)$ fonksiyonunun sınırlı olmasıdır. Yani,

$$|z - a| < \delta \text{ için } |f(z)| < A$$

olacak şekilde z ye bağlı olmayan A ve δ pozitif sayıları vardır.

Genelde $O(1)$ sınırlı bir terimi göstermek üzere

$$T(R, \frac{1}{f}) = T(R, f) + O(1)$$

bağıntısını yazabiliriz. Daha açık bir ifadeyle $T(R, f)$ ve $T(R, \frac{1}{f})$ karakteristik fonksiyonları sınırlı bir terimle birbirlerinden farklılık gösterirler.

Bu tanımdan sonra, [Hayman, W.K. 1959. Lectures on Meromorphic Functions. Tata Institue of Fundamental Research, 119, India.] adlı çalışmada ispatı mevcut olan Nevanlinna'nın birinci temel teoremini bu gösterimi kullanarak verebiliriz.

Teorem 4.1.13 (Nevanlinna'nın Birinci Temel Teoremi)

a herhangi karmaşık bir sayı ve $|f(0) - a| \neq 0, \infty$ ise, bu durumda

$$T(R,\frac{1}{f-a}) = T(R,f) + o(1)$$

özelliği sağlanır.

İspat:

Önce, $T(R,f-a) = T(R,f) + O(1)$ olduğunu gösterelim. $f-a$ ile f meromorf fonksiyonlarının kutupları aynı olduğundan,

$$N(R,f-a) = N(R,f)$$

yazabiliriz. Ayrıca, $|f-a| \le |f| + |a|$ eşitsizliğinin her iki yanının pozitif logaritmasından,

$$\overset{+}{\log}|f-a| \le \overset{+}{\log}(|f|+|a|) \le \overset{+}{\log}|f| + \overset{+}{\log}|a| + \log 2 \qquad (4.1.29)$$

eşitsizliği bulunur. $|f| \le |f-a| + |a|$ eşitsizliğinden benzer olarak,

$$\overset{+}{\log}|f| \le \overset{+}{\log}(|f-a|+|a|) \le \overset{+}{\log}|f-a| + \overset{+}{\log}|a| + \log 2 \qquad (4.1.30)$$

elde edilir. (4.1.29) ve (4.1.30) eşitsizliklerinin ortalama değerleri alınırsa,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f-a|d\phi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f|d\phi \le \overset{+}{\log}|a| + \log 2$$

ve

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f|d\phi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f-a|d\phi \le \overset{+}{\log}|a| + \log 2$$

ifadeleri çıkar. Son iki eşitsizlikten,

$$\left|m(R,f-a) - m(R,f)\right| \le \overset{+}{\log}|a| + \log 2$$

sonucu bulunur. Böylece,

$$m(R,f-a) = m(R,f) + \overset{+}{\log}|a| + \log 2 = m(R,f) + O(1)$$

yazılır. Bu ifade yukarıdaki $N(R,f-a) = N(R,f)$ ile taraf tarafa toplanırsa,

$$T(R, f-a) = T(R, f) + O(1)$$

eşitliği bulunur. Yine

$$T(R, f-a) = T(R, \frac{1}{f-a}) + O(1)$$

olduğu göz önüne alınırsa, Nevanlinna'nın Birinci Temel Teoremi,

$$T(R, \frac{1}{f-a}) = T(R, f) + O(1)$$

şeklinde ispatlanmış olur.

.**Örnek 4.14** $f(z) = z.e^z$ olmak üzere, Jensen bağıntısından

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(z)|\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |z.e^z|\, d\theta$$

ifadesi yazılabilir ki, buradan da

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+(|z||e^z|)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+(r.e^{r\cos\theta})d\theta$$

değeri bulunur.

$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığında cosinüs fonksiyonunun pozitif olduğu göz önüne alındığında,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log re^{r\cos\theta} d\theta = \frac{\log r}{2} + \frac{r}{\pi}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak

$$m(r, f) = \frac{\log r}{2} + \frac{r}{\pi}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca $N(r, f) = 1$ olduğundan

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f)$$

şeklindeki karakteristik fonksiyon için

$$T(r, f) = \frac{\log r}{2} + \frac{r}{\pi} + 1$$

Örnek 4.1.15

$P \; ve Q$**,** ortak sıfırları olmayan birer polinom olmak üzere $a_l, b_m \neq 0$ için

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_l z^l + a_{l-1} z^{j-1} + ... + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + ... + b_0}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Cebirin Temel Teoremiyle $Q(z)$ polinomu m tane sıfıra, dolayısıyla f fonksiyonu m tane kutba sahip olur. Bu halde $r_0 \leq r$ için $n(r, f) = m$ olup,

$$N(r, f) = \int_0^{r_0} \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt + \int_{r_o}^{r} \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt + n(0, \infty) \log r$$

$$= N(r_0, f) + \int_{r_0}^{r} \frac{n(t)}{t} dt$$

bağıntısı yardımıyla

$$N(r, f) = N(r_0, f) + \int_{r_0}^{r} m \frac{dt}{t} = m \log r + C, \quad C - sabit$$

bulunur.

Diğer taraftan

$$|P(z)| \sim |a_l| . |z|^l$$

ve

$$|Q(z)| \sim |b_m|^m$$

özellikleriyle beraber, $|z| \to \infty$ için

$$|f(z)| \sim \frac{|a_l|}{|b_m|}|z|^{l-m}$$

yazılabilir.

1) Eğer $l \le m$ ise $|z| \to \infty$ için

$$|f(z)| = O(1)$$

ve

$$m(r, f) = O(1)$$

olup, buradan da

$$\begin{aligned} T(r, f) &= m(r, f) + N(r, f) \\ &= N(r, f) + O(1) \\ &= m\log r + O(1) \end{aligned}$$

Nevanlinna karakteristik fonksiyonu elde edilmiş olur.

2) Eğer $l > m$ ise, $|z| \to \infty$ için

$$|f(z)| \sim \frac{|a_l|}{|b_m|}|z|^{l-m}$$

olduğundan,

$$\log|f(z)| = (l-m)\log|z| + \log\frac{|a_l|}{|b_m|} + o(1)$$

eşitliği göz önüne alınarak, $|z| \to \infty$ için

$$m(r, f) = (l-m)\log r + O(1)$$

eşitliğiyle beraber

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(r, f) &= N(r, f) + m(r, f) \\ &= m\log r + (l-m)\log r + O(1) \\ &= l\log r + O(1) \end{aligned}$$

Karakteristik fonksiyonu bulunmuş olur.

(1) ve (2) durumları aynı anda düşünüldüğünde

$$T(r, f) = \max\{l, m\}.\log r + O(1)$$
$$= der(f).\log r + O(1)$$

şeklinde Nevanlinna Karakteristik Fonksiyonunu yazabiliriz.

Örnek 4.1.16

$f(z)$, $|z| < R$ bölgesinde meromorf bir fonksiyon ve m sonlu bir sayı ise,

$$T(R, mf) = T(R, f) + O(1)$$

eşitliği vardır.

Eğer m, n, k ve p birer sabit, $mp - nk \neq 0$, $f(0) \neq \infty, g(0) \neq \infty$ olmak üzere

$$g(z) = \frac{mf + n}{kf + p}$$

şeklindeyse, bu durumda.

$$T(R, g) = T(R, f) + O(1)$$

olur.

Çözüm:

$m \neq 0$ için,

$$\overset{+}{\log}|mf| \leq \overset{+}{\log}|f| + \overset{+}{\log}|m|$$

ve

$$\overset{+}{\log}|f| = \overset{+}{\log}\left|mf.\frac{1}{m}\right| \leq \overset{+}{\log}|mf| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{m}\right|$$

eşitsizliklerinde sırasıyla pozitif logaritmaları ve ortalamaları alınarak,

$$\begin{aligned}\log^{+}|mf|-\log^{+}|f| &\le \log^{+}|f|+\log^{+}|m|-\log^{+}1+\log^{+}|m|-\log^{+}|mf| \\ &\le \log^{+}|f|+\log^{+}|m|-\log^{+}|mf|-\log^{+}\left|\frac{1}{m}\right| \\ &\le \log^{+}|f|+\log^{+}|m|-\log^{+}|m|-\log^{+}|f|-\log^{+}\left|\frac{1}{m}\right| \\ &\le -\log^{+}\left|\frac{1}{m}\right| = \log^{+}|m| \le \log^{+}|m|+\log^{+}\left|\frac{1}{m}\right|\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\log^{+}|f|-\log^{+}|mf| &\le \log^{+}|mf|+\log^{+}1-\log^{+}|m|-\log^{+}|f|-\log^{+}|m| \\ &\le \log^{+}|mf|+\log^{+}\left|\frac{1}{m}\right|-\log^{+}|f|-\log^{+}|m| \\ &\le \log^{+}|m|+\log^{+}|f|+\log^{+}\left|\frac{1}{m}\right|-\log^{+}|f|-\log^{+}|m| \\ &\le \log^{+}\left|\frac{1}{m}\right| \le \log^{+}|m|+\log^{+}\left|\frac{1}{m}\right|\end{aligned}$$

eşitsizliklerinden

$$m(R,mf)-m(R,f) \le \log^{+}|m|+\log^{+}\left|\frac{1}{m}\right|$$

ve

$$m(R,f)-m(R,mf) \le \log^{+}|m|+\log^{+}\left|\frac{1}{m}\right|$$

yazabiliriz ki, buradan da,

$$\left|m(R,mf)-m(R,f)\right| \le \log|m|+\log\left|\frac{1}{m}\right|$$

veya

$$m(R,mf)=m(R,f)+O(1)$$

elde edilir. Öte taraftan, mf ile f meromorf fonksiyonlarının kutupları çakıştığından

$$N(R,mf)=N(R,f)$$

yazabiliriz. Böylece,

$$m(R,mf)+N(R,mf)=m(R,f)+N(R,f)+O(1)$$

eşitliğiyle beraber

$$T(R,mf+n)=T(R,mf)+O(1)$$

bulunur. Ayrıca (4.1.29) ve (4.1.30) eşitsizliklerin ortalama değerlerinden yararlanarak,

$$m(R,mf+n)=m(R,mf)+O(1)$$

ve

$$N(R,mf+n)=N(R,mf)$$

yazılabilir ki, buradan da $T(R,mf)=T(R,mf)+o(1)$ çıkar. Diğer taraftan,

$$T(R,\frac{1}{f})=T(R,f)+O(1)$$

olarak yazılabildiğinden,

$$T(R,\frac{1}{kf+p})=T(R,kf+p)+O(1)=T(R,kf)+O(1)=T(R,f)+O(1)$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned}T(\mathrm{R,g})&=T(R,\frac{mf+n}{kf+p})\\&=T(R,\frac{n-\frac{mp}{k}}{kf+p}+\frac{m}{k})\\&=T(R,\frac{n-\frac{mp}{k}}{kf+p})+O(1)\\&=T(R,\frac{1}{kf+p})+O(1)\\&=T(R,\mathrm{k}\ f+p)+O(1)\\&=T(R,kf)+O(1)\\&=T(R,f)+O(1)\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.17 :

$f(z), |z| < R$ bölgesinde meromorf bir fonksiyon ve k pozitif bir tamsayı ise,

I. $m\left(R, f^k\right) = km(R, f)$

II. $N\left(R, f^k\right) = kN\left(R, f\right)$

III. $T\left(R, f^k\right) = kT\left(R, f\right)$

IV. $m\left(R,1/ f^k\right) = km\left(R,1/ f\right)$

V. $N\left(R,1/ f^k\right) = kN\left(R,1/ f\right)$

VI. $T\left(R,1/ f^k\right) = kT\left(R, f\right) + o(1)$

özellikleri sağlanır.

Örnek 4.1.18

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

fonksiyonunun Teorem 4.1.17 deki eşitlikleri sağlayıp sağlamadığını inceleyelim.

Çözüm:

$$|f| = \left|\frac{1+z}{1-z}\right| = \frac{|1+z|}{|1-z|} \geq 1$$

olduğundan $\overset{+}{\log}|f| = \log|f|$ olur. Buradan

$$m(R, f^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f|^{\frac{1}{2}}\, d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f|^{\frac{1}{2}}\, d\phi = \frac{1}{2}.\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f| d\phi$$
$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f|\, d\phi = \frac{1}{2}m(R, f)$$

elde edilir. Fonksiyon meromorf bir fonksiyon olduğundan

$$N(R, f^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}N(R, f)$$

eşitliği vardır. Böylece

$$T(R, f^{\frac{1}{2}}) = m(R, f^{\frac{1}{2}}) + N(R, f^{\frac{1}{2}})$$
$$= \frac{1}{2} m(R, f) + \frac{1}{2} N(R, f)$$
$$= \frac{1}{2} T(R, f)$$

olduğu görülür. Benzer şekilde diğer eşitliklerinde sağlandığı görülebilir.

Dağılım teorisinin en önemli teoremlerinden biri de aşağıda ispatsız vereceğimiz Nevanlinna'nın İkinci Temel Teoremidir.

Teorem 4.1.19 (Nevanlinna'nın İkinci Temel Teoremi)

f sabit olmayan meromorfik bir fonksiyon, $a_j \in \mathbb{C}, q \geq 2$ için $1 \leq j \leq q$ olacak şekilde q tane farklı değerler olsun. Bu halde

$$N_1(r) = 2N(r, f) - N(r, f') + N(r, \frac{1}{f'})$$

ve

$$S(r, f) = m(r, \frac{f'}{f}) + m(r, \sum_{j=1}^{q} \frac{f'}{f - a_j}) + O(1)$$

olmak üzere

$$m(r, f) + \sum_{j=1}^{q} m(r, \frac{1}{f - a_j}) \leq 2T(r, f) - N_1(r) + S(r, f) \qquad (4.1.31)$$

şeklindedir. Verilen $a \in \mathbb{C}$ sayısı için

$$m(r, \frac{1}{f - a}) = T(r, f) - N(r, \frac{1}{f - a}) + O(1)$$

şeklindeki Nevanlinna'nın Birinci Temel Teoremiyle, (4.1.31) ile verilen Nevanlinna'nın İkinci Temel Teoremi

$$(q - 2)T(r, f) < \sum_{j=1}^{q} N(r, \frac{1}{f - a_j}) - N_1(r) + S(r, f)$$

şeklinde de yazılabilir. (4.1.31) ifadesinde verilen $S(r, f)$ hata terimi, $T(r, f)$ karakteristik fonksiyonuyla kıyaslanamayacak kadar küçük pozitif bir değerdir.

4.2 Tam Fonksiyonların Büyümeleri

1900 yıllarında Borel ve diğer matematikçiler tam fonksiyonlar için Picard Teoreminin değişik versiyonları üzerinde çalıştılar. $n(r,a),|z|\le r$ diskinde $f(z)=a$ denkleminin çözümlerinin (veya sıfırlarının) sayısını göstermek üzere f fonksiyonunun maksimum modülünü (veya büyüme fonksiyonunu),

$$M(R,f)=M_f(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$$

olarak tanımlamışlardır.

Eğer f verilen bölgede sabit değilse, $r\to\infty$ için

$$M(f,r)=M_f(r)\to\infty$$

olduğunu Liouville Teoreminden biliyoruz.

Bir f tam fonksiyonunun asimptotik davranışını karakterize etmek için $M(r,f)$ büyüme fonksiyonu aşağıdaki örnekte de görülebileceği gibi önemli bir ölçüt olarak kullanılabilir.

Örnek 4.2.1

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n}a_nz^k$$

şeklindeki $n.$ mertebeden $f(z)$ polinomu için

$$\lim_{r\to\infty}|f(z)|\sim\lim_{r\to\infty}|a_n||z|^n$$

olup,

$$M(r,f)=\max_{|z|=r}|f(z)|=|a_n|r^n$$

eşitliğinden

$$\log M(r,f)=\log|a_n|+n\log r$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log M(r,f)}{\log r}=\lim_{r\to\infty}\frac{\log|a_n|}{\log r}+\lim_{r\to\infty}\frac{n\log r}{\log r}=0+n=n$$

Yukarıdaki örnekten de görülebileceği gibi, bir polinomun sıfırlarının kümesi ile asimptotik davranışı arasında yakın bir ilişki vardır.

Borel, tüm $a \in \mathbb{C}$ için $n(r,a)$ ve $\log M(r,f)$, en fazla bir değer hariç, aynı büyüklüğe sahip olduklarını göstermiştir. Başka bir ifadeyle, $a \in \mathbb{C}$ için

$$\lim_{r\to\infty} Sup \frac{\log n(r,a)}{\log r} = \lim_{r\to\infty} Sup \frac{\log\log M(r,f)}{\log r}$$

olduğunu göstermiştir.

1924 yılında R.Nevanlinna, $T(R,f)$ karakteristik fonksiyonun $\log r$ teriminin konveks artan bir fonksiyonu olduğunu ve f fonksiyonu tam olduğunda $\log M(r,f)$ ile aynı davranışı gösterdiğini ortaya koyarak, Meromorfik fonksiyonlar için büyümeler ve değer dağılımlar ile ilgili tahminler yapmıştır..

Nevanlinna Teorisinde " $M_f(r)$ fonksiyonu ne kadar hızla büyüyebilir? " sorusu hala önemini korumaktadır.

Aşağıdaki teorem polinom büyümeleriyle ilgili bir durumu ortaya koymaktadır.

Teorem 4.2.2

Eğer negatif olmayan λ değeri için

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{M_f(r)}{r^{\lambda}} = 0$$

oluyorsa, bu halde $f(z)$, derecesi λ 'yı geçmeyen bir polinomdur. (Charak 2009)

İspat

$$|a_n| \le \frac{M_f(r)}{r^n}$$

şeklindeki Cauchy Eşitsizliğinden, $n > \lambda$ için

$$|a_n| \le \liminf_{r\to\infty} \frac{M_f(r)}{r^n} = 0$$

olur.

Yukarıdaki Teorem, "*Tam Fonksiyonları kendi büyümelerine göre sınıflandırmak için, herhangi bir polinomdan daha hızlı büyüyen monoton fonksiyonların bir ölçüsünü teşkil etmenin* " önemi üzerinde duruyor. Örneğin "$M_f(r)$ *keyfi hızla büyüyebilir mi* ?" sorusu önem taşımaktadır. Başka bir ifadeyle "$\varphi(r)$, $r \to \infty$ *için büyüyen bir fonksiyon olmak üzere,.* $M_f(r) > 1 + \varphi(r)$ *eşitsizliğini sağlayan bir tam fonksiyon*" teşkil edilebilir mi? (Charak 2009)

4.3 Tam Fonksiyonların Mertebe ve Tipleri

Bir f tam fonksiyonun büyümesini ölçmek için, basit-düzgün fonksiyonların bir sınıfıyla, bu sınıfın elemanlarını $M(r, f)$ terimiyle karşılaştırmak gerekir.

n pozitif bir tam sayı olmak üzere, f tam fonksiyonu

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{M(r, f)}{r^n} < \infty$$

özelliğini sağlarsa, bu durumda f fonksiyonu derecesi en çok n olan bir polinom olur.

Polinom olmayan fonksiyonların büyümesini ölçmek için bu fonksiyonların büyümeleri r'nin kuvvetlerinden daha hızlı büyüyen fonksiyonlarla karşılaştırmak gerekir.

Tam fonksiyonlar teorisinde ortakça kullanılan karşılaştırma fonksiyonları, genellikle

$k > 0,\ e^{r^k}$ şeklindedirler.

Eğer f tam fonksiyonu için

$$M(r, f) < ef^{r^k},\ r \to \infty$$

olacak şekilde pozitif bir k sabiti varsa, o zaman f fonksiyonuna "*sonlu mertebeden*dir" denir.

f tam fonksiyonunun büyüme mertebesi

$$M(r, f) < ef^{r^k},\ r \to \infty$$

eşitsizliğini sağlayan k değerlerinin en büyük alt sınırıdır. Başka bir ifadeyle, ρ ile gösterilen f fonksiyonun mertebesi

$$\rho = \inf\left\{k : M(r, f) < e^{r^k},\ r > r_k\right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Eğer f tam fonksiyonu ρ mertebeden ise, bu halde

$$e^{r^{\rho-\varepsilon}} < M(r, f) < e^{r^{\rho+\varepsilon}}$$

eşitsizliğinden derhal,

$$\rho = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r, f)}{\log r} \tag{4.3.1}$$

yazılır. (Wong 2012)

Örnek 4.3.1

$$f(z) = e^z \Rightarrow M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} |e^z| = \max_{|z|=r} |e^{r\cos\theta}| = e^r$$

olup, yukarıdaki tanım altında

$$\rho = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r, f)}{\log r} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r, f)}{\log r}$$
$$= \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log(re^r)}{\log r}$$
$$= \limsup_{r\to\infty} \frac{\log(\log r + r)}{\log r}$$

elde edilir. L'hospital kuralı yukarıdaki limite uygulanırsa, $\rho = 1$ olduğu görülür.

Eğer $r \to \infty$ için

$$M(r, f) < e^{Ar^\rho}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde pozitif bir A sayısı varsa, o zaman ρ mertebeden bir f tam fonksiyonuna "s*onlu tipten*" dir denir.

(4.3.1) eşitsizliği sağlanacak şekilde A değerlerinin en büyük alt sınırına ρ mertebesine göre f fonksiyonunun tipi adı verilir. Daha açık bir matematiksel bir ifadeyle

$$\sigma = \inf\left\{A : M(r, f) < e^{Ar^\rho},\ r > r_A\right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Diğer taraftan $e^{(\sigma-\varepsilon)r^\rho} < M(r, f) < e^{(\sigma+\varepsilon)r^\rho}$ eşitsizliğinden,

$$\sigma = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r, f)}{r^\rho}$$

elde ederiz. Bu tanımlar altında, eğer,

a) $\rho = 0$ ise, f fonksiyonu *minimal tipten,*

b) $0 < \sigma < \infty$ ise, f fonksiyonu *normal tipten,*

c) $\sigma = \infty$ ise, f fonksiyonu *maksimum tipten*

olur.

4.4 Meromorfik Fonksiyonların Defo Değerleri

Nevanlinna bir a değerinin nadiren F tarafından nasıl alındığını açıklar. Bu üç değeri almayan meromorfik bir fonksiyonun derecesini ölçmek için aşağıda tanımını verdiğimiz ve adına da a noktasındaki defo dediğimiz $\delta(a, f)$ ölçüsünü tanıtmıştır.

Tanım 4.4.1

f sabit olmayan meromorfik bir fonksiyon ve $a \in \mathbb{C}^{\infty}$ olsun Bu halde f fonksiyonunun a noktasına göre defosu

$$\delta(a, f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{m(r,a)}{T(r, f)} = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N(r,a)}{T(r, f)}$$

şeklinde tanımlıdır. Eğer $\delta(a, f) > 0$ ise, a noktası f fonksiyonunun bir defo değeri adını alır.

$\delta(a, f)$, nadiren veya seyrek de olsa, a değerinin nasıl alındığını açıklar. Eğer f polinom olmayan bir fonksiyon ise $\delta(a, f) \in [0,1]$.

Bunun yanında f fonksiyonunun sonlu defa aldığı herhangi bir değer için $\delta(a, f) = 1$ olur.

Örnegin $f(z) = e^z$ olarak alındığında e^z fonksiyonu 0 değerini ihmal eder. Böylece $N(r,0,e^z) = 0$ olup,

$$\begin{aligned}\delta(0, e^z) = \limsup_{r\to\infty} \frac{m(r,0)}{T(r, f)} &= 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N(r,0)}{T(r, f)} \\ &= 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{0}{T(r, f)} \\ &= 1 - 0 = 1\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Nevanlinna'nın İkinci Temel Teoremiyle

$$\sum_{a\in\mathbb{C}^{\infty}} \delta(a, f) \leq 2$$

özelliği yazılabilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Derleme ağırlıklı olan bu tezde, Tam ve Meromorfik Fonksiyonlarının büyüme oranları ile bunların sıfır ve kutup yerleri arasında sıkı bir ilişkinin olduğu ortaya konulmuş, Nevanlinna'nın Birinci ve İkinci Temel Toremleri ifade edilerek, Teoriyi destekleyen bazı örnekler tarafımızdan verilmiştir.

Henri Cartan, Haman Weyl ve Ahlfors Nevanlinna Teorisini Analitik Dönüşümlere, Raoul Bott ve Shiing-Shen gibi matematikçiler de Diferansiyel Geometriye taşımışlardır.

Nevanlinna'nın İkinci Temel Teoreminde geçen $S(r, f)$ hata teriminin daha iyi üst sınırlarını bularak,

$$\delta(a, f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{m(r,a)}{T(r, f)} = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N(r,a)}{T(r, f)}$$

şeklinde Defo tanımını kullanarak, Nevanlinna Fonksiyonlarının asimptotiklik durumları incelenebilir.

Nevanlinna Teorisininin temellerini kapsayan bu çalışmanın ileriki çalışmalar için bir temel teşkil edeceğine olan inancım tamdır.

6. KAYNAKLAR

Bergweiler, W. 2018. Entire and Meromorphic Functions. CAU Kiel, Germany, 1-17.

Buck, M. 2008. Nevanlinna Theory. Yükseklisans, School of Mathematical Sciences, University of Nottingham, 73.

Buck, M., Math, M. 2013. Topics in Nevanlinna Theory. Doktora, School of Mathematical Sciences, University of Nottingham, 102.

Charak, K.S. 2009. Value Distribution Theory of Meromorphic Function. Mathematics Newsletter, 18(4):1–20.

Hayman, W.K. 1959. Lectures on Meromorphic Functions. Tata Institue of Fundamental Research, 119, India.

Kiselman, C.O. 1993. Order and type as measures of growth for convex or entire functions. Proceedings of the London Mathematical Society, 66(3):152-186.

Laaksonen, N. 2010. Nevanlinna Theory: On Meromorphic Functions and Their Value Distribution Theory. UCL Maths Undergraduate Colloguim, Budapent, 1-11.

Levin, B. J.1980. Distribution of zeros of entire functions, American Mathematical Society,436,United States of America.

Levin, B.J. 1996. Lectures on Entire Functions, American Mathematical Society, 249, United States of America.

Liu, K. 2009.Meromorphic Functions Sharing a Set WithApplications to Difference Equations.Journal of Mathematical Analysis and Applications,359: 384-393.

Memoir, M. 2013. Nevanlinna Theory. Doktora, University Paris, 59.

Ogras, S.,İnce,O. 1996. On the Distribution of Zeros of The Equation of State.Jour of Math&Comp. Sci., 9(1): 67-73.

Polatoğlu, Y., Bolcal,M., Şen, A., Yavuz,E.,Berberoğlu,A., Özkan, H. 2004. Konu ve Problemleri İle Kompleks Fonksiyonlar Teorisi. T.C. İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ YAYINLARI:44, 334, İSTANBUL.

Requicha, A.A.G. 1980. The Zeros of Entire Functions: Theory and Engineering Applications. Proceedings of the IEEE, 68(3): 308-328.

Shapiro, J.H., Shields, A.L. 1976. Unusual Topological Properties of the Nevanlinna Class. Johns Hopkins University Press, 97(4): 915-936.

Spiegel, M.R. 1964. Theory and Problems of Complex Variables. McGraw Hill, 313, Great Britain.

Üreyen, A.E. 2006. Distance Between a Maxımum Modülüs Point and the Zero Set of an Entire Function. Doktora, The İnstitute of Engineering and Science, Bilkent University, 80.

Wong, F. 2012. Fundamentals of Nevanlinna Theory.

ÖZGEÇMİŞ

17.09.1987 yılında doğdu. İlköğretim ve ortaöğretimini Şırnak'ta tamamladı. 2005 yılında Erciyes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde başladığı lisans öğreniminden 2009 yılında mezun oldu. Aynı yıl Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitü'nde başladığı Tezsiz Yüksek Lisans Programını 2011 yılında bitirdi. 2014 yılında Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı'nda Tezli Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2017 yılında Çukurova Üniversitesi Hukuk Fakültesi Hukuk Bölümü'ne başladı. 2011 yılında MEB'de başladığı Matematik Öğretmenliği görevine çeşitli okullarda çalışarak devam etmektedir.

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ İNTİHAL FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ	
ADI VE SOYADI	Fuat Saçı
ÖĞRENCİ NO	13804013
EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI	2019
YARIYIL	☐ Güz ☒ Bahar
ANABİLİM DALI	Matematik
PROGRAM	Yüksek Lisans
TEZ KONUSU	Tam ve Meromorfik Fonksiyonların Büyümeleri
İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ	
RAPOR TÜRÜ	Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	65
BENZERLİK ORANI	%24
RAPORLAMA TARİHİ	16/07/ 2019

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 65 sayfalık kısmına ilişkin, 16/07/2019 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 24 'tür.

Uygulanan filtrelemeler:

☐ Kabul/Onay sayfaları hariç,
☐ Kaynakça hariç
☐ Alıntılar hariç/dâhil
☐ Diğer

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Fuat SAÇI
(İMZA/TARİH)

Prof.Dr.Sezai OĞRAŞ **Tez Danışmanı** (İMZA/TARİH) 16.07.2019	Dr.Öğr.Üyesi Arife ATAY **Anabilim Dalı Başkan V.** (İMZA/TARİH) 16.07.2019

Formdaki bilgiler bilgisayar ortamında doldurulmalıdır. El yazısı ile doldurulan formlar geçersiz sayılmaktadır.