ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

REKTİFİYAN AÇILABİLİR YÜZEYLERİN GEOMETRİSİ

Yağmur SALUR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2019

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Yağmur SALUR tarafından hazırlanan "**Rektifiyan Açılabilir Yüzeylerin Geometrisi**" adlı tez çalışması 24/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN
Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Yusuf YAYLI
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. İsmail GÖK
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Özlem YILDIRIM
Enstitü Müdür Vekili

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

24/06/2019



Yağmur SALUR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

REKTİFİYAN AÇILABİLİR YÜZEYLERİN GEOMETRİSİ

Yağmur SALUR

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmış ve tez konusu hakkında genel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan ön bilgiler, bazı kavramlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölüm; Shyuichi IZUMIYA, Haruyo KATSUMI, Takako YAMASAKI (1999)' nın makalesinin geniş bir şekilde incelenmesine ayrılmıştır.

Son bölümde ise Möbius şeridinin regle yüzey yapısı ele alınmış ve bu yüzeyin açılabilir olacak şekilde parametrizasyonu verilmiştir.

Haziran 2019, 48 sayfa

Anahtar Kelimeler: regle yüzey, darboux vektörü, legendre eğrileri, rektifiyan açılabilir yüzey, rektifiyan gauss yüzeyi, singüler nokta, slant helis, geodezik eğri, möbius şeridi

ABSTRACT

Master Thesis

The Geometry of Rectifying Developable Surfaces

Yağmur SALUR

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

This thesis consists of four parts.

The first part offers an introduction and an overview of the thesis subject.

The second part presents the preliminary information, some concepts and theories to be useful for the thesis.

The third part provides an extensive analysis on Shyuichi IZUMIYA, Haruyo KATSUMI, Takako YAMASAKI (1999).

The last part approaches the ruled surface structure of the Möbius strip and gives that the parameterization of the surface so that it can be developable.

June 2019, 48 pages

Key Words: ruled surface, darboux vector, legendre curves, rectifying developable surface, rectifying gaussian surface, singular point, slant helix, geodesic curve, möbius strip

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında bana araştırma imkanı veren, çalışmalarım boyunca bilgi, öneri ve yardımları ile bana yol gösteren danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı)'ya teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca yardımlarını benden esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Faik Nejat EKMEKCİ (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı)'ye ve Sayın Doç. Dr. İsmail GÖK (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı)'e teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimime başladığım andan itibaren sonsuz sabırları ile bana katlanan ve hayatımın tüm aşamalarında beni destekleyen aileme ve dostlarıma en içten minnetlerimi sunarım.

Yağmur SALUR
Ankara, Haziran 2019

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI
ETİK . . . . . **i**
ÖZET . . . . . **ii**
ABSTRACT . . . . . **iii**
TEŞEKKÜR . . . . . **iv**
SİMGELER DİZİNİ . . . . . **vi**
ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . . **vii**
1. GİRİŞ **1**
2. TEMEL KAVRAMLAR **2**
3. REKTİFİYAN AÇILABİLİR YÜZEYLER VE SİNGÜLER NOKTALARI **9**
3.1 Rektifiyan Açılabilir Yüzeyler **9**
3.2 Rektifiyan Açılabilir Yüzeylerin Singülerliği **24**
4. MÖBİUS ŞERİDİ **30**
4.1 Möbius Şeridi Ve Geometrik Tanımı **30**
4.2 Möbius Şeridi'nin Denklemi **31**
4.3 Açılabilen ve Açılamayan Möbius Şeridi **32**
4.3.1 Möbius Şeridi düzleme ne zaman izomorf olur? **33**
4.4 Möbius Tipli Şeritler **40**
4.5 Möbius Tipli Şeritlere İlişkin Örnekler **41**
5. TARTIŞMA VE SONUÇ **45**
KAYNAKLAR **46**
ÖZGEÇMİŞ **48**

SİMGELER DİZİNİ

M	$\mathbb{R}^3$ uzayında düzgün yüzey
κ	Eğrinin eğriliği
τ	Eğrinin burulması
κ_g	Eğrinin geodezik eğriliği
κ_n	Eğrinin normal eğriliği
τ_g	Eğrinin geodezik burulması
d	Darboux vektör alanı
$\widetilde{d}$	Genelleştirilmiş Darboux vektör alanı
$RG(\gamma)$	γ eğrisinin rektifiyan Gauss yüzeyi
$RD(\gamma)$	γ eğrisinin rektifiyan açılabilir yüzeyi
σ	$\mathbb{R}^3$ uzayında bir regle yüzey
λ	Regle yüzeyin dağılma parametresi
β	Regle yüzeyin striksiyon çizgisi
$F_{(\alpha,\widetilde{d})}$	α eğrisinin rektifiyan açılabilir yüzeyi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1 Cuspidal edge, Swallowtail, Cuspidal cross-cap.....24
Şekil 3.2 Cross-cap.....25
Şekil 3.3 Plücker konoidi.....26
Şekil 3.4 Cuspidal cross-cap.....26
Şekil 3.5 Cuspidal $C \times \mathbb{R}$.....27
Şekil 3.6 Swallowtail SW.....28
Şekil 3.7 Koni yüzeyi.....29
Şekil 4.1 Möbius şeridi.....30
Şekil 4.2 Küresel koordinatlama.....31
Şekil 4.3 Açılabilen ve açılamayan Möbius şeridi.....33
Şekil 4.4 Açılamayan Möbius şeridi.....36
Şekil 4.5 $n = 1$ için $\sigma(\varepsilon, v)$ yüzeyi.....41
Şekil 4.6 $n = 2$ için $\sigma(\varepsilon, v)$ yüzeyi.....42
Şekil 4.7 $n = 3$ için $\sigma(\varepsilon, v)$ yüzeyi.....43
Şekil 4.8 $n = 4$ için $\sigma(\varepsilon, v)$ yüzeyi.....45

1. GİRİŞ

Uzayda herhangi bir doğru, bir eğriye dayanarak hiç bir kurala bağlı kalmaksızın hareket ettirildiğinde elde edilen yüzeylere regle yüzeyler denir.
$\mathbb{R}^3$ uzayında bir regle yüzey; $\gamma : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$\gamma(t, u) = \mu(t) + u.e(t)$$

şeklinde ifade edilebilir.
Burada μ eğrisine regle yüzeyin dayanak eğrisi, $e(t)$ vektörüne regle yüzeyin $\mu(t)$ noktasındaki doğrultmanı adı verilir. $\mu(t)$ noktasından geçen ve $e(t)$ vektörüyle paralel olan doğruya bu noktadan geçen ana doğru denir. Yüzey üzerinde bu ana doğruların birbirlerine en yakın olduğu yerlerden geçen dik yörüngeye ise striksiyon çizgisi denir.

Shyuichi IZUMIYA, Haruyo KATSUMI ve Takako YAMASAKI (1999), regle yüzeylerinin bir sınıflandırması olan rektifiyan açılabilir yüzeylerin ve rektifiyan Gauss yüzeylerinin singülaritelerini ve singüler noktalarının çeşitlerini incelemiştir. Biz de bu yüzeyleri Legendre eğrilerini kullanarak genelleştirdik ve singülerliklerini inceledik.

Normalde bir yüzeyin iki yüzü olur. Tek yüzlü bir yüzeyin nasıl elde edileceği sorusunu, Alman matematikçi ve gökbilimci August Möbius 19.yy' da bulduğu bir şekil sayesinde çözdü. Bu şekli elde etmek için yapılması gereken. bir kağıt şeridin bir ucunu 180° döndürüp diğer ucuyla birleştirmektir. Oluşan bu şeride 'Möbius şeridi' denir. Şeridin en önemli özelliği tek bir yüzeyi olmasıdır. Bu sayede aşınma azalacağından sanayide oldukça kullanılır.

Aynı zamanda bu çalışmada Möbius şeridinin denkelemini elde ettik ve bir rektifiyan açılabilir yüzey örneği olduğunu gösterdik. Buna ek olarak, Möbius tipli yüzeyleri ele aldık ve hangi şartlar altında yüzeylerin Möbius şeridi olabileceğini inceledik.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan kavramların açıklamalarına ayrılmıştır.

Tanım 2.1 (İç Çarpım) : Bir $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^3$ için $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$, $\bar{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$; $\bar{u}_i, \bar{v}_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \sum_{i=1}^{3} \bar{u}_i \bar{v}_i$$

şeklinde tanımlanıyorsa $\langle , \rangle$ fonksiyonuna $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında iç çarpım denir. Bu iç çarpıma Öklid anlamındaki iç çarpım veya $\mathbb{R}^3$ uzayındaki standart iç çarpım denir (Hacısalihoğlu 2000).

Herhangi iki $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ ve $\bar{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ vektörlerinin iç çarpımı $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2 (Norm) : $\mathbb{R}^3$ uzayında bir a vektörünün normu $\sqrt{\langle a, a \rangle}$ olarak tanımlanır ve $\| \overrightarrow{a} \|$ile gösterilir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.3 (Vektörel Çarpım) : $\mathbb{R}^3$ 3 boyutlu uzayında $\forall \bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$, $\forall \bar{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) \in \mathbb{R}^3$ için vektörel çarpımı

$$\bar{u} \times \bar{v} = (\bar{u}_2 \bar{v}_3 - \bar{v}_2 \bar{u}_3,\ \bar{u}_3 \bar{v}_1 - \bar{v}_3 \bar{u}_1,\ \bar{u}_1 \bar{v}_2 - \bar{v}_1 \bar{u}_2)$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu 1993).

Tanım 2.4 (Eğri) : I, $\mathbb{R}$'nin açık bir alt aralığı olsun. Bu durumda

$$\gamma : I \longrightarrow E^3$$

$$s \longrightarrow (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s))$$

bir diferansiyellenebilir dönüşüm olmak üzere $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^3$ alt kümesine $\mathbb{R}^3$de bir eğri denir (Yüce 2017).

Tanım 2.5 (Hız Vektörü) : $\varsigma'(s) = (\varsigma_1'(s),\ \varsigma_2'(s),\ \varsigma_3'(s))$ vektörüne ς eğrisinin $\varsigma(s)$ noktasındaki hız vektörü adı verilir. (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.6 (Yay Parametresi) : $\varsigma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3, \|\varsigma'(s)\| = 1$ olsun. O halde s'ye eğrinin yay parametresidir denir (Hacısalihoğlu 1993).

Tanım 2.7 (Regüler Eğri) : Hız vektörü, her noktada sıfırdan farklı olan eğri regüler bir eğridir (Yüce 2017).

Tanım 2.8 (Küresel Eğri) : $\mathbb{R}^3$ de verilen bir α eğrisi bir S^2 küresi üzerinde yatıyor ise α eğrisine küresel eğri denir (Yüce 2017).

Tanım 2.9 (Birim Teğet Vektör) : $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisini ele alalım

$$\mathcal{T}(s) = \gamma'(s)$$

şeklinde verilmiş $\mathcal{T}(s)$ vektörüne eğrinin $\gamma(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir. $\mathcal{T}$, γ eğrisi üzerinde bir vektör alanıdır (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.10 (Eğrilik) : $\forall s \in I$ ve $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi için

$$\kappa(s) = \|\mathcal{T}'(s)\|$$

şeklinde tanımlı κ fonksiyonuna eğrinin eğrilik fonksiyonu ve $\kappa(s) \in \mathbb{R}$ reel sayısına da eğrinin $\gamma(s)$ noktasındaki eğriliği denir. $\kappa(s)$ sayısının büyüklüğü, eğrinin $\gamma(s)$ noktasındaki teğetinden ne kadar ayrıldığının ölçüsüdür (Yüce 2017).

$I := [a, b]$ kapalı aralığı ve $\gamma(s)$ $(a \leq s \leq b)$ bir regüler eğri olsun. Bu durumda;

$$\kappa(s) = \frac{\|\gamma'(s) \times \gamma''(s)\|}{\|\gamma'(s)\|^3}$$

fonksiyonu γ'nın eğrilik fonksiyonudur. $\gamma' = \frac{d\gamma}{ds}$ iken; $\kappa(s)$'nın sıfır olduğu noktaya γ'nın bükülme noktası denir (Kurono ve Umehara 2008).

Tanım 2.11 (Asli Normal) : $\mathbb{R}^3$ uzayında $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisini ele alalım

$$\mathcal{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\mathcal{T}'(s)$$

şeklinde verilmiş $\mathcal{N}(s)$ vektörüne eğrinin $\gamma(s)$ noktasındaki asli normal vektörü denir (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.12 (Binormal) : $\mathbb{R}^3$ uzayında $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisini ele alalım.

$$\mathcal{B}(s) = \mathcal{T}(s) \times \mathcal{N}(s)$$

şeklinde tanımlı $\mathcal{B}(s)$ vektörüne γ'nın $\gamma(s)$ noktasındaki binormali denir. Bu vektör alanına γ eğrisi boyunca binormal vektör alanı denir (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.13 (Burulma) : $\mathbb{R}^3$ uzayında $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisini ele alalım. $\mathcal{T}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{B}$, eğrinin Frenet vektör alanları olmak üzere

$$\begin{aligned} \tau &: I \to \mathbb{R}, \\ \tau(s) &= -\langle \mathcal{B}'(s), \mathcal{N}(s) \rangle \\ &= \langle \mathcal{B}(s), \mathcal{N}'(s) \rangle \end{aligned}$$

fonksiyonuna, eğrinin burulma fonksiyonu adı verilir. $\tau(s)$ değerine de γ'nın $\gamma(s)$ noktasındaki burulması denir. $\tau(s)$ sayısının büyüklüğü, eğrinin $\gamma(s)$ noktası komşuluğunda bu noktadaki oskülatör düzleminden ne kadar ayrıldığının ölçüsüdür (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.14 (Frenet Çatısı) : $\mathcal{T}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{B}$ vektör alanlarının γ eğrisi boyunca oluşturdukları $\{\mathcal{T},\ \mathcal{N},\ \mathcal{B}\}$ çatısına γ eğrisinin Frenet çatısı denir.(Yüce 2017)

Teorem 2.1 (Frenet Formülleri) : $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, κ eğrilikli ve τ burulmalı birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}' &= \kappa.\mathcal{N} \\ \mathcal{N}' &= -\kappa.\mathcal{T} + \tau.\mathcal{B} \\ \mathcal{B}' &= -\tau.\mathcal{N} \end{aligned}$$

geçerlidir. Bu formüllere birim hızlı γ eğrisi için Frenet formülleri (denklemleri) denir (Yüce 2017).

$\mathcal{T}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{B}$, $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı γ eğrisinin Frenet vektör alanları ise

$$\begin{pmatrix} \mathcal{N}' \\ \mathcal{B}' \\ \mathcal{T}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tau & -\kappa \\ -\tau & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \mathcal{N} \\ \mathcal{B} \\ \mathcal{T} \end{pmatrix}$$

yazılabilir.

Teorem 2.2 : $\forall s \in I$ ve birim hızlı γ eğrisi için, $\mathcal{T}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{B}$ Frenet vektör alanları olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \times \mathcal{B} &= \mathcal{T} \\ \mathcal{B} \times \mathcal{T} &= \mathcal{N} \end{aligned}$$

dir (Sabuncuoğlu 2004).

Teorem 2.3 : $\mathcal{T}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{B}$, birim hızlı olmayan $\varsigma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için Frenet vektör alanları ; $\kappa \neq 0$ eğrilik ve τ, burulma fonksiyonları olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{\varsigma'}{\|\varsigma'\|} \\ \mathcal{B} &= \frac{\varsigma' \times \varsigma''}{\|\varsigma' \times \varsigma''\|} \\ \mathcal{N} &= \mathcal{B} \times \mathcal{T} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\|\varsigma' \times \varsigma''\|}{\|\varsigma'\|^3} \\ \tau &= \frac{\det(\varsigma', \varsigma'', \varsigma''')}{\|\varsigma' \times \varsigma''\|^2} \end{aligned}$$

dir (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.15 (Yüzey) : $U \subset \mathbb{R}^2$ bir bağlantılı açık küme ve $\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ regüler dönüşümünü ele alalım. $\psi : U \longrightarrow \psi(U)$ dönüşümü eğer homeomorfizm ise $\psi(U)$ kümesine $\mathbb{R}^3$'te regüler yüzey adı verilir (Yüce 2017).

Tanım 2.16 (Şekil Operatörü) : N, M yüzeyinin birim normali; $\chi(M)$, M'nin vektör alanları uzayı ve $\check{D}$, $E^{3\prime}$de Riemann konneksiyonu olmak üzere

$$S(X) = \check{D}_X N$$

biçiminde tanımlı S dönüşümüne yüzeyin şekil operatörü denir (Yüce 2017).

Teorem 2.4 : S lineer bir dönüşümdür (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.17 (Gauss Eğriliği) : T, $\mathbb{R}^{3\prime}$te bir yüzey ve S, T'nin şekil operatörü olsun.

$$\begin{aligned} K &: T \longrightarrow \mathbb{R} \\ K &: t \longrightarrow K(t) = \det S(t) \end{aligned}$$

fonksiyonuna T'nin Gauss eğrilik fonksiyonu, $K(t) \in \mathbb{R}$ sayısına da T'nin t noktasındaki Gauss eğriliğidir denir (Yüce 2017).

Tanım 2.18 (Ortalama Eğrilik) : T, $\mathbb{R}^{3\prime}$te bir yüzey ve S, T' nin şekil operatörü olmak üzere

$$\begin{aligned} H &: T \longrightarrow \mathbb{R} \\ H &: t^* \longrightarrow H(t^*) = \frac{1}{2} izS(t^*) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı H fonksiyonuna yüzeyin ortalama eğrilik fonksiyonu, $H(t^*)$ sayısına da o noktadaki ortalama eğriliği denir (Yüce 2017).

Tanım 2.19 (Eğri-Yüzey ikilisi) : $\mathbb{R}^3$'te bir R yüzeyi üzerinde, $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi verilsin. Yüzeyin birim dik vektör alanı Y ve γ eğrisinin birim teğet vektör alanı $\mathcal{T}$ olmak üzere

$$(Y \circ \gamma) \times \mathcal{T} = Z$$

şeklinde tanımlanan Z vektör alanını göz önüne alalım. $\{\mathcal{T}(s), Y(s), (Y \circ \gamma)(s)\}$ kümesi $T_{\gamma(s)}\mathbb{R}^3$ uzayının ortonormal bir tabanı olur. Bu tabana (γ, R) eğri-yüzey çiftinin çatısı denir (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.20 (Normal Eğrilik) : $\gamma : I \longrightarrow R$ birim hızlı eğri olmak üzere

$$\kappa_n(s) = \langle \gamma''(s), (Y \circ \gamma)(s) \rangle$$

eşitliğiyle belirli $\kappa_n(s)$ sayısına (γ, R) eğri-yüzey çiftinin $\gamma(s)$ noktasındaki normal eğriliği denir (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.21 (Geodezik Eğrilik) : $\gamma : I \longrightarrow R$ birim hızlı eğri olmak üzere

$$\kappa_g(s) = \langle \gamma''(s), Z(s) \rangle$$

sayısına (γ, R) eğri-yüzey çiftinin $\gamma(s)$ noktasındaki geodezik eğriliği denir (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.22 (Geodezik Burulma) : $\gamma : I \longrightarrow R$ birim hızlı bir eğri olmak üzere

$$\tau_g(s) = -\langle (Y \circ \gamma)'(s), Z(s) \rangle$$

eşitliğiyle belirli $\tau_g(s)$ sayısına (γ, R) eğri-yüzey çiftinin $\gamma(s)$ noktasındaki geodezik burulması denir (Sabuncuoğlu 2004).

Teorem 2.5 : $\gamma : I \longrightarrow M$ düzenli eğrisinin bir asimptotik eğri olması için, $\kappa_n = 0$ olması gerekir ve yeter (Sabuncuoğlu 2004).

Teorem 2.6 : $\gamma : I \longrightarrow M$ eğrisi geodezik eğri ise $\kappa_g = 0$ dır. Karşıt olarak $\gamma : I \longrightarrow M$ eğrisinin hız vektörünün uzunluğu sabit ve $\kappa_g = 0$ ise $\gamma : I \longrightarrow M$ eğrisi bir geodezik eğridir (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.23 (Singüler Nokta) : $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisinde $\gamma'(t) = 0$ olan noktalara γ eğrisinin singüler noktaları denir.

Tanım 2.24 (Helis) : $\mathbb{R}^3$ uzayındaki bir γ eğrisinin birim teğeti $\mathcal{T}$ olsun. $\mathcal{T}$ vektör alanı, sabit bir u vektörü ile sabit açı yapıyorsa γ eğrisine bir helis adı verilir. Sabit u vektörüne de helisin ekseni denir (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.25 (Slant Helis) : $\mathbb{R}^3$ uzayındaki bir γ eğrisinin $\kappa(s) \neq 0$ olmak üzere asli normali $\mathcal{N}$, sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa eğriye slant helis adı verilir (Izumiya ve Takeuchi 2004).

Tanım 2.26 (Boğaz Noktası) : Bir $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin doğrultmanlar üzerindeki ayaklarına boğaz (striksiyon) noktası adı verilir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.27 (Striksiyon Çizgisi) :Bir $\varphi(t,v)$ regle yüzeyinin doğrultmanı, dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken striksiyon noktalarının geometrik yerine $\varphi(t,v)$ yüzeyinin striksiyon çizgisi adı verilir. (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.28 (Umbilik Nokta) : M yüzeyinin bir p noktasında S_p lineer dönüşümü, birim dönüşümün bir sayı ile çarpımına eşit ise p noktasına yüzeyin bir umbilik noktası denir (Sabuncuoğlu 2010).

Tanım 2.29 (Dağılma parametresi (drali)) : Regle yüzeyin iki komşu doğrultmanı arasındaki en kısa mesafenin bu komşu doğrultmanlar arasındaki açıya oranına yüzeyin drali adı verilir. (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.30 (Asimptotik Vektör) : $u_p \neq 0$ ve $\langle S(u_p), u_p \rangle = 0$ ise u_p teğet vektörüne, p noktasında bir asimptotik vektör adı verilir. (Sabuncuoğlu 2010).

Tanım 2.31 (Asimptotik Eğri) : M, $\mathbb{R}^3$de bir yüzey olmak üzere, her noktasındaki teğet vektörü asimptotik olan eğriye M üzerinde bir asimptotik eğridir denir (Yüce 2017).

3. REKTİFİYAN AÇILABİLİR YÜZEYLER VE SİNGÜLER NOKTALARI

Açılabilir regle yüzeyler ele alındığında bu yüzeylerin iki tipine rastlanır. Bunlardan ilki taban eğrisi eğrilik çizgisi olan açılabilir regle yüzeylerdir. İkinci tip ise Darboux vektörü kullanılarak elde edilen ve taban eğrisi geodezik olan açılabilir regle yüzeylerdir.

Bu yüzeylerin singüler noktaları incelenmiş olup bu bölüm ise Izumiya, Katsumi ve Yamasaki tarafından yazılan "The rectifying developable and the spherical darboux image of a space curve" isimli makalenin geniş bir şekilde incelenmesine ayrılmıştır.

3.1 Rektifiyan Açılabilir Yüzeyler

Uzayda herhangi bir doğru, bir eğriye dayanarak hiçbir kurala bağlı kalmaksızın hareket ettirildiğinde elde edilen yüzeylere regle yüzeyler denir. Regle yüzeyler çoğunlukla mimarlık alanında kullanılır.
$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ düzgün bir eğri ve $v : I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ bu dayanak eğrisi üzerinde

birim uzunlukta bir vektör olsun. v, I aralığındaki her bir s'ye karşılık $\alpha(s)$ noktasında $v(s)$ vektörünü karşılık getiren bir dönüşümdür. O halde α ve v aracılığıyla belirlenen M regle yüzeyinin parametrik denklemi

$$\begin{aligned} y &: I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ y(s,u) &= \alpha(s) + uv(s) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. α eğrisine regle yüzeyin dayanak eğrisi, $v(s)$ vektörüne de regle yüzeyin $\alpha(s)$ noktasındaki doğrultmanı denir. $\alpha(s)$ noktasından geçen ve $v(s)$ vektörüne paralel olan doğruya $\alpha(s)$ noktasından geçen ana doğru adı verilir.
Bir regle yüzeyde eğer v sabit bir vektör $(v'(s) = 0)$ ise yüzeye silindirik yüzey denir. $\forall s \in I$ için $v'(s) \neq 0$ oluyorsa bu tür yüzeylere silindirik olmayan yüzeyler denir. $v'(s) \neq 0$ olduğunu kabul edelim.

Bu durumda

$$\langle \beta'(s), v'(s) \rangle = 0$$

şartını sağlayan bir $\beta(s) \in y(s,u)$ vardır. Bu eğriye regle yüzeyin **striksiyon çizgisi** denir. Bazı $f = f(s,u)$ düzgün fonksiyonları için eğri parametresi

$$\beta(s) = \alpha(s) + f(s).v(s)$$

verildiğinde yüzeyin striksiyon çizgisi

$$\beta = \alpha - \frac{\langle \alpha', v' \rangle}{\langle v', v' \rangle} v \tag{3.1}$$

şeklindedir.Bir regle yüzeyin singüler noktaları, striksiyon eğrisi üzerinde bulunmaktadır. Eğer $v'(s) = 0$ $(\beta = \alpha)$ ise regle yüzey striksiyon eğrisine sahip değildir ki bu durum regle yüzeyin silindir olması anlamına gelir.
β striksiyon çizgisi olmak üzere;

$$\lambda = \frac{\langle \beta' \times v, v' \rangle}{\|v'\|^2} \tag{3.2}$$

ifadesine regle yüzeyin **dağılma parametresi (drali)** denir.
O halde (3.1) ve (3.2)'den silindirik regle yüzeyin dağılma parametresini şu şekilde yazabiliriz:

$$\lambda = \frac{\langle \alpha' \times v, v' \rangle}{\|v'\|^2}$$

Bir regle yüzeyin Gauss eğriliği daima negatif veya sıfırdır; yani yüzey üzerinde herhangi bir p noktası için $K(p) \leq 0$'dır. Yüzeyin regüler noktalarında

$$K(s,u) = -\frac{\lambda^2(s)}{\left(\lambda^2(s) + u^2\right)^2}$$

dır. Bir regle yüzeyin tüm regüler noktalarında $K = 0$ ise bu regle yüzeye açılabilir yüzey denir (Boylan 2011).

Teorem 3.1 : Bir regle yüzey açılabilirdir ancak ve ancak dağılma parametresi sıfırdır (Hacısalihoğlu 2000).

(3.2)'den bir regle yüzey açılabilirdir ancak ve ancak

$$\langle \beta'(s) \times v(s), v'(s) \rangle = \det(\langle \beta'(s), v(s), v'(s) \rangle) = 0, \forall s \in I$$

olarak bulunur.

Şimdi de bir regle yüzeyin regle şerit olabilmesi için gereken şartları ve regle şerit hakkında diğer tanımları verelim.

Tanım 3.1 : $\mathbb{R}^3$'te $\xi(s)$ bir vektör alanı olsun. ϵ pozitif bir sabit olmak üzere;

$$F_{\gamma,\xi}(s,u) = \gamma(s) + u.\xi(s) \qquad (s \in I,\ |u| < \epsilon)$$

şeridini ele alalım. $\times$, $\mathbb{R}^3$'te vektörel çarpım olmak üzere;

$$\gamma'(s) \times \xi(s) \neq 0$$

şartı sağlanıyorsa $F_{\gamma,\xi}$ yüzeyine regle şerittir denir.

$$\det(\gamma'(s), \xi(s), \xi'(s)) = 0 \qquad (a \leq s \leq b)$$

şartı da sağlanıyorsa $F_{\gamma,\xi}$'ye açılabilir şerit denir. Gerçekten bu şart $F_{\gamma,\xi}$'nın Gauss eğriliğinin sıfır olması ile eşdeğerdir (Kurono ve Umehara 2008).

Tanım 3.2 : $F_{\gamma,\xi}$ açılabilir bir şerit olsun. ., $\mathbb{R}^3$'te iç çarpım olmak üzere;

$$\xi(s).\gamma'(s) = 0 \qquad (a \leq s \leq b)$$

şartı sağlanıyorsa $F_{\gamma,\xi}$ 'ye principal veya ortogonaldir denir (Kurono ve Umehara 2008).

Eğer; $\gamma(s)$ umbilik değil ise merkez eğri $\gamma(s)$'in eğrilik çizgisidir.

Önerme 3.1 : γ bir regüler eğri ve $\xi(s)$ vektör alanı olsun öyle ki ;

$$\begin{aligned} \xi(s).\gamma'(s) &= 0 \\ \xi'(s) \times \gamma'(s) &= 0 \end{aligned}$$

dir. O halde $F_{\gamma,\xi}$ principal açılabilir şerittir ve $\gamma(s)$ eğrilik çizgisidir (Kurono ve Umehara 2008).

Tanım 3.3 : $F_{\gamma,\xi}$ açılabilir bir şerit olsun. ., $\mathbb{R}^3$'te iç çarpım olmak üzere;

$$\xi(s).\gamma''(s) = 0 \qquad (a \leq s \leq b)$$

şartı sağlanıyorsa $F_{\gamma,\xi}$ 'ye rektifiyandır denir (Kurono ve Umehara 2008).

Açılabilir regle yüzeyler ile ilgili teoremleri vermeden önce aşağıdaki tanımları verelim.

Tanım 3.4 Birim hızlı $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin γ eğrisinin birim teğet vektörü $\mathcal{T}$, normali $\mathcal{N}$,binormali $\mathcal{B}$ olmak üzere

$$d(s) = \tau(s)\mathcal{T}(s) + \kappa(s)\mathcal{B}(s)$$

vektörüne γ eğrisinin Darboux vektör alanı denir.Darboux vektörünü kullanarak Frenet formülleri tekrar yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{T}' &= d(s) \times \mathcal{T}(s) \\ \mathcal{N}' &= d(s) \times \mathcal{N}(s) \\ \mathcal{B}' &= d(s) \times \mathcal{B}(s) \end{aligned}$$

elde edilir (Izumiya vd. 1999).

Tanım 3.5 : Birim hızlı $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. $\kappa(s) \neq 0$ olmak üzere

$$\widetilde{d}(s) = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s)\mathcal{T}(s) + \mathcal{B}(s)$$

ifadesine γ eğrisinin modified Darboux vektör alanı denir (Izumiya vd. 1999).

Tanım 3.6 : $\alpha, v \in S^2$ olmak üzere $\alpha(s)$ ve $v(s)$ küresel eğriler olsun.

$$\begin{aligned} \langle \alpha', v \rangle &= 0 \\ \langle \alpha, v \rangle &= 0 \end{aligned}$$

şartları sağlanıyorsa α'ya duali v olan Legendre Eğrisi denir.

$\alpha, v \in S^2$ olsun. $\mu := \alpha \times v$ ve $\{m, n\}$ eğrilik fonksiyonları olmak üzere $\{\alpha, v, \mu\}$ çatısı için

$$\begin{pmatrix} \mu \\ \alpha \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & m & -n \\ -m & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu \\ \alpha \\ v \end{pmatrix}$$

sağlanır. Bu durumda $n(s) \neq 0$ olmak üzere $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisinin modified Darboux vektör alanı

$$\widetilde{d}(s) = \left(\frac{m}{n}\right)(s)\,\mathcal{T}(s) + \mathcal{B}(s)$$

olarak bulunur.

Teorem 3.2 : $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ duali v olan birim hızlı bir Legendre eğrisi ve $u \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$F_{(\alpha,v)}(s,u) = \alpha(s) + u.v(s)$$

yüzeyi verilsin. Bu durumda bu yüzey için aşağıdakiler sağlanır.

1. $F_{(\alpha,v)}(s,u)$ yüzeyi açılabilirdir.
2. $u = sbt$ eğrileri eğrilik çizgileridir.
3. $n \neq 0$ olmak üzere $u_0 = \left(\frac{m}{n}\right)(s_0)$ için

$$F_{(\alpha,v)}(s_0,u_0) = \alpha(s_0) + \left(\frac{m}{n}\right)(s_0).v(s_0)$$

   noktaları yüzeyin singüler noktalarıdır.

4. $n \neq 0$ olmak üzere $F_{(\alpha,v)}(s,u)$ yüzeyinin striksiyon çizgisi

$$\overline{\alpha} = \alpha + \frac{m}{n}.v$$

   dir.

5. $\frac{m}{n} = sbt \Longleftrightarrow F_{(\alpha,v)}(s,u)$ bir koni yüzeyidir.

İspat. 1. $\det(\alpha', v, v') = 0$ olduğundan $F_{(\alpha,v)}(s,u)$ açılabilir yüzeydir.
2. u sabit eğrilerinin teğeti ile F yüzeyinin normalinin türevi paralel ise u eğrilik çizgisidir.

$$\begin{aligned} F_s &= \alpha' + u.v' \\ &= (-m(s) + u.n(s))\,\overrightarrow{\mu} \end{aligned}$$

ve

$$F_u = \overrightarrow{v}$$

dir.Buradan

$$\begin{aligned} N_F &= \frac{F_u \times F_s}{\|F_u \times F_s\|} \\ &= \alpha(s) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} N_F' &= \alpha'(s) \\ &= -m(s)\overrightarrow{\mu} \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda $F_s \| N_F'$ olduğundan $u = sbt$ eğrileri eğrilik çizgisidir.

3. $F_{(\alpha,v)}(s,u) = \alpha(s) + u.v(s)$ yüzeyi için $F_s = 0$ olan noktalara F yüzeyinin singüler noktaları denir.

$$\begin{aligned} F_s &= \alpha' + u.v' \\ &= (-m(s) + u.n(s))\overrightarrow{\mu} \end{aligned}$$

elde edilir. $F_s = \overrightarrow{0}$ olabilmesi için

$$-m(s) + u.n(s) = 0$$

olmalıdır. Bu da $u_0 = \left(\frac{m}{n}\right)(s_0)$ olması demektir.

4. F yüzeyinin striksiyon çizgisi $\overline{\alpha} = \alpha - \frac{\langle \alpha', v' \rangle}{\langle v', v' \rangle}.v$'dir.

$$\langle \alpha', v' \rangle = -m.n$$

ve

$$\langle v', v' \rangle = n^2$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \overline{\alpha} &= \alpha + \frac{m.n}{n^2}.v \\ &= \alpha + \frac{m}{n}.v \end{aligned}$$

elde edilir.

$m = 0 \Longleftrightarrow \overline{\alpha} = \alpha$'dır. Bu da striksiyon çizgisinin taban eğrisi olması demektir.

5. $\Rightarrow$

$$\frac{m}{n} = sbt \text{ ise } (\frac{m}{n})' = 0\text{'dır.}$$

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}' &= (\frac{m}{n})'.v + (\frac{m}{n}).v' \\ &= -m\overrightarrow{\mu} + (\frac{m}{n})'.v + (\frac{m}{n}).n\overrightarrow{\mu} \\ &= -m\overrightarrow{\mu} + (\frac{m}{n})'.v + m\overrightarrow{\mu} \\ &= (\frac{m}{n})'.v \end{aligned}$$

olup $\overline{\alpha}' = 0$'dır. Bu durumda $F_{(\alpha,v)}(s,u)$ yüzeyi koni belirtir.

$\Leftarrow$

$$F_{(\alpha,v)}(s,u) \text{ koni yüzeyi ise } \overline{\alpha}' = 0\text{'dır.}$$

$$\overline{\alpha}' = (\frac{m}{n})'.v$$

$\overline{\alpha}' = 0$ olabilmesi için $(\frac{m}{n})' = 0$ olmalıdır. Bu durumda $\frac{m}{n} = sbt$ olduğu görülür. ■

Teorem 3.3 : $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı ve duali v olan bir Legendre eğrisi ve $u \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$F_{\left(\alpha,\widetilde{d}\right)}(s,u) = \alpha(s) + u.\widetilde{d}(s)$$

yüzeyi verilsin. Bu durumda bu yüzey için aşağıdakiler sağlanır.

1. $F_{\left(\alpha,\widetilde{d}\right)}(s,u)$ yüzeyi açılabilirdir.

2. $u = sbt$ eğrileri geodeziktir.

3. $\left(\frac{m}{n}\right)'(s_0) \neq 0$ olmak üzere $u_0 = -\frac{1}{\left(\frac{m}{n}\right)'(s_0)}$ için

$$F_{\left(\alpha,\widetilde{d}\right)}(s_0,u_0) = \alpha(s_0) - \frac{1}{\left(\frac{m}{n}\right)'(s_0)}.\widetilde{d}(s_0)$$

   noktaları yüzeyin singüler noktalarıdır.

4. $\left(\frac{m}{n}\right)'(s_0) \neq 0$ olmak üzere $F_{\left(\alpha,\widetilde{d}\right)}(s,u)$ yüzeyinin striksiyon çizgisi

$$\overline{\alpha} = \alpha - \frac{1}{\left(\frac{m}{n}\right)'}.\widetilde{d}$$

   dir.

5. $\frac{1}{\left(\frac{m}{n}\right)'} = sbt \Longleftrightarrow F_{\left(\alpha,\widetilde{d}\right)}(s,u)$ bir koni yüzeyidir.

İspat. 1. $\widetilde{d}'$ ile α' lineer bağımlı olduğundan $\det\left(\alpha', \widetilde{d}, \widetilde{d}'\right) = 0$'dır. O halde $F_{\left(\alpha,\widetilde{d}\right)}(s,u)$ yüzeyi açılabilirdir.

2.

$$F_{\left(\alpha,\widetilde{d}\right)}(s,u) = \alpha(s) + u.\widetilde{d}(s)$$

yüzeyini ele alalım. Bu yüzeyin normali ile $u = (c)\, sbt$ eğrilerinin ivmesi lineer bağımlı ise eğriler geodeziktir.

İlk olarak yüzeyin normalini bulalım.

$$\widetilde{d}(s) = \frac{m(s)}{n(s)}\mathcal{T}(s) + \mathcal{B}(s)$$

Darboux vektör alanının türevi alınırsa;

$$\begin{aligned}\widetilde{d}'(s) &= \left(\frac{m(s)}{n(s)}\right)'\mathcal{T}(s) + \frac{m(s)}{n(s)}n(s)\mathcal{N}(s) - m(s)\mathcal{N}(s)\\ &= \left(\frac{m}{n}\right)'(s)\,\mathcal{T}(s)\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}F_s &= \alpha'(s) + u.\widetilde{d}'(s)\\ &= \mathcal{T}(s) + u.\left(\frac{m}{n}\right)'(s)\,\mathcal{T}(s)\\ &= \left(1 + u.\left(\frac{m}{n}\right)'\right).\mathcal{T}(s)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}F_u &= \widetilde{d}(s)\\ &= \frac{m(s)}{n(s)}\mathcal{T}(s) + \mathcal{B}(s)\end{aligned}$$

olduğundan yüzeyin normali

$$\begin{aligned}N_F &= \frac{F_s \times F_u}{\|F_s \times F_u\|}\\ &= \left(1 + u.\left(\frac{m}{n}\right)'\right).\mathcal{T}(s) \times \mathcal{B}(s)\\ &= -\left(1 + u.\left(\frac{m}{n}\right)'\right).\mathcal{N}(s)\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

$u = sbt = c$ eğrilerini δ ile gösterelim.

$$F_{(\alpha,\widetilde{d})}(s,c) = \alpha(s) + c.\widetilde{d}(s)$$

dır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \delta' &= \alpha'(s) + c.\widetilde{d}'(s) \\ \delta' &= \left(1 + c.\left(\frac{m}{n}\right)'\right).\mathcal{T}(s) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{\delta'}{\|\delta'\|} &= \frac{\left(1 + c.\left(\frac{m}{n}\right)'\right).\mathcal{T}(s)}{\left(1 + c.\left(\frac{m}{n}\right)'\right)} \\ &= \mathcal{T}(s) \end{aligned}$$

dir.

Buradan

$$\delta'' = n.\mathcal{N}(s)$$

elde edilir. O halde

$$\delta'' = \lambda.N_F$$

eşitliği $\lambda = \frac{-1}{\left(1+c.\left(\frac{m}{n}\right)'\right)}$ için sağlanır. Sonuç olarak yüzeyin normali ile $u = (c)\, sbt$ eğrilerinin ivmesi lineer bağımlı olduğundan eğriler geodeziktir.

3.

$$\widetilde{d}'(s) = \left(\frac{m}{n}\right)'\mathcal{T}(s) \tag{3.3}$$

olduğu biliniyor.

$$\alpha'(s) = \mathcal{T}(s) \tag{3.4}$$

(3.3) ve (3.4)' ten

$$\begin{aligned} F_s &= \alpha' + u.\widetilde{d}' \\ &= \mathcal{T}(s) + u\left(\frac{m}{n}\right)'\mathcal{T}(s) \\ &= \left(1 + u\left(\frac{m}{n}\right)'\right)\mathcal{T}(s) \end{aligned}$$

elde edilir. $F_s = \overrightarrow{0}$ olabilmesi için

$$1 + u\left(\frac{m}{n}\right)' = 0$$

olmalıdır.Bu da $u_0 = -\frac{1}{\left(\frac{m}{n}\right)'(s_0)}$ olması demektir.

4. F yüzeyinin striksiyon çizgisi $\overline{\alpha} = \alpha - \frac{\langle \alpha', \widetilde{d}' \rangle}{\langle \widetilde{d}', \widetilde{d}' \rangle}.\widetilde{d}$'dir.

$$\begin{aligned} \langle \alpha', \widetilde{d}' \rangle &= \langle \mathcal{T}(s), \left(\frac{m}{n}\right)' \mathcal{T}(s) \rangle \\ &= \left(\frac{m}{n}\right)' \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{d}', \widetilde{d}' \rangle &= \langle \left(\frac{m}{n}\right)' \mathcal{T}(s), \left(\frac{m}{n}\right)' \mathcal{T}(s) \rangle \\ &= \left(\left(\frac{m}{n}\right)'\right)^2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

(3.5) ve (3.6)' dan

$$\begin{aligned} \overline{\alpha} &= \alpha - \frac{\left(\frac{m}{n}\right)'}{\left(\left(\frac{m}{n}\right)'\right)^2}\widetilde{d} \\ &= \alpha - \frac{1}{\left(\frac{m}{n}\right)'}\widetilde{d} \end{aligned}$$

elde edilir.

5.

$$\frac{1}{\left(\frac{m}{n}\right)'} = sbt \Longrightarrow \left(\frac{m}{n}\right)' = sbt$$

$$\left(\frac{m}{n}\right)' = c \Longrightarrow \frac{m}{n} = cs + f$$

dir. O halde $F_{\left(\alpha,\widetilde{d}\right)}(s,u)$ bir koni yüzeyidir. ■

Örnek 3.1 $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi için $\frac{\tau}{\kappa} = cs + f$ olsun.

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = c = sbt$$

olduğundan α eğrisi bir rektifiyan eğridir. α eğrisinin modified Darboux vektör alanı

$$\widetilde{d}(s) = (cs + f)\mathcal{T}(s) + \mathcal{B}(s)$$

dir. $u \in \mathbb{R}$ olmak üzere $F_{\left(\alpha,\widetilde{d}\right)}(s,u) = \alpha(s) + u.\widetilde{d}(s)$ yüzeyi verilsin.

1.

$$\alpha'(s) = \mathcal{T}(s) \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{d}'(s) &= [(cs+f)\mathcal{T}(s) + \mathcal{B}(s)]' \\ &= c[\mathcal{T}(s) + s\mathcal{T}'(s)] + f\mathcal{T}'(s) + \mathcal{B}'(s) \\ &= c\mathcal{T}(s) + cs\kappa\mathcal{N}(s) + f\kappa\mathcal{N}(s) - \tau\mathcal{N}(s) \\ &= c\mathcal{T}(s) + \mathcal{N}(s)\kappa\left[cs + f - \frac{\tau}{\kappa}\right] \\ &= c\mathcal{T}(s) \end{aligned} \tag{3.8}$$

(3.7)ve (3.8)'den görülüyor ki $\widetilde{d}'(s)$ ve $\alpha'(s)$ lineer bağımlıdır. Bu durumda

$$\det\left(\alpha', \widetilde{d}, \widetilde{d}'\right) = 0$$

dır. O halde $F_{(\alpha,\widetilde{d})}(s,u)$ açılabilirdir.

2.

$$\begin{aligned} F_s &= \alpha' + u.\widetilde{d}' \\ &= (1+uc)\mathcal{T}(s) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} F_u &= \widetilde{d}(s) \\ &= (cs+f)\mathcal{T}(s) + \mathcal{B}(s) \end{aligned}$$

olduğundan $F_{(\alpha,\widetilde{d})}(s,u)$ yüzeyinin normali

$$\begin{aligned} N_F &= \frac{F_s \times F_u}{\|F_s \times F_u\|} \\ &= -(1+uc).N(s) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $u = sbt = c$ eğrilerini δ ile gösterelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} \delta' &= \alpha'(s) + c.\widetilde{d}'(s) \\ \delta' &= \mathcal{T}(s) + c.c\mathcal{T}(s) \\ &= \left(1+c^2\right)\mathcal{T}(s) \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}\frac{\delta'}{\|\delta'\|} &= \frac{(1+c^2)\,\mathcal{T}(s)}{(1+c^2)} \\ &= \mathcal{T}(s)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\delta'' = n.\mathcal{N}(s)$$

elde edilir. O halde

$$\delta'' = \lambda.N_F$$

eşitliği $\lambda = \frac{-1}{(1+uc)}$ için sağlanır. Sonuç olarak yüzeyin normali ile $u = (c)\,sbt$ eğrilerinin ivmesi lineer bağımlı olduğundan eğriler geodeziktir.

3. $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s_0) = c(s_0) \neq 0$ olmak üzere (3.7) ve (3.8)'den

$$\begin{aligned}F_s &= \alpha' + u\widetilde{d'} \\ &= \mathcal{T}(s) + c\mathcal{T}(s) \\ &= (1+uc)\,\mathcal{T}(s)\end{aligned}$$

bulunur. $F_s = \overrightarrow{0}$ olabilmesi için

$$(1+uc) = 0$$

olmalıdır. O halde $u_0 = -\frac{1}{c(s_0)}$ için $F(s_0, u_0) = \alpha(s_0) - \frac{1}{c(s_0)}.\widetilde{d}(s_0)$ noktaları yüzeyin singüler noktalarıdır.

4. $F_{\left(\alpha,\widetilde{d}\right)}(s,u) = \alpha(s) + u.\widetilde{d}(s)$ yüzeyinin striksiyon çizgisi $\overline{\alpha} = \alpha - \frac{\langle \alpha', \widetilde{d'}\rangle}{\langle \widetilde{d'}, \widetilde{d'}\rangle}.\widetilde{d'}$dir.

$$\langle \alpha', \widetilde{d'}\rangle = \langle \mathcal{T}(s), c\mathcal{T}(s)\rangle = c \tag{3.9}$$

$$\langle \widetilde{d'}, \widetilde{d'}\rangle = \langle c\mathcal{T}(s), c\mathcal{T}(s)\rangle = c^2 \tag{3.10}$$

(3.9) ve (3.10)'dan

$$\begin{aligned}\overline{\alpha} &= \alpha - \frac{c}{c^2}.\widetilde{d} \\ &= \alpha - \frac{1}{c}.\widetilde{d}\end{aligned}$$

olarak bulunur.

5.

$$\frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'} = sbt \Longrightarrow \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = sbt$$

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = c \Longrightarrow \frac{\tau}{\kappa} = cs + f$$

dir. O halde $F_{\left(\alpha,\widetilde{D}\right)}(s,u)$ bir koni yüzeyidir.

$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi için Frenet vektörleri $\mathcal{T}(s), \mathcal{N}(s), \mathcal{B}(s)$ olmak üzere aşağıdaki tanımları verelim.

Tanım 3.7 : $\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı ve $\kappa(s) \neq 0$ eğrilikli $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin **rektifiyan Gauss yüzeyi**

$$RG(\gamma) = \{u.\mathcal{T}(s) + \mathcal{B}(s) \mid u \in \mathbb{R}, s \in I\}$$

şeklindedir (Izumiya vd. 1999).

Tanım 3.8 : γ, $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı ve $\kappa(s) \neq 0$ eğrilikli bir eğri olmak üzere;

$$RD(\gamma) = \left\{\gamma(s) + u.\widetilde{d}(s) \mid u \in \mathbb{R}\right\}$$

şeklinde verilen yüzey γ eğrisinin **rektifiyan açılabilir yüzeyi**dir (Izumiya vd. 1999).

Örnek 3.2 : Bir dairesel helisin rektifiyan Gauss yüzeyi bir konidir. Gösterelim:

$\bar{\omega}(\varepsilon) = (q^* \cos\varepsilon, q^* \sin\varepsilon, r^*\varepsilon)$ dairesel helisini alalım ve teğet vektör alanı ile binormal vektör alanını hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \bar{\omega}'(\varepsilon) &= (-q^* \sin\varepsilon, q^* \cos\varepsilon, r^*) \\ \|\bar{\omega}'(\varepsilon)\| &= \sqrt{q^{*2} + r^{*2}} \end{aligned}$$

olup buradan

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\varepsilon) &= \frac{\bar{\omega}'(\varepsilon)}{\|\bar{\omega}'(\varepsilon)\|} \\ &= \frac{(-q^* \sin\varepsilon, q^* \cos\varepsilon, r^*)}{\sqrt{q^{*2} + r^{*2}}} \end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}''(\varepsilon) &= (-q^*\cos\varepsilon, -q^*\sin\varepsilon, 0) \\
\bar{\omega}'(\varepsilon)\times\bar{\omega}''(\varepsilon) &= \begin{vmatrix} . & . & . \\ -q^*\sin\varepsilon & q^*\cos\varepsilon & r^* \\ -q^*\cos\varepsilon & -q^*\sin\varepsilon & 0 \end{vmatrix} \\
&= \left(q^*r^*\sin\varepsilon, q^*r^*\cos\varepsilon, q^{*2}\right) \\
\|\bar{\omega}'(\varepsilon)\times\bar{\omega}''(\varepsilon)\| &= q^*\sqrt{q^{*2}+r^{*2}}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(\varepsilon) &= \frac{\bar{\omega}'(\varepsilon)\times\bar{\omega}''(\varepsilon)}{\|\bar{\omega}'(\varepsilon)\times\bar{\omega}''(\varepsilon)\|} \\
&= \frac{(q^*r^*\sin\varepsilon, q^*r^*\cos\varepsilon, q^{*2})}{q^*\sqrt{q^{*2}+r^{*2}}} \\
&= \frac{(r^*\sin\varepsilon, r^*\cos\varepsilon, q^*)}{\sqrt{q^{*2}+r^{*2}}}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. O halde;

$$\begin{aligned}
RG(\gamma) &= u.\mathcal{T}(\varepsilon)+\mathcal{B}(\varepsilon) \\
&= u.\left(\frac{(-q^*\sin\varepsilon, q^*\cos\varepsilon, r^*)}{\sqrt{q^{*2}+r^{*2}}}\right)+\left(\frac{(q^*\sin\varepsilon, r^*\cos\varepsilon, q^*)}{\sqrt{q^{*2}+r^{*2}}}\right)
\end{aligned}$$

yüzeyi elde edilir.

$$\tau(\varepsilon) = \frac{\det\left(\bar{\omega}'(\varepsilon), \bar{\omega}''(\varepsilon), \bar{\omega}'''(\varepsilon)\right)}{\|\bar{\omega}'(\varepsilon)\times\bar{\omega}''(\varepsilon)\|^2}$$

olup

$$\begin{aligned}
\det\left(\bar{\omega}'(\varepsilon), \bar{\omega}''(\varepsilon), \bar{\omega}'''(\varepsilon)\right) &= \begin{vmatrix} -q^*\sin\varepsilon & q^*\cos\varepsilon & r^* \\ -q^*\cos\varepsilon & -q^*\sin\varepsilon & 0 \\ q^*\sin\varepsilon & -q^*\cos\varepsilon & 0 \end{vmatrix} \\
&= r^*\left(q^{*2}\cos^2\varepsilon + q^{*2}\sin^2\varepsilon\right) \\
&= r^*q^{*2}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\tau(\varepsilon) &= \frac{r^*q^{*2}}{q^{*2}\left(q^{*2}+r^{*2}\right)} \\
&= \frac{r^*}{\left(q^{*2}+r^{*2}\right)}
\end{aligned}$$

elde edilir ve

$$\kappa(\varepsilon) = \frac{\|\bar{\omega}'(\varepsilon) \times \bar{\omega}''(\varepsilon)\|}{\|\bar{\omega}'(\varepsilon)\|^3}$$

olup

$$\begin{aligned} \kappa(\varepsilon) &= \frac{q^* \sqrt{q^{*2} + r^{*2}}}{(q^{*2} + r^{*2}) \sqrt{q^{*2} + r^{*2}}} \\ \kappa(\varepsilon) &= \frac{q^*}{(q^{*2} + r^{*2})} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu durumda

$$\frac{\tau}{\kappa}(\varepsilon) = \frac{r^*}{q^*} = sbt$$

olduğundan dairesel helisin rektifiyan Gauss yüzeyi bir koni belirtir.

Örnek 3.3 : Bir dairesel helisin rektifiyan açılabilir yüzeyi bir dairesel silindirdir. Gösterelim:

$\bar{\omega}(\varepsilon) = (q^* \cos\varepsilon, q^* \sin\varepsilon, r^*\varepsilon)$ dairesel helisini alalım.
$F_{\left(\bar{\omega},\widetilde{d}\right)}(\varepsilon, u) = \bar{\omega}(\varepsilon) + u.\widetilde{d}(\varepsilon)$ olduğundan,

$$F_{\left(\bar{\omega},\widetilde{d}\right)}(\varepsilon, u) = (q^* \cos\varepsilon, q^* \sin\varepsilon, r^*\varepsilon) + u\left(\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(\varepsilon), 0, 1\right)$$

dir. γ bir dairesel helis olduğundan $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(\varepsilon) = sabittir$.
$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(\varepsilon) = c$ diyelim. O halde;

$$\begin{aligned} F_{\left(\bar{\omega},\widetilde{d}\right)}(\varepsilon, u) &= (q^* \cos\varepsilon, q^* \sin\varepsilon, 0) + \varepsilon(0, 0, r^*) + u(c, 0, 1) \\ &= (q^* \cos\varepsilon, q^* \sin\varepsilon, 0) + (\varepsilon + u)(c, 0, r^* + 1) \end{aligned}$$

elde edilir. $(\varepsilon + u) = \delta$ diyelim. Bu durumda;

$$F_{\left(\bar{\omega},\widetilde{d}\right)}(\varepsilon, \delta) = (q^* \cos\varepsilon, q^* \sin\varepsilon, 0) + \delta(c, 0, r^* + 1)$$

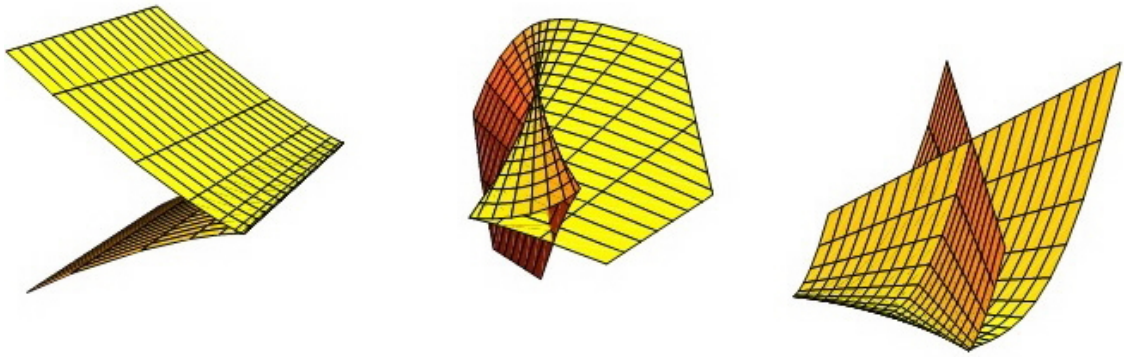
bulunur. Burada $(c, 0, r^* + 1) = sbt$ olduğundan dairesel helisin rektifiyan açılabilir yüzeyi dairesel silindirdir.

3.2 Rektifiyan Açılabilir Yüzeylerin Singülerliği

Yüzeylerin singüler noktalarından bahsetmeden önce aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 3.9 : U ve U', $\mathbb{R}^2$'nin açık alt kümeleri; V ve V', R^3'ün açık alt kümeleri olsun. $x : U \longrightarrow V$ bir **cuspidal edge**, **swallowtail** ya da **cuspidal cross-cap** yüzeydir eğer $h : U \longrightarrow U'$, $k : V \longrightarrow V'$ diffeomorfizmleri vardır öyle ki $k \circ x \circ h^{-1}$ şu şekilde verilir:

i)cuspidal edge: (s, t^2, t^3)
ii)swallowtail: $(3s^4 + s^2t, 4s^3 + 2st, t)$
iii)cuspidal cross-cap: (s^3, s^3t^3, t^2) (Izumiya vd. 2016).



Şekil 3.1 Cuspidal edge, Swallowtail, Cuspidal cross-cap

Şimdi de α eğrisinin $F_{(\alpha,v)}(s, u)$ açılabilir yüzeyinin singüler noktalarının bir sınıflandırmasını veren teoremi yazalım.

Teorem 3.4 : $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğri ve $m(s) \neq 0$ olsun. O halde $F(\alpha, v)$ yüzeyi ;

1. $F_{(\alpha,v)}(s_0,u_0)$ noktasında $C\times\mathbb{R}$ *cuspidal edge* noktasına lokal diffeomorftur ancak ve ancak
$$\left(\frac{m}{n}\right)'(s_0)\neq 0 \text{ ve } u_0=\left(\frac{m}{n}\right)(s_0)$$

2. $F_{(\alpha,v)}(s_0,u_0)$ noktasında SW *swallowtail* noktasına lokal deiffeomorftur ancak ve ancak
$$\left(\frac{m}{n}\right)'(s_0)\neq 0,\left(\frac{m}{n}\right)''(s_0)\neq 0 \text{ ve } u_0=\left(\frac{m}{n}\right)(s_0)$$

3. $F_{(\alpha,v)}(s_0,u_0)$ noktasında CCR *cuspidal cross cap* noktasına lokal diffeomorftur ancak ve ancak
$$u_0=m(s_0)=0 \text{ ve } \left(\frac{m}{n}\right)'(s_0)\neq 0$$

(Izumiya ve Takeuchi 2004).

Bir α eğrisinin rektifiyan açılabilir yüzeyinin singülaritelerinin sınıflandırması için de aşağıdaki teoremi verelim.

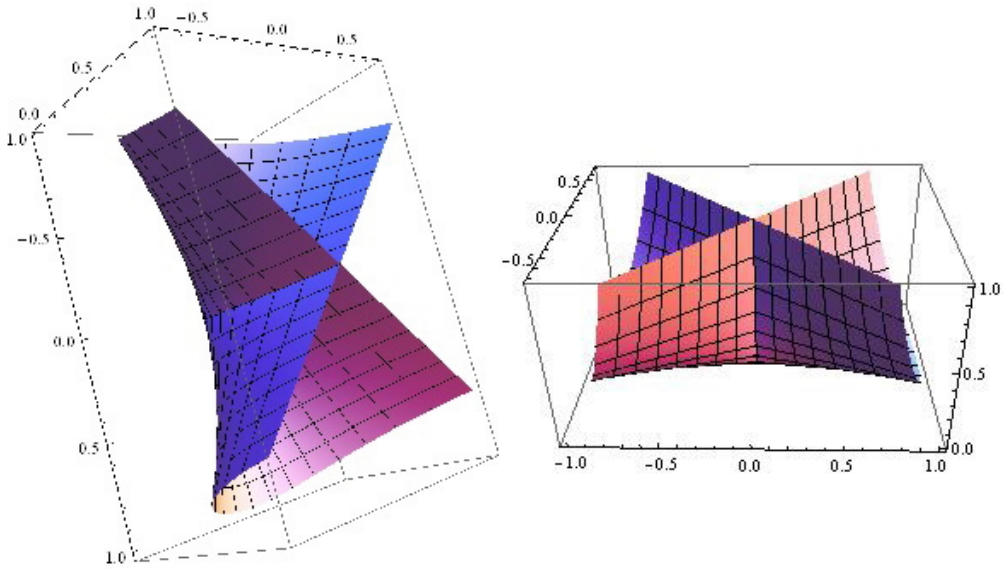
Teorem 3.5 : $\alpha:I\longrightarrow\mathbb{R}^3$ birim hızlı eğri ve $n(s)\neq 0$ olsun. O halde $F_{\left(\alpha,\widetilde{d}\right)}(s,u)$ yüzeyi ;

1. $F_{\left(\alpha,\widetilde{d}\right)}(s_0,u_0)$ noktasında $C\times\mathbb{R}$ *cuspidal edge* noktasına lokal diffeomorftur ancak ve ancak
$$\left(\frac{m}{n}\right)'(s_0)\neq 0,\left(\frac{m}{n}\right)''(s_0)\neq 0 \text{ ve } u_0=\frac{1}{\left(\frac{m}{n}\right)'(s_0)}$$

2. $F_{\left(\alpha,\widetilde{d}\right)}(s_0,u_0)$ noktasında SW *swallowtail* noktasına lokal diffeomorftur ancak ve ancak
$$\left(\frac{m}{n}\right)'(s_0)\neq 0,\left(\frac{m}{n}\right)''(s_0)=0,\left(\frac{m}{n}\right)'''(s_0)\neq 0 \; ve \; u_0=\frac{1}{\left(\frac{m}{n}\right)'(s_0)}$$

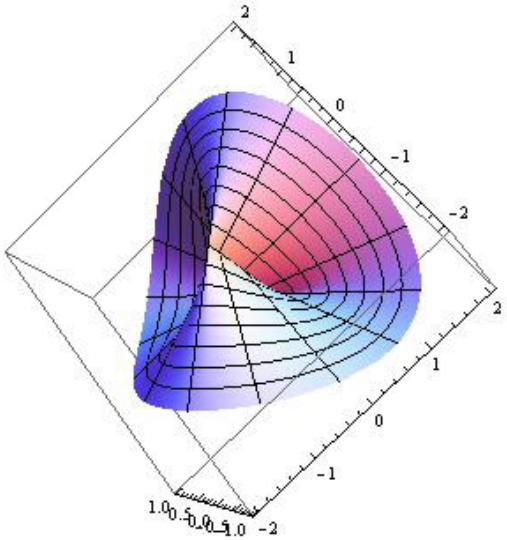
(Izumiya vd. 1999).

Örnek 3.4 : $\alpha(s)=(s^2,0,0)$ yüzeyin striksiyon eğrisi ve $v(s)=\left(0,\frac{1}{\sqrt{1+s^2}},\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right)$ olmak üzere $F_{(\alpha,v)}(s,u)=\left(s^2,\frac{u}{\sqrt{1+s^2}},\frac{us}{\sqrt{1+s^2}}\right)$ regle yüzeyi bir cross-cap olup orjin noktasında singülerliğe sahiptir.



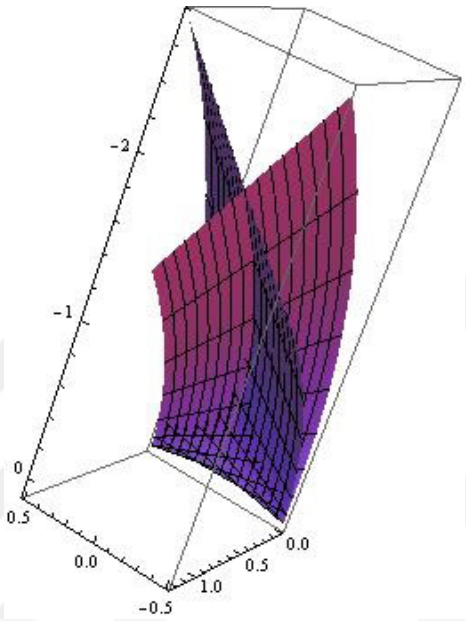
Şekil 3.2 Cross-cap (Izumiya ve Takeuchi 2001)

Örnek 3.5 : Plücker conoid yüzeyi, bir diğer cross-cap regle yüzey örneğidir. Dayanak eğrisi $\alpha(s) = (0, 0, \sin(2s))$ ve doğrultman vektörü $v(s) = (\cos s, \sin s, 0)$ olmak üzere $F_{(\alpha,v)}(s,u) = (u\cos s, u\sin s, \sin 2s)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.



Şekil 3.3 Plücker konoidi (Izumiya vd. 2016)

Örnek 3.6 : $F_{(\alpha,v)}(s,u) = \left(u, -2s^2 - \frac{3}{2}su, t^4 + \frac{1}{2}s^3u\right)$ açılabilir yüzeyi bir cuspidal cross-cap yüzeydir.

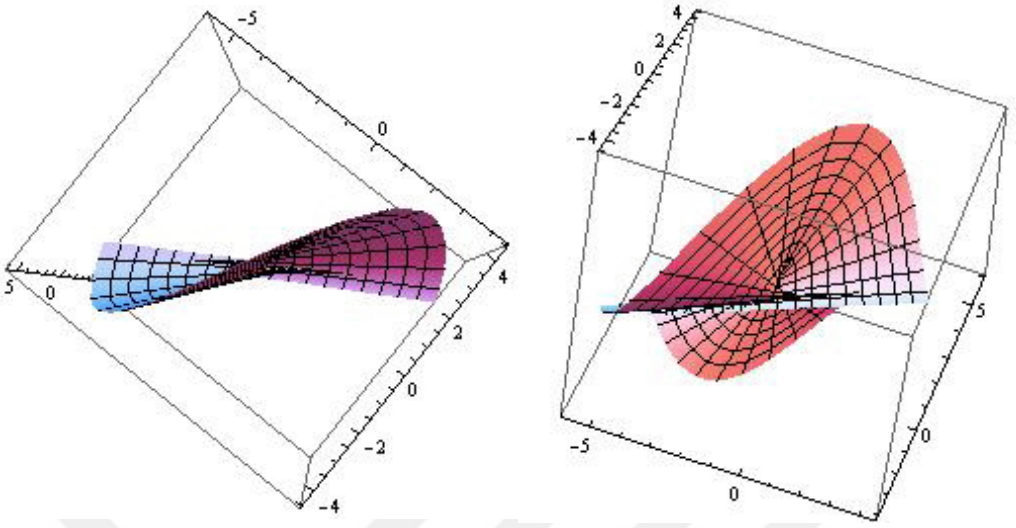


Şekil 3.4 Cuspidal cross-cap (Izumiya ve Takeuchi 2001)

Örnek 3.7 : $\alpha : I = [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, v : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ olmak üzere

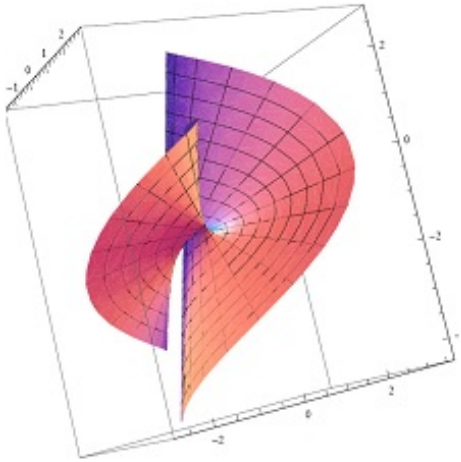
$$\begin{aligned} F_{(\alpha,v)}(s,u) &= \alpha(s) + u.v(s) \\ &= (\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2s) + \frac{3}{4}u\cos(s) - \frac{1}{4}u\cos(3s), \\ &\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2s) + \frac{3}{4}u\sin(s) - \frac{1}{4}u\sin(3s), \\ &\quad -\frac{s}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}u\cos(s)) \end{aligned}$$

regle yüzeyi $F_{(\alpha,v)}\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ noktasında $C \times \mathbb{R}$ cuspidal edge singülerliğine sahiptir.



Şekil 3.5 Cuspidal $C \times \mathbb{R}$ (Bekar vd. 2017)

Örnek 3.8 : $\alpha : I = [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ olursa Örnek 3.7'de verilen yüzey $F_{(\alpha,v)}\left(\frac{\pi}{2}, u_0\right)$ noktasında SW swallowtail singülerliğine sahiptir.



Şekil 3.6 Swallowtail SW (Bekar vd. 2017)

Örnek 3.9 : $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$\alpha(p) = \left(\cos\left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right), \frac{p}{\sqrt{2}}\right)$$

eğrisi verilsin. α eğrisinin teğet ve binormal vektör alanları sırasıyla

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(p) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sin\left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right), \cos\left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right), 1\right)\\ \mathcal{B}(p) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right), \cos\left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right), 1\right)\end{aligned}$$

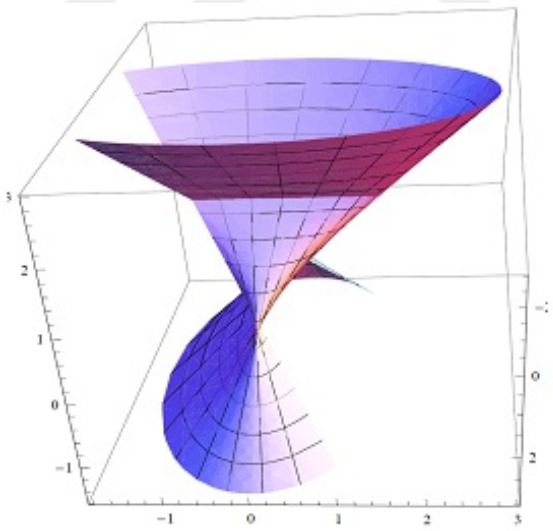
ve eğrilikleri ise

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{1}{2}\\ \tau &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

dir.Bu durumda α bir helistir. α eğrisinin rektifiyan Gauss yüzeyi

$$\begin{aligned}RG(\alpha) &= u.\mathcal{T}(p) + \mathcal{B}(p)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left((1-u)\sin\left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right), (1+u)\cos\left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right), 1+u\right)\end{aligned}$$

bir koni belirtir. $u = 1$ singüler noktası için $RG(\alpha) = \left(0, 0, \sqrt{2}\right)$.



Şekil 3.7 Koni yüzeyi (Bekar vd. 2017)

4. MÖBİUS ŞERİDİ

Bu bölümde bir önceki bölümde incelenen yüzeylerin uygulaması olarak Möbius şeridi ele alınacaktır. Möbius şeridinin tanımı yapılacak ve denklemi elde edilecektir. Ayrıca Möbius şeridinin de bir regle yüzey olduğu gösterilecek ve Coilin P. Boylan Jeritslev tarafından yazılan 'The Möbius strip' adlı çalışmaya ağırlık verilerek açılamayan Möbius şeritlerini açılabilir yapmak için gereken şartlar incelenecektir.Taban eğrisi geodezik olan ve taban eğrisi asimptotik olan Möbius şeritleri göz önüne alınacaktır.

4.1 Möbius Şeridi Ve Geometrik Tanımı

August Ferdinand Möbius, bugün 'Möbius şeridi' olarak bilinen tek yüzlü yüzeyi bularak, topolojiye ve geometriye katkıda bulunmuştur. En basit anlamıyla Möbius şeridi dikdörtgen bir şeridin biri 180°'lik bir dönüş yapmış olan uçlarının birleştirilmesiyle elde edilen bir yüzeydir. Normal bir şeridin iki yüzeyi varken Möbius şeridinin tek bir yüzeyi vardır. Başka bir ifadeyle Möbius şeridinin üzerindeki bir noktadan hareket etmeye başlandığında tüm alan taranarak aynı noktaya geri dönülür.

Möbius şeridinin tek bir yüzeyi vardır ve yüzey alanını artırıp aşınmayı azaltacağından mekanik aletlerdeki kayışları möbius şeridi şeklinde bağlamak daha yararlıdır. Bu yüzden bu tip yüzeyler sanayide oldukça kullanılmaktadır.

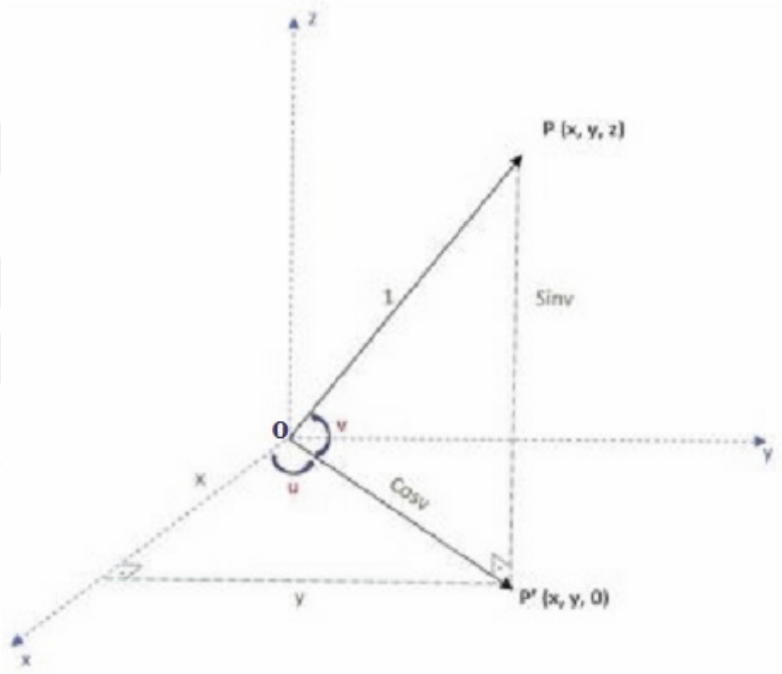


Şekil 4.1 Möbius şeridi

4.2 Möbius Şeridi'nin Denklemi

Möbius şeridinin denklemini bulabilmek için küresel koordinatlama yapalım.

Üç boyutlu uzayda bir $P(x, y, z)$ birim vektörünü ve bu vektörün $P'(x, y, 0)$ dik izdüşüm vektörünü göz önüne alalım.



Şekil 4.2 Küresel koordinatlama

Şekil 4.2'de görüldüğü gibi u, P' vektörünün x ekseniyle yaptığı dönme açısı, v ise P vektörü ile P' vektörü arasındaki açıdır.
POP' üçgeninde $|OP'| = \cos v$ ve $|PP'| = \sin v$ olacağından

$$\cos^2 v + \sin^2 v = 1$$

eşitliği sağlanır.

Şimdi $P(x, y, z)$ vektörünü u ve v cinsinden yazarsak;

$$\begin{aligned} \cos u &= \frac{x}{\cos v} \Rightarrow x = \cos u.\cos v \\ \sin u &= \frac{y}{\cos v} \Rightarrow y = \sin u.\cos v \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda $P(\cos u.\cos v,\ \sin u.\cos v,\ \sin v)$ vektörü elde edilir.

Burada dikkat edilmesi gereken u ve v'nin aralığıdır. u açısı 2π'lik alanı tararken v'nin π'lik alanı taradığı bilinmektedir. Yani

$$0 \leq u \leq 2\pi$$

ve

$$0 \leq v \leq \pi$$

aralıklarında yol aldıkları için u, t kadar dönme yaparken v, $\frac{t}{2}$ kadar dönme yapar diyebiliriz. Bu durumda $v = \frac{u}{2}$ olarak alınabilir.

Sonuç olarak taban eğrisi R yarıçaplı $\alpha(u) = (R\cos u, R\sin u, 0)$ olan bir Möbius şeridinin denklemi şu şekilde yazılabilir:

$$\sigma(u, v) = (R\cos u, R\sin u, 0) + v.\left(\cos u.\cos\left(\frac{u}{2}\right), \sin u.\cos\left(\frac{u}{2}\right), \sin\left(\frac{u}{2}\right)\right)$$

Möbius şeridinin açılabilen ve açılamayan iki tipi incelendikten sonra bu bölümde elde edilen denkleme ilişkin örnekler verilecektir.

4.3 Açılabilen ve Açılamayan Möbius Şeridi



Şekil 4.3 Açılabilen (solda) ve açılamayan (sağda) Möbius şeridi

Bu bölümde açılabilen ve açılamayan Möbius şeritlerini inceleyecek ve açılabilir olması için gereken şartlar üzerinde durulacaktır.

$\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t)),\ \sigma$ yüzey parçası üzerinde bir eğri olmak üzere;

$$E = \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle = \|\sigma_u\|^2$$
$$F = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle$$
$$G = \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle = \|\sigma_v\|^2$$

için σ yüzeyinin I. temel formu

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

olur. Yüzey değiştikçe I. temel form da değişir.

Örnek 4.1 $\mathbb{R}^3$ uzayında bir düzlem denklemi

$$\sigma(u, v) = \alpha + u.p + v.q$$

ve p ile q birbirlerine dik birim vektörler olsun. $\sigma_u = p$ ve $\sigma_v = q$ için

$$E = 1 \quad F = 0 \quad G = 1$$

olduğundan düzlemin I. temel formu ;

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = du^2 + dv^2$$

şeklindedir.

Tanım 4.1 σ_1 ve σ_2 birer yüzey olsun. σ_1 yüzeyindeki her eğri σ_2 yüzeyinde I. temel formları aynı olan eğrilere dönüşüyor ise $f : \sigma_1 \longrightarrow \sigma_2$ difeomorfizmine izomorfizm denir. Eger f izomorfizm ise σ_1 ve σ_2 izomorftur denir.

4.3.1 Möbius Şeridi düzleme ne zaman izomorf olur?

Yukarıdaki tanım ve genelleştirilmiş regle yüzeyler ile bir Möbius şeridinin bir düzleme ne zaman izomorf olacağını ve bunun ne demek olduğunu bulalım.

$\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ taban eğrisi, $\omega : I \to \mathbb{R}^3/\{(0,0,0)\}$ bir vektör alanı olmak üzere $\mathbb{R}^3$ uzayında genelleştirilmiş regle yüzeyin denklemi

$$\sigma(u,v) = \alpha(u) + v.\omega(u)$$

verilsin. Her $u \in I$ için $\omega'(u) = 0$ oluyorsa ω sabit hız vektörüdür.

$$\sigma(u,v) = \alpha(u) + v.\omega$$

$\alpha(u)$ ve $\omega(u)$ sırasıyla birim hızlı vektör ve birim vektör olan bir regle yüzey olsun.

$$\begin{aligned} E &= 1 + 2v.\langle \alpha', \omega' \rangle + v^2.\|\omega'\|^2 \\ F &= \langle \alpha', \omega \rangle = 0 \\ G &= 1 \end{aligned}$$

olduğundan genelleştirilmiş yüzeyin I. temel formu

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = du^2 + dv^2$$

olarak bulunur.

Uzaydaki her Möbius şeridinin uygun parametrizasyonu yapılabilir. O halde düzgün parametrize edilmiş ve genelleştirilmiş regle yüzeye ait bir Möbius şeridi Tanım 4.1'e göre her u ve v için aşağıdakı şartı sağlıyor ise düzleme izomorf olur. Düzleme izomorf olan şerit açılabilir şerittir.

$$\begin{aligned} E &= 1 + 2v.\langle \alpha', \omega' \rangle + v^2.\|\omega'\|^2 = 1 \\ F &= \langle \alpha', \omega \rangle = 0 \\ G &= 1 \end{aligned}$$

Yani buradan görülüyor ki

$$\langle 2\alpha', \omega' \rangle = \langle -v.\omega', \omega' \rangle$$

ve

$$\langle \alpha', \omega \rangle = 0$$

şartlarını sağlayan Möbius şeridi açılabilirdir.

Şimdi taban eğrisi $R = 1$ yarıçaplı $\alpha(\breve{u}) = (\cos\breve{u}, \sin\breve{u}, 0)$ olan açılamayan bir Möbius şeridi örneğini verelim.

Örnek 4.2 $\mathbb{R}^3$ uzayında şerit denklemi $\breve{u} \in [0, 2\pi]$ ve $L \in \mathbb{R}$ için $\breve{v} \in [-L, L]$ olmak üzere

$$\sigma(\breve{u}, \breve{v}) = \begin{bmatrix} \cos(\breve{u}) \\ \sin(\breve{u}) \\ 0 \end{bmatrix} + \breve{v}. \begin{bmatrix} \cos(\frac{\breve{u}}{2}). \cos(\breve{u}) \\ \cos(\frac{\breve{u}}{2}). \sin(\breve{u}) \\ \sin(\frac{\breve{u}}{2}) \end{bmatrix}$$

verilsin.Buradan;

$$\sigma_{\breve{u}} = \begin{bmatrix} -\sin(\breve{u}) \\ \cos(\breve{u}) \\ 0 \end{bmatrix} + \breve{v}. \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sin(\frac{\breve{u}}{2}). \cos(\breve{u}) - \cos(\frac{\breve{u}}{2}). \sin(\breve{u}) \\ -\frac{1}{2}\sin(\frac{\breve{u}}{2}). \sin(\breve{u}) + \cos(\frac{\breve{u}}{2}). \cos(\breve{u}) \\ \frac{1}{2}\cos(\frac{\breve{u}}{2}) \end{bmatrix}$$

ve

$$\sigma_{\breve{v}} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\breve{u}}{2}). \cos(\breve{u}) \\ \cos(\frac{\breve{u}}{2}). \sin(\breve{u}) \\ \sin(\frac{\breve{u}}{2}) \end{bmatrix}$$

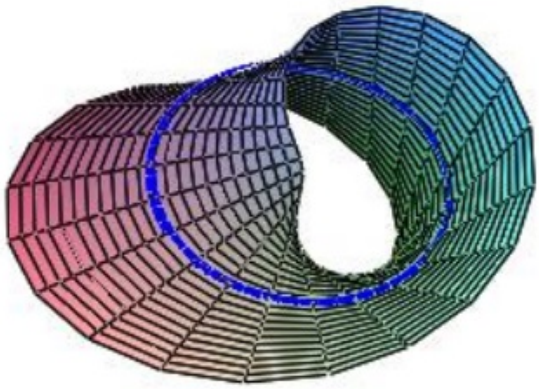
elde edilir. O halde;

$$\begin{aligned} E &= \|\sigma_{\breve{u}}\|^2 = 1 + 2\breve{v}\cos(\frac{\breve{u}}{2}) + \breve{v}^2.(\frac{1}{4} + \cos^2(\frac{\breve{u}}{2})) \\ F &= \langle \sigma_{\breve{u}}, \sigma_{\breve{v}} \rangle = 0 \\ G &= \|\sigma_{\breve{v}}\|^2 = 1 \end{aligned}$$

dir. Fakat $\breve{u} \in [0, 2\pi]$ ve $L \in \mathbb{R}$ için $\breve{v} \in [-L, L]$ için

$$2\breve{v}\cos(\frac{\breve{u}}{2}) + \breve{v}^2.(\frac{1}{4} + \cos^2(\frac{\breve{u}}{2}))$$

ifadesi sıfıra eşit olamayacağından şeridin I. temel formu genelleştirilmiş düzlemin I. temel formundan yani $d\breve{u}^2 + d\breve{v}^2$ den farklı olur. Bu durumda bu şerit için açılamayan Möbius şeridi denir.



Şekil 4.4 Örnek 4.2'deki açılamayan Möbius şeridi

Tanım 4.2 $\sigma(u,v)$ bir yüzey olmak üzere $N_\sigma = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$ için

$$\begin{aligned} L &= \langle N_\sigma, \sigma_{uu} \rangle \\ N &= \langle N_\sigma, \sigma_{vv} \rangle \\ M &= \langle N_\sigma, \sigma_{uv} \rangle \end{aligned}$$

olsun. Yüzeyin $I.temel\ formu$

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

ve $II.temel\ formu$

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

verildiğinde yüzeyin Gauss eğriliği;

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

ve ortalama eğriliği;

$$H = \frac{LG + NE - 2MF}{2\left(EG - F^2\right)}$$

dir (Starostin ve Heijden 2015).

Regle yüzeylerin $K \leq 0$ şartını sağlaması gerektiği bilinmektedir. Möbius şeridinin I. temel formu genelleştirilmiş düzlemin I.temel formu ile aynıdır ve şerit bir silindirik regle yüzeydir. Bu durumda Möbius şeridinin Gauss eğriliğinin de $K = 0$ şartını sağlayacağını söyleyebiliriz.
Bu da demektir ki Tanım 4.2'deki

$$LN - M^2 = 0$$

şartını sağlayan bir regle yüzey mevcuttur.

$$\begin{aligned} LN - M^2 &= -\left(\frac{\langle \alpha' \times \omega, \omega' \rangle}{\| \alpha' \times \omega + v.\omega' \times \omega \|}\right)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \langle \alpha' \times \omega, \omega' \rangle &= 0 \\ \det(\alpha', \omega, \omega') &= 0 \end{aligned}$$

dır. Buradan $K = 0$ olduğu görülür.
$K = 0$ olduğunu göstermenin başka bir yolu dağılma parametresi λ ve striksiyon çizgisi β'yı kullanmaktır:

1. Striksiyon çizgisi ile ω'nın kesiştiği noktalarda $K = 0$'dır. O halde;

   $$K = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0$$

   dır.

2. Silindirik regle yüzeylerde ise taban eğrisi ile ω'nın kesiştiği noktalarda $K = 0$'dır. O halde;

   $$\lambda = 0 \Longleftrightarrow \langle \alpha' \times \omega, \omega' \rangle = 0$$

   dır.

Şimdi de hangi tipteki açılabilir yüzeylerin taban eğrisi geodeziktir, inceleyelim.

Bir silindirik regle yüzeyde α taban eğrisi striksiyon eğrisi ve α' ile ω arasındaki açı sabit ise taban eğrisi geodeziktir.

Bir eğrinin geodezik olması için $\kappa_g = 0$ olması gerekir ve yeter. O halde silindirik regle yüzeyde taban eğrisinin geodezik eğriliği de sıfırdır.

Tanım 4.3 : $\sigma(u,v)$ yüzeyinin birim normali $N_\sigma = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$ olmak üzere; birim hızlı $\gamma(s) = \sigma(u(s), v(s))$ eğrisinin asimptotik eğriliği ve geodezik eğriliği sırasıyla

$$\kappa_n = \langle \ddot{\gamma}, N_\sigma \rangle$$

ve

$$\kappa_g = \langle \ddot{\gamma}, N_\sigma \times \dot{\gamma} \rangle$$

dir. O halde ;

$$K^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$$

bulunur.

Taban eğrisinin geodezik eğriliği sıfır iken;

$$K^2 = \kappa_n^2 = \langle \alpha'', N_\sigma \rangle^2$$

dir.

$$\kappa_g = \langle \alpha'', N_\sigma \times \alpha' \rangle = 0$$

$\sigma(u,v)$ yüzeyinin birim normali $N_\sigma = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$ olmak üzere;

$$\kappa_g = \langle \alpha'', N_\sigma \times \alpha' \rangle = 0$$

olduğundan

$$\langle \alpha'', (\sigma_u \times \sigma_v) \times \alpha' \rangle = 0$$

elde edilir (Boylan 2011).

Eğriliği sıfırdan farklı olan bir eğrinin geodezik olduğu tek bir açılabilir yüzey vardır. Merkez eğri boyunca, merkez eğrinin normali ile rektifyan açılabilir yüzeyin normali aynıdır. Bu durumda silindirik regle yüzeyin merkez eğrisi taban eğrisidir.

$$\| \quad \alpha'(u) \| = 1$$

$$\| \quad \omega(u) \| = 1$$

olmak üzere;

$$\sigma(u,v) = \alpha(u) + v.\omega(u)$$

regle yüzeyi verilsin. O halde;

$$\begin{aligned} \sigma_u &= \alpha' + v.\omega' \\ \sigma_v &= w \end{aligned}$$

dir.

$\mathcal{T}(u) = \alpha'(u)$ ve $f = f(u), g = g(u), h = h(u)$ keyfi fonksiyonları için ω' nın Frenet-Serret parametreleriyle ifadesi

$$\omega = f.\mathcal{T} + g.\mathcal{N} + h.\mathcal{B}$$

şeklindedir. Regle yüzey için $K = 0$ yani $\langle \alpha' \times \omega, \omega' \rangle = 0$ olduğundan;

$$g.(g\tau + h') - h.(f\kappa + g' - h\tau) = 0$$

elde edilir. Buradan;

$$g.(g\tau + h') = h.(f\kappa + g' - h\tau) \tag{4.1}$$

dir.

$\kappa_g = 0$ olduğundan;

$$\begin{aligned} \langle \alpha'', (\sigma_u \times \sigma_v) \times \alpha' \rangle &= 0 \\ \langle \mathcal{T}', (\sigma_u \times \sigma_v) \times \mathcal{T} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

şartı gereği

$$(1 + v(f' - g\kappa))g = v(f\kappa + g' - h\tau)f \tag{4.2}$$

eşitliği elde edilir.

Geodeziklik koşulu sadece eğri taban eğrisi ise sağlanır. O halde $v = 0$ ise eğri taban eğrisidir. Bu durumda (4.2) den ;

$$v = 0 \Rightarrow g = 0 \Rightarrow g' = 0$$

olur. Bulunanları (4.1) de yerine yazarsak ;

$$0 = h.(f\kappa - h\tau)$$

elde edilir. Bu durumda $h = 0$ ya da $(f\kappa - h\tau) = 0$ olur.

$$\begin{aligned} f\kappa - h\tau &= 0 \\ f\kappa &= h\tau \end{aligned}$$

Bu ifadenin birden fazla çözümü vardir. Biz $f = \tau$ ve $h = \kappa$ çözümünü seçersek;

$$\omega(u) = \tau\mathcal{T} + \kappa\mathcal{B}$$

olur. O halde dayanak eğrisi $\omega(u) = \tau\mathcal{T} + \kappa\mathcal{B}$ olan

$$\sigma(u, v) = \alpha(u) + v.\omega(u)$$

açılabilir regle yüzeyi elde edilir.

Eğer $f = \frac{\tau}{\kappa}$ ve $h = 1$ seçersek

$$\omega(u) = \frac{\tau}{\kappa}.\mathcal{T} + \mathcal{B}$$

olur.

Bu durumda iki sonuç elde edilir:

1. $$\sigma(u, v) = \alpha(u) + v.(\frac{\tau}{\kappa}.\mathcal{T} + \mathcal{B})$$

   tipindeki açılabilir regle yüzeylerin taban eğrisi geodeziktir.

2. $$\sigma(u, v) = \alpha(u) + v.(\tau\mathcal{T} + \kappa\mathcal{B})$$

   tipindeki açılabilir regle yüzeylerin taban eğrisi geodezik değildir.

Şimdi Möbius tipli şeritleri inceleyelim ve bunlara dair örnekler verelim.

4.4 Möbius Tipli Şeritler

Bu bölümde Möbius tipli şeritlerin denklemini vereceğiz.

Taban eğrisi R yarıçaplı $\alpha(\varepsilon) = (R\cos\varepsilon, R\sin\varepsilon, 0)$ olan bir Möbius şeridinin denklemini şu şekilde vermiştik:

$$\sigma(\varepsilon, v) = (R\cos\varepsilon, R\sin\varepsilon, 0) + v.\left(\cos\varepsilon.\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \sin\varepsilon.\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$$

Verilen bu denklemi n bükülme sayısına bağlı olarak yazarsak;

$$\sigma(\varepsilon, v) = (R\cos\varepsilon, R\sin\varepsilon, 0) + v.\left(\cos\varepsilon.\cos\left(\frac{\varepsilon n}{2}\right), \sin\varepsilon.\cos\left(\frac{\varepsilon n}{2}\right), \sin\left(\frac{\varepsilon n}{2}\right)\right)$$

denklemini elde ederiz (Balakrishnan ve Satija 2005). Burada n bükülme sayısının tek sayı seçilmesi durumunda $\sigma(\varepsilon, v)$ yüzeyinin Möbius şeridi olduğu ancak n çift sayı seçildiğinde ise yüzeyin Möbius şeridi değil Möbius tipli bir şerit olduğu söylenebilir.

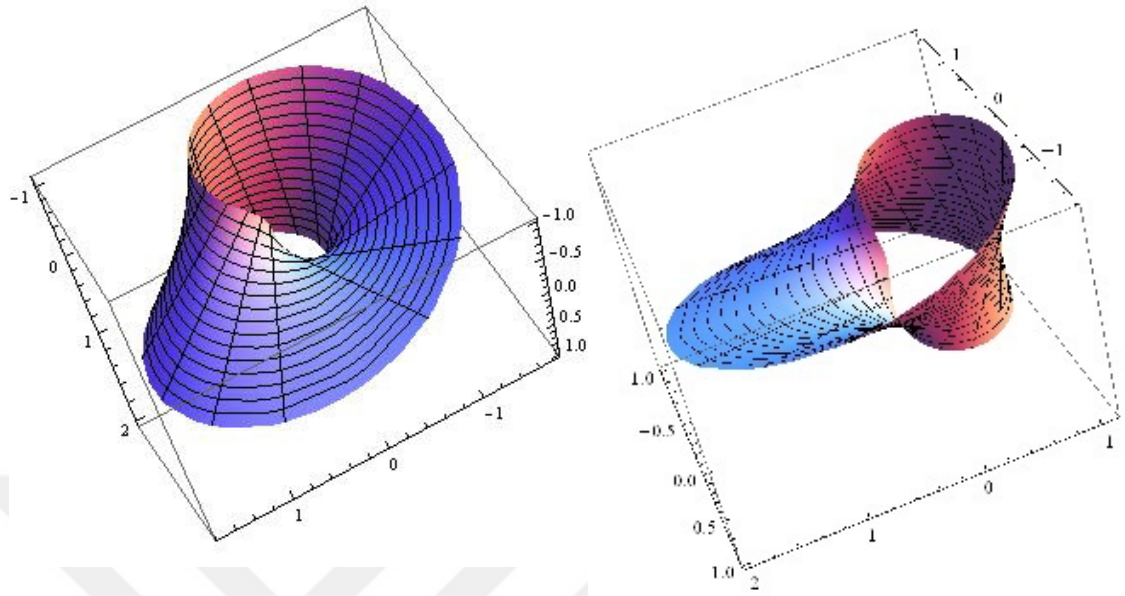
4.5 Möbius Tipli Şeritlere İlişkin Örnekler

Bu bölümde, Bölüm 4.4'te n bükülme sayısına bağlı olarak verilen denkleme dair örnekler incelenecektir.

Aşağıdaki örnekler için taban eğrisini $R = 1$ yarıçaplı $\alpha(\varepsilon) = (\cos\varepsilon, \sin\varepsilon, 0)$ ve $0 \leq \varepsilon \leq 2\pi$, $-1 \leq v \leq 1$ olarak kabul edelim.

Örnek 4.3 $n = 1$ bükülme sayısı için

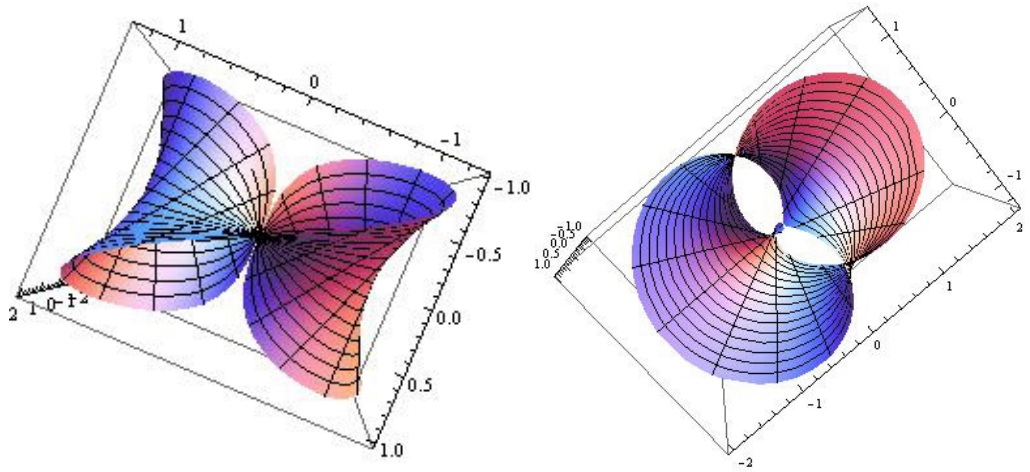
$$\sigma(\varepsilon, v) = (\cos\varepsilon, \sin\varepsilon, 0) + v.\left(\cos\varepsilon.\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \sin\varepsilon.\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$$



Şekil 4.5 $n = 1$ için $\sigma(\varepsilon, v)$ yüzeyi

Örnek 4.4 $n = 2$ bükülme sayısı için

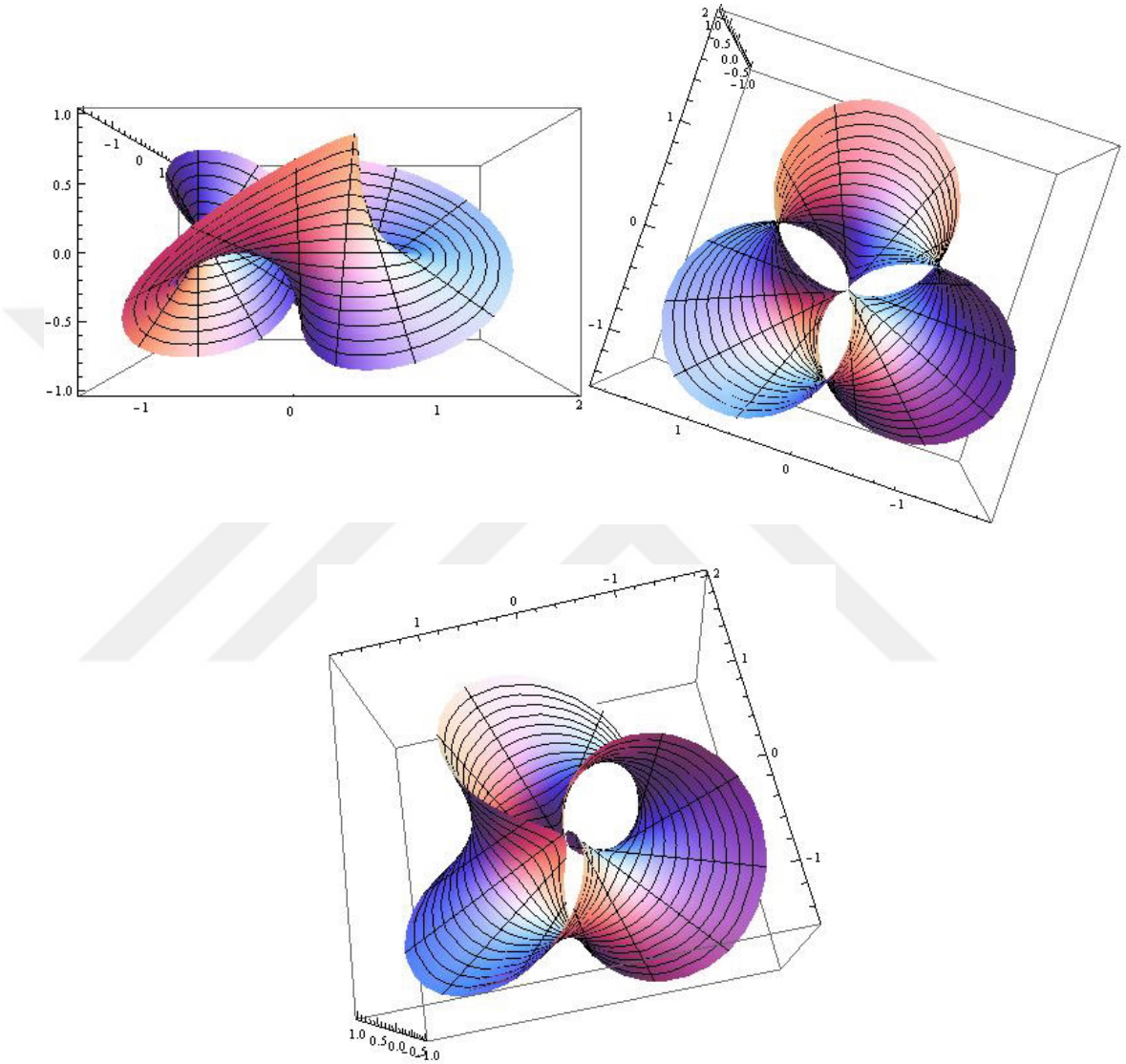
$$\sigma(\varepsilon, v) = (\cos\varepsilon, \sin\varepsilon, 0) + v.(\cos\varepsilon.\cos(\varepsilon), \sin\varepsilon.\cos(\varepsilon), \sin(\varepsilon))$$



Şekil 4.6 $n = 2$ için $\sigma(\varepsilon, v)$ yüzeyi

Örnek 4.5 $n = 3$ bükülme sayısı için

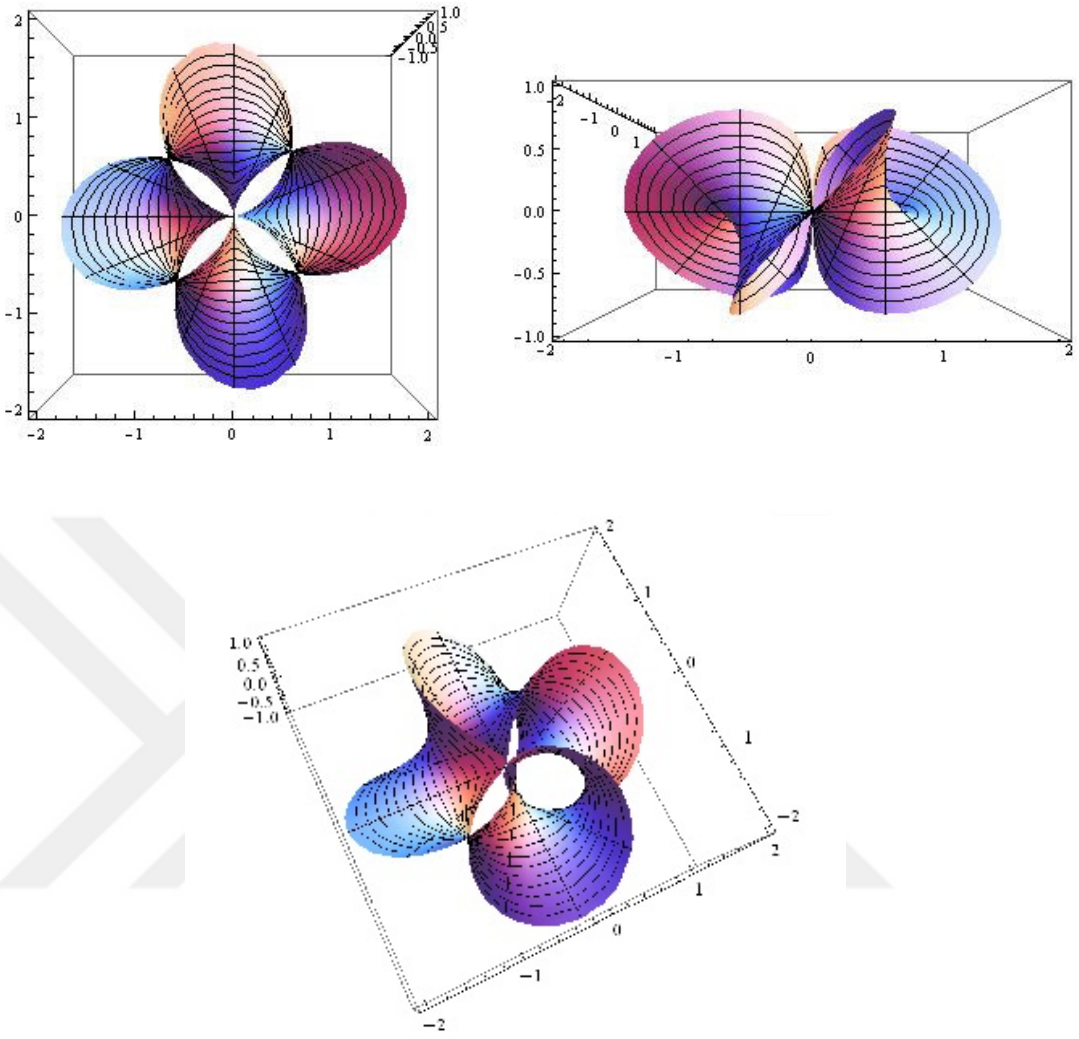
$$\sigma(\varepsilon, v) = (\cos\varepsilon, \sin\varepsilon, 0) + v.\left(\cos\varepsilon.\cos\left(\frac{3\varepsilon}{2}\right), \sin\varepsilon.\cos\left(\frac{3\varepsilon}{2}\right), \sin\left(\frac{3\varepsilon}{2}\right)\right)$$



Şekil 4.7 $n = 3$ için $\sigma(\varepsilon, v)$ yüzeyi

Örnek 4.6 $n = 4$ bükülme sayısı için

$$\sigma(\varepsilon, v) = (\cos\varepsilon, \sin\varepsilon, 0) + v.(\cos\varepsilon.\cos(2\varepsilon), \sin\varepsilon.\cos(2\varepsilon), \sin(2\varepsilon))$$



Şekil 4.8 $n = 4$ için $\sigma(\varepsilon, v)$ yüzeyi

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde regle yüzeylerin iki tipi ve bu iki tip yüzeyin singülerliği incelenmiştir. Taban eğrisi eğrilik çizgisi olan açılabilir yüzeyin üç singüler noktaya, Darboux vektörü kullanılarak elde edilen yüzeyin ise iki singüler noktaya sahip olduğu görülmüştür.

Ayrıca bu regle yüzeylere örnek olarak Möbius şeridi verilmiş olup şeridin açılabilir ve açılamaz halleri incelenmiştir. Möbius şeridi için de singülarite konusu çalışılabilir; bu yüzden Möbius şeridinin singülerliği hakkında çalışmak isteyenler için bu tez faydalı bir kaynak olacaktır.

KAYNAKLAR

Balakrishnan, R. and Satija, I.I. 2005. Gauge-invariant geometry of space curves: Application to boundary curves of Mobius-type strips, preprint, arXiv:math-ph/0507039.

Bekar, M., Hathout, F. and Yayli, Y.2018. Legendre curves and singularities of a ruled surface according to rotation minimizing frame. (Yayına sunuldu.)

Boylan Jeritslev, The Möbius strip, 2011, B.Sc. thesis, Technical University of Denmark - Department of Applied Mathematics and Computer Science (DTU COMPUTE)

Hacısalihoğlu, H. H. 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, Ankara

Hacısalihoğlu, H. H. 1993. Diferensiyel Geometri. Fen Fakültesi, Beşevler-Ankara.

Hacısalihoğlu, H. H. 2000. Diferensiyel Geometri. Fen Fakültesi, Cilt 1,2, Ankara.

Hacısalihoğlu, H. H. 2005. 2 ve 3 Boyutlu Uzaylarda Analitik Geometri. Hacısalihoğlu Yayınları, Ankara.

Izumiya, S., Katsumi, H. and Yamasaki, T. 1999. The rectifying developable and the spherical Darboux image of a space curve. Geometry and topology of caustics-Caustics '98- Banach Center Publications, 50 pp. 137/149.

Izumiya, S. and Takeuchi, N. 2001. Singularities of ruled surfaces in $\mathbb{R}^3$. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 130; 1-11.

Izumiya, S. and Takeuchi, N. 2004. New Special Curves and Developable Surfaces. Turk J. Math., 28; 153-163.

Izumiya, S. Romero Fuster, M.C., Ruas, M.A.S. and Tari, F. 2016. Diferential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapure.

Karger, A. and Novak, J. 1985. Space Kinematics and Lie Groups. Gordon and Breach Science Publishers.

Kokubu, M., Rossman, W. , Saji, K. , Umehara, M. and Yamada, K. 2005. Singularities of flat fronts in hyperbolic space, Pacific J. Math. 221 , 303–351.

Kurono, Y., Umehara, M. 2008. Flat Möbius strips of given isotopy type in $\mathbb{R}^3$ whose centerlines are geodesics or lines of curvature. Geom. Dedic. 134(1), 109–130.

Naokawa, K. 2013. Singularities of the asymptotic completion of developable Möbius strips. Osaka J. Math. 50(2), 425–437.

Sabuncuoğlu, A. 2004. Diferensiyel Geometri, 2. Baskı. Nobel Basımevi, Ankara.

Sabuncuoğlu, A. 2010. Diferensiyel Geometri, 4. Baskı. Nobel Basımevi, Ankara.

Starostin, E.L. & van der Heijden, G.H.M. Equilibrium shapes with stress localisation for inextensible elastic Möbius and other strips. Journal of Elasticity, 119(1-2):67–112, 2015.

Yüce, S. 2017. Öklid Uzayında Diferansiyel Geometri, 2.Baskı. Pegem Akademi, Ankara

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Yağmur SALUR
Doğum Yeri : Ankara
Doğum Tarihi : 05.05.1995
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Abdullah Mürşide Özünenek Anadolu Lisesi (2013)
Lisans : Ankara Üniversitesi / Fen Fakültesi / Matematik (2017)
Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü / Matematik (Eylül 2017-Haziran 2019)