ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MİNKOWSKİ UZAYINDA YÜZEY EĞRİLERİNİN DARBOUX GÖSTERGELERİ

Gül YAŞAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2019

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Gül YAŞAR tarafından hazırlanan **"Minkowski Uzayında Yüzey Eğrilerinin Darboux Göstergeleri"** adlı tez çalışması 24/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN
Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Yusuf YAYLI
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Faik Nejat EKMEKCİ
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Özlem YILDIRIM
Enstitü Müdür Vekili

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

24/06/2019



Gül YAŞAR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MİNKOWSKİ UZAYINDA YÜZEY EĞRİLERİNİN DARBOUX GÖSTERGELERİ

Gül YAŞAR

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Bu tez toplam beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan bazı kavramlar, tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde Hananoi v.d (2015)' nin makalesinden tezin diğer bölümleri için gerekli bazı kısımlara yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde Öklid uzayında bir ortonormal çatı için 3-tip RM çatı elde edilmiştir. Daha sonra bu çatılar için küresel Darboux gösterge eğrilerinin singüler noktaları belirlenmiştir.

Son bölümde ise Ito ve Izumiya (2016)' nın makalesi incelenmiştir. Ayrıca makalede yer alan beş küresel gösterge eğrisine üçü daha eklenerek benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Haziran 2019, 68 sayfa

Anahtar Kelimeler: darboux vektörü, dual eğri, küresel eğriler, darboux gösterge eğrileri, singüler nokta, rotation minimizing çatı

ABSTRACT

Master Thesis

DARBOUX INDICATRICES OF SURFACE CURVES ON THE MİNKOWSKİ SPACE

Gül YAŞAR

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

This thesis consists of five parts.

The first part is devoted to the introduction.

The second part contains some notions, definitions and theorems which are going to used for the other parts of the thesis.

In the third part, some sections of the paper by Hananoi et al. (2015) which are required for the other parts of this thesis are given.

In the fourth part 3-type RM frames are obtained for an orthonormal frame in Euclidean space. Also the spherical Darboux indicatrices are defined and their singular points are specified.

In the last part the paper of Ito and Izumiya (2016) is examined. Three more spherical indicatrices are also added to the five in the paper and similar results are obtained.

June 2019, 68 pages

Key Words: darboux vector, dual curve, spherical curves, darboux indicatrix curves, singular point, rotation minimizing frame

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması boyunca beni yönlendiren, bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı)'ya teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her alanında sonsuz sabırları ile beni destekleyen ve daima yanımda olan değerli ailem ve arkadaşlarıma en içten duygularımla teşekkür ederim.

Gül YAŞAR
Ankara, Haziran 2019

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI
ETİK . . . . . **i**
ÖZET . . . . . **ii**
ABSTRACT . . . . . **iii**
TEŞEKKÜR . . . . . **iv**
SİMGELER DİZİNİ . . . . . **vi**
ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . . **vii**
1. GİRİŞ **1**
2. TEMEL KAVRAMLAR **3**
3. ÖKLİD UZAYINDA YÜZEY EĞRİLERİNİN KÜRESEL DARBOUX GÖSTERGELERİ **11**
3.1 Yüzey Eğrilerinin Darboux Çatısı **11**
3.2 Küresel Darboux Göstergeleri ve Singüleriteleri **13**
3.3 Birim Küre Üzerinde Eğriler ve Dualleri **15**
4. ÖKLİD UZAYINDA BİR ÇATININ KÜRESEL DARBOUX GÖSTERGELERİ **18**
4.1 1. Tip RM Çatı **19**
4.2 2. Tip RM Çatı **27**
4.3 3. Tip RM Çatı **31**
5. LORENTZ- MİNKOWSKİ 3-UZAYINDA SPACELİKE YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ EĞRİLERİN PSEUDO-KÜRESEL DARBOUX GÖSTERGELERİ **36**
5.1 Pseudo-Küresel Lorenziyen Darboux Göstergelerinin Singüler Noktaları **39**
5.2 Legendrian Duallikler **41**
5.3 Yükseklik Fonksiyonları **44**
5.4 Teorem 5.1' in İspatı **49**
5.5 Yüzey Eğrilerinin İnvaryantları **52**
5.6 Örnekler **56**
6. TARTIŞMA VE SONUÇ **65**
KAYNAKLAR **66**
ÖZGEÇMİŞ **68**

SİMGELER DİZİNİ

κ	Eğrilik
τ	Burulma
κ_g	Geodezik eğrilik
κ_n	Normal eğrilik
τ_g	Geodezik burulma
$\mathbf{D}$	Darboux vektör alanı
$\bar{\mathbf{D}}_n$	Küresel normal Darboux göstergesi
$\bar{\mathbf{D}}_r$	Küresel rektifiyan Darboux göstergesi
$\bar{\mathbf{D}}_o$	Küresel oskülatör Darboux göstergesi
$\mathbf{W}$	Bir ortonormal çatının Darboux vektör alanı
$\mathbf{W_X}$	1. tip RM çatının Darboux vektör alanı
$\mathbf{W_Y}$	2. tip RM çatının Darboux vektör alanı
$\mathbf{W_Z}$	3. tip RM çatının Darboux vektör alanı
$\bar{\mathbf{W}}_\mathbf{X}$	1. tip RM çatının küresel Darboux göstergesi
$\bar{\mathbf{W}}_\mathbf{Y}$	2. tip RM çatının küresel Darboux göstergesi
$\bar{\mathbf{W}}_\mathbf{Z}$	3. tip RM çatının küresel Darboux göstergesi
$\bar{\mathbf{D}}_n^T$	Pseudo-küresel normal timelike Darboux göstergesi
$\bar{\mathbf{D}}_r^T$	Pseudo-küresel rektifiyan timelike Darboux göstergesi
$\bar{\mathbf{D}}_n^S$	Pseudo-küresel normal spacelike Darboux göstergesi
$\bar{\mathbf{D}}_r^S$	Pseudo-küresel rektifiyan spacelike Darboux göstergesi
$\bar{\mathbf{D}}_o^S$	Pseudo-küresel oskülatör spacelike Darboux göstergesi
$\bar{\mathbf{D}}_n^L$	Pseudo-küresel normal lightlike Darboux göstergesi
$\bar{\mathbf{D}}_r^L$	Pseudo-küresel rektifiyan lightlike Darboux göstergesi
$\bar{\mathbf{D}}_o^L$	Pseudo-küresel oskülatör lightlike Darboux göstergesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1 YZ- düzleminde θ açısı kadar dönme……..……...……..19

1. GİRİŞ

Rotation minimizing çatı (RMF) ilk kez Bishop (1975) tarafından Öklid uzayındaki bir eğri boyunca hareketli Frenet çatısına alternatif bir çatı olarak tanıtılmıştır. 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısı teğet, normal ve binormal vektörler ile verilir. Bir $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi boyunca bir rotation minimizing çatı ise teğet vektör ve iki $N_i, i = 1, 2$ normal vektörü ile verilir öyle ki bu vektörler teğete göre dönmez. Yani $N_i'(t)$ vektörleri $\gamma'(t)$ ile orantılıdır. Bir eğri boyunca böyle bir normal vektör alanına rotation minimizing vektör alanı (kısaca RM vektör alanı) adı verilir. Bir $\gamma(t_0)$ noktasında herhangi bir $\{\gamma'(t_0), N_1(t_0), N_2(t_0)\}$ ortonormal bazı γ eğrisi boyunca bir tek RM çatı tanımlar. Bu yüzden 3 boyutlu Öklid uzayında böyle bir RM çatı eşsiz bir dönme modülü tasarlamıştır (Etayo 2018). Son zamanlarda RM çatı bilgisayar grafiklerinde, bilgisayar animasyonlarında ve robotiklerde haraketi tasarlama ve kontrol etme gibi alanlarda yaygın bir şekilde kullanılmaktadır.

Lorentz-Minkowski (Minkowski) uzayı 1907 yılında Alman matematikçi Hermann Minkowski tarafından özel bir metrik ile ifade edilmiştir. Bu uzayın Öklid uzayından farklı olarak bir zamansal boyutu vardır. Minkowski uzayında yapılan çalışmaların birçok fiziksel uygulaması mevcuttur. Örneğin Minkowski uzayı özel izafiyet teorisini formüle etmek için kullanılır. Matematiksel açıdan Lorentz-Minkowski uzayının geometrik özelliklerinin Öklid uzayından nasıl farklı olduğu ilginç bir problemdir. Biliniyor ki 3 boyutlu Lorentz-Minkowski uzayı, Öklid uzayına göre daha zengindir. Çünkü gerek yüzeyin gerekse yüzey üzerindeki eğrinin karakterine göre çeşitlilik arz eder.

3-boyutlu Öklid uzayında yüzey eğrileri boyunca Darboux çatısı iyi bilinen bir kavramdır. Bu çatı sayesinde eğrinin geodezik eğri, asimptotik eğri veya eğrilik çizgisi olma özellikleri verilebilir. Bir çatının Darboux vektörü, çatının eğri boyunca hareketi esnasında ani dönme eksenidir. Bir eğri boyunca Darboux çatısının bazının küresel dualleri, eğri boyunca Darboux vektör alanları olarak adlandırılır. Eğri boyunca üç Darboux vektör alanı bulunmaktadır.

Yüzey eğrilerinin Darboux çatısının Lorenziyen versiyonu da mevcuttur. Lorenziyen Darboux çatısının bazının pseudo-küresel Legendrian dualleri, eğri boyunca Lorenziyen Darboux vektörleri olarak adlandırılır. Eğrinin karakteristiğine göre dönme ekseninin karakteri çeşitlilik gösterir. Lorentz-Minkowski uzayında üç tip pseudo-küre bulunduğundan eğri boyunca sekiz Lorenziyen Darboux vektörü mevcuttur (Ito ve Izumiya 2016).

Bu tezde Öklid uzayında herhangi bir ortonormal çatının döndürülmesi ile elde edilen RM çatılara göre küresel Darboux göstergeleri elde edilmiş ve bu göstergelerin singüler noktaları karakterize edilmiştir. Böylece Öklid uzayında bir eğri boyunca alınan herhangi bir çatı için geçerli olacak genel sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca spacelike yüzeyler üzerindeki eğrilerin Lorenziyen Darboux vektörlerinin pseudo-küresel gösterge eğrileri ile bu eğrilerin singüleritelerini karakterize eden invaryantlar tanımlanmış ve bu invaryantların geometrik anlamları incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm çalışmanın sonraki bölümlerinde yararlanılacak kavramların açıklamalarına ayrılmıştır.

Tanım 2.1 (İç Çarpım): Bir $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{R}^3$ için $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$; $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

şeklinde tanımlanıyorsa $\langle , \rangle$ fonksiyonuna $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında bir iç çarpım denir. Bu iç çarpıma Öklid anlamındaki iç çarpım veya $\mathbb{R}^3$ uzayındaki standart iç çarpım denir (Hacısalihoğlu 2005).

Tanım 2.2 (Norm): $\mathbb{R}^3$ uzayında bir x vektörünün normu $\sqrt{\langle x, x \rangle}$ olarak tanımlanır ve $\|\overrightarrow{x}\|$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu 2005).

Tanım 2.3 (Vektörel Çarpım): $\mathbb{R}^3$ 3 boyutlu Öklid uzayında $\forall x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ için Öklid vektörel çarpımı

$$x \wedge y = (x_2 y_3 - y_2 x_3, x_3 y_1 - y_3 x_1, x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.4 (Eğri): $\mathbb{R}$ de I bir açık aralık olmak üzere her

$$\begin{aligned} \gamma \quad &: \quad I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \quad &\longrightarrow \quad (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \end{aligned}$$

sürekli fonksiyonu üç boyutlu reel uzayda bir eğri tanımlar (Hacısalihoğlu 2005).

Tanım 2.5 (Yay parametresi): $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için $\|\gamma'(s)\| = 1$ olsun. Böylece s ye γ eğrisinin yay parametresi denir (Hacısalihoğlu 1993).

Tanım 2.6 (Küresel eğri): Bir eğri bir kürenin üzerinde yatıyorsa bu eğriye küresel eğri denir (Karger ve Novak 1985).

Tanım 2.7 (Birim teğet vektör): $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğri olmak üzere

$$T(s) = \gamma'(s)$$

vektör alanına γ eğrisi boyunca birim teğet vektör alanı adı verilir (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.8 (Eğrilik): $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğri olmak üzere $\forall s \in I$ için

$$\kappa(s) = \|T'(s)\|$$

biçiminde tanımlanan κ fonksiyonuna γ eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s) \in \mathbb{R}$ reel sayısına γ nın $\gamma(s)$ noktasındaki eğriliği adı verilir (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.9 (Asli normal): $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğri olmak üzere

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s)$$

vektör alanına γ eğrisi boyunca asli normal vektör alanı denir (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.10 (Binormal): $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğri olmak üzere

$$B(s) = T(s) \wedge N(s)$$

vektör alanına γ eğrisi boyunca binormal vektör alanı denir (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.11 (Frenet Vektörleri): $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için $T(s), N(s), B(s)$ vektörlerine eğrinin $\gamma(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri ve T, N, B vektör alanlarına γ eğrisi üstünde Frenet vektör alanları adı verilir. Bu vektör alanlarının oluşturduğu $\{T, N, B\}$ çatısına γ eğrisinin Frenet çatısı denir (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.12 (Burulma): $\mathbb{R}^3$ uzayında $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere $\forall s \in I$ için

$$\tau(s) = -\langle B'(s), N(s)\rangle = \langle B(s), N'(s)\rangle$$

şekllinde tanımlanan τ fonksiyonuna γ eğrisinin burulma fonksiyonu adı verilir. $\tau(s) \in \mathbb{R}$ sayısına γ nın $\gamma(s)$ noktasındaki burulması denir (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.13 (Frenet formülleri): $\mathbb{R}^3$ uzayında $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi üstünde Frenet vektör alanları T, N, B ise

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T + \tau B \\ B' &= -\tau N \end{aligned}$$

dir. Bu eşitliklere birim hızlı γ eğrisi için Frenet formülleri denir (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.14 (Rotation minimizing vektör alanı): $\mathbb{R}^3$ uzayında bir $\gamma = \gamma(t)$ eğrisi üzerindeki bir $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}(t)$ normal vektör alanının türevi $\overrightarrow{v}'(t)$, $\gamma'(t)$ ile orantılı ise bu vektör alanına göreceli paralel veya rotation minimizing (RM) denir (Etayo 2016).

Tanım 2.15 (Rotation minimizing çatı): $\mathbb{R}^3$ uzayında $\gamma = \gamma(t)$ bir eğri olsun. $\left\{\overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N_i}(t)\right\}$, $i = 1, 2$ hareketli ortonormal çatısı rotation minimizing çatı, paralel çatı, Bishop çatısı ya da adopted çatı olarak adlandırılır. Burada $\overrightarrow{T}(t)$, γ nın $\gamma(t)$ noktasındaki teğet vektörü ve $\overrightarrow{N_i}(t) = \left\{\overrightarrow{N_1}(t), \overrightarrow{N_2}(t)\right\}$ rotation minimizing vektör alanlarıdır (Etayo 2016).

Tanım 2.16 (Singüler nokta): $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ eğrisinde $\gamma'(t) = 0$ olan noktalara γ eğrisinin singüler noktaları denir.

Tanım 2.17 (Ordinary cusp singülerliği): $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ düzgün bir eğri olsun. Eğer bir $t_0 \in I$ noktası γ eğrisinin singüler noktası (yani $\gamma'(t_0) = 0$), $\gamma''(t_0) \neq 0$ ve $\gamma''(t_0)$ ile $\gamma'''(t_0)$ vektörleri lineer bağımsız vektörler ise bu durumda γ eğrisi, $t_0 \in I$ noktasında ordinary cusp singülerliğine sahiptir (Rutter 2000).

Tanım 2.18 (Dual Eğri): Birim küre üzerinde bir γ eğrisinin dual eğrisi, γ eğrisine $\frac{\pi}{2}$ kadar uzaklıkta bulunan $\gamma^\vee$ eğrisidir. $\gamma^\vee$ dual eğrisi, γ eğrisinin Gauss dönüşümü olarak düşünülebilir (Arnol'd 1995).

Tanım 2.19 (Ordinary inflection noktası): $\gamma : I \to S^2$ regüler eğrisinin bir $\gamma(s_0)$ noktasında $\kappa_g(s_0) = 0$ ve $\kappa_g'(s_0) \neq 0$ oluyor ise $\gamma(s_0)$ noktasına γ eğrisinin bir ordinary inflection noktası denir (Hananoi vd. 2015).

Tanım 2.20 (Helis): $\mathbb{R}^3$ uzayındaki bir γ eğrisinin T birim teğet vektör alanı, sabit bir u vektörü ile sabit açı yapıyorsa γ eğrisine bir helis adı verilir. Sabit u vektörüne de helisin ekseni adı verilir (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.21 $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi $\kappa(s) \neq 0$ olmak üzere bir helistir $\Longleftrightarrow$ $(\frac{\tau}{\kappa})(s)$'in sabittir. Eğer κ ve τ sıfırdan farklı sabitler ise helise dairesel helis adı verilir (Izumiya ve Takeuchi 2004).

Tanım 2.22 (Slant Helis): $\mathbb{R}^3$ uzayındaki bir γ eğrisinin $\kappa(s) \neq 0$ olmak üzere asli normal vektörü sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa γ eğrisine slant helis adı verilir (Izumiya ve Takeuchi 2004).

Tanım 2.23 (Lorentz-Minkowski Uzayı): $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında herhangi $u = (u_0, u_1, u_2)$ ve $v = (v_0, v_1, v_2)$ vektörleri için

$$\langle u, v \rangle = -u_0 v_0 + u_1 v_1 + u_2 v_2$$

pseudo-skaler çarpımı ile tanımlanan $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$ uzayına Lorentz-Minkowski uzayı denir. $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$ uzayı $\mathbb{R}^3_1$ ile gösterilir. $\mathbb{R}^3_1$ uzayına ayrıca Minkowski uzayı da denir (López 2008).

Tanım 2.24 (Spacelike, Timelike, Lightlike(null) vektör): Bir $u \in \mathbb{R}^3_1$ vektörü

i) $\langle u, u \rangle > 0$ veya $u = 0$ ise spacelike,

ii) $\langle u, u \rangle < 0$ ise timelike,

iii) $\langle u, u \rangle = 0$ ve $u \neq 0$ ise lightlike olarak isimlendirilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.25 (Gelecek ve geçmiş yönlendirmeli timelike vektör):
$E_0 = (1, 0, 0)$ olsun. $u \in \mathbb{R}^3_1$ timelike vektörü için

i) $\langle u, E_0 \rangle < 0$ ise u vektörüne gelecek yönlendirmeli timelike vektör,

ii) $\langle u, E_0 \rangle > 0$ ise u vektörüne geçmiş yönlendirmeli timelike vektör denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.26 (Norm): $x \in \mathbb{R}^3_1$ vektörünün normu

$$\|x\| = \sqrt{|\langle x, x \rangle|}$$

ile tanımlanır. Bir vektörün normu 1 ise vektöre birim vektör denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.27 (Hiperbolik uzay, de Sitter uzayı, lightcone):

i) Hiperbolik uzay

$$H^2(-1) = \left\{ p \in \mathbb{R}^3_1 \mid \langle p, p \rangle = -1 \right\}$$

ile,

ii) de Sitter uzayı

$$S_1^2 = \left\{p \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle p, p\rangle = 1\right\}$$

ile,

iii) lightcone

$$LC^* = \left\{p \in \mathbb{R}_1^3 \backslash \{0\} \mid \langle p, p\rangle = 0\right\}$$

ile tanımlanır (López 2008).

Tanım 2.28 (Vektörel Çarpım): $\forall v = (v_0, v_1, v_2),\ w = (w_0, w_1, w_2) \in \mathbb{R}_1^3$ için Minkowski vektörel çarpımı

$$v \wedge w = \begin{vmatrix} -i & j & k \\ v_0 & v_1 & v_2 \\ w_0 & w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

$$= (v_2 w_1 - v_1 w_2, v_2 w_0 - v_0 w_2, v_0 w_1 - v_1 w_0)$$

şeklinde tanımlanır (O'Neill 1983).

Tanım 2.29 (Eğri): $\mathbb{R}$ de I bir açık aralık iken $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}_1^3$ şeklinde tanımlı diferansiyellenebilir dönüşüme 3 boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında bir eğridir denir. Her $t \in I$ için $\gamma'(t)$ vektörü spacelike (sırasıyla timelike, lightlike) bir vektör ise eğriye spacelike (sırasıyla timelike, lightlike) eğri denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.30 (Hız vektörü): $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}_1^3$ eğrisinin hız vektörü her $t \in I$ için $\gamma'(t)$ şeklinde tanımlanır (O'Neill 1983).

Tanım 2.31 (Regüler eğri): $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}_1^3$ eğrisinin I açık aralığının her noktası için hız vektörü sıfırdan farklı ise γ eğrisine regüler eğri adı verilir (O'Neill 1983).

Lemma 2.1 $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}_1^3$ eğrisi bir spacelike veya timelike eğri ise $\|\gamma'(t)\| = 1$ olacak şekilde bir parametre değişimi vardır. Böyle bir durumda γ eğrisine birim hızlı eğri veya yay uzunluğu parametrelendirilmiş eğri denir (López 2008).

Tanım 2.32 (Düzlem): Bir $u \in \mathbb{R}_1^3$ sıfırdan farklı vektörü ve bir $c \in \mathbb{R}$ reel sayısı için normali u olan düzlem

$$P(u, c) = \{x \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle x, u \rangle = c\}$$

şeklinde tanımlanır. u vektörü sırasıyla timelike, spacelike ya da lightlike ise $P(u, c)$ düzlemine sırasıyla spacelike düzlem, timelike düzlem ya da ligthlike düzlem denir (López 2008).

Tanım 2.33 (Hiperbolik doğru): $H^2(-1)$ hiperbolik uzayı ile orijinden geçen bir timelike düzlemin arakesit eğrisine bir hiperbolik doğru adı verilir (Ito ve Izumiya 2016).

Tanım 2.34 (Horocycle): $H^2(-1)$ hiperbolik uzayı ile bir lightlike düzlemin arakesit eğrisine bir horocycle adı verilir (Ito ve Izumiya 2016).

Tanım 2.35 (Geodezik pseudo-çember): De Sitter uzayı S_1^2 ile orijinden geçen bir spacelike düzlemin arakesit eğrisine de Sitter uzayında bir geodezik pseudo-çember adı verilir (Ito ve Izumiya 2016).

Tanım 2.36 (Geodezik hiperbol): De Sitter uzayı S_1^2 ile orijinden geçen bir timelike düzlemin arakesit eğrisine de Sitter uzayında bir geodezik hiperbol adı verilir (Ito ve Izumiya 2016).

Tanım 2.37 (De Sitter horocycle): De Sitter uzayı S_1^2 ile orijini içermeyen bir lightlike düzlemin arakesit eğrisine bir de Sitter horocycle adı verilir (Ito ve Izumiya 2016).

Tanım 2.38 (İmmersiyon): M, ∂M ile sınırlı düzgün bağlantılı bir yüzey olsun. $x : M \to \mathbb{R}^3_1$ diferansiyellenebilir dönüşümünün türev dönüşümü $dx_p : T_pM \to \mathbb{R}^3$ birebir ise x diferansiyellenebilir dönüşümüne bir immersiyon denir. Bir immersiyonun her teğet düzlemi spacelike, timelike ya da lightlike ise bu immersiyona sırasıyla spacelike, timelike ya da lightlike tır denir (López 2008).

Tanım 2.39 (k-jet): $k \geq 1$ bir tamsayı olsun. Bir $f : \mathbb{R}, t_0 \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun t_0 noktasındaki k-jeti, k. derece Taylor serisinden sabit terimin çıkarılmasıyla elde edilen

$$j^* f(t_0) = tf'(t_0) + \frac{t^2}{2!} f''(t_0) + ... + \frac{1}{k!} t^k f^{(k)}(t_0)$$

polinomudur (Bruce ve Giblin 1992).

Tanım 2.40 (Dönüşüm germi): M ve N manifoldlar olsun. Bir $M \to N$ dönüşüm germi M manifoldunun bir x noktasının U komşuluklarında tanımlanan $\varphi : U \to N$ dönüşümlerinin bir denklik sınıfıdır: burada iki dönüşüm x noktasının bazı komşuluklarında çakışıyorsa denktir (Bu komşuluk iki dönüşümün tanımlandığı komşulukların kesişiminden daha küçüktür.) (Arnol'd vd. 1986).

3. ÖKLİD UZAYINDA YÜZEY EĞRİLERİNİN KÜRESEL DARBOUX GÖSTERGELERİ

Bu bölümde Hananoi, Ito ve Izumiya tarafından yazılan ve Çiçekdal' ın yüksek lisans tez çalışmasında geniş bir şekilde incelenen " Spherical Darboux images of curves on surfaces" isimli çalışmadan sonraki bölümlerde yararlanılmak üzere bazı kısımlara yer verilecektir.

3.1 Yüzey Eğrilerinin Darboux Çatısı

$U \subset \mathbb{R}^2$ olmak üzere $X : U \to \mathbb{R}^3$ ile bir $M = X(U)$ düzgün yüzeyi verilsin.
$\gamma : I \to M \subset \mathbb{R}^3$ bu yüzey üzerinde regüler bir eğri olsun. γ eğrisi regüler eğri olduğundan yay parametreli olacak şekilde parametrize edilebilir. Böylece
$\gamma(s) = X(u(s), v(s))$ yazılabilir. Bu durumda γ nın birim teğet vektör alanı

$$\mathbf{t}(s) = \gamma'(s)$$

şeklinde olur. Yüzeyin bir $p = X(u, v)$ noktasındaki $\mathbf{n}$ birim normal vektör alanı

$$\mathbf{n}(p) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(u, v)$$

olmak üzere γ eğrisi boyunca M yüzeyinin birim normal vektör alanı,

$$\mathbf{n}_\gamma(s) = \mathbf{n} \circ \gamma(s)$$

ve

$$\mathbf{g}(s) = \mathbf{n}_\gamma(s) \wedge \mathbf{t}(s)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece γ boyunca ortonormal $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{g}(s), \mathbf{n}_\gamma(s)\}$ çatısı elde edilir ki bu çatıya γ boyunca Darboux çatısı adı verilir. O halde Frenet-Serret formülleri

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= \kappa_g(s)\mathbf{g}(\mathbf{s}) + \kappa_n(s)\mathbf{n}_\gamma(s), \\ \mathbf{g}'(\mathbf{s}) &= -\kappa_g(s)\mathbf{t}(s) + \tau_g(s)\mathbf{n}_\gamma(s), \\ \mathbf{n}'_\gamma(s) &= -\kappa_n(s)\mathbf{t}(s) - \tau_g(s)\mathbf{g}(\mathbf{s}), \end{aligned} \tag{3.1}$$

şeklinde elde edilir; burada

$$\begin{aligned}
\kappa_g(s) &= \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{g}(\mathbf{s}) \rangle = \det(\gamma'(s), \gamma''(s), \mathbf{n}_\gamma(s)), \\
\kappa_n(s) &= \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}_\gamma(s) \rangle = \langle \gamma''(s), \mathbf{n}_\gamma(s) \rangle , \\
\tau_g(s) &= \left\langle \mathbf{g}'(\mathbf{s}), \mathbf{n}_\gamma(s) \right\rangle = \det(\gamma'(s), \mathbf{n}_\gamma(s), \mathbf{n}'_\gamma(s))
\end{aligned}$$

ve $\langle a, b \rangle$, $\mathbb{R}^3$ teki standart iç çarpımdır. κ_g ye γ eğrisinin *geodezik eğriliği*, κ_n ye γ eğrisinin *normal eğriliği* ve τ_g ye γ eğrisinin *geodezik burulması* adı verilir. Ayrıca biliniyor ki;

1) M yüzeyinde γ bir asimptotik eğridir ancak ve ancak $\kappa_n = 0$,

2) M yüzeyinde γ bir geodezik eğridir ancak ve ancak $\kappa_g = 0$,

3) M yüzeyinde γ bir eğrilik çizgisidir ancak ve ancak $\tau_g = 0$ (Sabuncuoğlu 2004).

Şimdi M yüzeyi birim küre ve $\gamma : I \to S^2$ birim küre üzerinde regüler bir eğri olsun. s, yay parametresi olmak üzere γ eğrisinin birim teğet vektörü

$$\mathbf{t}(s) = \gamma'(s)$$

ve eğri birim küre üzerinde olduğu için γ boyunca yüzeyin birim normal vektör alanı

$$\mathbf{n}_\gamma(s) = \mathbf{n} \circ \gamma(s) = \boldsymbol{\gamma}(s)$$

olur. Buradan

$$\mathbf{g}(s) = \boldsymbol{\gamma}(s) \wedge \mathbf{t}(s)$$

şeklinde yazılır. O halde $\gamma(s)$ eğrisi boyunca $\{\boldsymbol{\gamma}(s), \mathbf{t}(s), \mathbf{g}(s)\}$ Darboux çatısı elde edilir. Bu çatıya, eğri birim küre üzerinde olduğu için γ boyunca Sabban çatısı da denir. γ eğrisi için $\kappa_n(s) = -1$ ve $\tau_g(s) = 0$ dır. Bu durumda birim küre üzerindeki birim hızlı bir γ eğrisi için aşağıdaki Frenet-Serret türev formülleri

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma}'(s) &= \mathbf{t}(s) \\
\mathbf{t}'(s) &= \kappa_g(s)\mathbf{g}(s) - \boldsymbol{\gamma}(s) \\
\mathbf{g}'(s) &= -\kappa_g(s)\mathbf{t}(s)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

şeklinde yazılır.

3.2 Küresel Darboux Göstergeleri ve Singüleriteleri

$\gamma : I \to M \subset \mathbb{R}^3$ eğrisi bir M düzgün yüzeyi üzerinde regüler bir eğri olsun. γ eğrisinin Darboux vektör alanı $\mathbf{D} \wedge \mathbf{t} = \mathbf{t}'$, $\mathbf{D} \wedge \mathbf{g} = \mathbf{g}'$ ve $\mathbf{D} \wedge \mathbf{n}_\gamma = \mathbf{n}'_\gamma$ eşitlikleri yardımıyla

$$\mathbf{D} = \tau_g(s)\mathbf{t}(s) - \kappa_n(s)\mathbf{g}(s) + \kappa_g(s)\mathbf{n}_\gamma(s)$$

biçiminde yazılır. Bu vektör alanı kullanılarak γ boyunca üç tane özel yeni vektör alanı aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_n(s) &= -\kappa_n(s)\mathbf{g}(s)+\kappa_g(s)\mathbf{n}_\gamma(s), \\
\mathbf{D}_r(s) &= \tau_g(s)\mathbf{t}(s) + \kappa_g(s)\mathbf{n}_\gamma(s), \\
\mathbf{D}_o(s) &= \tau_g(s)\mathbf{t}(s) - \kappa_n(s)\mathbf{g}(s),
\end{aligned}$$

Bu vektör alanları sırasıyla; **normal Darboux vektör alanı**, **rektifiyan Darboux vektör alanı** ve **oskülatör Darboux vektör alanı** olarak adlandırılır (Hananoi vd. 2015).

Her bir Darboux vektör alanının küresel gösterge eğrileri;

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{D}}_n(s) &= \frac{\mathbf{D}_n(s)}{\|\mathbf{D}_n(s)\|} = \frac{-\kappa_n(s)\mathbf{g}(s)+\kappa_g(s)\mathbf{n}_\gamma(s)}{\sqrt{\kappa_n(s)^2+\kappa_g(s)^2}} \ , (\kappa_n(s),\kappa_g(s)) \neq (0,0) \\
\bar{\mathbf{D}}_r(s) &= \frac{\mathbf{D}_r(s)}{\|\mathbf{D}_r(s)\|} = \frac{\tau_g(s)\mathbf{t}(s)+\kappa_g(s)\mathbf{n}_\gamma(s)}{\sqrt{\tau_g(s)^2+\kappa_g(s)^2}} \ , (\tau_g(s),\kappa_g(s)) \neq (0,0) \\
\bar{\mathbf{D}}_o(s) &= \frac{\mathbf{D}_o(s)}{\|\mathbf{D}_o(s)\|} = \frac{\tau_g(s)\mathbf{t}(s)-\kappa_n(s)\mathbf{g}(s)}{\sqrt{\tau_g(s)^2+\kappa_n(s)^2}} \ , (\kappa_n(s),\tau_g(s)) \neq (0,0)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{D}}_n &: I \to S^2, (\kappa_n(s),\kappa_g(s)) \neq (0,0), \\
\bar{\mathbf{D}}_r &: I \to S^2, (\tau_g(s),\kappa_g(s)) \neq (0,0), \\
\bar{\mathbf{D}}_o &: I \to S^2, (\kappa_n(s),\tau_g(s)) \neq (0,0),
\end{aligned}$$

Bu küresel eğrilere sırasıyla γ boyunca **küresel normal Darboux göstergesi**, **küresel rektifiyan Darboux göstergesi** ve **küresel oskülatör Darboux göstergesi** adı verilir (Hananoi vd. 2015).

Şimdi bu küresel eğrilerin singüler noktalarını inceleyelim.

$\gamma : I \to M \subset \mathbb{R}^3$birim hızlı eğrisinin $\{\mathbf{T},\ \mathbf{N},\ \mathbf{B}\}$ Frenet çatısına göre eğrilikleri κ ve τ; $\{\mathbf{t},\ \mathbf{g},\ \mathbf{n}_\gamma\}$ Darboux çatısına göre eğrilikleri κ_g, κ_n, τ_g olsun. γ eğrisinin birim teğet vektör alanı $\mathbf{T}(\mathbf{s}) = \mathbf{t}(s) = \gamma'(s)$ olmak üzere (3.1) den
$\mathbf{t}'(s) = \kappa_g(s)\mathbf{g}(\mathbf{s}) + \kappa_n(s)\mathbf{n}_\gamma(s)$ olduğundan

$$\kappa(s) = \|\mathbf{t}'(s)\| = \sqrt{\kappa_n^2(s) + \kappa_g^2(s)}$$

bulunur. $\gamma''(s) = \mathbf{t}'(s) = \kappa_g(s)\mathbf{g}(\mathbf{s}) + \kappa_n(s)\mathbf{n}_\gamma(s)$ olduğundan

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\gamma''(s)}{\kappa(s)} = \frac{\kappa_g(s)\mathbf{g}(\mathbf{s}) + \kappa_n(s)\mathbf{n}_\gamma(s)}{\sqrt{\kappa_n^2(s) + \kappa_g^2(s)}}$$

ve

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \wedge \mathbf{N}(s) = \frac{\kappa_g(s)\mathbf{n}_\gamma(s) - \kappa_n(s)\mathbf{g}(\mathbf{s})}{\sqrt{\kappa_n^2(s) + \kappa_g^2(s)}}$$

şeklinde bulunur. $\tau(s) = \langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{B}(s) \rangle$ olduğundan gerekli hesaplamalar yapılarak

$$\tau(s) = \tau_g(s) - \frac{\kappa_n(s)\kappa_g'(s) - \kappa_n'(s)\kappa_g(s)}{\kappa_n^2(s) + \kappa_g^2(s)} \tag{3.3}$$

olarak elde edilir.
(M, γ) eğri yüzey ikilisinin invaryantları

$$\begin{aligned}
\delta_n(s) &= \tau_g(s) - \frac{\kappa_n(s)\kappa_g'(s) - \kappa_n'(s)\kappa_g(s)}{\kappa_n^2(s) + \kappa_g^2(s)} \ \text{ eğer } (\kappa_n(s), \kappa_g(s)) \neq (0,0), \\
\delta_r(s) &= \kappa_n(s) - \frac{\kappa_g(s)\tau_g'(s) - \kappa_g'(s)\tau_g(s)}{\kappa_g^2(s) + \tau_g^2(s)} \ \text{ eğer } (\tau_g(s), \kappa_g(s)) \neq (0,0), \\
\delta_o(s) &= \kappa_g(s) + \frac{\kappa_n(s)\tau_g'(s) - \kappa_n'(s)\tau_g(s)}{\kappa_n^2(s) + \tau_g^2(s)} \ \text{ eğer } (\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0,0).
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır (Hananoi vd. 2015). Burada (3.3) den $\delta_n(s) = \tau(s)$ olduğu görülür. δ_n, δ_r, δ_o invaryantları sırasıyla $\int \mathbf{t}ds$, $\int \mathbf{g}ds$ ve $\int \mathbf{n}_\gamma ds$ eğrilerinin burulmalarına eşittir. Bu invaryantlar kullanılarak $\bar{\mathbf{D}}_n, \bar{\mathbf{D}}_r, \bar{\mathbf{D}}_o$ küresel gösterge eğrilerinin singüler noktaları sınıflandırılabilir.

Teorem 3.1 $\gamma : I \to M \subset \mathbb{R}^3$, M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri olsun.

A) $(\kappa_n(s), \kappa_g(s)) \neq (0,0)$ olsun.

(1) $\bar{\mathbf{D}}_n$, s_0 noktasında singüler değildir ancak ve ancak $\delta_n(s_0) \neq 0$.

(2) $\bar{\mathbf{D}}_n$ küresel eğrisi bir s_0 noktasında C *ordinary cusp* noktasına lokal diffeomorftur ancak ve ancak $\delta_n(s_0) = 0$ ve $\delta_n'(s_0) \neq 0$.

B) $(\tau_g(s), \kappa_g(s)) \neq (0,0)$ olsun.

(1) $\bar{\mathbf{D}}_r$, s_0 noktasında singüler değildir ancak ve ancak $\delta_r(s_0) \neq 0$.

(2) $\bar{\mathbf{D}}_r$ küresel eğrisi bir s_0 noktasında C *ordinary cusp* noktasına lokal diffeomorftur ancak ve ancak $\delta_r(s_0) = 0$ ve $\delta_r'(s_0) \neq 0$.

C) $(\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0,0)$ olsun.

(1) $\bar{\mathbf{D}}_o$, s_0 noktasında singüler değildir ancak ve ancak $\delta_o(s_0) \neq 0$.

(2) $\bar{\mathbf{D}}_o$ küresel eğrisi bir s_0 noktasında C *ordinary cusp* noktasına lokal diffeomorftur ancak ve ancak $\delta_o(s_0) = 0$ ve $\delta_o'(s_0) \neq 0$.

Burada *ordinary cusp* $C = \{(x_1, x_2) : x_1^3 = x_2^2\}$ (yarı kübik parabol) (Hananoi vd. 2015).

Teoremin ispatı Hananoi vd. (2015) ve Çiçekdal (2018) tarafından verilmiştir.

3.3 Birim Küre Üzerinde Eğriler ve Dualleri

$\gamma : I \to S^2$ birim küre üzerinde regüler bir eğri ve $\gamma^\vee$ bu eğrinin dual eğrisi olsun. γ ve $\gamma^\vee$ eğrilerinin singüler noktaları arasındaki ilişkiyi gösteren aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 3.1 S^2 üzerinde bir γ eğrisi *ordinary geodesic inflection* noktasına sahiptir ancak ve ancak γ eğrisinin dual eğrisi ($\gamma^\vee$) aynı noktada *ordinary cusp* noktasına sahiptir (Porteous 1999).

Sonraki önerme, tanım 2.19 göz önüne alındığında önerme 3.1 in bir sonucu olarak verilebilir.

Önerme 3.2 $\gamma^\vee(s)$ dual eğrisi s_0 noktasında bir *ordinary cusp* singülerliğine sahiptir ancak ve ancak $\kappa_g(s_0) = 0$ and $\kappa_g'(s_0) \neq 0$ (Porteous 1999).

Birim küre üzerinde γ eğrisinin $\kappa(s) = \sqrt{\kappa_g^2(s)+1}$ eğriliği sabittir ancak ve ancak γ bir çemberin parçasıdır. Dolayısıyla buradan $\kappa_g(s)$ sabittir ancak ve ancak γ bir çemberin parçasıdır. Dahası γ büyük çemberin bir parçasıdır ancak ve ancak $\kappa_g(s) = 0$. Bu koşul ayrıca $\gamma^{\vee}$ eğrisinin sabit olmasına denktir. Bu yüzden yukarıdaki önermenin geometrik anlamını yorumlayabilmek için bir yükseklik fonksiyonu tanımlanarak aşağıdaki önerme elde edilir :

Önerme 3.3 $H : I \times S^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $H(s, \mathbf{v}) = \langle \boldsymbol{\gamma}(s), \mathbf{v} \rangle$ şeklinde tanımlansın.

$$h_v(s) = H(s, \mathbf{v})$$

olmak üzere

1) $h_v(s) = h_v'(s) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \pm\gamma^{\vee}(s)$.

2) $h_v(s) = h_v'(s) = h_v''(s) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \pm\gamma^{\vee}(s)$ ve $\kappa_g(s) = 0$.

3) $h_v(s) = h_v'(s) = h_v''(s) = h_v'''(s) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \pm\gamma^{\vee}(s)$ ve $\kappa_g(s) = \kappa_g'(s) = 0$ (Hananoi vd. 2015).

$$H : I \times S^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ H(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle$$

eşitliği kullanılarak

$$\mathbf{H} : S^2 \times S^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ fonksiyonunu } \mathbf{h}_v(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$$

şeklinde tanımlanır. O halde

$$\gamma : I \to S^2,\ \mathbf{h}_v : S^2 \to \mathbb{R} \text{ olup } h_v = \mathbf{h}_v \circ \boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}$$

olur.

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_v &: S^2 \to \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\to \mathbf{h}_v(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \text{ ise} \\ \mathbf{h}_v^{-1} &: \mathbb{R} \to S^2 \end{aligned}$$

olup $v_0 = \gamma^{\vee}(s_0)$ olmak üzere $\mathbf{h}_{v_0}^{-1}(0)$ kümesi $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_0 \rangle = 0$ olan $\mathbf{x}$ noktalarının kümesidir. Yani, normali $\mathbf{v}_0$ olan ve orjinden geçen düzlemlerle kürenin arakesiti kürenin

büyük çemberidir (bu çemberin geodezik eğriliği sıfırdır.). Bu kümeye $p_0 = \gamma(s_0)$ noktasında γ eğrisinin büyük teğet çemberi denir ve $TG_{p_0}\gamma$ şeklinde gösterilir.
Eğer $p_0 = \gamma(s_0)$ noktasında

$$h_v(s_0) = h_v'(s_0) = h_v''(s_0) = ... = h_v^{(k)}(s_0) = 0 \text{ ve } h_v^{(k+1)}(s_0) \neq 0$$

oluyor ise γ ve $TG_{p_0}\gamma$ bu noktada $k+1-$ *değme noktasına* sahiptir denir. Bu durumda $v_0 = \gamma^{\vee}(s_0)$ için yukarıdaki önermenin 1. maddesi; γ, bir $p_0 = \gamma(s_0)$ noktasında büyük çember $\mathbf{h}_{v_0}^{-1}(0)$ a teğettir anlamına gelir (teğet olma durumu 2-değme noktasına sahip olmak anlamına gelir) (Hananoi vd. 2015).

4. ÖKLİD UZAYINDA BİR ÇATININ KÜRESEL DARBOUX GÖSTERGELERİ

Bir $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi üzerinde herhangi bir $\{\mathbf{X}(s), \mathbf{Y}(s), \mathbf{Z}(s)\}$ ortonormal çatısını alalım. Bu çatının türev formülleri

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}(s) \\ \mathbf{Y}(s) \\ \mathbf{Z}(s) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}(s) \\ \mathbf{Y}(s) \\ \mathbf{Z}(s) \end{pmatrix}$$

şeklinde olsun. Bu durumda $\{\mathbf{X}(s), \mathbf{Y}(s), \mathbf{Z}(s)\}$ çatısının Darboux vektörü

$$\mathbf{W}(s) = c\mathbf{X}(s) - b\mathbf{Y}(s) + a\mathbf{Z}(s)$$

biçimindedir. Buradan

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{\mathbf{X}}(s) &= -b\mathbf{Y}(s) + a\mathbf{Z}(s) \\ \mathbf{W}_{\mathbf{Y}}(s) &= c\mathbf{X}(s) + a\mathbf{Z}(s) \\ \mathbf{W}_{\mathbf{Z}}(s) &= c\mathbf{X}(s) - b\mathbf{Y}(s) \end{aligned}$$

şeklinde üç tip yeni vektör alanı tanımlanarak ve bu vektör alanları birimleştirilerek üç tip küresel gösterge eğrisi tanımlanabilir. Şimdi;

(1) $\mathbf{X}$ vektör alanına dik düzlemde $\{\mathbf{Y}, \mathbf{Z}\}$ vektörlerini $\mathbf{X}$ etrafında döndürerek bir RM çatı elde edilecek ve bu çatının Darboux vektörü $\mathbf{W}_{\mathbf{X}}$ olarak bulunacaktır.

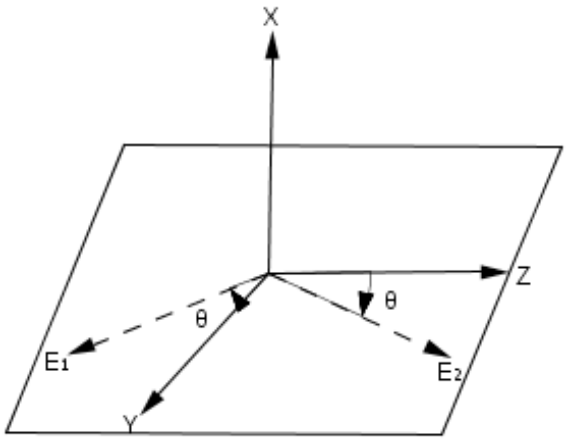
(2) $\mathbf{Y}$ vektör alanına dik düzlemde $\{\mathbf{X}, \mathbf{Z}\}$ vektörlerini $\mathbf{Y}$ etrafında döndürerek bir RM çatı elde edilecek ve bu çatının Darboux vektörü $\mathbf{W}_{\mathbf{Y}}$ olarak bulunacaktır.

(3) $\mathbf{Z}$ vektör alanına dik düzlemde $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$ vektörlerini $\mathbf{Z}$ etrafında döndürerek bir RM çatı elde edilecek ve bu çatının Darboux vektörü $\mathbf{W}_{\mathbf{Z}}$ olarak bulunacaktır.

Bu şekilde elde edilen çatılara sırasıyla 1. tip RM çatı, 2. tip RM çatı ve 3. tip RM çatı adı verilecektir. Daha sonra bu çatıların küresel Darboux gösterge eğrileri tanımlanarak bu gösterge eğrilerinin singüler noktaları belirlenecektir.

4.1 1. Tip RM Çatı

Şimdi $\{\mathbf{X}(s), \mathbf{Y}(s), \mathbf{Z}(s)\}$ çatısını $\mathbf{X}(s)$ vektör alanı etrafında $\theta = \theta(s) = \int cds$ açısı kadar saat yönünde döndürelim.



Şekil 4.1 YZ-düzleminde θ açısı kadar dönme

O halde

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1(s) &= \cos\theta\mathbf{Y}(s) - \sin\theta\mathbf{Z}(s) \\ \mathbf{E}_2(s) &= \sin\theta\mathbf{Y}(s) + \cos\theta\mathbf{Z}(s) \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1'(s) &= -\theta'\sin\theta\mathbf{Y}(s) + \cos\theta\mathbf{Y}'(s) - \theta'\cos\theta\mathbf{Z}(s) - \sin\theta\mathbf{Z}'(s) \\ \mathbf{E}_2'(s) &= \theta'\cos\theta\mathbf{Y}(s)\sin\theta\mathbf{Y}'(s) - \theta'\sin\theta\mathbf{Z}(s) + \cos\theta\mathbf{Z}'(s) \end{aligned}$$

ifadelerinde $\theta' = c,\ \mathbf{Y}'(s) = -a\mathbf{X}(s) + c\mathbf{Z}(s)$ ve $\mathbf{Z}'(s) = -b\mathbf{X}(s) - c\mathbf{Y}(s)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1'(s) &= -(a\cos\theta - b\sin\theta)\mathbf{X}(s) \\ \mathbf{E}_2'(s) &= -(a\sin\theta + b\cos\theta)\mathbf{X}(s) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} e_1 &= a\cos\theta - b\sin\theta \\ e_2 &= a\sin\theta + b\cos\theta \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda $e_1^2 + e_2^2 = a^2 + b^2$ dir. Böylece türev formülleri

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}(s) \\ \mathbf{E}_1(s) \\ \mathbf{E}_2(s) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & e_1 & e_2 \\ -e_1 & 0 & 0 \\ -e_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}(s) \\ \mathbf{E}_1(s) \\ \mathbf{E}_2(s) \end{pmatrix}$$

biçiminde olan $\{\mathbf{X}(s), \mathbf{E}_1(s), \mathbf{E}_2(s)\}$ ortonormal çatısı $\int \mathbf{X}(s)ds$ eğrisi üzerinde rotation minimizing çatıdır. Burada e_1 ve e_2 rotation minimizing eğriliklerdir. Bu çatının Darboux vektörü

$$\mathbf{W}_\mathbf{X} = -e_2\mathbf{E}_1(s) + e_1\mathbf{E}_2(s) = -b\mathbf{Y}(s) + a\mathbf{Z}(s)$$

ve küresel Darboux göstergesi

$$\bar{\mathbf{W}}_\mathbf{X} = \frac{-e_2\mathbf{E}_1(s) + e_1\mathbf{E}_2(s)}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}} = \frac{-b\mathbf{Y}(s) + a\mathbf{Z}(s)}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ (a,b) \neq (0,0)$$

olarak bulunur. $\langle \mathbf{X}, \bar{\mathbf{W}}_\mathbf{X} \rangle = 0$ ve $\langle \mathbf{X}', \bar{\mathbf{W}}_\mathbf{X} \rangle = 0$ olduğundan $\mathbf{X}^\vee = \bar{\mathbf{W}}_\mathbf{X}$ olur. O halde $\{\mathbf{X}, \bar{\mathbf{W}}_\mathbf{X} \wedge \mathbf{X} = \mathbf{U}_\mathbf{X}, \bar{\mathbf{W}}_\mathbf{X}\}$ biçiminde bir çatı elde edilir ki bu çatı S^2 üzerindeki $\mathbf{X}$ eğrisinin Sabban çatısıdır. Aynı zamanda bu çatı $\alpha = \int \mathbf{X}ds$ birim hızlı eğrisinin Frenet çatısına karşılık gelir. Burada

$$\mathbf{U}_\mathbf{X} = \frac{e_1\mathbf{E}_1(s) + e_2\mathbf{E}_2(s)}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}} = \frac{a\mathbf{Y}(s) + b\mathbf{Z}(s)}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$\bar{\mathbf{W}}'_X = \left(\frac{-e_2}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}}\right)' \mathbf{E}_1 + \left(\frac{-e_2}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}}\right) \mathbf{E}'_1 + \left(\frac{e_1}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}}\right) \mathbf{E}_2 + \left(\frac{e_1}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}}\right) \mathbf{E}'_2$$

ifadesinde $\mathbf{E}'_1 = -e_1\mathbf{X}$ ve $\mathbf{E}'_2 = -e_2\mathbf{X}$ olduğundan

$$\bar{\mathbf{W}}'_\mathbf{X} = -\frac{e'_2e_1 - e'_1e_2}{e_1^2 + e_2^2}\mathbf{U}_\mathbf{X}$$

bulunur. Burada

$$\delta_\mathbf{X} = \frac{e'_2e_1 - e'_1e_2}{e_1^2 + e_2^2}$$

için $\bar{\mathbf{W}}'_{\mathbf{X}} = -\delta_{\mathbf{X}}\mathbf{U}_{\mathbf{X}}$ olur. e_1 ve e_2 rotation minimizing eğrilikleri için

$$\begin{aligned} e_1' &= (a' - bc)\cos\theta - (b' + ac)\sin\theta \\ e_2' &= (a' - bc)\sin\theta + (b' + ac)\cos\theta \end{aligned}$$

olarak bulunacağından

$$\delta_{\mathbf{X}} = c - \frac{a'b - b'a}{a^2 + b^2},\ (a,b) \neq (0,0)$$

şeklinde yazılır. $\alpha = \int \mathbf{X} ds$ eğrisinin $\{\mathbf{X}, \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{X}} \wedge \mathbf{X} = \mathbf{U}_{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{X}}\}$ Frenet çatısına göre eğriliği

$$\kappa_\alpha = \|\mathbf{X}'\| = \sqrt{e_1^2 + e_2^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ve burulması

$$\tau_\alpha = \delta_{\mathbf{X}} = \frac{e_2' e_1 - e_1' e_2}{e_1^2 + e_2^2} = c - \frac{a'b - b'a}{a^2 + b^2}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca $\mathbf{X}$ küresel eğrisi birim hızlı olmayan eğri olduğundan $\{\mathbf{X}, \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{X}} \wedge \mathbf{X} = \mathbf{U}_{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{X}}\}$ Sabban çatısına göre geodezik eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa_g[\mathbf{X}] &= \frac{1}{\|\mathbf{X}'\|}\left\langle \mathbf{U}'_{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{X}} \right\rangle = \frac{-1}{\|\mathbf{X}'\|}\left\langle \mathbf{U}_{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{W}}'_{\mathbf{X}} \right\rangle \\ &= \frac{-1}{\|\mathbf{X}'\|}\left\langle \mathbf{U}_{\mathbf{X}}, -\delta_{\mathbf{X}}\mathbf{U}_{\mathbf{X}} \right\rangle = \frac{\delta_{\mathbf{X}}}{\|\mathbf{X}'\|} \\ &= \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1 $\{\mathbf{X}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2\}$ çatısı $\alpha = \int \mathbf{X} ds$ eğrisi üzerinde 1. tip rotation minimizing çatı ve e_1, e_2 rotation minimizing eğrilikleri için $(e_1, e_2) \neq (0,0)$ olsun. Bu durumda;

(1) $\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{X}}(s)$ eğrisi üzerinde $\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{X}}(s_0)$ noktası singüler değildir ancak ve ancak $\delta_{\mathbf{X}}(s_0) \neq 0$ dır.

(2) $\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{X}}(s)$ eğrisi üzerinde $\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{X}}(s_0)$ noktası C ordinary cusp noktasına lokal olarak diffeomorftur ancak ve ancak $\delta_{\mathbf{X}}(s_0) = 0$ ve $\delta'_{\mathbf{X}}(s_0) \neq 0$ dır.

İspat. (1) $\bar{\mathbf{W}}'_{\mathbf{X}}(s_0) = -\delta_{\mathbf{X}}(s_0)\mathbf{U}_{\mathbf{X}}(s_0)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{X}}(s_0) \text{ noktası singüler değildir} &\iff \bar{\mathbf{W}}'_{\mathbf{X}}(s_0) \neq 0 \\ &\iff \delta_{\mathbf{X}}(s_0) \neq 0 \end{aligned}$$

olduğu açıktır.

(2) $\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{X}}$ eğrisi $\mathbf{X}$ eğrisinin duali olduğundan önerme 3.2 ile

$$\begin{aligned}
& \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{X}}(s_0) \text{ noktası C ordinary cusp noktasına lokal olarak diffeomorftur} \\
\Leftrightarrow\ & \mathbf{X}(s_0) \text{ noktası bir ordinary inflection noktasıdır} \\
\Leftrightarrow\ & \kappa_g[\mathbf{X}] = 0 \text{ ve } \kappa_g'[\mathbf{X}] \neq 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\delta_{\mathbf{X}}}{\kappa_\alpha} = 0 \text{ ve } \frac{\delta_{\mathbf{X}}'\kappa_\alpha - \delta_{\mathbf{X}}\kappa_\alpha'}{\kappa_\alpha^2} \neq 0 \\
\Leftrightarrow\ & \delta_{\mathbf{X}}(s_0) = 0 \text{ ve } \delta_{\mathbf{X}}'(s_0) \neq 0.
\end{aligned}$$

■

Teorem 4.2 $\{\mathbf{X}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2\}$ çatısı $\alpha = \int \mathbf{X} ds$ eğrisi üzerinde 1. tip rotation minimizing çatı ve e_1, e_2 rotation minimizing eğrilikleri için $(e_1, e_2) \neq (0, 0)$ olmak üzere aşağıdakiler denktir:

(1) $\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{X}}(s)$ sabittir.

(2) $\delta_{\mathbf{X}}(s) \equiv 0$.

(3) $\alpha = \int \mathbf{X} ds$ eğrisi bir düzlem eğrisidir.

(4) $\mathbf{X}(\mathbf{s})$ büyük çemberin bir parçasıdır.

İspat. (1) sağlansın. O halde $\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{X}}'(s) = 0$ olur. $\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{X}}'(s) = -\delta_{\mathbf{X}}(s)\mathbf{U}_{\mathbf{X}}(s)$ olduğundan $\delta_{\mathbf{X}}(s) = 0$ olur. Böylece **(2)** sağlanır. **(2)** sağlansın. $\delta_{\mathbf{X}}(s) = \tau_\alpha(s)$ olduğundan $\tau_\alpha(s) = 0$ olur ve **(3)** sağlanır. Kabul edelim ki **(2)** sağlansın. $\kappa_g[\mathbf{X}] = \frac{\delta_{\mathbf{X}}}{\kappa_\alpha}$ olduğundan $\kappa_g[\mathbf{X}] = 0$ elde edilir. O halde $\mathbf{X}(\mathbf{s})$ büyük çemberin bir parçasıdır. Bu durumda **(4)** sağlanır. Tersi için **(4)** sağlansın. Bu durumda $\kappa_g[\mathbf{X}] = 0$ olur. Bu da $\delta_{\mathbf{X}}(s) = 0$ olduğu anlamına gelir. Böylece **(2)** sağlanır. ■

$\alpha = \int \mathbf{X} ds$ eğrisinin Frenet çatısının türev formülleri

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{U}_{\mathbf{X}} \\ \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{X}} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_\alpha & 0 \\ -\kappa_\alpha & 0 & \tau_\alpha \\ 0 & -\tau_\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{U}_{\mathbf{X}} \\ \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{X}} \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Bu formüller

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U_X} \\ \mathbf{X} \\ \bar{\mathbf{W}}_\mathbf{X} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_\alpha & \tau_\alpha \\ -\kappa_\alpha & 0 & 0 \\ \tau_\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U_X} \\ \mathbf{X} \\ \bar{\mathbf{W}}_\mathbf{X} \end{pmatrix}$$

biçiminde yazılırsa $\{\mathbf{U_X}, \mathbf{X}, \bar{\mathbf{W}}_\mathbf{X}\}$ çatısının $\int \mathbf{U_X} ds$ eğrisi üzerinde RM çatı olduğu görülür.

Teorem 4.3 $\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}$ sabittir $\Leftrightarrow \int \mathbf{X} ds$ ve $\int \bar{\mathbf{W}}_\mathbf{X} ds$ eğrileri ekseni

$$L = \frac{\tau_\alpha \mathbf{X} + \kappa_\alpha \bar{\mathbf{W}}_\mathbf{X}}{\sqrt{\tau_\alpha^2 + \kappa_\alpha^2}}$$

olan helis eğrileridir.

Örnek 4.1 M, $\mathbb{R}^3$ de bir yüzey ve $\gamma : I \to M$ birim hızlı eğri olsun. γ eğrisinin Darboux çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{g}, \mathbf{n}_\gamma\}$ olmak üzere türev formülleri

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{n}_\gamma \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ -\kappa_n & -\tau_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{n}_\gamma \end{pmatrix}$$

biçimindedir. $\{\mathbf{t}, \mathbf{g}, \mathbf{n}_\gamma\}$ çatısını $\mathbf{t}$ vektör alanı etrafında $\theta = \int \tau_g ds$ açısı kadar saat yönünde döndürelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \cos\theta \mathbf{g} - \sin\theta \mathbf{n}_\gamma \\ \mathbf{E}_2 &= \sin\theta \mathbf{g} + \cos\theta \mathbf{n}_\gamma \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} e_1 &= \kappa_g \cos\theta - \kappa_n \sin\theta \\ e_2 &= \kappa_g \sin\theta + \kappa_n \cos\theta \end{aligned}$$

olur. O halde $\{\mathbf{t}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2\}$ ortonormal çatısı $\int \mathbf{t} ds$ eğrisi üzerinde rotation minimizing çatıdır. Bu çatının Darboux vektörü

$$\mathbf{W_t} = -e_2 \mathbf{E}_1 + e_1 \mathbf{E}_2$$

ve küresel Darboux göstergesi

$$\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{t}} = \frac{-e_2\mathbf{E}_1 + e_1\mathbf{E}_2}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}}$$

şeklindedir. Burada $\mathbf{t}^{\vee} = \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{t}}$ dir. $\{\mathbf{t}, \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{t}} \wedge \mathbf{t} = \mathbf{U}_{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{t}}\}$ çatısı S^2 üzerinde $\mathbf{t}$ eğrisinin Sabban çatısıdır.

$$\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{t}}' = -\frac{e_2'e_1 - e_1'e_2}{e_1^2 + e_2^2}\mathbf{U}_{\mathbf{t}} = -\delta_{\mathbf{t}}\mathbf{U}_{\mathbf{t}}$$

olacağından teorem 4.1 e göre singüler noktaları karakterize edilebilir.

Not 4.1 Yukarıdaki örnekte elde edilen $\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{t}}$ küresel Darboux göstergesinde e_1, e_2, $\mathbf{E}_1$ ve $\mathbf{E}_2$ ifadeleri yerine yazılırsa

$$\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{t}} = \frac{-\kappa_n\mathbf{g} + \kappa_g\mathbf{n}_\gamma}{\sqrt{\kappa_n^2 + \kappa_g^2}},\ (\kappa_n, \kappa_g) \neq (0,0)$$

olarak bulunur. Bu durum Hananoi v.d (2015)' nin çalışmasındaki $\bar{\mathbf{D}}_n$ küresel normal Darboux göstergesi ile çakışır. Ayrıca aynı çalışmada belirtilen δ_n invaryantı için $\delta_{\mathbf{t}} = \delta_n$ olduğu görülür.

Örnek 4.2 $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi için Frenet çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ olmak üzere bu çatıyı 1. tip RM çatıya uygun olacak şekilde $\mathbf{T}$ birim teğet vektör alanı etrafında $\theta = \int \tau ds$ açısı kadar saat yönünde döndürelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1 &= \cos\theta\mathbf{N} + \sin\theta\mathbf{B} \\ \mathbf{N}_2 &= \sin\theta\mathbf{N} + \cos\theta\mathbf{B} \end{aligned}$$

olmak üzere elde edilen $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2\}$ çatısı Bishop çatısıdır. Bu çatı aynı zamanda $\int \mathbf{T}ds$ eğrisi üzerinde rotation minimizing çatıdır. Burada $k_1 = \kappa\cos\theta$ ve $k_2 = \kappa\sin\theta$ iken $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2\}$ çatısının türev formülleri

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Bu durumda çatının Darboux vektörü

$$\mathbf{W_T} = -k_2\mathbf{N}_1 + k_1\mathbf{N}_2$$

ve küresel Darboux göstergesi

$$\bar{\mathbf{W}}_\mathbf{T} = \frac{-k_2\mathbf{N}_1 + k_1\mathbf{N}_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}},\ (k_1, k_2) \neq (0,0)$$

biçimindedir. Burada $k_1 = \kappa\cos\theta$ ve $k_2 = \kappa\sin\theta$ ifadeleri yerine yazılırsa

$$\bar{\mathbf{W}}_\mathbf{T} = -\sin\theta\mathbf{N}_1 + \cos\theta\mathbf{N}_2$$

bulunur. Frenet ve Bishop çatılarının ilişki matrisi

$$\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}_1\\ \mathbf{N}_2\end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\mathbf{B} = -\sin\theta\mathbf{N}_1 + \cos\theta\mathbf{N}_2 = \bar{\mathbf{W}}_\mathbf{T} = \mathbf{T}^\vee$$

dir. $\bar{\mathbf{W}}'_\mathbf{T} = \mathbf{B}' = -\tau\mathbf{N}$ olduğundan $\bar{\mathbf{W}}_\mathbf{T}$ göstergesinin singüleriteleri τ burulmasına göre belirlenir.

Şimdi 1. tip RM çatı için önerme 3.3 ün bir uygulaması verilecektir.

Önerme 4.1 $H_\mathbf{X} : I \times S^2 \to \mathbb{R},\ H_\mathbf{X}(s,\mathbf{v}) = \langle\mathbf{X}(s),\mathbf{v}\rangle$ ve $h^\mathbf{X}_\mathbf{v}(s) = H_\mathbf{X}(s,\mathbf{v})$ olmak üzere

(1) $h^\mathbf{X}_\mathbf{v}(s) = (h^\mathbf{X}_\mathbf{v})'(s) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{v} = \pm\bar{\mathbf{W}}_\mathbf{X}$.

(2) $h^\mathbf{X}_\mathbf{v}(s) = (h^\mathbf{X}_\mathbf{v})'(s) = (h^\mathbf{X}_\mathbf{v})''(s) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{v} = \pm\bar{\mathbf{W}}_X$ ve $\delta_\mathbf{X}(s) = 0$.

(3) $h^\mathbf{X}_\mathbf{v}(s) = (h^\mathbf{X}_\mathbf{v})'(s) = (h^\mathbf{X}_\mathbf{v})''(s) = (h^\mathbf{X}_\mathbf{v})'''(s) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{v} = \pm\bar{\mathbf{W}}_X$ ve $\delta_\mathbf{X}(s) = \delta'_\mathbf{X}(s) = 0$.

İspat. $h^\mathbf{X}_\mathbf{v} = \langle\mathbf{X},\mathbf{v}\rangle$ olduğundan

$$\begin{aligned}
(h^\mathbf{X}_\mathbf{v})' &= \langle e_1\mathbf{E}_1 + e_2\mathbf{E}_2, \mathbf{v}\rangle\\
(h^\mathbf{X}_\mathbf{v})'' &= \langle e_1'\mathbf{E}_1 + e_2'\mathbf{E}_2 - (e_1^2 + e_2^2)\mathbf{X}, \mathbf{v}\rangle\\
(h^\mathbf{X}_\mathbf{v})''' &= \langle (e_1'' + e_1^3 + e_1e_2^2)\mathbf{E}_1 + (e_2'' + e_2^3 + e_1^2e_2)\mathbf{E}_2 - 3(e_1e_1' + e_2e_2')\mathbf{X}, \mathbf{v}\rangle
\end{aligned}$$

biçiminde hesaplanır. $\{\mathbf{X}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2\}$ ortonormal çatı olduğundan

$$v = \lambda\mathbf{X} + \mu\mathbf{E}_1 + \eta\mathbf{E}_2$$

şeklinde yazılabilir.

(1) $h_{\mathbf{v}}^{\mathbf{X}} = 0$ olduğunda $\lambda = 0$ dolayısıyla

$$\mathbf{v} = \mu\mathbf{E}_1 + \eta\mathbf{E}_2$$

olur. $\mathbf{v} \in S^2$ olduğundan

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \mu^2 + \eta^2 = 1$$

dir. Dahası $(h_{\mathbf{v}}^{\mathbf{X}})' = 0$ olduğunda

$$\langle e_1\mathbf{E}_1 + e_2\mathbf{E}_2, \mu\mathbf{E}_1 + \eta\mathbf{E}_2 \rangle = e_1\mu + e_2\eta = 0$$

bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned} e_1\mathbf{v} &= e_1\mu\mathbf{E}_1 + e_1\eta\mathbf{E}_2 \\ &= -e_2\eta\mathbf{E}_1 + e_1\eta\mathbf{E}_2 \\ &= \eta(-e_2\mathbf{E}_1 + e_1\mathbf{E}_2) \end{aligned}$$

ve

$$\eta^2 = \frac{e_1^2}{e_1^2 + e_2^2}$$

elde edilir. O halde

$$\eta = \pm\frac{e_1}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}} \text{ ve } \mu^2 + \eta^2 = 1$$

olduğundan

$$\mathbf{v} = \pm\frac{-e_2\mathbf{E}_1(s) + e_1\mathbf{E}_2(s)}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}} = \pm\bar{\mathbf{W}}_X$$

bulunur.

(2) $(h_{\mathbf{v}}^{\mathbf{X}})'' = 0$ şartı eklenirse

$$\left\langle e_1'\mathbf{E}_1 + e_2'\mathbf{E}_2 - (e_1^2 + e_2^2)\mathbf{X}, \pm\frac{-e_2\mathbf{E}_1(s) + e_1\mathbf{E}_2(s)}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}} \right\rangle = \pm\frac{-e_1'e_2 + e_1e_2'}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}} = 0$$

elde edilir. Böylece $\delta_X = 0$ olur.

(3) $(h_{\mathbf{v}}^{\mathbf{X}})''' = 0$ şartı da eklenirse

$$\begin{aligned} & \langle (e_1'' + e_1^3 + e_1 e_2^2)\mathbf{E}_1 + (e_2'' + e_2^3 + e_1^2 e_2)\mathbf{E}_2 - 3(e_1 e_1' + e_2 e_2')\mathbf{X}, \\ & \pm \frac{-e_2\mathbf{E}_1(s) + e_1\mathbf{E}_2(s)}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}} \rangle \\ = \quad & \pm \frac{e_2'' e_1 - e_2 e_1''}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}} = 0 \end{aligned}$$

bulunur.

$$\delta_{\mathbf{X}}' = \frac{e_1 e_2'' - e_2 e_1''}{e_1^2 + e_2^2} - \frac{2(e_2' e_1 - e_2 e_1')(e_1 e_1' + e_2 e_2')}{(e_1^2 + e_2^2)^2}$$

olduğundan $\delta_{\mathbf{X}}' = 0$ elde edilir. ■

4.2 2. Tip RM Çatı

Şimdi $\{\mathbf{X}(s), \mathbf{Y}(s), \mathbf{Z}(s)\}$ çatısını $\mathbf{Y}(s)$ vektör alanı etrafında $\varphi = \varphi(s) = \int b ds$ açısı kadar saat yönünün tersine döndürelim. O halde

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1(s) &= \cos\varphi \mathbf{Z}(s) + \sin\varphi \mathbf{X}(s) \\ \mathbf{F}_2(s) &= -\sin\varphi \mathbf{Z}(s) + \cos\varphi \mathbf{X}(s) \end{aligned}$$

olur. $\varphi' = b,\ \mathbf{Z}'(s) = -b\mathbf{X}(s) - c\mathbf{Y}(s)$ ve $\mathbf{X}'(s) = a\mathbf{Y}(s) + b\mathbf{Z}(s)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1'(s) &= -(-a\sin\varphi + c\cos\varphi)\mathbf{Y}(s) \\ \mathbf{F}_2'(s) &= -(-c\sin\varphi - a\cos\varphi)\mathbf{Y}(s) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} f_1 &= -a\sin\varphi + c\cos\varphi \\ f_2 &= -c\sin\varphi - a\cos\varphi \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda $f_1^2 + f_2^2 = a^2 + c^2$ dir. Böylece türev formülleri

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}(s) \\ \mathbf{F}_1(s) \\ \mathbf{F}_2(s) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ -f_1 & 0 & 0 \\ -f_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}(s) \\ \mathbf{F}_1(s) \\ \mathbf{F}_2(s) \end{pmatrix}$$

biçiminde olan $\{\mathbf{Y}(s), \mathbf{F}_1(s), \mathbf{F}_2(s)\}$ ortonormal çatısı $\beta = \int \mathbf{Y}(s)ds$ eğrisi üzerinde rotation minimizing çatıdır. Bu çatının Darboux vektörü

$$\mathbf{W}_{\mathbf{Y}} = -f_2\mathbf{F}_1(s) + f_1\mathbf{F}_2(s) = c\mathbf{X}(s) + a\mathbf{Z}(s)$$

ve küresel Darboux göstergesi

$$\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Y}} = \frac{-f_2\mathbf{F}_1(s) + f_1\mathbf{F}_2(s)}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}} = \frac{c\mathbf{X}(s) + a\mathbf{Z}(s)}{\sqrt{a^2 + c^2}},\ (a, c) \neq (0, 0)$$

olarak bulunur. Burada $\mathbf{Y}^{\vee} = \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Y}}$ olur. O halde $\{\mathbf{Y}, \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Y}} \wedge \mathbf{Y} = \mathbf{U}_{\mathbf{Y}}, \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Y}}\}$ biçiminde bir çatı elde edilir ki bu çatı S^2 üzerindeki $\mathbf{Y}$ eğrisinin Sabban çatısıdır. Aynı zamanda bu çatı $\beta = \int \mathbf{Y}(s)ds$ birim hızlı eğrisinin Frenet çatısına karşılık gelir. $\mathbf{F}_1' = -f_1\mathbf{Y}$ ve $\mathbf{F}_2' = -f_2\mathbf{Y}$ olduğundan

$$\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Y}}' = -\frac{f_2'f_1 - f_1'f_2}{f_1^2 + f_2^2}\mathbf{U}_{\mathbf{Y}}$$

bulunur. Burada

$$\delta_Y = \frac{f_2'f_1 - f_1'f_2}{f_1^2 + f_2^2}$$

için $\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Y}}' = -\delta_{\mathbf{Y}}\mathbf{U}_{\mathbf{Y}}$ olur. f_1 ve f_2 rotation minimizing eğrilikleri için

$$\begin{aligned} f_1' &= -(a' + bc)\sin\varphi + (c' - ab)\cos\varphi \\ f_2' &= -(c' - ab)\sin\varphi - (a' + bc)\cos\varphi \end{aligned}$$

olarak bulunacağından

$$\delta_{\mathbf{Y}} = -b + \frac{ac' - ca'}{a^2 + c^2},\ (a, c) \neq (0, 0)$$

şeklinde yazılır. $\beta = \int \mathbf{Y}(s)ds$ eğrisinin $\{\mathbf{Y}, \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Y}} \wedge \mathbf{Y} = \mathbf{U}_{\mathbf{Y}}, \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Y}}\}$ Frenet çatısına göre eğriliği

$$\kappa_\beta = \|\mathbf{Y}'\| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \sqrt{a^2 + c^2}$$

ve burulması

$$\tau_\beta = \delta_{\mathbf{Y}} = \frac{f_2'f_1 - f_1'f_2}{f_1^2 + f_2^2} = -b + \frac{ac' - ca'}{a^2 + c^2}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca $\mathbf{Y}$ küresel eğrisi birim hızlı olmayan eğri olduğundan $\{\mathbf{Y}, \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Y}} \wedge \mathbf{Y} = \mathbf{U}_{\mathbf{Y}}, \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Y}}\}$ Sabban çatısına göre geodezik eğriliği

$$\begin{aligned}\kappa_g[\mathbf{Y}] &= \frac{1}{\|\mathbf{Y}'\|}\left\langle \mathbf{U}'_{\mathbf{Y}}, \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Y}}\right\rangle = \frac{-1}{\|\mathbf{Y}'\|}\left\langle \mathbf{U}_{\mathbf{Y}}, \bar{\mathbf{W}}'_{\mathbf{Y}}\right\rangle \\ &= \frac{-1}{\|\mathbf{Y}'\|}\left\langle \mathbf{U}_{\mathbf{Y}}, -\delta_{\mathbf{Y}}\mathbf{U}_{\mathbf{Y}}\right\rangle = \frac{\delta_{\mathbf{Y}}}{\|\mathbf{Y}'\|} \\ &= \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.4 $\{\mathbf{Y}, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2\}$ çatısı $\int \mathbf{Y} ds$ eğrisi üzerinde 2. tip rotation minimizing çatı ve f_1, f_2 rotation minimizing eğrilikleri için $(f_1, f_2) \neq (0,0)$ olsun. Bu durumda;
(1) $\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Y}}(s)$ eğrisi üzerinde $\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Y}}(s_0)$ noktası singüler değildir ancak ve ancak $\delta_{\mathbf{Y}}(s_0) \neq 0$ dır.
(2) $\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Y}}(s)$ eğrisi üzerinde $\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Y}}(s_0)$ noktası C ordinary cusp noktasına lokal olarak diffeomorftur ancak ve ancak $\delta_{\mathbf{Y}}(s_0) = 0$ ve $\delta'_{\mathbf{Y}}(s_0) \neq 0$ dır.

Teoremin ispatı teorem 4.1 e benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 4.5 $\{\mathbf{Y}, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2\}$ çatısı $\beta = \int \mathbf{Y}(s) ds$ eğrisi üzerinde 2. tip rotation minimizing çatı ve f_1, f_2 rotation minimizing eğrilikleri için $(f_1, f_2) \neq (0,0)$ olmak üzere aşağıdakiler denktir:
(1) $\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Y}}(s)$ sabittir.
(2) $\delta_{\mathbf{Y}}(s) \equiv 0$.
(3) $\beta = \int \mathbf{Y}(s) ds$ eğrisi bir düzlem eğrisidir.
(4) $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ büyük çemberin bir parçasıdır.

Teoremin ispatı teorem 4.2 ye benzer şekilde gösterilebilir.

$\beta = \int \mathbf{Y}(s) ds$ eğrisinin Frenet çatısının türev formülleri

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{U}_{\mathbf{Y}} \\ \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Y}} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_\beta & 0 \\ -\kappa_\beta & 0 & \tau_\beta \\ 0 & -\tau_\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{U}_{\mathbf{Y}} \\ \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Y}} \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Bu formüller

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U_Y} \\ \mathbf{Y} \\ \bar{\mathbf{W}}_\mathbf{Y} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_\beta & \tau_\beta \\ -\kappa_\beta & 0 & 0 \\ \tau_\beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U_Y} \\ \mathbf{Y} \\ \bar{\mathbf{W}}_\mathbf{Y} \end{pmatrix}$$

biçiminde yazılırsa $\left\{\mathbf{U_Y}, \mathbf{Y}, \bar{\mathbf{W}}_\mathbf{Y}\right\}$ çatısının $\int \mathbf{U_Y} ds$ eğrisi üzerinde RM çatı olduğu görülür.

Teorem 4.6 $\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}$ sabittir $\Leftrightarrow \int \mathbf{Y} ds$ ve $\int \bar{\mathbf{W}}_\mathbf{Y} ds$ eğrileri ekseni

$$L = \frac{\tau_\beta \mathbf{Y} + \kappa_\beta \bar{\mathbf{W}}_\mathbf{Y}}{\sqrt{\tau_\beta^2 + \kappa_\beta^2}}$$

olan helis eğrileridir.

Örnek 4.3 M, $\mathbb{R}^3$ de bir yüzey ve $\gamma : I \to M$ birim hızlı eğri olsun. γ eğrisinin $\{\mathbf{t}, \mathbf{g}, \mathbf{n}_\gamma\}$ Darboux çatısını $\mathbf{g}$ vektör alanı etrafında $\varphi = \int \kappa_n ds$ açısı kadar saat yönünün tersine döndürelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \cos\varphi \mathbf{n}_\gamma + \sin\varphi \mathbf{t} \\ \mathbf{F}_2 &= -\sin\varphi \mathbf{n}_\gamma + \cos\varphi \mathbf{t} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f_1 &= -\kappa_g \sin\varphi + \tau_g \cos\varphi \\ f_2 &= -\kappa_g \cos\varphi - \tau_g \sin\varphi \end{aligned}$$

olur. O halde $\{\mathbf{g}, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2\}$ ortonormal çatısı $\int \mathbf{g} ds$ eğrisi üzerinde rotation minimizing çatıdır. Bu çatının Darboux vektörü

$$\mathbf{W_g} = -f_2 \mathbf{F}_1 + f_1 \mathbf{F}_2$$

ve küresel Darboux göstergesi

$$\bar{\mathbf{W}}_\mathbf{g} = \frac{-f_2 \mathbf{F}_1 + f_1 \mathbf{F}_2}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}$$

şeklindedir. Burada $\mathbf{g}^{\vee} = \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{g}}$ dir. $\{\mathbf{g}, \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{g}} \wedge \mathbf{g} = \mathbf{U}_{\mathbf{g}}, \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{g}}\}$ çatısı S^2 üzerinde $\mathbf{g}$ eğrisinin Sabban çatısıdır.

$$\bar{\mathbf{W}}'_{\mathbf{g}} = -\frac{f_2' f_1 - f_1' f_2}{f_1^2 + f_2^2}\mathbf{U}_{\mathbf{g}} = -\delta_{\mathbf{g}}\mathbf{U}_{\mathbf{g}}$$

olacağından teorem 4.4 e göre singüler noktaları karakterize edilebilir.

Not 4.2 Yukarıdaki örnekte elde edilen $\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{g}}$ küresel Darboux göstergesinde f_1, f_2, $\mathbf{F}_1$ ve $\mathbf{F}_2$ ifadeleri yerine yazılırsa

$$\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{g}} = \frac{\tau_g \mathbf{t} + \kappa_g \mathbf{n}_\gamma}{\sqrt{\tau_g^2 + \kappa_g^2}},\ (\tau_g, \kappa_g) \neq (0,0)$$

olarak bulunur. Bu durum Hananoi v.d (2015)' nin çalışmasındaki $\bar{\mathbf{D}}_r$ küresel rektifiyan Darboux göstergesi ile çakışır. Ayrıca aynı çalışmada belirtilen δ_r invaryantı için $\delta_{\mathbf{g}} = -\delta_r$ olduğu görülür.

Önerme 4.2 $H_{\mathbf{Y}} : I \times S^2 \to \mathbb{R},\ H_{\mathbf{Y}}(s,v) = \langle \mathbf{Y}(s), \mathbf{v} \rangle$ ve $h_{\mathbf{v}}^{\mathbf{Y}}(s) = H_{\mathbf{Y}}(s,v)$ olmak üzere

(1) $h_{\mathbf{v}}^{\mathbf{Y}}(s) = (h_{\mathbf{v}}^{\mathbf{Y}})'(s) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{v} = \pm\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Y}}$.

(2) $h_{\mathbf{v}}^{\mathbf{Y}}(s) = (h_{\mathbf{v}}^{\mathbf{Y}})'(s) = (h_{\mathbf{v}}^{\mathbf{Y}})''(s) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{v} = \pm\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Y}}$ ve $\delta_{\mathbf{Y}}(s) = 0$.

(3) $h_{\mathbf{v}}^{\mathbf{Y}}(s) = (h_{\mathbf{v}}^{\mathbf{Y}})'(s) = (h_{\mathbf{v}}^{\mathbf{Y}})''(s) = (h_{\mathbf{v}}^{\mathbf{Y}})'''(s) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{v} = \pm\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Y}}$ ve
$\delta_{\mathbf{Y}}(s) = \delta'_{\mathbf{Y}}(s) = 0$.

Önermenin ispatı önerme 4.1 e benzer şekilde yapılabilir.

4.3 3. Tip RM Çatı

Şimdi $\{\mathbf{X}(s), \mathbf{Y}(s), \mathbf{Z}(s)\}$ çatısını $\mathbf{Z}(s)$ vektör alanı etrafında $\psi = \psi(s) = \int a ds$ açısı kadar saat yönünün tersine döndürelim. O halde

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1(s) &= \cos\psi\mathbf{X}(s) - \sin\psi\mathbf{Y}(s) \\ \mathbf{G}_2(s) &= \sin\psi\mathbf{X}(s) + \cos\psi\mathbf{Y}(s) \end{aligned}$$

olur. $\psi' = b,\ \mathbf{X}'(s) = a\mathbf{Y}(s) + b\mathbf{Z}(s)$ ve $\mathbf{Y}'(s) = -a\mathbf{X}(s) + c\mathbf{Z}(s)$ olduğundan

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_1'(s) &= -(-b\cos\psi + c\sin\psi)\mathbf{Z}(s)\\ \mathbf{G}_2'(s) &= -(-b\sin\psi - c\cos\psi)\mathbf{Z}(s)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}g_1 &= -b\cos\psi + c\sin\psi\\ g_2 &= -b\sin\psi - c\cos\psi\end{aligned}$$

olsun. Bu durumda $g_1^2 + g_2^2 = b^2 + c^2$ dir. Böylece türev formülleri

$$\begin{pmatrix}\mathbf{Z}(s)\\ \mathbf{G}_1(s)\\ \mathbf{G}_2(s)\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}0 & g_1 & g_2\\ -g_1 & 0 & 0\\ -g_2 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{Z}(s)\\ \mathbf{G}_1(s)\\ \mathbf{G}_2(s)\end{pmatrix}$$

biçiminde olan $\{\mathbf{Z}(s), \mathbf{G}_1(s), \mathbf{G}_2(s)\}$ ortonormal çatısı $\xi = \int \mathbf{Z}(s)ds$ eğrisi üzerinde rotation minimizing çatıdır. Bu çatının Darboux vektörü

$$\mathbf{W}_\mathbf{Z} = -g_2\mathbf{G}_1(s) + g_1\mathbf{G}_2(s) = c\mathbf{X}(s) - b\mathbf{Y}(s)$$

ve küresel Darboux göstergesi

$$\bar{\mathbf{W}}_\mathbf{Z} = \frac{-g_2\mathbf{G}_1(s) + g_1\mathbf{G}_2(s)}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} = \frac{c\mathbf{X}(s) - b\mathbf{Y}(s)}{\sqrt{b^2 + c^2}},\ (b,c) \neq (0,0)$$

olarak bulunur. Burada $\mathbf{Z}^\vee = \bar{\mathbf{W}}_\mathbf{Z}$ olur. Bu durumda $\{\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{W}}_\mathbf{Z} \wedge \mathbf{Z} = \mathbf{U}_\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{W}}_\mathbf{Z}\}$ çatısı S^2 üzerindeki $\mathbf{Z}$ eğrisinin Sabban çatısıdır. $\mathbf{G}_1' = -g_1\mathbf{Z}$ ve $\mathbf{G}_2' = -g_2\mathbf{Z}$ olduğundan

$$\bar{\mathbf{W}}_\mathbf{Z}' = -\frac{g_2'g_1 - g_1'g_2}{g_1^2 + g_2^2}\mathbf{U}_\mathbf{Z}$$

bulunur. Burada

$$\delta_\mathbf{Z} = \frac{g_2'g_1 - g_1'g_2}{g_1^2 + g_2^2}$$

için $\bar{\mathbf{W}}_\mathbf{Z}' = -\delta_\mathbf{Z}\mathbf{U}_\mathbf{Z}$ olur. g_1 ve g_2 rotation minimizing eğrilikleri için

$$\begin{aligned}g_1' &= (c' + ab)\sin\psi - (b' - ac)\cos\psi\\ g_2' &= -(c' + ab)\cos\psi - (b' - ac)\sin\psi\end{aligned}$$

olarak bulunacağından

$$\delta_{\mathbf{Z}} = a + \frac{bc' - cb'}{b^2 + c^2},\ (b,c) \neq (0,0)$$

şeklinde yazılır. $\xi = \int \mathbf{Z}(s)ds$ eğrisinin $\{\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Z}} \wedge \mathbf{Z} = \mathbf{U}_{\mathbf{Z}}, \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Z}}\}$ Frenet çatısına göre eğriliği

$$\kappa_\xi = \|\mathbf{Z}'\| = \sqrt{g_1^2 + g_2^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

ve burulması

$$\tau_\xi = \delta_{\mathbf{Z}} = \frac{g_2' g_1 - g_1' g_2}{g_1^2 + g_2^2} = a + \frac{bc' - cb'}{b^2 + c^2}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca $\mathbf{Z}$ küresel eğrisi birim hızlı olmayan eğri olduğundan $\{\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Z}} \wedge \mathbf{Z} = \mathbf{U}_{\mathbf{Z}}, \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Z}}\}$ Sabban çatısına göre geodezik eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa_g[\mathbf{Z}] &= \frac{1}{\|\mathbf{Z}'\|} \langle \mathbf{U}_{\mathbf{Z}}', \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Z}} \rangle = \frac{-1}{\|\mathbf{Z}'\|} \langle \mathbf{U}_{\mathbf{Z}}, \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Z}}' \rangle \\ &= \frac{-1}{\|\mathbf{Z}'\|} \langle \mathbf{U}_{\mathbf{Z}}, -\delta_{\mathbf{Z}} \mathbf{U}_{\mathbf{Z}} \rangle = \frac{\delta_{\mathbf{Z}}}{\|\mathbf{Z}'\|} \\ &= \frac{\tau_\xi}{\kappa_\xi} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.7 $\{\mathbf{Z}, \mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2\}$ çatısı $\xi = \int \mathbf{Z}(s)ds$ eğrisi üzerinde 3. tip rotation minimizing çatı ve g_1, g_2 rotation minimizing eğrilikleri için $(g_1, g_2) \neq (0,0)$ olsun. Bu durumda;

(1) $\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Z}}(s)$ eğrisi üzerinde $\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Z}}(s_0)$ noktası singüler değildir ancak ve ancak $\delta_{\mathbf{Z}}(s_0) \neq 0$ dır.

(2) $\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Z}}(s)$ eğrisi üzerinde $\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Z}}(s_0)$ noktası C ordinary cusp noktasına lokal olarak diffeomorftur ancak ve ancak $\delta_{\mathbf{Z}}(s_0) = 0$ ve $\delta_{\mathbf{Z}}'(s_0) \neq 0$ dır.

Teoremin ispatı teorem 4.1 e benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 4.8 $\{\mathbf{Z}, \mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2\}$ çatısı $\xi = \int \mathbf{Z}(s)ds$ eğrisi üzerinde 3. tip rotation minimizing çatı ve g_1, g_2 rotation minimizing eğrilikleri için $(g_1, g_2) \neq (0,0)$ olmak üzere aşağıdakiler denktir:

(1) $\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Z}}(s)$ sabittir.

(2) $\delta_{\mathbf{Z}}(s) \equiv 0$.

(3) $\xi = \int \mathbf{Z}(s)ds$ eğrisi bir düzlem eğrisidir.

(4) $\mathbf{Z}(\mathbf{s})$ büyük çemberin bir parçasıdır.

Teoremin ispatı teorem 4.2 ye benzer şekilde gösterilebilir.

$\xi = \int \mathbf{Z}(s)ds$ eğrisinin Frenet çatısının türev formülleri

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{U_Z} \\ \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Z}} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_\xi & 0 \\ -\kappa_\xi & 0 & \tau_\xi \\ 0 & -\tau_\xi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{U_Z} \\ \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Z}} \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Bu formüller

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U_Z} \\ \mathbf{Z} \\ \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Z}} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_\xi & \tau_\xi \\ -\kappa_\xi & 0 & 0 \\ \tau_\xi & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U_Z} \\ \mathbf{Z} \\ \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Z}} \end{pmatrix}$$

biçiminde yazılırsa $\left\{\mathbf{U_Z}, \mathbf{Z}, \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Z}}\right\}$ çatısının $\int \mathbf{U_Z}ds$ eğrisi üzerinde RM çatı olduğu görülür.

Teorem 4.9 $\frac{\tau_\xi}{\kappa_\xi}$ sabittir $\Leftrightarrow \int \mathbf{Z}ds$ ve $\int \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Z}}ds$ eğrileri ekseni

$$L = \frac{\tau_\xi \mathbf{Z} + \kappa_\xi \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Z}}}{\sqrt{\tau_\xi^2 + \kappa_\xi^2}}$$

olan helis eğrileridir.

Örnek 4.4 M, $\mathbb{R}^3$ de bir yüzey ve $\gamma : I \to M$ birim hızlı eğri olsun. γ eğrisinin $\{\mathbf{t}, \mathbf{g}, \mathbf{n}_\gamma\}$ Darboux çatısını n_γ vektör alanı etrafında $\psi = \int \kappa_g ds$ açısı kadar saat yönünün tersine döndürelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1(s) &= \cos\psi\mathbf{t} - \sin\psi\mathbf{g} \\ \mathbf{G}_2(s) &= \sin\psi\mathbf{t} + \cos\psi\mathbf{g} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} g_1 &= -\kappa_n \cos\psi + \tau_g \sin\psi \\ g_2 &= -\kappa_n \sin\psi - \tau_g \cos\psi \end{aligned}$$

olur. O halde $\{\mathbf{n}_\gamma, \mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2\}$ ortonormal çatısı $\int \mathbf{n}_\gamma ds$ eğrisi üzerinde rotation minimizing çatıdır. Bu çatının Darboux vektörü

$$\mathbf{W}_{\mathbf{n}_\gamma} = -g_2\mathbf{G}_1 + g_1\mathbf{G}_2$$

ve küresel Darboux göstergesi

$$\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{n}_\gamma} = \frac{-g_2\mathbf{G}_1 + g_1\mathbf{G}_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}$$

şeklindedir. Burada $\mathbf{n}_\gamma^\vee = \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{n}_\gamma}$ dir. $\{\mathbf{n}_\gamma, \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{n}_\gamma} \wedge \mathbf{n}_\gamma = \mathbf{U}_{\mathbf{n}_\gamma}, \bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{n}_\gamma}\}$ çatısı S^2 üzerinde $\mathbf{n}_\gamma$ eğrisinin Sabban çatısıdır.

$$\bar{\mathbf{W}}'_{\mathbf{n}_\gamma} = -\frac{g_2'g_1 - g_1'g_2}{g_1^2 + g_2^2}\mathbf{U}_{\mathbf{n}_\gamma} = -\delta_{\mathbf{n}_\gamma}\mathbf{U}_{\mathbf{n}_\gamma}$$

olacağından teorem 4.6 ya göre singüler noktaları karakterize edilebilir.

Not 4.3 Yukarıdaki örnekte elde edilen $\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{n}_\gamma}$ küresel Darboux göstergesinde g_1, g_2, $\mathbf{G}_1$ ve $\mathbf{G}_2$ ifadeleri yerine yazılırsa

$$\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{n}_\gamma} = \frac{\tau_g\mathbf{t} - \kappa_n\mathbf{g}}{\sqrt{\tau_g^2 + \kappa_n^2}},\ (\tau_g, \kappa_n) \neq (0,0)$$

olarak bulunur. Bu durum Hananoi v.d (2015)' nin çalışmasındaki $\bar{\mathbf{D}}_o$ küresel oskülatör Darboux göstergesi ile çakışır. Ayrıca aynı çalışmada belirtilen δ_o invaryantı için $\delta_{\mathbf{n}_\gamma} = \delta_o$ olduğu görülür.

Önerme 4.3 $H_{\mathbf{Z}} : I \times S^2 \to \mathbb{R},\ H_{\mathbf{Z}}(s,v) = \langle \mathbf{Z}(s), v\rangle$ ve $h_{\mathbf{v}}^{\mathbf{Z}}(s) = H_{\mathbf{Z}}(s,\mathbf{v})$ olmak üzere

(1) $h_{\mathbf{v}}^{\mathbf{Z}}(s) = (h_{\mathbf{v}}^{\mathbf{Z}})'(s) = 0 \iff \mathbf{v} = \pm\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Z}}$.

(2) $h_{\mathbf{v}}^{\mathbf{Z}}(s) = (h_{\mathbf{v}}^{\mathbf{Z}})'(s) = (h_{\mathbf{v}}^{\mathbf{Z}})''(s) = 0 \iff \mathbf{v} = \pm\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Z}}$ ve $\delta_{\mathbf{Z}}(s) = 0$.

(3) $h_{\mathbf{v}}^{\mathbf{Z}}(s) = (h_{\mathbf{v}}^{\mathbf{Z}})'(s) = (h_{\mathbf{v}}^{\mathbf{Z}})''(s) = (h_{\mathbf{v}}^{\mathbf{Z}})'''(s) = 0 \iff \mathbf{v} = \pm\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{Z}}$ ve
$\delta_{\mathbf{Z}}(s) = \delta'_{\mathbf{Z}}(s) = 0$.

Önermenin ispatı önerme 4.1 e benzer şekilde yapılabilir.

5. LORENTZ- MİNKOWSKİ 3-UZAYINDA SPACELİKE YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ EĞRİLERİN PSEUDO-KÜRESEL DARBOUX GÖSTERGELERİ

Bu bölüm Ito ve Izumiya (2016)' nın makalesinin incelenmesine ayrılmıştır. Aynı çalışmaya Yılmaz (2018) tarafından yüksek lisans tez çalışmasında yer verilmiştir. Makalede ele alınan 5 pseudo-küresel Lorenziyen Darboux göstergesine ek olarak 3 tanesi daha ele alınarak invaryantları elde edilmiş ve incelenmiştir. Makalede yer almayan bu 3 göstergeden ikisi ayrıca Sato (2012) tarafından farklı notasyonlar ile ele alınıp incelenmiştir. Bu bölümde verilen teorem ve önermelerde sıralı olması açısından önce makalede yer almayan 3 göstergeye ve ardından makalede yer alan 5 göstergeye yer verilmiştir. Bu bölümdeki teorem ve önermelerin ispatları genellikle ilk durum için yapılmış ve diğer durumlar benzer şekilde olduğundan gösterilmemiştir. Bu bölümdeki ispatlar makalede yer alan ispatlara paralel biçimde yapıldığından Ito ve Izumiya (2016) referans olarak gösterilmiştir.

$U \subset \mathbb{R}^2$ açık bir alt küme olmak üzere $X : U \to \mathbb{R}^3_1$ spacelike embedding olsun. X embeddingi boyunca U kümesi $M = X(U)$ şeklinde tanımlansın. Burada eğer her $p = X(u)$ noktasında teğet uzay T_pM spacelike vektörlerden oluşuyorsa X bir *spacelike embeddingdir* denir. $\bar{\gamma} : I \to U$ bir regüler eğri olsun. $\gamma : I \to M \subset \mathbb{R}^3_1$ eğrisi $\gamma(s) = X(\bar{\gamma}(s))$ ile tanımlansın. Bu durumda γ eğrisine M spacelike yüzeyi üzerinde bir eğri denir. γ eğrisi spacelike bir eğri olacağından yay parametreli olacak şekilde yeniden parametrelendirilebilir. Bu durumda γ eğrisinin spacelike birim teğet vektörü

$$\mathbf{t}(s) = \gamma'(s)$$

şeklindedir. X bir spacelike embedding olduğundan $M = X(U)$ boyunca bir timelike birim normal vektör alanı $\mathbf{n}$, $p = X(u)$ noktası için

$$\mathbf{n}(p) = \frac{X_{u_1}(u) \wedge X_{u_2}(u)}{\|X_{u_1}(u) \wedge X_{u_2}(u)\|}$$

biçiminde tanımlanır. Burada M yüzeyinin yönlendirmesi $\mathbf{n}$ gelecek yönlendirmeli vektör olacak şekilde seçilecektir. Böylece γ boyunca timelike birim normal vektör

alanı

$$\mathbf{n}_\gamma(s) = \mathbf{n} \circ \gamma(s)$$

şeklinde tanımlanır. Dolayısıyla

$$\mathbf{g}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}_\gamma(s)$$

ile tanımlanan $\mathbf{g}(s) \in N_p(M)$ spacelike birim normal vektör alanı inşa edilebilir. Böylece

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle &= 1 \\ \langle \mathbf{n}_\gamma(s), \mathbf{n}_\gamma(s) \rangle &= -1 \\ \langle \mathbf{n}_\gamma(s), \mathbf{g}(s) \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{g}(s), \mathbf{g}(s) \rangle &= 1 \end{aligned}$$

olur ve $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}_\gamma(s), \mathbf{g}(s)\}$ pseudo-ortonormal çatısı elde edilir. Bu çatıya γ boyunca Lorenziyen Darboux çatısı denir (Ito ve Izumiya 2016). Bu durumda Frenet-Serret formülleri

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= \kappa_n(s)\mathbf{n}_\gamma(s) + \kappa_g(s)\mathbf{g}(s) \\ \mathbf{n}'_\gamma(s) &= \kappa_n(s)\mathbf{t}(s) + \tau_g(s)\mathbf{g}(s) \\ \mathbf{g}'(s) &= -\kappa_g(s)\mathbf{t}(s) + \tau_g(s)\mathbf{n}_\gamma(s) \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{aligned} \kappa_n(s) &= -\langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}_\gamma(s) \rangle \\ \kappa_g(s) &= \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{g}(s) \rangle \\ \tau_g(s) &= -\langle \mathbf{g}'(s), \mathbf{n}_\gamma(s) \rangle \end{aligned}$$

dir. γ eğrisinin Darboux vektör alanı $D \wedge \mathbf{t} = \mathbf{t}'$, $D \wedge \mathbf{g} = \mathbf{g}'$, $D \wedge \mathbf{n}_\gamma = \mathbf{n}'_\gamma$ eşitliklerinin yardımıyla

$$D = \tau_g(s)\mathbf{t}(s) - \kappa_g(s)\mathbf{n}_\gamma(s) - \kappa_n(s)\mathbf{g}(s)$$

şeklinde yazılır. Bu vektör alanı kullanılarak γ boyunca sekiz pseudo-küresel Loren-

ziyen Darboux göstergesi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(A)\ \bar{\mathbf{D}}_n^T \ : \ I \to H^2(-1);\ \bar{\mathbf{D}}_n^T(s) = \frac{\kappa_g(s)\mathbf{n}_\gamma(s) + \kappa_n(s)\mathbf{g}(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \kappa_n(s)^2}},\ \kappa_n(s)^2 < \kappa_g(s)^2$$

$$(B)\ \bar{\mathbf{D}}_n^S \ : \ I \to S_1^2;\ \bar{\mathbf{D}}_n^S(s) = \frac{\kappa_g(s)\mathbf{n}_\gamma(s) + \kappa_n(s)\mathbf{g}(s)}{\sqrt{\kappa_n(s)^2 - \kappa_g(s)^2}},\ \kappa_g(s)^2 < \kappa_n(s)^2$$

$$(C)\ \bar{\mathbf{D}}_n^L \ : \ I \to LC^*;\ \bar{\mathbf{D}}_n^L(s) = \frac{\kappa_g(s)\mathbf{n}_\gamma(s) + \kappa_n(s)\mathbf{g}(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \kappa_n(s)^2}} + \mathbf{t}(s),$$
$$\kappa_n(s)^2 < \kappa_g(s)^2$$

$$(D)\ \bar{\mathbf{D}}_r^T \ : \ I \to H^2(-1);\ \bar{\mathbf{D}}_r^T(s) = \frac{\tau_g(s)\mathbf{t}(s) - \kappa_g(s)\mathbf{n}_\gamma(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2}},\ \tau_g(s)^2 < \kappa_g(s)^2$$

$$(E)\ \bar{\mathbf{D}}_r^S \ : \ I \to S_1^2;\ \bar{\mathbf{D}}_r^S(s) = \frac{\tau_g(s)\mathbf{t}(s) - \kappa_g(s)\mathbf{n}_\gamma(s)}{\sqrt{\tau_g(s)^2 - \kappa_g(s)^2}},\ \kappa_g(s)^2 < \tau_g(s)^2$$

$$(F)\ \bar{\mathbf{D}}_r^L \ : \ I \to LC^*;\ \bar{\mathbf{D}}_r^L(s) = \frac{\tau_g(s)\mathbf{t}(s) - \kappa_g(s)\mathbf{n}_\gamma(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2}} + \mathbf{g}(s),$$
$$\tau_g(s)^2 < \kappa_g(s)^2$$

$$(G)\ \bar{\mathbf{D}}_o^S \ : \ I \to S_1^2;\ \bar{\mathbf{D}}_o^S(s) = \frac{\tau_g(s)\mathbf{t}(s) - \kappa_n(s)\mathbf{g}(s)}{\sqrt{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2}},\ (\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0,0)$$

$$(H)\ \bar{\mathbf{D}}_o^L \ : \ I \to LC^*;\ \bar{\mathbf{D}}_o^L(s) = \frac{\tau_g(s)\mathbf{t}(s) - \kappa_n(s)\mathbf{g}(s)}{\sqrt{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2}} + \mathbf{n}_\gamma(s),$$
$$(\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0,0).$$

Burada γ boyunca (A) **pseudo-küresel normal timelike Darboux göstergesi**, (B) **pseudo-küresel normal spacelike Darboux göstergesi**, (C) **pseudo-küresel normal lightlike Darboux göstergesi,** (D) **pseudo-küresel rektifiyan timelike Darboux göstergesi**, (E) **pseudo-küresel rektifiyan spacelike Darboux göstergesi**, (F) **pseudo-küresel rektifiyan lightlike Darboux göstergesi**, (G) **pseudo-küresel oskülatör spacelike Darboux göstergesi** ve (H) **pseudo-küresel oskülatör lightlike Darboux göstergesi** olarak adlandırılır (Ito ve Izumiya 2016). $(\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0,0)$ iken $\sqrt{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2} > 0$ olacağın-

dan pseudo-küresel oskülatör timelike Darboux göstergesi tanımlanamaz. Burada tanımlanan (A) ve (B) göstergelerinin singüleriteleri ve geometrik anlamları Sato (2012) tarafından incelenmiştir.

5.1 Pseudo-Küresel Lorenziyen Darboux Göstergelerinin Singüler Noktaları

Bu bölümde pseudo-küresel Lorenziyen Darboux göstergelerinin singüleriteleri sınıflandırılacaktır. Bunun için (M, γ) eğri yüzey ikilisinin invaryantları kullanılacaktır. Bu invaryantlar:

$$\begin{aligned}
(A)\ \delta_n^T(s) &= \tau_g(s) - \frac{\kappa_n(s)\kappa_g(s)' - \kappa_n(s)'\kappa_g(s)}{\kappa_g(s)^2 - \kappa_n(s)^2},\ \kappa_n(s)^2 < \kappa_g(s)^2 \\
(B)\ \delta_n^S(s) &= \tau_g(s) + \frac{\kappa_n(s)\kappa_g(s)' - \kappa_n(s)'\kappa_g(s)}{\kappa_n(s)^2 - \kappa_g(s)^2},\ \kappa_g(s)^2 < \kappa_n(s)^2 \\
(C)\ \delta_n^L(s) &= \tau_g(s) - \frac{\kappa_n(s)\kappa_g(s)' - \kappa_n(s)'\kappa_g(s)}{\kappa_g(s)^2 - \kappa_n(s)^2} + \sqrt{\kappa_g(s)^2 - \kappa_n(s)^2}, \\
\kappa_n(s)^2 &< \kappa_g(s)^2 \\
(D)\ \delta_r^T(s) &= \kappa_n(s) - \frac{\kappa_g(s)\tau_g(s)' - \kappa_g(s)'\tau_g(s)}{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2},\ \tau_g(s)^2 < \kappa_g(s)^2 \\
(E)\ \delta_r^S(s) &= \kappa_n(s) + \frac{\kappa_g(s)\tau_g(s)' - \kappa_g(s)'\tau_g(s)}{\tau_g(s)^2 - \kappa_g(s)^2},\ \kappa_g(s)^2 < \tau_g(s)^2 \\
(F)\ \delta_r^L(s) &= \kappa_n(s) - \frac{\kappa_g(s)\tau_g(s)' - \kappa_g(s)'\tau_g(s)}{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2} + \sqrt{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2}, \\
\tau_g(s)^2 &< \kappa_g(s)^2 \\
(G)\ \delta_o^S(s) &= \kappa_g(s) + \frac{\kappa_n(s)\tau_g(s)' - \kappa_n(s)'\tau_g(s)}{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2},\ (\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0,0) \\
(H)\ \delta_o^L(s) &= \kappa_g(s) + \frac{\kappa_n(s)\tau_g(s)' - \kappa_n(s)'\tau_g(s)}{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2} + \sqrt{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2}, \\
(\kappa_n(s), \tau_g(s)) &\neq (0,0)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır (Ito ve Izumiya 2016).

Teorem 5.1 $\gamma : I \to M$ eğrisi bir $M \subset \mathbb{R}^3_1$ spacelike yüzeyi üzerinde $\|\mathbf{t}'(s)\| \neq 0$, $\left\|\mathbf{n}'_\gamma(s)\right\| \neq 0$ ve $\|\mathbf{g}'(s)\| \neq 0$ şartlarını sağlayan bir birim hızlı eğri olsun.

(A) $\kappa_n(s_0)^2 < \kappa_g(s_0)^2$ olsun. Bu durumda

(1) $\bar{\mathbf{D}}_n^T$, s_0 noktasında singüler değildir ancak ve ancak $\delta_n^T(s_0) \neq 0$.

(2) $\bar{\mathbf{D}}_n^T$ eğrisi s_0 noktasında C ordinary cusp noktasına lokal olarak diffeomorftur ancak ve ancak $\delta_n^T(s_0) = 0$ ve $\delta_n^T(s_0)' \neq 0$.

(B) $\kappa_g(s_0)^2 < \kappa_n(s_0)^2$ olsun. Bu durumda

(1) $\bar{\mathbf{D}}_n^S$, s_0 noktasında singüler değildir ancak ve ancak $\delta_n^S(s_0) \neq 0$.

(2) $\bar{\mathbf{D}}_n^S$ eğrisi s_0 noktasında C ordinary cusp noktasına lokal olarak diffeomorftur ancak ve ancak $\delta_n^S(s_0) = 0$ ve $\delta_n^S(s_0)' \neq 0$.

(C) $\kappa_n(s_0)^2 < \kappa_g(s_0)^2$ olsun. Bu durumda

(1) $\bar{\mathbf{D}}_n^L$, s_0 noktasında singüler değildir ancak ve ancak $\delta_n^L(s_0) \neq 0$.

(2) $\bar{\mathbf{D}}_n^L$ eğrisi s_0 noktasında C ordinary cusp noktasına lokal olarak diffeomorftur ancak ve ancak $\delta_n^L(s_0) = 0$ ve $\delta_n^L(s_0)' \neq 0$.

(D) $\tau_g(s_0)^2 < \kappa_g(s_0)^2$ olsun. Bu durumda

(1) $\bar{\mathbf{D}}_r^T$, s_0 noktasında singüler değildir ancak ve ancak $\delta_r^T(s_0) \neq 0$.

(2) $\bar{\mathbf{D}}_r^T$ eğrisi s_0 noktasında C ordinary cusp noktasına lokal olarak diffeomorftur ancak ve ancak $\delta_r^T(s_0) = 0$ ve $\delta_r^T(s_0)' \neq 0$.

(E) $\kappa_g(s_0)^2 < \tau_g(s_0)^2$ olsun. Bu durumda

(1) $\bar{\mathbf{D}}_r^S$, s_0 noktasında singüler değildir ancak ve ancak $\delta_r^L(s_0) \neq 0$.

(2) $\bar{\mathbf{D}}_r^S$ eğrisi s_0 noktasında C ordinary cusp noktasına lokal olarak diffeomorftur ancak ve ancak $\delta_r^S(s_0) = 0$ ve $\delta_r^S(s_0)' \neq 0$.

(F) $\tau_g(s_0)^2 < \kappa_g(s_0)^2$ olsun. Bu durumda

(1) $\bar{\mathbf{D}}_r^L$, s_0 noktasında singüler değildir ancak ve ancak $\delta_r^L(s_0) \neq 0$.

(2) $\bar{\mathbf{D}}_r^L$ eğrisi s_0 noktasında C ordinary cusp noktasına lokal olarak diffeomorftur ancak ve ancak $\delta_r^L(s_0) = 0$ ve $\delta_r^L(s_0)' \neq 0$.

(G) $(\kappa_n(s_0), \tau_g(s_0)) \neq (0,0)$ olsun. Bu durumda

(1) $\bar{\mathbf{D}}_o^S$, s_0 noktasında singüler değildir ancak ve ancak $\delta_o^S(s_0) \neq 0$.

(2) $\bar{\mathbf{D}}_o^S$ eğrisi s_0 noktasında C ordinary cusp noktasına lokal olarak diffeomorftur ancak ve ancak $\delta_o^S(s_0) = 0$ ve $\delta_o^S(s_0)' \neq 0$.

(H) $(\kappa_n(s_0), \tau_g(s_0)) \neq (0,0)$ olsun. Bu durumda

(1) $\bar{\mathbf{D}}_o^L$, s_0 noktasında singüler değildir ancak ve ancak $\delta_o^L(s_0) \neq 0$.

(2) $\bar{\mathbf{D}}_o^L$ eğrisi s_0 noktasında C ordinary cusp noktasına lokal olarak diffeomorftur ancak ve ancak $\delta_o^L(s_0) = 0$ ve $\delta_o^L(s_0)' \neq 0$.

Burada ordinary cusp $C = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 = x_2^3\}$ (veya yarı kübik parabol) (Ito ve Izumiya 2016).

5.2 Legendrian Duallikler

Bu bölümde kontakt manifoldlar ve Legendrian alt manifoldların bazı özellikleri gözden geçirilecektir. N bir $(2n+1)$-boyutlu düzgün manifold ve K, N üzerinde bir teğet hiperdüzlem alanı olsun. Lokal olarak böyle bir hiperdüzlem alanı bir α 1-formunun sıfırları olarak tanımlanır. N manifoldunun her noktasında $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ ise teğet hiperdüzlem alanı K *non-dejeneredir* denir. K bir non-dejenere hiperdüzlem alanı ise (N, K) ikilisine bir *kontakt manifold* denir. Bu durumda K hiperdüzlem alanına bir *kontakt yapı* ve α 1-formuna bir *kontakt form* adı verilir. $\phi : N \to N'$ dönüşümü (N, K) ve (N', K') kontakt manifoldları arasında bir diffeomorfizm olsun. $d\phi(K) = K'$ ise ϕ dönüşümüne bir *kontakt diffeomorfizm* denir. Eğer bir $\phi : N \to N'$ kontakt diffeomorfizmi varsa (N, K) ve (N', K') kontakt manifoldları *kontakt diffeomorfik*tir. (N, K) kontakt manifoldunun $i : L \subset N$ alt manifolduna eğer $boyL = n$ ve her $x \in L$ için $di_x(T_xL) \subset K_{i(x)}$ ise *Legendrian alt manifold* denir. Bir $\pi : E \to M$ düzgün lif demetinin total uzayı E bir kontakt yapı ile döşenmiş ve lifleri Legendrian alt manifoldlar ise bu lif demetine *Legendrian fibrasyon* adı verilir. $\pi : E \to M$ bir Legendrian fibrasyon olsun. Bir $i : L \subset N$ alt manifoldu için $\pi \circ i : L \to M$ ye bir *Legendrian harita* denir. $\pi \circ i$ Legendrian haritasının görüntüsüne i nin *wavefront kümesi* adı verilir ve $W(L)$ ile gösterilir. Herhangi bir $z \in E$ için z etrafında bir $(x, p, y) = (x_1, ..., x_m, p_1, ...p_m, y)$ lokal koordinat sistemi vardır öyle ki $\pi(x, p, y) = (x, y)$ dir ve kontakt yapı $\alpha = dy - \Sigma_{i=1}^m p_i dx_i$ 1-formu ile verilir (Arnol'd vd. 1986).

Aşağıdaki dört çift fibrasyonu göz önüne alalım:

$(A)(1)$ $H^2(-1) \times S_1^2 \supset \Delta_1 = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mid \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0\}$,

(2) $\pi_{11} : \Delta_1 \to H^2(-1),\ \pi_{12} : \Delta_1 \to S_1^2$,

(3) $\theta_{11} = \langle d\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \mid \Delta_1,\ \theta_{12} = \langle \mathbf{u}, d\mathbf{v} \rangle \mid \Delta_1$.

$(B)(1)$ $H^2(-1) \times LC^* \supset \Delta_2 = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mid \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -1\}$,

(2) $\pi_{21} : \Delta_2 \to H^2(-1),\ \pi_{22} : \Delta_2 \to LC^*$,

(3) $\theta_{21} = \langle d\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \mid \Delta_2,\ \theta_{22} = \langle \mathbf{u}, d\mathbf{v} \rangle \mid \Delta_2$.

$(C)(1)$ $LC^* \times S_1^2 \supset \Delta_3 = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mid \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 1\}$,

(2) $\pi_{31} : \Delta_3 \to LC^*,\ \pi_{32} : \Delta_3 \to S_1^2$,

(3) $\theta_{31} = \langle d\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \mid \Delta_3,\ \theta_{32} = \langle \mathbf{u}, d\mathbf{v} \rangle \mid \Delta_3$.

$(D)(1)$ $LC^* \times LC^* \supset \Delta_4 = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mid \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -2\}$,

(2) $\pi_{41} : \Delta_4 \to LC^*,\ \pi_{42} : \Delta_4 \to LC^*$,

(3) $\theta_{41} = \langle d\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \mid \Delta_4,\ \theta_{42} = \langle \mathbf{u}, d\mathbf{v} \rangle \mid \Delta_4$.

Burada $\pi_{i1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}$, $\pi_{i2}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{v}$, $\langle d\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -v_0 du_0 + \Sigma_{i=1}^2 v_i du_i$ ve $\langle \mathbf{u}, d\mathbf{v} \rangle = -u_0 dv_0 + \Sigma_{i=1}^2 u_i dv_i$ dir. $\theta_{i1}^{-1}(0)$ ve $\theta_{i2}^{-1}(0)$, Δ_i üzerinde K_i ile gösterilen aynı teğet hiperdüzlem alanını tanımlar. Temel duallik teoremi aşağıda verilmiştir.

Teorem 5.2 Yukarıdaki paragrafla aynı gösterimler ile her bir (Δ_i, K_i) $(i = 1, 2, 3, 4)$ bir kontakt manifolddur ve her iki π_{ij} $(j = 1, 2)$ Legendrian fibrasyonlardır. Dahası bu kontakt manifoldlar birbirine kontakt diffeomorfiktir (Izumiya 2009).

Ayrıca bir çift fibrasyon aşağıdaki gibi verilir:

$(E)(1)$ $S_1^2 \times S_1^2 \supset \Delta_1 = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mid \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0\}$,

(2) $\pi_{51} : \Delta_5 \to S_1^2,\ \pi_{52} : \Delta_5 \to S_1^2$,

(3) $\theta_{51} = \langle d\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \mid \Delta_5,\ \theta_{12} = \langle \mathbf{u}, d\mathbf{v} \rangle \mid \Delta_5$.

(Δ_5, K_5) bir kontakt manifolddur. $\pi_{5j} : \Delta_5 \to S_1^2,\ j = 1, 2$ Legendrian fibrasyonlardır ve (Δ_i, K_i) $(i = 1, 2, 3, 4)$ manifoldlarına kontakt diffeomorfik değildir(Chen ve Izumiya 2009). Eğer $i : L \to \Delta_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ izotropik dönüşümü varsa yani $i^*\theta_{i1} = 0$ ise $\pi_{i1}(i(L)),\ \pi_{i2}(i(L))$ nin Δ_i -dualidir denir.

Teorem 5.3 $\gamma : I \to M$ eğrisi bir $M \subset \mathbb{R}^3_1$ spacelike yüzeyi üzerinde bir birim hızlı eğri öyle ki $\|\mathbf{t}'(s)\| \neq 0$, $\left\|\mathbf{n}'_\gamma(s)\right\| \neq 0$ ve $\|\mathbf{g}'(s)\| \neq 0$ olsun.

(1) $\kappa_n(s)^2 < \kappa_g(s)^2$ ise $\mathbf{t}$, $\bar{\mathbf{D}}_n^T$ nin bir Δ_1-dualidir.

(2) $\kappa_g(s)^2 < \kappa_n(s)^2$ ise $\mathbf{t}$, $\bar{\mathbf{D}}_n^S$ nin bir Δ_5-dualidir.

(3) $\kappa_n(s)^2 < \kappa_g(s)^2$ ise $\mathbf{t}$, $\bar{\mathbf{D}}_n^L$ nin bir Δ_3-dualidir.

(4) $(\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0,0)$ ise $\mathbf{n}_\gamma$, $\bar{\mathbf{D}}_o^S$ nin bir Δ_1-dualidir.

(5) $(\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0,0)$ ise $\mathbf{n}_\gamma$, $\bar{\mathbf{D}}_o^L$ nin bir Δ_2-dualidir.

(6) $\tau_g(s)^2 < \kappa_g(s)^2$ ise $\mathbf{g}$, $\bar{\mathbf{D}}_r^T$ nin bir Δ_1-dualidir.

(7) $\kappa_g(s)^2 < \tau_g(s)^2$ ise $\mathbf{g}$, $\bar{\mathbf{D}}_r^S$ nin bir Δ_5-dualidir.

(8) $\tau_g(s)^2 < \kappa_g(s)^2$ ise $\mathbf{g}$, $\bar{\mathbf{D}}_r^L$ nin bir Δ_3-dualidir (Ito ve Izumiya 2016).

İspat. (1) $\mathcal{L}_1 : I \to \Delta_1$, $\mathcal{L}_1(s) = (\bar{\mathbf{D}}_n^T(s), \mathbf{t}(s))$ dönüşümü tanımlansın. Burada

$$\left\langle \bar{\mathbf{D}}_n^T(s), \mathbf{t}(s) \right\rangle = 0$$

ve

$$\mathcal{L}_1^* \theta_{11} = \left\langle (\bar{\mathbf{D}}_n^T)'(s), \mathbf{t}(s) \right\rangle = - \left\langle \mathbf{t}'(s), \bar{\mathbf{D}}_n^T(s) \right\rangle = 0$$

dır. Böylece $\mathcal{L}_1$ bir izotropik dönüşümdür. Buradan $\mathbf{t}$, $\bar{\mathbf{D}}_n^T$ nin bir Δ_1-dualidir. Böylelikle aşağıdaki dönüşümler tanımlanabilir:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 &: I \to \Delta_5; \quad \mathcal{L}_2(s) = (\mathbf{t}(s), \bar{\mathbf{D}}_n^S(s)), \\
\mathcal{L}_3 &: I \to \Delta_3; \quad \mathcal{L}_3(s) = (\bar{\mathbf{D}}_n^L(s), \mathbf{t}(s)), \\
\mathcal{L}_4 &: I \to \Delta_1; \quad \mathcal{L}_4(s) = (\mathbf{n}_\gamma(s), \bar{\mathbf{D}}_o^S(s)), \\
\mathcal{L}_5 &: I \to \Delta_2; \quad \mathcal{L}_5(s) = (\mathbf{n}_\gamma(s), \bar{\mathbf{D}}_o^L(s)), \\
\mathcal{L}_6 &: I \to \Delta_1; \quad \mathcal{L}_6(s) = (\bar{\mathbf{D}}_r^T(s), \mathbf{g}(s)), \\
\mathcal{L}_7 &: I \to \Delta_5; \quad \mathcal{L}_7(s) = (\mathbf{g}(s), \bar{\mathbf{D}}_r^S(s)), \\
\mathcal{L}_8 &: I \to \Delta_3; \quad \mathcal{L}_8(s) = (\bar{\mathbf{D}}_r^L(s), \mathbf{g}(s)).
\end{aligned}$$

Buradan $\mathcal{L}_i$ $(i = 2,3,4,5,6,7,8)$ dönüşümlerinin izotropik dönüşümler olduğu gösterilebilir. Bu da (2), (3), (4), (5), (6), (7) ve (8) in sağlandığı anlamına gelir (Ito ve Izumiya 2016). ■

5.3 Yükseklik Fonksiyonları

$\|\mathbf{t}'(s)\| \neq 0$, $\left\|\mathbf{n}_\gamma'(s)\right\| \neq 0$ ve $\|\mathbf{g}'(s)\| \neq 0$ şartlarını sağlayan $\gamma : I \to M \subset \mathbb{R}_1^3$ eğrisi üzerinde sekiz fonksiyon ailesi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned}
H_n^T &: I \times H_+^2(-1) \to \mathbb{R};\ H_n^T(s,\tilde{\mathbf{v}}) = \langle \mathbf{t}(s), \tilde{\mathbf{v}} \rangle, \\
H_n^S &: I \times S_1^2 \to \mathbb{R};\ H_n^S(s,\tilde{\mathbf{v}}) = \langle \mathbf{t}(s), \tilde{\mathbf{v}} \rangle, \\
H_n^L &: I \times LC^* \to \mathbb{R};\ H_n^L(s,\tilde{\mathbf{v}}) = \langle \mathbf{t}(s), \tilde{\mathbf{v}} \rangle - 1, \\
H_r^T &: I \times H_+^2(-1) \to \mathbb{R};\ H_r^T(s,\tilde{\mathbf{v}}) = \langle \mathbf{g}(s), \tilde{\mathbf{v}} \rangle, \\
H_r^S &: I \times S_1^2 \to \mathbb{R};\ H_r^S(s,\tilde{\mathbf{v}}) = \langle \mathbf{g}(s), \tilde{\mathbf{v}} \rangle, \\
H_r^L &: I \times LC^* \to \mathbb{R};\ H_r^L(s,\tilde{\mathbf{v}}) = \langle \mathbf{g}(s), \tilde{\mathbf{v}} \rangle - 1, \\
H_o^S &: I \times S_1^2 \to \mathbb{R};\ H_o^S(s,\tilde{\mathbf{v}}) = \langle \mathbf{n}_\gamma(s), \tilde{\mathbf{v}} \rangle, \\
H_o^L &: I \times LC^* \to \mathbb{R};\ H_o^L(s,\tilde{\mathbf{v}}) = \langle \mathbf{n}_\gamma(s), \tilde{\mathbf{v}} \rangle + 1.
\end{aligned}$$

Herhangi bir $\tilde{\mathbf{v}}$ için $h_{n,\tilde{\mathbf{v}}}^T(s) = H_n^T(s,\tilde{\mathbf{v}})$, $h_{n,\tilde{\mathbf{v}}}^S(s) = H_n^S(s,\tilde{\mathbf{v}})$, $h_{n,\tilde{\mathbf{v}}}^L(s) = H_n^L(s,\tilde{\mathbf{v}})$, $h_{r,\tilde{\mathbf{v}}}^T(s) = H_r^T(s,\tilde{\mathbf{v}})$, $h_{r,\tilde{\mathbf{v}}}^S(s) = H_r^S(s,\tilde{\mathbf{v}})$, $h_{r,\tilde{\mathbf{v}}}^L(s) = H_r^L(s,\tilde{\mathbf{v}})$, $h_{o,\tilde{\mathbf{v}}}^S(s) = H_o^S(s,\tilde{\mathbf{v}})$ ve $h_{o,\tilde{\mathbf{v}}}^L(s) = H_o^L(s,\tilde{\mathbf{v}})$ ile gösterilir (Ito ve Izumiya 2016). Buradan, sonraki önerme verilebilir.

Önerme 5.1 $\gamma : I \to M$ eğrisi, $M \subset \mathbb{R}_1^3$ spacelike yüzeyi üzerinde $\|\mathbf{t}'(s)\| \neq 0$, $\left\|\mathbf{n}_\gamma'(s)\right\| \neq 0$ ve $\|\mathbf{g}'(s)\| \neq 0$ şartlarını sağlayan bir birim hızlı eğri olsun. Bu durumda:

(A) Herhangi bir $(s,\tilde{\mathbf{v}}) \in I \times H^2(-1)$ için:

(1) $h_{n,\tilde{\mathbf{v}}}^T(s) = 0$ ancak ve ancak öyle $\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ -\lambda^2 + \mu^2 = -1$ sayıları vardır ki

$$\tilde{\mathbf{v}} = \lambda \mathbf{n}_\gamma(s) + \mu \mathbf{g}(s),$$

(2) $h_{n,\tilde{\mathbf{v}}}^T(s) = (h_{n,\tilde{\mathbf{v}}}^T)'(s) = 0$ ancak ve ancak $\kappa_n(s)^2 < \kappa_g(s)^2$ ve $\tilde{\mathbf{v}} = \pm \bar{\mathbf{D}}_n^T(s)$,

(3) $h_{n,\tilde{\mathbf{v}}}^T(s) = (h_{n,\tilde{\mathbf{v}}}^T)'(s) = (h_{n,\tilde{\mathbf{v}}}^T)''(s) = 0$ ancak ve ancak $\kappa_n(s)^2 < \kappa_g(s)^2$, $\delta_n^T(s) = 0$ ve $\tilde{\mathbf{v}} = \pm \bar{\mathbf{D}}_n^T(s)$,

(4) $h_{n,\tilde{\mathbf{v}}}^T(s) = (h_{n,\tilde{\mathbf{v}}}^T)'(s) = (h_{n,\tilde{\mathbf{v}}}^T)''(s) = (h_{n,\tilde{\mathbf{v}}}^T)'''(s) = 0$ ancak ve ancak $\kappa_n(s)^2 < \kappa_g(s)^2$, $\delta_n^T(s) = 0$, $(\delta_n^T)'(s) = 0$ ve $\tilde{\mathbf{v}} = \pm \bar{\mathbf{D}}_n^T(s)$ dir.

(B) Herhangi bir $(s, \tilde{\mathbf{v}}) \in I \times S_1^2$ için:

(1) $h^S_{n,\tilde{\mathbf{v}}}(s) = 0$ ancak ve ancak öyle $\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ -\lambda^2 + \mu^2 = 1$ sayıları vardır ki

$$\tilde{\mathbf{v}} = \lambda \mathbf{n}_\gamma(s) + \mu \mathbf{g}(s),$$

(2) $h^S_{n,\tilde{\mathbf{v}}}(s) = (h^S_{n,\tilde{\mathbf{v}}})'(s) = 0$ ancak ve ancak $\kappa_g(s)^2 < \kappa_n(s)^2$ ve $\tilde{\mathbf{v}} = \pm \bar{\mathbf{D}}^S_n(s)$,

(3) $h^S_{n,\tilde{\mathbf{v}}}(s) = (h^S_{n,\tilde{\mathbf{v}}})'(s) = (h^S_{n,\tilde{\mathbf{v}}})''(s) = 0$ ancak ve ancak $\kappa_g(s)^2 < \kappa_n(s)^2,\ \delta^S_n(s) = 0$ ve $\tilde{\mathbf{v}} = \pm \bar{\mathbf{D}}^S_n(s)$,

(4) $h^S_{n,\mathbf{v}}(s) = (h^S_{n,\tilde{\mathbf{v}}})'(s) = (h^S_{n,\tilde{\mathbf{v}}})''(s) = (h^S_{n,\tilde{\mathbf{v}}})'''(s) = 0$ ancak ve ancak $\kappa_g(s)^2 < \kappa_n(s)^2,\ \delta^S_n(s) = 0,\ (\delta^S_n)'(s) = 0$ ve $\tilde{\mathbf{v}} = \pm \bar{\mathbf{D}}^S_n(s)$ dir.

(C) Herhangi bir $(s, \tilde{\mathbf{v}}) \in I \times LC^*$ için:

(1) $h^L_{n,\tilde{\mathbf{v}}}(s) = 0$ ancak ve ancak öyle $\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ -\lambda^2 + \mu^2 = -1$ sayıları vardır ki

$$\tilde{\mathbf{v}} = \lambda \mathbf{n}_\gamma(s) + \mu \mathbf{g}(s) + \mathbf{t}(s),$$

(2) $h^L_{n,\tilde{\mathbf{v}}}(s) = (h^L_{n,\tilde{\mathbf{v}}})'(s) = 0$ ancak ve ancak $\kappa_n(s)^2 < \kappa_g(s)^2$ ve $\tilde{\mathbf{v}} = \pm \bar{\mathbf{D}}^L_n(s)$,

(3) $h^L_{n,\tilde{\mathbf{v}}}(s) = (h^L_{n,\tilde{\mathbf{v}}})'(s) = (h^L_{n,\tilde{\mathbf{v}}})''(s) = 0$ ancak ve ancak $\kappa_n(s)^2 < \kappa_g(s)^2,\ \delta^L_n(s) = 0$ ve $\tilde{\mathbf{v}} = \pm \bar{\mathbf{D}}^L_n(s)$,

(4) $h^L_{n,\tilde{\mathbf{v}}}(s) = (h^L_{n,\tilde{\mathbf{v}}})'(s) = (h^L_{n,\tilde{\mathbf{v}}})''(s) = (h^L_{n,\tilde{\mathbf{v}}})'''(s) = 0$ ancak ve ancak $\kappa_n(s)^2 < \kappa_g(s)^2,\ \delta^L_n(s) = 0,\ (\delta^L_n)'(s) = 0$ ve $\tilde{\mathbf{v}} = \pm \bar{\mathbf{D}}^L_n(s)$ dir.

(D) Herhangi bir $(s, \tilde{\mathbf{v}}) \in I \times H^2(-1)$ için:

(1) $h^T_{r,\tilde{\mathbf{v}}}(s) = 0$ ancak ve ancak öyle $\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ -\lambda^2 + \mu^2 = 1$ sayıları vardır ki

$$\tilde{\mathbf{v}} = \lambda \mathbf{t}(s) + \mu \mathbf{n}_\gamma(s),$$

(2) $h^T_{r,\tilde{\mathbf{v}}}(s) = (h^T_{r,\tilde{\mathbf{v}}})'(s) = 0$ ancak ve ancak $\tau_g(s)^2 < \kappa_g(s)^2$ ve $\tilde{\mathbf{v}} = \pm \bar{\mathbf{D}}^T_r(s)$,

(3) $h^T_{r,\tilde{\mathbf{v}}}(s) = (h^T_{r,\tilde{\mathbf{v}}})'(s) = (h^T_{r,\tilde{\mathbf{v}}})''(s) = 0$ ancak ve ancak $\tau_g(s)^2 < \kappa_g(s)^2,\ \delta^T_r(s) = 0$ ve $\tilde{\mathbf{v}} = \pm \bar{\mathbf{D}}^T_r(s)$,

(4) $h^T_{r,\tilde{\mathbf{v}}}(s) = (h^T_{r,\tilde{\mathbf{v}}})'(s) = (h^T_{r,\tilde{\mathbf{v}}})''(s) = (h^T_{r,\tilde{\mathbf{v}}})'''(s) = 0$ ancak ve ancak $\tau_g(s)^2 < \kappa_g(s)^2,\ \delta^T_r(s) = 0,\ (\delta^T_r)'(s) = 0$ ve $\tilde{\mathbf{v}} = \pm \bar{\mathbf{D}}^T_r(s)$ dir.

(E) Herhangi bir $(s, \tilde{\mathbf{v}}) \in I \times S_1^2$ için:

(1) $h^S_{r,\tilde{\mathbf{v}}}(s) = 0$ ancak ve ancak öyle $\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ -\lambda^2 + \mu^2 = -1$ sayıları vardır ki

$$\tilde{\mathbf{v}} = \lambda \mathbf{t}(s) + \mu \mathbf{n}_\gamma(s),$$

(2) $h^S_{r,\tilde{\mathbf{v}}}(s) = (h^S_{r,\tilde{\mathbf{v}}})'(s) = 0$ ancak ve ancak $\kappa_g(s)^2 < \tau_g(s)^2$ ve $\tilde{\mathbf{v}} = \pm\bar{\mathbf{D}}^S_r(s)$,

(3) $h^S_{r,\tilde{\mathbf{v}}}(s) = (h^S_{r,\tilde{\mathbf{v}}})'(s) = (h^S_{r,\tilde{\mathbf{v}}})''(s) = 0$ ancak ve ancak $\kappa_g(s)^2 < \tau_g(s)^2,\ \delta^S_r(s) = 0$ ve $\tilde{\mathbf{v}} = \pm\bar{\mathbf{D}}^S_r(s)$,

(4) $h^S_{r,\tilde{\mathbf{v}}}(s) = (h^S_{r,\tilde{\mathbf{v}}})'(s) = (h^S_{r,\tilde{\mathbf{v}}})''(s) = (h^S_{r,\tilde{\mathbf{v}}})'''(s) = 0$ ancak ve ancak $\kappa_g(s)^2 < \tau_g(s)^2,\ \delta^S_r(s) = 0,\ (\delta^S_r)'(s) = 0$ ve $\tilde{\mathbf{v}} = \pm\bar{\mathbf{D}}^S_r(s)$ dir.

(F) Herhangi bir $(s, \tilde{\mathbf{v}}) \in I \times LC^*$ için:

(1) $h^L_{r,\tilde{\mathbf{v}}}(s) = 0$ ancak ve ancak öyle $\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda^2 - \mu^2 = -1$ sayıları vardır ki

$$\tilde{\mathbf{v}} = \lambda\mathbf{t}(s) + \mu\mathbf{n}_\gamma(s) + \mathbf{g}(s),$$

(2) $h^L_{r,\tilde{\mathbf{v}}}(s) = (h^L_{r,\tilde{\mathbf{v}}})'(s) = 0$ ancak ve ancak $\tau_g(s)^2 < \kappa_g(s)^2$ ve $\tilde{\mathbf{v}} = \pm\bar{\mathbf{D}}^L_r(s)$,

(3) $h^L_{r,\tilde{\mathbf{v}}}(s) = (h^L_{r,\tilde{\mathbf{v}}})'(s) = (h^L_{r,\tilde{\mathbf{v}}})''(s) = 0$ ancak ve ancak $\tau_g(s)^2 < \kappa_g(s)^2,\ \delta^L_r(s) = 0$ ve $\tilde{\mathbf{v}} = \pm\bar{\mathbf{D}}^L_r(s)$,

(4) $h^L_{r,\tilde{\mathbf{v}}}(s) = (h^L_{r,\tilde{\mathbf{v}}})'(s) = (h^L_{r,\tilde{\mathbf{v}}})''(s) = (h^L_{r,\tilde{\mathbf{v}}})'''(s) = 0$ ancak ve ancak $\tau_g(s)^2 < \kappa_g(s)^2,\ \delta^L_r(s) = 0,\ (\delta^L_r)'(s) = 0$ ve $\tilde{\mathbf{v}} = \pm\bar{\mathbf{D}}^L_r(s)$ dir.

(G) Varsayalım ki $(\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0,0)$ olsun. Herhangi bir $(s, \tilde{\mathbf{v}}) \in I \times S^2_1$ için:

(1) $h^S_{o,\tilde{\mathbf{v}}}(s) = 0$ ancak ve ancak öyle $\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda^2 + \mu^2 = 1$ sayıları vardır ki

$$\tilde{\mathbf{v}} = \lambda\mathbf{t}(s) + \mu\mathbf{g}(s),$$

(2) $h^S_{o,\tilde{\mathbf{v}}}(s) = (h^S_{o,\tilde{\mathbf{v}}})'(s) = 0$ ancak ve ancak $\tilde{\mathbf{v}} = \pm\bar{\mathbf{D}}^S_o(s)$,

(3) $h^S_{o,\tilde{\mathbf{v}}}(s) = (h^S_{o,\tilde{\mathbf{v}}})'(s) = (h^S_{o,\tilde{\mathbf{v}}})''(s) = 0$ ancak ve ancak $\delta^S_o(s) = 0$ ve $\tilde{\mathbf{v}} = \pm\bar{\mathbf{D}}^S_o(s)$,

(4) $h^S_{o,\tilde{\mathbf{v}}}(s) = (h^S_{o,\tilde{\mathbf{v}}})'(s) = (h^S_{o,\tilde{\mathbf{v}}})''(s) = (h^S_{o,\tilde{\mathbf{v}}})'''(s) = 0$ ancak ve ancak $\delta^S_o(s) = 0,\ (\delta^S_o)'(s) = 0$ ve $\tilde{\mathbf{v}} = \pm\bar{\mathbf{D}}^S_o(s)$ dir.

(H) Varsayalım ki $(\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0,0)$ olsun. Herhangi bir $(s, \tilde{\mathbf{v}}) \in I \times LC^*$ için:

(1) $h^L_{o,\tilde{\mathbf{v}}}(s) = 0$ ancak ve ancak öyle $\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda^2 + \mu^2 = 1$ sayıları vardır ki

$$\tilde{\mathbf{v}} = \lambda\mathbf{t}(s) + \mu\mathbf{g}(s) + \mathbf{n}_\gamma(s),$$

(2) $h^L_{o,\tilde{\mathbf{v}}}(s) = (h^L_{o,\tilde{\mathbf{v}}})'(s) = 0$ ancak ve ancak $\tilde{\mathbf{v}} = \pm\bar{\mathbf{D}}^L_o(s)$,

(3) $h^L_{o,\tilde{\mathbf{v}}}(s) = (h^L_{o,\tilde{\mathbf{v}}})'(s) = (h^L_{o,\tilde{\mathbf{v}}})''(s) = 0$ ancak ve ancak $\delta^L_o(s) = 0$ ve $\tilde{\mathbf{v}} = \pm\bar{\mathbf{D}}^L_o(s)$,

(4) $h^L_{o,\tilde{\mathbf{v}}}(s) = (h^L_{o,\tilde{\mathbf{v}}})'(s) = (h^L_{o,\tilde{\mathbf{v}}})''(s) = (h^L_{o,\tilde{\mathbf{v}}})'''(s) = 0$ ancak ve ancak $\delta^L_o(s) = 0,\ (\delta^L_o)'(s) = 0$ ve $\tilde{\mathbf{v}} = \pm\bar{\mathbf{D}}^L_o(s)$ dir (Ito ve Izumiya 2016).

İspat. $\|\mathbf{t}'(s)\| \neq 0,\ \|\mathbf{n}'_\gamma(s)\| \neq 0$ ve $\|\mathbf{g}'(s)\| \neq 0$ olduğundan $-\kappa_n(s)^2 + \kappa_g(s)^2 \neq 0,\ \kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2 \neq 0$ ve $\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2 \neq 0$ dır.

(A) $\mathbf{t}' = \kappa_n \mathbf{n}_\gamma + \kappa_g \mathbf{g},\ \mathbf{n}_\gamma' = \kappa_n \mathbf{t} + \tau_g \mathbf{g}$ ve $\mathbf{g}' = -\kappa_g \mathbf{t} + \tau_g \mathbf{n}_\gamma$ eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned}
h_{n,\tilde{\mathbf{v}}}^T &= \langle \mathbf{t}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle, \\
(h_{n,\tilde{\mathbf{v}}}^T)' &= \langle \mathbf{t}', \tilde{\mathbf{v}} \rangle = \langle \kappa_n \mathbf{n}_\gamma + \kappa_g \mathbf{g}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle, \\
(h_{n,\tilde{\mathbf{v}}}^T)'' &= \langle \mathbf{t}'', \tilde{\mathbf{v}} \rangle = \left\langle \kappa_n' \mathbf{n}_\gamma + \kappa_n \mathbf{n}_\gamma' + \kappa_g' \mathbf{g} + \kappa_g \mathbf{g}', \tilde{\mathbf{v}} \right\rangle \\
&= \left\langle \kappa_n' \mathbf{n}_\gamma + \kappa_n (\kappa_n \mathbf{t} + \tau_g \mathbf{g}) + \kappa_g' \mathbf{g} + \kappa_g (-\kappa_g \mathbf{t} + \tau_g \mathbf{n}_\gamma), \tilde{\mathbf{v}} \right\rangle \\
&= \left\langle (\kappa_n^2 - \kappa_g^2)\mathbf{t} + (\kappa_n' + \kappa_g \tau_g)\mathbf{n}_\gamma + (\kappa_g' + \kappa_n \tau_g)\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{v}} \right\rangle, \\
(h_{n,\tilde{\mathbf{v}}}^T)''' &= \left\langle \mathbf{t}''', \tilde{\mathbf{v}} \right\rangle = \langle (2\kappa_n \kappa_n' - 2\kappa_g \kappa_g')\mathbf{t} + (\kappa_n^2 - \kappa_g^2)\mathbf{t}' + (\kappa_n'' + \kappa_g' \tau_g + \kappa_g \tau_g')\mathbf{n}_\gamma \\
&\quad + (\kappa_n' + \kappa_g \tau_g)\mathbf{n}_\gamma' + (\kappa_g'' + \kappa_n' \tau_g + \kappa_n \tau_g')\mathbf{g} + (\kappa_g' + \kappa_n \tau_g)\mathbf{g}', \tilde{\mathbf{v}} \rangle, \\
&= \langle ((3\kappa_n \kappa_n' - 3\kappa_g \kappa_g')\mathbf{t} + (\kappa_n'' + \kappa_g \tau_g' + 2\kappa_g' \tau_g + \kappa_n^3 + \kappa_n \tau_g^2 - \kappa_n \kappa_g^2)\mathbf{n}_\gamma \\
&\quad + (\kappa_g'' + \kappa_n \tau_g' + 2\kappa_n' \tau_g - \kappa_g^3 + \kappa_g \tau_g^2 + \kappa_g \kappa_n^2)\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle.
\end{aligned}$$

elde edilir. $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}_\gamma(s), \mathbf{g}(s)\}$, γ boyunca $\mathbb{R}_1^3$ uzayının bir pseudo-ortonormal çatısı olduğundan

$$\tilde{\mathbf{v}} = \lambda \mathbf{t}(s) + \mu \mathbf{n}_\gamma(s) + \eta \mathbf{g}(s)$$

şeklinde yazılabilir.

(1) $h_{n,\tilde{\mathbf{v}}}^T = \langle \mathbf{t}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle = \langle \mathbf{t}, \lambda \mathbf{t}(s) + \mu \mathbf{n}_\gamma(s) + \eta \mathbf{g}(s) \rangle = \lambda = 0$ olduğundan
$\tilde{\mathbf{v}} = \mu \mathbf{n}_\gamma(s) + \eta \mathbf{g}(s)$ dir. Burada $\tilde{\mathbf{v}} \in H^2(-1)$ dir. O halde

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle &= -1 \\
\langle \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle &= \langle \mu \mathbf{n}_\gamma(s) + \eta \mathbf{g}(s), \mu \mathbf{n}_\gamma(s) + \eta \mathbf{g}(s) \rangle \\
&= \mu^2 \langle \mathbf{n}_\gamma(s), \mathbf{n}_\gamma(s) \rangle + \eta^2 \langle \mathbf{g}(s), \mathbf{g}(s) \rangle \\
&= -\mu^2 + \eta^2 = -1
\end{aligned}$$

Buradan $\eta^2 = \mu^2 - 1$ olduğundan $\mu^2 > \eta^2$ dir. Böylece $\mu \neq 0$ dır.

(2) $(h_{n,\tilde{\mathbf{v}}}^T)' = 0$ şartı

$$\langle \mathbf{t}', \tilde{\mathbf{v}} \rangle = \langle \kappa_n \mathbf{n}_\gamma + \kappa_g \mathbf{g}, \mu \mathbf{n}_\gamma + \eta \mathbf{g} \rangle = -\mu \kappa_n + \eta \kappa_g = 0$$

anlamına gelir. O halde

$$\kappa_n \tilde{\mathbf{v}} = \kappa_n \mu \mathbf{n}_\gamma + \kappa_n \eta \mathbf{g} = \eta \kappa_g \mathbf{n}_\gamma + \kappa_n \eta \mathbf{g} = \eta(\kappa_g \mathbf{n}_\gamma + \kappa_n \mathbf{g})$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}\langle \kappa_n\tilde{\mathbf{v}},\kappa_n\tilde{\mathbf{v}}\rangle &= \langle \eta(\kappa_g\mathbf{n}_\gamma+\kappa_n\mathbf{g}),\eta(\kappa_g\mathbf{n}_\gamma+\kappa_n\mathbf{g})\rangle \\ -\kappa_n^2 &= \eta^2(\kappa_n^2-\kappa_g^2)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\kappa_n^2 \leq \kappa_g^2$ dir. $-\kappa_n(s)^2+\kappa_g(s)^2 \neq 0$ olduğundan $\kappa_n^2 < \kappa_g^2$ olur. $\eta^2 = \frac{\kappa_n^2}{\kappa_g^2-\kappa_n^2}$, $\mu^2 = \eta^2+1$ ve $\tilde{\mathbf{v}} = \mu\mathbf{n}_\gamma(s)+\eta\mathbf{g}(s)$ olduğundan

$$\tilde{\mathbf{v}} = \pm\frac{\kappa_g\mathbf{n}_\gamma+\kappa_n\mathbf{g}}{\sqrt{\kappa_g^2-\kappa_n^2}} = \pm\bar{\mathbf{D}}_n^T$$

şeklindedir.

(3) $(h_{n,\tilde{\mathbf{v}}}^T)'' = 0$ şartı eklenirse

$$\begin{aligned}\left\langle \mathbf{t}'', \tilde{\mathbf{v}} \right\rangle &= \left\langle (\kappa_n^2-\kappa_g^2)\mathbf{t}+(\kappa_n'+\kappa_g\tau_g)\mathbf{n}_\gamma+(\kappa_g'+\kappa_n\tau_g)\mathbf{g}, \mu\mathbf{n}_\gamma+\eta\mathbf{g}\right\rangle \\ &= -\mu(\kappa_n'+\kappa_g\tau_g)+\eta(\kappa_g'+\kappa_n\tau_g) = 0\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\tau_g - \frac{\kappa_n\kappa_g'-\kappa_n'\kappa_g}{\kappa_g^2-\kappa_n^2} = 0$$

bulunur. Böylece $\delta_n^T = 0$ dır.

(4) İspata $(h_{n,\tilde{\mathbf{v}}}^T)''' = 0$ şartı da eklenirse

$$\begin{aligned}\left\langle \mathbf{t}''', \tilde{\mathbf{v}} \right\rangle &= \langle (2\kappa_n\kappa_n'-2\kappa_g\kappa_g')\mathbf{t}+(\kappa_n^2-\kappa_g^2)\mathbf{t}'+(\kappa_n''+\kappa_g'\tau_g+\kappa_g\tau_g')\mathbf{n}_\gamma \\ &\quad +(\kappa_n'+\kappa_g\tau_g)\mathbf{n}_\gamma'+(\kappa_g''+\kappa_n'\tau_g+\kappa_n\tau_g')\mathbf{g}+(\kappa_g'+\kappa_n\tau_g)\mathbf{g}', \mu\mathbf{n}_\gamma+\eta\mathbf{g}\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\tau_g'(\kappa_g^2-\kappa_n^2)+2(\kappa_g\kappa_g'-\kappa_n\kappa_n')(\delta_n^T+\frac{\kappa_n\kappa_g'-\kappa_n'\kappa_g}{\kappa_g^2-\kappa_n^2})-(\kappa_n\kappa_g''-\kappa_g\kappa_n'') = 0$$

elde edilir.

$$(\delta_n^T)' = \tau_g' + \frac{2(\kappa_g\kappa_g'-\kappa_n\kappa_n')(\kappa_n\kappa_g'-\kappa_n'\kappa_g)}{(\kappa_g^2-\kappa_n^2)^2} - \frac{(\kappa_n\kappa_g''-\kappa_g\kappa_n'')}{\kappa_g^2-\kappa_n^2}$$

olduğundan $\delta_n^T = 0$ şartı ile $(\delta_n^T)' = 0$ dır. Böylece **(A)** durumunun ispatı tamamlanmış olur.

Diğer durumlar **(A)** durumuna benzer hesaplamalar yapılarak gösterilebilir (Ito ve Izumiya 2016). ■

5.4 Teorem 5.1' in İspatı

Bu bölümde Teorem 5.1' in ispatı verilecektir. Bunun için fonksiyon germlerinin aileleri için singülerite teorisinin bazı genel sonuçları kullanılacaktır. Bu sonuçlarla ilgili detaylı açıklamalar Bruce ve Giblin (1992) tarafından verilmiştir.
$F : (\mathbb{R}\times\mathbb{R}^r, (s_0, x_0)) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon germi olsun. $f(s) = F_{x_0}(s, x_0)$ iken F, f nin bir *r-parametreli unfoldingi* olarak adlandırılır. Her $1 \leq p \leq k$ için $f^{(p)}(s_0) = 0$ ve $f^{(k+1)}(s_0) \neq 0$ ise f, s_0 noktasında bir A_k-*singülerliğine sahiptir* denir. Ayrıca her $1 \leq p \leq k$ için $f^{(p)}(s_0) = 0$ ise f, s_0 noktasında $A_{\geq k}$-*singülerliğine sahiptir* denir. F, f nin bir unfoldingi ve $f(s)$, s_0 noktasında A_k-singülerliğine ($k \geq 1$) sahip olsun. $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ kısmi türevinin s_0 noktasındaki $(k-1)$-jeti

$$j^{(k-1)}(\frac{\partial F}{\partial x_i}(s, x_0))(s_0) = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{ji}(s - s_0)^j,\ i = 1, ..., r$$

ile gösterilsin. Eğer $k \times r$ tipindeki $(\alpha_{ji})_{j=0,...,k-1;i=1,...,r}$ katsayılar matrisinin rankı k ($k \leq r$) ise F ye bir *R-versal unfolding* denir. Unfoldinglere ilişkin yukarıdaki gösterimler altında önemli bir küme tanıtalacaktır. F nin *diskriminant kümesi*

$$D_F = \{x \in \mathbb{R}^r \mid (s, x) \text{ noktasında } F = \frac{\partial F}{\partial s} = 0 \text{ dır}\}$$

şeklindedir. Bu durumda aşağıdaki sınıflandırma elde edilir (Bruce ve Giblin 1992).

Teorem 5.4 $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (s_0, x_0)) \to \mathbb{R}$, $f(s)$ nin bir r-parametreli unfoldingi ve F, s_0 noktasında A_2 singülerliğine sahip olsun. F bir R-versal unfolding ise D_F, $C \times \mathbb{R}^{r-1}$ kümesine lokal olarak diffeomorfiktir (Ito ve Izumiya 2016).

Burada ordinary cusp $C = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = t^2, x_2 = t^3\}$ (yani yarı kübik parabol). Şimdi sırasıyla $H^T_n, H^S_n, H^L_n, H^T_r, H^S_r, H^L_r, H^S_o$ ve H^L_o herhangi bir $\tilde{\mathbf{v}}$ için $h^T_{n,\tilde{\mathbf{v}}}(s)$, $h^S_{n,\tilde{\mathbf{v}}}(s), h^L_{n,\tilde{\mathbf{v}}}(s), h^T_{r,\tilde{\mathbf{v}}}(s), h^S_{r,\tilde{\mathbf{v}}}(s), h^L_{r,\tilde{\mathbf{v}}}(s), h^S_{o,\tilde{\mathbf{v}}}(s)$ ve $h^L_{o,\tilde{\mathbf{v}}}(s)$ nin unfoldingleri olarak alınacaktır.

Önerme 5.2 $\gamma : I \to M$ eğrisi bir $M \subset \mathbb{R}^3_1$ spacelike yüzeyi üzerinde $\|\mathbf{t}'(s)\| \neq 0$, $\left\|\mathbf{n}'_\gamma(s)\right\| \neq 0$ ve $\|\mathbf{g}'(s)\| \neq 0$ şartlarını sağlayan bir birim hızlı eğri olsun. Bu durumda:

(A) $h^T_{n,\tilde{\mathbf{v}}}$, s_0 noktasında A_2-singülerliğine sahip ise H^T_n, $h^T_{n,\tilde{\mathbf{v}}}$ nin bir R-versal unfoldingidir,

(B) $h^S_{n,\tilde{\mathbf{v}}}$, s_0 noktasında A_2-singülerliğine sahip ise H^S_n, $h^S_{n,\tilde{\mathbf{v}}}$ nin bir R-versal unfoldingidir,

(C) $h^L_{n,\tilde{\mathbf{v}}}$, s_0 noktasında A_2-singülerliğine sahip ise H^L_n, $h^L_{n,\tilde{\mathbf{v}}}$ nin bir R-versal unfoldingidir,

(D) $h^T_{r,\tilde{\mathbf{v}}}$, s_0 noktasında A_2-singülerliğine sahip ise H^T_r, $h^T_{r,\tilde{\mathbf{v}}}$ nin bir R-versal unfoldingidir,

(E) $h^S_{r,\tilde{\mathbf{v}}}$, s_0 noktasında A_2-singülerliğine sahip ise H^S_r, $h^S_{r,\tilde{\mathbf{v}}}$ nin bir R-versal unfoldingidir,

(F) $h^L_{r,\tilde{\mathbf{v}}}$, s_0 noktasında A_2-singülerliğine sahip ise H^L_r, $h^L_{r,\tilde{\mathbf{v}}}$ nin bir R-versal unfoldingidir,

(G) $h^S_{o,\tilde{\mathbf{v}}}$, s_0 noktasında A_2-singülerliğine sahip ise H^S_o, $h^S_{o,\tilde{\mathbf{v}}}$ nin bir R-versal unfoldingidir,

(H) $h^L_{o,\tilde{\mathbf{v}}}$, s_0 noktasında A_2-singülerliğine sahip ise H^L_o, $h^L_{o,\tilde{\mathbf{v}}}$ nin bir R-versal unfoldingidir (Ito ve Izumiya 2016).

İspat. (A) $\tilde{\mathbf{v}} = (\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}, x_1, x_2) \in H^2_+(-1)$ ve $\mathbf{t}(s) = (t_0(s), t_1(s), t_2(s))$ ile gösterilsin. Bu durumda

$$H^T_n(s,\tilde{\mathbf{v}}) = -t_0(s)\sqrt{x_1^2+x_2^2+1} + t_1(s)x_1 + t_2(s)x_2$$

ve

$$\frac{\partial H^T_n}{\partial x_1}(s,\tilde{\mathbf{v}}) = -t_0(s)\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}} + t_1(s),\ \frac{\partial H^T_n}{\partial x_2}(s,\mathbf{v}) = -t_0(s)\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}} + t_2(s)$$

olur. Bu nedenle $H^T_n(s,\tilde{\mathbf{v}})$ nin 2-jeti

$$\begin{aligned} j^2\frac{\partial H^T_n}{\partial x_1}(s_0,\tilde{\mathbf{v}}) &= (-t_0(s_0)\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}} + t_1(s_0)) \\ &\quad +(-t_0'(s_0)\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}} + t_1'(s_0))(s-s_0), \\ j^2\frac{\partial H^T_n}{\partial x_2}(s_0,\tilde{\mathbf{v}}) &= (-t_0(s_0)\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}} + t_2(s_0)) \\ &\quad +(-t_0'(s_0)\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}} + t_2'(s_0))(s-s_0) \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan

$$A = \begin{pmatrix} -t_0(s_0)\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}} + t_1(s_0) & -t_0(s_0)\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}} + t_2(s_0) \\ -t_0'(s_0)\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}} + t_1'(s_0) & -t_0'(s_0)\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}} + t_2'(s_0) \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. A matrisinin determinantı

$$\begin{aligned} \det A &= \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}}(x_1(t_0't_2 - t_0t_2') + x_2(t_0t_1' - t_0't_1) + \sqrt{x_1^2+x_2^2+1}(t_2't_1 - t_2t_1')) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}} \left\langle (t_2t_1' - t_1t_2', t_2t_0' - t_2't_0, t_0t_1' - t_0't_1), (\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}, x_1, x_2) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}} \langle (\mathbf{t} \wedge \mathbf{t}'), \tilde{\mathbf{v}} \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}} |\mathbf{t}\ \mathbf{t}'\ \tilde{\mathbf{v}}| \end{aligned}$$

şeklindedir. Önerme 5.1 ile $h_{n,\tilde{\mathbf{v}}}^T,\ s_0$ noktasında A_2-singülerliğine sahip ise o zaman $\tilde{\mathbf{v}} = \pm\bar{\mathbf{D}}_n^T(s)$ ve $\mathbf{t}'(s) = \kappa_n(s)\mathbf{n}_\gamma(s) + \kappa_g(s)\mathbf{g}(s)$ dir. Böylece $\{\mathbf{t}, \mathbf{t}', \tilde{\mathbf{v}}\}$ lineer bağımsızdır. O halde $\det A \neq 0$, dolayısıyla $rankA = 2$ dir. Bunun anlamı H_n^T, $h_{n,\tilde{\mathbf{v}}}^T$ nin bir R-versal unfoldingidir. Diğer durumlar **(A)** durumuna benzer biçimde gösterilebilir (Ito ve Izumiya 2016). ■

Şimdi sırasıyla $\mathbf{t}', \mathbf{n}_\gamma', \mathbf{g}'$ vektörlerinin normalizasyonu olan üç vektör alanı aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\begin{aligned} \mathbf{T_t}(s) &= \frac{\kappa_n(s)\mathbf{n}_\gamma(s) + \kappa_g(s)\mathbf{g}(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \kappa_n(s)^2}}, \\ \mathbf{T_{n_\gamma}}(s) &= \frac{\kappa_n(s)\mathbf{t}(s) + \tau_g(s)\mathbf{g}(s)}{\sqrt{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2}}, \\ \mathbf{T_g}(s) &= \frac{-\kappa_g(s)\mathbf{t}(s) + \tau_g(s)\mathbf{n}_\gamma(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2}}. \end{aligned}$$

Teorem 5.1' in İspatı. Burada sadece **(A)** durumu için ispat verilecektir. Diğer durumlar benzer şekilde gösterilebilir.

(A) (1)

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{D}}_n^T(s))' &= \left(\frac{\kappa_g'(s) + \kappa_n(s)\tau_g(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \kappa_n(s)^2}} - \frac{\kappa_g(s)^2\kappa_g'(s) - \kappa_g(s)\kappa_n(s)\kappa_n'(s)}{(\kappa_g(s)^2 - \kappa_n(s)^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\mathbf{n}_\gamma \\ &\quad + \left(\frac{\kappa_n'(s) + \kappa_g(s)\tau_g(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \kappa_n(s)^2}} - \frac{\kappa_n(s)\kappa_g(s)\kappa_g'(s) - \kappa_n(s)^2\kappa_n'(s)}{(\kappa_g(s)^2 - \kappa_n(s)^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\mathbf{g} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\left\langle (\bar{\mathbf{D}}_n^T(s))', \mathbf{T}_t(s) \right\rangle &= \frac{-\kappa_g'(s)\kappa_n(s) - \kappa_n(s)^2\tau_g(s) + \kappa_n'(s)\kappa_g(s) + \kappa_g(s)^2\tau_g(s)}{\kappa_g(s)^2 - \kappa_n(s)^2} \\ &= \tau_g(s) - \frac{\kappa_g'(s)\kappa_n(s) - \kappa_n'(s)\kappa_g(s)}{\kappa_g(s)^2 - \kappa_n(s)^2} = \delta_n^T(s)\end{aligned}$$

olduğundan

$$(\bar{\mathbf{D}}_n^T(s))' = \delta_n^T(s)\mathbf{T}_t(s)$$

şeklinde elde edilir. Böylece $\bar{\mathbf{D}}_n^T(s)$, $s = s_0$ da singüler değildir ancak ve ancak $\delta_n^T(s_0) \neq 0$ dır.

(2) Önerme 5.1 ile, $h_{n,\tilde{\mathbf{v}}}^T$, A_2-singülerdir ancak ve ancak $\delta_n^T(s_0) = 0$, $(\delta_n^T)'(s_0) \neq 0$ ve $\tilde{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{D}}_n^T(s)$ dir. Önerme 5.2 ile H_n^T, $h_{n,\tilde{\mathbf{v}}}^T$ nin bir R-versal unfoldingidir. Önerme 5.1 ile $\bar{\mathbf{D}}_n^T$ nin görüntüsü H_n^T nin diskriminant kümesidir. Teorem 5.4 ile H_n^T nin diskriminant kümesi lokal olarak C ordinary cuspa diffeomorfiktir (Ito ve Izumiya 2016). ■

5.5 Yüzey Eğrilerinin İnvaryantları

Bu bölümde $\delta_r^T, \delta_r^S, \delta_r^L, \delta_o^S, \delta_o^L$ invaryantlarının geometrik anlamları incelenecektir. Özellikle her bir invaryantın sıfır olduğu durumda yüzey üzerindeki orijinal eğri hakkında neler söylenebileceği araştırılacaktır. Bunun için Lorentz-Minkowski uzayındaki silindirler göz önüne alınacaktır. $\mathbb{R}_1^3$ de bir (genelleştirilmiş) *silindir* sabit doğrultulu bir regle yüzeydir. $\boldsymbol{\alpha}$ bir düzgün eğri ve $\mathbf{v}$ sıfırdan farklı bir vektör olmak üzere bir silindir

$$F(t,u) = \boldsymbol{\alpha}(t) + u\mathbf{v}$$

şeklinde parametrelendirilir. Burada $\mathbf{v}$ vektörüne *doğrultu* denir. $\mathbf{v}$ doğrultusu sırasıyla spacelike, timelike ve lightlike ise F silindirine sırasıyla bir *spacelike silindir, timelike silindir* ve *lightlike silindir* adı verilir. $\mathbb{R}_1^3$ de M bir yüzey ve N bir silindir olsun. Eğer $M \cap N \neq \emptyset$ ve T_pN her $p \in M \cap N$ noktasında pseudo-normal vektör $\mathbf{n}(p)$ yi içeriyorsa N silindirine M yüzeyinin bir *pseudo-normal silindiri* denir. Bu durumda M ve N transversal olarak kesişir. Böylece $M \cap N$ bir C regüler eğrisidir. C eğrisine *M ile M nin bir pseudo-normal silindirinin bir dilimi* denir. Dahası

N silindirinin doğrultusu sırasıyla spacelike ve timelike ise N ye bir *pseudo-normal spacelike silindir* ve *pseudo-normal timelike silindir* adı verilir. Burada N silindirinin doğrultusu lightlike değildir. Eğer N lokal olarak $F(t,u) = \boldsymbol{\alpha}(t) + u\mathbf{v}$ şeklinde parametrelendirilirse o halde

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,u) = \boldsymbol{\alpha}'(t) \text{ ve } \frac{\partial F}{\partial u}(t,u) = \mathbf{v}$$

dir. Böylece N ye pseudo-normal vektör

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,u) \wedge \frac{\partial F}{\partial u}(t,u) = \boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \mathbf{v}$$

ile verilir. Eğer C eğrisi s yay uzunluğu parametresi olmak üzere $\gamma(s)$ biçiminde parametrelendirilirse bu durumda N,

$$F(s,u) = \boldsymbol{\gamma}(s) + u\mathbf{v}$$

şeklinde en azından lokal olarak parametrelendirilebilir. N, F ile bir yönlendirmeyle verildiğinden C boyunca N nin birim normal vektörü $\mathbf{g}(s)$ dir. Özellikle $\langle \mathbf{g}(s), \mathbf{v} \rangle = 0$ dır. Diğer yandan eğer $M \cap N$ nin her noktasında M ve N nin teğet düzlemleri çakışıyorsa N silindirine bir *oskülatör silindir* denir. Bu durumda $C = M \cap N$ ye *M nin bir oskülatör silindiri ile M nin bir dilimi* denir. Oskülatör silindirin doğrultusu daima spacelike tır. Eğer N lokal olarak $F(t,u) = \boldsymbol{\alpha}(t) + u\mathbf{v}$ biçiminde parametrelendirilmiş ise C nin bir γ parametrizasyonu için C boyunca N nin birim normal vektörü $\mathbf{n}_\gamma$ ve $\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle = 0$ dır. $\mathbf{v}$, N nin bir lightlike doğrultusu iken
$M \cap N \neq \emptyset$ ve her $p \in M \cap N$ için $\langle \mathbf{n}(p), \mathbf{v} \rangle = -1$ ise N silindirine bir *hiperbolik lightlike silindir* denir. Bu durumda N ve M transversal olarak kesişir. Böylece $C = M \cap N$ bir regüler eğridir. C eğrisine *M ile bir hiperbolik lightlike silindirinin bir dilimi* denir. Ayrıca $\mathbf{v}$, N nin bir lightlike doğrultusu iken $M \cap N \neq \emptyset$ ve her $p \in M \cap N$ için $\langle \mathbf{g}(p), \mathbf{v} \rangle = 1$ ise N ye bir *de Sitter lightlike silindir* adı verilir. Bu durumda N, M ile transversal olarak kesişir. Böylece $C = M \cap N$ bir regüler eğridir. C eğrisine *M ile bir de Sitter lightlike silindirin bir dilimi* denir. Yukarıdaki iki durumda da $\mathbf{v}$ lightlike olur (Ito ve Izumiya 2016).

Teorem 5.5 $\gamma : I \to M$ eğrisi bir $M \subset \mathbb{R}^3_1$ spacelike yüzeyi üzerinde $\|\mathbf{t}'(s)\| \neq 0$ ve $\|\mathbf{g}'(s)\| \neq 0$ şartlarını sağlayan bir birim hızlı eğri olsun.

(A) $\tau_g(s)^2 < \kappa_g(s)^2$ olsun. Bu durumda aşağıdaki sonuçlar denktir:

(1) $\bar{\mathbf{D}}_r^T(s)$ bir sabit vektördür,

(2) $\delta_r^T(s) \equiv 0$,

(3) $\gamma(I)$, M ile bir timelike pseudo-normal silindirin bir dilimidir,

(4) $\mathbf{g}(I)$, $H^2(-1)$ de bir hiperbolik doğrunun bir alt kümesidir.

(B) $\kappa_g(s)^2 < \tau_g(s)^2$ olsun. Bu durumda aşağıdaki sonuçlar denktir:

(1) $\bar{\mathbf{D}}_r^S(s)$ bir sabit vektördür,

(2) $\delta_r^S(s) \equiv 0$,

(3) $\gamma(I)$, M ile bir spacelike pseudo-normal silindirin bir dilimidir,

(4) $\mathbf{g}(I)$, S_1^2 de bir geodezik pseudo-çemberin bir alt kümesidir.

(C) $\tau_g(s)^2 < \kappa_g(s)^2$ olsun. Bu durumda aşağıdaki sonuçlar denktir:

(1) $\bar{\mathbf{D}}_r^L(s)$ bir sabit vektördür,

(2) $\delta_r^L(s) \equiv 0$,

(3) $\gamma(I)$, M ile bir de Sitter lightlike silindirin bir dilimidir,

(4) $\mathbf{g}(I)$, S_1^2 de bir de Sitter horocycle ın bir alt kümesidir.

(D) $(\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0,0)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki sonuçlar denktir:

(1) $\bar{\mathbf{D}}_o^S(s)$ bir sabit vektördür,

(2) $\delta_o^S(s) \equiv 0$,

(3) $\gamma(I)$, M ile bir pseudo-oslülatör silindirin bir dilimidir,

(4) $\mathbf{n}_\gamma(I)$, S_1^2 de bir geodezik hiperbolün bir alt kümesidir.

(E) $(\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0,0)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki sonuçlar denktir:

(1) $\bar{\mathbf{D}}_o^L(s)$ bir sabit vektördür,

(2) $\delta_o^L(s) \equiv 0$,

(3) $\gamma(I)$, M ile bir hiperbolik lightlike silindirin bir dilimidir,

(4) $\mathbf{n}_\gamma(I)$, $H^2(-1)$ de bir horocycle ın bir alt kümesidir (Ito ve Izumiya 2016).

İspat. **(A)** $(\bar{\mathbf{D}}_r^T(s))' = \delta_r^T(s)\mathbf{T}_\mathbf{g}(s)$ olduğundan (1) ve (2) şartları denktir. (3) şartının sağlandığını varsayalım. O halde bir $\mathbf{v} \in H_+^2(-1)$ sabit vektörü vardır öyle ki

$$\langle \mathbf{g}(s), \mathbf{v} \rangle = 0.$$

Böylece öyle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vardır ki

$$\mathbf{v} = \lambda \mathbf{t}(s) + \mu \mathbf{n}_\gamma(s)$$

dir. $\langle \mathbf{g}(s), \mathbf{v} \rangle = 0$ olduğundan $\langle \mathbf{g}'(s), \mathbf{v} \rangle = 0$ elde edilir.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{g}'(s), \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{g}'(s), \lambda \mathbf{t}(s) + \mu \mathbf{n}_\gamma(s) \rangle = \lambda \langle \mathbf{g}'(s), \mathbf{t}(s) \rangle + \mu \langle \mathbf{g}'(s), \mathbf{n}_\gamma(s) \rangle \\ &= -\lambda \kappa_g(s) - \mu \tau_g(s) = 0 \end{aligned}$$

olur. $\mathbf{v} \in H^2_+(-1)$ olduğundan $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{D}}_r^T(s)$ elde edilir. Böylece (1) sağlanır. Eğer (1) sağlanırsa $\bar{\mathbf{D}}_r^T(s)$ sabit bir $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{D}}_r^T(s) \in H^2_+(-1)$ vektörüdür.

$$\langle \mathbf{g}(s), \mathbf{v} \rangle = \left\langle \mathbf{g}(s), \bar{\mathbf{D}}_r^T(s) \right\rangle = 0$$

olduğundan (3) sağlanır. Dahası yukarıdaki eşitlik $\mathbf{g}(s) \in P(\mathbf{v}, 0)$ olduğu anlamına gelir. Bu durumda $\mathbf{g}$, $P(\mathbf{v}, 0) \cap H^2(-1)$ hiperbolik doğrusunun alt kümesidir. Böylece (4) sağlanır. Tersi için bir $\mathbf{v} \in H^2(-1)$ vardır öyle ki

$$\langle \mathbf{g}(s), \mathbf{v} \rangle = 0$$

dır. Böylece öyle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vardır ki

$$\mathbf{v} = \lambda \mathbf{t}(s) + \mu \mathbf{n}_\gamma(s)$$

dir.$\langle \mathbf{g}(s), \mathbf{v} \rangle = 0$ ve $\langle \mathbf{g}'(s), \mathbf{v} \rangle = 0$ olduğundan $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{D}}_r^T(s)$ elde edilir. O halde (1) sağlanır.

(C) $(\bar{\mathbf{D}}_r^L(s))' = \delta_r^L(s) \mathbf{T}_\mathbf{g}(s)$ olduğundan (1) ve (2) şartları denktir. (3) şartının sağlandığını varsayalım. O halde $\langle \mathbf{g}(s), \mathbf{v} \rangle = 1$ olacak şekilde bir $\mathbf{v} \in LC^*$ vardır. $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{v} - \mathbf{g}(s)$ alınırsa

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle = \langle \mathbf{v} - \mathbf{g}(s), \mathbf{v} - \mathbf{g}(s) \rangle = -1$$

olur. Böylece $\boldsymbol{\alpha} \in H^2(-1)$ dir. Dahası

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{g}(s), \boldsymbol{\alpha} \rangle &= \langle \mathbf{g}(s), \mathbf{v} - \mathbf{g}(s) \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{g}'(s), \boldsymbol{\alpha} \rangle &= \langle \mathbf{g}'(s), \mathbf{v} - \mathbf{g}(s) \rangle = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu $\boldsymbol{\alpha}$ nın $\mathbf{g}$ nin bir Δ_1-duali olduğu anlamına gelir. **(A)** durumuna benzer çıkarımlar ile

$$\bar{\mathbf{D}}_r^T(s) = \mathbf{v} - \mathbf{g}(s)$$

ve böylece

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{D}}_r^T(s) + \mathbf{g}(s) = \bar{\mathbf{D}}_r^L(s)$$

şeklinde bulunur. Böylece (1) sağlanır. Tersine eğer (1) sağlanıyorsa o halde $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{D}}_r^L(s)$ için $\langle \mathbf{g}(s), \mathbf{v} \rangle = 1$ elde edilir. Böylece (3) sağlanır. Eğer (1) sağlanıyorsa bu durumda

$$\left\langle \mathbf{g}(s), \bar{\mathbf{D}}_r^L(s) \right\rangle = 1$$

olur ve böylece $\mathbf{g}$ nin görüntüsü bir de Sitter horocycle ın bir alt kümesidir. Tersi için varsayalım ki (4) sağlansın. O halde bir $\mathbf{v} \in LC^*$ vardır öyle ki $\langle \mathbf{g}(s), \mathbf{v} \rangle = -1$ dir. Bu durumda öyle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vardır ki

$$\mathbf{v} = \lambda \mathbf{t}(s) + \mu \mathbf{n}_\gamma(s)$$

dir. $\langle \mathbf{g}(s), \mathbf{v} \rangle = -1$ olduğundan $\langle \mathbf{g}'(s), \mathbf{v} \rangle = 0$ dır. O halde

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{g}'(s), \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{g}'(s), \lambda \mathbf{t}(s) + \mu \mathbf{n}_\gamma(s) \rangle = \lambda \langle \mathbf{g}'(s), \mathbf{t}(s) \rangle + \mu \langle \mathbf{g}'(s), \mathbf{n}_\gamma(s) \rangle \\ &= -\lambda \kappa_g(s) - \mu \tau_g(s) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{D}}_r^L(s)$ olur. Böylece (1) sağlanır.
Diğer durumlar **(A)** ve **(C)** durumlarına benzer şekilde ispatlanabilir (Ito ve Izumiya 2016). ■

5.6 Örnekler

Bu bölümde bazı örnekler ele alınacaktır.

Örnek 5.1 (Spacelike Düzlemler) $M = \mathbb{R}_0^2 = \{x = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}_1^3 \mid x_0 = 0\}$ olsun. $\gamma : I \to \mathbb{R}_0^2$ eğrisi Öklid düzleminde bir eğri olarak düşünülebilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_\gamma(s) &= e_0 \\ \mathbf{t}(s) &= \gamma'(s) \\ \mathbf{g}(s) &= e_0 \wedge \mathbf{t}(s) \end{aligned}$$

dir. $\mathbf{n}_\gamma' = e_0' \equiv 0$ olduğundan $\kappa_n(s) \equiv \tau_g(s) \equiv 0$ elde edilir. Böylece bir Öklid düzlem eğrisi olarak γ nın eğriliği

$$\kappa(s) = \kappa_g(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{g}(s) \rangle$$

iken

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= \kappa(s)\mathbf{g}(s), \\ \mathbf{g}'(s) &= -\kappa(s)\mathbf{t}(s) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Bu durumda Lorenziyen Darboux göstergeleri

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}_n^T(s) &= \mp\mathbf{n}_\gamma(s) = \mp e_0 \\ \bar{\mathbf{D}}_n^L(s) &= \mp\mathbf{n}_\gamma(s) + \mathbf{t}(s) = \mp e_0 + \mathbf{t}(s) \\ \bar{\mathbf{D}}_r^T(s) &= \mp\mathbf{n}_\gamma(s) = \mp e_0 \\ \bar{\mathbf{D}}_r^L(s) &= \mp\mathbf{n}_\gamma(s) + \mathbf{g}(s) = \mp e_0 + \mathbf{g}(s) \\ \bar{\mathbf{D}}_o^S(s) &= \mp\mathbf{g}(s) \\ \bar{\mathbf{D}}_o^L(s) &= \mp\mathbf{g}(s) + e_0 \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada $\bar{\mathbf{D}}_n^S(s)$ ve $\bar{\mathbf{D}}_r^S(s)$ iyi tanımlı değildir. Böylece $\bar{\mathbf{D}}_o^S$, $\bar{\mathbf{D}}_o^L$ ve $\bar{\mathbf{D}}_r^L$ bir Öklid düzlem eğrisi olan eğrinin olağan Gauss dönüşümüne karşılık gelmektedir. Dahası

$$\begin{aligned} \delta_n^T(s) &\equiv 0, \\ \delta_n^L(s) &= \mp\kappa_g(s) = \mp\kappa(s), \\ \delta_r^T(s) &\equiv 0, \\ \delta_r^L(s) &= \mp\kappa_g(s) = \mp\kappa(s), \\ \delta_o^S(s) &= \delta_o^L(s) = \kappa_g(s) = \kappa(s) \end{aligned}$$

elde edilir (Ito ve Izumiya 2016).

Örnek 5.2 (Hiperbolik Düzlem) $M = H^2(-1)$ olsun. Birim hızlı $\gamma : I \to H^2(-1)$ eğrisi için

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_\gamma(s) &= \gamma(s) \\ \mathbf{t}(s) &= \gamma'(s) \end{aligned}$$

alınabilir. Böylece $\{\mathbf{t}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{g}\}$ Lorenziyen Sabban çatısı elde edilir. Bu durumda $\kappa_n(s) \equiv 1$ ve $\tau_g(s) \equiv 0$ dır. Böylelikle Lorenziyen Sabban çatısının Frenet-Serret formülleri aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}'(s) &= \gamma(s) + \kappa_g(s)\mathbf{g}(s), \\
\gamma'(s) &= \mathbf{t}(s), \\
\mathbf{g}'(s) &= -\kappa_g(s)\mathbf{t}(s).
\end{aligned}$$

Bu durumda Lorenziyen Darboux göstergeleri

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{D}}_n^T(s) &= \frac{\kappa_g(s)\gamma(s) + \mathbf{g}(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - 1}}, \kappa_g(s)^2 > 1 \\
\bar{\mathbf{D}}_n^S(s) &= \frac{\kappa_g(s)\gamma(s) + \mathbf{g}(s)}{\sqrt{1 - \kappa_g(s)^2}}, \kappa_g(s)^2 < 1 \\
\bar{\mathbf{D}}_n^L(s) &= \frac{\kappa_g(s)\gamma(s) + \mathbf{g}(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - 1}} + \mathbf{t}(s), \kappa_g(s)^2 > 1 \\
\bar{\mathbf{D}}_r^T(s) &= \mp\gamma(s), \\
\bar{\mathbf{D}}_r^L(s) &= \mp\gamma(s) + \mathbf{g}(s), \\
\bar{\mathbf{D}}_o^S(s) &= \mp\mathbf{g}(s), \\
\bar{\mathbf{D}}_o^L(s) &= \gamma(s) \mp \mathbf{g}(s)
\end{aligned}$$

dir. Burada $\bar{\mathbf{D}}_r^S(s)$ iyi tanımlı değildir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\delta_n^T(s) &= -\frac{\kappa_g'(s)}{\kappa_g(s)^2 - 1}, \kappa_g(s)^2 > 1 \\
\delta_n^S(s) &= \frac{\kappa_g'(s)}{1 - \kappa_g(s)^2}, \kappa_g(s)^2 < 1 \\
\delta_n^L(s) &= -\frac{\kappa_g'(s)}{\kappa_g(s)^2 - 1} + \sqrt{\kappa_g(s)^2 - 1}, \kappa_g(s)^2 > 1 \\
\delta_r^T(s) &= 1, \\
\delta_r^L(s) &= 1 \pm \kappa_g(s), \\
\delta_o^S(s) &= \kappa_g(s), \\
\delta_o^L(s) &= \kappa_g(s) \pm 1
\end{aligned}$$

dir (Ito ve Izumiya 2016).

Örnek 5.3 (Spacelike Açılabilir Yüzeyler) Bir $\mathbf{X}(x,y) = (\sqrt{x^2+1}, x, y)$ spacelike embedding ve $M = \mathbf{X}(\mathbb{R}^2)$ olsun.

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_x &= (\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, 1, 0) \\ \mathbf{X}_y &= (0,0,1) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\mathbf{X}_x \wedge \mathbf{X}_y = (-1, -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, 0)$$

ve

$$\|\mathbf{X}_x \wedge \mathbf{X}_y\| = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

dir. Böylece

$$\mathbf{n}(x,y) = (-\sqrt{x^2+1}, -x, 0)$$

elde edilir. M yüzeyi üzerinde tanımlanan bir eğri $\gamma(s) = (\sqrt{s^2+1}, s, f(s))$ olsun. Bu durumda

$$\gamma'(s) = (\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}, 1, f'(s))$$

dir. Burada s parametresi bir yay uzunluğu parametresidir ancak ve ancak $f'(s)^2(s^2+1) = s^2$ dir. Gerçekten $\|\gamma'(s)\| = 1$ olması için

$$\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = \frac{f'(s)^2(s^2+1)+1}{s^2+1} = 1$$

dolayısıyla $f'(s)^2(s^2+1) = s^2$ olmalıdır. Bu şart ile γ eğrisinin birim teğet vektörü

$$\mathbf{t}(s) = \gamma'(s)$$

dir. Bu durumda

$$\mathbf{n}_\gamma(s) = (-\sqrt{s^2+1}, -s, 0)$$

ve

$$\mathbf{g}(s) = \left(-sf'(s), -f'(s)\sqrt{s^2+1}, \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \right)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\mathbf{t}'(s) = \left(\frac{1}{(s^2+1)^{3/2}}, 0, f''(s) \right)$$

ve

$$\mathbf{g}'(s) = \left(-f'(s) - sf''(s), \frac{-(s^2+1)f''(s) - sf'(s)}{\sqrt{s^2+1}}, \frac{-s}{(s^2+1)^{3/2}} \right)$$

olarak hesaplanır. Böylece

$$\begin{aligned}\kappa_g(s) &= \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{g}(s)\rangle = \frac{sf'(s)+f''(s)(s^2+1)}{(s^2+1)^{3/2}},\\ \kappa_n(s) &= -\langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}_\gamma(s)\rangle = -\frac{1}{s^2+1},\\ \tau_g(s) &= -\langle \mathbf{g}'(s), \mathbf{n}_\gamma(s)\rangle = \frac{f'(s)}{\sqrt{s^2+1}}\end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$(\kappa_g\mathbf{n}_\gamma + \kappa_n\mathbf{g})(s) = \left(-f''(s), \frac{f'(s)-f''(s)s(s^2+1)}{(s^2+1)^{3/2}}, -\frac{1}{(s^2+1)^{3/2}}\right)$$

ve

$$\begin{aligned}(\tau_g\mathbf{t} - \kappa_g\mathbf{n}_\gamma)(s) &= (\frac{2sf'(s)+f''(s)(s^2+1)}{s^2+1},\\ &\quad \frac{f'(s)(s^2+1)+s^2f'(s)+f''(s)s(s^2+1)}{(s^2+1)^{3/2}}, \frac{f'(s)^2}{\sqrt{s^2+1}}).\end{aligned}$$

Dahası

$$(\tau_g\mathbf{t} - \kappa_n\mathbf{g})(s) = \left(0, 0, \frac{2f'(s)(s^2+1)+1}{(s^2+1)^{3/2}}\right)$$

dir. Eğer $2f'(s)(s^2+1)+1 \neq 0$ ise

$$\sqrt{\kappa_n(s)^2+\tau_g(s)^2} = \sqrt{\frac{f'(s)^2(s^2+1)+1}{(s^2+1)^2}} = \frac{\sqrt{s^2+1}}{s^2+1} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

olduğundan $\bar{\mathbf{D}}_o^S(s) = (0,0,1)$ ve $\bar{\mathbf{D}}_o^L(s) = (-\sqrt{s^2+1}, -s, 1)$ dir.
$\mathbf{X}(x,y) = (\sqrt{x^2+1}, x, 0) + y(0,0,1)$ yüzeyi $(0,0,1)$ doğrultulu bir silindirdir ve bir silindir açılabilir bir yüzeydir. Bunun için şimdi $\mathbb{R}_1^3$ de genel spacelike açılabilir yüzeyler göz önüne alınacaktır. Bir açılabilir M yüzeyi

$$F_{(\mathbf{a},\boldsymbol{\zeta})}(t,u) = \mathbf{a}(t) + u\boldsymbol{\zeta}(t)$$

biçiminde parametrelendirilmiş bir regle yüzeydir. Burada $\mathbf{a}(t)$ düzgün eğrisine *baz eğri* ve $\boldsymbol{\zeta}(t)$ birim hızlı düzgün eğrisine ise *doğrultu eğrisi* adı verilir. Tanım ile

$$\frac{\partial F_{(\mathbf{a},\boldsymbol{\zeta})}}{\partial t}(t,u) = \dot{\mathbf{a}}(t) + u\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t), \frac{\partial F_{(\mathbf{a},\boldsymbol{\zeta})}}{\partial u}(t,u) = \boldsymbol{\zeta}(t)$$

olduğundan bir regüler (t,u) noktasında birim pseudo-normal vektör

$$\mathbf{n}(t,u) = \frac{1}{l}((\dot{\mathbf{a}} + u\dot{\boldsymbol{\zeta}}) \wedge \boldsymbol{\zeta})(t,u) = \frac{1}{l}((\dot{\mathbf{a}} \wedge \boldsymbol{\zeta}) + u(\dot{\boldsymbol{\zeta}} \wedge \boldsymbol{\zeta}))(t,u)$$

dir. Burada

$$l(t,u) = \left\| \frac{\partial F_{(\mathbf{a},\boldsymbol{\zeta})}}{\partial t} \wedge \frac{\partial F_{(\mathbf{a},\boldsymbol{\zeta})}}{\partial u} \right\| (t,u).$$

Eğer her (t,u) için $\mathbf{n}(t,u)$, $\dot{\mathbf{a}}(t)$ ye ortogonal ise $F_{(\mathbf{a},\boldsymbol{\zeta})}$ yüzeyine bir *açılabilir yüzey* denir. Bu şart $\det(\mathbf{a}(t), \boldsymbol{\zeta}(t), \dot{\boldsymbol{\zeta}}(t)) = 0$ şartı ile denktir. Dahası $\mathbf{n}(t,u)$ timelike ise $F_{(\mathbf{a},\boldsymbol{\zeta})}$ bir *spacelike açılabilir yüzey* olarak tanımlanır. Bir spacelike açılabilir yüzey için $\boldsymbol{\zeta}(t)$ nin bir spacelike vektördür. Şimdi M yüzeyi üzerinde s yay uzunluğu parametresi ile parametrelendirilmiş γ eğrisi

$$\gamma(s) = \mathbf{a}(t(s)) + u\boldsymbol{\zeta}(t(s))$$

olsun. γ boyunca birim normal vektör $l(s) = \left\| \partial F_{(\mathbf{a},\boldsymbol{\zeta})}/\partial t \wedge \partial F_{(\mathbf{a},\boldsymbol{\zeta})}/\partial t \right\| (t(s), u(s))$ iken

$$\mathbf{n}_\gamma = \frac{1}{l}((\dot{\mathbf{a}} + u\dot{\boldsymbol{\zeta}}) \wedge \boldsymbol{\zeta}) = \frac{1}{l}((\dot{\mathbf{a}} \wedge \boldsymbol{\zeta}) + u(\dot{\boldsymbol{\zeta}} \wedge \boldsymbol{\zeta}))$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \gamma' = u'\boldsymbol{\zeta} + t'(\dot{\mathbf{a}} + u\dot{\boldsymbol{\zeta}}), \\ \mathbf{g} &= \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_\gamma = \frac{1}{l}(\{(\dot{\mathbf{a}} + u\dot{\boldsymbol{\zeta}}) \wedge \boldsymbol{\zeta}\} \wedge \mathbf{t}) \\ &= \frac{1}{l}(\left\langle \dot{\mathbf{a}} + u\dot{\boldsymbol{\zeta}}, \mathbf{t} \right\rangle \boldsymbol{\zeta} - \langle \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{t} \rangle (\dot{\mathbf{a}} + u\dot{\boldsymbol{\zeta}})). \end{aligned}$$

Dahası

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'_\gamma &= \left(\frac{1}{l}\right)' ((\dot{\mathbf{a}} \wedge \boldsymbol{\zeta}) + u(\dot{\boldsymbol{\zeta}} \wedge \boldsymbol{\zeta})) \\ &\quad + \frac{1}{l}((t'\ddot{\mathbf{a}} \wedge \boldsymbol{\zeta} + \dot{\mathbf{a}} \wedge t'\boldsymbol{\zeta} + u'\dot{\boldsymbol{\zeta}} \wedge \boldsymbol{\zeta}) + u(t'\ddot{\boldsymbol{\zeta}} \wedge \dot{\boldsymbol{\zeta}} + \dot{\boldsymbol{\zeta}} \wedge t'\dot{\boldsymbol{\zeta}})) \\ &= \frac{t'}{l}(\ddot{\mathbf{a}} \wedge \boldsymbol{\zeta} + \dot{\mathbf{a}} \wedge \boldsymbol{\zeta}) + \left(\frac{1}{l}\right)' \dot{\mathbf{a}} \wedge \boldsymbol{\zeta} + \frac{t'u}{l}\dot{\boldsymbol{\zeta}} \wedge \boldsymbol{\zeta} + \left(\frac{u}{l}\right)' \dot{\boldsymbol{\zeta}} \wedge \boldsymbol{\zeta} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$m(s) = \det\left(\dot{\mathbf{a}}(t(s)) + u\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t(s)), \ddot{\mathbf{a}}(t(s)) + u\ddot{\boldsymbol{\zeta}}(t(s)), \boldsymbol{\zeta}(t(s))\right)$$

iken

$$\kappa_n(s) = -\frac{t'^2(s)m(s)}{l(s)}, \ \tau_g(s) = \frac{t'(s)m(s)}{l^2(s)} \langle \boldsymbol{\zeta}(t(s), \mathbf{t}(s) \rangle$$

dir. $(\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0,0)$ olduğundan $m(s) \neq 0$ ve $t'(s) \neq 0$ dır. Buradan

$$\begin{aligned}\tau_g\mathbf{t} - \kappa_n\mathbf{g} &= \frac{t'm}{l^2}\left(\langle\boldsymbol{\zeta},\mathbf{t}\rangle\left(u'\boldsymbol{\zeta} + t'(\dot{\mathbf{a}} + u\dot{\boldsymbol{\zeta}})\right) + t'(\left\langle\dot{\mathbf{a}} + u\dot{\boldsymbol{\zeta}},\mathbf{t}\right\rangle\boldsymbol{\zeta} - \langle\boldsymbol{\zeta},\mathbf{t}\rangle\left(\dot{\mathbf{a}} + u\dot{\boldsymbol{\zeta}}\right))\right)\\ &= \frac{t'm}{l^2}\left\langle u'\boldsymbol{\zeta} + t'(\dot{\mathbf{a}} + u\dot{\boldsymbol{\zeta}}),\mathbf{t}\right\rangle\boldsymbol{\zeta}\\ &= \frac{t'm}{l^2}\langle\mathbf{t},\mathbf{t}\rangle\,\boldsymbol{\zeta} = \frac{t'm}{l^2}\boldsymbol{\zeta}\end{aligned}$$

olduğundan $(\tau_g\mathbf{t}-\kappa_n\mathbf{g})(s)$, $\boldsymbol{\zeta}(t(s))$ doğrultu eğrisine paraleldir (Ito ve Izumiya 2016).

Önerme 5.3 M yüzeyi $F_{(\mathbf{a},\boldsymbol{\zeta})}(t,u) = \mathbf{a}(t) + u\boldsymbol{\zeta}(t)$ şeklinde parametrelendirilmiş bir spacelike açılabilir yüzey olsun. M yüzeyi üzerinde $\gamma(s) = \mathbf{a}(t(s)) + u\boldsymbol{\zeta}(t(s))$ eğrisi boyunca pseudo-küresel oskülatör spacelike Darboux göstergesi $\bar{\mathbf{D}}_o^S(s) = \pm\boldsymbol{\zeta}(t(s))$ dir. Ayrıca γ boyunca pseudo-küresel oskülatör lightlike Darboux göstergesi

$$\bar{\mathbf{D}}_o^L(s) = \frac{1}{l(s)}\left(\pm\boldsymbol{\zeta}(t(s)) + \dot{\mathbf{a}}(t(s)) \wedge \boldsymbol{\zeta}(t(s)) + u(s)\left(\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t(s)) \wedge \boldsymbol{\zeta}(t(s))\right)\right)$$

(Ito ve Izumiya 2016).

Örnek 5.4 (Bir Fonksiyonun Grafiği Üzerindeki Eğriler) Sato (2012) tarafından verilen örneklere benzer bir örnek ele alınacaktır. Bir $\mathbf{X}(u,v) = (f(u,v),u,v)$ yüzeyi

$$f(0,0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$$

ile parametrelendirilmiş olsun. Burada

$$f_u = \frac{\partial f}{\partial u},\ f_v = \frac{\partial f}{\partial v},\ \mathbf{X}_u = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} = (f_u,1,0) \text{ ve } \mathbf{X}_v = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} = (f_v,0,1)$$

olarak gösterilecektir. $\mathbf{X}$ bir spacelike embedding olduğundan

$$\begin{aligned}\|\mathbf{X}_u\| &= -f_u^2 + 1 > 0\\ \|\mathbf{X}_v\| &= -f_v^2 + 1 > 0\\ \|\mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v\| &= \sqrt{|-1 + f_u^2 + f_v^2|}\end{aligned}$$

dir. $-1 + f_x^2 + f_y^2 < 0$ ile $p = \mathbf{X}(w) = \mathbf{X}(u,v)$ iken birim timelike normal vektör alanı

$$\mathbf{n}(p) = \frac{\mathbf{X}_u(w) \wedge \mathbf{X}_v(w)}{\|\mathbf{X}_u(w) \wedge \mathbf{X}_v(w)\|} = -\frac{1}{\sqrt{1 - f_u^2 - f_v^2}}(1, f_u, f_v)$$

şeklindedir. Şimdi $f(u,v)$ düzgün bir fonksiyon olmak üzere

$$\gamma(u) = \mathbf{X}(u,0) = (f(u,0), u, 0)$$

eğrisi göz önüne alınsın. Burada

$$\frac{d\gamma}{du} = \dot{\gamma},\ f_u = f_u(u,0) \text{ ve } f_v(u,0)$$

ile gösterilecektir. $\dot{\gamma}(u) = (f_u, 1, 0)$ olduğundan birim teğet vektör alanı

$$\mathbf{t}(u) = \frac{1}{\sqrt{1-f_u^2}}(f_u, 1, 0)$$

ve iki birim normal vektör alanı

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_\gamma(u) &= -\frac{1}{\sqrt{1-f_u^2-f_v^2}}(1, f_u, f_v), \\
\mathbf{g}(u) &= \frac{1}{\sqrt{1-f_u^2-f_v^2}\sqrt{1-f_u^2}}(f_v, f_u f_v, 1-f_u^2)
\end{aligned}$$

şeklindedir. O halde s yay uzunluğu parametresi iken

$$\begin{aligned}
\kappa_g(u) &= \left\langle \frac{d\mathbf{t}}{ds}(u), \mathbf{g}(u) \right\rangle = \frac{-f_v f_u}{(1-f_u^2)^{\frac{3}{2}}(1-f_u^2-f_v^2)^{\frac{1}{2}}}, \\
\kappa_n(u) &= \left\langle \frac{d\mathbf{t}}{ds}(u), \mathbf{n}_\gamma(u) \right\rangle = \frac{f_{uu}}{(1-f_u^2)(1-f_u^2-f_v^2)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\tau_g(u) &= \left\langle \mathbf{g}(u), \frac{d\mathbf{n}_\gamma}{ds}(u) \right\rangle \\
&= \frac{1}{(1-f_u^2)(1-f_u^2-f_v^2)^2}\{f_v^2 f_{vu} - f_u^2 f_v^2 f_{vu} + f_u f_v f_{uu} \\
&\quad + f_{uu} f_u f_v^3 - f_u^3 f_v f_{uu} - f_{vu} + 2 f_{vu} f_u^2 - f_{vu} f_u^4\}.
\end{aligned}$$

Şimdi

$$f(u,v) = a_{20}u^2 + a_{11}uv + a_{02}v^2 + a_{30}u^3 + a_{21}u^2 v + a_{12}uv^2 + a_{03}v^3$$

özel durumu göz önüne alınsın. Bu durumda

$$f_{vu}(0,0) = a_{11},\ f_{vuu}(0,0) = 2a_{21},\ f_{uu}(0,0) = 2a_{20},\ f_{uuu}(0,0) = 6a_{30}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}
\kappa_g(0) &= 0,\ \kappa_g'(0) = -2a_{11}a_{20},\ \kappa_n(0) = a_{20},\ \kappa_n'(0) = 6a_{30},\ \tau_g(0) = -a_{11} \text{ ve} \\
\tau_g'(0) &= -a_{11}
\end{aligned}$$

olduğu gösterilebilir. $\kappa_g(0) = 0$ olduğundan $\tau_g(0) = -a_{11} \neq 0$ iken $\bar{\mathbf{D}}_r^S$ göstergesi 0 a yakın tanımlanabilir. Buna göre $\bar{\mathbf{D}}_r^S(0) = \mp\mathbf{t}(0)$ olur. Bu durumda $\delta_r^S(0) = -a_{20}$ ve $(\delta_r^S)'(0) = 6(a_{30} - 2a_{11}a_{20}a_{21})$ dir. Böylece eğer $a_{20} = 0$ ise $\bar{\mathbf{D}}_r^S$ ordinary cusp C ye lokal olarak diffeomorfiktir. Bu durum için $\bar{\mathbf{D}}_r^T$ ve $\bar{\mathbf{D}}_r^L$ göstergeleri 0 a yakın tanımlanamaz çünkü $\kappa_g(0) = 0$ dır. Diğer pseudo-küresel Darboux göstergeleri için de örnekler verilebilir. Ancak bunlar oldukça karmaşık olduğundan burada yer verilmemiştir (Ito ve Izumiya 2016).

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde 3 boyutlu Öklid uzayında bir eğri üzerinde herhangi bir ortonormal çatı alınmış ve bu çatı için 3-tip rotation minimizing çatı tanımlanarak bu çatıların küresel Darboux gösterge eğrileri elde edilmiştir. Ayrıca bu küresel gösterge eğrilerinin singüler noktaları karakterize edilmiştir. Böylece bir eğri üzerindeki herhangi bir ortonormal çatı için genel sonuçlar elde edilmiştir. Bu genel sonuçlar bir eğrinin küresel Darboux gösterge eğrileri ile alakalı yapılacak çalışmalarda kullanışlı olacaktır.

Minkowski 3-uzayında spacelike bir yüzey eğrisinin pseudo-küresel Lorenziyen Darboux gösterge eğrilerinin singüler noktalarının bulunmasında, eğrinin Legendrian dual eğrisinden faydalanılmıştır. Bunun için gösterge eğrilerinin invaryantları elde edilmiştir. Buna göre invaryantlarının sıfır olduğu durumda pseudo-küresel gösterge eğrileri ordinary cusp singülerliğine sahiptir. Bir yüzey eğrisi alınarak elde edilen durumların sınıflandırılması bu alanda ileride yapılacak olan çalışmalar açısından oldukça önemlidir. Ayrıca timelike bir yüzey üzerindeki eğriler için pseudo-küresel Darboux göstergeleri tanımlanabilir ve singüler noktaları karakterize edilebilir.

Küresel Darboux gösterge eğrileri ile ilgili elde edilen genel sonuçlar ve Lorentz-Minkowski uzayında singülerite konusunu ele alması bakımından bu konuda çalışma yapanlar için bu tez yararlı bir kaynak olacaktır.

KAYNAKLAR

Arnol'd, V.I., Gusein-Zade, S. M. and Varchenko, A. N. 1986. Singularities of differentiable maps, vol. I. Birkhäuser.

Arnol'd, V.I. 1995. The geometry of spherical curves and the algebra of quaternion, Russian Math. Surveys 50, 1-68.

Bishop, L. R. 1975. There is more than one way to frame a curve. Amer. Math. Monthly. 82(3): 246-251.

Bruce, J.W. and Giblin, P.J. 1992. "Curves and Singularities" (second edition). Cambridge University press, Cambridge.

Chen, L. and Izumiya, S. 2009. A mandala of Legendrian dualities for pseudo-spheres in semi-Euclidean space, Proceedings of the Japan Academy, 85 Ser. A , 49–54.

Çiçekdal, B. 2018. Küresel eğrilerin singüler noktalarının geometrisi. Yüksek lisans tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 54, Ankara.

Etayo, F. 2016. Rotation minimizing vector fields and frames in Riemannian manifolds. Geometry, Algebra and Applications: From Mechanics to Cryptography; 161, 91-100.

Etayo, F. 2018. Geometric properties of rotation minimizing vector fields along curves in Riemannian manifolds. Turk. J. Math. 42, 121.

Hacısalihoğlu, H.H. 2000. Diferensiyel Geometri. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Cilt 1,2, Ankara.

Hacısalihoğlu, H.H. 2005. 2 ve 3 Boyutlu Uzaylarda Analitik Geometri. Hacısalihoğlu Yayınları, Ankara.

Hananoi, S., Ito, N. and Izumiya, S. 2015. Spherical Darboux images of curves on surfaces, 2010 Mathematics Subject classification. Primary 53A04, Secondary 58Kxx.

Hu, S., Wang, Z., & Tang, X. 2019. Tubular surfaces of center curves on spacelike surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space. Math Meth Appl Sci. ;1–31.

Ito N. and Izumiya S. 2016. Lorentzian Darboux images of curves on spacelike surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space. Int J Geom Methods Mod Phys. 2016;13:1650066. https://doi.org/10.1142/S0219887816500663.

Izumiya, S., Pei, D. H. and Sano, T. 2003. Singularities of hyperbolic Gauss maps, Proc. London Math. Soc. 56, 675-685.

Izumiya, S. and Takeuchi, N. 2004. New special curves and developable surfaces, Turk. J. Math. 28, 153-163.

Izumiya, S. 2009. Legendrian dualities and spacelike hypersurfaces in the lightcone, Moscow Mathematical Journal 9, 325–357.

Izumiya S., Nabarro A.C. and Sacramento A.J. 2015. Pseudo-spherical normal Darboux images of curves on a timelike surface in three dimensional Lorentz-Minkowski space. J Geom Phys., 97:105-118.

Izumiya, S., Romero Fuster, M.C., Ruas, M.A.S. and Tari, F. 2016. Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore.

Karger, A. and Novak, J. 1985. Space Kinematics and Lie Groups. Gordon and Breach Science Publishers.

López, R. 2008. Differential Geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space, arXiv: 0810.3351v1 [math.DG].

O'Neill, B. 1983. Semi-Riemannian Geometry. Academic Press, New York.

Porteous, I.R. 1999. Some remarks on duality in S^3, Geometry and topology of caustics, Banach Center Publ. 50, Polish Acad. Sci., Warsaw, 217-226.

Rutter, J.W. 2000. Geometry of Curves. Chapman and Hall/CRC.

Sabuncuoğlu, A. 2004. Diferensiyel Geometri, 2. Baskı. Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.

Sato, T. 2012. Pseudo-spherical evolutes of curves on a spacelike surface in three dimensional Lorentz-Minkowski space, Journal of geometry 103(2), 319–331.

Yılmaz, İ. 2018. Lorentz-Minkowski 3-boyutlu uzayda yüzeyler üzerinde eğrilerin Darboux görüntüleri. Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 96, Isparta.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Gül YAŞAR

Doğum Yeri : Iğdır

Doğum Tarihi : 06/09/1993

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Iğdır İMKB Kazım Karabekir Anadolu Lisesi (2010)

Lisans : Karadeniz Teknik Üniversitesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü Matematik Öğretmenliği Alanı (2015)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Şubat 2016 - Haziran 2019)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl: Milli Eğitim Bakanlığı (2016 - ...)