KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

BULANIK ESNEK METRİKLER TARAFINDAN ÜRETİLEN TOPOLOJİK YAPILAR

EBRU AYDOĞDU

KOCAELİ 2019

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

BULANIK ESNEK METRİKLER TARAFINDAN ÜRETİLEN TOPOLOJİK YAPILAR

EBRU AYDOĞDU

Prof.Dr. Halis AYGÜN
Danışman, Kocaeli Üniv. .....

Doç.Dr. İsmet ALTINTAŞ
Jüri Üyesi, Sakarya Üniv. .....

Doç.Dr. Vildan ÇETKİN
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv. .....

Dr. Öğr. Üyesi Ayşe Arzu ARI
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv. .....

Dr. Öğr. Üyesi İzzettin DEMİR
Jüri Üyesi, Düzce Üniv. .....

Doç. Dr. Abdülkadir AYGÜNOĞLU
Eş Danışman, Kocaeli Üniv.

KOÜ Lisansüstü Yön. Madde 36 (5) göre oy hakkı olmaksızın jüri olmuştur.

Tezin Savunulduğu Tarih: 15.02.2019

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Klasik mantığın tanımlayamadığı belirsiz kavramların matematiksel olarak ifade edilebilmesi için geliştirilen teorilerin en önemlileri, olasılık, bulanık (fuzzy) kümeler, sezgisel (intuitionistic) kümeler, kaba (rough) kümeler ve esnek (soft) kümelerdir. Bulanık küme kavramı ilk kez Zadeh tarafından verilerek belirsizlik modern anlamda ifade edilmiştir. Esnek küme kavramı ise Molodtsov tarafından belirsizlik ve kararsızlık modelleri için tam anlamıyla yeni bir yaklaşım olarak geliştirilmiştir. Sonrasında hem bulanık küme hem de esnek küme teorileri zengin bir uygulama potansiyeline sahip olduğundan birçok bilim adamı tarafından araştırılmaya değer görmüştür.

Doktora öğrenimim boyunca desteğini esirgemeyen, çalışmalarıma yön veren danışmanım Sayın Prof. Dr. Halis AYGÜN' e yoğun çalışmaları arasında bana göstermiş olduğu ilgi, sabır ve desteğinden dolayı sonsuz teşekkürler eder, saygılarımı sunarım.

Tez çalışmamda yardımlarını esirgemeyen, bilgi ve görüşleri ile çalışmalarıma katkıda bulunan Sayın Doç. Dr. Abdülkadir AYGÜNOĞLU' na en içten dileklerimle teşekkürlerimi sunarım.

Tezin hazırlanması sürecinde bilgi ve tecrübeleriyle çalışmama katkı sağlayan Sayın Doç. Dr. Vildan ÇETKİN' e ve Sayın Doç. Dr. Banu PAZAR VAROL' a teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca karşılaştığım her zorlukta beni yalnız bırakmayan ve en büyük destekçilerim olan başta babam COŞKUN DİYARBAKIRLI ve annem HATİCE DİYARBAKIRLI olmak üzere sevgili aileme ve her aşamada sıkıntılarımı ve mutluluklarımı paylaşan sevgili eşim Dr. Öğr. Üyesi Ali AYDOĞDU' ya sonsuz minnet duygularımı sunarım.

Son olarak verdiği destek ile lisansüstü eğitimime başlamamı sağlayan, bu süreçte akademisyenlik mesleğini tanımama ve seçmeme vesile olan TÜBİTAK Bilim İnsanları Destekleme Daire Başkanlığı'na teşekkürü bir borç bilirim.

Şubat – 2019 Ebru AYDOĞDU

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR i
İÇİNDEKİLER ii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ iii
ÖZET iv
ABSTRACT v
GİRİŞ 1
1. GENEL BİLGİLER 4
1.1. Bulanık Kümeler 4
1.2. Esnek Kümeler 7
1.3. Bulanık Esnek Kümeler 14
1.4. Kategoriler ve Funktorlar 16
2. BULANIK METRİKLE ÜRETİLEN BULANIK TOPOLOJİLER 19
2.1. Bulanık Metrik Uzaylar 19
2.2. Bulanık ve Bulanıklaştırılmış Topolojik Uzaylar 23
2.3. Bulanık Metrikle Üretilen Klasik Topoloji ve Özellikleri 30
2.4. Bulanık Metrikle Üretilen Bulanıklaştırılmış Topoloji ve Özellikleri 36
2.4.1. GV-Bulanık metrikle üretilen bulanıklaştırılmış topoloji 36
2.4.2. KM-Bulanık metrikle üretilen bulanıklaştırılmış topoloji 39
2.5. Bulanık Metrikle Üretilen Bulanık Topoloji ve Özellikleri 45
2.5.1. GV-Bulanık metrikle üretilen bulanık topoloji 46
2.5.2. KM-Bulanık metrikle üretilen bulanık topoloji 54
3. BULANIK ESNEK METRİKLE ÜRETİLEN ESNEK TOPOLOJİLER 64
3.1. Esnek Topolojik Uzaylar 64
3.2. Bulanık Esnek Metrik Uzaylar 68
3.3. Bulanık Esnek Metrikle Üretilen Esnek Topoloji 70
3.4. Bulanık Esnek Metrikle Üretilen Bulanıklaştırılmış Esnek Topoloji 73
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 76
KAYNAKLAR 78
KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER 82
ÖZGEÇMİŞ 84

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\forall$	:	Evrensel niceleyici, her
$\exists$	:	Varlıksal niceleyici, en az bir
$\in$	:	Eleman
$:=$	:	Tanım olarak eşittir
$:\Leftrightarrow$	:	Tanım olarak ancak ve ancak
$\subseteq$	:	Alt küme
$\cap$	:	Arakesit
$\cup$	:	Birleşim
$\widetilde{\subseteq}$	:	Esnek alt küme
$\widetilde{\bigsqcup}$	:	Esnek kümelerin birleşimi
$\widetilde{\bigsqcap}$	:	Esnek kümelerin kesişimi
$\sqsubseteq$	:	Bulanık esnek alt küme
$\bigsqcup$	:	Bulanık esnek kümelerin birleşimi
$\bigsqcap$	:	Bulanık esnek kümelerin kesişimi
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
X,Y,…	:	Klasik küme
λ,μ,…	:	Bulanık kümeler
f,g,h,…	:	Bulanık esnek kümeler
F,G,H,…	:	Esnek kümeler
E,A,C	:	Parametre kümeleri
w,ı	:	Lowen funktorları
$\mathbb{K}, \mathbb{L}, ...$	:	Kategoriler
φ,ψ,…	:	Fonksiyonlar
I	:	[0,1] kapalı aralığı
2	:	{0,1} iki noktalı kümesi
χ_A	:	A klasik kümesinin karakteristik fonksiyonu
μ_G	:	Üye olma derecesini gösteren fonksiyon
I^X	:	X kümesi üzerindeki bulanık kümelerin ailesi
FS(X,E)	:	Bulanık esnek kümeler ailesi
S(X,E)	:	X kümesi üzerindeki tüm esnek kümelerin ailesi
$SP(\widetilde{X})$	:	X kümesi üzerindeki tüm esnek noktalar kümesi
$SE(\widetilde{E})$	:	Evrensel bulanık esnek küme üzerindeki tüm esnek elemanların kümesi
Φ	:	Boş esnek küme
$\widetilde{X}$	:	Mutlak esnek küme
$\widetilde{A}$	:	A-mutlak esnek küme
ϕ	:	Boş bulanık esnek küme
$\widetilde{E}$	:	Evrensel bulanık esnek küme
$\vee$	:	Supremum
$\wedge$	:	İnfimum
supp λ	:	Bulanık kümenin desteği
λ_a	:	Bulanık kümenin a seviye kümesi
$\underline{\alpha}$	:	α değerli sabit bulanık küme

$\mathcal{P}(X)$	:	X'in güç kümesi
φ_{ψ}	:	Esnek fonksiyon
ε	:	Esnek eleman
$\mathbb{R}(E)^{*}$	:	Negatif olmayan esnek reel sayılar kümesi
$I(E)^{*}$	:	Değerini $(0,1]$'de değer alan tüm esnek reel sayıların kümesi
$\tilde{r}$, $\tilde{s}$,…	:	Esnek reel sayı
P_{λ}^{x}	:	Esnek nokta
$*$	:	Üçgensel norm (t-norm)
$\tilde{*}$	:	Esnek üçgensel norm (t-norm)
(X,T)	:	Klasik topolojik uzay
(X,τ)	:	Bulanık (Bulanıklaştırılmış) topolojik uzay
τ_{α}	:	Bulanık (Bulanıklaştırılmış) topolojinin α seviye topolojisi
(X,d)	:	Metrik uzay
(X,M, $*$)	:	Bulanık metrik uzay
T_M	:	M bulanık metriğinden üretilen klasik topoloji
τ_M	:	GV-bulanık metriğinden üretilen bulanıklaştırılmış topoloji
$\mathcal{T}_M$	:	KM-bulanık metriğinden üretilen bulanıklaştırılmış topoloji
τ^M	:	GV-bulanık metriğinden üretilen bulanık topoloji
$\mathcal{T}^M$	:	KM-bulanık metriğinden üretilen bulanık topoloji
$(SE(\tilde{E}),\mathbf{M},\tilde{*})$:		Bulanık esnek metrik uzay
$\tau_{\mathbf{M}}$	:	**M** ile üretilen Lowen esnek topoloji
$\tau^{\mathbf{M}}$	:	**M** ile üretilen bulanıklaştırılmış esnek topoloji

BULANIK ESNEK METRİKLER TARAFINDAN ÜRETİLEN TOPOLOJİK YAPILAR

ÖZET

Bu tezin amacı, bulanık metrik uzaydan bulanık ve bulanıklaştırılmış topolojik uzaylar üretmek ve bulanık esnek metrik uzay yapısını tanımlayarak bu bulanık esnek metrik uzaydan esnek ve bulanıklaştırılmış esnek topolojik uzaylar üretmektir.

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde bulanık küme, esnek küme, bulanık esnek küme ve kategori teorisindeki bazı temel tanım ve özellikler özetlenmiştir.

İkinci bölümde, bulanık metrik uzay, bulanık topolojik uzay ve bulanıklaştırılmış topolojik uzay yapıları verilmiştir. Bulanık metrik uzaydan üretilen klasik topolojik uzay ve GV-bulanık metrik uzaydan üretilen bulanıklaştırılmış topolojik uzay incelenmiştir. Daha sonra bulanık metriğe farklı bir yaklaşım olan Kramosil-Michalek bulanık metrik yapısı (KM-bulanık metrik yapısı) kullanılarak bulanıklaştırılmış topoloji elde edilmiştir. Bunun yanı sıra, üretilen bulanıklaştırılmış topolojik uzaylarda süreklilik ve yakınsaklık teorileri araştırılmıştır. Son olarak, sırasıyla KM-bulanık metrik ve GV-bulanık metrik yapılarından Lowen anlamında bulanık topolojiler üretilmiştir. Elde edilen topolojik uzaylarda süreklilik ve kompaktlık yapıları çalışılmıştır.

Üçüncü bölümde, bulanık esnek metrik uzaylar tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir. Bulanık esnek metrik yardımıyla esnek ve bulanıklaştırılmış esnek topolojiler üretilmiştir. Sonrasında karakteristik özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık Metrik, Bulanık Topoloji, Bulanıklaştırılmış Topoloji, Bulanık Esnek Metrik, Bulanıklaştırılmış Esnek Topoloji.

GENERATED TOPOLOGICAL STRUCTURES BY FUZZY SOFT METRIC SPACES

ABSTRACT

The purpose of this thesis is to construct the fuzzy topological spaces and the fuzzifying topological spaces induced by the fuzzy metric space, and to construct the soft topological space and the fuzzifying soft topological space induced by this fuzzy soft metric space by defining the fuzzy soft metric space.

This thesis consists three chapters. In the first chapter, some fundamental definitions and properties of fuzzy set, soft set, fuzzy soft set and category theory were summarized.

In the second chapter, the structures of fuzzy metric spaces, fuzzy topological spaces and fuzzifying topological spaces were given. The generated classical topological space by fuzzy metric space and generated fuzzifying topological space by GV-fuzzy metric space were studied. Then a fuzzifying topology was generated from the structure of Kramosil-Michalek fuzzy metric (KM-fuzzy metric) which is a different approach in fuzzy metric. Besides, the theories of continuity and convergence on generated fuzzifying topological space were investigated. Finally, fuzzy topologies in the sense of Lowen were generated from KM-fuzzy metric and GV-fuzzy metric, respectively. Continuity and compactness structures were studied on generated fuzzy topology.

In the third chapter, fuzzy soft metric was defined, and its properties were studied. Soft and fuzzifying soft topologies were generated from soft metric. Then their characteristic properties were studied.

Keywords: Fuzzy Metric, Fuzzy Topology, Fuzzifying Topology, Fuzzy Soft Metric, Fuzzifying Soft Topology.

GİRİŞ

Ekonomi, mühendislik, çevre bilimleri, fizik, bilgisayar bilimleri, sosyal bilimler, sağlık bilimleri ve diğer çeşitli alanlarda karmaşık problemleri çözmek için geleneksel klasik yöntemler yeterli olmamıştır. Klasik küme, belli bir evrendeki nesneleri iki gruba ayıracak şekilde tanımlanmıştır. Eğer nesneler eleman olarak kabul ediliyor ise kümeye ait, aksi taktirde kümeye ait değildir. Halbuki gerçek hayatta, oldukça sık kullanılan ılık su, pahalı ev, uzun zaman, soğuk hava gibi belirsizlik içeren, anlamı kişiye göre değişen birçok ifade kullanılır. Klasik mantıkta bu gibi kesinlik içermeyen belirsiz kavramların modellenmesi mümkün değildir.

Bu sebeple olasılık teorisi, bulanık küme teorisi, sezgisel bulanık küme teorisi ve aralık matematik gibi bazı matematiksel teoriler belirsizliği tanımlamak için oluşturulmuştur. Fakat bu yöntemlerin her birinin kendine has bazı zorlukları vardır.

Belirsizlik ile ilgili problemlerin çözümünde en kullanışlı teorilerden biri olan bulanık kümeler teorisi 1965'de Azeri bilim adamı Lotfi A. Zadeh tarafından verilmiştir. Böylece belirsizlik modern anlamda tanımlanmıştır. Bulanık küme, üyelik fonksiyonuyla karakterize edilir ve her elemanı üyelik derecesine götüren bir dönüşümdür. Bu üyelik dereceleri [0,1] aralığında bulunan reel sayı değerleri ile temsil edilir. Böylece elemanlar, üyelik derecelerinin büyük veya küçük olması oranında bulanık kümeye çok veya az ait olurlar. Klasik kümelerde yer alan evet-hayır, iyi-kötü, doğru-yanlış kesinlik ifadeleri bulanık kümelerde yerini kısmen doğru, kesin doğru ve kısmen yanlış kesin yanlış gibi ifadelere bırakır.

Bulanık teorinin temel dallarından biri olan bulanık topoloji kavramı 1968'de C.L. Chang tarafından verilmiştir. Daha sonra R. Lowen (1976) klasik topolojideki bazı özellikleri bulanık topolojilerde de sağlaması için yeni bir bulanık topoloji tanımı vermiştir. Böylece genel topolojideki kavramlar bulanık topolojik uzaylara taşınmaya başlanmıştır. Sözü edilen tanımların her birinde kümeler bulanık olmasına rağmen topoloji aksiyomları ise klasik anlamdadır. Bunun üzerine Höhle 1980'de kümelerin klasik topoloji aksiyomlarının bulanık olduğu bulanıklaştırılmış topoloji kavramını

tanımlamıştır. Sonrasında Ying (Ying, 1991) bu tanımı genelleştirmiştir. Klasik topolojik uzaylar kategorisi ile bulanık topolojik uzaylar kategorisi arasındaki ilişkiler Lowen (1976) tarafından kendi tanımladığı w ve ι funktorları yardımıyla araştırılmıştır. Daha sonra birçok yazar bulanıklaştırılmış topolojik uzay, bulanık topolojik uzay ve klasik topolojik uzay arasındaki kategorik ilişkileri incelemişlerdir.

1975 yılında Kramosil ve Michalek, olasılıksal metrik uzay kavramını genelleyerek bulanık metrik uzay tanımını vermiştir. Daha sonra George ve Veeramani (1994) bu bulanık metrik uzay tanımında değişiklik yaparak, yeni bir bulanık metrik uzay tanımı vermiştir. Bulanık metrik uzaydan klasik bir topoloji elde etmiş ve bu topolojinin Hausdorfluk, sınırlılık, kompaktlık gibi özellikleri araştırmıştır. Bulanık metrikten üretilen topolojinin özellikleri birçok yazar tarafından çalışılmıştır.

Son zamanlarda bulanık metrik uzaydan bulanık bir topolojik uzay elde etme problemi üzerine çalışmalar yapılmıştır. 2012'de Perez ve Vicente, Kramosil-Michalek anlamındaki bulanık yarı metrik uzaylardan bulanıklaştırılmış komşuluk sistemi yardımıyla bir bulanıklaştırılmış topoloji elde etmiş ve özelliklerini araştırmışlardır. 2016 yılında Minana ve Shostak, George ve Veeramani anlamındaki güçlü bulanık metrik uzaydan seviye topolojileri yardımıyla bir bulanıklaştırılmış topolojik uzay üretmişlerdir. Ayrıca Grecova ve diğerleri (2016), Minana ve Shostak'ın çalışmasını geliştirerek George-Veeramani anlamındaki güçlü bulanık metrik uzaydan Shostak anlamında bir bulanık topolojik uzay elde etmiştir.

Bulanık kümelerde üyelik fonksiyonunun kişiye göre değişmesinden ötürü üyelik fonksiyonu atamak zor olabilir. Bu zorlukların nedeni parametrizasyon aracının yetersizliğidir. Bu sebeple, Molodtsov (1999) belirsizlik ve kararsızlık modelleri için tam anlamıyla yeni bir yaklaşım olan "esnek küme teorisi" kavramını vermiştir. Bir esnek küme, evrensel kümenin alt kümelerinin parametrelendirilmiş bir ailesidir. Bu küme teorisi, farklı alanlardaki (mühendislik, fizik, tıp bilimleri, ekonomi, çevre) uygulamalar için zengin bir potansiyele sahiptir.

Esnek topolojik uzay kavramı ilk kez Shabir ve Naz (2011) tarafından verilmiştir. 2012 yılında Aygünoğlu ve Aygün Lowen anlamında esnek topolojik uzay tanımı vermiş ve süreklilik, çarpım topolojisi, kompaktlık gibi topolojik yapıları incelemişlerdir. Varol ve Aygün (2012b, 2013) esnek topolojik uzayların önemli özelliklerini incelemiştir.

Das ve Samanta (2012) esnek reel küme ve esnek reel sayı kavramlarını tanımlayarak esnek reel sayıların gerçek bazı hayat problemlerine uygulamalarını çalışmışlardır. 2013 yılında ise esnek metrik uzay kavramını vermiş ve esnek metrik uzaylarda sabit nokta teoremi üzerine çalışmışlardır. Abbas ve diğ. (2016), Hosseinzadeh (2017) ve Güner ve diğ. (2018a, 2018b) gibi birçok araştırmacı esnek metrik uzaylarda sabit nokta teoremi üzerine çalışmalar yapmıştır.

Maji ve diğ. (2001) bulanık ve esnek kümelerin bir genellemesi olan bulanık esnek küme tanımını vermiştir. Daha sonra pek çok araştırmacı bulanık esnek kümeler üzerine çalışmalar yapmıştır. Roy ve Maji (2007) karar verme problemlerine bulanık esnek kümeleri uygulamıştır. Ahmad ve Kharal (2009) bulanık esnek kümelerin çeşitli işlemlerini tanımlamıştır. Aygünoğlu ve Aygün (2009) bulanık esnek kümelerin ilk cebirsel uygulaması olan bulanık esnek grup kavramını vermiştir. Tanay ve Kandemir (2011) bulanık esnek kümelerin Chang anlamındaki topolojisini çalışmıştır. Pazar Varol ve Aygün (2012a, 2014) Lowen anlamında bulanık esnek topolojiyi tanımlamış ve özelliklerini çalışmıştır. Aygünoğlu ve diğ. (2014) ise bulanıklaştırılmış esnek topolojik uzay kavramını vermiş ve özelliklerini çalışmıştır.

Son zamanlarda birçok araştırmacı bulanık esnek metrik uzaylar üzerine çalışmalar yapmıştır. Beaula ve Gunaseeli (2014) bulanık esnek nokta tanımını vermiş ve bulanık esnek noktalar yardımıyla bulanık esnek metrik uzay tanımlamıştır. Daha sonra Beaula ve Priyanga (2015) bulanık esnek normlu lineer uzaylar üzerine çalışmıştır. 2017 de Erduran ve diğ. esnek noktalar yardımıyla esnek bulanık metrik uzay kavramını vermiştir.

Bu çalışmada, hem George-Veeramani hem de Kramosil-Michalek anlamındaki bulanık metrik uzaylardan Lowen anlamında bir bulanık topolojik uzay ve yine bu yapılardan bir bulanıklaştırılmış topolojik uzay elde edilmiştir. Üretilen bu topolojik uzaylar üzerinde süreklilik yakınsaklık, kompaktlık gibi yapılar çalışılmıştır. Daha sonra bulanık metriğin genelleştirilmesi olarak bulanık esnek metrik uzay tanımlanmış ve bulanık esnek metrik uzaydan Lowen anlamında bir esnek topoloji ve bulanıklaştırılmış esnek topoloji üretilmiştir.

1. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tezin geri kalan kısımlarında kullanılacak olan bulanık kümeler, esnek kümeler, bulanık esnek kümeler özetlenmiş, kategorik kavramlar ve bunların temel özellikleri hatırlatılmıştır.

1.1. Bulanık Kümeler

Bu kısımda bulanık küme kavramı tanıtılmış ve bulanık küme teorisindeki bazı temel tanımlar verilmiştir.

Tanım 1.1.1: X boştan farklı klasik bir küme ve I=[0,1] olsun. Her $\lambda : X \to I$ fonksiyonuna X 'in bir bulanık alt kümesi adı verilir.

X 'in bütün bulanık kümelerinin ailesi I^X ile gösterilir. O halde,

$I^X := \{\lambda \mid \lambda : X \to I \text{ bir fonksiyon}\}$

biçiminde tanımlıdır.

$x \in X$ ve $\lambda \in I^X$ olmak üzere $\lambda(x)$ değerine, x elemanının λ bulanık kümesine ait olma (üyelik) derecesi denir.

$\{x \in X \mid \lambda(x) > 0\} \subseteq X$ klasik alt kümesine λ bulanık kümesinin desteği denir ve supp λ ile gösterilir.

Her $a \in I$ için,

$\{x \in X \mid \lambda(x) \geq a\} \subseteq X$

klasik alt kümesine λ bulanık alt kümesinin a-seviyesi denir ve λ_a notasyonu ile gösterilir.

$\alpha \in I$ olmak üzere her $x \in X$ için $\underline{\alpha}(x) := \alpha$ olarak tanımlanan $\underline{\alpha}$ bulanık kümesi X'in sabit bulanık alt kümesi olarak adlandırılır.

X kümesinin herhangi bir A alt kümesi, A'nın karakteristik fonksiyonu,

$\chi_A : X \to 2 := \{0,1\}$

$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$

ile X in bir bulanık alt küme olarak göz önüne alınabilir. Dolayısıyla, her klasik küme bir bulanık kümedir (Zadeh, 1965).

Not 1.1.2: Bundan sonra aksi belirtilmediği sürece *X* boştan farklı klasik bir kümeyi ve I, [0,1] aralığını ifade edecektir.

Tanım 1.1.3: $\lambda, \mu \in I^X$ olmak üzere,

(a) $\lambda = \mu :\Leftrightarrow \forall x \in X$ için $\lambda(x) = \mu(x)$.

(b) $\lambda \subseteq \mu :\Leftrightarrow \forall x \in X$ için $\lambda(x) \leq \mu(x)$,

(c) λ bulanık kümesinin tümleyeni $\lambda' : X \to I$ fonksiyonudur ve her $x \in X$ için $\lambda'(x) := 1 - \lambda(x)$ şeklinde tanımlanır (Zadeh, 1965).

Tanım 1.1.4: $\lambda, \mu \in I^X$ ve $\{\lambda_i\}_{i\in J} \subseteq I^X$ olmak üzere, λ ile μ bulanık kümelerinin birleşim ve kesişim işlemleri,

$(\lambda \vee \mu)(x) := \text{maks}\{\lambda(x), \mu(x)\}$ ve $(\lambda \wedge \mu)(x) := \min\{\lambda(x), \mu(x)\}$ $(\forall x \in X)$

biçiminde tanımlanır. Daha genel olarak $\{\lambda_i\}_{i\in J} \subseteq I^X$ ailesi için birleşim ve kesişim işlemleri sırasıyla,

$(\vee_{i\in J}\lambda_i)(x) := \vee_{i\in J}\lambda_i(x)$ ve $(\wedge_{i\in J}\lambda_i)(x) := \wedge_{i\in J}\lambda_i(x)$, $(\forall x \in X)$

biçiminde tanımlanır (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997).

Tanım 1.1.5: $\{\lambda_i\}_{i\in J} \subseteq I^X$ olmak üzere De-Morgan kuralları aşağıdaki şekilde tanımlanır

(a) $(\vee_{i\in J}\lambda_i)' = \wedge_{i\in J}\lambda_i'$,

(b) $(\wedge_{i\in J}\lambda_i)' = \vee_{i\in J}\lambda_i'$ (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997).

Tanım 1.1.6: X ve Y boştan farklı iki klasik küme ve $\varphi : X \to Y$ bir fonksiyon olsun.

(a) $\lambda \in I^X$ bulanık alt kümesinin φ fonksiyonu altındaki görüntüsü aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$\varphi(\lambda) : Y \to I$

$$\varphi(\lambda)(y) := \begin{cases} \sup \{ \lambda(x) : x \in X,\ y = \varphi(x)\} , & \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 , & \varphi^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} , (\forall\, y \in Y)$$

(b) $\mu \in I^Y$ bulanık kümesinin φ fonksiyonu altındaki ters görüntüsü aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$\varphi^{-1}(\mu) : X \to I$

$\varphi^{-1}(\mu)\ (x) := (\mu \circ \varphi)(x) = \mu\big(\varphi(x)\big)$, $(\forall\, x \in X)$.

Açık olarak $\varphi^{-1}(\mu)$ ve $\varphi(\lambda)$ sırasıyla X ve Y klasik kümelerinin birer bulanık alt kümeleridir (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997).

Önerme 1.1.7: $\varphi : X \to Y$, $\psi : Y \to Z$ iki fonksiyon, $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in I^X$, $\mu, \mu_1, \mu_2 \in I^Y$ ve $v \in I^Z$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $(\psi \circ \varphi)(\lambda) = \psi\ \big(\varphi\ (\lambda)\big)$,

(2) $(\psi \circ \varphi)^{-1}(v) = \varphi^{-1}\ \Big(\psi^{-1}(v)\Big)$,

(3) $\lambda \subseteq \varphi^{-1}\ \big(\varphi\ (\lambda)\big)$. Eğer φ dönüşümü bire-bir ise $\lambda = \varphi^{-1}\ \big(\varphi\ (\lambda)\big)$ sağlanır.

(4) $\varphi\ \Big(\varphi^{-1}(\mu)\Big) \subseteq \mu$. Eğer φ dönüşümü örten ise $\varphi\ \Big(\varphi^{-1}(\mu)\Big) = \mu$ sağlanır.

(5) $\lambda_1 \subseteq \lambda_2$ ise $\varphi\ (\lambda_1) \subseteq \varphi\ (\lambda_2)$,

(6) $\mu_1 \subseteq \mu_2$ ise $\varphi^{-1}\big(\mu_1\big) \subseteq \varphi^{-1}\big(\mu_2\big)$ (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997).

1.2. Esnek Kümeler

Bu kısımda esnek küme kavramı tanıtılmış ve esnek küme teorisindeki bazı temel tanımlar verilmiştir.

Tanım 1.2.1: X evrensel küme, $A \subseteq E$ boş kümeden farklı bir parametre kümesi ve $\mathcal{P}(X)$, X'in kuvvet kümesi olsun. $F:A \to \mathcal{P}(X)$ fonksiyonuna X üzerinde bir esnek küme denir. (F, A) sıralı ikilisi şeklinde gösterilir ve aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$(F,A) = \{(e, F(e)) \mid e \in A, F(e) \in \mathcal{P}(X)\}$ (Molodtsov, 1999).

Diğer bir ifadeyle, X üzerinde bir esnek küme, X'in alt kümelerinin parametrelerle ifade edilen bir ailesidir (Molodtsov, 1999).

Örnek 1.2.2: (F, E) esnek kümesi bir kişinin satın almayı düşündüğü evin özelliklerini tanımlasın. $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ evlerin bir kümesi ve $E = \{\text{pahalı, güzel, ahşap, ucuz, bahçeli}\}=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ bu evlerin özelliklerini gösteren parametrelerin bir kümesi olsun. $F : E \to \mathcal{P}(X)$ dönüşümünde $F(e_1)$ "pahalı evler" anlamındadır ve fonksiyon değeri $\{h \in X : h \text{ pahalı ev}\}$ kümesidir. $F(e_1) = \{x_2, x_4\}$, $F(e_2) = \{x_1, x_3\}$, $F(e_3) = \emptyset$, $F(e_4) = \{x_1, x_3, x_5\}$ ve $F(e_5) = \{x_1\}$ olarak verilsin. Bu durumda (F,E) esnek kümesi,

$(F,E)=\{(\text{pahalı},\{x_2,x_4\}),(\text{güzel},\{x_1,x_3\}),(\text{ahşap},\emptyset),(\text{ucuz},\{x_1,x_3,x_5\}),(\text{bahçeli},\{x_1\})\}$

şeklinde tanımlanır (Aktaş ve Çağman, 2007).

Aşağıdaki örnekte bulanık küme ve esnek küme arasındaki ilişki verilmiştir.

Örnek 1.2.3: X klasik bir küme, λ X kümesi üzerinde bir bulanık küme ve $E = [0,1]$ olsun. $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere

$F(\alpha)=\{x \in X : \lambda(x) \geq \alpha\}$

şeklinde tanımlanan $F : E \to \mathcal{P}(X)$ dönüşümü X üzerinde bir esnek kümedir. Burada, $F(\alpha)$, λ bulanık kümesinin bir α-seviye kümesidir (Pei ve Miano, 2005).

Böylece her bulanık kümenin bir esnek küme olarak gösterilebilir.

Tanım 1.2.4: (F, E), X kümesi üzerinde bir esnek küme olsun.

(1) Her $e \in E$ için $F(e) = \emptyset$ ise (F, E) esnek kümesine boş esnek küme denir ve Φ ile gösterilir.

(2) Her $e \in E$ için $F(e) = X$ ise (F,E) esnek kümesine mutlak esnek küme denir ve $\widetilde{X}$ ile gösterilir.

(3) $A \subset E$ olsun. Her $e \in A$ için $F(e) = X$ ise (F, A) esnek kümesine A-mutlak esnek küme denir ve $\widetilde{A}$ ile gösterilir (Maji ve diğ., 2003).

Tanım 1.2.5: X kümesi üzerinde (F, E) bir esnek küme olsun. Her $e \in E$ için $F^C(e)=X \setminus F(e)$ şeklinde tanımlanan $F^C: E \to \mathcal{P}(X)$ dönüşümüne (F, E) esnek kümesinin tümleyeni denir ve $(F,E)^C=(F^C,E)$ ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Tanım 1.2.6: $A, B \subseteq E$ parametre kümeleri olmak üzere X kümesi üzerinde (F,A) ve (G,B) iki esnek küme olsun.

(1) Eğer $A \subseteq B$ ve her $e \in A$ için $F(e) \subseteq G(e)$ ise (F, A)'ya (G,B)'nin alt kümesi denir ve $(F, A) \cong (G, B)$ şeklinde gösterilir.

(2) $(F, A) \cong (G, B)$ ve $(G, B) \cong (F, A)$ sağlanıyorsa (F,A) ve (G,B) esnek kümeleri eşittir denir ve $(F,A)=(G,B)$ şeklinde gösterilir (Maji ve diğ., 2003).

Tanım 1.2.7: $A, B \subseteq E$ parametre kümeleri olmak üzere X kümesi üzerinde (F, A) ve (G, B) iki esnek küme olsun.

(1) (F, A) ve (G, B) esnek kümelerinin birleşimi bir (H, C) esnek kümesidir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır. $C = A \cup B$ olmak üzere her $c \in C$ için,

$$H(c)=\begin{cases} F(c), & c \in A \setminus B \\ G(c), & c \in B \setminus A \\ F(c) \cup G(c), & c \in A \cap B \end{cases}.$$

$(F,A) \tilde{\sqcup} (G,B) = (H,C)$ şeklinde gösterilir.

(2) (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin kesişimi bir (H,C) esnek kümesidir ve burada $C = A \cap B$ ve her $c \in C$ için $H(c) = F(e) \cap G(e)$ 'dir. $(F,A) \tilde{\cap} (G,B) = (H,C)$ şeklinde gösterilir (Maji ve diğ., 2003).

Önerme 1.2.8: X kümesi üzerinde (F,A), (G,B) ve (H,C) esnek kümeler olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

(1) $(F,A) \tilde{\cup} (F,A) = (F,A)$,

(2) $(F,A) \tilde{\cup} (G,B) = (G,B) \tilde{\cup} (F,A)$,

(3) $(F,A) \tilde{\cup} \big((G,B) \tilde{\cup} (H,C)\big) = \big((F,A) \tilde{\cup} (G,B)\big) \tilde{\cup} (H,C)$,

(4) $(F,A) \tilde{\subseteq} (F,A) \tilde{\cup} (G,B)$ ve $(G,B) \tilde{\subseteq} (F,A) \tilde{\cup} (G,B)$,

(5) $(F,A) \tilde{\subseteq} (G,B)$ ise $(F,A) \tilde{\cup} (G,B) = (G,B)$,

(6) $(F,A) \tilde{\cap} (F,A) = (F,A)$,

(7) $(F,A) \tilde{\cap} (G,B) = (G,B) \tilde{\cap} (F,A)$,

(8) $(F,A) \tilde{\cap} \big((G,B) \tilde{\cap} (H,C)\big) = \big((F,A) \tilde{\cap} (G,B)\big) \tilde{\cap} (H,C)$,

(9) $(F,A) \tilde{\cap} (G,B) \tilde{\subseteq} (F,A)$ ve $(F,A) \tilde{\cap} (G,B) \tilde{\subseteq} (G,B)$,

(10) $(F,A) \tilde{\subseteq} (G,B)$ ise $(F,A) \tilde{\cap} (G,B) = (F,A)$ (Maji ve diğ., 2003).

Önerme 1.2.9: X kümesi üzerinde (F,A) ve (G,B) iki esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

(1) $\big((F,A) \tilde{\cup} (G,B)\big)^C \sqsubseteq (F,A)^C \tilde{\cup} (G,B)^C$,

(2) $(F,A)^C \tilde{\cap} (G,B)^C \sqsubseteq \big((F,A) \tilde{\cap} (G,B)\big)^C$,

(3) $(F,A)^C \tilde{\cap} (G,B)^C \sqsubseteq \big((F,A) \tilde{\cup} (G,B)\big)^C$,

(4) $\big((F,A) \tilde{\cap} (G,B)\big)^C \sqsubseteq (F,A)^C \tilde{\cup} (G,B)^C$ (Maji ve diğ., 2003).

Önerme 1.2.10: X kümesi üzerinde (F,A) ve (G,A) iki esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

(1) $(F,A)^C \tilde{\sqcap} (G,A)^C = \big((F,A) \tilde{\sqcup} (G,A)\big)^C$,

(2) $\big((F,A) \tilde{\sqcap} (G,A)\big)^C = (F,A)^C \tilde{\sqcup} (G,A)^C$ (Maji ve diğ., 2003).

Uyarı 1.2.11: X evrensel küme, E parametrelerin kümesi ve $A \subseteq E$ olsun. (F,A) X kümesi üzerinde bir esnek küme olmak üzere,

$$\bar{F} : E \to \mathcal{P}(X),\ \bar{F}(e) = \begin{cases} F(e), & e \in A \\ \emptyset, & e \notin A \end{cases}$$

dönüşümü ile birlikte (F,A) esnek kümesi $(\bar{F},A)$ esnek kümesi olarak düşünülebilir. Yani parametre kümesinin bir alt kümesi üzerinde tanımlı her esnek küme parametre kümesine genişletilebilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

X kümesi üzerindeki tüm esnek kümelerin ailesi $S(X,E)$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.2.12: $\varphi : X \to Y$, $\psi : E_1 \to E_2$ iki fonksiyon ve E_1,E_2 sırasıyla X ve Y için parametre kümeleri olsun. $\varphi_\psi : S(X,E_1) \to S(Y,E_2)$ dönüşümüne bir esnek fonksiyon denir (Kharal ve Ahmad, 2011).

(1) $(F,E_1) \in S(X,E_1)$ ve φ_ψ, X'den Y'ye bir esnek fonksiyon olsun. $\varphi_\psi\big((F,E_1)\big)$, Y üzerindeki esnek kümedir ve her $k \in E_2$ için,

$$\varphi_\psi(F,E_1)(k) = \begin{cases} \bigcup_{\psi(e)=k} \varphi\big(F(e)\big), & \psi^{-1}(k) \neq \emptyset \\ \emptyset, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. $\varphi_\psi(F,E_1)$ esnek kümesine (F,E_1)'in bir esnek görüntüsü denir.

(2) $(G,E_2) \in S(X,E_2)$ ve φ_ψ, X'den Y'ye bir esnek fonksiyon olsun. $\varphi_\psi^{-1}\big((G,E_2)\big)$, X üzerindeki esnek kümedir ve her $e \in E_1$ için,

$$\varphi_\psi^{-1}(G,E_2)(e) = \varphi^{-1}\Big(G\big(\psi(e)\big)\Big)$$

şeklinde tanımlanır. $\varphi_{\psi}^{-1}(G, E_2)$ esnek kümesine (G,E_2)'nin bir esnek ters görüntüsü denir.

Eğer φ ve ψ bire-bir (örten) ise φ_{ψ} esnek fonksiyonu da bire-bir (örten) dir (Aygünoğlu ve Aygün, 2012).

Teorem 1.2.13: J bir indis kümesi olmak üzere her $i\in J$ için $(F_1,E_1),(F_2,E_1),(F_i,E_1) \in S(X,E_1)$ ve $(G_1,E_2),(G_i,E_2) \in S(Y,E_2)$ olsun. φ_{ψ}, X'den Y'ye esnek fonksiyonu için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $(F_1,E_1) \cong (F_2,E_1)$ ise $\varphi_{\psi}\big((F_1,E_1)\big) \cong \varphi_{\psi}\big((F_2,E_1)\big)$,

(2) $(G_1,E_2) \cong (G_2,E_2)$ ise $\varphi_{\psi}^{-1}\big((G_1,E_2)\big) \cong \varphi_{\psi}^{-1}\big((G_2,E_2)\big)$,

(3) $(F_1,E_1) \cong \varphi_{\psi}^{-1}\left(\varphi_{\psi}\big((F_1,E_1)\big)\right)$, eğer φ_{ψ} bire-bir ise eşitlik sağlanır,

(4) $\varphi_{\psi}\left(\varphi_{\psi}^{-1}\big((G_1,E_2)\big)\right) \cong (G_1,E_2)$, eğer φ_{ψ} örten ise eşitlik sağlanır,

(5) $\varphi_{\psi}(\widetilde{\sqcup}_{i\in J}(F_i,E_1)\ ) = \widetilde{\sqcup}_{i\in J}\varphi_{\psi}(F_i,E_1)$,

(6) $\varphi_{\psi}^{-1}\ \big(\widetilde{\sqcup}_{i\in J}(G_i,E_2)\big)= \widetilde{\sqcup}_{i\in J}\ \varphi_{\psi}^{-1}(G_i,E_2)$,

(7) $\varphi_{\psi}\big(\widetilde{\sqcap}_{i\in J}(F_i,E_1)\big) \cong \widetilde{\sqcap}_{i\in J}\varphi_{\psi}(F_i,E_1)$, eğer φ_{ψ} bire-bir ise eşitlik sağlanır,

(8) $\varphi_{\psi}^{-1}\big(\widetilde{\sqcap}_{i\in J}(G_i,E_2)\big) = \widetilde{\sqcap}_{i\in J}\ \varphi_{\psi}^{-1}(G_i,E_2)$,

(9) $\varphi_{\psi}^{-1}\big(\widetilde{Y}\big)=\widetilde{X}$, $\varphi_{\psi}^{-1}(\Phi)=\Phi$ ve $\varphi_{\psi}(\Phi)=\Phi$,

(10) $\varphi_{\psi}\big(\widetilde{X}\big) \cong \widetilde{Y}$, eğer φ_{ψ} örten ise eşitlik sağlanır (Kharal ve Ahmad, 2011).

Tanım 1.2.14: X boştan farklı bir küme ve $(F,E) \in S(X,E)$ olsun. $\varepsilon : E\rightarrow X$ fonksiyonuna X üzerinde bir esnek eleman denir ve ε ile gösterilir (Das ve Samanta, 2012).

Tanım 1.2.15: (F,E), X üzerinde bir esnek küme olmak üzere her $e \in E$ için $\varepsilon(e) \in F(e)$ ise ε esnek elemanı F esnek kümesine aittir denir. $\varepsilon \,\tilde{\in}\, F$ ile gösterilir (Das ve Samanta, 2012).

Uyarı 1.2.16: Her tek noktalı esnek küme (yani, her $e \in E$ için $F(e)$ tek elemanlı bir küme) bir esnek eleman olarak düşünülebilir (Das ve Samanta, 2012).

Tanım 1.2.17: $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$'nin boştan farklı tüm sınırlı alt kümelerinin bir ailesi olsun. Bu taktirde,

$F:E\rightarrow\mathfrak{B}(\mathbb{R})$
$F=\{(e,F(e)) : e \in E, F(e) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\}$

şeklinde tanımlı (F,E) esnek kümesine esnek reel sayılar kümesi denir (Das ve Samanta, 2012).

Örnek 1.2.18: $A = \{e_1 = [1,10], e_2 = [11,20], e_3 = [21,30], e_4 = [31,40]\}$ parametrelerin kümesi olsun. $F:A\rightarrow\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ dönüşümü her $e_i(i=1,\dots,4)$ aralığına düşen asal sayılar olarak tanımlanırsa,
$F(e_1)=\{2,3,5,7\}$, $F(e_2)=\{11,13,17,19\}$,
$F(e_3)=\{23,29\}$, $F(e_4)=\{31,37\}$
elde edilir. Bu durumda (F,A) esnek kümesi,
$(F,A)=\{(e_1,\{2,3,5,7\}),(e_2,\{11,13,17,19\}),(e_3,\{23,29\}),(e_4,\{31,37\})\}$
şeklinde bir esnek reel sayılar kümesidir (Das ve Samanta, 2012).

Tanım 1.2.19: $\mathbb{R}$ üzerindeki esnek elemanlara esnek reel sayı denir ve $\tilde{r}, \tilde{s}, \tilde{t}$ ile gösterilir.

Özel olarak her $e \in E$ için $\bar{r}(e) = r$ şeklindeki esnek reel sayılar $\bar{r}$ ile gösterilir. Örneğin $e \in E$ için $\bar{0}(e)=0$ olan $\bar{0}$ bir esnek reel sayıdır (Das ve Samanta, 2012).

Örnek 1.2.20: A parametre kümesi, bir Sağlık lisesindeki sınıfların kümesi yani $A=\{\text{Hemşire, Acil durum, 1.sınıf, 2.sınıf, 3.sınıf, 4.sınıf}\}=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$ olsun. $F:A\rightarrow\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ dönüşümü her $e_i(i=1,\dots,6)$ sınıfındaki öğrenci sayıları olarak tanımlanırsa

$F(e_1)=\{54\}$, $F(e_2)=\{51\}$, $F(e_3)=\{44\}$,
$F(e_4)=\{42\}$, $F(e_5)=\{62\}$, $F(e_6)=\{49\}$
elde edilir. Bu durumda
$(F,A)=\{(e_1,\{54\}),(e_2,\{51\}),(e_3,\{44\}),(e_4,\{42\}),(e_5,\{62\}),(e_6,\{49\})\}$
esnek kümesini bir esnek eleman olarak düşünürsek yani $(F, A)=\{(e_1,54), (e_2,51), (e_3,44), (e_4,42), (e_5,62), (e_6,49)\}$ alırsak bir esnek reel sayı olur (Das ve Samanta, 2012).

$\tilde{r}$ bir esnek reel sayı olmak üzere, her $e \in E$ için $\tilde{r}(e) \in R^+$ ise $\tilde{r}$'ya negatif olmayan esnek reel sayı denir. Bütün negatif olmayan esnek reel sayıların kümesi $\mathbb{R}(E)^*$ ile gösterilir (Das ve Samanta, 2012).

Tanım 1.2.21: $\tilde{r}$ ve $\tilde{s}$ iki esnek reel sayı olmak üzere esnek reel sayılar üzerindeki cebirsel işlemler aşağıdaki şekilde tanımlanır.

(1) Her $e \in E$ için $(\tilde{r} + \tilde{s})(e)=\tilde{r}(e) + \tilde{s}(e)$,

(2) Her $e \in E$ için $(\tilde{r} - \tilde{s})(e)=\tilde{r}(e) - \tilde{s}(e)$,

(3) Her $e \in E$ için $(\tilde{r} . \tilde{s})(e) = \tilde{r}(e). \tilde{s}(e)$,

(4) Her $e \in E$ için $|\tilde{r}|(e)=|\tilde{r}(e)|$ (Das ve Samanta, 2012).

Tanım 1.2.22: $\tilde{r}$ ve $\tilde{s}$ iki esnek reel sayı olmak üzere esnek reel sayılar arasındaki sıralama bağıntıları aşağıdaki şekilde tanımlanır.

(1) Her $e \in E$ için $\tilde{r}(e) \leq \tilde{s}(e)$ ise $\tilde{r} \leq \tilde{s}$,

(2) Her $e \in E$ için $\tilde{r}(e) \geq \tilde{s}(e)$ ise $\tilde{r} \geq \tilde{s}$,

(3) Her $e \in E$ için $\tilde{r}(e) < \tilde{s}(e)$ ise $\tilde{r} < \tilde{s}$,

(4) Her $e \in E$ için $\tilde{r}(e) > \tilde{s}(e)$ ise $\tilde{r} > \tilde{s}$ (Das ve Samanta, 2013a).

Tanım 1.2.23: (F,E), X kümesi üzerinde ki bir esnek küme olsun. Bir $x \in X$ için $F(e)=\{x\}$ ve her $e' \in E-\{e\}$ için $F(e')=\emptyset$ olacak şekilde bir $e \in E$ varsa (F,E) esnek kümesine bir esnek nokta denir ve x^e ile gösterilir (Das ve Samanta, 2013b).

X üzerindeki tüm esnek noktaların kümesi $SP(\widetilde{X})$ ile gösterilir.

Örnek 1.2.24: X={x,y,z}, E={e_1,e_2} olsun. P(e_1)={z}, P(e_2)=∅ şeklindeki bir esnek küme bir esnek noktadır (Das ve Samanta, 2013b).

Önerme 1.2.25: Esnek noktaların herhangi bir ailesinin birleşimi bir esnek küme oluşturur. Ayrıca her bir esnek küme kendisine ait olan esnek noktaların birleşimi olarak ifade edilebilir (Das ve Samanta, 2013b).

1.3. Bulanık Esnek Kümeler

Bu kısımda bulanık esnek küme kavramı tanıtılmış ve bazı temel özellikler verilmiştir

Tanım 1.3.1: X boştan farklı klasik bir küme, I=[0,1] ve $A \subseteq E$ olsun. $f_A : A \to I^X$ dönüşümüne X üzerinde bir bulanık esnek küme denir (Maji ve diğ., 2001).

Her $e \in A$ için $f_e \coloneqq f_A(e) : X \to I$, X üzerinde bir bulanık kümedir (Roy ve Maji, 2007).

Buradaki f_e bulanık küme değerine bulanık esnek kümenin e-elemanı denir. Böylece, X üzerindeki bir f bulanık esnek kümesi,

$$(f,E)=\{(e,f_e) \mid e \in E,\ f_e \coloneqq f(e) \in I^X\}$$

biçimindeki sıralı ikililerin ailesi olarak gösterilebilir (Roy ve Maji, 2007).

Bir bulanık esnek küme evrensel parametre kümesi üzerinde tanımlandığından f_A gösterimi yerine sadelik olması açısından kısaca f gösterimi kullanılacaktır.

X üzerindeki tüm bulanık esnek kümelerin ailesi FS(X,E) ile gösterilir.

Örnek 1.3.2: (1) (f,E) bulanık esnek kümesi bir bayanın satın almayı düşündüğü elbiselerin özelliklerini tanımlasın. X={x_1,x_2,x_3,x_4} elbiselerin kümesi, I^X, X'in tüm bulanık alt kümelerinin ailesi ve parametre kümesi
E={uzun, pahalı, renkli, sade}={e_1,e_2,e_3,e_4} olsun. $f_{e_1}=\left\{\frac{x_1}{1.0},\frac{x_2}{0},\frac{x_3}{0},\frac{x_4}{0.4}\right\}$, $f_{e_2}=\left\{\frac{x_1}{0.5},\frac{x_2}{0.7},\frac{x_3}{0},\frac{x_4}{0}\right\}$, $f_{e_3}=\left\{\frac{x_1}{0.2},\frac{x_2}{1.0},\frac{x_3}{0.7},\frac{x_4}{1.0}\right\}$, $f_{e_4}=\left\{\frac{x_1}{0.1},\frac{x_2}{0},\frac{x_3}{0.7},\frac{x_4}{1.0}\right\}$ olarak tanımlayalım.

Böylece, I^X in $\{(e_i, f_{e_i}) : i=1,2,3,4\}$ ailesi (f,E) bulanık esnek kümesidir (Roy ve Maji, 2007).

(2) F, X kümesi üzerinde bir esnek küme olsun. Buna göre her $e \in E$ için F(e) görüntü kümesi karakteristik fonksiyonu yardımıyla,

$$f_e(a) = \chi_{F(e)}(a) = \begin{cases} 1, & a \in F(e) \\ 0, & a \notin F(e) \end{cases}$$

biçiminde tanımlan f, X üzerinde bir bulanık esnek kümedir.

Sonuç olarak, her esnek küme bir bulanık esnek küme olarak düşünülebilir.

Tanım 1.3.3: $f, g \in FS(X,E)$ iki bulanık esnek küme olsun. Bu durumda,

(1) Her $e \in E$ için $f_e \subseteq g_e$ sağlanıyorsa f bulanık esnek kümesine g bulanık esnek kümesinin bir alt kümesi denir ve $f \sqsubseteq g$ olarak gösterilir.

(2) Her $e \in E$ için $f_e = g_e$ sağlanıyorsa f bulanık esnek kümesi g bulanık esnek kümesine eşittir denir ve f = g olarak gösterilir.

(3) f ve g bulanık esnek kümelerinin birleşimi her $e \in E$ için $h_e = f_e \vee g_e$ şeklinde tanımlanır ve $h = f \sqcup g$ olarak gösterilir.

(4) f ve g bulanık esnek kümelerinin kesişimi her $e \in E$ için $h_e = f_e \wedge g_e$ şeklinde tanımlanır ve $h=f \sqcap g$ olarak gösterilir.

(5) Her $e \in E$ için $f_e = \underline{0}$ ise f bulanık esnek kümesine boş bulanık esnek küme denir ve ϕ veya ϕ_X ile gösterilir.

(6) Her $e \in E$ için $f_e=\underline{1}$ ise f bulanık esnek kümesine evrensel bulanık esnek küme denir ve $\widetilde{E}$ veya $\widetilde{E}_X$ ile gösterilir (Roy ve Maji, 2007).

(7) Her $e \in E$ için $f_e=\lambda$ ise f bulanık esnek kümesine λ-evrensel bulanık esnek küme denir ve $\tilde{\lambda}$ ile gösterilir (Aygünoğlu ve Aygün, 2009).

Önerme 1.3.4: J bir indeks kümesi ve f, g, h, f_i, $g_i \in FS(X,E)$ $(i \in J)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $f \sqcap f = f$, $f \sqcup f = f$.

(2) $f \sqcap g = g \sqcap f$, $f \sqcup g = g \sqcup f$.

(3) $f \sqcup (g \sqcup h) = (f \sqcup g) \sqcup h$, $f \sqcap (g \sqcap h) = (f \sqcap g) \sqcap h$

(4) $f \sqcap \left(\bigsqcup_{i \in J} g_i\right) = \bigsqcup_{i \in J} \left(f \sqcap g_i\right)$, $f \sqcup \left(\bigsqcap_{i \in J} g_i\right) = \bigsqcap_{i \in J} \left(f \sqcup g_i\right)$.

(5) $\phi \sqsubseteq f \sqsubseteq \tilde{E}$ (Ahmad ve Kharal, 2009).

1.4. Kategoriler ve Funktorlar

Küme teorisinde, kümeler ve kümeler arasında tanımlanan fonksiyonlar göz önüne alınır. Topolojide bir topolojik uzaydan diğerine sürekli fonksiyonlar, grup teorisinde bir gruptan diğerine grup homomorfizmleri tanımlanır. Bunları ayrı ayrı birer çatı altında toplarsak, bu yapı bazı objelerden ve bir objeden diğerine gitmek için tanımlanan kurallar veya yollardan oluşur. İşte bu kavramlar kategorinin temelini oluşturmaktadır.

Tanım 1.4.1: Bir $\mathbb{K}$ kategorisi aşağıdaki verilerden oluşur:
(K1) Bir $Ob\mathbb{K}$ sınıfı ki, bu sınıfın elemanlarına $\mathbb{K}$ nın objeleri (nesneleri) denir.
(K2) $\mathbb{K}$ nın objelerinin her (X,Y) ikilisi için bir M(X,Y) kümesi karşılık getirilir ve bu kümenin elemanlarına X den Y ye morfizimler ya da $\mathbb{K}$-morfizimler denir.

Her $X,Y,Z,W \in Ob\mathbb{K}$ için $(X,Y) \neq (Z,W)$ ise $M(X,Y) \cap M(Z,W) = \emptyset$ dir. (Yani, tanım ve değer bölgeleri tek türlü belirlidir.)

Bazen M(X,Y) kümesi, Mor(X,Y) veya $Mor_{\mathbb{K}}(X,Y)$ ile gösterilir.

(K3) $\mathbb{K}$ nın objelerinin her X,Y,Z üçlüsü için bir $\circ$ dönüşümü ki bileşke adı verilen bu dönüşüm
$\circ : M(X,Y) \times M(Y,Z)$, $\circ (f,g) \coloneqq g \circ f$
şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i) Bileşke asosyatiftir. Yani, her $f \in Mor(X,Y)$,$g \in Mor(Y,Z)$ ve $h \in Mor(Z,W)$ için $h \circ (g \circ f)=(h \circ g)\circ f$.

(ii) $\mathbb{K}$ nın her X objesi için X in idantik (birim) morfizmi adı verilen bir $1_X \in Mor(X,X)$ elemanı vardır öyle ki,
$\forall f \in Mor(X,Y)$, $g \in Mor(Y,Z)$ için $1_Y \circ f = f$ ve $g \circ 1_Y = g$.

Kategorideki objelerin sınıfının kümelerden oluşması gerekmez (o yalnızca bir sınıftır). Buna rağmen herhangi iki obje için birinden diğerine olan morfizimler bir küme formunda olmak zorundadır.

$X,Y \in Ob\mathbb{K}$ ve $f \in Mor(X,Y)$ için X kümesine f nin tanım bölgesi, Y ye ise değer bölgesi denir. X ve Y nin küme olmadığı durumlarda f nin de bir fonksiyon olması gerekmez (Adamek ve diğ., 1990).

Örnek 1.4.2: (1) En önemli kategorilerden birisi kümeler ve fonksiyonların oluşturduğu $\mathbb{SET}$ kategorisidir. Yani,
(a) $Ob(\mathbb{SET}) \coloneqq \{X \mid X \text{ bir küme}\}$,
(b) $Mor(X,Y) \coloneqq \{f \mid f : X \to Y \text{ bir fonksiyon}\}$,
(c) Bileşke işlemi fonksiyonların bileşkesi,
(d) $X \in Ob(\mathbb{SET})$ için $1_X : X \to X$, $1_X(x) \coloneqq x$ özdeşlik fonksiyon.

Burada bütün kümeleri ya da bir kümeden diğerine tanımlı bütün fonksiyonları almak gerekli değildir. (K3) koşulu kaldığı müddetçe seçilen bazı fonksiyonlarla da (örneğin, bire-bir örten fonksiyonlar) bir kategori yapılabilir. Buna ileride alt kategori diyeceğiz.

(2) $\mathbb{TOP}$: Topolojik uzaylar ve bunlar arasındaki sürekli fonksiyonların oluşturduğu kategoridir. Yani,
(a) $Ob(\mathbb{TOP}) \coloneqq \{(X,T) \mid (X,T) \text{ bir topolojik uzay}\}$,
(b) $Mor\left((X,T),(Y,T^*)\right) \coloneqq \left\{f \mid f : (X,T) \to (Y,T^*) \text{ bir sürekli fonksiyon}\right\}$,
(c) Bileşke dönüşümü sürekli fonksiyonların bileşkesi.

(3) Her X kümesine aşağıda açıklandığı gibi bir $\mathfrak{K}(X)=\mathbb{K}$ kategorisi gözüyle bakılabilir:

$Ob\mathbb{K} \coloneqq \{x \mid x \in X\}$, $Mor(x,y)=\begin{cases}\{x\}, & x = y \\ \emptyset, & \text{diğer}\end{cases}$, $id_X=x$, $x \circ x = x$.

$\mathfrak{K}(\emptyset)$ kategorisine boş kategori denir. $\mathfrak{K}(\{0\})$ kategorisine ise son (terminal) kategori denir.

(4) $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Bu kümeye aşağıda açıklandığı gibi bir $\mathbb{K}$ kategorisi gözüyle bakılabilir.

$Ob\mathbb{K} := \{x \mid x \in X\}$, her $x,y \in Ob\mathbb{K}$ için $Mor(x,y) := \begin{cases} \{(x,y)\}, & x \leq y \\ \emptyset, & \text{diğer} \end{cases}$

$\leq$ bağıntısının geçişme özelliği $\mathbb{K}$ nın her üç objesi için bir tek bileşke olduğunu, yansıma özelliği de idantik morfizmin varlığını garanti eder (Adamek ve diğ., 1990).

Tanım 1.4.3: $\mathbb{K}$ ve $\mathbb{L}$ iki kategori olmak üzere, aşağıdaki şartları sağlayan F ye $\mathbb{K}$ 'dan $\mathbb{L}$'ye bir (kovaryant) funktor denir ve $F:\mathbb{K} \to \mathbb{L}$ biçiminde yazılır.

(a) $\forall X \in Ob\mathbb{K}$ için $F(X) \in Ob\mathbb{L}$,

(b) $\forall f \in Mor_{\mathbb{K}}(X,Y)$ için $F(f) \in Mor_{\mathbb{L}}(F(x),F(Y))$

(c) $\forall f \in Mor_{\mathbb{K}}(X,Y)$, $g \in Mor_{\mathbb{K}}(Y,Z)$ için $F(g \circ f)=F(g) \circ F(f)$

(d) $\forall X \in Ob\,\mathbb{K}$ için $F(1_X)=1_{F(X)}$ (Adamek ve diğ., 2004).

Örnek 1.4.4: Z bir sabit küme olmak üzere, $F : \mathbb{SET} \to \mathbb{SET}$ dönüşümü olarak $F(X) := X \times Z$ ve $f : X \to Y$ için $F(f) : X \times Z \to Y \times Z$, $F(f) := f \times 1_Z$ olarak tanımlanırsa F bir kovaryant funktordur.

Funktorlar bir kategori hakkındaki verileri diğer bir kategoriye taşır.

2. BULANIK METRİKLE ÜRETİLEN BULANIK TOPOLOJİLER

Bu bölümün amacı, Kramosil-Michalek tarafından tanımlanan bulanık metrik uzaydan bulanıklaştırılmış topolojik uzay üretmek ve sonrasında sırasıyla George-Veeramani ve Kramosil-Michalek anlamlarındaki bulanık metrik uzaylarından Lowen anlamında bulanık topolojik uzaylar elde etmektir. Bu nedenle, ilk olarak Kramosil-Michalek (1975)'in verdiği daha sonra George-Veeramani (1994)'nin geliştirdiği bulanık metrik uzay kavramları, Chang (1968) ve Lowen (1976)'ın tanımlandığı bulanık topolojik uzay ve Ying (1991)'in verdiği bulanıklaştırılmış topolojik uzay kavramları özetlenecektir. Sonrasında bulanık metrik uzaydan klasik topolojinin üretilmesi ve GV-bulanık metrik uzaydan bulanıklaştırılmış topolojinin elde edilme yöntemi (Minana ve Shostak, 2016) incelenecektir.

2.1. Bulanık Metrik Uzaylar

Bu kısımda Kramosil-Michalek (1975)'in ve George-Veeramani (1994)'nin tanımladığı bulanık metrik uzay kavramları ve özellikleri incelenmiştir.

Tanım 2.1.1: Aşağıdaki özellikleri sağlayan $* : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ ikili işlemine bir sürekli üçgensel (triangular) norm (kısaca, t-norm) adı verilir.

(1) Her $a,b \in [0,1]$ için $a * b = b * a$,
(2) Her $a,b,c \in [0,1]$ için $(a * b) * c = a * (b * c)$,
(3) Her $a \in [0,1]$ için $a * 1 = a$,
(4) Her $a,b,c,d \in [0,1]$ için $a \leq c$ ve $b \leq d$ iken $a * b \leq c * d$,
(5) $*$ işlemi sürekli (Schweizer ve Sklar, 1960).

Tanım 2.1.2: $*$ bir t-norm olsun. Her $a \in [0,1]$ için,

$a * a = a$

şartı sağlanırsa $*$ t-normuna eş güçlü (idempotent) t-norm denir (Schweizer ve Sklar, 1960).

Örnek 2.1.3: Her $a,b \in [0,1]$ için $a * b = a.b$ ve $a \wedge b = \min\{a,b\}$ şeklinde tanımlanan $*$ ve $\wedge$ ikili işlemleri birer t-normdur. Ayrıca $\wedge$ bir eş güçlü t-normdur. (George ve Veeramani, 1994)

Uyarı 2.1.4: $x,y \in [0,1]$ ve $*$ bir (sürekli) t-norm olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $x.y \leq x \wedge y$,

(2) $x * y \leq x \wedge y$ (Mardones-Pérez ve Prada Vicente, 2012).

Uyarı 2.1.5: $*$ bir sürekli t-norm olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $\forall r_1, r_2 \in (0,1)$ için $r_1 > r_2$ ise $r_1 * r_3 > r_2$ olacak şekilde en az bir $r_3 \in (0,1)$ vardır.

(2) Her $r_1 \in (0,1)$ için $r_2 * r_2 > r_1$ olacak şekilde en az bir $r_2 \in (0,1)$ vardır (George ve Veeramani, 1994).

Tanım 2.1.6: X klasik bir küme, $*$ bir sürekli t-norm ve $M : X \times X \times [0,\infty) \rightarrow [0,1]$ aşağıdaki şartları sağlayan bir dönüşüm olsun.

(KM-1) $\forall x,y \in X$ için $M(x,y,0)=0$,
(KM-2) $\forall x,y \in X$ ve $\forall t > 0$ için $M(x,y,t) = 1 \Leftrightarrow x = y$,
(KM-3) $\forall x,y \in X$ ve $\forall t > 0$ için $M(x,y,t) = M(y,x,t)$,
(KM-4) $\forall x,y,z \in X$ ve $\forall t,s > 0$ için $M(x,y,t) * M(y,z,s) \leq M(x,z,t+s)$,
(KM-5) $\forall x,y \in X$ için $M(x,y,\cdot) : [0,\infty) \rightarrow [0,1]$ sol süreklidir.

$(X,M,*)$ üçlüsüne bir Kramosil-Michalek anlamında bulanık metrik uzay (KM-bulanık metrik uzay), $(M,*)$ ikilisine de X üzerinde bir KM-bulanık metrik denir. (Kramosil ve Michalek, 1975)

1994'de George ve Veeramani yukarıdaki tanımla bulanık metrik uzayın genel olarak Hausdorff olmadığını göstermiş ve bu özelliği elde etmek için bulanık metrik uzay tanımını bir sonraki tanımdaki gibi düzenlemiştir.

Tanım 2.1.7: X klasik bir küme, $*$ bir sürekli t-norm ve $M : X \times X \times (0,\infty) \rightarrow (0,1]$ aşağıdaki şartları sağlayan bir dönüşüm olsun.

(FM-1) $\forall$ x, y $\in$ X ve $\forall$ t > 0 için M(x,y,t) > 0,
(FM-2) $\forall$ x, y $\in$ X ve $\forall$ t > 0 için M(x, y, t)= 1 $\Leftrightarrow$ x = y,
(FM-3) $\forall$ x, y $\in$ X ve $\forall$ t > 0 için M (x, y, t)= M(y, x, t),
(FM-4) $\forall$ x, y, z $\in$ X ve $\forall$ t, s > 0 için M(x, y, t) $*$ M(y, z, s) $\leq$ M(x, z, t + s),
(FM-5) $\forall$ x, y $\in$X için M (x, y, $\cdot$) : $(0,\infty) \rightarrow [0,1]$ süreklidir.

$(X, M, *)$ üçlüsüne bir George-Veeramani anlamında bulanık metrik uzay (GV-bulanık metrik uzay), $(M, *)$ ikilisine de X üzerinde bir GV-bulanık metrik denir (George ve Veeramani, 1994).

M(x,y,t) değeri x ile y'nin t parametresine göre birbirine yakın olma derecesidir (George ve Veeramani, 1994). Buna göre, yakınlık derecesinin 0 olması noktaların birbirine çok uzak (yani noktalar aralarındaki uzaklığın sonsuz) olması anlamına geleceğinden (FM1) şartında M(x,y,t) > 0 olarak kabul edilir. (FM2) şartı, her x $\in$ X ve t > 0 içinM(x, x, t) = 1 ve her x $\neq$ y ve her t > 0 için M(x,y,t) < 1 olduğunu belirtir. Son olarak (FM5) şartında, sabit x ve y için t $\rightarrow$ M(x,y,t) sürekli bir fonksiyon olduğu belirtilmiştir.

Tanım 2.1.8: $(X, M, *)$ bulanık metrik uzayı aşağıdaki şartı sağlıyorsa bu bulanık metrik uzaya güçlü (strong) bulanık metrik uzay denir.

(SF)$\forall$ x, y, z $\in$ X ve $\forall$ t > 0 için M(x,y,t) $*$ M(y,z,t) $\leq$ M(x,z,t)(Istratescu, 1974).

Önerme 2.1.9: $*$ bir t-norm, $(X,M, *)$ bir bulanık metrik uzay ve $\diamond$ t-normu her a, b $\in (0,1)$ için a $*$ b $\geq$ a $\diamond$ b eşitsizliğini sağlasın. Bu taktirde $(X, M, \diamond)$ bir bulanık metrik uzaydır (Mardones-Pérez ve Prada Vicente, 2012).

Önerme 2.1.9 ve Uyarı 2.1.4 (2) dikkate alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1.10: $(X,M,\wedge)$ bir bulanık metrik uzay ise her $*$ t-normu için $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzaydır (Gregori ve diğ.,2010).

Uyarı 2.1.11: $(X, M, *)$ bulanık metrik uzayında her $x, y \in X$, $t > 0$ ve $0 < r < 1$ için $M(x,y,t) > 1 - r$ ise $M(x,y,t_0) > 1 - r$ olacak şekilde en az bir $t_0 \in (0, t)$ vardır (George ve Veeramani, 1994).

Teorem 2.1.12: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay olsun. Her $x, y \in X$ için $M(x, y, \cdot) : (0,\infty) \to [0,1]$ azalmayandır (Grabiec, 1988).

Örnek 2.1.13: $X=\mathbb{R}$ ve her $a,b \in [0,1]$ için $a * b=ab$ şeklinde tanımlanan $*$ t-normu verilsin. Her $x, y \in X$ ve $t \in (0,\infty)$ için $M : X \times X \times (0, \infty) \to (0,1]$ dönüşümü,

$$M(x,y,t)=\frac{1}{e^{\frac{|x-y|}{t}}}$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde $(X, M, *)$ bir GV-bulanık metrik uzaydır (George ve Veeramani, 1994).

Örnek 2.1.14: (X,d) klasik metrik uzayı ve her $a, b \in [0,1]$ için $a * b=ab$ şeklinde tanımlanan $*$ t-normu verilsin. Her $k,m,n \in \mathbb{R}^+$ için $M : X \times X \times \mathbb{R}^+ \to (0,1]$ dönüşümü,

$$M(x,y,t)=\frac{kt^n}{kt^n + md(x, y)}$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde $(X, M, *)$ bir GV-bulanık metrik uzaydır (George ve Veeramani, 1994).

Uyarı 2.1.15: Örnek 2.1.14'te her metrik uzaydan bir bulanık metrik uzay elde edilebileceği gösterilmektedir. Özel olarak $k = m = n = 1$ seçilirse,

$$M_d(x,y,t)=\frac{t}{t + d(x, y)}$$

şeklinde tanımlanan M_d bulanık metriğine d metriği tarafından oluşturulan standart bulanık metrik uzay denir. $(M_d,\cdot)$ ikilisine de d'nin standart bulanık metriği denir (George ve Veeramani, 1994).

Örnek 2.1.16: $X = \mathbb{N}$ ve her $a,b \in [0,1]$ için $a * b=ab$ şeklinde tanımlanan $*$ t-normu verilsin. Her $x, y \in \mathbb{N}$ için $M : X \times X \times (0,\infty) \to (0,1]$ dönüşümü,

$$M(x,y,t) = \begin{cases} \frac{x}{y} & , x \leq y \\ \frac{y}{x} & , y \leq x \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde $(X,M, *)$ bir GV-bulanık metrik uzaydır (George ve Veeramani, 1994).

Uyarı 2.1.17: Örnek 2.1.16'de verilen $(X,M, *)$ bulanık metrik uzayı göz önüne alındığında $M(x,y,t)=\frac{t}{t + d(x,y)}$ olacak şekilde X üzerinde hiçbir d metriği yoktur (George ve Veeramani, 1994).

Uyarı 2.1.18: Örnek 2.1.16'da olduğu gibi t 'ye bağlı olmayan $(M, *)$ bulanık metriğine durgun (stationary) bulanık metrik adı verilir (Gregori ve Romaguera, 2004).

Başka bir deyişle, her $x,y \in X$ için $M(x,y,\cdot) : (0,\infty) \to (0,1]$ sabit fonksiyon ise $(M, *)$'a durgun (stationary) bulanık metrik denir.

Tanım 2.1.19: $(X,M_1, *_{M_1})$ ve $(Y,M_2, *_{M_2})$ iki bulanık metrik uzay, $f : (X,M_1, *_{M_1}) \to (Y,M_2, *_{M_2})$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Her $\varepsilon \in (0,1)$ ve her $t > 0$ için $M_1(x,x_0,s) > 1 - \delta$ iken $M_2(f(x),f(x_0),t) > 1 - \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\delta \in (0,1)$ ve $s > 0$ varsa f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir (George ve Veeramani, 1995).

2.2. Bulanık ve Bulanıklaştırılmış Topolojik Uzaylar

Bu kısımda, Chang (1968) ve Lowen (1976) tarafından verilen bulanık topolojik uzaylar, Ying (1991) tarafından verilen bulanıklaştırılmış topolojik uzaylar ve özellikleri verilmiştir. Ayrıca bu uzaylar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Tanım 2.2.1: X boştan farklı klasik bir küme ve $\tau \subset I^X$ olsun. Eğer τ bulanık alt kümelerinin ailesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa τ'ya X üzerinde bir Chang anlamında bulanık topoloji (Chang bulanık topoloji) denir.

(C1) $\underline{0}, \underline{1} \in \tau$

(C2) $\lambda_1, \lambda_2 \in \tau$ ise $\lambda_1 \wedge \lambda_2 \in \tau$

(C3) Her $i \in J$ için $\lambda_i \in \tau$ ise $\bigvee_{i\in J} \lambda_i \in \tau$.

(X,τ) ikilisine bir Chang bulanık topolojik uzay adı verilir (Chang, 1968).

Örnek 2.2.2: (X,T) klasik bir topolojik uzay olsun. $\tau = \chi_T := \{\chi_G \mid G \in T\}$ ailesi X üzerinde bir Chang bulanık topolojik uzayıdır (Chang, 1968).

Örnek 2.2.2'den de görüleceği gibi klasik anlamdaki her topoloji bir Chang bulanık topolojik uzayıdır.

Tanım 2.2.3: (X,τ_1) ve (Y,τ_2) iki Chang bulanık topolojik uzay ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Her $\mu \in \tau_2$ için $f^{-1}(\mu) \in \tau_1$ sağlanıyorsa f fonksiyonuna süreklidir denir (Chang, 1968).

Uyarı 2.2.4: Klasik topolojik uzaylar arasında sabit her fonksiyon sürekli olmasına rağmen Chang bulanık topolojik uzaylar arasında sabit fonksiyonların sürekli olması gerekmez (Lowen 1976).

Bu önemli özelliği bulanık topolojik uzaylarda elde etmek ve sabit fonksiyonların önemine dikkat etmek için Lowen, Chang'in bulanık topoloji tanımının birinci özelliğini değiştirerek bulanık topolojiyi aşağıdaki gibi tanımlamıştır. Fakat bu tanımda da bulanık topolojik uzayların klasik topolojik uzayların bir genelleştirmesi olduğu gerçeği kaybedilmiştir.

Tanım 2.2.5: X boştan farklı klasik bir küme ve $\tau \subset I^X$ olsun. Eğer τ bulanık alt kümelerinin ailesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa τ'ya X üzerinde bir Lowen anlamında bulanık topoloji (Lowen bulanık topoloji) denir.

(L1) Her $\alpha \in I$ için $\underline{\alpha} \in \tau$,

(L2) $\lambda_1, \lambda_2 \in \tau$ ise $\lambda_1 \wedge \lambda_2 \in \tau$,

(L3) Her $i \in J$ için $\lambda_i \in \tau$ ise $\bigvee_{i\in J} \lambda_i \in \tau$.

(X, τ) ikilisine de bir Lowen bulanık topolojik uzay adı verilir (Lowen, 1976).

Her Lowen bulanık topolojik uzayı bir Chang bulanık topolojik uzayıdır.

Tanım 2.2.6: (X, τ) bir Lowen bulanık topolojisi ve $B \subset \tau$ olsun. Her $\lambda \in \tau$ için $\lambda = \bigvee_{i \in J} \mu_i$ olacak şekilde bir $\{\mu_i \mid i \in J\} \subset \mathcal{B}$ alt ailesi varsa $\mathcal{B}$'ya τ Lowen bulanık topolojisi için bir tabandır denir (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997).

Tanım 2.2.7: (X, τ)bir Lowen bulanık topolojik uzay ve $\mathcal{S} \subset \tau$ olsun. Elemanları $\mathcal{S}$'nın elemanlarının sonlu infimumlarından oluşan aile τ için bir taban oluyorsa $\mathcal{S}$'ya τ Lowen bulanık topolojisi için bir alt tabandır denir (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997).

Diğer bir deyişle $\mathcal{B} = \{\bigwedge_{S \in K} S \mid K \subset \mathcal{S},$ K sonlu$\}$ ailesi τ için bir tabandır (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997).

Tanım 2.2.8: (X,τ_1) ve (Y,τ_2) iki Lowen bulanık topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Her $\mu \in \tau_2$ için $f^{-1}(\mu) \in \tau_1$ sağlanıyorsa f fonksiyonuna süreklidir denir (Lowen, 1976).

Objeleri klasik topolojik uzaylar, morfizimleri sürekli dönüşümler olan kategori $\mathbb{TOP}$ ve objeleri Lowen bulanık topolojik uzaylar, morfizimleri sürekli dönüşümler olan kategori $\mathbb{SFUZTOP}$ olsun. Lowen (1976), bu iki kategori arasındaki ilişkiyi verebilmek için Lowen funktorları olarak da bilinen w ve ı funktorlarını aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 2.2.9: (X,T) klasik bir topolojik uzay ve (X,τ) Lowen bulanık topolojik uzay olsun. w ve ı funktorları sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

$w(T) = \{\lambda \mid \lambda : (X,T) \to I$ alttan yarı sürekli $\}$,

$ı(\tau) = \{\lambda^{-1}(\varepsilon,1) \mid \varepsilon \in [0,1), \lambda \in \tau\}$ (Lowen, 1976).

Lowen w ve ı funktorlarının sağladığı özellikleri bir sonraki önermede vermiştir.

Önerme 2.2.10: (X,T) klasik bir topolojik uzay ve (X,τ) Lowen bulanık topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $w(T) = \{\lambda \mid \lambda : (X,T) \to I$ alttan yarı sürekli $\}$, X üzerinde bir Lowen bulanık topolojidir.

(2) $\imath(\tau) = \{\lambda^{-1}(\varepsilon,1) \mid \varepsilon \in [0,1), \lambda \in \tau\}$, X üzerinde bir klasik topolojidir (Lowen, 1976).

Önerme 2.2.11: (X,τ) Lowen bulanık topolojik uzay ve $\alpha \in [0,1)$ olsun. $\lambda^{\alpha} = \{x \in X \mid \lambda(x) > \alpha\}$ şeklindeki X in tüm alt kümelerinin $\imath_{\alpha}(\tau)=\{\lambda^{\alpha} \mid \lambda \in \tau\}$ ailesi X üzerinde bir klasik topolojidir. $\imath_{\alpha}(\tau)$ ailesi τ Lowen bulanık topolojisinin α seviye topolojisi olarak adlandırılır.

Dikkat edilirse $\cup\{\imath_{\alpha}(\tau) \mid \alpha \in [0,1)\}$ ailesinin $\imath(\tau)$ topolojisi için bir alt taban olduğu kolaylıkla görülür (Lowen, 1978).

X kümesi üzerindeki klasik topolojilerin $\{T_{\alpha} \mid \alpha \in [0,1)\}$ ailesi olsun. Aşağıdaki önermede Wuyts $\imath$ funktoru ve seviye topolojileri yardımıyla, her $\alpha \in [0,1)$ için $\imath_{\alpha}(\tau) = T_{\alpha}$ şartını sağlayan X kümesi üzerinde en az bir τ Lowen bulanık topolojisinin mevcut olduğunu ispatlamıştır.

Önerme 2.2.12: $\{T_{\alpha} \mid \alpha \in [0,1)\}$, X kümesi üzerindeki klasik topolojilerin bir ailesi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(1) Her $\alpha \in [0,1)$ için $\imath_{\alpha}(\tau) = T_{\alpha}$ olacak şekilde X üzerinde en az bir τ Lowen bulanık topolojisi vardır.

(2) LT-özelliği: Her $\alpha \in [0,1)$ ve her $G \in T_{\alpha}$ için $G = \cup_{\beta \in (\alpha,1)} G_{\beta}$ olacak şekilde en az bir $(G_{\beta})_{\beta \in (\alpha,1)} \in \prod_{\beta \in (\alpha,1)} T_{\beta}$ azalan ailesi vardır (Wuyts, 1996).

Teorem 2.2.13: $\mathcal{F} = \{T_{\alpha} \mid \alpha \in [0,1)\}$, X kümesi üzerindeki klasik topolojilerin ailesi olsun. Bu durumda X üzerinde seviye topolojileri $\mathcal{F}$ olan bir τ Lowen bulanık topolojisi vardır.

Yani, her $\alpha \in [0,1)$ için $\imath_{\alpha}(\tau) = T_{\alpha}$ olacak şekilde bir (X,τ) Lowen bulanık topolojik uzayı vardır (Wuyts, 1984).

Teorem 2.2.14: $\mathcal{F}=\{T_\alpha \mid \alpha \in [0,1)\}$, X kümesi üzerindeki klasik topolojilerin ailesi ve (X,τ) bir Lowen bulanık topolojik uzay olsun. Her $\alpha \in [0,1)$ için $\imath_\alpha(\tau) = T_\alpha$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $\mathcal{F}$ nin LT-özelliğini sağlamasıdır. Ayrıca $\tau(F)=\{\lambda \mid$ her $\alpha \in [0,1)$ için $\lambda^\alpha \in T_\alpha\}$ Lowen bulanık topolojisi $\imath_\alpha(\tau)=T_\alpha$ şartını sağlayan X üzerindeki tüm Lowen bulanık topolojilerin en incesidir (Wuyts, 1984).

Önerme 2.2.15: (X,τ) bir Lowen bulanık topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir.

(1) τ Lowen bulanık topolojisinin tüm seviye topolojileri eşittir ve τ en büyüğüdür.

(2) (X,τ) topolojik olarak oluşturulmuştur; yani, $\tau = w(\imath(\tau))$ dır (Wuyts, 1996).

Tanım 2.2.16: (X,τ) Lowen bulanık topolojik uzay ve $\delta \subset \tau$ olsun. $\bigvee_{\mu\in\delta} \mu \geq c$ şartını sağlayan her $c \in [0,1)$ ve her $\varepsilon \in [0,c)$ için $\bigvee_{\mu \in \delta_0} \mu \geq c - \varepsilon$ olacak şekilde $\delta_0 \subset \delta$ sonlu alt ailesi varsa (X,τ)'ya bulanık kompakttır denir. (Lowen, 1978)

Teorem 2.2.17: (X,T) klasik topolojik uzayının kompakt olması için gerek ve yeter şart $(X,w(T))$ Lowen bulanık topolojisinin bulanık kompakt olmasıdır (Lowen, 1978).

Tanım 2.2.18: (X,τ) Lowen bulanık topolojik uzay olsun. $(X,\imath(\tau))$ klasik topolojik uzayı kompakt ise (X,τ)'ya ultra bulanık kompakt denir (Lowen, 1978).

Tanım 2.2.19: (X,τ) Lowen bulanık topolojik uzay, $\Lambda=\{\lambda_i \mid i \in J\}$ Lowen bulanık topolojik uzayın bulanık alt kümelerinin bir ailesi ve $\alpha \in [0,1)$ olsun. Her $x \in X$ için $\lambda_{i_0}(x) > \alpha$ olacak şekilde en az bir $\lambda_{i_0} \in \Lambda$ varsa Λ ailesine X'in α-izi (α-shading) denir (Gartner ve diğ., 1978).

Tanım 2.2.20: (X,τ) Lowen bulanık topolojik uzay ve $\alpha \in [0,1)$ olsun. X'in her α-izinin bir açık α-alt izi varsa (X,τ)'ya α-kompakt denir (Gartner ve diğ., 1978).

Tanım 2.2.21: (X,τ) Lowen bulanık topolojik uzay ve $\alpha \in [0,1)$ olsun. Her $\alpha \in [0,1)$ için (X,τ) α-kompakt ise (X,τ)'ya güçlü (strong) bulanık kompakt denir (Lowen, 1978).

Teorem 2.2.22: (X, τ) Lowen bulanık topolojik uzay ve $\alpha \in [0,1)$ olsun. (X,τ) Lowen bulanık topolojik uzayının α-kompakt olması için gerek ve yeter şart $\left(X, \imath_{\alpha}(\tau)\right)$ klasik topolojik uzayının kompakt olmasıdır (Lowen, 1978).

Chang bulanık topoloji ve Lowen bulanık topoloji tanımlarında kümeler bulanık iken topoloji aksiyomları klasik anlamdadır. 1980'de Höhle sonrasında 1991'de Ying topoloji aksiyomlarını bulanıklaştırarak klasik kümelerin açıklığını derecelendirmek için bulanıklaştırılmış topoloji kavramını aşağıdaki gibi vermiştir.

Tanım 2.2.23: X klasik bir küme ve $\tau : 2^X \rightarrow [0,1]$ aşağıdaki şartları sağlayan bir dönüşüm olsun.

BT1) $\tau(\emptyset) = \tau(X) = 1$
BT2) Her $A,B \in 2^X$ için $\tau(A \cap B) \geq \tau(A) \wedge \tau(B)$
BT3) Her $\{A_i \mid i \in J\} \subseteq 2^X$ için $\tau(\cup_i A_i) \geq \wedge_i \tau(A_i)$.

Bu durumda τ'ya X üzerinde bir bulanıklaştırılmış topoloji ve (X,τ) ikilisine de bulanıklaştırılmış topolojik uzay denir. (Ying, 1991)

$A \subseteq X$ olmak üzere $\tau(A)$ değerine de A klasik kümesinin açıklık derecesi denir.

Herhangi bir klasik topolojik uzay aynı zamanda bir bulanıklaştırılmış topoloji olarak düşünülebilir.

(X,T) bir klasik topolojik uzay olsun. Bu durumda,

$$\tau : 2^X \rightarrow \{0,1\} \subset [0,1] \quad ,$$
$$\tau(A) := \begin{cases} 1, & A \in T \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (X,τ) bir bulanıklaştırılmış topolojik uzaydır.

Tanım 2.2.24: (X,τ_1), (Y,τ_2) iki bulanıklaştırılmış topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. Her $B \subseteq Y$ için $\tau_1\left(f^{-1}(B)\right) \geq \tau_2(B)$ ise f'ye bulanık süreklidir denir (Ying, 1991).

Önerme 2.2.25: (X,τ) bir bulanıklaştırılmış topolojik uzay ve $\alpha \in [0,1]$ olsun.

$$\tau_\alpha = \{A \in 2^X \mid \tau(A) \geq \alpha\}$$

kümesi X üzerinde bir klasik topolojidir (Shostak, 1989). Bu topolojiye τ bulanıklaştırılmış topolojinin α-seviye topolojisi denir.

Uyarı 2.2.26: (X,τ) bir bulanıklaştırılmış topolojik uzay ve $\alpha,\beta \in [0,1]$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $\alpha \leq \beta$ iken $\tau_\beta \subseteq \tau_\alpha$ dır. Böylece $\{\tau_\alpha \mid \alpha \in [0,1]\}$ ailesi bulanıklaştırılmış topolojinin α-seviye topolojilerinin azalan bir ailesidir.

(2) $\{\tau_\alpha \mid \alpha \in [0,1]\}$ alttan yarı süreklidir, yani $\tau_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} \tau_\beta$ dir (burada $\tau_0 = 2^X$ olarak tanımlanır) (Minana ve Shostak, 2016).

Aşağıdaki önermede Minana ve Shostak (Minana ve Shostak, 2016) klasik topolojilerin azalan ailesinden bir bulanıklaştırılmış topoloji elde etmişlerdir.

Önerme 2.2.27: $K \subseteq [0,1]$ yoğun bir küme ve $\{T_\alpha \mid \alpha \in K\}$, X kümesi üzerindeki klasik topolojilerin azalan bir ailesi olsun. Bu durumda,

$$\tau(A) := \sup \{\alpha \in K \mid A \in T_\alpha\} \quad (\sup \emptyset = 0)$$

şeklinde tanımlanan $\tau : 2^X \to [0,1]$ dönüşümü bir bulanıklaştırılmış topolojidir (Minana ve Shostak, 2016).

Tanım 2.2.28: (X,τ_1) , (Y,τ_2) iki bulanıklaştırılmış topolojik uzay, $f : X \to Y$ bir dönüşüm ve $\alpha \in [0,1]$ olsun. $f : (X,(\tau_1)_\alpha) \to (Y,(\tau_2)_\alpha)$ bulanık sürekli ise f'ye α-sürekli (α-seviye sürekli) denir (Shostak, 1989).

Önerme 2.2.29: (X,τ_1) , (Y,τ_2) iki bulanıklaştırılmış topolojik uzay ve $K \subseteq [0,1]$ yoğun bir küme olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) $f : (X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ bulanık süreklidir.

(2) Her $\alpha \in K$ için $f : (X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ fonksiyonu α-süreklidir (Shostak, 1989).

Uyarı 2.2.30: $K \subseteq [0,1]$ yoğun bir küme, $\{T_\alpha \mid \alpha \in K\}$ klasik topolojilerin ailesi azalan ve alttan yarı sürekli yani her $\alpha \in K$ için $T_\alpha = \bigcap\{T_\lambda \mid \lambda \in K, \lambda < \alpha\}$ olsun. τ bulanıklaştırılmış topolojisi Önerme 2.2.27'deki gibi $\{T_\alpha \mid \alpha \in K\}$ ailesinden elde edilmiş bir bulanıklaştırılmış topoloji ve $\tau_\alpha = \{A \in L^X \mid \tau(A) \geq \alpha\}$ kümesi τ bulanıklaştırılmış topolojisinin α-seviyesi ise her $\alpha \in K$ için $\tau_\alpha = T_\alpha$ dir (Minana ve Shostak, 2016).

2.3. Bulanık Metrikle Üretilen Klasik Topoloji ve Özellikleri

Bu kısımda George ve Veeramani (1994) anlamındaki bulanık metrikten üretilen klasik topolojik uzaylar ve özellikleri tartışılmıştır.

Tanım 2.3.1: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay, $x \in X$, $r \in (0,1)$ ve $t > 0$ olsun. Bu taktirde,

$B(x,r,t) = \{y \in X \mid M(x,y,t) > 1 - r\}$

kümesine x merkezli, r yarıçaplı açık yuvar denir (George ve Veeramani, 1994).

Uyarı 2.3.2: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay, $x \in X$, $r_1, r_2 \in (0,1)$ ve $t_1, t_2 > 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $t_1 \leq t_2$ ise $B(x,r,t_1) \subseteq B(x,r,t_2)$,

(2) $r_1 \leq r_2$ ise $B(x,r_1,t) \subseteq B(x,r_2,t)$ dir (George ve Veeramani, 1994).

Tanım 2.3.3: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Her $x \in A$ için $B(x,r,t) \subset A$ olacak şekilde en az bir $r \in (0,1)$ ve $t > 0$ varsa A'ya X'de bir açık küme denir (George ve Veeramani, 1994).

Teorem 2.3.4: $(X, M, *)$ bulanık metrik uzayında her açık yuvar bir açık kümedir (George, Veeramani, 1994).

Teorem 2.3.5: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay olsun.

$T_M = \{A \subseteq X \mid$ her $x \in A$ için $B(x,r,t) \subset A$ ol. şek. $t > 0$, $r \in (0,1)$ vardır $\}$

şeklinde tanımlanan T_M ailesi X üzerinde bir klasik topolojidir (George ve Veeramani, 1994).

Teorem 2.3.6: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay olsun.

$\{B(x,r,t) \mid x \in X, r \in (0,1), t > 0\}$

açık yuvarların ailesi bu bulanık metrik uzaydan üretilen T_M topolojisi için bir tabandır (George ve Veeramani, 1994).

Teorem 2.3.7: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay, (X,T_M) bu bulanık metrik tarafından üretilen bir klasik topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. Bu durumda,

$$E(x)=\left\{B\left(x,\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

ailesi x'in yerel (komşuluk) tabanıdır (George, Veeramani, 1994).

Sonuç 2.3.8: Teorem 2.3.7'ye göre $(X, M, *)$ bulanık metrik uzay tarafından üretilen (X,T_M) klasik topolojik uzayı birinci sayılabilir uzaydır (George ve Veeramani, 1994).

Teorem 2.3.9: (X,d) bir metrik uzay ve $(X,M_d,\cdot)$ bir standart bulanık metrik uzay olsun. T_d, d metriği tarafından üretilen bir klasik topoloji ve T_{M_d}, M_d bulanık metriği tarafından üretilen bir klasik topoloji olmak üzere $T_d=T_{M_d}$ dir (George ve Veeramani, 1997).

Teorem 2.3.10: $(X, M, *)$ bulanık metrik uzayı bir Hausdorff uzaydır (George ve Veeramani, 1994).

Tanım 2.3.11: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay, (x_n) X'de bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Her $\varepsilon \in (0,1)$ için $n \geq n_0$ iken $M(x_n,x_0,t) > 1 - \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir. $x_n \to x_0$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ile gösterilir (George ve Veeramani, 1994).

$x_n \to x_0 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon \in (0,1)$ için $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_0$ için $M(x_n,x_0,t) > 1 - \varepsilon$

$x_n \to x_0 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon \in (0,1)$ için $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_0$ için $x_n \in B(x_0,\varepsilon,t)$

$x_n \to x_0 \Leftrightarrow \forall t>0$ için $\lim_{n\to\infty} M(x_n,x_0,t)=1$

Teorem 2.3.12: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay, (X,T_M) bu metrikten üretilen klasik topolojik uzay ve (x_n) de X'te bir dizi olsun. (X,T_M) de $x_n \to x$ olması için gerek ve yeter şart $(X, M, *)$ de $\lim_{n\to\infty} M(x_n,x_0,t)=1$ olmasıdır (George ve Veeramani, 1994).

Bulanık metrik uzaylar arasındaki fonksiyonun sürekli olması ile bu bulanık metriklerden üretilen klasik topolojiler arasındaki fonksiyonun sürekli olması arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.3.13: $(X, M_1, *_{M_1})$ ve $(Y,M_2, *_{M_2})$ iki bulanık metrik uzay ve T_{M_1}, T_{M_2} sırasıyla bu bulanık metriklerden üretilen klasik topolojiler olsun. $f : (X, M_1, *_{M_1}) \to (Y, M_2, *_{M_2})$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart $f : (X,T_{M_1}) \to (Y,T_{M_2})$ fonksiyonunun sürekli olmasıdır (George ve Veeramani, 1994).

Teorem 2.3.14: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay olsun. M dönüşümü $X \times X \times (0,\infty)$ üzerinde sürekli bir fonksiyondur (Lopez ve Romaguera, 2004).

Tanım 2.3.15: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay ve (x_n) X'te bir dizi olsun. Her $p > 0$ ve her $t > 0$ için $\lim_{n\to\infty} M(x_{n+p}, x_n, t) = 1$ ise (x_n)'e Cauchy dizisi denir (Grabiec, 1988)

Tanım 2.3.16: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay olsun. X'teki her Cauchy dizisi yakınsak ise $(X, M, *)'$a tam bulanık metrik uzay denir (George ve Veeramani, 1994).

Uyarı 2.3.17: Tanım 2.1.26'ya göre $(X, M_d, *)$ standart bulanık metrik uzayında $\mathbb{R}$ tam değildir (George ve Veeramani, 1994). Bu aşağıdaki örnekle gösterilmiştir.

Örnek 2.3.18: $\mathbb{R}$ üzerindeki d klasik metrik uzayı $d(x,y) = |x-y|$ ve $*$ sürekli t-normu $a * b = ab$ olmak üzere $(\mathbb{R}, M_d, *)$ standart bulanık metrik uzay $M_d(x,y,t) = \frac{t}{t + d(x,y)}$ olsun. Bu uzayda, $S_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ şeklinde bir (S_n) dizisini ele alalım. Her $p>0$ için,

$$M_d(S_{n+p}, S_n, t) = \frac{t}{t + |S_{n+p} - S_n|} = \frac{t}{t + \left(\frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+p}\right)}$$

dir. Dolayısıyla $\lim_{n \to \infty} M_d(S_{n+p}, S_n, t) = 1$ olur. Bu durumda (S_n) dizisi $(\mathbb{R}, M_d, *)$ bulanık metrik uzayında bir Cauchy dizisidir.

Şimdi de $\mathbb{R}$'nin bulanık metrik uzaylarda tam olduğunu varsayalım. Bu durumda (S_n) Cauchy dizisi en az bir $x \in \mathbb{R}$ noktasına yakınsaktır yani $\lim_{n \to \infty} M_d(S_n, x, t) = 1$ dir. Buradan $\lim_{n \to \infty} \frac{t}{t + |S_n - x|} = 1$ dolayısıyla $\lim_{n \to \infty} |S_n - x| = 0$ elde edilir. Böylece $(\mathbb{R},d)$ metrik uzayında (S_n) dizisi x'e yakınsak olmalıdır. Ancak $\mathbb{R}'$de (S_n) dizisi yakınsak değildir. Bu ise bir çelişkidir. Sonuç olarak $\mathbb{R}$ bulanık metrik uzaylarında tam değildir.

Önerme 2.3.19: (X, d) bir klasik metrik uzay ve $(X, M_d, *)$ standart bulanık metrik uzay olsun. (X, d) metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter şart $(X, M_d, *)$ bulanık metrik uzayının tam olmasıdır (George ve Veeramani, 1997).

$\mathbb{R}$ 'nin tam bulanık metrik uzay olması için, George ve Veeramani 1997'deki çalışmasında Cauchy dizisi tanımını aşağıdaki gibi değiştirdiler.

Tanım 2.3.20: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay ve (x_n), X'te bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve her $t > 0$ için $m, n \geq n_0$ iken $M(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir (George ve Veeramani,1997).

Sonuç 2.3.21: Tanım 2.3.20'de verilen Cauchy dizisi tanımına göre $\mathbb{R}$ tam bulanık metrik uzaydır (George, Veeramani,1997).

D.Mihet 2007 de bulanık metrik uzaylarında sabit nokta teoremlerini elde etmek amacı ile bulanık metrik uzaylardaki yakınsaklık tanımından daha zayıf bir yapı olan p-yakınsaklık (noktasal yakınsaklık) kavramını aşağıdaki gibi vermiştir.

Tanım 2.3.22: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay, (x_n) X'te bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. $\lim_{n \to \infty} M(x_n, x_0, t_0) = 1$ olacak şekilde en az bir $t_0 > 0$ varsa x_n dizisine x_0 noktasında p-yakınsaktır denir (Mihet, 2007).

(x_n) dizisi x_0'a p-yakınsaktır $:\Leftrightarrow \exists\, t_0 > 0 : \lim_{n \to \infty} M(x_n, x_0, t_0) = 1$

Tanımlardan kolaylıkla görüleceği gibi yakınsak dizi p-yakınsaktır fakat p-yakınsak her dizinin yakınsak olması gerekmez. Bu durum aşağıdaki örnekle gösterilmiştir.

Örnek 2.3.23: Her $a,b \in [0,1]$ için $a * b = \min\{a,b\}$ şeklinde tanımlanan $*$ t-normu verilsin. Her $x,y \in \mathbb{R}^+$ ve $t > 0$ için $M : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times (0,\infty) \to [0,1]$ dönüşümü,

$$M(x,y,t) = \begin{cases} 1, & x = y \\ \min\{x, y\}, & x \neq y \\ \min\{x, t\}, & x = 1 \text{ veya } y = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $(x_n) \subset (0,1)$'de kesin artan ve $\mathbb{R}$ nin alışılmış topolojisine göre 1'e yakınsak bir dizi ise (x_n), $(\mathbb{R}^+, M, *)$ bulanık metriğinde p-yakınsaktır fakat yakınsak değildir (Gregori ve diğerleri, 2009).

Tanım 2.3.24: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay olsun. Her $x \in X$ ve her $t > 0$ için $\{B(x,r,t) \mid r \in (0,1)\}$ ailesi x noktasında bir komşuluk tabanı oluyorsa $(X,M,*)$'a esas (principal) bulanık metrik denir (Gregori ve diğ., 2009).

Örnek 2.3.25: (1) $(X, M_d, *)$ standart bulanık metrik uzayı bir esas bulanık metriktir.

(2) (X,d) bir klasik metrik uzay ve $*$ t-normu her $a,b \in [0,1]$ için $a * b = ab$ olsun. Bu taktirde $M(x,y,t) = e^{-\frac{d(x,y)}{t}}$ bulanık metriği esas bulanık metriktir (Gregori 2009).

Teorem 2.3.26: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay olsun. $(X, M, *)$'ın esas bulanık metrik olması için gerek ve yeter şart $(X, M, *)$'daki p-yakınsak her dizinin yakınsak olmasıdır (Gregori ve diğ., 2009).

Gregori, Minana ve Morillas 2014 (Gregori ve diğ., 2014)'te bulanık metrik uzaylarında yakınsak dizi ve özelliklerini incelemek amacıyla aşağıdaki co-esas (co-principal) tanımını vermişlerdir.

Tanım 2.3.27: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay olsun. Her $x \in X$ ve her $r \in (0,1)$ için $\{B(x, r, t) \mid t > 0\}$ ailesi x için bir komşuluk tabanı oluşturuyorsa $(X, M, *)$'a co-esas (co-principal) denir (Gregori ve diğ., 2014).

Tanım 2.3.28: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay, (x_n) X'de bir dizi, $x_0 \in X$ ve $\alpha \in (0,1)$ olsun. Her $t > 0$ için $n \geq n_0$ iken $M(x_n, x_0, t) \geq 1 - \alpha$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) x_0'a α-yakınsaktır denir (Bag ve Samanta, 2005).

Tanım 2.3.29: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay, (x_n) X'de bir dizi ve $\alpha \in (0,1)$ olsun. Her $t > 0$ için $m, n \geq n_0$ iken $M(x_n, x_0, t) \geq 1 - \alpha$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisine α-Cauchy dizisi denir (Bag ve Samanta, 2005).

Tanım 2.3.30: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay olsun. X deki her α-Cauchy dizisi α-yakınsak ise $(X, M, *)$ a α-tamdır denir (Bag ve Samanta, 2005).

Tanım 2.3.31: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay olsun. Her $r \in (0,1)$ ve her $t > 0$ için, $X = \bigcup_{a \in A} B(a, r, t)$ şeklinde X'in sonlu bir A alt kümesi varsa $(X, M, *)$ bulanık metrik uzayına tamamen sınırlı (totally bounded, prekompakt) denir (Gregori ve Romaguera, 2000).

Tanım 2.3.32: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay olsun. Eğer (X, T_M) bir kompakt topolojik uzay ise $(X, M, *)$ bulanık metrik uzayına kompakttır denir (Gregori ve Romaguera, 2000).

Teorem 2.3.33: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay olsun. $(X, M, *)$'ın tamamen sınırlı olması için gerek ve yeter şart X'deki her (x_n) dizisinin bir Cauchy alt dizisine sahip olmasıdır (Gregori ve Romaguera, 2000).

Tanım 2.3.34: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay ve $\alpha \in (0,1)$ olsun. Her $t > 0$ ve her $r \in (\alpha, 1)$ için $X = \bigcup_{x \in A} B(x, r, t)$ olacak şekilde X'in sonlu bir A alt kümesi varsa $(X, M, *)$ bulanık metrik uzayına α-tamamen sınırlı (prekompakt, total bounded) denir.

Tanım 2.3.35: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay olsun. X deki her (x_n) dizisinin α-yakınsak bir alt dizisi varsa $(X, M, *)$'a α-kompakt denir.

Önerme 2.3.36: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay olsun. $(X, M, *)$ kompakt ise her $\alpha \in (0,1)$ için $(X, M, *)$ α-kompakttır.

Teorem 2.3.37: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay olsun. X deki bir (x_n) Cauchy dizisinin bir $x \in X$ yığılma noktası varsa bu dizi x'e yakınsar (Gregori ve Romaguera, 2000).

Teorem 2.3.38: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay olsun. $(X, M, *)$'ın kompakt olması için gerek ve yeter şart $(X, M, *)$'ın tamamen sınırlı ve tam olmasıdır (Gregori ve Romaguera, 2000).

2.4. Bulanık Metrikle Üretilen Bulanıklaştırılmış Topoloji ve Özellikleri

Bu kısımda Minana ve Shostak (2016) tarafından verilen güçlü GV-bulanık metrik uzaydan bulanıklaştırılmış topolojik uzay elde etme yöntemi incelenmiş ve bu yaklaşımdan yola çıkılarak KM-bulanık metrik uzayından bulanıklaştırılmış topolojik uzay üretilmiştir. Üretilen bulanıklaştırılmış topolojik uzaylarda süreklilik ve yakınsaklık gibi yapılar detaylı olarak incelenmiş ve bulanık metrik uzaylar kategorisi ile üretilen bulanıklaştırılmış topolojik uzay kategorisi arasında bir funktor tanımlanmıştır.

2.4.1. GV-Bulanık metrikle üretilen bulanıklaştırılmış topoloji

Bu kısımda Minana ve Shostak (2016)'ın George-Veeramani anlamındaki güçlü bulanık metrik uzaydan bulanıklaştırılmış topoloji elde etme yöntemi incelenecektir.

Önerme 2.4.1.1: $(X, M, *)$ bir güçlü GV-bulanık metrik uzay, $\varphi(x) := \frac{x}{x+1}$ olmak üzere $\varphi : \mathbb{R}^+ \to (0,1)$ kesin artan, sürekli ve bire-bir örten bir dönüşüm olsun. (Bu dönüşümün tersi $\psi : (0,1) \to (0,\infty)$, $\psi(x) = \varphi^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$). $\alpha \in (0,1)$ ve $t = \varphi^{-1}(\alpha)$ olmak üzere, $\mathcal{B}$

$\mathcal{B}_\alpha = \{B(x,r,t) \mid x \in X, r \in (0,1)\}$

ailesi X üzerinde bir klasik topolojinin bir tabanıdır (Gregori ve diğ., 2010).

Bu klasik topolojisi, $(T_M)_\alpha$,aşağıdaki teoremdeki gibi karakterize edilir.

Teorem 2.4.1.2: $(X, M, *)$ bir güçlü GV-bulanık metrik uzay, $\varphi : \mathbb{R}^+ \to (0,1)$ dönüşümü $\varphi(x) := \frac{x}{x+1}$, $\alpha \in (0,1)$ ve $G \in 2^X$ olsun. $G \in (T_M)_\alpha$ olması için gerek ve yeter şart her $x \in G$ için $t = \varphi^{-1}(\alpha)$ iken $B(x, r, t) \subseteq G$ olacak şekilde en az bir $r \in (0,1)$ olmasıdır (Minana ve Shostak, 2016).

Not: Bu bölüm boyunca $(X, M, *)$ bir güçlü GV-bulanık metrik uzay ve kesin artan, sürekli ve bire-bir örten bir dönüşüm $\varphi : \mathbb{R}^+ \to (0,1)$ olsun. Genelliği bozmayacağı için $\varphi(x) := \frac{x}{x+1}$ olarak seçilebilir. Ayrıca $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere $t = \varphi^{-1}(\alpha) = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ olarak ele alınacaktır.

Teorem 2.4.1.2 ve Uyarı 2.3.2.(a) dan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.4.1.3: $\alpha, \beta \in (0,1)$ ve $\beta < \alpha$ olsun. $G \in (T_M)_\alpha$ ise $G \in (T_M)_\beta$ dır, yani $(T_M)_\alpha \subset (T_M)_\beta$ dır. Dolayısıyla $\{(T_M)_\alpha \mid \alpha \in (0,1)\}$ ailesi azalandır (Minana ve Shostak, 2016).

Önerme 2.2.27'de Minana ve Shostak'ın klasik topolojilerin azalan ailesinden bir bulanıklaştırılmış topoloji oluşturma metodu ve Sonuç 2.4.1.3 neticesinde güçlü bulanık metrik uzaydan bulanıklaştırılmış topoloji aşağıdaki teoremdeki gibi elde edilir.

Teorem 2.4.1.4: $(X, M, *)$ güçlü GV-bulanık metrik uzay olsun. Her $A \in 2^X$ için,

$$\tau_M(A) := \bigvee \{\alpha \mid A \in (T_M)_\alpha\}$$

şeklinde tanımlanan $\tau_M : 2^X \to [0,1]$ dönüşümü bir bulanıklaştırılmış topolojidir (Minana ve Shostak, 2016).

Uyarı 2.4.1.5: (1) $K \subseteq [0,1]$ yoğun bir küme olsun. $\{(T_M)_\alpha \mid \alpha \in K\}$ alttan yarı sürekli değildir.

(2) $K \subseteq [0,1]$ yoğun bir küme ve $\alpha, \beta \in K$ olsun. Bu taktirde, $(T_M)_\alpha \subseteq \bigcap_{\beta<\alpha}(T_M)_\beta$ sağlanır. Fakat bu ifadenin tersi genel olarak doğru değildir. Bu durum aşağıdaki örnekle gösterilmiştir (Minana ve Shostak, 2016).

Örnek 2.4.1.6: $X = (0,1]$, $G = X \cap Q$ ve $H = X \setminus G$ olmak üzere X kümesi üzerindeki bulanık metrik $(X, M, \cdot)$,

$$M(x, y, t)=\begin{cases}\dfrac{\min\{x, y\}}{\max\{x, y\}}.t, & (x \in G, y \in H) \text{ veya } (x \in H, y \in G) \ , t \in (0,1) \\ \dfrac{\min\{x, y\}}{\max\{x, y\}}, & \text{diğer}\end{cases}$$

ile tanımlansın ve $\varphi : \mathbb{R}^+ \to (0,1)$, $\varphi(t) = \frac{t}{t+1}$ olsun. $x \in G$, $\varepsilon < \min\{x, 1 - x\}$ ve $E = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap G$ olarak alırsak $\tau_M(E) = \frac{1}{2}$ olarak elde edilir. $F = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ kümesi için $\tau_M(F) = 1$ dir (Minana ve Shostak, 2016).

Uyarı 2.4.1.7: $(X, M, *)$ güçlü esas bulanık metrik uzay ise Sonuç 2.4.1.3'de belirtildiği gibi $\{(T_M)_\alpha \mid \alpha \in (0,1)\}$ ailesi azalan olduğundan her $\alpha \in [0,1]$ için $(T_M)_\alpha = T_M$ dir. Sonuç olarak her $A \in 2^X$ için,

$$\tau_M(A)=\begin{cases}1, & A \in T_M \\ 0, & \text{diğer}\end{cases}$$

dir. Böylece τ_M iki değerli bulanıklaştırılmış topolojidir, yani M bulanık metriğinden üretilen bir klasik (crisp) topolojidir (Minana ve Shostak, 2016).

Aşağıdaki örnekte esas olmayan güçlü bulanık metrikle elde edilen topolojinin değerlerinin $(0,1)$ arasında olacağı yani bulanıklaştırılmış topoloji elde edileceği gösterilmiştir (Minana ve Shostak, 2016).

Örnek 2.4.1.8: $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times (0,\infty)$ üzerinde tanımlı M dönüşümü,

$$M(x,y,t) = \begin{cases}\dfrac{\min\{x, y\}}{\max\{x, y\}}.t, & t \in (0,1] \\ \dfrac{\min\{x, y\}}{\max\{x, y\}}, & t \in (1,\infty)\end{cases}$$

şeklinde olsun. $(\mathbb{R}^+, M, \cdot)$ güçlü bulanık metriği esas değildir. Her $t \in \mathbb{R}^+$ için $\varphi(t) = \frac{t}{t+1}$ olsun. Her $x \in \mathbb{R}^+$ için $\tau_M(\{x\}) = \frac{1}{2}$ dir (Minana ve Shostak, 2016).

2.4.2. KM-Bulanık metrikle üretilen bulanıklaştırılmış topoloji

Bu bölümde Kramosil-Michalek anlamındaki bulanık metrik uzaydan bulanıklaştırılmış topolojik uzay üretilmiştir. Bunun için öncelikle KM-bulanık metrik uzayından klasik topoloji üretilmesi için gereken taban yapısı kurulmuş ve seviye topolojileri bu klasik topolojiler olan bulanıklaştırılmış topoloji elde edilmiştir. Üretilen bulanıklaştırılmış topolojik uzayda süreklilik ve yakınsaklık gibi özellikler çalışılmıştır.

Bu bölüm boyunca $(X, M, \wedge)$ Kramosil-Michalek anlamındaki bulanık metrik uzayı olarak ele alınacak ve t-norm olarak eşgüçlü t-norm olan minimum t-normu kullanılacaktır.

Teorem 2.4.2.1: $(X, M, \wedge)$ bir bulanık metrik uzay ve $r \in (0,1)$ olsun. Bu taktirde, $\mathcal{B}$

$\mathcal{B}_r = \{B(x, r, t) \mid x \in X, t > 0\}$

ailesi X kümesi üzerinde klasik bir topolojinin tabanıdır.

İspat: i) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_r} B(x, r, t)$ olduğu açıktır.

ii) $B(x,r,t), B(y,r,s) \in \mathcal{B}_r$ ve $z \in B(x,r,t) \cap B(y,r,s)$ olsun. $M(x,z,t) > 1 - r$ ve $M(y,z,s) > 1 - r$ dır. $M(x,z,t_0) > 1 - r$ ve $M(y,z,s_0) > 1 - r$ olacak şekilde $t_0 < t$ ve $s_0 < s$ vardır. $p = \min \{t - t_0, s - s_0\}$ olsun. Bu durumda $B(z,r,p) \subset B(x,r,t) \cap B(y,r,s)$ dır. Gerçekten, $u \in B(z,r,p)$ ise $M(u,z,t - t_0) > 1 - r$ dir.

$M(u,x,t) \geq M(u,z,t-t_0) \wedge M(z,x,t_0) > (1-r) \wedge (1-r) = 1 - r$

olduğundan $u \in B(x,r,t)$ dir. Benzer şekilde $B(z,r,t) \subset B(y,r,s)$ dir. Sonuç olarak $B(z,r,p) \subset B(x,r,t) \cap B(y,r,s)$ dir.

Sonuç 2.4.2.2: $\mathcal{B}_r$ ailesinin X kümesi üzerinde oluşturduğu topoloji $(T_M)_r$ olsun. Bu topoloji aşağıdaki gibi karakterize edilebilir.

$r \in (0,1)$ ve $U \in 2^X$ olmak üzere,

$U \in (T_M)_r \Leftrightarrow \forall x \in U$ için $\exists t > 0 : B(x,r,t) \subseteq U$

Diğer bir deyişle,

$(T_M)_r = \{O \subset U \mid x \in O \Leftrightarrow \exists\, t > 0 : B(x,r,t) \subseteq O\}$

dir.

Uyarı 2.4.2.3: Minana ve Shostak (Minana ve Shostak, 2016)'ın George-Veeramani anlamındaki bulanık metrik uzaylardan üretilen seviye topolojilerinin ailesinin alttan yarı sürekli olmadığını Uyarı 2.4.1.5 deki gibi gösterilmiştir.

Aşağıdaki önermede Kramosil-Michalek anlamındaki bulanık metrik uzaydan yukarıdaki gibi üretilen ailenin alttan yarı sürekli olduğu gösterilmiştir.

Önerme 2.4.2.4: $\{(T_M)_r : r \in (0,1)\}$ ailesi azalan ve alttan yarı süreklidir, yani $(T_M)_r = \bigcap_{s<r} (T_M)_s$ dir.

İspat: Her $x \in X$ ve her $0 < s < r < 1$ için $B(x,s,t) \subseteq B(x,r,t)$ olduğundan $\{(T_M)_r : r \in (0,1)\}$ azalandır.
Diğer taraftan $(T_M)_r \subseteq \bigcap_{s<r}(T_M)_s$ olduğu açıktır. Tersine $\bigcap_{s<r}(T_M)_s \subseteq (T_M)_r$ olduğunu göstermek için $G \in \bigcap_{s<r}(T_M)_s$ olsun. Her $s < r$ için $G \in (T_M)_s$ dir. Böylece $(T_M)_s$ nin tanımından her $x \in G$ için $B(x,s,t) \subset G$ olacak şekilde en az bir $t > 0$ bulunur. Şimdi de $B(x,r,t) \subset G$ olduğunu gösterelim. Bunun için $y \in B(x,r,t)$ olsun. $M(x,y,t) > 1 - r$ dır. $M(x,y,t) > 1 - s_0 > 1 - r$ olacak şekilde $s_0 < r$ vardır. Böylece $y \in B(x, s_0, t) \subset G$ dir. Sonuç olarak $G \in (T_M)_r$ dir.

KM-bulanık metrik uzaydan bulanıklaştırılmış topoloji üretimi aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 2.4.2.5: $(X,M,\wedge)$ bir bulanık metrik uzay olsun. Bu taktirde her $A \in 2^X$ için,

$$\mathcal{T}_M(A) = \bigvee \{r : A \in (T_M)_r\}$$

şeklindeki $\mathcal{T}_M : 2^X \to [0,1]$ dönüşümü bir bulanıklaştırılmış topolojidir.

İspat: Önerme 2.2.27 ve Önerme 2.4.2.4'in neticesinde açıktır.

Uyarı 2.4.2.6: $(T_M)_r$, B_r ailesinden üretilen klasik bir topoloji ve $(\mathcal{T}_M)_r$, $\mathcal{T}_M$ bulanıklaştırılmış topolojisinin seviyesi olsun. Uyarı 2.2.30 ve Önerme 2.4.2.4'in sonucunda $(T_M)_r=(\mathcal{T}_M)_r$ olur.

Aşağıdaki örnekte $r,s \in (0,1)$ olmak üzere $r \neq s$ olduğu durumda $(T_M)_r$'nin $(T_M)_s$'ye eşit olmadığı gösterilmiştir.

Örnek 2.4.2.7: $f : [0,1) \to \left(\frac{1}{2},1\right]$ azalmayan, sol sürekli, örten bir fonksiyon ve $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times (0,\infty)$ üzerinde tanımlı M dönüşümü,

$$M(x,y,t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ f\left(\frac{t}{|x - y|}\right), & x \neq y \text{ ve } t \in [0,1] \\ 1, & x \neq y \text{ ve } t \geq 1 \\ 1, & x = y \text{ ve } t \geq 0 \end{cases}$$

şeklinde olsun. ($\mathbb{R}^+$,M,$\wedge$) bir bulanık metrik uzaydır (Mardones-Pérez ve Prada Vicente,2012) ve $(T_M)_{\frac{1}{4}}$, $\mathbb{R}$ üzerinde Öklid topolojisi olmasına rağmen $(T_M)_{\frac{3}{4}}$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir trivial topolojidir.

Sonuç 2.4.2.8: (X,M,$\wedge$) bir co-esas bulanık metrik uzay olsun. Bu taktirde her $r \in (0,1)$ için $(T_M)_r = T_M$ dir. Yani bulanıklaştırılmış topoloji,

$$\mathcal{T}_M(A)=\begin{cases} 1, & A \in T_M \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde bir klasik topoloji olarak düşünülebilir.

1999 yılında, Zhang ve Xu (Zhang ve Xu, 1999) genelleştirilmiş komşuluk sistemi kavramını verdi. 2010 da Yue ve Shi (Yue ve Shi, 2010) genelleştirilmiş komşuluk sistemi yardımıyla bulanık metrikten bulanıklaştırılmış topoloji elde etmişlerdir. Yue ve Shi'nin elde ettiği bulanıklaştırılmış topoloji $\tau_d(A)$ ile $\mathcal{T}_M(A)$ bulanıklaştırılmış topolojisi karşılaştırılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

$\mathcal{T}_M(A)=\beta$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $s - \varepsilon < r < s$ olacak şekilde r vardır ve $A \in (T_M)_r$ dir. Böylece her $x \in A$ için $B(x,r,t) \subseteq A$ olacak şekilde $t > 0$ vardır. Her $y \notin A$ için $M(x,y,t) \leq 1 - r$ olacak şekilde $t > 0$ vardır. Yani her $x \in A$ için $\bigwedge_{y \notin A} \bigvee_{t>0} \left(1 - M(x,y,t)\right) \geq r > s - \varepsilon$ dur. Bu durumda $\tau_d(A)= \bigwedge_{x \in A} \bigwedge_{y \notin A} \bigvee_{t>0} \left(1 - M(x,y,t)\right) \geq \beta$ dır. Sonuç olarak $\tau_d(A) \geq \beta = \mathcal{T}_M(A)$.

Teorem 2.4.2.9: $(X,M_1,\wedge)$ ve $(Y,M_2,\wedge)$ iki bulanık metrik uzay ve $(X,\mathcal{T}_{M_1})$, $(Y,\mathcal{T}_{M_2})$ sırasıyla bu metrik uzaylardan üretilen bulanıklaştırılmış topolojik uzaylar olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) $f:(X,T_{M_1})\to(Y,T_{M_2})$ fonksiyonu her $\alpha\in(0,1)$ için α-süreklidir.

(2) $f:(X,\mathcal{T}_{M_1})\to(Y,\mathcal{T}_{M_2})$ fonksiyonu bulanık süreklidir.

İspat: (1) ⇒ (2) $f:(X,\mathcal{T}_{M_1})\to(Y,\mathcal{T}_{M_2})$ fonksiyonu sürekli, $x\in X$, $\alpha\in(0,1)$ ve $B(f(x),\alpha,t)\in\mathcal{T}_{M_2}$ olsun. $\mathcal{T}_{M_2}(B(f(x),\alpha,t))\geq\alpha$ dır. f sürekli olduğundan $\mathcal{T}_{M_1}\left(f^{-1}(B(f(x),\alpha,t))\right)\geq\mathcal{T}_{M_2}(B(f(x),\alpha,t))\geq\alpha$ dir. Böylece $f^{-1}(B(f(x),\alpha,t))\in(\mathcal{T}_{M_1})_\alpha$ yani f, α-süreklidir.

(2)⇒(1) Tersine her $\alpha\in(0,1)$ için $f:(X,\mathcal{T}_{M_1})\to(Y,\mathcal{T}_{M_2})$ fonksiyonu α-sürekli olsun. $f:(X,\mathcal{T}_{M_1})\to(Y,\mathcal{T}_{M_2})$ fonksiyonunun bulanık sürekli olmadığını kabul edelim. Böylece $\mathcal{T}_{M_1}(f^{-1}(V))<\mathcal{T}_{M_2}(V)$ olacak şekilde $V\subset Y$ vardır. $\mathcal{T}_{M_1}(f^{-1}(V))<\alpha<\mathcal{T}_{M_2}(V)$ olacak şekilde $\alpha\in(0,1)$ vardır. Böylece $V\in\mathcal{T}_{M_2}$ iken $f^{-1}(V)\notin(\mathcal{T}_{M_2})_\alpha$ dir. Her $t>0$ için $B(f(x_0),\alpha,t)\subseteq V$ olacak şekilde $x_0\in f^{-1}(V)$ vardır. Her $s>0$ için $B(x_0,\alpha,s)\not\subseteq f^{-1}(B(f(x_0),\alpha,t))$ dir. Bu da f nin α-sürekli olmadığını verir ki bu ise bir çelişkidir.

Bulanık metrikten üretilen bulanıklaştırılmış topolojik uzaylar arasındaki α-sürekliliğin bulanık metriklerle karakterizasyonu aşağıdaki önermede verilmiştir.

Önerme 2.4.2.10: $(X,M_1,\wedge)$ ve $(Y,M_2,\wedge)$ iki bulanık metrik uzay ve $(X,\mathcal{T}_{M_1})$, $(Y,\mathcal{T}_{M_2})$ sırasıyla bu metrik uzaylardan üretilen bulanıklaştırılmış topolojik uzaylar ve $\alpha\in(0,1)$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) $f:(X,\mathcal{T}_{M_1})\to(Y,\mathcal{T}_{M_2})$ fonksiyonu α-süreklidir.

(2) $t>0$ sabit olsun. $M_1(x,y,s)>1-\alpha$ iken $M_2(f(x),f(y),t)>1-\alpha$ olacak şekilde $s>0$ vardır.

Önerme 2.4.2.10'den yola çıkarak süreklilik tanımını aşağıdaki gibi düzenleyebiliriz.

$$\bigwedge_{t>0} M_2(f(x),f(y),t) \geq \bigwedge_{s>0} M_1(x,y,s).$$

$\Leftrightarrow$ Her $t > 0$ için $M_2(f(x),f(y),t) \geq \bigwedge_{s>0} M_1(x,y,s)$.

$\Leftrightarrow$ Her $t > 0$ için $M_2(f(x),f(y),t) \geq M_1(x,y,s)$ olacak şekilde $s > 0$ vardır.

$\Leftrightarrow$ Her $t > 0$ ve her $r \in (0,1)$ için, $M_1(x,y,s) > 1 - r$ iken $M_2(f(x),f(y),t) > 1 - r$ olacak şekilde $s > 0$ vardır.

Böylece süreklilik tanımı aşağıdaki gibi genelleştirebilir.

Tanım 2.4.2.11: $(X,M_1,\wedge)$ ve $(Y,M_2,\wedge)$ iki bulanık metrik uzay, $f : X \to Y$ ve $x \in X$ olsun. Her $y \in Y$ için $\bigwedge_{t>0} M_2(f(x),f(y),t) \geq \bigwedge_{s>0} M_1(x,y,s)$ oluyorsa f fonksiyonu x noktasında m-bulanık süreklidir denir.

$f:(X,M_1,\wedge) \to (Y,M_2,\wedge)$ fonksiyonu her $x \in X$'de m-sürekli ise f'ye m-süreklidir denir.

Önerme 2.4.2.12: $(X,M_1,\wedge)$ ve $(Y,M_2,\wedge)$ iki bulanık metrik uzay ve $(X,\mathcal{T}_{M_1})$, $(Y,\mathcal{T}_{M_2})$ sırasıyla bu metrik uzaylardan üretilen bulanıklaştırılmış topolojik uzaylar olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) $f : (X,\mathcal{T}_{M_1}) \to (Y,\mathcal{T}_{M_2})$ fonksiyonu her $\alpha \in (0,1)$ için α-süreklidir.

(2) $f : (X,M_1,\wedge) \to (Y,M_2,\wedge)$ fonksiyonu m-bulanık süreklidir.

Teorem 2.4.2.9 ve Önerme 2.4.2.12 neticesinde aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 2.4.2.13: $(X,M_1,\wedge)$ ve $(Y,M_2,\wedge)$ iki bulanık metrik uzay ve $(X,\mathcal{T}_{M_1})$, $(Y,\mathcal{T}_{M_2})$ sırasıyla bu metrik uzaylardan üretilen bulanıklaştırılmış topolojik uzaylar olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) $f : (X,\mathcal{T}_{M_1}) \to (Y,\mathcal{T}_{M_2})$ fonksiyonu bulanık süreklidir.

(2) $f : (X,M_1,\wedge) \to (Y,M_2,\wedge)$ fonksiyonu m-bulanık süreklidir.

Objeleri KM-bulanık metrik uzaylar, morfizimleri m -sürekli dönüşümler olan kategori $\mathbb{FUZFMS}$ ve objeleri bulanık metrikten üretilen bulanıklaştırılmış topolojik uzaylar ve morfizimleri bulanık sürekli dönüşümler olan kategori $\mathbb{FUZTOP}$ olsun. Önerme 2.4.2.13 neticesinde bu iki kategori arasında

$\varphi:\mathbb{FUZFMS} \rightarrow \mathbb{FUZTOP}$

şeklinde bir funktor tanımlanır.

Tanım 2.4.2.14: $(X,M,\wedge)$ bir bulanık metrik uzay, $(T_M)_\alpha$ bu bulanık metrikten üretilen klasik topolojinin α-seviye topolojisi, (x_n) X'te bir dizi ve $x \in X$ olsun. $(T_M)_\alpha$ seviye topolojisine göre (x_n) x'e yakınsak ise x_n dizisi x'e α-yakınsaktır denir.

Önerme 2.4.2.15: $(X,M,\wedge)$ bir bulanık metrik uzay, (x_n) X'te bir dizi, $x \in X$ ve $\alpha \in (0,1)$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) (x_n) dizisi x'e α-yakınsaktır.

(2) Her $t > 0$ için $n \geq n_0$ iken $M(x_n,x,t) > 1 - \alpha$ olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

İspat: Tanımlardan açıktır.

Teorem 2.4.2.16: $(X,M,\wedge)$ bir bulanık metrik uzay, (x_n) X'te bir dizi ve $x \in X$ olsun. (x_n) dizisinin x'e yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\alpha \in (0,1)$ için x_n'in x'e α-yakınsak olmasıdır.

İspat: Tanımlardan kolaylıkla görülebilir.

Aşağıdaki teoremde α-süreklilik kavramının α-yakınsak diziler ile karakterizasyonu verilmiştir.

Teorem 2.4.2.17: $(X,M_1,\wedge)$ ve $(Y,M_2,\wedge)$ iki bulanık metrik uzay, $\alpha \in (0,1)$ ve $f : (X,M_1,\wedge) \rightarrow (Y,M_2,\wedge)$ bir fonksiyon olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) f, $x_0 \in X$ de α-süreklidir.

(2) (x_n) dizisi x_0 'a her $t > 0$ için α yakınsak ise $\left(f(x_n)\right)$ dizisi $f(x_0)$ 'a α-yakınsaktır.

İspat: $(1) \Rightarrow (2)$ $\alpha \in (0,1)$ ve $x_0 \in X$ olsun. $f : (X,M_1,\wedge) \rightarrow (Y,M_2,\wedge)$ fonksiyonun, $x_0 \in X$'te α-sürekli olsun. $t > 0$ ve (x_n), x_0'a α-yakınsak olsun. f fonksiyonu x_0'da α-sürekli olduğundan $M_1(x,x_0,s) > 1 - \alpha$ iken $M_2(f(x),f(x_0),t) > 1 - \alpha$ olacak şekilde $s > 0$ vardır. (x_n), x_0'a α-yakınsak olduğundan her $n \geq n_0$ için $M_1(x_n,x_0,t) > 1 - \alpha$ olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece her $n \geq n_0$ için $M_2(f(x_n),f(x_0),t) > 1 - \alpha$ dır. Yani $\left(f(x_n)\right)$ dizisi $f(x_0)$'a α-yakınsaktır.

$(2) \Rightarrow (1)$ (x_n) dizisi x_0'a α-yakınsak ise $\left(f(x_n)\right)$ dizisi $f(x_0)$'a α-yakınsak olsun. f fonksiyonunun, $x_0 \in X$ de α-sürekli olmasın. Böylece her $s > 0$ için ve en az bir $x \in X$ için $M_1(x,x_0,s) > 1 - \alpha$ iken $M_2(f(x),f(x_0),t) \leq 1 - \alpha$ olacak şekilde $t > 0$ vardır. Her $0 < \frac{1}{n} < s$ için $M_1(x_n,x_0,s) > M_1\left(x_n,x_0,\frac{1}{n}\right) > 1 - \alpha$ olacak şekilde X de (x_n) dizisi vardır. (x_n) dizisi x_0'a α-yakınsaktır fakat $t > 0$ için $M_2(f(x_n),f(x_0),t) \leq 1 - \alpha$ dır. Yani $\left(f(x_n)\right)$ dizisinin $f(x_0)$'a α-yakınsak değildir. Bu ise bir çelişkidir.

Sonuç 2.4.2.19: $(X,M_1,\wedge)$ ve $(Y,M_2,\wedge)$ iki bulanık metrik uzay ve $\left(X,\mathcal{T}_{M_1}\right)$, $\left(Y,\mathcal{T}_{M_2}\right)$ sırasıyla bu metrik uzaylardan üretilen bulanıklaştırılmış topolojik uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) $f : (X,M_1,\wedge) \rightarrow (Y,M_2,\wedge)$ dönüşümü m-bulanık süreklidir.

(2) (x_n) dizisi $x_0 \in X$'e yakınsak ise $\left(f(x_n)\right)$ dizisi $f(x_0)$'a yakınsaktır.

2.5. Bulanık Metrikle Üretilen Bulanık Topoloji ve Özellikleri

GV-bulanık metrik uzaydan bulanıklaştırılmış topoloji (Minana ve Shostak, 2016), Shostak anlamında bulanık topoloji (Grecova ve diğ., 2016) üretilmesine rağmen günümüze kadar mevcut bulanık metrik uzaylardan Lowen anlamında bulanık topoloji üretilmemiştir.

Literatürdeki bu boşluğu doldurmak amacıyla, bu kısımda hem GV-bulanık metrik uzaydan hem de KM-bulanık metrik uzaydan Lowen anlamında birer bulanık topoloji üretilmiştir. Ayrıca bu bulanık topolojik uzaylarda süreklilik yapısı ve kompaktlık çalışılmıştır.

2.5.1. GV-Bulanık metrikle üretilen bulanık topoloji

George-Veeramani anlamındaki güçlü bulanık metrik kullanılarak klasik bir topoloji için taban elde edilecek ve bu taban ile üretilen klasik topolojiden Lowen bulanık topoloji elde edilecektir. Buna ek olarak, üretilen Lowen bulanık topolojik uzayda süreklilik ve kompaktlık gibi yapılar çalışılacak ve üretilen Lowen bulanık topolojik uzay kategorisi ve bulanık metrik uzay kategorisi arasında bir funktor tanımlanacaktır.

Önerme 2.5.1.1: $(X, M, *)$ bir güçlü bulanık metrik uzay ve $t > 0$ olsun.

$\mathcal{B}_{\bar{t}} = \{B(x,r,s) \mid x \in X, r \in (0,1), s > t\}$

ailesi X üzerinde klasik bir topolojinin bir tabanıdır.

Uyarı 2.5.1.2: $\mathcal{B}_{\bar{t}}$ ailesi X kümesi üzerinde $((T_M)_{\bar{t}})$ klasik topolojisinin bir tabanıdır. Bu topoloji aşağıdaki gibi karakterize edilir.

Teorem 2.5.1.3: $(X, M, *)$ bir güçlü GV-bulanık metrik uzay, $G \in 2^X$ ve $t > 0$ olsun. $G \in (T_M)_{\bar{t}}$ olması için gerek ve yeterşart her $x \in G$ için $B(x,r,s) \subseteq G$ olacak şekilde en az bir $s \in (t,\infty)$ ve $r \in (0,1)$ olmasıdır.

Diğer bir deyişle,

$$G \in (T_M)_{\bar{t}} \Leftrightarrow G = \bigcup_{\substack{s > t \\ B(x,r,s) \subset G}} B(x,r,s).$$

Not 2.5.1.4: Bu bölüm boyunca, $(X,M,*)$ bir güçlü GV-bulanık metrik uzay ve $\varphi : \mathbb{R}^+ \to (0,1)$ kesin artan, sürekli ve bire-bir örten bir dönüşüm olsun. Genelliği bozmayacağı için $\varphi(x) := \frac{x}{x+1}$ olarak seçilebilir. Ayrıca $t > 0$ olmak üzere $\alpha := \varphi(t) = \frac{t}{t+1} \in (0,1)$ olarak ele alınacaktır. t ve α arasındaki ilişki gözönüne alınarak $(T_M)_{\bar{t}}$ gösterimi yerine kolaylık olması açısından $T_{\bar{\alpha}}$ gösterimi kullanılacaktır. Dolayısıyla bu topoloji aşağıdaki gibi yazılır.

$T_{\bar{\alpha}} = \{G \subseteq X \mid \forall\, x \in G \text{ için } \exists\, s > t \text{ ve } \exists\, r \in (0,1) \text{ öyle ki } B(x,r,s) \subset G\}$.

$s < t$ iken $\mathcal{B}_{\bar{t}} \subset \mathcal{B}_{\bar{s}}$ olduğu gerçeği gözönüne alınırsa aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 2.5.1.5: $s,t>0$ ve $s<t$ olsun. $G\in(T_M)_{\bar{t}}$ ise $G\in(T_M)_{\bar{s}}$ dir, yani $(T_M)_{\bar{t}}\subset(T_M)_{\bar{s}}$ dir. Dolayısıyla $\{T_{\bar{\alpha}} \mid \alpha\in[0,1)\}$ ailesi azalandır. ($T_{\bar{0}}=T_M$ dir.)

Uyarı 2.5.1.2, Önerme 2.2.12 ve Teorem 2.2.13 neticesinde güçlü bulanık metrikten Lowen bulanık bir topoloji aşağıdaki teoremde verildiği gibi elde edilir.

Teorem 2.5.1.6: $(X, M, *)$ bir güçlü bulanık metrik uzay ve $\{T_{\bar{\alpha}} \mid \alpha\in[0,1)\}$ bu metrikten üretilen klasik topolojilerin ailesi olsun. Bu durumda,

$\tau^M := \{\lambda \mid \text{her } \alpha\in[0,1) \text{ için } \lambda_\alpha\in T_{\bar{\alpha}}\}$

en ince Lowen bulanık topolojidir ve $\imath_\alpha(\tau^M)=T_{\bar{\alpha}}$ dır.

Teorem 2.5.1.6 ve Önerme 2.2.11'nin sonucunda $\imath(\tau^M)=T_{\bar{\alpha}}$ olduğu görülür.

Tanım 2.5.1.7: $(X, M, *)$ bir güçlü bulanık metrik uzay, $x\in X$, $r\in(0,1)$, $t>0$ ve $\beta\in(0,1)$ olsun. Aşağıdaki gibi tanımlı $B_\beta(x,r,t)$ bulanık kümesine x merkezli r yarıçaplı β-açık yuvar denir.

$$B_\beta(x,r,s)(y)=\begin{cases}\beta, & y\in B(x,r,s)\\ 0, & \text{diğer}\end{cases}$$ (Saheli, 2016).

Aşağıdaki önermede β-açık yuvarların ailesinin $w(T_{\bar{\alpha}})$ topolojisi için bir taban olduğu verilmiştir.

Önerme 2.5.1.8: $(X, M, *)$ bir güçlü bulanık metrik uzay olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{B}=\{B_\beta(x,r,s) \mid x\in X, r\in(0,1), \beta\in(0,1)\}$$

ailesi $w(T_{\bar{\alpha}})$ topolojisi için bir tabandır.

İspat: $\mathcal{B}\subset w(T_{\bar{\alpha}})$ olduğu açıktır. $\lambda\in w(T_{\bar{\alpha}})$ ve $\lambda(x)>0$ olsun. λ alttan yarı sürekli olduğundan, her $\varepsilon>0$ ve her $y\in B(x,r,s)$ için $\lambda(y)\geq\lambda(x)-\frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $r\in(0,1)$ ve $s>0$ vardır. $\beta=\lambda(x)-\frac{\varepsilon}{2}$ alırsak, $B_\beta(x,r,s)\leq\lambda$ elde edilir.

Uyarı 2.5.1.9: Eğer $(X, M, *)$ esas güçlü bulanık metrik ise bu metrikten üretilen tüm topolojilerin seviye topolojileri eşittir yani, $\alpha\neq\beta$ için $T_{\bar{\alpha}}=T_{\bar{\beta}}$ dır.

Önerme 2.2.15 ve Teorem 2.5.1.6 nın neticesinde aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 2.5.1.10: $(X, M, *)$ bir güçlü bulanık metrik uzay olsun. (X,τ^M) bu bulanık metrikten üretilmiş bir Lowen bulanık topolojik uzay olsun. M esas bulanık metrik ise, $\tau^M = w\left(\imath(\tau^M)\right)$ dir (yani topolojik olarak üretilmiştir).

Fakat Sonuç 2.5.1.10'un tersi her zaman doğru değildir. Aşağıdaki örnekte esas olmayan bulanık metrik uzaylarda $\tau^M \neq w\left(\imath(\tau^M)\right)$ olduğu gösterilecektir.

Örnek 2.5.1.11: $X=(0,1]$, $A=X\cap Q$ ve $B=X/A$ olmak üzere $X\times X\times(0,\infty)$ üzerinde tanımlı M dönüşümü,

$$M(x,y,t) = \begin{cases} \dfrac{\min\{x, y\}}{\max\{x, y\}}.t, & (x \in A, y \in B) \text{veya } (x \in B, y \in A), t \in (0,1) \\ \dfrac{\min\{x, y\}}{\max\{x, y\}}, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde olsun. $(X, M, *)$ güçlü bulanık metrik uzayı esas değildir (Gregori ve diğ., 2009a). $B_\beta\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \in w\left(\imath(\tau^M)\right)$ iken $B_\beta\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \notin \tau^M$ dir.

Bulanık metrik uzayında $\beta \in (0,1)$ ve $s > 0$ parametresi arasındaki ilişkiyi göz önünde bulundurarak τ^M Lowen bulanık topolojisi için bir taban aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.5.1.12: $(X, M, *)$ bir güçlü bulanık metrik uzay olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{B}^* = \left\{B_\beta(x,r,s) : x \in X, r \in (0,1), \beta \in \left(0, \frac{s}{s+1}\right)\right\}$$

ailesi τ^M Lowen bulanık topolojisi için bir tabandır.

İspat: $\mathcal{B}^* \subset \tau^M$ olduğunu görelim. $B_\beta(x,r,s) \in \mathcal{B}^*$ olsun. $\alpha > \beta$ iken $\left[B_\beta(x,r,s)\right]^\alpha = \emptyset$ dır. $\alpha < \beta$ iken $\left[B_\beta(x,r,s)\right]^\alpha = B(x,r,s)$ dir. $t = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ olsun. $\beta < \frac{s}{s+1}$ olduğundan $\frac{\beta}{1-\beta} < s$ dir. $f(x)=\frac{x}{1-x}$ fonksiyonunun monotonluğundan ve $\alpha < \beta$ olduğundan $s > t$ ve $\left[B_\beta(x,r,s)\right]^\alpha \in B_{\bar{t}}$ dir. Böylece her $\alpha \in (0,1)$ için $\left[B_\beta(x,r,s)\right]^\alpha \in T_{\bar{\alpha}}$ dır. Sonuç olarak $B_\beta(x,r,s) \in \tau^M$ dir.

$\lambda \in \tau^M$ ve $\lambda(x) > 0$ olsun. τ^M nin tanımından $\lambda(x) > \alpha > 0$ şartını sağlayan her $\alpha \in (0,1)$ için $[\lambda]^\alpha \in T_{\bar{\alpha}}$ ve $x \in [\lambda]^\alpha$ dır. $t = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$ olarak kabul edersek $B(x,r,s) \subset [\lambda]^\alpha$ olacak şekilde $s > t$ ve $r \in (0,1)$ vardır. Yani her $y \in B(x,r,s)$ için $\lambda(y) > \alpha$ dır. Bu durumda $\alpha = \frac{t}{1+t} < \frac{s}{1+s}$ iken $B_\alpha(x,r,s) \leq \lambda$ olduğu elde edilir.

Bulanık metrik uzaylar arasındaki süreklilik kavramı ile bulanık metrikten üretilen Lowen bulanık topolojik uzaylar arasındaki süreklilik kavramı arasında uyumsuzluk vardır. Bu durumu düzeltmek için aşağıda bulanık metrik uzaylar arasında yeni bir süreklilik tanımı verilmiştir.

Tanım 2.5.1.13: $(X, M_1, *_{M_1})$ ve $(Y, M_2, *_{M_2})$ iki strong bulanık metrik uzay, $f : (X, M_1, *_{M_1}) \to (Y, M_2, *_{M_2})$ bir fonksiyon ve $t > 0$ olsun. Her $\varepsilon \in (0,1)$ ve $s > t$ için $M_1(x,y,u) > 1 - \delta$ iken $M_2(f(x),f(y),s) > 1 - \varepsilon$ olacak şekilde $\delta \in (0,1)$ ve $u > t$ varsa f fonksiyonuna $\bar{t}$-süreklidir denir.

f fonksiyonu her $t \geq 0$ için $\bar{t}$-sürekli ise $*$-süreklidir denir.

Uyarı 2.5.1.14: $\bar{t}$ -süreklilik kavramı Tanım 2.1.19 de verilen klasik süreklilik kavramından daha güçlüdür ve $t = 0$ durumunda $\bar{t}$ -süreklilik klasik süreklilik kavramına denktir.

Teorem 2.5.1.15: $(X, M_1, *_{M_1})$ ve $(Y, M_2, *_{M_2})$ iki güçlü bulanık metrik uzay ve sırasıyla (X, τ^{M_1}), (Y, τ^{M_2}) bu metrik uzaylardan üretilen iki Lowen bulanık topolojik uzay olsun. $f : (X,M_1, *_{M_1}) \to (Y,M_2, *_{M_2})$ fonksiyonu $*$-sürekli olması için gerek ve yeter şart $f : (X,\tau^{M_1}) \to (Y,\tau^{M_2})$ fonksiyonunun Lowen bulanık sürekli olmasıdır.

İspat: $f : (X,\tau^{M_1}) \to (Y,\tau^{M_2})$ Lowen bulanık sürekli ve $x \in X$ olsun. $\varepsilon \in (0,1)$ ve $t \geq 0$ alalım. $\alpha = \frac{t}{t+1}$ ve $s > t$ iken $B(f(x),\varepsilon,s) \in (T_M)_\alpha$ dır. $\alpha = \frac{t}{t+1} < \beta < \frac{s}{s+1}$ olacak şekilde $\beta \in (0,1)$ alalım. Bu durumda $B_\beta(f(x),\varepsilon,s) \in \tau^{M_2}$ dir. f sürekli olduğundan $f^{-1}\left(B_\beta(f(x),\varepsilon,s)\right) \in \tau^{M_1}$ dir. τ^{M_1} in tanımından $\left[f^{-1}\left(B_\beta(f(x),\varepsilon,s)\right)\right]^\alpha = f^{-1}(B(f(x),\varepsilon,s)) \in (T_{M_1})_\alpha$ dır. Bu durumda $B(x,\delta,u) \subset f^{-1}(B(f(x),\varepsilon,s))$ olacak şekilde $u > t$ ve $\delta \in (0,1)$ vardır. Yani her $y \in B(x,\delta,u)$ için $y \in f^{-1}(B(f(x),\varepsilon,s))$ dir. Buradan $M_1(x,y,u) > 1 - \delta$ iken $M_2(f(x),f(y),s) > 1 - \varepsilon$ elde edilir. Sonuç olarak

$f:(X,M_1,*_{M_1})\to(Y,M_2,*_{M_2})$ fonksiyonu her $t\geq 0$ için $\bar{t}$ -süreklidir yani f, $*$-süreklidir.

$f:(X,M_1,*_{M_1})\to(Y,M_2,*_{M_2})$ fonksiyonu her $t\geq 0$ için $\bar{t}$ -sürekli fakat $f:(X,\tau^{M_1})\to(Y,\tau^{M_2})$ fonksiyonu Lowen bulanık sürekli olmasın. Bu durumda $f^{-1}(\mu)\notin\tau^{M_1}$ olacak şekilde $\mu\in\tau^{M_2}$ vardır. $t=\frac{\alpha}{1-\alpha}$ olsun. $\left[f^{-1}(\mu)\right]^{\alpha}\notin T_{\alpha}$ olacak şekilde $\alpha\in[0,1)$ vardır. Bu durumda her $u>t$ ve her $r\in(0,1)$ için $B(x,r,u)\not\subseteq\left[f^{-1}(\mu)\right]^{\alpha}$ olacak şekilde $x\in\left[f^{-1}(\mu)\right]^{\alpha}$ bulunur. Ayrıca $f^{-1}(\mu)(x)>\alpha$ yani $\mu(f(x))>\alpha$ dır. Dolayısıyla $f(x)\in[\mu]^{\alpha}\in(\tau^{M_2})_{\alpha}$ dır. Böylece $B(f(x),\varepsilon,s)\subset[\mu]^{\alpha}$ olacak şekilde $\varepsilon\in(0,1)$ ve $s>t$ vardır. f $\bar{t}$ -sürekli olduğundan $M_1(x,y,v)>1-\delta$ iken $M_2(f(x),f(y),s)>1-\varepsilon$ olacak şekilde $\delta\in(0,1)$ ve $v>t$ vardır. Yani $y\in B(x,\delta,v)$ iken $f(x)\in B(f(x),\varepsilon,s)$ dir. Bu ise bir çelişkidir.

Objeleri bulanık metrik uzaylar, morfizimleri $*$-sürekli dönüşümler olan kategori $\mathbb{FUZFM}$ ve objeleri Lowen bulanık topolojik uzaylar ve morfizimleri Lowen bulanık sürekli dönüşümler olan kategori $\mathbb{SFUZTOP}$ olsun. Teorem 2.5.1.15 neticesinde bu iki kategori arasında

$\varphi:\mathbb{FUZFM}\to\mathbb{SFUZTOP}$

şeklinde bir funktoru tanımlarız.

Bulanık metrikten üretilen Lowen bulanık topolojik uzaylarda kompaktlık, tamamen sınırlılık ve tamlık kavramlarını incelemek için bulanık metrik uzaylardaki p-yakınsaklık kavramı aşağıdaki gibi değiştirilmiştir.

Tanım 2.5.1.16: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay, (x_n) X de bir dizi, $x_0\in X$ ve $t>0$ olsun. En az bir $s>t$ için $\lim M(x_n,x_0,s)=1$ ise x_n'e x_0 a $\bar{t}$-yakınsaktır denir.

Tanım 2.5.1.17: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay, (x_n) X de bir dizi ve $t>0$ olsun. En az bir $s>t$ için $\lim M(x_n,x_m,s)=1$ ise (x_n)'e $\bar{t}$-Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.5.1.18: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay ve $t > 0$ olsun. Her $r \in (0,1)$ ve her $s > t$ için,

$$X = \bigcup_{a \in A} B(a,r,s)$$

şeklinde X'in sonlu bir A alt kümesi varsa $(X, M, *)$'a $\bar{t}$-tamamen sınırlı (prekompakt, totally bounded) denir.

Uyarı 2.5.1.19: $\bar{0}$-tamamen sınırlılık Tanım 2.3.31'de verilen tamamen sınırlılıkla örtüşür.

Tanım 2.5.1.20: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay olsun. X'deki her (x_n) dizisinin $\bar{t}$-yakınsak bir altdizisi varsa $(X, M, *)$'a $\bar{t}$-kompakt bulanık metrik uzay denir.

Önerme 2.5.1.21: Kompakt bulanık metrik uzaylar her $t > 0$ için $\bar{t}$-kompakttır.

Teorem 2.5.1.22: $(X, M, *)$ bir güçlü GV-bulanık metrik uzay, $\alpha \in (0,1)$, $t = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ ve (X, τ_α^M) bu bulanık metrikten üretilen Lowen bulanık topolojinin bir α-seviye topolojisi olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(a) (X, τ_α^M) bulanık kompakttır.

(b) $(X, M, *)$ $\bar{t}$-kompakttır.

(c) $(X, M, *)$ $\bar{t}$-tamamen sınırlı ve $\bar{t}$-tamdır.

İspat: "(a)⇒(b)" (X, τ_α^M) bulanık kompakt fakat $(X, M, *)$ $\bar{t}$-kompakt olmasın. Yani X de bir (x_n) dizisi olsun fakat $\bar{t}$-yakınsak bir alt dizisi olmasın. $i \neq j$ iken $x_i \neq x_j$ olduğunu kabul edelim. Dikkat edilirse (x_n) dizilerinin her terimi $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nin bir izole noktasıdır. Bunu görmek için x_{i_0} $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ in izole noktası olmadığını kabul edelim. Bu durumda her r ve her $s > t$ için $M(x_{i_0}, x_j, s) > 1 - r$ olacak şekilde $x_j \in \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $r = \frac{1}{n}$ olsun. Bu durumda $M\left(x_{i_0}, x_{j_n}, s\right) > 1 - \frac{1}{n}$ olacak şekilde $x_{j_n} \in \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ vardır. Burdan (x_{j_n}) in (x_n) in bir $\bar{t}$-yakınsak alt dizisi olduğu sonucuna varırız ki bu bir çelişkidir. Böylece her i için $i \neq j$ iken $x_j \notin B(x_i, r_i, s_i)$ olacak şekilde $r_i \in (0,1)$ ve $s_i > t$ vardır.

$U_0 = X / \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ olsun. Böylece $U_0 \in \tau_\alpha$ dır. Sonuç olarak $\{U_0\} \cup \{B(x_i,r_i,t_i)\}$ X in açık örtümüdür. Fakat sonlu bir alt örtümü yoktur. Bu ise bir çelişkidir.

"(b)⇒(c)" $(X, M, *)$ $\bar{t}$-kompakt ve (x_n) $\bar{t}$-Cauchy dizisi olsun. $(X, M, *)$ ın $\bar{t}$-tam olduğu aşikardır. $\bar{t}$-tamamen sınırlılığın ispatı ise (Gregori ve Romaguera, 2000) nın Teorem 4'te verdiğine benzer şekildedir.

"(c)⇒(a)" $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$, X'in bir açık örtümü olsun. $\mathcal{U}$ nun sonlu bir altörtümünün olmadığını kabul edelim. X, $\bar{t}$-tamamen sınırlı olduğundan $s > t$ için X i örten $\overline{B}\left(x_1^1, \frac{1}{2}, s\right), \ldots, \overline{B}\left(x_n^1, \frac{1}{2}, s\right)$ kapalı yuvarlarının sonlu bir kümesi vardır. Bu kümelerden biri $\mathcal{U}$ nun sonlu bir altailesi ile örtülemez. Bu küme X^1 olsun. X^1, X in bir altkümesi olduğundan $\bar{t}$ -tamamen sınırlıdır. Bu durumda X^1 i örten $\overline{B}\left(x_1^2, \frac{1}{2^2}, s\right), \ldots, \overline{B}\left(x_n^2, \frac{1}{2^2}, s\right)$ vardır. Yine bu kümelerden biri $\mathcal{U}$ nun sonlu bir altailesi ile örtülemez. Bu kümeyi de X^2 ile gösterelim. Bu şekilde devam edersek $\ldots \subset X^n \subset X^{n-1} \subset \ldots \subset X^1$ olacak şekilde X^n kapalı kümelerinin bir dizisini elde ederiz. Bu yuvarların merkezi olarak $y_1 = x_i^1, \ldots, y_n = x_i^n, \ldots$ olacak şekildeki dizileri seçelim. Bu durumda her $n,m>k$ için $y_n, y_m \in X^k$ dır. Buradan her $n, m \geq k$ için $M(y_n,y_m,s) > \frac{1}{2^k}$ dır. Yani y_n bir $\bar{t}$-Cauchy dizisidir. X, $\bar{t}$-tam olduğundan y_n bir y noktasına $\bar{t}$-yakınsar. Her $n > m$ için $y_n \in X^m$ ve X^m kapalı olduğundan her $m \in \mathbb{N}$ için $y \in X^m$ olduğu elde edilir. $\mathcal{U}$, X^m yi örttüğünden x noktası bir U_i ye aittir. Bu da $\varepsilon \in (0,1)$ ve $s > t$ için $B(y,\varepsilon,s) \subset U_i$ olduğu anlamına gelir. $\left(1 - \frac{1}{2^{m'}}\right) * \left(1 - \frac{1}{2^{m'}}\right) \geq 1 - \varepsilon$ olacak şekilde m' ve $m_0 = \max\{m, m'\}$ olsun. $x \in X^{m_0}$ ise $M(x,y,s) \geq M(x,x_{m_0},s) * M(x_{m_0},y,s) > \left(1 - \frac{1}{2^{m'}}\right) * \left(1 - \frac{1}{2^{m'}}\right) \geq 1 - \varepsilon$ dir. Yani, $x \in B(y,\varepsilon,s)$ dir. Böylece $X^{m_0} \subset U_i$ elde edilir. Bu bir çelişkidir.

Önerme 2.5.1.21 ve Teorem 2.5.1.22 den aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 2.5.1.23: $(X, M, *)$ bir güçlü bulanık metrik uzay, $(X,T_{\bar{\alpha}})$ bu bulanık metrikten üretilen klasik bir topolojik uzay ve (X,τ^M) bu bulanık metrikten üretilen Lowen bulanık topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(a) $(X, M, *)$ kompakttır.

(b) (X, τ^M) ultra bulanık kompakttır.

(c) (X,τ^M) güçlü bulanık kompakttır.

(d) $\left(X,w(T_{\bar{\alpha}})\right)$ bulanık kompakttır.

Sonuç 2.5.1.24: $(X, M, *)$ esas güçlü bulanık metrik uzay, $\alpha \in [0,1)$ için $(X,T_{\bar{\alpha}})$ bu bulanık metrik uzaydan üretilen klasik bir topolojik uzay ve (X,τ^M) bu bulanık metrikten üretilen Lowen bulanık topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(a) $(X, M, *)$ kompakttır.

(b) (X,τ^M) ultra bulanık kompakttır.

(c) (X,τ^M) güçlü bulanık kompakttır.

(d) $\left(X,w(T_{\bar{\alpha}})\right)$ bulanık kompakttır.

e) (X,τ^M) bulanık kompakttır.

Uyarı 2.5.1.25: $\tau^M \subseteq w(T_{\bar{\alpha}})$ olduğundan (X,τ^M) bulanık kompakt ise $(X, M, *)$ kompakttır.

Teorem 2.5.1.26: (X,τ^M)bulanık kompakt ise $(X, M, *)$ tamamen sınırlıdır.

İspat: (X,τ^M) bulanık kompakt, $t > 0$ ve $r \in (0,1)$ olsun. $\beta \in \left(0, \frac{t}{t+1}\right)$ olsun. Her $x \in X$ için $B_\beta(x,r,t) \in \tau^M$ ise $\bigvee_{x \in X} B_\beta(x,r,t) \geq \beta$ dır. (X,τ^M) bulanık kompakt olduğundan her $\varepsilon \in (0,\beta)$ için $\bigvee_{i=1}^{n} B_\beta(x_i,r,t) \geq \beta - \varepsilon > 0$ olacak şekilde $x_1,x_2,\ldots,x_n$ vardır. Bu durumda $X = \bigcup_i^n B(x_i,r,t)$ elde edilir. Sonuç olarak $(X, M, *)$ tamamen sınırlıdır.

2.5.2. KM-Bulanık metrikle üretilen bulanık topoloji

Kramosil-Michalek anlamındaki bulanık metrik uzaydan Lowen bulanık topoloji üretmek için gerekli yapı kurularak KM-bulanık metrikten üretilen klasik topolojilerin azalan bir ailesi elde edilecektir. Bu aile yardımıyla Lowen bulanık topoloji üretilecektir. Üretilmiş bulanık topolojik uzayda süreklilik ve kompaktlık gibi yapılar çalışılacaktır. Daha sonra Lowen bulanık topolojik uzaylar kategorisi ile KM-bulanık metrik uzaylar kategorisi arasında bir funktor tanımlanacaktır.

Bu bölüm boyunca $(X,M,\wedge)$ Kramosil-Michalek anlamındaki bulanık metrik uzayı olarak ele alınacak ve t-norm olarak eşgüçlü t-norm olan minimum t-normu kullanılacaktır.

Önerme 2.5.2.1: $(X,M,\wedge)$ bir bulanık metrik uzay ve $r \in (0,1)$ olsun. Bu taktirde,

$\mathcal{B}_{\bar{r}} = \{B(x,q,t) \mid x \in X,\ q > r\ ,\ t > 0\}$

ailesi X üzerinde klasik bir topolojinin bir tabanıdır.

İspat: $q_1, q_2 > r$ iken $z \in B(x,q_1,t) \cap B(y,q_2,s)$ olsun. Bu durumda $M(x,z,t) > 1 - q_1$ ve $M(y,z,s) > 1 - q_2$ dir. Böylece $M(x,z,t_0) > 1 - q_1$ ve $M(y,z,s_0) > 1 - q_2$ olacak şekilde $t_0 < t$ ve $s_0 < s$ vardır. $q = \min\{q_1, q_2\}$ ve $p = \min\{t - t_0\ ,\ s - s_0\}$ olsun. $B(z,1-q,p)$ yi ele alalım. $B(z,1 - q,p) \subset B(x,q_1,t) \cap B(y,q_2,s)$ dir. Gerçekten, $u \in B(z,q,p) \subset B(z,q,t - t_0)$ alalım. $M(u,z,t - t_0) > 1 - q$ dir. Böylece $M(x,u,t) \geq M(x,z,t_0) \wedge M(z,u,t - t_0) > (1 - q_1) \wedge (1 - q) = 1 - q_1$ dir. Böylece $u \in B(x,q_1,t)$ dir ve $B(z,q,p) \subset B(x,q_1,t)$ dir. Şimdi de $u \in B(z,q,p) \subset B(z,q,s - s_0)$ olsun. $M(u,z,s - s_0) > 1 - q$ dir. Böylece $M(y,u,s) \geq M(y,z,s_0) \wedge M(z,u,s - s_0) > (1 - q_2) \wedge (1 - q) = 1 - q_2$ dir. Buradan $u \in B(y,q_2,s)$ dir ve $B(z,q,p) \subset B(y,q_2,s)$ elde edilir. Sonuç olarak $B(z,q,p) \subset B(x,q_1,t) \cap B(y,q_2,s)$ dir.

Uyarı 2.5.2.2: $\mathcal{B}_{\bar{r}}$ ailesi X kümesi üzerinde $T_{\bar{r}}$ klasik topolojisinin bir tabanıdır. Bu topoloji aşağıdaki gibi karakterize edilir. $G \subseteq X$ ve $r \in (0,1)$ olmak üzere,

$G \in T_{\bar{r}} \Leftrightarrow \forall\, x \in G$ için $\exists\, t > 0$ ve $q > r : B(x,q,s) \subset G$

dir. Diğer bir ifadeyle,

$$G \in T_{\bar{r}} \Leftrightarrow G = \bigcup_{\substack{q > \alpha \\ B(x,q,t) \subset G}} B(x, q, t).$$

Sonuç 2.5.2.3: X bir küme, $G \subset X$ ve $r \in (0,1)$ olsun. Bu durumda,

$T_{\bar{r}} = \{G \subset X \mid \forall\, x \in G, \exists\, t > 0$ ve $q > r$ öyle ki $B(x,q,t) \subset G\}$

ailesi X kümesi üzerinde klasik bir topolojidir ve $r = 0$ için $T_{\bar{0}} = T_M$ dir.

$\beta < \alpha$ iken $B_\alpha \subset B_\beta$ olduğundan aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 2.5.2.4: $r, q \in (0,1)$ ve $r < q$ olsun. Bu durumda $B_{\bar{q}} \subset B_{\bar{r}}$ dir. Dolayısıyla $\{T_{\bar{r}} \mid r \in [0,1)\}$ klasik topolojilerin azalan bir ailesidir.

Teorem 2.5.2.5: $(X,M,\wedge)$ bir bulanık metrik uzay ve $\{T_{\bar{r}} \mid r \in [0,1)\}$ bu metrikle üretilen klasik topolojilerin bir ailesi olsun. Bu durumda,

$\mathcal{T}^M := \{\lambda \mid$ her $r \in [0,1)$ için $\lambda_r \in T_{\bar{r}}\}$

kümesi $\imath_r(\mathcal{T}^M) = T_{\bar{r}}$ şartını sağlayan en ince Lowen bulanık topolojidir.

Uyarı 2.5.2.6: Teorem 2.5.2.5 ve Önerme 2.2.11 nin sonucunda $\imath(\mathcal{T}^M) = T_{\bar{r}}$ elde edilir.

Aşağıdaki teoremde Tanım 2.5.1.7' de tanımlanan β-açık yuvarların ailesinin $w(T_{\bar{r}})$ topolojisi için bir taban olduğu verilmiştir.

Teorem 2.5.2.7: $(X,M,\wedge)$ bir bulanık metrik uzay olsun. Bu taktirde,

$\mathcal{B} = \{B_\beta(x,q,t) \mid x \in X, q \in (0,1), t > 0, \beta \in (0,1)\}$

ailesi $w(T_{\bar{r}})$ Lowen bulanık topolojisi için bir tabandır.

İspat: $\mathcal{B} \subset w(T_{\bar{r}})$ olduğu açıktır. $\lambda \in w(T_{\bar{r}})$ ve $\lambda(x) > 0$ olsun. λ alttan yarı sürekli olduğundan $\lambda(x) - \varepsilon > 0$ olacak şekildeki her $\varepsilon \in (0,1)$ için $y \in B(x,r,t)$ iken $\lambda(y) \geq \lambda(x) - \varepsilon$ sağlayan $r \in (0,1)$ ve $t > 0$ vardır. $\beta = \lambda(x) - \varepsilon$ seçilirse $B_\beta(x,r,t) \leq \lambda$ olduğu sonucuna varılır.

Uyarı 2.5.2.8: $(X,M,\wedge)$ bulanık metrik uzayı co-esas ise bu bulanık metrikten üretilen tüm klasik topolojilerin seviye topolojileri eşittir yani, her $r \neq q$ için $T_{\bar{r}} = T_{\bar{q}}$ dır.

Önerme 2.2.15 ve Teorem 2.5.2.5' in neticesinde aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.5.2.9: $(X,M,\wedge)$ bulanık metrik uzayı co-esas ise $(X,\mathcal{T}^M)$ üretilmiş bir topolojik uzaydır yani, $\mathcal{T}^M = w\left(\imath(T_{\bar{r}})\right)$ dir.

Fakat Sonuç 2.5.2.9'in tersi her zaman doğru değildir. Aşağıdaki örnekte co-esas olmayan bulanık metrik uzaylarda genel olarak $\tau_M \neq w\left(\imath\left(T^M\right)\right)$ olduğu gösterilmiştir.

Örnek 2.5.2.10: $f : [0,1) \to \left(\frac{1}{2},1\right]$ azalmayan, sol sürekli ve örten bir fonksiyon ve $X \times X \times (0,\infty)$ üzerindeki M dönüşümü

$$M(x,y,t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ f\left(\frac{t}{|x-y|}\right), & x \neq y,\ t \geq 0 \\ 1, & x = y,\ t \geq 0 \end{cases}$$

şeklinde olsun. $(X,M,\wedge)$ bulanık metrik uzayı co-esas değildir (Mardones-Pérez ve Prada Vicente, 2012). Bu metrik uzayda $\frac{2}{3}B\left(x,\frac{1}{3},t\right) \in w\left(\imath(\mathcal{T}^M)\right)$ olmasına rağmen $\frac{2}{3}B\left(x,\frac{1}{3},t\right) \notin \mathcal{T}^M$ dir.

Bulanık metrik uzayında $\beta \in (0,1)$ ve $q \in (0,1)$ arasındaki ilişkiyi göz önünde bulundurarak $\mathcal{T}^M$ Lowen bulanık topolojik uzayı için bir taban aşağıdaki önermedeki gibi elde edilebilir.

Önerme 2.5.2.11: $(X,M,\wedge)$ bir bulanık metrik uzay olsun. Bu durumda,

$\mathcal{B}_2=\{ B_\beta(x,q,t) \mid x \in X, q \in (0,1), t > 0, \beta \in (0,q)\}$

ailesi $\mathcal{T}^M$ Lowen bulanık topolojik uzayı için bir tabandır.

İspat: $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{T}^M$ olduğunu görelim. $\alpha < \beta$ ise $\left[B_\beta(x,r,t)\right]^\alpha = B(x,r,t)$ dir. $r > \beta$ olduğundan $r > \alpha$ dır. Böylece $B(x,r,t) \in \mathcal{B}_2 \subset T_{\bar{r}}$ dır. Sonuç olarak $B_\beta(x,r,t) \in \mathcal{T}^M$'dır.

$\lambda \in \mathcal{T}^M$ ve $\lambda(x) > 0$ olsun. $\lambda(x) > \alpha > 0$ olacak şekildeki her $\alpha \in [0,1)$ için $[\lambda]^\alpha \in T_\alpha$ ve $x \in [\lambda]^\alpha$ dır. $T_{\bar{r}}$ nın tanımından $B(x,r,t) \subset [\lambda]^\alpha$ olacak şekilde $r > \alpha$ vardır. Buradan her $y \in B(x,r,t)$ için $\lambda(y) > \alpha$ dır. Sonuç olarak $B_\alpha(x,r,t) \leq \lambda$ dır.

Kramosil-Michalek anlamındaki bulanık metrik uzaylar arasındaki süreklilik ile bu bulanık metrikten üretilen Lowen bulanık topolojik uzaylar arasındaki süreklilik kavramları arasında uyumsuzluk vardır. Bu durumu düzeltmek için aşağıda bulanık metrik uzaylar arasında yeni bir süreklilik tanımı verilmiştir.

Tanım 2.5.2.12: $(X,M_1,\wedge)$ ve $(Y,M_2,\wedge)$ iki bulanık metrik uzay, $f : (X,M_1,\wedge) \to (Y,M_2,\wedge)$ bir fonksiyon ve $r \in [0,1)$ olsun. Her $q \in (0,1)$ ve $\varepsilon \in (r,1)$ için $M_1(x,y,s) > 1 - \delta$ iken $M_2(f(x),f(y),q) > 1 - \varepsilon$ olacak şekilde $s \in (0,1)$ ve $\delta \in (r,1)$ varsa f fonksiyonuna $\bar{r}$-süreklidir denir.

Tanım 2.5.2.13: $f : (X,M_1,\wedge) \to (Y,M_2,\wedge)$ fonksiyonu her $r \in [0,1)$ için $\bar{\alpha}$-sürekli ise $\star$-süreklidir denir.

Uyarı 2.5.2.14: $\bar{r}$-süreklilik, Tanım 2.1.19 de verilen klasik süreklilik kavramından daha güçlüdür. Ayrıca $\bar{0}$-süreklilik, klasik süreklilik tanımıyla örtüşür.

Teorem 2.5.2.15: $(X,M_1,\wedge)$ ve $(Y,M_2,\wedge)$ iki bulanık metrik uzay ve sırasıyla $(X,\mathcal{T}^{M_1})$, $(Y,\mathcal{T}^{M_2})$ bu metrik uzaylardan üretilen iki Lowen bulanık topolojik uzaylar olsun. $f : (X,M_1,\wedge) \to (Y,M_2,\wedge)$ fonksiyonu $\star$-sürekli olması için gerek ve yeter şart $f : (X,\mathcal{T}^{M_1}) \to (Y,\mathcal{T}^{M_2})$ fonksiyonunun Lowen bulanık sürekli olmasıdır.

İspat: $f:(X,\mathcal{T}^{M_1}) \rightarrow$ Lowen bulanık sürekli ve $x \in X$ olsun. $\varepsilon > 0$ ve $\alpha \in [0,1)$ alalım. $r > \alpha$ iken $B(f(x),r,\varepsilon) \in (T_{M_2})_\alpha$ dır. $r > \beta > \alpha$ olacak şekilde $\beta \in (0,1)$ alalım. Bu durumda $B_\beta(f(x),r,\varepsilon) \in \mathcal{T}^{M_2}$ dir. f sürekli olduğundan $f^{-1}\left(B_\beta(f(x),r,\varepsilon)\right) \in \tau_{M_1}$ dir. Yani $\left[f^{-1}\left(B_\beta(f(x),r,\varepsilon)\right)\right]^\alpha = f^{-1}(B(f(x),r,\varepsilon)) \in (T_{M_1})_\alpha$ dır. Bu durumda $B(x,s,\delta) \subset f^{-1}(B(f(x),r,\varepsilon))$ olacak şekilde $\delta > 0$ ve $s > \alpha$ vardır. Yani her $y \in B(x,s,\delta)$ için $f(y) \in B(f(x),r,\varepsilon)$ dir. Buradan $r, s > \alpha$ için $M_1(x,y,\delta) > 1 - s$ iken $M_2(f(x),f(y),\varepsilon) > 1 - r$ elde edilir. Sonuç olarak $f:(X,M_1,*_{M_1}) \rightarrow (Y,M_2,*_{M_2})$ fonksiyonu $\star$-süreklidir.

$f:(X,M_1,*_{M_1}) \rightarrow (Y,M_2,*_{M_2})$ fonksiyonu her $r \in [0,1)$ için $\bar{r}$ -sürekli fakat $f:(X,\mathcal{T}^{M_1}) \rightarrow (Y,\mathcal{T}^{M_2})$ fonksiyonu Lowen bulanık sürekli olmasın. Bu durumda $f^{-1}(\mu) \notin \mathcal{T}^{M_1}$ olacak şekilde $\mu \in \mathcal{T}^{M_2}$ vardır. Yani en az bir $\alpha \in [0,1)$ için $[f^{-1}(\mu)]^\alpha \notin (T_{M_1})_\alpha$ dır. Bu durumda her $u \in (\alpha,1)$ ve her $t > 0$ için $B(x,u,t) \not\subseteq [f^{-1}(\mu)]^\alpha$ olacak şekilde $x \in [f^{-1}(\mu)]^\alpha$ bulunur. Ayrıca $f^{-1}(\mu)(x) = \mu(f(x)) > \alpha$ dır. Dolayısıyla $f(x) \in [\mu]^\alpha \in (\tau_{M_2})_\alpha$ dır. Böylece $B(f(x),r,\varepsilon) \subset [\mu]^\alpha$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ ve $r \in (\alpha,1)$ vardır. f $\bar{\alpha}$-sürekli olduğundan $M_1(x,y,\delta) > 1-s$ iken $M_2(f(x),f(y),\varepsilon) > 1 - r$ olacak şekilde $\delta > 0$ ve $s > \alpha$ vardır. Yani $y \in B(x,\delta,s)$ iken $f(y) \in B(f(x),r,\varepsilon)$ dir. Bu ise bir çelişkidir.

Objeleri KM-bulanık metrik uzaylar, morfizimleri $\star$-sürekli dönüşümler olan kategori $\mathbb{KMFUZFMS}$ ve objeleri Lowen bulanık topolojik uzaylar ve morfizimleri Lowen bulanık sürekli dönüşümler olan kategori $\mathbb{SFUZTOP}$ olsun. Teorem 2.5.2.15 neticesinde bu iki kategori arasında

$\varphi: \mathbb{KMFUZFMS} \rightarrow \mathbb{SFUZTOP}$

şeklinde bir funktor tanımlarız.

KM bulanık metrikten üretilen bulanık topolojik uzaylarda kompaktlık kavramını incelemek için bulanık metrik uzaylardaki α-yakınsaklık kavramı yardımıyla aşağıdaki Lemma elde edilmiştir.

Lemma 2.5.2.16: $(X,M_1,\wedge)$ bir bulanık metrik uzay ve (x_n) X'de bir dizi olsun. $r + \frac{1}{k} < 1$ olan $k \in \mathbb{N}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $M(x_n,x,t) > 1 - \left(r + \frac{1}{kn}\right)$ ise (x_n) dizisi x noktasına α -yakınsaktır.

İspat: (x_n), x_0'a α-yakınsak olmasın. Bu durumda $\varepsilon \in (0, 1 - \alpha)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $M(x_{n_1},x_0,t) \leq 1 - \alpha - \varepsilon$ olacak şekilde $n_1 > n$ vardır. $\frac{1}{n_2} < \varepsilon$ olacak şekildeki $n_2 \in \mathbb{N}$ için $M(x_{n_1},x_0,t) \leq 1 - \alpha - \varepsilon < 1 - \alpha - \frac{1}{n_2}$ dir. Bu durumda $M(x_{n_2},x_0,t) \leq 1 - \alpha - \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \geq n_2$ vardır. $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ seçelim. $\alpha + \frac{1}{k} < 1$ iken $M(x_{n_0},x_0,t) \leq 1 - \alpha - \varepsilon \leq 1 - \alpha - \frac{1}{n_0} \leq 1 - \alpha - \frac{1}{kn_0}$ dır. Bu ise bir çelişkidir.

Tanım 2.5.2.17: $(X,M,\wedge)$ bir bulanık metrik uzay, $A \subset X$, $x \in A$ ve $r \in (0,1)$ olsun. $B(x,r,t) \cap A = \{x\}$ olacak şekilde $t > 0$ ve $r > \alpha$ varsa, x'e A'nın α-izole noktasıdır denir.

Teorem 2.5.2.18: $(X,M,\wedge)$ bir bulanık metrik uzay, $\alpha \in (0,1)$ ve $(X,\mathcal{T}_\alpha^M)$ bu bulanık metrikten üretilen Lowen bulanık topolojinin bir α-seviye topolojisi olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(a) $(X,T_{\bar{\alpha}})$ kompakttır.

(b) $(X,M,\wedge)$ α-kompakttır.

(c) $(X,M,\wedge)$ α-tamamen sınırlı ve α-tamdır.

İspat: "(a)⇒(b)" $(X,T_{\bar{\alpha}})$ kompakt ve (x_n) α-yakınsak bir alt dizisi olmayan X de bir dizi olsun. $i \neq j$ iken $x_i \neq x_j$ olduğunu kabul edelim. Dikkat edilirse (x_n) dizisinin her terimi $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nin bir α -izole noktasıdır. Gerçekten, x_{i_0} $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 'in α-izole noktası olmasın. Bu durumda her $r \in (\alpha,1)$ ve her $t > 0$ için $M(x_{i_0},x_j,t) > 1 - r$ olacak şekilde $x_j \in \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ vardır. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\alpha + \frac{1}{k} < 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $r = \alpha + \frac{1}{kn}$ olsun. Bu durumda $M\left(x_{i_0},x_{j_n},t\right) > 1 - \left(\alpha + \frac{1}{kn}\right)$ olacak şekilde $x_{j_n} \in \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ vardır. Lemma 2.5.2.14' den (x_{j_n}) (x_n) in bir α-yakınsak bir altdizisidir. Bu da bir çelişkidir. Böylece her i için $i \neq j$ iken $x_j \notin B(x_i,r_i,t_i)$ olacak

şekilde $r_i \in (\alpha,1)$ ve $t > 0$ vardır. $U_0 = X / \{ x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ olsun. Böylece $U_0 \in \mathcal{T}_\alpha^M$ dır. Gerçekten, $U_0 = X / \{ x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ açık olmasın. Bu durumda her $r \in (\alpha,1)$ ve her $t > 0$ için $B(y,r,t) \cap \{ x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ olacak şekilde $y \in U_0$ vardır. $\alpha + \frac{1}{k} < 1$ i sağlayan $k \in \mathbb{N}$ ile $r = \alpha + \frac{1}{kn}$ alalım. $B\left(y,\alpha + \frac{1}{k\,n},t\right) \cap \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ dir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{i_n} \in B\left(y, \alpha + \frac{1}{k\,n}, t\right)$ sağlanır. Yani her $n \in \mathbb{N}$ için $M\left(x_{i_n},y, t + \frac{1}{n}\right) > 1 - \left(\alpha + \frac{1}{kn}\right)$ dir. Bu da x_{i_n} in α-yakınsak olduğunu gösterir. Bu da bir çelişkidir. Sonuç olarak $\{U_0\} \cup \{B(x_n,r_n,t_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ X in bir açık örtümüdür. Fakat sonlu bir alt örtümü yoktur. Çünkü bu kümenin her sonlu alt örtümü, birleşiminde dizinin sonsuz tane terimini içermez. Bu da kompaktlıkla bir çelişki oluşturur.

"(b)$\Rightarrow$(c)" $(X,M,\wedge)$ α-kompakt ve (x_n) X de bir α-Cauchy dizisi olsun. $(X,M,\wedge)$ α-kompakt olduğundan α-yakınsak bir alt dizisi vardır. Böylece $(X,M,\wedge)$ α-tamdır.

X α-tamamen sınırlı olmasın. Bu durumda $t > 0$ ve $r > \alpha$ olmak üzere $B(x,r,t)$ formundaki sonlu yuvarlar tarafından X örtülemez. $x_1 \in X$ alalım. $B(x_1,r,t)$ X i örtmediğinden $x_2 \in X \setminus B(x_1,r,t)$ vardır. $B(x_1,r,t) \cup B(x_2,r,t)$ de X i örtmez. Bu yüzden $X \setminus B(x_1,r,t) \cup B(x_2,r,t)$ de en az bir nokta vardır. Bu şekilde devam ederek $x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,r,t)$ i sağlayan bir (x_n) dizisi elde edilir. n, m için $M(x_n,x_m,t) < 1 - r$ olduğundan bu dizinin α-yakınsak bir alt dizisi olamaz. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla X α-tamamen sınırlıdır.

"(c)$\Rightarrow$(a)" $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$, X'in bir açık örtümü olsun. $\mathcal{U}$ nun sonlu bir altörtümünün olmadığını kabul edelim. X, α-tamamen sınırlı olduğundan her $r > \alpha$ için X i örten $\overline{B}\left(x_1^1,r,\frac{1}{2}\right), \ldots, \overline{B}\left(x_n^1,r,\frac{1}{2}\right)$ kapalı yuvarlarının sonlu bir kümesi vardır. Bu kümelerden biri $\mathcal{U}$ nun sonlu bir alt ailesi ile örtülemez. Bu küme X^1 olsun. X^1, X in bir altkümesi olduğundan X^1 α-tamamen sınırlıdır. Bu durumda X^1 i örten $\overline{B}\left(x_1^2,r,\frac{1}{2^2}\right),\ldots,$ $\overline{B}\left(x_n^2,r,\frac{1}{2^2}\right)$ vardır. Yine bu kümelerden biri $\mathcal{U}$ nun sonlu bir alt ailesi ile örtülemez. Bu kümeyi de X^2 ile gösterelim. Bu şekilde devam edersek $\ldots \subset X^n \subset X^{n-1} \subset \ldots \subset X^1$ olacak şekilde X^n kapalı kümelerinin bir dizisini elde ederiz. Bu yuvarların merkezi olarak $y_1 = x_i^1, \ldots, y_n = x_i^n, \ldots$ olacak şekildeki dizileri seçelim. Bu durumda her $n, m \geq k$ için

$y_n, y_m \in X^k$ dır. Buradan her $n,m \geq k$ için $M\left(y_n,y_m,\frac{1}{2^k}\right) > 1 - r$ dır. Bu durumda her $t > 0$ için $k \geq k_0$ iken $\frac{1}{2^k} < t$ olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $M(y_n,y_m,t) \geq M\left(y_n,y_m,\frac{1}{2^k}\right) > 1 - r$ dir. Dolayısıyla y_n bir α-Cauchy dizisidir. X, α-tam olduğundan y_n bir y noktasına α-yakınsar. Her $n > m$ için $y_n \in X^m$ ve X^m kapalı olduğundan her $m \in \mathbb{N}$ için $y \in X^m$ olduğu elde edilir.

$\mathcal{U}$, X^m yi örttüğünden x noktası bir U_i ye aittir. Bu da $r \in (\alpha,1)$ ve $t > 0$ için $B(y,r,t) \subset U_i$ olduğu anlamına gelir. $\frac{1}{2^{m_0}} < \frac{t}{2}$ olacak şekilde $m_0 \in \mathbb{N}$ alalım. $x \in X^{m_0}$ ise

$$M(x,y,t) \geq M\left(x,y_{m_0},\frac{t}{2}\right) \wedge M\left(y_{m_0},y,\frac{t}{2}\right)$$

$$\geq M\left(x,y_{m_0},\frac{1}{2^{m_0}}\right) \wedge M\left(y_{m_0},y,\frac{1}{2^{m_0}}\right)$$

$$> (1 - r) * (1 - r) = 1 - r$$

dir. Yani, $x \in B(y,r,t)$ dir. Böylece $X^{m_0} \subset U_{i_0}$ elde edilir ki bu bir çelişkidir.

Teorem 2.5.2.16 ve Önerme 2.3.36'dan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.5.2.19: $(X,M,\wedge)$ bir bulanık metrik uzay ve $(X,\mathcal{T}^M)$ bu bulanık metrikten üretilen Lowen bulanık topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(a) $(X,M,\wedge)$kompakttır.

(b) $(X,\mathcal{T}^M)$ ultra bulanık kompakttır.

(c) $(X,\mathcal{T}^M)$ güçlü bulanık kompakttır.

(d) $\left(X,w(T_{\bar{r}})\right)$ bulanık kompakttır.

Sonuç 2.5.2.20: $(X,M,\wedge)$ bir bulanık co-esas metrik uzay ve $(X,\mathcal{T}^M)$ bu bulanık metrikten üretilen Lowen bulanık topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(a) $(X,M,\wedge)$kompakttır.

(b) $(X,\mathcal{T}^M)$ ultra bulanık kompakttır.

(c) $(X,\mathcal{T}^M)$ güçlü bulanık kompakttır.

(d) $\left(X,w(T_{\bar{r}})\right)$ bulanık kompakttır.

(e) $(X,\mathcal{T}^M)$ bulanık kompakttır.

Uyarı 2.5.2.21: $\mathcal{T}^M \subseteq w(T_{\bar{r}})$ olduğundan $(X,\mathcal{T}^M)$ bulanık kompakt ise $(X,M,\wedge)$ kompakttır.

Önerme 2.5.2.22: $(X,\mathcal{T}^M)$ bulanık kompakt ise $(X,M,\wedge)$ tamamen sınırlıdır.

İspat: $(X,\mathcal{T}^M)$ bulanık kompakt, $t>0$ ve $r\in(0,1)$ olsun. $\beta \in \left(0,\frac{t}{t+1}\right)$ seçelim. Bu durumda her $x\in X$ için $\bigvee_{x\in X} B_\beta(x,r,t) \geq \beta$ yi sağlayan $B_\beta(x,r,t)\in \tau_M$ dir. $(X,\mathcal{T}^M)$ bulanık kompakt olduğundan her $\varepsilon\in(0,\beta)$ için $\bigvee_{i=1}^{n} B_\beta(x_i,r,t) \geq \beta - \varepsilon > 0$ olacak şekilde $x_1,x_2,\ldots,x_n$ vardır. Böylece $X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,r,t)$ dir. Sonuç olarak $(X,M,\wedge)$ tamamen sınırlıdır

Teorem 2.5.2.23: $(X,M,\wedge)$ bulanık metrik uzayının α-tamamen sınırlı olması için gerek ve yeter şart X'deki her dizinin bir α-Cauchy altdizisinin olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\alpha\in(0,1)$, $(X,M,\wedge)$ bulanık metrik uzayı α-tamamen sınırlı ve (x_n) X de bir dizi olsun. Böylece her $m\in\mathbb{N}$ için $X=\bigcup_{a\in A_m} B\left(a,\alpha,\frac{1}{m}\right)$ olacak şekilde X in sonlu bir A_m altkümesi vardır. m=1 için $a_1\in A_1$ vardır ve her $n\in\mathbb{N}$ için $\left(x_{1(n)}\right)\in B(a_1,\alpha,1)$ olacak şekilde (x_n) in bir $\left(x_{1(n)}\right)$ alt dizisi vardır. Benzer şekilde, $a_2\in A_2$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için $\left(x_{2(n)}\right)\in B\left(a_2,\alpha,\frac{1}{2}\right)$ olacak şekilde $\left(x_{1(n)}\right)$ in bir $\left(x_{2(n)}\right)$ alt dizisi vardır. Bu şekilde devam edilerek m>1 ($m\in\mathbb{N}$) için $a_m\in A_m$ vardır ve her $n\in\mathbb{N}$ için $\left(x_{m(n)}\right)\in B\left(a_m,\alpha,\frac{1}{m}\right)$ olacak şekilde $\left(x_{m-1(n)}\right)$ in bir $\left(x_{m(n)}\right)$ alt dizisi vardır. (x_n) in

$(x_{n(n)})$ alt dizisini ele alalım. Bu taktirde her $k,m \geq n_0$ için $M\left(x_{k(k)},x_{m(m)},\frac{2}{m}\right) \geq M\left(x_{k(k)},a_{n_0},\frac{1}{m}\right) \wedge M\left(a_{n_0},x_{m(m)},\frac{1}{m}\right) > (1 - \alpha) \wedge (1 - \alpha) = 1 - \alpha$ dır. Sonuç olarak $(x_{n(n)})$ bir α-Cauchy dizisidir.

($\Leftarrow$) X deki her dizinin bir α-Cauchy alt dizisi olsun. $(X,M,\wedge)$ bulanık metrik uzayının α-tamamen sınırlı olmadığını kabul edelim. Bu taktirde X in her sonlu A alt kümesi için $X \neq \bigcup_{a \in A} B(a,\alpha,t)$ olacak şekilde $t > 0$ vardır. $x_1 \in X$ sabit olsun. $x_2 \in X \setminus B(x_1,\alpha,t)$ vardır. Ayrıca $x_3 \in X \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{2} B(x_k,\alpha,t)\right)$ vardır. Bu şekilde devam edilerek her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \notin \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k,\alpha,t)$ olacak şekilde X de bir (x_n) dizisi oluşturulur. Bu durumda (x_n) in α-Cauchy alt dizisi yoktur. Bu da bir çelişki oluşturur.

Teorem 2.5.2.24: Her α-tamamen sınırlı bulanık metrik uzayı ayrılabilirdir.

İspat: $(X,M,\wedge)$ α-tamamen sınırlı bulanık metrik uzay ve $t = \frac{1}{n} > 0$ olsun. Bu taktirde $X = \bigcup_{a \in A_n} B(a,\alpha,t)$ olacak şekilde X in sonlu bir $A_n = \{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ alt kümesi vardır. $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ olsun. Böylece A sayılabilirdir. Şimdi A nin X de yoğun olduğunu gösterelim. $x \in X$, $\alpha \in (0,1)$ ve $B(x,\alpha,t)$ x merkezli α yarıçaplı bir açık yuvar olsun. $x \in X = \bigcup_{a \in A_n} B(a,\alpha,t)$ dir. Böylece $M(a,x,t) > 1 - \alpha$ olack şekilde $a \in A_n$ vardır. Bu taktirde $a \in B(x,\alpha,t)$ dir ve böylece $B(x,\varepsilon,t) \cap A \neq \emptyset$ dir. Sonuç olarak A , X de yoğundur, Böylece $(X,M,\wedge)$ ayrılabilirdir.

Sonuç 2.5.2.25: Her α-kompakt bulanık metrik uzayı $(X,M,\wedge)$ ayrılabilirdir.

3.BULANIK ESNEK METRİKLE ÜRETİLEN ESNEK TOPOLOJİLER

Bu bölümün amacı, esnek küme yapısına uyumlu olan Das ve Samanta (2012) tarafından verilen esnek elemanların göz önüne alınmasıyla, George ve Veeramani anlamında bulanık esnek metrik uzay kavramını literatüre kazandırmak ve bunun yanısıra elde edilen bulanık metrik uzaydan esnek topoloji ve bulanıklaştırılmış esnek topoloji üretmektir.

3.1. Esnek Topolojik Uzaylar

Bu kısımda Shabir ve Naz (2011) tarafından verilen esnek topolojik uzay kavramı ve bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 3.1.1: X boştan farklı bir küme ve E parametrelerin bir kümesi olsun. $\tau \subseteq S(X,E)$ ailesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa τ ya bir esnek topoloji denir.
(1) $\Phi, \widetilde{X} \,\widetilde{\in}\, \tau$,
(2) $(F,E), (G,E) \,\widetilde{\in}\, \tau$ ise $(F,E)\widetilde{\cap}(G,E) \,\widetilde{\in}\, \tau$,
(3) $\forall\ i \in J$ için $(F,E)_i \,\widetilde{\in}\, \tau$ ise $\widetilde{\bigcup}_{i\in J}(F,E) \,\widetilde{\in}\, \tau$.

(X,τ,E) üçlüsüne de bir esnek topolojik uzay denir. τ nun elemanlarına da açık esnek küme denir. $(F,E) \,\widetilde{\in}\, S(X,E)$ olmak üzere $(F,E)^C \,\widetilde{\in}\, \tau$ ise (F,E) esnek kümesine X üzerinde bir esnek kapalı küme denir (Shabir ve Naz, 2011).

Örnek 3.1.2: X boştan farklı bir küme ve E parametrelerin bir kümesi olmak üzere $\tau_0=\{\Phi, \widetilde{X}\}$ ve $\tau_1=\{(F,E) \mid (F,E) \,\widetilde{\in}\, S(X,E)\}$ aileleri X üzerinde birer esnek topolojidir, sırasıyla bu aileler trivial esnek topoloji ve diskret esnek topoloji olarak adlandırılırlar.

Örnek 3.1.3: $\tau=\{(F,A)_\lambda \mid \lambda \in \Delta\}$ olmak üzere (X,τ,E) esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda, her $e_i \in E$ için $\tau_{e_i}=\{(F,A)_\lambda(e_i) \mid (F,A)_\lambda \,\widetilde{\in}\, \tau\}$ olarak tanımlanan τ_{e_i} , X üzerinde klasik bir topolojidir. Bu topolojiye X üzerindeki bir τ esnek topolojisinin "e_i-parametre topolojisi" denir. (Shabir ve Naz, 2011).

Uyarı 3.1.4: Her $e_i \in E$ için τ_{e_i} ailesinin X üzerinde birer topoloji olması, bu parametrelenmiş topolojilerin bir sınıfının bir esnek topoloji olmasını garanti etmez (Shabir ve Naz, 2011).

Örnek 3.1.5: $X=\{x_1,x_2,x_3\}$, $E=\{e_1,e_2\}$ olmak üzere (F_1,E) , (F_2,E) , (F_3,E) , $(F_4,E) \widetilde{\in} S(X,E)$ esnek kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın

$F_1(e_1)=\{x_2\}$, $F_1(e_2)=\{x_1\}$,

$F_2(e_1)=\{x_2,x_3\}$, $F_2(e_2)=\{x_1,x_2\}$,

$F_3(e_1)=\{x_1,x_2\}$, $F_3(e_2)=X$,

$F_4(e_1)=\{x_1,x_2\}$, $F_4(e_2)=\{x_1,x_3\}$.

Bu durumda $\tau=\{\Phi, \widetilde{X},(F_1,E), (F_2,E), (F_3,E), (F_4,E)\}$ ailesi X üzerinde bir esnek topolojidir.

Ayrıca τ esnek topolojisinin e_1 ve e_2 parametre topolojileri,

$\tau_{e_1}=\{\emptyset,X,\{x_2\},\{x_2,x_3\},\{x_1,x_2\}\}$

$\tau_{e_2}=\{\emptyset,X,\{x_1\},\{x_1,x_2\}\}$

şeklinde X üzerinde tanımlı iki farklı klasik topolojidir (Shabir ve Naz, 2011).

Örnek 3.1.6: $E=\mathbb{R}^+$ parametre kümesi ve $x \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\lambda \in E$ için $(F_\lambda)_E := \{(x,(x-\lambda, x+\lambda) \mid x \in \mathbb{R})\}$ olmak üzere, $\tau:=\{(F_\lambda)_E \mid \lambda \in E\} \cup \{\Phi, \widetilde{X}\}$ ailesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir esnek topolojidir (Aygünoğlu ve Aygün, 2012).

Teorem 3.1.7: $\{\tau_i : i \in J\}$ *X* üzerinde esnek topolojilerin bir ailesi olsun. Bu taktirde, $\sqcap\{\tau_i \mid i \in J\}$, *X* üzerinde bir esnek topolojidir (Aygünoğlu ve Aygün, 2012).

Aynı X kümesi üzerinde tanımlı esnek topolojilerin birleşiminin bir esnek topoloji olması gerekmez.

Örnek 3.1.8: $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ ve $E=\{e_1,e_2\}$ olsun. (F_1,E), (F_2,E), (G_1,E) ve (G_2,E) esnek kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$F_1(e_1)=\{x_1\}$, $F_1(e_2)=\{x_2\}$,

$F_2(e_1)=\{x_1,x_2\}$, $F_2(e_2)=\{x_1,x_2\}$,

$G_1(e_1)=\{x_2\}$, $G_1(e_2)=\{x_3\}$,

$G_2(e_1)=\{x_1,x_2\}$, $G_2(e_2)=\{x_2,x_3\}$.

Bu durumda $\tau_1 = \{\Phi, \widetilde{X}, (F_1,E), (F_2,E)\}$ ve $\tau_2 = \{\Phi, \widetilde{X}, (G_1,E), (G_2,E)\}$ aileleri X üzerinde tanımlı iki esnek topolojidir. Ancak,

$\tau = \tau_1 \cup \tau_2 = \{\Phi, \widetilde{X}, (F_1,E), (F_2,E), (G_1,E), (G_2,E)\}$

ailesi *X* üzerinde bir esnek topoloji değildir. Çünkü $(F_2,E) \widetilde{\cup} (G_2,E) = (H,E)$ olarak alınırsa,

$H(e_1) = F_2(e_1) \cup G_2(e_1) = \{x_1,x_2\} \cup \{x_1,x_2\} = \{x_1,x_2\}$

$H(e_2) = F_2(e_2) \cup G_2(e_2) = \{x_1,x_2\} \cup \{x_2,x_3\} = X$

olduğundan $(H,E) \notin \tau$ olur.

Teorem 3.1.9: (X,τ,E) bir esnek topolojik uzay ve τ' tüm kapalı esnek kümelerin ailesini göstersin. Bu taktirde, aşağıdakiler sağlanır:

(1) $\Phi, \widetilde{X} \widetilde{\in} \tau'$,

(2) $(F,E), (G,E) \widetilde{\in} \tau'$ ise $(F,E) \widetilde{\cup} (G,E) \widetilde{\in} \tau'$,

(3) $\forall i \in J$ için $(F,E)_i \widetilde{\in} \tau'$ ise $\widetilde{\cap}_{i\in J}(F,E)_i \widetilde{\in} \tau'$ (Aygünoğlu ve Aygün, 2012).

Tanım 3.1.10: (X,τ,E) bir esnek topolojik uzay ve $(F,E) \widetilde{\in} S(X,E)$ olsun. (F,E) esnek kümesinin içi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$(F,E)^\circ = \widetilde{\bigcup}\{(G,E) \mid (G,E)$ bir esnek açık küme ve $G \widetilde{\subseteq} F\}$

Esnek kümenin içi, esnek küme tarafından içerilen en büyük esnek açık kümedir. (Zorlutuna ve diğ., 2012)

Tanım 3.1.11: (X,τ,E) bir esnek topolojik uzay ve $(F,E) \widetilde{\in} S(X,E)$ olsun. (F,E) esnek kümesinin kapanışı,

$\overline{(F,E)} = \widetilde{\bigcap}\{(G,E) : (G,E)$ bir esnek kapalı küme ve $F \widetilde{\subseteq} G\}$

esnek kümesidir.

Esnek kümenin kapanışı, esnek kümeyi içeren en dar esnek kapalı kümedir. (Zorlutuna ve diğ., 2012)

Önerme 3.1.12: (X,τ,E) bir esnek topolojik uzay ve $(F,E),(G,E)\widetilde{\in}S(X,E)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $(F,E)^{\circ}\widetilde{\subseteq}(F,E)\widetilde{\subseteq}\overline{(F,E)}$,

(2) $(F,E)\widetilde{\subseteq}(G,E)$ ise $(F,E)^{\circ}\ \widetilde{\subseteq}\ (G,E)^{\circ}$ ve $\overline{(F,E)}\ \widetilde{\subseteq}\ \overline{(G,E)}$,

(3) $((F,E)^{\circ})^{\circ}=(F,E)^{\circ}$ ve $\overline{\overline{(F,E)}}=\overline{(F,E)}$,

(4) $\big((F,E)\widetilde{\cap}(G,E)\big)^{\circ}=(F,E)^{\circ}\widetilde{\cap}(G,E)^{\circ}$,

(5) $\overline{\big((F,E)\widetilde{\cup}(G,E)\big)}=\overline{(F,E)}\widetilde{\cup}\overline{(G,E)}$,

(6) $\big(\widetilde{X}\big)^{\circ}=\widetilde{X}$ ve $\overline{\Phi}=\Phi$ (Çağman ve diğ., 2011).

Tanım 3.1.13: (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay ve $\mathcal{B} \subseteq \tau$ olsun. τ nun her elemanı $\mathcal{B}$ deki bazı elemanların birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa $\mathcal{B}$ ailesine τ için bir taban adı verilir (Aygünoğlu ve Aygün, 2012).

Tanım 3.1.14: (X,τ,E) bir esnek topolojik uzay ve $\mathcal{S}\subseteq\tau$ olsun. $\mathcal{S}$ ailesindeki esnek kümelerin sonlu arakesitlerinden elde edilen $\mathcal{B}$ ailesi τ için bir taban ise $\mathcal{S}$ ailesine τ esnek topolojisi için bir alt taban adı verilir (Aygünoğlu ve Aygün, 2012).

Uyarı 3.1.15: $X\neq\emptyset$ bir küme, E bir parametre kümesi ve $A \subset E$ olsun. (F,A), X kümesi üzerinde bir esnek küme $\big(F : A \to \mathcal{P}(X)\big)$ olmak üzere aşağıdaki düşünceyle (F,A) esnek kümesi $(\bar{F},E)$ esnek kümesine genişletilebilir.

$$\bar{F} = E \to \mathcal{P}(X),\ \bar{F}(e)=\begin{cases} F(e), & e \in A \\ \emptyset, & e \notin A \end{cases}.$$

Bu düşünceden hareketle, parametre kümesinin bir alt kümesi üzerinde tanımlı her esnek küme evrensel parametre kümesi üzerine genişletilebilir.

Esnek kümeleri (F,E) çifti yerine $F_A : E \to \mathcal{P}(X)$ dönüşümü olarak ele alınacaktır. Burada A indisi F_A dönüşümünün (esnek kümesinin) değerinin boştan farklı olduğu parametreler kümesini gösterir. Bu şekildeki kümelere genişletilmiş esnek küme (kısaca, g-e küme) denir (Majumdar ve Samanta, 2008), (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Tanım 3.1.16: $X \neq \emptyset$ bir küme ve τ, X üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan g-e kümelerinin bir ailesi olsun. (X,τ) çiftine Lowen anlamında esnek topolojik uzay (Lowen esnek topolojik uzay) denir.

(1) Her $A \subseteq E$ için $\tilde{A} \tilde{\in} \tau$ ve $\Phi \tilde{\in} \tau$
(2) $(F,A), (G,B) \tilde{\in} \tau$ ise $(F,A) \tilde{\cap} (G,B) \tilde{\in} \tau$,
(3) $\forall i \in J$ için $(F,A)_i \tilde{\in} \tau$ ise $\tilde{\bigcup}_{i\in J}(F,A)_i \tilde{\in} \tau$ (Aygünoğlu ve Aygün, 2012).

3.2. Bulanık Esnek Metrik Uzaylar

Beaula ve Gunaseeli (2014) bulanık esnek nokta tanımını vermiş ve bu noktaları kullanarak bulanık esnek metrik uzay tanımlamıştır. 2017'de Erduran ve diğ., Das ve Samanta (2013a) nın tanımladığı esnek noktalar yardımıyla esnek bulanık metrik uzay kavramını vermiştir. Bu kısımda esnek küme tanımına daha uygun olan esnek elemanlar yardımıyla bulanık esnek metrik uzay tanımlanacaktır. Ek olarak tanımlanan bulanık esnek metrik uzay ile GV-bulanık metrik uzay arasındaki ilişkisi irdelenecektir.

Tanım 3.2.1: $\bar{I}$ değerlerini $[0,1]$ 'de alan tüm esnek reel sayıların kümesi ve $* : [0,1]\times[0,1] \to [0,1]$ bir sürekli t-norm olsun. Her $e \in E$ ve her $\tilde{a},\tilde{b} \in \bar{I}$ için,
$(\tilde{a} \tilde{*} \tilde{b})(e) = \tilde{a}(e) * \tilde{b}(e)$
ile tanımlı $\tilde{*} : \bar{I} \times \bar{I} \to \bar{I}$ işlemine sürekli esnek t-norm denir (Erduran ve diğ., 2017).

Bu kısım ve bu kısımdan sonra; $\tilde{*}$ esnek sürekli t-norm, $\mathbb{R}(E)^*$ tüm pozitif esnek reel sayıların kümesi, $I(E)^*$ değerini $(0,1]$'de alan tüm esnek reel sayıların kümesi ve $I_0(E)^*$ değerini $(0,1)$ de alan tüm esnek reel sayıların kümesi olsun. $A \subseteq E$ parametre kümesi olmak üzere (F,A) X üzerinde bir esnek kümesi kısaca F_A ile, X kümesi üzerindeki tüm esnek kümelerin ailesi $S(X,E)$ ile ve $\tilde{X}$ mutlak esnek küme olmak üzere $SE(\tilde{X})$ mutlak esnek kümedeki tüm esnek elemanların kümesini göstersin.

Not: $\mathbb{R}(E)^* = \prod_{e\in E} \mathbb{R}^+$ ve $I(E)^* = \prod_{e\in E}(0,1]$ olarak düşünülürse $\prod_{e\in E} \mathbb{R}^+$ çarpım kümesi üzerindeki Öklid topolojisinin alt uzay topolojileri $\mathbb{R}(E)^*$ ve $I(E)^*$ kümeleri üzerinde tanımlanabilir.

Tanım 3.2.2: $\mathbf{M} : SE(\widetilde{X})\times SE(\widetilde{X})\times R(E)^{*} \to I(E)^{*}$ dönüşümü her $e \in E$ için $M_e : X\times X\times(0,\infty) \to (0,1]$ iken $\mathbf{M}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{t})\,(e) \triangleq M_e(\tilde{x}(e),\tilde{y}(e),\tilde{t}(e))$ olarak tanımlı bir dönüşüm olsun. **M** dönüşümü her $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z} \in SE(\widetilde{X})$ ve her $\tilde{t},\tilde{s} \in \mathbb{R}(E)^{*}$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa **M** ye bulanık esnek metrik denir.

(FSM-1) $\mathbf{M}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{t}) \tilde{>} \bar{0}$,
(FSM-2) $\mathbf{M}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{t}) = \bar{1} \Leftrightarrow \tilde{x} = \tilde{y}$,
(FSM-3) $\mathbf{M}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{t}) = \mathbf{M}(\tilde{y},\tilde{x},\tilde{t})$,
(FSM-4) $\mathbf{M}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{t}) \tilde{*} \mathbf{M}(\tilde{y},\tilde{z},\tilde{s}) \tilde{\leq} \mathbf{M}(\tilde{x},\tilde{z},\tilde{t}+\tilde{s})$,
(FSM-5) $\mathbf{M}(\tilde{x},\tilde{y},\cdot) : \mathbb{R}(E)^{*} \to I(E)^{*}$ süreklidir.

$(SE(\widetilde{X}),\mathbf{M},\tilde{*})$ üçlüsüne bulanık esnek metrik uzay denir.

Tanım 3.2.3: $(SE(\widetilde{X}),\mathbf{M},\tilde{*})$ bulanık esnek metrik uzayı aşağıdaki şartı sağlıyorsa güçlü (strong) bulanık esnek metrik uzay denir.

(SFSM) $\forall \tilde{x},\tilde{y},\tilde{z} \in SE(\widetilde{X})$ ve $\forall \tilde{t} \in \widetilde{R}$ için $\mathbf{M}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{t}) \tilde{*} \mathbf{M}(\tilde{y},\tilde{z},\tilde{t}) \tilde{\leq} \mathbf{M}(\tilde{x},\tilde{z},\tilde{t})$.

Örnek 3.2.4: X boş kümeden farklı klasik bir küme, E=(0,1) bir parametre kümesi, d_e her $e \in E$ için X üzerinde bir klasik metrik ve $\tilde{*}$ esnek t-normu $(\tilde{a} \tilde{*} \tilde{b})(e)=\tilde{a}(e).\tilde{b}(e)$ olsun. Bu durumda her $e \in E$ için $\tilde{t}:E\to\mathbb{R}^{+}$ için $SE(\widetilde{X})\times SE(\widetilde{X})\times\mathbb{R}(E)^{*}\to I(E)^{*}$ üzerindeki **M** dönüşümü $\mathbf{M}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{t})(e)=\frac{\tilde{t}(e)}{\tilde{t}(e)+d_e(\tilde{x}(e),\tilde{y}(e))}$ şeklinde tanımlansın. **M** dönüşümü bir bulanık esnek metriktir.

Uyarı 3.2.5: $\mathbf{M}:SE(\widetilde{X})\times SE(\widetilde{X})\times\mathbb{R}(E)^{*}\to I(E)^{*}$ bulanık esnek metrik uzayını $\mathbf{M}_e:E\to I^{X\times X\times(0,\infty)}$ şeklinde bir dönüşüm olarak yazabiliriz. Bu durumda (FSM1-FSM5) şartları aşağıdaki şekildedir. Her $e \in E$, $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z} \in SE(\widetilde{X})$ ve $\tilde{t},\tilde{s} \in \mathbb{R}(E)^{*}$ için,

(FSM-1) $\mathbf{M}_e(\tilde{x}(e),\tilde{y}(e),\tilde{t}(e)) > 0$,
(FSM-2) $\mathbf{M}_e(\tilde{x}(e),\tilde{y}(e),\tilde{t}(e)) = 1 \Leftrightarrow \tilde{x} = \tilde{y}$,
(FSM-3) $\mathbf{M}_e(\tilde{x}(e),\tilde{y}(e),\tilde{t}(e)) = \mathbf{M}_e(\tilde{y}(e),\tilde{x}(e),\tilde{t}(e))$,
(FSM-4) $\mathbf{M}_e(\tilde{x}(e),\tilde{y}(e),\tilde{t}(e)) * \mathbf{M}_e(\tilde{y}(e),\tilde{z}(e),\tilde{s}(e)) \leq \mathbf{M}_e(\tilde{x}(e),\tilde{z}(e),\tilde{t}(e)+\tilde{s}(e))$,
(FSM-5) $\mathbf{M}_e(\tilde{x}(e),\tilde{y}(e),\cdot) : (0,\infty) \to (0,1]$ süreklidir.

Dikkat edilirse her $e \in E$ için $\mathbf{M}_e$, X kümesi üzerinde bir George-Veeramani anlamında bir bulanık metriktir.

Örnek 3.2.6: E sonlu bir parametre kümesi ve $\left(SE\left(\widetilde{X}\right),\mathbf{M},\tilde{*}\right)$ bir bulanık esnek metrik uzay olsun. Bu durumda,

$D: SE\left(\widetilde{X}\right) \times SE\left(\widetilde{X}\right)\times\mathbb{R}^{+}\to I$

$D(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{t}) := \min_{e} \mathbf{M}_e\left(\tilde{x}(e),\tilde{y}(e),\tilde{t}(e)\right)$

dönüşümü $SE\left(\widetilde{X}\right)$ üzerinde bir bulanık metriktir.

Tanım 3.2.7: $\left(SE\left(\widetilde{X}\right),\mathbf{M},\tilde{*}\right)$ bir bulanık esnek metrik uzay, $\tilde{r} \tilde{\in} I_0(E)^{*}$ ve $\tilde{t} \tilde{\in} \widetilde{\mathbb{R}}$ olsun. Bu durumda,

$B(\tilde{x},\tilde{r},\tilde{t})=\left\{\tilde{y} \tilde{\in} SE\left(\widetilde{X}\right) : \mathbf{M}(\tilde{x},\tilde{r},\tilde{t}) \tilde{\geq} \bar{1} - \tilde{r}\right\}$

kümesine $\tilde{x}$ merkezli, $\tilde{r}$ yarıçaplı açık yuvar denir.

Örnek 3.2.8: $X=\mathbb{R}$, $E=\{1,2,3\}$ bir parametre kümesi ve d_e metriği $d_{e_1}(x,y)=|x-y|$, $d_{e_2}(x,y)=\begin{cases}1, & x \neq y\\ 0, & x = y\end{cases}$, $d_{e_3}(x,y)=\frac{|x-y|}{1-|x-y|}$ olmak üzere $\mathbf{M}_e(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{t})=\frac{\tilde{t}(e)}{\tilde{t}(e)+d_e\left(\tilde{x}(e),\tilde{y}(e)\right)}$ bulanık metrik olsun. Bu durumda $\tilde{t}=\bar{1}$ için $\tilde{x}=\{(1,\{3\}),(2,\{5\}),(3,\{2\})\}$ merkezli $\tilde{r}=\frac{\bar{1}}{3}$ yarıçaplı $B\left(\tilde{x},\frac{\bar{1}}{3},\bar{1}\right)$ açık yuvarı,

$$B\left(\tilde{x},\frac{\bar{1}}{3},\bar{1}\right)=\left\{\tilde{y}\in SE\left(\widetilde{X}\right) : \mathbf{M}(\tilde{x},\tilde{y},\bar{1}) \tilde{>} \bar{1} - \frac{\bar{1}}{3}\right\}=\left\{\left(1,\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)\right),(2,\{5\}),\left(3,(1,3)\right)\right\}$$

şeklindedir.

3.3. Bulanık Esnek Metrikle Üretilen Esnek Topoloji

Bu kısımda güçlü bulanık esnek metrik uzaydan Aygünoğlu ve Aygün (2012) tarafından tanımlanan Lowen esnek topoloji üretilecektir. Bu nedenle daraltılmış esnek eleman tanımı verilecek ve daraltılmış esnek elemanlar yardımıyla esnek topoloji için bir taban oluşturulacaktır.

Tanım 3.3.1: $(SE(\tilde{X}),\mathbf{M},\tilde{*})$ bir bulanık esnek metrik uzay ve F_A, X kümesi üzerinde bir esnek küme olsun. Her $\tilde{x} \tilde{\in} SE(F_A)$ için $B(\tilde{x},\tilde{r},\tilde{t}) \tilde{\sqsubseteq} SE(F_A)$ olacak şekilde en az bir $\tilde{r} \tilde{\in} I_0(E)^*$ ve $\tilde{t} \tilde{\in} \mathbb{R}(E)^*$ varsa F_A ya açıktır denir.

Teorem 3.3.2: $(SE(\tilde{X}),\mathbf{M},\tilde{*})$ bir bulanık esnek metrik uzay ve $B(\tilde{x},\tilde{r},\tilde{t})$, $\tilde{x}$ merkezli, $\tilde{r}$ yarıçaplı açık yuvar olsun. Bu durumda $B(\tilde{x},\tilde{r},\tilde{t})$ bir açık kümedir.

İspat: $\tilde{y} \tilde{\in} B(\tilde{x},\tilde{r},\tilde{t})$ olsun. Yani her $e \in E$ için $\tilde{y}(e) \in B(\tilde{x}(e),\tilde{r}(e),\tilde{t}(e))$ dir. Bu durumda her $e \in E$ için $M_e(\tilde{x}(e),\tilde{y}(e),\tilde{t}(e)) > 1 - \tilde{r}(e)$ dir. Böylece $M_e(\tilde{x}(e),\tilde{y}(e),\tilde{t}_0(e)) > 1 - \tilde{r}(e)$ olacak şekilde $\tilde{t}_0(e)$ vardır. $\tilde{t}_0(e) \triangleq t_0^e$ ve $\tilde{r}_0(e) \triangleq r_0^e = M_e(\tilde{x}(e),\tilde{y}(e),\tilde{t}_0(e)) > 1 - \tilde{r}(e)$ olsun. $r_0^e > 1 - \tilde{r}(e)$ olduğundan $r_0^e > 1 - s_e > 1 - \tilde{r}(e)$ olacak şekilde $\tilde{s}(e) \triangleq s_e \in (0,1)$ vardır. Buradan $r_0^e * r_1^e \geq 1 - s_e$ olacak şekilde $\tilde{r}_1(e) \triangleq r_1^e \in (0,1)$ vardır. Her $e \in E$ için $B(\tilde{y}(e),1 - r_1^e,\tilde{t}(e) - t_0^e)$ yuvarını ele alalım. $B(\tilde{y}(e),1 - r_1^e,\tilde{t}(e) - t_0^e) \subset B(\tilde{x}(e),\tilde{r}(e),\tilde{t}(e))$ dir. Gerçekten, $\tilde{z}(e) \in B(\tilde{y}(e),1 - r_1^e,\tilde{t}(e) - t_0^e)$ alalım. $M_e(\tilde{y}(e),\tilde{z}(e),\tilde{t}(e) - t_0^e) > r_1^e$ dir. Böylece, $M_e(\tilde{x}(e),\tilde{z}(e),\tilde{t}(e)) \geq M_e(\tilde{x}(e),\tilde{y}(e),t_0^e) * M_e(\tilde{y}(e),\tilde{z}(e),\tilde{t}(e) - t_0^e) \geq r_0^e * r_1^e \geq 1 - s_e > 1 - \tilde{r}(e)$ dir. Yani, $\tilde{z}(e) \in B(\tilde{x}(e),\tilde{r}(e),\tilde{t}(e))$ dir. Sonuç olarak her $e \in E$ için $B(\tilde{y}(e),1-r_1^e,\tilde{t}(e)-t_0^e) \subset B(\tilde{x}(e),\tilde{r}(e),\tilde{t}(e))$ dir.

Uyarı 3.3.3: X boştan farklı bir küme ve $(SE(\tilde{X}),\mathbf{M},\tilde{*})$ bir bulanık esnek metrik uzay olsun. $\tilde{x},\tilde{y} \tilde{\in} SE(\tilde{X})$, $\tilde{r_1},\tilde{r_2} \tilde{\in} I_0(E)^*$ ve $\tilde{t},\tilde{s} \tilde{\in} \mathbb{R}(E)^*$ olmak üzere $B(\tilde{x},\tilde{r_1},\tilde{t}) \tilde{\sqcap} B(\tilde{y},\tilde{r_2},\tilde{s})$ esnek kümesi her zaman bir esnek eleman içermez. Bu nedenle $\{B(\tilde{x},\tilde{r},\tilde{t}) : \tilde{x} \tilde{\in} SE(\tilde{X}),\ \tilde{r} \tilde{\in} I_0(E)^*,\ \tilde{t} \tilde{\in} \mathbb{R}(E)^*\}$ ailesi X kümesi üzerinde bir esnek topoloji üretmez.

Tanım 3.3.4: *X* boştan farklı bir küme, $A \subseteq E$ parametre kümesi ve $\tilde{x} : E \to X$ bir esnek eleman olsun. Bu taktirde,

$\tilde{x}_A : E \to X$

$$\tilde{x}_A(e) = \begin{cases} \tilde{x}(e), & e \in A \\ \emptyset, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $\tilde{x}_A$ ya $\tilde{x}$ in A-daraltılmış esnek elemanı denir.

Tanım 3.3.5: X boştan farklı bir küme, A⊆E parametre kümesi ve $\tilde{x} : E \to X$ bir esnek eleman olsun. $\tilde{x}_A$, $\tilde{x}$ in A-daraltılmış esnek elemanı olmak üzere,

$$B(\tilde{x}_A,\tilde{r},\tilde{t})=\begin{cases} B\big(\tilde{x}(e),\tilde{r}(e),\tilde{t}(e)\big), & e \in A \\ \emptyset, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $B(\tilde{x}_A,\tilde{r},\tilde{t})$ ya $\tilde{x}_A$ merkezli A-daraltılmış açık yuvar denir.

Sonuç 3.3.6: $B(\tilde{x}_A,\tilde{r},\tilde{t})$ A-daraltılmış açık yuvar bir açık kümedir.

Teorem 3.3.7: X boştan farklı bir küme, $A \subseteq E$ parametre kümesi ve $\tilde{x} : E \to X$ bir esnek eleman, $\tilde{x}_A$, $\tilde{x}$ in A-daraltılmış esnek elemanı ve $\big(SE(\widetilde{X}),\mathbf{M},\tilde{*}\big)$ bir bulanık esnek metrik uzay olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{B} = \big\{B(\tilde{x}_A,\tilde{r},\tilde{t}) : \tilde{x}_A \,\tilde{\in}\, \tilde{E},\ \tilde{r} \,\tilde{\in}\, I_0(E)^*,\ \tilde{t} \,\tilde{\in}\, \mathbb{R}(E)^*\big\}$$

ailesi bir esnek topolojinin tabanıdır.

İspat: $A,C \subseteq E$ olmak üzere $B(\tilde{x}_A,\tilde{r}_1,\tilde{t}) \,\tilde{\cap}\, B\big(\tilde{y}_C,\tilde{r_2},\tilde{s}\big) \neq \Phi$ olsun. Bu durumda $W \subseteq A \cap C$ iken $\tilde{z}_W \,\tilde{\in}\, B(\tilde{x}_A,\tilde{r}_1,\tilde{t}) \,\tilde{\cap}\, B\big(\tilde{y}_C,\tilde{r_2},\tilde{s}\big)$ olacak şekilde $\tilde{z}$ esnek elemanı vardır. Teorem 3.3.2'den $B\big(\tilde{z}_W,\tilde{p},\tilde{k}\big) \,\tilde{\sqsubseteq}\, B(\tilde{x}_A,\tilde{r}_1,\tilde{t})$ ve $B\big(\tilde{z}_W,\tilde{q},\tilde{l}\big) \,\tilde{\sqsubseteq}\, B\big(\tilde{y}_C,\tilde{r_2},\tilde{s}\big)$ olacak şekilde $\tilde{p}$ ve $\tilde{q}$ esnek elemanları vardır. Her $e \in E$ için $\tilde{r}_0(e) \coloneqq \min\{\tilde{p}(e), \tilde{q}(e)\}$ ve $\tilde{t}_0(e) = \min\big\{\tilde{k}(e), \tilde{l}(e)\big\}$ olsun. Bu durumda $B(\tilde{z}_W,\tilde{r}_0,\tilde{t}_0) \,\tilde{\sqsubseteq}\, B(\tilde{x}_A,\tilde{r}_1,\tilde{t}) \,\tilde{\cap}\, B\big(\tilde{y}_C,\tilde{r_2},\tilde{s}\big)$ dir.

Bulanık esnek metrik uzaydan aşağıdaki teoremdeki gibi bir Lowen esnek topoloji elde edilir.

Teorem 3.3.8: $\big(SE(\widetilde{X}),\mathbf{M},\tilde{*}\big)$ bir bulanık esnek metrik uzay olsun. Bu durumda,

$$\tau_{\mathbf{M}} = \big\{F_A \tilde{\in} S(X,E) \mid \forall\, \tilde{x}_A \tilde{\in} F_A \text{ için } B(\tilde{x}_A,\tilde{r},\tilde{t}) \,\tilde{\sqsubseteq}\, F_A \text{ ol. şek. } \exists \tilde{t} \,\tilde{\in}\, \mathbb{R}(E)^*, \tilde{r} \,\tilde{\in}\, I_0(E)^*\big\}$$

ailesi bir esnek topolojidir.

İspat: $F_U = \tilde{\bigcup}_{\tilde{x}_A \,\tilde{\in}\, \tilde{A}} B(\tilde{x}_A,\tilde{r},\tilde{t})$ olduğundan ve Sonuç 3.3.6'dan ispat açıktır.

3.4. Bulanık Esnek Metrikle Üretilen Bulanıklaştırılmış Esnek Topoloji

Bu kısımda güçlü bulanık esnek metrikten Çetkin ve diğ. (2016) tarafından tanımlanan bulanıklaştırılmış esnek topoloji üretilecektir.

Tanım 3.4.1: $\tau : E \to [0,1]^{S(X,E)}$ dönüşümü her $e \in E$ için aşağıdaki şartları sağlarsa X kümesi üzerinde bir tabakalaşmış bulanık esnek topolojidir denir.

(1) Her $\lambda \in [0,1]$ için $\tau_e\left(\widetilde{E}^{\lambda}\right) = 1$,

(2) Her $F_U, G_B \in FS(X,E)$ için $\tau_e(F_U \sqcap G_B) \geq \tau_e(F_U) \wedge \tau_e(G_B)$,

(3) Her $i \in \Lambda$ ve $(F_U)_i \in S(X,E)$ için $\tau_e(\sqcup_{i \in \Lambda}(F_U)_i) \geq \wedge_{i \in \Lambda} \tau_e((F_U)_i)$ (Aygünoğlu ve diğ., 2014).

Tanım 3.4.2: $\tau : E \to \{0,1\}^{S(X,E)}$ dönüşümü her $e \in E$ için aşağıdaki şartları sağlarsa X kümesi üzerinde bir tabakalaşmış bulanıklaştırılmış esnek topolojidir denir.

(1) Her $U \subset E$ için $\tau_e(\Phi)=1$ ve $\tau_e\left(\widetilde{U}\right)=1$,

(2) Her $F_U, G_B \in S(X,E)$ için $\tau_e(F_U \sqcap G_B) \geq \tau_e(F_U) \wedge \tau_e(G_B)$,

(3) Her $i \in \Lambda$ ve $(F_U)_i \in S(X,E)$ için $\tau_e(\sqcup_{i \in \Lambda}(F_U)_i) \geq \wedge_{i \in \Lambda} \tau_e((F_U)_i)$ (Çetkin ve diğ., 2016)

Önerme 3.4.3: $\left(SE\left(\widetilde{X}\right), \mathbf{M}, \tilde{*}\right)$ bir güçlü bulanık esnek metrik uzay olmak üzere her $e \in E$ için $\varphi : \mathbb{R}(E)^* \to I_0(E)^*$ dönüşümü $\varphi(\tilde{t})(e) := \frac{\tilde{t}(e)}{\tilde{t}(e)+1}$ olsun. (Bu dönüşümün tersi her $e \in E$ için $\psi : I_0(E)^* \to \mathbb{R}(E)^*$, $\psi(\tilde{\alpha})(e) := \varphi^{-1}(\tilde{\alpha})(e) = \frac{\tilde{\alpha}(e)}{1 - \tilde{\alpha}(e)}$ dir.) $\tilde{\alpha} \widetilde{\in} I_0(E)^*$ esnek eleman ve $\tilde{t} = \varphi^{-1}(\tilde{\alpha})$ olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{B}_{\tilde{\alpha}} = \left\{B(\tilde{x}_A, \tilde{r}, \tilde{t}) : \tilde{x} \widetilde{\in} SE\left(\widetilde{E}\right), \tilde{r} \widetilde{\in} I_0(E)^*, U \subset E\right\}$$

ailesi Lowen esnek topolojinin bir tabanıdır.

Bu Lowen esnek topoloji $T_{\tilde{\alpha}}$ aşağıdaki teoremdeki gibi karakterize edilir.

Teorem 3.4.4: $(SE(\tilde{X}),\mathbf{M},\tilde{*})$ bir güçlü bulanık esnek metrik uzay olmak üzere her $e \in E$ için $\varphi : \mathbb{R}(E)^* \to I_0(E)^*$ dönüşümü $\varphi(\tilde{t})(e) := \frac{\tilde{t}(e)}{\tilde{t}(e)+1}$ olsun. $\tilde{\alpha} \tilde{\in} I_0(E)^*$ ve F_A bir esnek küme olsun. $F_A \tilde{\in} T_{\tilde{\alpha}}$ olması için gerek ve yeter şart her $\tilde{x}_C \tilde{\in} F_C$ için $\tilde{t} \tilde{\in} \varphi^{-1}(\tilde{\alpha})$ iken $B(\tilde{x}_C,\tilde{r},\tilde{t}) \tilde{\sqsubseteq} F_A$ olacak şekilde en az bir $\tilde{r} \tilde{\in} I_0(E)^*$ olmasıdır.

İspat: $\tilde{\alpha} \tilde{\in} I_0(E)^*$ sabit olsun. $F_A \in T_{\tilde{\alpha}}$ ve $\tilde{x}_C \tilde{\in} F_A$ alalım. $\tilde{t} \tilde{\in} \varphi^{-1}(\tilde{\alpha})$ iken $\tilde{x}_C \tilde{\in} B(\tilde{y}_C,\tilde{\varepsilon},\tilde{t}) \sqsubseteq F_A$ olacak şekilde $\tilde{y}_C \tilde{\in} F_A$ ve $\tilde{\varepsilon} \tilde{\in} I_0(E)^*$ dir. Her $e \in C$ için $\mathbf{M}_e(\tilde{x}(e),\tilde{y}(e),\tilde{t}(e)) > 1 - \delta_e$ olacak şekilde her $e \in E$ için $0 < \delta_e < \tilde{\varepsilon}(e)$ vardır. Her $e \in E$ için $*$ t-normu sürekli olduğundan ve $1 - \delta_e > 1 - \tilde{\varepsilon}(e)$ olduğundan $(1 - r_e) * (1 - \delta_e) > 1 - \tilde{\varepsilon}(e)$ olacak şekilde $r_e \in (0,1)$ vardır. $B(\tilde{x}_C,\tilde{r},\tilde{t}) \sqsubseteq B(\tilde{y}_C,\tilde{\varepsilon},\tilde{t})$ dir. Gerçekten, $\tilde{z}_C \tilde{\in} B(\tilde{x}_C,\tilde{r},\tilde{t})$ olsun. Böylece her $e \in C$ için $\mathbf{M}_e(\tilde{x}(e),\tilde{z}(e),\tilde{t}(e)) > 1 - \tilde{r}(e)$ dir. M güçlü olduğundan her $e \in C$ için

$$\mathbf{M}_e(\tilde{y}(e),\tilde{z}(e),\tilde{t}(e)) \geq \mathbf{M}_e(\tilde{y}(e),\tilde{x}(e),\tilde{t}(e)) * M_e(\tilde{x}(e),\tilde{z}(e),\tilde{t}(e))$$
$$> (1 - \delta_e) * (1 - r_e) > 1 - \varepsilon(e)$$

dir. Böylece $\tilde{z}_C \tilde{\in} B(\tilde{y}_C,\tilde{\varepsilon},\tilde{t})$ elde edilir.

Şimdi her $\tilde{x}_C \tilde{\in} F_C$ için $B(\tilde{x}_C,\tilde{r_x},\tilde{t}) \sqsubseteq F_A$ olacak şekilde $\tilde{r_x} \tilde{\in} I_0(E)^*$ vardır. Dolayısıyla $F_A = \bigsqcup_{\tilde{x}_C \tilde{\in} F_A} B(\tilde{x}_C,\tilde{r_x},\tilde{t})$ dir. Sonuç olarak $F_A \tilde{\in} T_{\tilde{\alpha}}$ dır.

Sonuç 3.4.5: $\tilde{\alpha},\tilde{\beta} \tilde{\in} I_0(E)^*$ ve $\tilde{\beta} \tilde{<} \tilde{\alpha}$ olsun. $F_A \tilde{\in} T_{\tilde{\alpha}}$ ise $F_A \tilde{\in} T_{\tilde{\beta}}$ dır, yani $(T_M)_\alpha \subset (T_M)_\beta$ dır. Dolayısıyla $\{T_{\tilde{\alpha}} : \tilde{\alpha} \tilde{\in} I_0(E)^*\}$ ailesi azalandır.

Teorem 3.4.6: $(SE(\tilde{X}),\mathbf{M},\tilde{*})$ bir güçlü bulanık esnek metrik uzay olmak üzere $\tau^{\mathbf{M}} : E \to I^{SE(X)}$ bulanık esnek kümesi

$$\tau_e^{\mathbf{M}}(F_A) = \bigvee \{\tilde{\alpha}(e) : F_A \tilde{\in} T_{\tilde{\alpha}}\}$$

şeklinde tanımlı olsun. $\tau^{\mathbf{M}}$, $\tilde{E}$ kümesi üzerinde bir tabakalaşmış bulanıklaştırılmış esnek topolojidir.

İspat: 1) Her $\tilde{\alpha} \tilde{\in} I_0(E)^*$ için $\Phi, \tilde{A} \in T_{\tilde{\alpha}}$ olduğundan $\tau^{\mathbf{M}}(\Phi) = \tau^{\mathbf{M}}(\tilde{E}) = 1$

2) $\tau(F_A) = \tilde{\alpha}$, $\tau(G_C) = \tilde{\beta}$ ve $\tilde{\alpha} \tilde{\leq} \tilde{\beta}$ olsun. $\tilde{\alpha} = \bar{0}$ ise ispat açıktır. Aksi halde $\tilde{\alpha}(e) = \sup\{\lambda(e) : \bar{0} \tilde{<} \tilde{\lambda} \tilde{<} \tilde{\alpha}\}$ ve her $\tilde{\lambda} \tilde{<} \tilde{\alpha}$ için $F_A, G_C \in T_{\tilde{\lambda}}$ dır. $\tilde{\lambda} \tilde{<} \tilde{\alpha}$ iken $F_A \sqcap G_C \tilde{\in} T_{\tilde{\lambda}}$ dır ve böylece $\tau^{\mathbf{M}}(F_A \sqcap G_C) \geq \tilde{\alpha} = \tau^{\mathbf{M}}(F_A) \wedge \tau^{\mathbf{M}}(G_C)$ dir.

3) $\{(F_A)_i : i \in I\} \subset S(X,E)$ ve $\bigwedge_i \tau^{\mathbf{M}}((F_A)_i) = \tilde{\alpha}$ olsun. $\tilde{\alpha} = \bar{0}$ ise açıktır. Aksi halde $\tilde{\alpha}(e) = \sup\{\lambda(e) : \bar{0} \tilde{<} \tilde{\lambda} \tilde{<} \tilde{\alpha}\}$ dır ve her $i \in I$ ve $\tilde{\lambda} \tilde{<} \tilde{\alpha}$ için $\tau^{\mathbf{M}}((F_A)_i) \tilde{\geq} \tilde{\lambda}$ dır. Böylece her $\tilde{\lambda} \tilde{<} \tilde{\alpha}$ için $\{(F_A)_i : i \in I\} \subset T_{\tilde{\lambda}}$ dır. Yani her $\tilde{\lambda} \tilde{<} \tilde{\alpha}$ için $\bigsqcup_{i \in I}(F_A)_i \in T_{\tilde{\lambda}}$ dır. Sonuç olarak $\tau^{\mathbf{M}}(\bigcup(F_A)_i) \geq \alpha = \bigwedge_i \tau^{\mathbf{M}}((F_A)_i)$ dir.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, çeşitli yazarlar tarafından tanımlanan ve özellikleri incelenen bulanık metrik uzaylardan bulanık topoloji ve bulanıklaştırılmış topoloji elde edilmiştir. Sonrasında bulanık metrik uzay yapısı esnekleştirilerek bulanık esnek metrik uzay tanımı verilmiş ve bu yapıdan bulanık esnek ve bulanıklaştırılmış esnek topoloji üretilmiştir. Aşağıdaki şekilde sıralanan sonuçlar elde edilmiştir.

1. KM-bulanık metrik uzaydan klasik bir topoloji oluşturmak için bir taban elde edilmiş ve bu klasik topoloji yardımıyla bulanıklaştırılmış topoloji üretilmiştir. Ayrıca bu tabandan üretilen klasik topoloji ile üretilen bulanıklaştırılmış topolojinin seviye topolojisinin aynı olduğu sonucuna varılmıştır. KM-bulanık metrikten üretilen bulanıklaştırılmış topolojik uzayda süreklilik ve yakınsaklık gibi yapılar detaylı olarak incelenmiş ve KM-bulanık metrik uzay ve bulanıklaştırılmış topolojik uzaylar arasında bir funktor tanımlanmıştır.

2. Güçlü GV-bulanık metrik uzayından üretilen klasik topolojiler yardımıyla bir Lowen bulanık topoloji elde etmek için gerekli yöntem verilmiştir. w Lowen funktoruyla üretilen Lowen bulanık topoloji ile bulanık metrikten üretilen Lowen bulanık topolojiler arasındaki ilişki incelenmiş ve bulanık metriğin esas olmama durumunda bu iki bulanık topolojinin farklı olduğu sonucuna varılmıştır. Üretilmiş bulanık topolojik uzaylarda süreklilik yapısı incelenmiş ve bulanık metrik uzaylar kategorisi ile Lowen bulanık topolojik uzaylar kategorisi arasında bir funktor tanımlanmıştır. Üretilmiş bulanık topolojik uzayda kompaktlık yapısı çalışılmış ve bulanık metrik uzaylardaki kompaktlık kavramı ile üretilen bulanık topolojik uzaylardaki bulanık kompaktlık kavramının çakıştığı sonucuna varılmıştır.

3. KM-bulanık metrik uzayından Lowen bulanık topoloji üretilmesi için farklı bir yönteme başvurulmuştur. Bunun için öncelikle KM-bulanık metrikten üretilen klasik topolojilerin azalan bir ailesi elde edilmiştir. Sonra seviye topolojileri bu aile olan en ince Lowen bulanık topoloji elde edilmiştir. Bu üretilen Lowen bulanık topoloji ile

klasik topolojiden w funktoru yardımıyla üretilen Lowen bulanık topolojiyi karşılaştırmak amacıyla bu uzaylar için birer taban yapısı kurulmuştur. Metrik uzayın co-esas olmadığı durumda bu uzayların birbirlerinden farklı, diğer durumlarda ise birbirlerine denk olduğu sonucuna varılmıştır. Bulanık metrik uzaylar arasındaki sürekliliğin üretilmiş bulanık topolojik uzaylar arasındaki sürekliliğe denk olması için bulanık metrik uzaylardaki süreklilik tanımı değiştirilmiş ve daha güçlü olan süreklilik tanımı verilmiştir. Yine bu uzaylarda kompaktlık yapısı çalışılmış ve bulanık metrik uzayların kompaktlığının üretilmiş bulanık topolojik uzaylardaki bulanık kompaktlıkla denk olduğu sonucuna varılmıştır.

4. Bulanık esnek metrik uzay kavramı literatüre kazandırılmış ve GV-bulanık metrik uzayla ilişkisi incelenmiştir. Bulanık esnek metrik uzayın bazı karakteristik özellikleri incelenmiştir. Bulanık esnek metrik uzaydan bir esnek topolojik uzay üretmek için daraltılmış esnek eleman tanımı verilmiş ve bulanık esnek metrik uzaydan bir esnek topolojik uzay ve bir bulanıklaştırılmış esnek topolojik uzay üretilmiştir.

Son bölümde elde edilen sonuçlar KM-bulanık metriği içinde yapılabilir.

KAYNAKLAR

Abbas M., Murtaza G., Romaguera S., On the Fixed Point Theory of Soft Metric Spaces, *Fixed Point Theory and Appl*., 2016, **17**(1), 1-11.

Adamek J., Herrlich H., Strecker G. E., *Abstract and Concrete Categories*, John Wiley and Sons Publiction, New York, 18-360, 1990.

Ahmad B., Kharal A., On Fuzzy Soft Sets, *Advances in fuzzy systems*, 2009, **2009**, 1-6.

Aktaş H., Çağman N., Soft Set and Soft Groups, *Information Sciences*, 2007, **177**, 2726-2735.

Aygünoğlu A., Aygün H., Some Notes on Soft Topological Spaces, *Neural Computing and Applications*, 2012, **21**(1), 113-119.

Aygünoğlu A., Aygün H., Introduction to Fuzzy Soft Groups, *Computer & Mathematics with Applications*, 2009, **58**, 1279-1286.

Aygünoglu A., Cetkin V., Aygün H., An Introduction to Fuzzy Soft Topological Spaces, *Hacettepe Journal of Math. and Stat*, 2014, **43**(2), 193-204.

Bag T., Samanta S.K., Fuzzy Bounded Linear Operators, *Fuzzy sets and Systems*, 2005, 151(3), 513-547.

Beaula T., Gunaseeli C., On Fuzzy Soft Metric Spaces. *Malaya J. Mat*, 2014, ***2***(3), 197-202.

Beaula T., Priyanga M.M., A New Notion for Fuzzy Soft Normed Linear Space, *Intern. J. Fuzzy Mathematical Archive*, 2015, **9**(1), 81-90.

Chang C.L., Fuzzy Topological Spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1968, **24**(1), 182-190.

Çağman N., Enginoğlu S., Soft Set Theory and Uni-Int Decision Making, *European J. Oper. Res.*, 2010, **207**, 848-855.

Çağman N., Enginoğlu S., Çıtak F., Fuzzy Soft Set Theory and its Applications, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 2011, **8**(3), 137-147.

Çetkin V., Aygünoğlu A., Aygün H., CATS of Soft Topological Spaces, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 2016, **30**(4), 1903-1913.

Çetkin V., Aygün H., A Topological View on L-Fuzzy Soft Sets: Connectedness Degree, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 2018, **34**, 1975–1983.

Das S., Samanta S.K., Soft Real Sets, Soft Real Numbers and Their Properties, *J. Fuzzy Math.*, 2012, **20**(3), 551-576.

Das S., Samanta S.K., On Soft Metric Spaces, *J. Fuzzy Math.*, 2013a, **21**(3), 707-734.

Das S., Samanta S.K., Soft Metric, *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 2013b, **6**(1), 77-94.

Erduran F.S., Yigit E., Alar R., Gezici A., Soft Fuzzy Metric Spaces, *General Letters in Mathematics*, 2017, **3**(2), 91-101.

Gantner T.E., Steinlage R.C., Warren R.H., Compactness in Fuzzy Topological Spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1978, **62**(3), 547-562.

George A., Veeramani P., On Some Results in Fuzzy Metric Spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 1994, **64**, 395-399.

George A., Veeramani P., Some Theorems in Fuzzy Metric Spaces, *Journal of Fuzzy Mathematics*, 1995, **3**, 933-940.

George A., Veeramani P., On Some Results of Analysis for Fuzzy Metric Spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, **90**, 365-368.

Güner E., Çetkin V., Aygün H., Fixed Point Results For $\tilde{\boldsymbol{A}}$-Contractions in Soft Metric Spaces, *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 2018a, **36**(2), 315-323.

Güner E., Çetkin V., Aygün H., Soft Fixed Point Theorems in Terms of Soft Altering Distance Function, *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 2018b, **9**(3), 285-293.

Grabiec M., Fixed Points in Fuzzy Metric Spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, **27**, 385-389.

Gregori V., Minana J.J., Some Concepts Related to Continuity in Fuzzy Metric Spaces, *Workshop Applied Topology WIAT'13*, Bilbao, İspanya, 12-14 Haziran 2013.

Gregori V., Minana J.J., Morillas S., A Note on Local Bases and Convergence in Fuzzy Metric Spaces, *Topology and its Applications*, 2014, **163**, 142-148.

Gregori, V., Romaguera S., Some Properties of Fuzzy Metric Spaces, *Fuzzy sets and systems*, 2000, **115**(3), 485-489.

Gregori V., Romaguera S., Characterizing Completable Fuzzy Metric Spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 2004, **144**, 411-420.

Gregori V., Lopez-Crevillen A., Morillas S., Sapena A., On Convergence in Fuzzy Metric Spaces, *Topology and its Applications*, 2009a, **156**(18), 3002-3006.

Gregori V., Lopez-Crevillen A., Morillas S., On Continuity and Uniform Continuity in Fuzzy Metric Spaces, *Workshop Applied Topology WIAT'09*, İspanya, 11-12 Haziran 2009. (2009b)

Gregori V., Morillas S., Sapena A., On A Class of Completable Fuzzy Metric Spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 2010, **161**(16), 2193-2205.

Hosseinzadeh H., Fixed Point Theorems on Soft Metric Spaces, *Journal of Fixed Point Theory and Appl.*, 2017, **19**(2), 1625-1647.

Höhle U., Upper Semicontinuous Fuzzy Sets and Applications, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1980, **78**(2), 659-673.

Istratescu V., *An Introduction to Theory of Probabilistic Metric Spaces*, With Applications, Ed, Tehnica, Bükreş (1974).

Kharal A., Ahmad B., Mappings on Soft Classes, *New Math. Nat. Comput*., 2011, **7**(3), 471-481.

Kramosil I., Michálek J., Fuzzy Metrics and Statistical Metric Spaces, *Kybernetika*, 1975, **11**(5), 336-344.

Lowen R., Fuzzy Topological Spaces and Fuzzy Compactness, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1976, **56**, 621-633.

Lowen R., A Comparison of Different Compactness Notions in Fuzzy Topological Spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1978, **64**(2), 446-454.

Mardones-Pérez, I., Prada Vicente M. A., A Representation Theorem for Fuzzy Pseudometrics, *Fuzzy Sets and Systems*, 2012, **195**, 90-99.

Maji P.K., Biswas R., Roy A.R., Fuzzy Soft Sets, *J. Fuzzy Math*., 2001, **9**(3), 589-602.

Maji P.K., Biswas R., Roy A.R., Soft Set Theory, *Computers and Mathematics with Applications*, 2003, **45**, 555-562.

Majumdar P., Samanta S. K., Similarity Measure of Soft Set, *New Mathematics and Natural Computation*, 2008, **4**, 1-12.

Miheţ D., On Fuzzy Contractive Mappings in Fuzzy Metric Spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 2007, **158**(8), 915-921.

Miñana J.J, Shostak A., Fuzzifying Topology Induced by a Strong Fuzzy Metric, *Fuzzy Sets and Systems*,2016, **300**, 24-39.

Molodtsov D., Soft Set Theory- First Results, *Computers and Mathematics with Applications*, 1999, **37**, 19-31.

Pazar Varol B., Aygün H., Fuzzy Soft Topology, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 2012a, **41**(3), 407-419.

Pazar Varol B., Shostak A., Aygün H., A New Approach to Soft Topology, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics,* 2012b, **41**(5), 731-741.

Pazar Varol B., Aygün H., On Soft Hausdorff Axiom, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 2013, **5**(1), 15-24.

Pazar Varol B., Aygünoğlu A., Aygün H., Neighborhood Structures of Fuzzy Soft Topological Spaces, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2014, **27**(4), 2127-2135.

Pei D., Miano D., From Soft Sets to Information Systems, *2005 IEEE International Conference on Granular Computing*, Beijing, China, 25-27 Temmuz 2005.

Roy A.R., Maji P.K., A Fuzzy Soft Set Theoretic Approach to Decision Making Problems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2007, **203**, 412-418.

Saheli M., Fuzzy Topology Generated by Fuzzy Norm, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 2016, **13**(4), 113-123.

Shabir M., Naz M., On Soft Topological Spaces, *Computers and Mathematics with Applications*, 2011, **61**, 1786-1799.

Shostak, A. P, Two Decades of Fuzzy Topology: Basic Ideas, Notions, And Results, *Russian Mathematical Surveys*, 1989, **44**(6), 125-186.

Schweizer B., Sklar A., *Statistical Metric Spaces*, Pacific J. Math., 1960, **10**, 314-334.

Tanay B., Kandemir M.B., Topological Structures of Fuzzy Soft Sets, *Comput. Math. Appl.*, 2011, **61**, 412-418.

Wuyts P., On the Determination of Fuzzy Topological Spaces and Fuzzy Neighbourhood Spaces by Their Level-Topologies, *Fuzzy Sets and Systems*, 1984, **12**(1), 71-85.

Wuyts P., On Level-Topologies and Maximality of Fuzzy Topological Spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, **79**(3), 337-339.

Ying M., A New Approach for Fuzzy Topology (I), *Fuzzy Sets and Systems*, 1991, **39**(3), 303-321.

Ying-Ming L., Mao-Kang L., *Fuzzy Topology*, World Scientific Publishing, Uto-Print Singapore,1997.

Yue, Y., Shi F.G., On Fuzzy Pseudo-Metric Spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 2010, **161**(8), 1105-1116.

Zadeh L.A., Fuzzy Sets, *Information and Control*, 1965, **8**(3), 338-353.

Zhang D., Xu L. Categories Isomorphic to FNS, *Fuzzy Sets and Systems*, 1999, **104**(3), 373-380.

Zorlutuna I., Akdağ M., Min W.K., Atmaca S., Remarks on Soft Topological Spaces, *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 2012, **3**(2), 171-185.

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

[1] **Diyarbakırlı E.**, Yüce A., Akbulut S., Strong and Weak Convergence Theorems of New Three Step İteration Processes for Nonself Asymptotically Nonexpansive Mappings, *XXIV. Ulusal Matematik Sempozyumu*, Bursa, Turkey, 7-10 September 2011.

[2] Yüce A., **Diyarbakırlı E.**, Akbulut S., Weak and Strong Convergence of a Scheme With Errors for Two Nonself Asymptotically Quasi-Nonexpansive Mappings, *International Conference on Applied Analysis and Algebra*, İstanbul, Turkey, 29 June -2 July 2011.

[3] **Aydoğdu E.,** Aygünoğlu A., Aygün H., Soft Dönüşümlerde Sabit Nokta, *27. Ulusal Matematik Sempozyumu*, İstanbul, Turkey, 26-29 August 2014.

[4] Aygünoğlu A., **Aydoğdu E.,** Aygün H., On Lowen Type Fuzzy Soft Topological Spaces, *4th International Fuzzy Systems Symposium*, İstanbul, Turkey, 5-6 November 2015.

[5] **Aydoğdu E.,** Aygünoğlu A., Aygün H., Soft Metric Spaces, *6th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications*, Budapest, Hungary, 15-18 August 2017.

[6] **Aydoğdu E.,** Aygünoğlu A., Aygün H., Soft Metric Spaces and Fixed Point Theorems on Soft Metric Spaces, *International Conference on Mathematics and Engineering*, İstanbul, Turkey, 10-12 May 2017.

[7] **Aydoğdu E.,** Aygünoğlu A., Aygün H., On Convergence and Continuity in Fuzzy Metric Spaces, *International Conference on Mathematics and Engineering*, İstanbul, Turkey, 10-12 May 2017.

[8] **Aydoğdu E.,** Aygünoğlu A., Aygün H., Fuzzy Soft Metric and Fuzzifying Soft Topology Induced by Fuzzy Soft Metric, *International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics*, Aydın, Turkey, 11-15 May 2017.

[9] **Aydoğdu E.,** Aygünoğlu A., Aygün H., Fuzzifying Topology Induced by Fuzzy Metric, *The 5th International Fuzzy Systems Symposium*, Ankara, Turkey, 14-15 October 2017.

[10] **Aydoğdu E.,** Aygünoğlu A., Aygün H., Convergence in Fuzzy Soft Metric Space, *International Conference on Mathematics and Related Sciences*, Antalya, Turkey, 30 April- 4 May 2018.

[11] **Aydoğdu E.,** Aygünoğlu A., Aygün H., Some Properties of Fuzzy Soft Metric Spaces, *International Conference on Mathematics and Related Sciences*, Antalya, Turkey, 30 April- 4 May 2018.

[12] **Aydoğdu E.,** Aygünoğlu A., Aygün H., On Fuzzy Metric Spaces of Continuous Function, *5th International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics*, Trabzon, Turkey, 23-27 July 2018.

[13] **Aydoğdu E.,** Aygünoğlu A., Aygün H., Fuzzy Topology Generated by Fuzzy Metric, *2018 International Conferences on Topology and its Applications*, Nafpaktos, Greece, 7-11 July 2018.

[14] **Aydoğdu E.,** Aygünoğlu A., Aygün H., On the Construction of Fuzzy Topology Induced by a Fuzy Metric, *The Mediterranean International Conference of Pure and Applied Mathematics and Related Areas*, Antalya, Turkey, 26-29 October 2018.

[15] Gündüz B., **Aydoğdu E.**, Aygün H., Fixed Point of Multivalued Nonexpansive Mappings in Kohlenbach Hyperbolic Space, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 2019, **26** (3), 509-519.

[16] Aygünoğlu A., **Aydoğdu E.**, Aygün H., Fuzzy Soft Metric and Fuzzifying Soft Topology Induced by Fuzzy Soft Metric, *FILOMAT*, 2019, **33** (2), 1-11.

[17] Aygünoğlu A., **Aydoğdu E.**, Aygün H., Construction of Fuzzy Topology by Using Fuzzy Metric, Applicable Analysis and Discrete Mathematics, (accepted).

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Hatay'da doğdu. İlköğretim ve lise öğrenimini Hatay'da tamamladı. 2005 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Kazim Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünden 2010 yılında bölüm 2.liği derecesiyle mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında TÜBİTAK burslusu olarak Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2012 yılında Yüksek Lisans öğrenimini tamamlayarak Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Doktora öğrenimine başladı. Şubat 2012'den beri Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.