KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

GİZEM MAVİTUNA

KOCAELİ 2018

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

GİZEM MAVİTUNA

Prof. Dr. Serdal PAMUK
Danışman, Kocaeli Üniv. .....

Prof. Dr. Zahir MURADOĞLU
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv. .....

Doç. Dr. Bülent YILMAZ
Jüri Üyesi, Marmara Üniv. .....

Tezin Savunulduğu Tarih: 03.07.2018

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Kendisiyle çalışma fırsatını elde ettiğim için kendimi şanslı hissettiğim ve kurduğu her cümlenin hayatıma kattığı anlamı yadsıyamayacağım saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Serdal PAMUK'a yardımları, desteği ve sabrı için teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Bunun yanında bu meşakkatli süreçte bana olan inancını asla yitirmeyen, desteğini her daim yanımda hissettiğim kıymetli aileme ve yol arkadaşıma sonsuz teşekkürler.

Temmuz-2018 Gizem MAVİTUNA

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR i
İÇİNDEKİLER ii
ŞEKİLLER DİZİNİ iv
TABLOLAR DİZİNİ v
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ vi
ÖZET vii
ABSTRACT viii
GİRİŞ 1
1. HAREKET EDEN DALGA VE KENDİNE BENZER ÇÖZÜMLER 3
1.1. Hareket Eden Dalga Çözümleri 3
1.2. Kendine Benzer Çözümler 5
1.2.1. Üstel kendine benzer çözümler 8
2. BİR BOYUTLU BAZI PARABOLİK LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER 10
2.1. Kuvvetli Lineer Olmayan Denklemler 10
2.1.1. $\partial w/\partial t= a(\partial^2 w)/(\partial x^2)+bw+cw^2$ formundaki denklemler 10
2.1.2. $\partial w/\partial t= a(\partial^2 w)/(\partial x^2)+b_0+b_1 w+b_2 w^2+b_3 w^3$ formundaki denklemler 15
2.1.3. $\partial w/\partial t= (\partial^2 w)/(\partial x^2)+f(w)\partial w/\partial x+g(w)$ formundaki denklemler 18
3. n BOYUTTA İKİNCİ DERECEDEN LİNEER OLMAYAN PARABOLİK KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER 24
3.1. Cole-Hopf Dönüşümü 24
3.2. Porous Medium Denklemi 26
4. BAZI LİNEER OLMAYAN DENKLEMLER İÇİN ADOMIAN AYRIŞTIRMA VE ANTI-REDUCTION METODUNUN UYGULAMALARI 30
4.1. $\partial u/\partial t = \partial/\partial x(u^m \partial u/\partial x)$ Formundaki Denklemler İçin Adomian Ayrıştırma Yöntemi 30
4.2. $u_t = (a(u)u_x)_x+F(u)$ Formundaki Denklemler İçin Anti-Reduction Metodu 32
4.2.1. $a(u) = \lambda u^k$, $F(u)=\lambda_1 u+\lambda_2 u^{k-1}$ 32
4.2.2. $a(u) = \lambda e^u$, $F(u)=\lambda_1+\lambda_2 e^{-u}$ 49
4.2.3. $a(u) = \lambda u^{-3/2}$, $F(u)=\lambda_1 u+\lambda_2 u^{5/2}$ 52
4.2.4. $a(u) = 1$, $F(u)=(\lambda_1+\lambda_2 \ln u)u$ 54
5. MATEMATİKSEL FİZİKDEKİ DENKLEMLER İÇİN BAZI DÖNÜŞÜMLER 55
5.1. Bazı Özel Dönüşümler 55
5.1.1. $w_t = aw_{xx}+ bw^2- t^2 w$ 55
5.1.2. $w_t = aw_{xx}+ bw^2 + w$ 55
5.2. Nokta Dönüşümü 56
5.3. Hodograph Dönüşümü 59

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 63
KAYNAKLAR 65
KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER 67
ÖZGEÇMİŞ 68

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Hareketli dalga çözüm grafiği (-5 ≤x≤ 5) , (0 ≤t≤ 4), a=20, c=10 13
Şekil 2.2. Hareketli dalga çözüm grafiği (-5 ≤x≤ 5), (0 ≤t≤ 4), a=2, c=10 13
Şekil 2.3 Hareketli dalga çözüm grafiği (0 ≤x≤ 3), (0 ≤t≤ 2), a= -1, c=0.1 14
Şekil 2.4. Burger denklemi hareketli dalga çözümü 20
Şekil 2.5. v difüzyon katsayısına bağlı olarak değişiklik gösteren dalga formu 21
Şekil 4.1. k= -1 için sırasıyla çözüm eğrilerinin grafikleri 39
Şekil 4.2. k=2 için sırasıyla çözüm eğrilerinin grafikleri 34
Şekil 4.3. k=3 için sırasıyla çözüm eğrilerinin grafikleri 35
Şekil 4.4. Çözümün grafiği 51
Şekil 4.5. Çözümün grafiği 52

TABLOLAR DİZİNİ

Tablo 1.1. Bazı t ve x dönüşümleri 9

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$C_1, C_2, \ldots$	: keyfi sabit
t	: zaman
u, w	: bilinmeyen fonksiyon(bağımlı değişken)
x, y, z	: kartezyen koordinatlar
$x_1, x_2, \ldots, x_n$	: n-boyutlu uzayda kartezyen koordinatlar
∇	: Gradient operatörü
Δ	: Laplace operatörü
$w_x=\frac{\partial w}{\partial x}$, $w_t=\frac{\partial w}{\partial t}$, …	: (kısmi türevler)
$f'_x=\frac{df}{dx}$, $f''_{xx}=\frac{d^2f}{dx^2}$, …	: (f=f(x) için adi türevler)

BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

ÖZET

Bu çalışmadaki amaç bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin en basit çözüm yöntemlerini sunmaktır. Bu durumdan hareketle öncelikle en basit çözüm yöntemi olan hareket eden dalga ve kendine benzer çözümler üzerinde durulmuş, Cole-Hopf dönüşümü ile birlikte Burger denklemi ele alınmıştır. Matematiksel biyolojide oldukça önemli bir yere sahip olan Porous Medium denkleminin çözümü elde edilmiştir. Daha sonra birçok kısmi diferansiyel denklemin çözümünde kolaylık sağlayan Anti-Reduction yöntemi açıklanmış, daha önce Adomian ayrıştırma yöntemi ile çözülmüş olan denklemler üzerinde bu yöntem denenmiştir ve elde edilen sonuçların birebir örtüştüğü gözlemlenmiştir. Bu elde edilen sonuçlar grafiklerle desteklenmiş ve çözümün davranışı yorumlanmıştır. Son olarak diğer çözüm yöntemlerinden olan Nokta dönüşümü ve Hodograph dönüşümü ele alınmış, bazı kısmi diferansiyel denklemler için uygulanmıştır. Hangi yöntemin hangi denklem tiplerine uygulanabilir olduğu ise sonuçlar kısmında tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Anti-Reduction Metodu, Burger Denklemi, Cole-Hopf Dönüşümü, Hodograph Dönüşümü, Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemler.

EXACT SOLUTIONS OF SOME NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

ABSTRACT

The purpose of this study is to present the easiest solution methods of some nonlinear partial differential equations. According to this situation, first of all, the most primitive solution methods travelling wave and self similar solutions has been studied, and also Burger equation together with Cole-Hopf transformation has been taken into consideration. The solution of Porous Medium Equation, which has a very important place in Mathematical Biology was obtained. Then, Anti-Reduction Method, which provides easiness in the solution of most of the partial differential equations, was explained, and this method was applied on the equations which were solved via Adomian Decomposition Method, and it was observed that the results obtained were completely compatible. These results were supported with the graphics and the behaviour of the solutions were interpreted. Lastly, the other solution methods, namely Point transformation and Hodograph transformation were studied and applied on some partial differential equations. It has been discussed in the results section that which method is applicable on which equation.

Keywords: Anti-Reduction Method, Burger Equation, Cole-Hopf Transformation, Hodograph Transformation, Nonlinear Partial Differential Equations.

GİRİŞ

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler, uygulamalı matematik ve mühendislik alanında oldukça önemli bir yere sahiptir. Bilim ve mühendisliğin çeşitli alanlarında yer alan bu diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemlerini elde etmenin birçok yolu vardır.

İlk yöntem 1980'lerin başında Adomian tarafından geliştirilen, analitik kesin çözümlerin hesaplamalarında yaygın olarak kullanılan Adomian ayrıştırma yöntemidir. Bu yöntem, lineerleştirme yapmak zorunda kalmadan, gerçek dışı varsayımlardan kaçınan çözümlerden biridir(Pamuk, 2009). Literatürde lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için bu yöntem çok sık kullanılır(Chengri ve Mingzhu, 2004 ; Ghorbani, 2007 ; Öziş ve Yıldırım, 2008 ; Pamuk N, 2005 ; Pamuk S, 2005 ; Shou ve He, 2008 ; Wazwaz, 2004 ; Kaya, 2002a ; Kaya, 2002b ; Pamuk, 2004).

Adomian ayrıştırma yöntemindeki zorluk, Adomian polinomlarının hesaplanmasının oldukça zaman alıcı olmasındandır. Bu zorluğun üstesinden gelmek için Adomian yöntemine bir alternatif yaklaşım olarak 1999'da He tarafından geliştirilen yöntem homotopy perturbation yöntemi ve varyasyonel yaklaşım yöntemidir. Homotopy perturbation yöntemi, Adomian polinomları yerine He polinomlarını kullanmıştır(Ghorbani, 2007). Bu yöntem birçok bilim adamı tarafından çeşitli kısmi diferansiyel denklemlere uygulanmıştır(Chun ve diğ., 2009 ; Ghorbani, 2007 ; He, 1999a ; He, 2002 ; He, 1999b ; Noor ve Mohyud-Din, 2008 ; Öziş ve Yıldırım, 2008 ; Pamuk S. ve Pamuk N., 2009). Varyasyonel yaklaşım yöntemi ise Noor ve Mohyud-Din tarafından beşinci mertebeden sınır değer problemlerine, He polinomları kullanılarak uygulanmıştır(Noor ve Mohyud-Din, 2008). Ayrıca bu yöntem Shou ve He tarafından değişken katsayılı ısı ve dalga denklemlerine de uygulanmıştır(Shou ve He, 2008).

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözüm yöntemlerinden olan bir diğer çözüm yöntemi anti-reduction yöntemidir. Bu yöntem Fushchych ve

Zhdanov tarafından bir boyutlu lineer olmayan ısı denklemlerine(Fushchych ve Zhdanov, 1994) ve çok boyutlu lineer olmayan dalga denklemlerine(Fushchych ve Zhdanov, 2003) uygulanmıştır. Yöntemin amacı, bu lineer olmayan ısı ve dalga denklemlerini adi diferansiyel denklem sistemlerine indirgemektir. Bu indirgeme işlemi bağımlı ve bağımsız değişken sayısını azaltarak değil, artırarak yapılır. Bu nedenle bu yönteme 'anti-reduction yöntemi' adı verilmiştir(Fushchych ve Zhdanov, 2003).

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin diğer bir çözüm yöntemi nokta dönüşümüdür. Bu dönüşüm, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemleri, lineer denklemlere dönüştürür. Bunun yanında Hodograph dönüşümü (Polyanin ve Zaitsev, 2004)'de kısmi diferansiyel denklemlere uygulanmıştır.

Bu çalışmada daha çok anti-reduction yöntemi ile Hodograph dönüşümü üzerinde durulmuştur. Gelecekteki çalışmalarda anti-reduction yönteminin iki veya daha fazla boyutta ele alınmasının ve Hodograph dönüşümünün çeşitli ısı ve dalga denklemleri için uygulanmasının bilime önemli katkı sağlayacağı kanaatindeyiz.

1. HAREKET EDEN DALGA VE KENDİNE BENZER ÇÖZÜMLER

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin kesin çözümlerini elde etmenin birçok yöntemi vardır. Bunlardan bir tanesi denklemi, orijinal denklemden daha az sayıda bağımlı ya da bağımsız değişken içeren daha basit formdaki denklemlere indirgemektir. Buradaki ana fikir denklemi daha basit hale getiren bu değişkenleri ve dönüşümleri bulmaktır. Bilhassa bu yolla, iki bağımsız değişken içeren bazı kısmi diferansiyel denklemlerin kesin çözümlerini bulma işlemi, o denkleme uygun adi diferansiyel denklemlerin veya denklem sistemlerinin kesin çözümlerini bulma işlemine indirgenebilir. Kuşkusuz ki bu adi diferansiyel denklemler, orijinal kısmi diferansiyel denklemlerin bütün çözümlerini bize vermezler; fakat çözüm hakkında yeterli bilgi edinmemizi sağlayacak olan çözüm sınıflarını bazı belirli özellikleri ile birlikte bize sunarlar.

Adi diferansiyel denklemler yardımıyla ifade edilen kesin çözüm sınıflarının en basit olanı hareketli dalga çözümleri ve kendine benzer çözümlerdir. Bu çözümlerin varlığı, dönüşüm altındaki orijinal denklemin değişmez oluşundandır(Polyanin ve Zaitsev, 2004).

Hareketli dalga çözümleri ve kendine benzer çözümler bir çok matematiksel fizik denklemlerinde ve uygulamalarında karşımıza çıkar. Aşağıda bu çözümlerin bazı karakteristik özellikleri incelenecektir.

Burada w bilinmeyen fonksiyonu, x ve t olmak üzere iki bağımsız değişkene bağlı alınır. t zamanı ifade eden bağımsız değişken, x de uzaysal koordinattır(Polyanin ve Zaitsev, 2004).

1.1. Hareket Eden Dalga Çözümleri

Kısmi denklemlerin hareket eden dalga çözümlerini bulmak için,

$$w(x,t)=W(z), \qquad z=x+\lambda t \tag{1.1}$$

olarak alınır. Burada λ, dalganın yayılma hızıdır (λ keyfi olabilir ve λ=0 değeri kararlı çözüme karşılık gelir). Hareket eden dalga çözümleri x-ekseni boyunca diğer dönüşümlerden elde edilen farklı zamanlardaki çözüm profillerini karakterize eder. Hareketli dalga çözümleri, Denklem (1.1)'deki değişkenlerin orijinal denklemde yerine yazılmasıyla kolaylıkla elde edilebilir.

Burada $W'=W_z$ olmak üzere,

$w_x=W'$, $w_t=\lambda W'$ biçimindedir.

Bu çözümler, bağımsız değişkenleri açıkça içermeyen, kapalı formdaki denklemlerde meydana gelir,

$$F\left(w,\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial t},\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t},\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)=0 \qquad (1.2)$$

Denklem (1.1), Denklem (1.2)'nin yerine yazıldığında W(z) fonksiyonu için aşağıdaki Denklem (1.3) zamandan bağımsız adi diferansiyel denklemi elde edilir (λ sabit);

$$F\left(W,W',\lambda W',W'',\lambda W'',\lambda^2 W'',\ldots.\right)=0 \qquad (1.3)$$

Denklem (1.2)'nin, iki bağımsız değişkene göre yapılan dönüşümler altında değişmez olduğu yani orijinal formunu koruduğu görülebilir.Örneğin $x=\bar{x}+C_1$, $t=\bar{t}+C_2$ ve C_1,C_2 keyfi sabit olmak üzere bu dönüşüm ile özel denklemlerin değişmezlik özelliği, bu gibi denklemlerin hareket eden dalga çözümlerinin varlığı ile birlikte ayrılmaz bir bütündür(Polyanin ve Zaitsev, 2004).

Örnek 1:
f , w'nun bir lineer olmayan fonksiyonu olmak üzere,

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] \qquad (1.4)$$

lineer olmayan ısı denklemi ele alınsın.

Denklem (1.1), Denklem (1.4)'te yerine yazıldığında;

$$\left[f(W)W'\right]'-\lambda W'=0 \tag{1.5}$$

denklemi elde edilir ve Denklem (1.5)'in iki kez integrali alındığında,

C_1, C_2 keyfi sabitler olmak üzere Denklem (1.4)'ün yani lineer olmayan kısmi diferansiyel denkleminin kapalı formdaki çözümü;

$$\int \frac{f(W)dW}{\lambda W+C_1}=C_2+z, \tag{1.6}$$

Denklem (1.6) olarak elde edilir(Polyanin ve Zaitsev, 2004).

Örnek 2:
Aşağıdaki kısmi diferansiyel denklemi ele alınsın:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-bw^3 \tag{1.7}$$

Burada Denklem (1.1), Denklem (1.7)'de yerine yazıldığında,

$$\frac{dW}{dz}\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dW}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}\right)a-bW^3$$

$$\Longrightarrow \frac{dW}{dz}\lambda=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)a-bW^3 \tag{1.8}$$

$$\Longrightarrow \frac{dW}{dz}\lambda=\frac{d^2W}{dz^2}a-bW^3$$

Denklem (1.8) elde edilir. Böylece (1.7) kısmi türevli diferansiyel denkleminden adi türevli bir diferansiyel denklem elde edilmiştir.

1.2. Kendine Benzer Çözümler

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin kendine benzer çözümlerini bulmak için,

$$w(x,t)=t^{\alpha}U(\zeta), \qquad \zeta=xt^{\beta} \tag{1.9}$$

Denklem (1.9) şeklinde çözüm aranır. Burada α , β keyfi sabitlerdir.

Eğer bağımlı ve bağımsız değişkenler,

$$t=C\bar{t}, \quad x=C^k\bar{x}, \quad w=C^m\bar{w}, \tag{1.10}$$

Denklem (1.10) olarak seçilirse burada $C\neq 0$, k ve m keyfi sabitler , $\bar{t}$, $\bar{x}$ yeni bağımsız değişkenler ve $\bar{w}$ yeni bağımlı değişken olmak üzere,

$$F(x,t,w,w_x,w_t,w_{xx},w_{xt},w_{tt})=0 \tag{1.11}$$

Denklem (1.11), Dönüşüm (1.9) ile yeni değişkenlere sahip olan,

$$F(\bar{x},\bar{t},\bar{w},\bar{w}_x,\bar{w}_t,\bar{w}_{xx},\bar{w}_{xt},\bar{w}_{tt})=0 \tag{1.12}$$

Denklem (1.12)'ye dönüştürülür. Burada çözümün varlık kriteri kontol edilmelidir. Bunun anlamı, eğer Denklem (1.12)'yi sağlayan k, m ikilileri bulunabilirse Denklem (1.9) kendine benzer çözümünün varlığından söz edilebilir ki bu aranan k, m ikilileri:

$$k=-\beta, \quad m=\alpha \tag{1.13}$$

biçimindedir. Böylece,

$$w=t^{\alpha}U(\zeta), \qquad \zeta=xt^{\beta} \tag{1.14}$$

Çözüm (1.14), yeni değişkenler içeren;

$$\bar{w}=\bar{t}^{\alpha}U(\bar{\zeta}), \qquad \bar{\zeta}=\bar{x}\bar{t}^{\beta} \tag{1.15}$$

Çözüm (1.15)'e yani kendine benzer çözümüne dönüşür(Polyanin ve Zaitsev, 2004).

Örnek 3.

$$\frac{\partial w}{\partial t}=a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+bw^n \tag{1.16}$$

denklemi göz önüne alınsın. Dönüşüm(1.10), Denklem (1.16)'da yerine yazıldığında,

$$C^{m-1}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}}=aC^{m-2k}\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2}+bC^{mn}\bar{w}^n \tag{1.17}$$

Denklem (1.17) elde edilir ve C'nin kuvvetlerinin eşitliğinden:

m-1= m-2k = mn biçiminde k ve m sabitleri için lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir.

Buradan,

$$k = 1/2 \ , \ m = 1/(1-n) \tag{1.18}$$

Eşitlik (1.18) elde edilir. Bu çözüm, Denklem (1.7) ve (1.12) ile birlikte ele alındığında aşağıdaki kendine benzer çözüm elde edilir:

$$w = t^{\frac{1}{1-n}} U(\zeta), \qquad \zeta = x t^{-\frac{1}{2}}. \tag{1.19}$$

Çözüm (1.19), Denklem (1.16)'da yerine yazılırsa U fonksiyonu için Denklem (1.20) yani adi diferansiyel denklemi elde edilmiştir(Polyanin ve Zaitsev, 2004):

$$aU''_{\zeta\zeta} + \frac{1}{2}\zeta U'_{\zeta} + \frac{1}{1-n} U + bU^{n} = 0. \tag{1.20}$$

Örnek 4.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial}{\partial x}\left(w^{n} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \tag{1.21}$$

Dalga ve gaz dinamiği problemlerinde görülen lineer olmayan Denklem (1.21) incelensin. Dönüşüm (1.10), Denklem (1.21)'de yerine yazılırsa,

$$C^{m-2} \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \overline{t}^2} = aC^{\,mn + m - 2k} \frac{\partial}{\partial \overline{x}}\left(\overline{w}^{n} \frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{x}} \right) \tag{1.22}$$

Denklem (1.22) elde edilir. C'nin kuvvetlerinin eşitliğinden $m-2 = mn + m-2k$ bulunur. Ayrıca $k = \frac{1}{2}mn+1$ (m keyfi) olur. Dahası Denklem (1.7) ve (1.12) kullanılarak $w = t^{m}U(\zeta)$, $\zeta = x t^{-\frac{1}{2}mn-1}$ kendine benzer çözümleri bulunabilir;

Not: Hareketli dalga çözümleri, kendine benzer çözümlerle yakından alakalıdır. Öyle ki Denklem (1.1)'de $w=\ln u$, $W=\ln F$, $t=\ln \tau$, $x=\ln y$ seçildiğinde, hareketli dalga çözümünün Denklem (1.23) olduğu görülür;

$$u=F(x+\lambda t)=F\left(\ln\left(yt^{\lambda}\right)\right)=F_1\left(yt^{\lambda}\right) \tag{1.23}$$

1.2.1. Üstel kendine benzer çözümler

Üstel kendine benzer çözümler Denklem (1.24) formundadır;

$$w(x,t)=e^{\alpha t}V(\xi), \qquad \xi=xe^{\beta t}. \tag{1.24}$$

Burada C >0 keyfi sabit olmak üzere bazı k ve m sabitleri için,

$$t=\bar{t}+\ln C, \qquad x=C^k\bar{x}, \qquad w=C^m\bar{w}, \tag{1.25}$$

Dönüşüm (1.25) yapılmış ve bu dönüşümde C sabiti parametre gibi ele alınmıştır.

Uygulamalarda, önce çözümün varlık kriteri kontrol edilmiştir. Bunun anlamı, eğer Denklem (1.11)'i sağlayan k, m ikilileri bulunabilirse, (1.24) üstel kendine benzer çözümünün varlığından söz edilebilir ki bu aranan k, m ikilileri $k = -\beta$, $m = \alpha$ biçimindedir. Böylece,

$$w = e^{\alpha t}V(\xi), \qquad \xi = xe^{\beta t} \tag{1.26}$$

Çözüm (1.26), yeni değişkenler içeren,

$$\bar{w} = e^{\alpha\bar{t}}V\left(\bar{\xi}\right), \qquad \bar{\xi} = \bar{x}e^{\beta\bar{t}} \tag{1.27}$$

Çözüm (1.27)'ye dönüşmüştür(Polyanin ve Zaitsev, 2004).

Örnek 5:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=a\frac{\partial}{\partial x}\left(w^n\frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{1.28}$$

(1.28) lineer olmayan ısı denklemi ele alınsın.

Aşağıdaki tabloda C, C_1, C_2 keyfi sabitler olmak üzere bazı dönüşümler verilmiştir(Polyanin ve Zaitsev, 2004):

Tablo 1.1. Bazı t ve x dönüşümleri

No	Çözüm	Dönüşüm	Katsayıların İlişkisi
1	$w=U(z),\ z=\alpha x+\beta t$	$t=\bar{t}+C_1, x=\bar{x}+C_2$	α,β keyfi sabit.
2	$w=t^{\alpha}U(z),\ z=xt^{\beta}$	$t=C\bar{t}, x=\bar{C}^{k}\bar{x}, w=C^{m}\bar{w}$	$\alpha=m,\beta=-k$
3	$w=e^{\alpha t}U(z), z=xe^{\beta t}$	$t=\bar{t}+\ln C, x=C^{k}\bar{x}, w=C^{m}\bar{w}$	$\alpha=m,\beta=-k$
4	$w=t^{\alpha}U(z), z=x+\beta\ln t$	$t=C\bar{t}, x=\bar{x}+k\ln C, w=C^{m}\bar{w}$	$\alpha=m,\beta=-k$

Dönüşüm (1.25), Denklem (1.28)'de yerine yazıldığında;

$$C^{m}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{t}}=aC^{mn+m-2k}\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left(\bar{w}^{n}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}\right) \tag{1.29}$$

Denklem (1.29) elde edilmiştir. Burada, $k=\frac{1}{2}mn$ (m keyfi sabit). Denklem (1.24) ve $\alpha=m$, $\beta=-k$ formülleri kullanılarak ve $m=2$ alınarak, yeni değişkenler olarak $w=e^{2t}V(\xi)$, $\xi=xe^{-nt}$ bulunmuştur. Bu değerler Denklem (1.28)'de yerine yazıldığında, $V(\xi)$ fonksiyonu için;

$$a\left(V^{n}V_{\xi}^{'}\right)_{\xi}^{'}+n\xi V_{\xi}^{'}-2V=0 \tag{1.30}$$

Denklem (1.30) adi diferansiyel denklemi elde edilmiştir.

2.BİR BOYUTLU BAZI PARABOLİK LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

2.1. Kuvvetli Lineer Olmayan Denklemler

2.1.1. $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw + cw^2$ formundaki denklemler

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^2 \tag{2.1}$$

Denklem (2.1) göz önünde bulundurulsun. Burada a ve b sabitlerdir. w(x,t), Denklem (2.1)'in çözümü olsun. O halde c_1, c_2, c_3 keyfi sabitler olmak üzere $w_1 = c_1^2 w(c_1 x + c_2 ,\ c_1^2 t + c_3)$ fonksiyonu da Denklem (2.1)'in çözümüdür(Polyanin ve Zaitsev, 2004). $c_1 x + c_2 = u$, $c_1^2 t + c_3 = v$ olmak üzere;

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = c_1^2\left[\frac{\partial w_1}{\partial u}.0 + \frac{\partial w_1}{\partial v}.c_1^2\right] = c_1^4.\frac{\partial w_1}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = c_1^2\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial w_1}{\partial u}.c_1 + \frac{\partial w_1}{\partial v}.0\right] = c_1^3\frac{\partial^2 w_1}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} = c_1^4\frac{\partial^2 w_1}{\partial u^2} \tag{2.2}$$

Denklem (2.2), w_1 fonksiyonunun türev değerleridir. Bu bulunan türev değerleri Denklem (2.1)'de yerine yazıldığında,

$$c_1^4.\frac{\partial w_1}{\partial v} = ac_1^4\frac{\partial^2 w_1}{\partial u^2} + bc_1^4 w_1^2$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial w_1}{\partial v} = a\frac{\partial^2 w_1}{\partial u^2} + bw_1^2 \tag{2.3}$$

Denklem (2.3) elde edildi ki bu da w_1 çözümünün, incelenen denklemi sağladığını açıkça gösterir.

Aynı denklemin hareketli dalga çözümü (λ keyfi sabit);

$$w = w(z) \qquad z = x + \lambda t \tag{2.4}$$

Denklem (2.4) şeklindedir ve w fonksiyonu aşağıdaki zamandan bağımsız (2.5) adi diferansiyel denkleminin çözümüdür;

$$aw''_{zz} - \lambda w'_z + bw^2 = 0 \tag{2.5}$$

Gerçekten w'nun z'ye göre birinci ve ikinci dereceden türevleri Denklem (2.1)'de yerine yazıldığında,

$$\Longrightarrow \frac{dw}{dz}\frac{\partial z}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dw}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + bw^2$$

$$\Longrightarrow \frac{dw}{dz}\lambda = a\left(\frac{d^2w}{dz^2}\right) + bw^2$$

$$\Longrightarrow a\frac{d^2w}{dz^2} - \lambda\frac{dw}{dz} + bw^2 = 0 \tag{2.6}$$

Denklem (2.6) zamandan bağımsız adi diferansiyel denklemi elde edildi. Açıktır ki bu zamandan bağımsız adi diferansiyel denklemini çözmek demek, lineer olmayan (2.1) kısmi diferansiyel denklemini çözmek demektir.

Aynı denklemin kendine benzer çözümü ise,

$$w = t^{-1}u(\xi), \qquad \xi = xt^{-\frac{1}{2}} \tag{2.7}$$

Denklem (2.7) formundadır. Bu çözüm Denklem (2.1)'de yerine yazıldığında,

$$t^{-2}u + \frac{du}{d\xi}\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}xt^{-1} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + bw^2$$

$$= a\frac{d^2u}{d\xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}t^{-\frac{3}{2}} + bw^2$$

$$\Longrightarrow -t^{-2}u - \frac{1}{2}t^{-\frac{5}{2}}x\frac{du}{d\xi} = a\frac{d^2u}{d\xi^2}t^{-2} + bt^{-2}u^2$$

$$\Longrightarrow -u - \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \frac{\xi}{t^{-\frac{1}{2}}} \frac{du}{d\xi} = a \frac{d^2u}{d\xi^2} + bu^2$$

$$\Longrightarrow -u - \frac{1}{2} \xi \frac{du}{d\xi} = a \frac{d^2u}{d\xi^2} + bu^2 \tag{2.8}$$

Denklem (2.8) adi diferansiyel denklemi elde edildi. Bu adi diferansiyel denklemi çözmek demek, hareketli dalga çözümünde olduğu gibi, lineer olmayan (2.1) kısmi diferansiyel denklemini çözmek demektir.

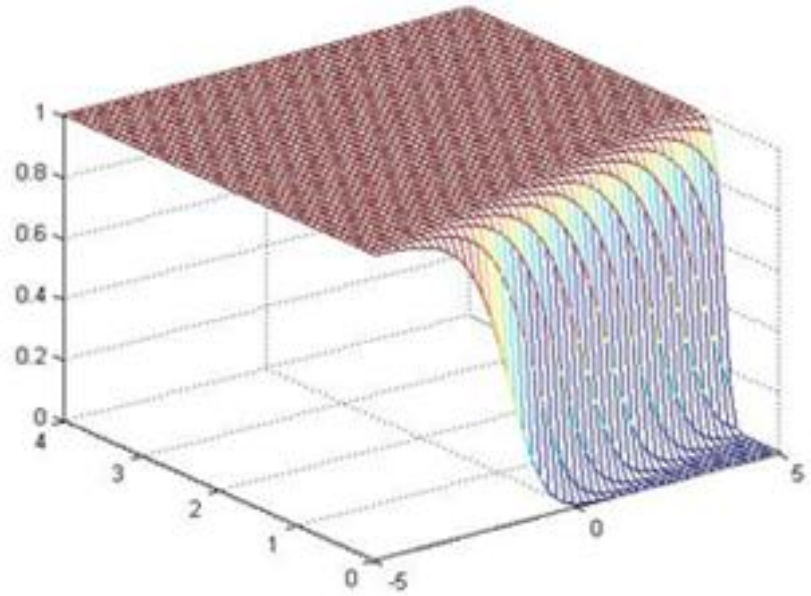
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw(1-w) \tag{2.9}$$

(2.9) Fisher denklemi incelensin. Bu denklem kimya, biyoloji ve ekoloji alanlarında yaygın olarak kullanılmasının yanı sıra, ısı ve kütle transferi problemlerinde de yaygın olarak kullanılır. Ayrıca Kolmogorov Petrovski-Piscounov (KPP) denklemi olarak da bilinen Fisher denklemi, difüzyon ve reaksiyon arasındaki etkileşim sürecini de açıklar(Chandraker ve diğ., 2015). $w(x,t)$, Denklem (2.9)'un çözümü olsun. O halde $w_1 = w(\pm x + c_1, t + c_2)$ de Denklem (2.9)'un çözümüdür(Polyanin ve Zaitsev, 2004).

Hareketli dalga çözümü ise;

$$w(x,t) = \left(1 + ce^{\left(-\frac{5}{6} at \pm \frac{1}{6}\sqrt{6a}x\right)}\right)^{-2} \tag{2.10}$$

Denklem (2.10) biçimindedir(Polyanin ve Zaitsev, 2004).

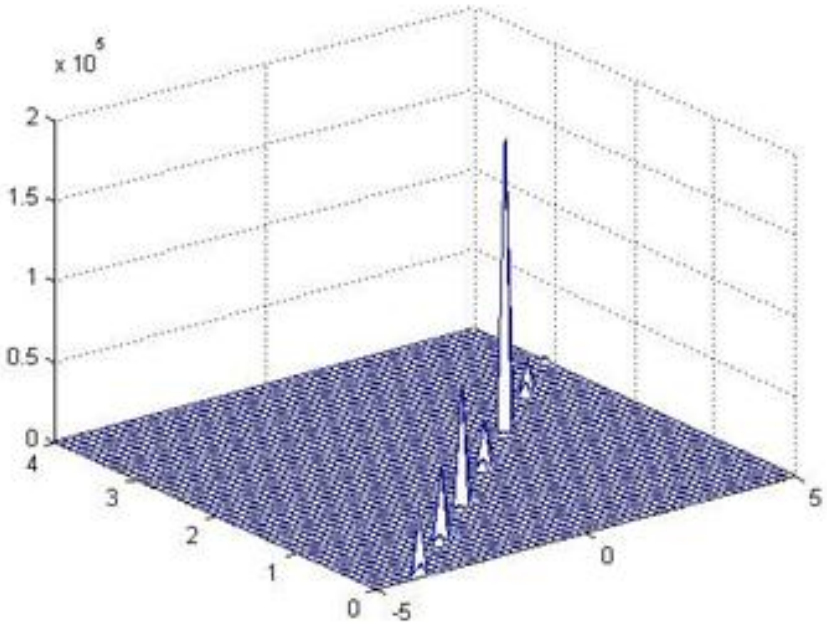


Şekil 2.1. Hareketli dalga çözüm grafiği (-5 ≤x≤ 5), (0 ≤t≤ 4) a=20 , c=10

Diğer bir hareketli dalga çözümü ise;

$$w(x,t) = \left[-1+c\exp\left(-\frac{5}{6}at+\frac{1}{6}\sqrt{6a}x\right)\right]^{-2} \qquad (2.11)$$

Denklem (2.11) biçimindedir(Polyanin ve Zaitsev, 2004).

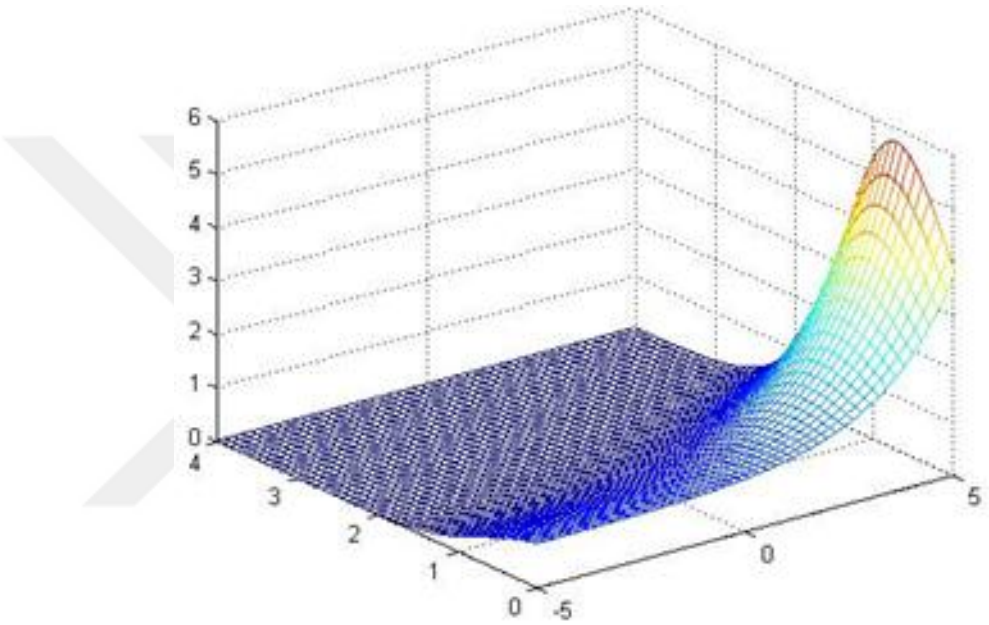


Şekil 2.2. Hareketli dalga çözüm grafiği (-5 ≤x≤ 5) , (0 ≤t≤ 4) a=2,c=10

Bunun dışında bir başka hareketli dalga çözümü ise;

$$w(x,t) = \frac{\left[1+2c\exp\left(-\frac{5}{6}at+\frac{1}{6}\sqrt{-6a}x\right)\right]}{[1+c\exp(-\frac{5}{6}at+\frac{1}{6}\sqrt{-6a}x)^{2}} \qquad (2.12)$$

Denklem (2.12) biçimindedir(Polyanin ve Zaitsev, 2004).



Şekil 2.3 Hareketli Dalga Çözüm Grafiği ($0 \leq x \leq 3$), ($0 \leq t \leq 2$), $a= -1$, $c=0.1$

Denklemin hareketli dalga çözümü ise,

$$w(x,t)= \pm \xi^{2}\varphi(\xi), \qquad \xi = c_1 e^{\left(\frac{1}{6}\sqrt{6a}x+\frac{5}{6}at\right)} \qquad (2.13)$$

Denklem (2.13) biçimindedir. Burada ξ aşağıdaki Eşitlik (2.14)'ü sağlamaktadır;

$$\xi= \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\pm(4\varphi^{3}-1)}} - c_2 \, . \qquad (2.14)$$

2.1.2. $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3$ formundaki denklemler

a. $$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - bw^3 \tag{2.15}$$

Denklem (2.15) göz önüne alınsın. w(x,t), Denklem (2.15)'in bir çözümü olsun. O halde $w_1 = c_1 w\left(\pm c_1 x + c_2, c_1^2 t + c_3\right)$ de Denklem (2.15)'in çözümüdür(Polyanin ve Zaitsev, 2004). Gerçekten $u = \pm c_1 x + c_2$, $v = c_1^2 t + c_3$ olmak üzere w_1 fonksiyonunun türevlerinden;

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = \left(\frac{\partial w}{\partial u}.0 + \frac{\partial w}{\partial v}.c_1^2\right) c_1 = c_1^3 \frac{\partial w}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = c_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(c_1^2 \frac{\partial w}{\partial u} + c_1 \frac{\partial w}{\partial v}.0\right) = c_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(c_1^2 \frac{\partial w}{\partial u}\right) = c_1^3 \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \tag{2.16}$$

Denklem (2.16) elde edildi. Bu bulunan türevler Denklem (2.15)'de yerine yazıldığında,

$$c_1^3 \frac{\partial w}{\partial v} = a c_1^3 \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - c_1^3 w^3$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial w}{\partial v} = a\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - bw^3 \tag{2.17}$$

Denklem (2.17) kısmi diferansiyel denklemi elde edildi. Bu da w_1 çözümünün Denklem (2.15)'i sağladığını açıkça göstermektedir.

Bunun dışında,

$$w(x,t) = \pm\sqrt{\frac{2a}{b}}\ \frac{2c_1 x + c_2}{c_1 x^2 + c_2 x + 6ac_1 t + c_3} \tag{2.18}$$

Denklem (2.18) de Denklem (2.15)'in çözümüdür(Polyanin ve Zaitsev, 2004).

Hareketli dalga çözümü ise $w = w(z)$, $z = x + \lambda t$ olarak aranmalıdır. Bu çözüm Denklem (2.15)'de yerine yazıldığında $aw''_{zz} - \lambda w'_z - bw^3$ adi diferansiyel denklemi elde edilmiştir. Gerçekten;

$$\frac{dw}{dz}\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dw}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}\right)a\text{-}bw^3$$

$$\frac{dw}{dz}\lambda=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dw}{dz}\right)a\text{-}bw^3$$

$$\Longrightarrow \frac{dw}{dz}\lambda=\frac{d^2w}{dz^2}a\text{-}bw^3 \qquad (2.19)$$

Denklem (2.19) adi diferansiyel denklemi elde edildi ki bu denklemin çözümü, Denklem (2.15)'in çözümüdür. Denklemin kendine benzer çözümü ise $w= t^{-\frac{1}{2}}u(\xi)$, $\xi= xt^{-1/2}$ şeklinde aranır. Bu çözüm Denklem (2.15)'de yerine yazıldığında;

$$au''_{\xi\xi}+\frac{1}{2}\xi\, u'_{\xi}+\frac{1}{2}u\text{-}bu^3=0 \qquad (2.20)$$

adi diferansiyel denklemi (2.20) elde edilmiştir(Polyanin ve Zaitsev, 2004). Gerçekten;

$$-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}u-\frac{1}{2}t^{-2}x\frac{du}{d\xi}=at^{-1}\frac{d^2u}{d\xi^2}t^{-\frac{1}{2}}-bt^{-\frac{3}{2}}u^3 \qquad (2.21)$$

Eşitlik (2.21) düzenlendiğinde;

$$-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}x\frac{du}{d\xi}=a\frac{d^2u}{d\xi^2}-bu^3 \qquad (2.22)$$

Denklem (2.22) elde edildi ki bu da , $\xi = xt^{-\frac{1}{2}}$ olmak üzere, yukarıda sözü edilen adi diferansiyel denklemdir.

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+aw\text{-}bw^3 \qquad (2.23)$$

Denklem (2.23) göz önüne alınsın. w(x,t), Denklem (2.23)'ün bir çözümü olsun. O halde $w_1=\pm w(\pm x+c_1,t+c_2)$ de Denklem (2.23)'ün bir çözümüdür. Gerçekten Denklem (2.23)'de bu w_1 çözümü yerine yazıldığında;

$$\frac{\partial w_1}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial u}.0+\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial v}, \qquad u=\pm x+c_1, \quad v=t+c_2$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}.0\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \tag{2.24}$$

(2.24) işlemleri ile birlikte;

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+aw\text{-}bw^3 \tag{2.25}$$

Denklem (2.25), w_1 çözümünün Denklem (2.23)'ü sağladığını açıkça göstermektedir.

$a>0$, $b>0$ ve bir diğer çözüm c_1,c_2,c_3 keyfi sabitler olmak üzere;

$$w=\sqrt{\frac{a}{b}}\frac{c_1 e^{\frac{1}{2}\sqrt{2a}x}- c_2 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2a}x}}{c_1 e^{\frac{1}{2}\sqrt{2a}x}+ c_2 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2a}x}+ c_3 e^{-\frac{3}{2}at}} \tag{2.26}$$

Denklem (2.26) şeklindedir(Polyanin ve Zaitsev, 2004).

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\text{-}w(1\text{-}w)(a\text{-}w) \tag{2.27}$$

Denklem (2.27) yani Fitzhugh-Naguma denklemi ele alınsın. Bu denklem matematiksel biyolojide sinir uçlarındaki elektrik iletim modellerinde kullanılır(Chandraker ve diğ., 2015). Bu denklemin iki aşamalı çözümü C keyfi sabit olmak üzere;

$$w=\frac{Ae^{(z_1)}+aBe^{(z_2)}}{Ae^{z_1}+Be^{z_2}+C},$$

$$z_1=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x+\left(\frac{1}{2}\text{-}a\right)t, \qquad z_2=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}ax+a\left(\frac{1}{2}a\text{-}1\right)t \tag{2.28}$$

Denklem (2.28) şeklindedir(Polyanin ve Zaitsev, 2004). Denklemin hareketli dalga çözümü ise $w(x,t)=w(\xi)$, $\xi=x+\lambda t$ olarak aranır. Bu çözüm Denklem (2.27)'de yerine yazıldığında;

$$w''_{\xi\xi}\text{-}\lambda w'_{\xi}=w(1\text{-}w)(a\text{-}w) \tag{2.29}$$

Denklem (2.29) adi diferansiyel denklemi elde edilmiştir. Gerçekten (2.30) işlemlerinden;

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{dw}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}=\frac{dw}{d\xi}\lambda$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dw}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dw}{d\xi}\right)=\frac{d^2 w}{d\xi^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{dw}{d\xi}\lambda=\frac{d^2 w}{d\xi^2}\text{-}w(1\text{-}w)(a\text{-}w) \tag{2.30}$$

adi diferansiyel denklemi elde edildi. Açıktır ki bu adi diferansiyel denklemi çözmek, Denklem (2.27)'yi çözmekten daha kolaydır.

2.1.3. $\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f(w)\frac{\partial w}{\partial x}+g(w)$ formundaki denklemler

$$\frac{\partial w}{\partial t}=v\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+w\frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.31}$$

Denklem (2.31) Burger denklemi ele alınsın. Bu denklem, akışkanlar dinamiğindeki en basit modeldir. ww_x terimi, dalganın kırılmasına yol açan şok etkisi; vw_{xx} ise tıpkı ısı denkleminde olduğu gibi difüzyon terimidir.

Burada bu denklemin;

$$w(x,t)= f(\xi)= f\left(x\text{-}ct\right) \tag{2.32}$$

Çözüm (2.32) formundaki hareketli dalga çözümleri aranır. $\xi=x\text{-}ct$ olmak üzere zincir kuralından;

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\text{-}cf'(\xi), \qquad \frac{\partial w}{\partial x}=f'(\xi), \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=f''(\xi) \tag{2.33}$$

Denklem (2.33) elde edilmiştir. Bu türevler Denklem (2.31)'de yerine yazıldığında;

$$\text{-}cf'(\xi)+f(\xi)f'(\xi)\text{-}vf''(\xi)=0 \tag{2.34}$$

Denklem (2.34) elde edilmiştir. Denklem (2.34) düzenlendiğinde Denklem (2.35) elde edilmiştir;

$$ff' = \frac{1}{2}\frac{df^2}{d\xi} \tag{2.35}$$

Denklem (2.34)'ün ξ 'e göre integrali alınsın,

$$-cf + \frac{1}{2}f^2 - vf' = B \tag{2.36}$$

Denklem (2.36) elde edilir. Ayrıca,

$$2v\frac{df}{d\xi} = \left(f^2 - 2cf - 2B\right) = (f-f_1)(f-f_2) \tag{2.37}$$

Denklem (2.37)'nin elde edilebildiği gözlenebilir. Burada $f_1 = c + \sqrt{c^2+2B}$ ve $f_2 = c - \sqrt{c^2+2B}$ olur. Burada f_1 ve f_2 reel olarak kabul edilir. $f_1 > f_2$ olmak üzere Denklem (2.37) değişkenlerine ayrıldıktan sonra bu denklemin integrali alındığında

$$\frac{\xi}{2v} = \int \frac{df}{(f-f_1)(f-f_2)} = \frac{1}{f_1-f_2}\ln\frac{f_1-f}{f-f_2}$$ elde edildi.

Buradan;

$$f(\xi) = \frac{f_1 + f_2 e^{\left(\frac{f_1-f_2}{2v}\right)\xi}}{1+e^{\left(\frac{f_1-f_2}{2v}\right)\xi}} \tag{2.37a}$$

ya da

$$f(\xi) = f_2 + \frac{f_1-f_2}{1+e^{\left(\frac{f_1-f_2}{2v}\right)\xi}} \tag{2.37b}$$

Denklem (2.37a) ya da Denklem (2.37b) elde edildi.

Diğer bir ifadeyle,

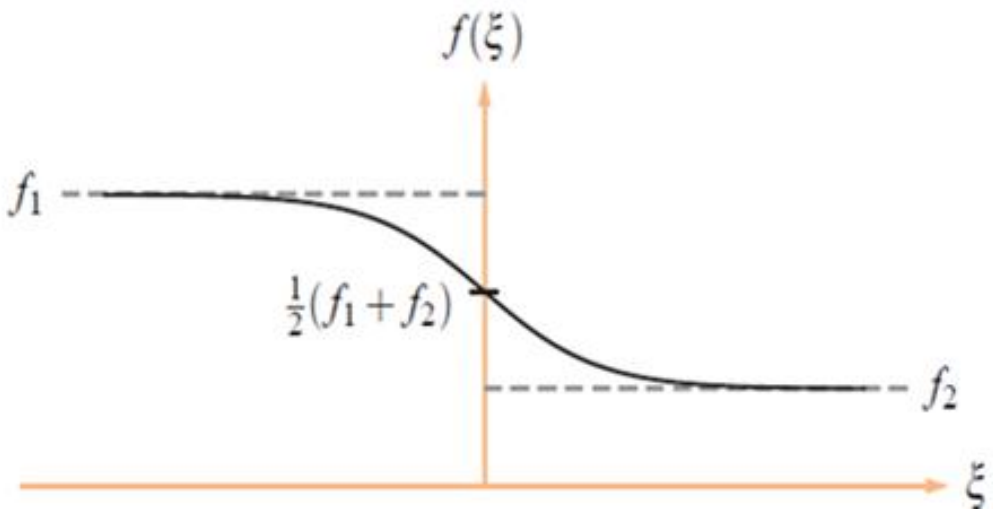
$$f(\xi) = \frac{1}{2}(f_1+f_2) + \frac{f_1 + f_2 e^{\left(\frac{f_1-f_2}{2v}\right)\xi}}{1+e^{\left(\frac{f_1-f_2}{2v}\right)\xi}} - \frac{1}{2}(f_1+f_2)$$

$$= \frac{1}{2}(f_1+f_2) - \frac{1}{2}(f_1-f_2)\tanh\left[\frac{1}{4v}(f_1-f_2)\xi\right] \quad (2.37c)$$

Denklem (2.37c) elde edildi. Böylece Denklem (2.31)'in hareketli dalga çözümü;

$$w(x,t)=c-\frac{1}{2}(f_1-f_2)\tanh\left[\frac{1}{4v}(f_1-f_2)(x-ct)\right] \quad (2.37d)$$

Denklem (2.37d) olur. Burada dalganın hızı olan c, f_1 ve f_2'nin tanımından $c=\frac{1}{2}(f_1+f_2)$ bulunur. (2.37c) eşitliğinden $\lim_{\xi\to-\infty} f(\xi)=f_1$, $\lim_{\xi\to\infty} f(\xi)=f_2$ $\forall\xi$ için $f'(\xi)<0$. Ayrıca $f(\xi)$ çözümü Şekil (2.4)'de de açıkça görüldüğü gibi f_1 sabit değerinden f_2 sabit değerine doğru monoton azalandır.

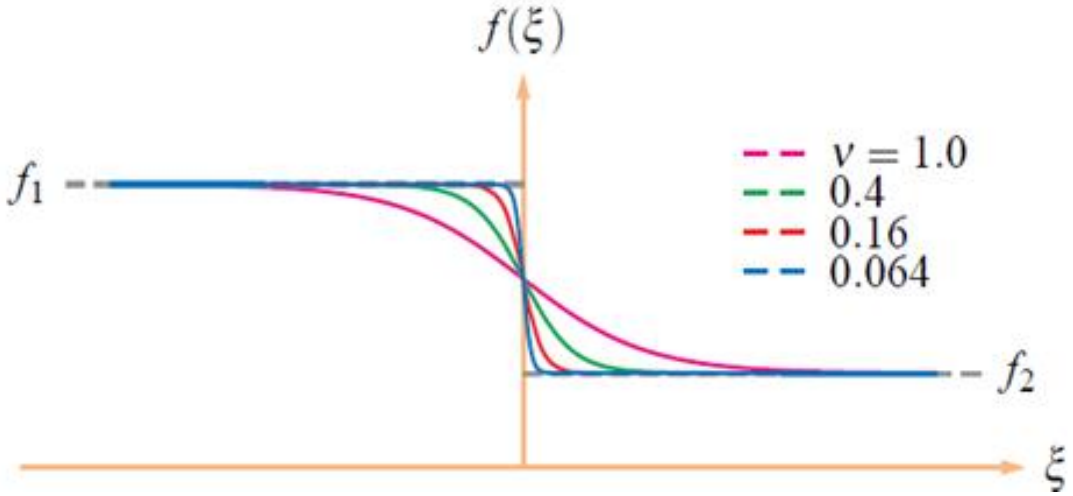


Şekil 2.4. Burger Denklemi Hareketli Dalga Çözümü(Salih A.)

$\xi=0$ değerinde;

$$w=\frac{1}{2}(f_1+f_2)=c \quad (2.38)$$

Denklem (2.38) elde edilmiştir. $f(\xi)$ dalgası, c hızında kendi asimptotik değer aralığında soldan sağa doğru hareket eder. Burger denkleminin akışkan terim olmadığı zamanki çözümü, dalgalandıktan sonra birbirinden ayrılan dalga formları gibidir. Difüzyon denkleminin oluşu dalganın şeklinin bozulmasını ve kırılmasını önler.Şekil (2.4) dalga formunun şekli, v difüzyon katsayısına bağlı olarak değişiklik gösterir(SalihA.).



Şekil 2.5. v difüzyon katsayısına bağlı olarak değişiklik gösteren dalga formu(Salih A.)

Şimdi w(x,t), Denklem (2.31)'in v=1 olmak üzere çözümü olsun. O halde $w_1=c_1 w\left(c_1 x+c_1 c_2 t+c_3, c_1^2 t+c_4\right)+c_2$ de Denklem (2.31)'in çözümüdür(Polyanin ve Zaitsev, 2004). $u_1=c_1 x+c_1 c_2 t+c_3$, $v_1=c_1^2 t+c_4$ olmak üzere, w_1 değeri Denklem (2.31)'de yerine yazıldığında;

$$\frac{\partial w_1}{\partial t}=c_1\left(\frac{\partial w}{\partial u_1}c_1 c_2+\frac{\partial w}{\partial v_1}c_1^2\right)=c_1^2 c_2\frac{\partial w}{\partial u_1}+c_1^3\frac{\partial w}{\partial v_1}$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(c_1^2\frac{\partial w}{\partial u_1}\right)=c_1^3\frac{\partial^2 w}{\partial {u_1}^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial w}{\partial v_1}=\frac{\partial^2 w}{\partial {u_1}^2}+w\frac{\partial w}{\partial u_1} \qquad (2.39)$$

Denklem (2.39) elde edildi ki bu da w_1 çözümünün, Denklem (2.31)'i sağladığını göstermektedir.

Diğer bir çözüm(Polyanin ve Zaitsev, 2004);

$$w(x,t)=\frac{A\text{-}x}{B+t} \qquad (2.40)$$

Denklem (2.40) şeklindedir. Gerçekten;

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{x\text{-}A}{(B+t)^2}, \qquad \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{-B-t}{(B+t)^2}=-\frac{1}{B+t}, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \tag{2.41}$$

Denklem (2.41)'deki türev değerleri Denklem (2.31)'de yerine yazıldığında orijinal denklemi sağladığı kolayca görülmektedir. Ayrıca;

$$w(x,t)=\lambda+\frac{2}{x+\lambda t+A} \tag{2.42}$$

Denklem (2.42), Denklem (2.31)'in bir çözümdür(Polyanin ve Zaitsev, 2004).

Burger denklemi için Cole-Hopf dönüşümü

Burger denkleminin bir diğer çözümü Cole-Hopf dönüşümü kullanılarak bulunabilir. Burger denklemi (2.31) ele alınsın. Lineer olmayan bir denklemi lineer forma getirmek kolay değildir. Fakat lineer bir denklemi lineer olmayan forma getirmek daha kolaydır. O halde aşağıdaki klasik lineer ısı denklemi olan Denklem (2.43) ele alınsın:

$u=u(x,t)$ olmak üzere,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.43}$$

En basit lineer olmayan dönüşüm aşağıdaki Dönüşüm (2.44) gibidir:

$$u=e^{\alpha\phi}, \qquad \phi=\phi(x,t) \tag{2.44}$$

Denklem (2.44) ϕ 'ye göre çözüldüğünde,

$$\phi=\frac{1}{\alpha}\ln u, \qquad u(x,t)>0 \tag{2.45}$$

Denklem (2.45) elde edilmiştir. Zincir kuralından,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha\frac{\partial \phi}{\partial t}e^{\alpha\phi}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}=\alpha\frac{\partial \phi}{\partial x}e^{\alpha\phi}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left[\alpha\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\alpha^2\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2\right]e^{\alpha\phi} \tag{2.46}$$

Denklem (2.46) elde edildi. Bu bulunan türev değerleri Denklem (2.43)'de yerine yazıldığında;

$$\alpha \frac{\partial \phi}{\partial t} e^{\alpha \phi} = v \left[\alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \alpha^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] e^{\alpha \phi}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} = v \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + v\alpha \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \tag{2.47}$$

Denklem (2.47) elde edildi. Denklem (2.47) x'e göre türetildiğinde aşağıdaki Denklem (2.48) elde edildi.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} = v \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + 2v\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \tag{2.48}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = w \tag{2.49}$$

Denklem (2.49) sağlansın. O halde Denklem (2.50) ile birlikte,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2v\alpha w \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \alpha = -\frac{1}{2v} \tag{2.50}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial x} = v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2.51}$$

Burger denklemi (2.51) elde edilmiştir. Yani Cole-Hopf dönüşümü(Salih A.);

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (-2v \ln u) = -2v \frac{u_x}{u} \tag{2.52}$$

Denklem (2.52) şeklindedir.

Sonuç olarak klasik ısı denklemi Burger denklemine dönüşmüş oldu.

3. n BOYUTTA İKİNCİ DERECEDEN LİNEER OLMAYAN PARABOLİK KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

3.1. Cole-Hopf Dönüşümü

Tanım:

$Du=(u_{x_1},\ldots,u_{x_n})$=Gradient vektör

$\Delta u=\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$ =Laplace operatörü

Öncelikle, hemen hemen lineer parabolik denklemler için bir başlangıç değer problemi ele alınsın:

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u + b|Du|^2 = 0 & , \quad R^n \times (0,\infty) \\ u = g & , \quad R^n \times \{t=0\} \end{cases} \tag{3.1}$$

Burada $a>0$. Bu denklem optimal kontrol teorisinde kullanılmaktadır. $w=\emptyset(u)$, Denklem (3.1)'in çözümü olsun. Burada u'nun ve $\emptyset = R \rightarrow R$ 'nin Denklem (3.1)'in düzgün çözümü olduğu kabul edilmiştir. w çözümü Denklem (3.1)'de yerine yazıldığında;

$w_t=\phi'(u)u_t$

$\Delta w=\phi'(u)\Delta u+\emptyset''(u)|Du|^2$,

$w_t=\emptyset'(u)[a\Delta u-b|Du|^2]$

$$=a\emptyset'(u)\Delta u-b\emptyset'(u)|Du|^2 \tag{3.2}$$

$=a(\Delta w-\emptyset''(u)|Du|^2)-b\emptyset'(u)|Du|^2$

$=a\Delta w-a\emptyset''(u)|Du|^2-b\emptyset'(u)|Du|^2$

$=a\Delta w-[a\emptyset''(u)+b\emptyset'(u)]|Du|^2$

$=a\Delta w$

Denklem (3.2) elde edildi. Burada,

$a\emptyset''(u)+b\emptyset'(u)=0$ olsun.

Bu diferansiyel denklem çözüldüğünde,

$$\emptyset'(u)=w, \quad \emptyset''(u)=w' \tag{3.3}$$

Denklem (3.3) olmak üzere,

$$aw'=-bw \quad \Longrightarrow \quad \ln w=-\frac{bu}{a} \quad \Longrightarrow \quad w=\emptyset(u)=e^{-\frac{bu}{a}} \tag{3.4}$$

Denklem (3.4) elde edildi. Bu bulunan w değeri,

$$\begin{cases} w_t-a\Delta w=0 & , \quad R^n \times (0,\infty) \\ w=e^{\frac{-bu}{a}} & , \quad R^n \times \{t=0\} \end{cases} \tag{3.5}$$

Isı denklemi (3.5) için Denklem (3.1) başlangıç değer probleminin bir çözümüdür. Burada Formül (3.4) Cole-Hopf dönüşümüdür.

Denklem (3.5)'in sınırlı olan tek çözümü(Evans, 1998);

$$w(x,t)=\frac{1}{(4\pi at)^{\frac{n}{2}}}\int_{R^n} e^{\frac{-|x-y|^2}{4at}} e^{\frac{-b}{a}g(y)}dy \qquad (x\in R^n \ , t>0); \tag{3.6}$$

Denklem (3.6) olur. Denklem (3.4)'ten ,

$$u=-\frac{a}{b}\log w \tag{3.7}$$

Denklem (3.7) elde edildi. Bu değer u çözümünde yerine yazıldığında;

$$u(x,t)=-\frac{a}{b}\log\left(\frac{1}{(4\pi at)^{\frac{n}{2}}}\int_{R^n} e^{\frac{-|x-y|^2}{4at}-\frac{b}{a}g(y)}dy\right) \qquad (x\in R^n ,t>0) \tag{3.7a}$$

Denklem (3.7a) elde edilmiştir ki bu da (3.1) hemen hemen lineer başlangıç değer probleminin çözümüdür.

3.2. Porous Medium Denklemi

$$\partial_t u - \Delta u^m = 0 \tag{3.8}$$

Denklem (3.8) Porous medium denklemi olup, burada $m = \gamma + 1$ 'dir. $\gamma \geq 0$ olarak kabul edildiğinde $m \geq 1$ olur. $m = 1$ için Denklem (3.8) lineer ısı denklemidir. $m > 1$ iken denklem, porous medium denklemidir. Bu denklem $0 < m < 1$ için de oldukça önemlidir. Bu çalışmada sadece $m > 1$ durumu incelenecektir. Bu model, biyolojik sistemlerdeki popülasyon denklemidir. $m = 3$ için bu denklem Navier-Stokes denklemidir.

Porous medium denkleminin kendine benzer çözümleri incelensin.

Eğer u, $R^n \times (0,\infty)$ 'de Denklem (3.8)'i sağlıyorsa (u ve u^m düzgün) $u_{\mu,\lambda} = \mu u\left(\lambda x, \lambda^2 \mu^{m-1} t\right)$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$ denklemi de $R^n \times (0,\infty)$ 'de Denklem (3.8)'i sağlar. Dahası, ısı denkleminde olduğu gibi $\int_{R^n} u(x,t)dx$ toplam kütle korunur. $u_{\mu,\lambda}$ dönüşümü altında toplam kütle korunduğundan ($\mu = \lambda^n$) aşağıdaki Dönüşüm (3.9) da yazılabilir(Pamuk ve Ataç, 2014);

$$u_k(x,t) = \lambda^n u\left(kx, k^{2+(m-1)n} t\right) \quad , \quad k > 0. \tag{3.9}$$

Burada toplam kütle korunmaktadır ve bu, ısı denklemi için genelleştirilmiş dönüşümdür. Aşağıda sadece $m>1$ durumu incelenmiştir. u, Dönüşüm (3.9) altındaki değişmez fonksiyon olsun. Açıktır ki;

$$u_k(x,t) = u(x,t) \quad , \quad x \in R^n \quad , \quad t > 0 \quad , \quad k > 0 \tag{3.10}$$

Denklem (3.10) sağlanmaktadır. Ayrıca u aşağıdaki Denklem (3.11) ve (3.12) ile ifade edilebilir;

$$u(x,t) = t^{-l} w\left(t^{-l/n} x\right), \tag{3.11}$$

$$w(y) = u(y,t) \quad , \quad y \in R^n \quad , \quad k = t^{-l/n} \quad , \quad l = \frac{n}{2+(m-1)n} \tag{3.12}$$

Hesaplamalar gösterir ki Dönüşüm (3.9) altındaki u fonksiyonu Denklem (3.8)'in çözümüdür ancak ve ancak w, Denklem (3.13)'ü sağlar ise;

$$\Delta w^m(y)+{}^1\!/_n <y,\nabla w(y)> + \lambda w(y)=0 \quad , \quad y\in R^n \tag{3.13}$$

Şimdi $v= w^{m-1}$ basıncı, bağımlı değişken olarak yoğunluğun yerine seçilsin. Eğer $v>0$ ise $v=v(y)$ için Denklem (3.13)'den aşağıdaki Denklem (3.14) elde edilmiştir;

$$\Delta\left(v^{\frac{m}{m-1}}\right)+\frac{\lambda}{n} <y,\nabla v^{\frac{1}{m-1}}> + \lambda v^{\frac{1}{m-1}} = 0 \tag{3.14}$$

$$\Delta\left(v^{\frac{m}{m-1}}\right)=\left[\left(v^{\frac{m}{m-1}}\right)_{y_1}\right]_{y_1} +\left[\left(v^{\frac{m}{m-1}}\right)_{y_2}\right]_{y_2} +\ldots+\left[\left(v^{\frac{m}{m-1}}\right)_{y_n}\right]_{y_n}$$

$$=\left(\frac{m}{m-1}v^{\frac{1}{m-1}}v_{y_1}\right)_{y_1} +\ldots+\left(\frac{m}{m-1}v^{\frac{1}{m-1}}v_{y_n}\right)_{y_n}$$

$$=\frac{m}{m-1}\left[\frac{1}{m-1}v^{\frac{1}{m-1}-1}v_{y_1}^2+v_{y_1y_1}v^{\frac{1}{m-1}}+\ldots+\frac{1}{m-1}v^{\frac{1}{m-1}-1}v_{y_n}^2+v_{y_ny_n}v^{\frac{1}{m-1}}\right. \tag{3.15}$$

$$=\frac{m}{m-1}v^{\frac{1}{m-1}}\left[\frac{1}{m-1}v^{-1}|\nabla v|^2+\Delta v\right]$$

$$\frac{\lambda}{n}<y,\nabla v^{\frac{1}{m-1}}> = \frac{\lambda}{n}<y,\frac{1}{m-1}v^{\frac{1}{m-1}-1}\nabla v>$$

$$=\frac{\lambda}{nm}\frac{m}{m-1}v^{\frac{1}{m-1}-1}<y,\nabla v>$$

$$\Longrightarrow v^{\frac{1}{m-1}}\frac{m}{m-1}\left[\Delta v+\frac{1}{m-1}v^{-1}|\nabla v|^2+v^{-1}\frac{1}{mn}<y,\nabla v>+\lambda\frac{m-1}{m}\right]=0, \quad y\in R^n \tag{3.16}$$

Denklemler (3.15)'den görüldüğü üzere Denklem (3.16) elde edildi. Şimdi, özel olarak çözümün Form (3.17) olduğu kabul edilsin (β ve c keyfi sabit) (Pamuk ve Ataç, 2014);

$$\bar{v}(y)=\left(\beta^2-c^2|y|^2\right)_+ \quad , \quad y\in R^n \quad , \quad (a)_+=\max(a,0) \tag{3.17}$$

Buradan Denklem (3.18) elde edildi.

$$\bar{v}(y)=\left(\beta^2-c^2\left(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2\right)\right)_+$$

$$=\beta^2-c^2y_1^2-c^2y_2^2-\ldots-c^2y_n^2$$

$$\Delta\bar{v}=\bar{v}_{y_1y_1}+\bar{v}_{y_2y_2}+\ldots+\bar{v}_{y_ny_n}=-c^2(2+2+\ldots+2)=-2c^2n \qquad y\in R^n, \qquad \bar{v}(y)>0. \qquad (3.18)$$

$c^2=\frac{l(m-1)}{2nm}$ seçildiğinde $\Delta\bar{v}+\frac{l(m-1)}{m}=0$ olur. Hesaplamalardan;

$$\frac{1}{m-1}|\nabla\bar{v}|^2+\frac{l}{mn}<y,\nabla\bar{v}\geq\frac{4c^4|y|^2}{m-1}-\frac{2lc^2|y|^2}{mn}=2c^2|y|^2\left(\frac{2c^2}{m-1}-\frac{l}{mn}\right)=0 \qquad (3.19)$$

Denklem (3.19) elde edilmiştir. Bu da gösterir ki $\bar{v}$, c'nin seçimiyle birlikte Denklem (3.16)'yı sağlamaktadır.

Tanım: $\bar{v}$, R^n üzerinde $\bar{v}(y)=\left(\beta^2-c^2|y|^2\right)_+$ formunda bir fonksiyon olsun. Burada $c^2=\frac{l(m-1)}{2nm}$, $l=\frac{n}{2+(m-1)n}$. β^2'yi öyle seçelim ki $\int_{R^n}\bar{v}(y)dy=1$ olsun. $L>0$ için;

$$V_L(x,t)=L^{\frac{1}{m-1}}\frac{1}{(Lt)^l}\bar{v}\left(\frac{|x|}{(Lt)^{l/n}}\right) \qquad , \qquad x\in R^n \qquad , \qquad t>0 \qquad (3.20)$$

Çözüm (3.20)'ye "Barenblatt Kendine Benzer Çözümü" denir. V_L, Dönüşüm (3.9) altındaki değişmezdir. Ayrıca V_L, (x,t) noktasında $V_L(x,t)>0$ olmak üzere Denklem (3.8)'i sağlar. β 'nin seçiminden dolayı(Polyanin ve Zaitsev, 2004);

$$w=\begin{cases} t^{\frac{-n}{(nm+2)}}\left[\frac{m}{2(nm+2)}\left(\beta^2-\frac{r^2}{t^{\frac{2}{(nm+2)}}}\right)\right]^{1/m} & , \quad \text{eğer} \quad r\leq\beta t^{\frac{1}{(nm+2)}} \\ 0 & , \quad \text{eğer} \quad r>\beta t^{\frac{1}{(nm+2)}} \end{cases} \qquad (3.21)$$

Denklem (3.21) elde edilmiştir. Bu ise, E_0 sabit olmak üzere;

$$\frac{\partial w}{\partial t}=a\nabla(w^m\nabla w) \qquad (3.22)$$

Denklem (3.22)'nin $w(x,0)=E_0\varrho(x)$, $x\epsilon R^n$ başlangıç koşulu ile birlikte çözümüdür.

Bu denklem;

$$\int_{R^n} w(x,t)dx=E_0=\text{sabit}>0 \tag{3.23}$$

Denklem (3.23)'ü yani sabit enerji koşulunu sağlamaktadır. O halde;

$$\int_{R^n} V_L(x,t)dx= L^{\frac{1}{m-1}} \tag{3.24}$$

Denklem (3.24) sağlanır(Pamuk ve Ataç, 2014).

4.BAZI LİNEER OLMAYAN DENKLEMLER İÇİN ADOMIAN AYRIŞTIRMA VE ANTI-REDUCTION METODUNUN UYGULAMALARI

4.1. $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u^m \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ Formundaki Denklemler İçin Adomian Ayrıştırma Yöntemi

Bu formdaki denkleme, m rasyonel bir sayı olmak üzere, Porous Medium denklemi denir. Bu denklem dejenere parabolik diferansiyel denklemdir. Çünkü $Du=u^m$ difüzyon katsayısı, klasik difüzyon denklemini sağlamaz(Pamuk, 2005).

m=2 için;

$$u_t=\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{4.1}$$

Denklem (4.1)'in çözümü $u(x,t)=(2x+2t)^{1/2}$ olur(Pamuk, 2005).

Adomian ayrıştırma yöntemi ile denklem çözülsün:

Denklem (4.1) operatör formunda $L_t=\frac{\partial}{\partial t}$ ve $L_x=\frac{\partial}{\partial x}$ olmak üzere $L_t(u)=L_x(u^2L_x u)$ şeklinde yazılabilir. Burada, integral operatörlerinin tersi olan L_t^{-1} ve L_x^{-1} operatörlerinin var olduğunu ve sırasıyla $L_t^{-1}=\int_o^t(.)dt$, $L_x^{-1}=\int_o^x(.)dx$ şeklinde ifade edildiği kabul edilmiştir. Böylece Denklem (4.1)'in t yönündeki çözümü $u(x,t)=u(x,0)+L_t^{-1}\left[L_x\left(\emptyset(u)\right)\right]$, $\emptyset(u)=u^2u_x$ olur(Pamuk, 2005).

Adomian ayrıştırma yöntemi ile çözüm seri formunda;

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \tag{4.2}$$

Denklem (4.2) şeklinde yazılabilir. Denklem (4.1)'in t yönündeki çözümünün bulunabilmesi için aşağıdaki tekrarlama bağıntısı (4.3)'den yararlanılır;

$$u_0=u(x,0), \qquad u_{n+1}=L_t^{-1}[L_x(A_n)], \qquad n\geq 0 \tag{4.3}$$

$$u(x,0)=(2x)^{1/2}, \qquad \phi(u)=u^2\frac{\partial u}{\partial x} \tag{4.4}$$

Denklem (4.4) değerleri ile birlikte aşağıdaki (4.5) değerleri elde edildi.

$$A_n=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}[\phi(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n u_n)]_{\lambda=0}=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[\phi\left(u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2+\ldots\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[\left(u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2+\ldots\right)^2.\left(u_{0_x}+\lambda u_{1_x}+\lambda^2 u_{2_x}+\ldots\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$A_0=u_0^2u_{0_x}=2x2^{-1/2}\,x^{-1/2}=2^{1/2}x^{1/2}$$

$$u_1=L_t^{-1}\left[L_x\left(2^{1/2}x^{1/2}\right)\right]=L_t^{-1}\left[2^{1/2}\frac{1}{2}x^{-1/2}\right]=2^{-1/2}x^{-1/2}t$$

$$A_1=\left[\begin{array}{c}2\left(u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2+\ldots\right)(u_1+2\lambda u_2+\ldots)\left(u_{0_x}+\lambda u_{1_x}+\lambda^2 u_{2_x}+\ldots\right)\\ +(u_{1_x}+2\lambda u_{2_x}+\ldots)(u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2+\ldots)^2\end{array}\right]_{\lambda=0}$$

$$=tx^{-1/2}2^{-1/2} \tag{4.5}$$

$$u_2=L_t^{-1}[L_x(A_1)]=L_t^{-1}\left[2^{-1/2}t\frac{1}{2}x^{-3/2}\right]=-2^{-5/2}x^{-3/2}t^2$$

$$A_2=\frac{1}{2!}\frac{d}{d\lambda}\left[\begin{array}{c}2\left(u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2+\ldots\right)(u_1+2\lambda u_2+\ldots)\left(u_{0_x}+\lambda u_{1_x}+\lambda^2 u_{2_x}+\ldots\right)+\\ +\left(u_{1_x}+2\lambda u_{2_x}+3\lambda^2 u_{3_x}+\ldots\right)\left(u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2+\ldots\right)^2\end{array}\right]_{\lambda=0}$$

$$=2^{-1/2}x^{-3/2}t^2+3.2^{-5/2}x^{-3/2}t^2$$

$$u_3=L_t^{-1}[L_x(A_2)]=L_t^{-1}\left[-2^{-1/2}.t^2.\frac{3}{2}.x^{-5/2}-3.2^{-5/2}.t^2.\frac{3}{2}.x^{-5/2}\right]$$

$$=-t^3.x^{-5/2}.\left(2^{-3/2}+3.2^{-7/2}\right)$$

Denklem (4.6) elde edilmiştir. Gerçekten de binom açılımı uygulandığında;

$$(2x+2t)^{1/2}=(2x)^{1/2}+\frac{1}{2}(2x)^{-1/2}.2t-\frac{1}{8}(2x)^{-3/2}.4t^2+\ldots$$

$$=(2x)^{1/2}\left[1+\frac{t}{2x}-\frac{t^2}{2(2x)^2}+\dots\right]$$

$$=2^{1/2}x^{1/2}+t.2^{-1/2}x^{-1/2}-t^2.2^{-5/2}x^{-3/2}+\dots \qquad (4.7)$$

Denklem (4.7) elde edildi ki bu denklem de yukarıdaki $u(x,t)$ çözümü ile aynıdır.

4.2. $u_t=(a(u)u_x)_x+F(u)$ Formundaki Denklemler İçin Anti-Reduction Metodu

$$u_t=(a(u)u_x)_x+F(u) \qquad (4.8)$$

Denklem (4.8) formundaki lineer olmayan ısı denklemi için anti-reduction metodu uygulansın:

Denklem (4.8)'e anti-reduction metodunun uygulanabilmesi için öncelikle genel çözümün Denklem (4.9) gibi olduğu varsayılır;

$$h\left(t,x,u,\varphi_1(w),\varphi_2(w),\dots,\varphi_N(w)\right)=0 \qquad (4.9)$$

Burada $w=w(x,t,u)$ yeni bağımsız değişkendir. Çözüm (4.9), $\varphi_i(w)$, $i=\overline{1,N}$ bilinmeyen fonksiyonu için Denklem (4.8)'i adi diferansiyel denklem sistemine indirgemektedir.

Aşağıda $a(u)$ ve $F(u)$ fonksiyonlarının açık formları verilmiştir(Fushchych ve Zhdanov, 1994).

4.2.1. $a(u)=\lambda u^k$, $F(u)=\lambda_1 u+\lambda_2 u^{1-k}$ için

$$u^k=\varphi_1(t)+\varphi_2(t)x+\varphi_3(t)x^2 \qquad (4.10)$$

Çözüm (4.10) yazılabilsin. Bu durumda;

$$ku^{k-1}u_t=\varphi_1'+\varphi_2'x+\varphi_3'x^2 \quad \Longrightarrow \quad u_t=\frac{\varphi_1'+\varphi_2'x+\varphi_3'x^2}{ku^{k-1}}$$

$$ku^{k-1}u_x=\varphi_2+2x\varphi_3 \quad \Longrightarrow \quad u_x=\frac{\varphi_2+2x\varphi_3}{ku^{k-1}} \qquad (4.11)$$

Denklem (4.11) ile birlikte;

$$(a(u)u_x)_x=\left(\lambda u^k\frac{(\varphi_2+2x\varphi_3)}{ku^{k-1}}\right)_x=\left(\frac{\lambda u}{k}(\varphi_2+2x\varphi_3)\right)_x=\frac{\lambda}{k}\left[u_x(\varphi_2+2x\varphi_3)+2\varphi_3 u\right]$$

$$=\frac{\lambda}{k}\left[\frac{\varphi_2+2x\varphi_3}{ku^{k-1}}(\varphi_2+2x\varphi_3)+2\varphi_3 u\right] \qquad (4.12)$$

Denklem (4.12) elde edildi. Bulunan değerler Denklem (4.8)'de yerine yazıldığında;

$$\varphi_1'+\varphi_2'x+\varphi_3'x^2=ku^{k-1}\frac{\lambda}{k}\left[\frac{\varphi_2+2x\varphi_3}{ku^{k-1}}(\varphi_2+2x\varphi_3)+2\varphi_3 u\right]$$

$$+ku^{k-1}\lambda_1 u+ku^{k-1}\lambda_2 u^{1-k}$$

$$=(\varphi_2+2x\varphi_3)(\varphi_2+2x\varphi_3)\frac{\lambda}{k}+2\lambda\varphi_3(\varphi_1+\varphi_2x+\varphi_3x^2)+k\lambda_1(\varphi_1+\varphi_2x+\varphi_3x^2)+k\lambda_2 \qquad (4.13)$$

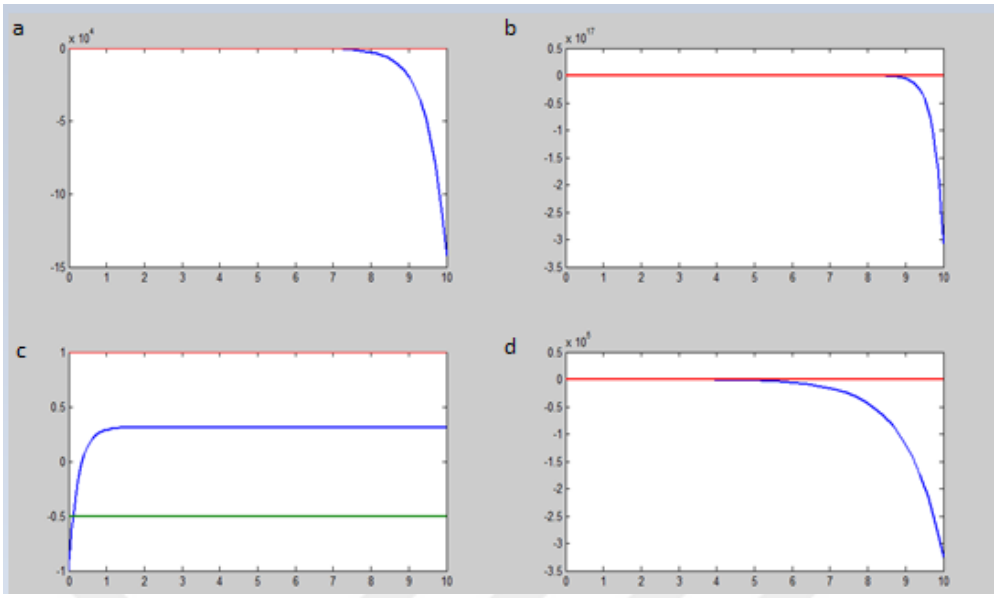
Denklem (4.13), buradan da;

$$\Longrightarrow \varphi_1'=\lambda k^{-1}\varphi_2^2+2\lambda\varphi_3\varphi_1+k\lambda_1\varphi_1+k\lambda_2$$

$$\varphi_2'=2\lambda k^{-1}\varphi_2\varphi_3+2\lambda k^{-1}\varphi_3\varphi_2+2\lambda\varphi_3\varphi_2+k\lambda_1\varphi_2 \qquad (4.14)$$

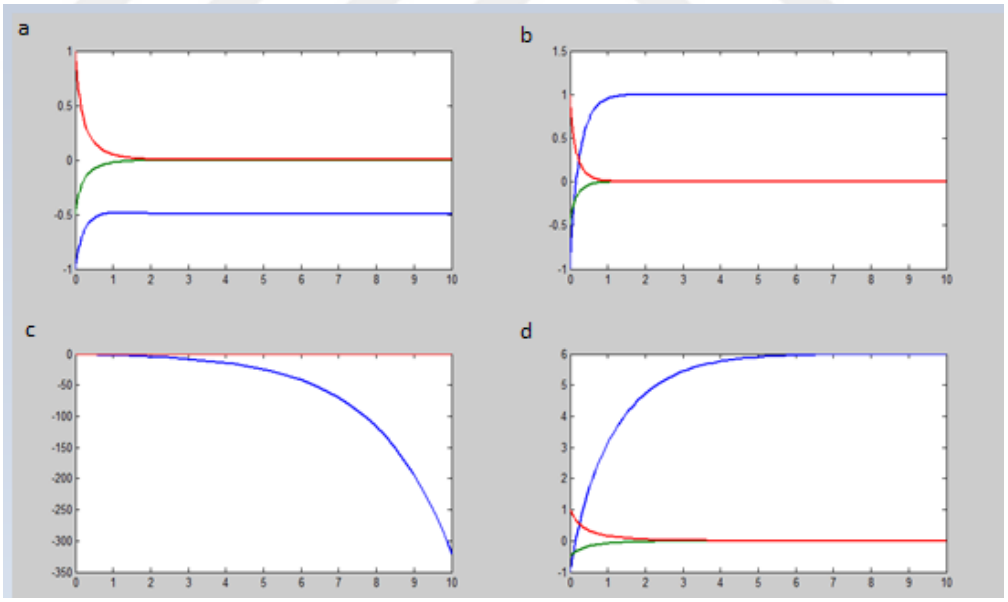
$$\varphi_3'=4\lambda k^{-1}\varphi_3^2+k\lambda_1\varphi_3$$

adi diferansiyel denklem sistemi olan Denklem sistemi (4.14) elde edildi.



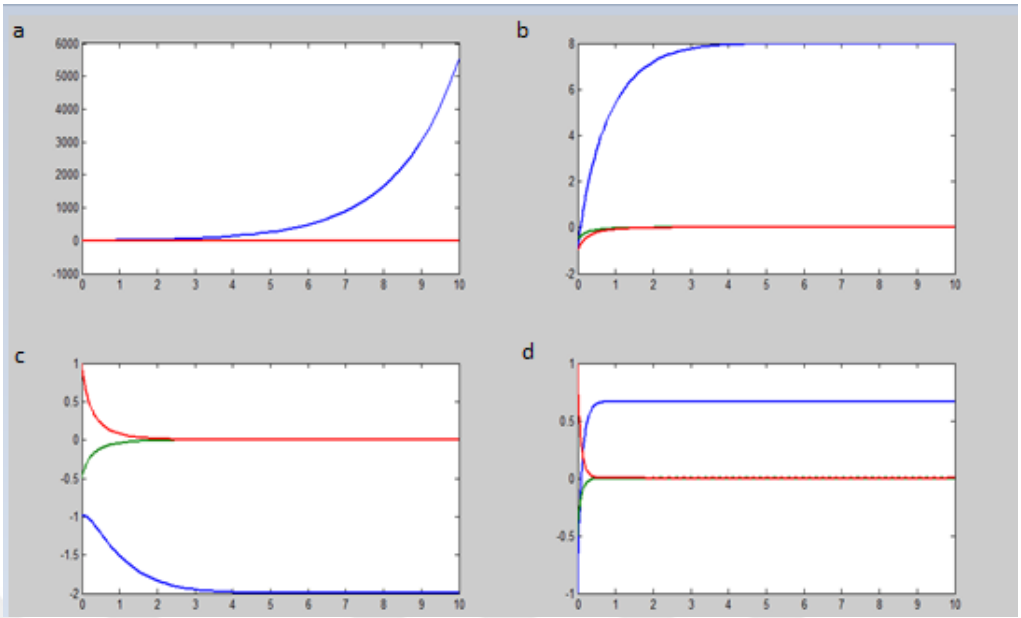
Şekil 4.1. k= -1 için sırasıyla çözüm eğrilerinin grafikleri a) λ =-1, λ_1= -1, λ_2=-0.5 b) λ=1, λ_1=-2, λ_2= 1 c) λ =-1, λ_1=2, λ_2=-1 d) λ =2, λ_1=0.5, λ_2= 2

Şekil (4.1) için a, b ve d grafiklerinde çözüm -∞′a ıraksarken, c grafiğinde çözüm sabit bir değere yakınsamaktadır.



Şekil 4.2. k=2 için sırasıyla çözüm eğrilerinin grafikleri a)λ=-1, λ_1=-1, λ_2=-0.5 b) λ= -1, λ_1= -2, λ_2=2 c) λ =1, λ_1= 0.5, λ_2= -0.5 d) λ = -0.5, λ_1= -0.5, λ_2= 3

Şekil (4.2) için a, b ve d grafiklerinde çözüm sabit bir değere yakınsarken c grafiğinde çözüm negatif büyüme eğilimindedir.



Şekil 4.3. k=3 için sırasıyla çözüm eğrilerinin grafikleri a)λ =-1, λ_1=-1, λ_2=-0.5 b) λ= -1, λ_1= -1, λ_2= -0.5 c) λ = -1, λ_1= -1, λ_2= -0.5 d) λ = -1, λ_1= -1, λ_2= -0.5

Şekil (4.3) için a grafiğinde çözüm pozitif büyüme eğiliminde iken, b, c ve d grafiklerinde sabit bir değere yakınsamaktadır. Burada F(u)=0 alındığında Denklem (4.8) $u_t=(\lambda u u_x)_x$, $a(u)=\lambda u$ olur. u çözümü $u=\varphi_1(t)+\varphi_2(t)x+\varphi_3(t)x^2$ olarak alınsın.

$$u_t=\varphi_1'+\varphi_2'x+\varphi_3'x^2$$

$$u_x=\varphi_2+2x\varphi_3$$

$$(\lambda u u_x)_x=\left(\lambda u\varphi_2+2\lambda ux\varphi_3\right)_x=\lambda\varphi_2 u_x+\lambda\varphi_3(2xu_x+2u)$$

$$=\lambda\varphi_2 u_x+2\lambda x\varphi_3 u_x+2\lambda\varphi_3 x \qquad (4.15)$$

Denklem (4.15) ile bulunan değerler Denklem (4.8)'de yerine yazıldığında;

$$\varphi_1'+\varphi_2'x+\varphi_3'x^2=\lambda\varphi_2 u_x+2\lambda x\varphi_3 u_x+2\lambda\varphi_3 u$$

$=\lambda\varphi_2\left(\varphi_2+2x\varphi_3\right)+2\lambda x\varphi_3\left(\varphi_2+2x\varphi_3\right)+2\lambda\varphi_3\left(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3x^2\right)$ elde edildi. Buradan;

$$\varphi_1'=\lambda\varphi_2^2+\lambda\varphi_3\varphi_1 \qquad (4.8.1a)$$

$$\varphi_2'=6\lambda\varphi_2\varphi_3 \qquad (4.8.1b)$$

$$\varphi_3'=6\lambda\varphi_3^2 \qquad (4.8.1c)$$

denklemleri elde edildi. Denklem (4.8.1c)'den;

$$\varphi_3'=6\lambda\varphi_3^2 \implies \int \frac{d\varphi_3}{\varphi_3^2}=\int 6\lambda dt$$

$$\implies -\frac{1}{\varphi_3}=6\lambda+c$$

$$\implies \varphi_3=-\frac{1}{6\lambda+c} \qquad (4.16)$$

Denklem (4.16)elde edildi. Denklem (4.8.1b)'den;

$$\varphi_2'=-\frac{6\lambda\varphi_2}{6\lambda t+c} \implies \int \frac{d\varphi_2}{\varphi_2}=\int -\frac{6\lambda}{6\lambda t+c}dt$$

$$\implies \ln\varphi_2=-\ln(6\lambda t+c)+\ln c_1$$

$$\implies c_1=\varphi_2(6\lambda t+c)$$

$$\implies \varphi_2=\frac{c_1}{(6\lambda t+c)} \qquad (4.17)$$

Denklem (4.17) elde edildi. Denklem (4.8.1a)'dan;

$$\varphi_1'=\lambda\left(\frac{c_1}{6\lambda t+c}\right)^2-\frac{2\lambda}{6\lambda t+c}\varphi_1$$

$$\varphi_1=u_0 v \qquad (4.18)$$

$$\varphi_1'=\varphi_0' v+v' u_0$$

(4.18) adi diferansiyel denklem sistemi elde edildi. Bu adi diferansiyel denklemi çözüldüğünde;

$$u_0' v+v' u_0+\frac{2\lambda}{6\lambda t+c}u_0 v=\lambda\left(\frac{c_1}{6\lambda t+c}\right)^2$$

$$u_0'v + u_0\left(v' + \frac{2\lambda}{6\lambda t+c}v\right) = \lambda\left(\frac{c_1}{6\lambda t+c}\right)^2$$

$\left(v' + \frac{2\lambda}{6\lambda t+c}v\right) = 0$ olsun.

$$v' = -\frac{2\lambda v}{6\lambda t+c} \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{dv}{v} = \int -\frac{2\lambda}{6\lambda t+c}dt$$

$$\Longrightarrow \qquad \ln v = -\frac{1}{3}\ln(6\lambda t+c) + \ln c_2$$

$$\Longrightarrow \qquad c_2 = v(6\lambda t+c)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Longrightarrow \qquad v = \frac{c_2}{(6\lambda t+c)^{\frac{1}{3}}}$$

$$u_0'v = \lambda\left(\frac{c_1}{(6\lambda t+c)}\right)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad u_0'\frac{c_2}{(6\lambda t+c)^{\frac{1}{3}}} = \lambda\frac{c_1^2}{(6\lambda t+c)^2}$$

$$\Longrightarrow \qquad \int \frac{du_0}{u_0} = \int \lambda\frac{c_1^2}{c_2}(6\lambda t+c)^{-\frac{5}{3}}dt$$

$$\Longrightarrow \qquad u_0 = -\frac{\lambda c_1^2}{c_2}\frac{1}{6\lambda}\frac{3}{2}(6\lambda t+c)^{-\frac{2}{3}} + c_3$$

$$\Longrightarrow \qquad u_0 = -\frac{c_1^2}{4c_2}(6\lambda t+c)^{-\frac{2}{3}} + c_3$$

$$\Longrightarrow \qquad \varphi_1 = -\frac{c_1^2}{4}(6\lambda t+c)^{-1} + \frac{c_3c_2}{(6\lambda t+c)^{\frac{1}{3}}} \qquad (4.19)$$

Çözüm basamakları (4.19) denklemleri olmak üzere;

$$u(x,t) = -\frac{c_1^2}{4}(6\lambda t+c)^{-1} + \frac{c_3c_2}{(6\lambda t+c)^{\frac{1}{3}}} + \frac{c_1x}{(6\lambda t+c)} - \frac{x^2}{6\lambda+c} \qquad (4.20)$$

Çözüm (4.20) elde edildi.

$a(u)=u^m$ ve $m\in R$ olmak üzere $m>0$ için $m=1$ olsun. Bu durumda;

$u_t=(uu_x)_x$ (4.8a)

Denklem (4.8a) elde edilir. Denklem (4.8a)'nın genel çözümü $u=\varphi_1(t)+\varphi_2(t)x$ olsun. Bu çözümün t'ye ve x'e göre türevleri alındığında;

$u_t=\varphi_1'+\varphi_2'x$,

$u_x=\varphi_2$,

$(uu_x)_x=(u\varphi_2)_x=u_x\varphi_2=\varphi_2^2$ (4.21)

Denklem (4.21) elde edildi. Daha sonra bu türev değerleri Denklem (4.8a)'da yerine yazıldığında $\varphi_1'+\varphi_2'x=\varphi_2^2$ elde edildi. Buradan;

$\varphi_1'=\varphi_2^2$

$\varphi_2'=0$ (4.22)

Adi diferansiyel denklem sistemi (4.22)'den ise;

$\Longrightarrow \varphi_2=c$

$\Longrightarrow \varphi_1'=c^2 \quad \Longrightarrow \quad c^2t+c_1$ (4.23)

(4.23) eşitliği elde edildi. O halde Denklem (4.8a)'nın genel çözümü $u=c^2t+c_1+cx$ olur.

Genel çözümün sağlaması;

$u_t=c^2, \quad u_x=c , \quad (uu_x)_x=[(c^2t+c_1+cx)c]_x=c^2$ (4.24)

Denklem (4.24)'teki bu değerler Denklem (4.8a)'da yerine yazıldığında çözümün denklemi sağladığı açıkça görülür.

m=2 olsun. Bu durumda;

$u_t=(u^2u_x)_x$ (4.8b)

Denklem (4.8b) elde edilmiştir. Denklem (4.8b)'nin genel çözümü $u^2=\varphi_1(t)+\varphi_2(t)x$ olsun. Bu çözümün t'ye ve x'e göre türevleri alındığında;

$$2uu_t=\varphi_1'+\varphi_2'x \qquad \Longrightarrow \qquad u_t=\frac{\varphi_1'+\varphi_2'x}{2u}$$

$$2uu_x=\varphi_2 \qquad \Longrightarrow \qquad u_x=\frac{\varphi_2}{2u}$$

$$(u^2u_x)_x=\left(u^2\frac{\varphi_2}{2u}\right)_x=\frac{1}{2}\left(u\varphi_2\right)_x=\frac{1}{2}u_x\varphi_2=\frac{1}{2}\frac{\varphi_2}{2u}\varphi_2=\frac{\varphi_2^2}{4u} \tag{4.25}$$

Denklem (4.25) elde edildi. Bu bulunan türev değerleri Denklem (4.8b)'de yerine yazıldığında;

$$\varphi_1'+\varphi_2'x=\frac{\varphi_2^2}{2} \tag{4.26}$$

Denklem (4.26) elde edildi. Buradan;

$$\varphi_1'=\frac{\varphi_2^2}{2}$$

$$\varphi_2'=0$$

$$\Longrightarrow \varphi_2=c$$

$$\Longrightarrow \varphi_1'=\frac{c^2}{2} \qquad \Longrightarrow \varphi_1=\frac{c^2t}{2}+c_1 \tag{4.27}$$

Denklem (4.27) elde edildi. O halde Denklem (4.8b)'nin genel çözümü;

$$u^2=\frac{c^2t}{2}+c_1+cx \qquad \Longrightarrow \quad 2u^2=c^2t+2c_1+2cx \tag{4.28}$$

Denklem (4.28) olur.

Genel çözümün sağlaması;

$$4uu_t=c^2 \qquad \Longrightarrow \qquad u_t=\frac{c^2}{4u}$$

$$4uu_x=2c \quad \Longrightarrow \quad u_x=\frac{2c}{4u}$$

$$(u^2u_x)_x=\left[\frac{c^2t+2c_1+2cx}{2}\frac{2c}{4u}\right]_x$$

$$=\frac{c}{4}\left[(c^2t+2c_1+2cx)u^{-1}\right]_x$$

$$=\frac{c^2}{4u} \tag{4.29}$$

Denklem (4.29) ile birlikte bulunan değerler Denklem (4.8b)'de yerine yazıldığında çözümün denklemi sağladığı açıkça görülmektedir.

$m=\frac{1}{2}$ olsun. Bu durumda;

$$u_t=\left(u^{\frac{1}{2}}u_x\right)_x \tag{4.8c}$$

Denklem (4.8c) elde edilmiştir. Denklem (4.8c)'nin genel çözümü;

$$u^{\frac{1}{2}}=\varphi_1(t)+\varphi_2(t)x \tag{4.30}$$

Denklem (4.30) olsun. Denklem (4.8c)'in t'ye ve x'e göre türevleri alındığında,

$$\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}u_t=\varphi_1'+\varphi_2'x \quad \Longrightarrow \quad u_t=\frac{\varphi_1'+\varphi_2'x}{\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}u_x=\varphi_2 \quad \Longrightarrow \quad u_x=\frac{\varphi_2}{\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\left(u^{\frac{1}{2}}u_x\right)_x=\left(u^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi_2}{\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}}\right)_x=\left(2\varphi_2u\right)_x=2u_x\varphi_2 \tag{4.31}$$

Denklem (4.31) elde edildi ve bu türev değerleri Denklem (4.8c)'de yerine yazıldığında;

$$\varphi_1' + \varphi_2' x = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} 2u_x \varphi_2 = u^{-\frac{1}{2}} \frac{2\varphi_2}{u^{-\frac{1}{2}}} \varphi_2 = 2\varphi_2^2 \tag{4.32}$$

Denklem (4.32) elde edildi. Adi diferansiyel denklem sistemi olan Sistem (4.33)'ten;

$$\varphi_1' = 2\varphi_2^2$$

$$\varphi_2' = 0 \tag{4.33}$$

$$\Longrightarrow \varphi_2 = c$$

$$\Longrightarrow \varphi_1' = 2c^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi_1 = 2c^2 t + c_1 \tag{4.34}$$

Denklem (4.34) elde edildi. O halde Denklem (4.8c)'nin genel çözümü;

$$u^{\frac{1}{2}} = 2c^2 t + c_1 + cx \tag{4.35}$$

Denklem (4.35) olur.

Çözümün sağlaması;

$$\frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} u_t = 2c^2 \qquad \Longrightarrow \qquad u_t = \frac{2c^2}{\frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} u_x = c \qquad \Longrightarrow \qquad u_x = \frac{c}{\frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\left(u^{\frac{1}{2}} u_x \right)_x = \frac{4c^2}{u^{-\frac{1}{2}}} \tag{4.36}$$

Denklem (4.36) elde edildi ki bu değerler Denklem (4.8c)'de yerine yazıldığında çözümün denklemi sağladığı açıkça görülmektedir.

$m=\sqrt{2}$ olsun. Bu durumda;

$$u_t = \left(u^{\sqrt{2}} u_x \right)_x \tag{4.8d}$$

Denklem (4.8d) elde edilmiştir. Denklem (4.8d)'nin genel çözümü $u^{\sqrt{2}}=\varphi_1(t)+\varphi_2(t)x$ olsun. Denklem (4.8d)'nin t'ye ve x'e göre türevleri alındığında;

$$\sqrt{2}u^{\sqrt{2}-1}u_t=\varphi_1'+\varphi_2'x \qquad \Longrightarrow \qquad u_t=\frac{\varphi_1'+\varphi_2'x}{\sqrt{2}u^{\sqrt{2}-1}}$$

$$\sqrt{2}u^{\sqrt{2}-1}u_x=\varphi_2 \qquad \Longrightarrow \qquad u_x=\frac{\varphi_2}{\sqrt{2}u^{\sqrt{2}-1}}$$

$$\left(u^{\sqrt{2}}u_x\right)_x=\left(u^{\sqrt{2}}\frac{\varphi_2}{\sqrt{2}u^{\sqrt{2}-1}}\right)_x=\left(\frac{\varphi_2 u}{\sqrt{2}}\right)_x=\frac{1}{\sqrt{2}}u_x\varphi_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\varphi_2}{\sqrt{2}u^{\sqrt{2}-1}}\varphi_2=\frac{\varphi_2^2}{2u^{\sqrt{2}-1}} \qquad (4.37)$$

Denklem (4.37) elde edildi ve bu türev değerleri Denklem (4.8d)'de yerine yazıldığında;

$$\varphi_1'+\varphi_2'x=\sqrt{2}u^{\sqrt{2}-1}\frac{\varphi_2^2}{2u^{\sqrt{2}-1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\varphi_2^2 \qquad (4.38)$$

Denklem (4.38) elde edildi. Adi diferansiyel denklem sistemi olan Sistem (4.39)'dan;

$$\varphi_1'=\frac{\sqrt{2}}{2}\varphi_2^2$$

$$\varphi_2'=0 \qquad (4.39)$$

$$\Longrightarrow \varphi_2=c$$

$$\Longrightarrow \varphi_1'=\frac{\sqrt{2}}{2}c^2 \qquad \Longrightarrow \varphi_1=\frac{\sqrt{2}}{2}c^2t+c_1 \qquad (4.40)$$

Denklem (4.40) elde edildi. O halde Denklem (4.8d)'in genel çözümü;

$u^{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}c^2t+c_1+cx$ olur.

Çözümün sağlaması;

$$\sqrt{2}u^{\sqrt{2}-1}u_t=\frac{\sqrt{2}}{2}c^2 \qquad \Longrightarrow \qquad u_t=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}c^2}{\sqrt{2}u^{\sqrt{2}-1}}$$

$$\sqrt{2}u^{\sqrt{2}-1}u_x=c \qquad \Longrightarrow \qquad u_x=\frac{c}{\sqrt{2}u^{\sqrt{2}-1}}$$

$$\left(u^{\sqrt{2}}u_x\right)_x=\left(u^{\sqrt{2}}\frac{c}{\sqrt{2}u^{\sqrt{2}-1}}\right)_x=\frac{c}{\sqrt{2}}u_x=\frac{c}{\sqrt{2}}\frac{c}{\sqrt{2}u^{\sqrt{2}-1}}=\frac{c^2}{2u^{\sqrt{2}-1}} \tag{4.41}$$

Denklem (4.41) elde edilir ki bu değerler Denklem (4.8d)'de yerine yazıldığında çözümün denklemi sağladığı açıkça görülmektedir.

$a(u)=u^m$ ve $m\in R$ olmak üzere $m<0$ için $m=-1$ olsun. O halde;

$$u_t=\left(u^{-1}u_x\right)_x \tag{4.8e}$$

Denklem (4.8e) elde edilmiştir. Denklem (4.8e)'nin genel çözümü;

$$u^{-1}=\varphi_1(t)+\varphi_2(t)x \tag{4.42}$$

Denklem (4.42) olsun. Bu denklemin t'ye ve x'e göre türevleri alındığında;

$$-u^{-2}u_t=\varphi_1'+\varphi_2'x \qquad \Longrightarrow \qquad u_t=\frac{\varphi_1'+\varphi_2'x}{-u^{-2}}$$

$$-u^{-2}u_x=\varphi_2 \qquad \Longrightarrow \qquad u_x=\frac{\varphi_2}{-u^{-2}}$$

$$(u^{-1}u_x)_x=\left(u^{-1}\frac{\varphi_2}{-u^{-2}}\right)_x=\left(-\varphi_2 u\right)_x=-u_x\varphi_2=-\frac{\varphi_2}{-u^{-2}}\varphi_2=\frac{\varphi_2^2}{u^{-2}} \tag{4.43}$$

Denklem (4.43) elde edildi. Bu değerler Denklem (4.8e)'de yerine yazıldığında;

$$\varphi_1'+\varphi_2'x=-u^{-2}\frac{\varphi_2^2}{u^{-2}}=-\varphi_2^2$$

$$\varphi_1'=-\varphi_2^2$$

$$\varphi_2'=0 \qquad (4.44)$$

Sistem (4.44)'den;

$$\Longrightarrow \varphi_2 = c$$

$$\varphi_1' = -c^2$$

$$\varphi_1 = -c^2t+c_1 \qquad (4.45)$$

Denklem (4.45) elde edildi.

O halde Denklem (4.8e)'nin genel çözümü;

$$u^{-1} = -c^2t + c_1 + cx \qquad (4.46)$$

Denklem (4.46) olur. Denklem (4.8e)'nin genel çözümü Adomian ayrıştırma yöntemi ile daha önce çözülmüştür ve sonuç bu çalışmadaki çözüm ile aynıdır(Pamuk, 2005).

Genel çözümün sağlaması;

$$-u^{-2}u_t=-c^2 \quad \Longrightarrow \quad u_t = \frac{-c^2}{-u^{-2}}$$

$$-u^{-2}u_x=c \quad \Longrightarrow \quad u_x = \frac{c}{-u^{-2}}$$

$$(u^{-1}u_x)_x = \left(u^{-1}\frac{c}{-u^{-2}}\right)_x = -(cu)_x = \frac{c^2}{u^{-2}} \qquad (4.47)$$

Denklem (4.47)'deki bu değerler Denklem (4.8e)'de yerine yazıldığında çözümü sağladığı açıkça görülmektedir.

$m= -\frac{4}{3}$ olsun. O halde;

$$u_t=\left(u^{-4/3}u_x\right)_x \qquad (4.8f)$$

Denklem (4.8f) elde edilmiştir. Denklem (4.8f)'nin genel çözümü;

$$u^{-4/3}=\varphi_1(t)+\varphi_2(t)x \tag{4.48}$$

Denklem (4.48) olsun. Bu denklemin t'ye ve x'e göre türevleri alındığında,

$$-\frac{4}{3}u^{-\frac{7}{3}}u_t=\varphi_1'+\varphi_2'x \qquad \Longrightarrow \qquad u_t=\frac{\varphi_1'+\varphi_2'x}{-\frac{4}{3}u^{-\frac{7}{3}}}$$

$$-\frac{4}{3}u^{-\frac{7}{3}}u_x=\varphi_2 \qquad \Longrightarrow \qquad u_x=\frac{\varphi_2}{-\frac{4}{3}u^{-\frac{7}{3}}}$$

$$\left(u^{-\frac{4}{3}}u_x\right)_x=\left(u^{-\frac{4}{3}}\frac{\varphi_2}{-\frac{4}{3}u^{-\frac{7}{3}}}\right)_x=\left(-\frac{3\varphi_2}{4}u\right)_x=-\frac{3}{4}u_x\varphi_2=-\frac{3}{4}\frac{\varphi_2}{-\frac{4}{3}u^{-\frac{7}{3}}}\varphi_2$$

$$=\frac{9}{16}\frac{\varphi_2^2}{u^{-\frac{7}{3}}} \tag{4.49}$$

Denklem (4.49) elde edildi. Bu bulunan değerler Denklem (4.8f)'de yerine yazıldığında;

$$\varphi_1'+\varphi_2'x=-\frac{4}{3}u^{-\frac{7}{3}}\frac{9}{16}\frac{\varphi_2^2}{u^{-\frac{7}{3}}}=-\frac{3}{4}\varphi_2^2$$

$$\varphi_1'=-\frac{3}{4}\varphi_2^2$$

$$\varphi_2'=0 \tag{4.50}$$

Sistem (4.50) elde edildi ve buradan;

$$\varphi_2=c$$

$$\Longrightarrow \varphi_1'=-\frac{3}{4}c^2, \qquad \varphi_1=-\frac{3}{4}c^2t+c_1 \tag{4.51}$$

Denklem (4.51) elde edildi. O halde Denklem (4.8f)'nin genel çözümü;

$$u^{-4/3}=-\frac{3}{4}c^2t+c_1+cx \tag{4.52}$$

Denklem (4.52) olur. Denklem (4.8f)'nin genel çözümü Adomian ayrıştırma yöntemi ile daha önce çözülmüştür ve sonuç bu çalışmadaki çözüm ile aynıdır(Pamuk, 2005).

Genel çözümün sağlaması;

$$-\frac{4}{3}u^{-\frac{7}{3}}u_t = -\frac{3}{4}c^2 \qquad \Longrightarrow \qquad u_t = \frac{-\frac{3}{4}c^2}{-\frac{4}{3}u^{-\frac{7}{3}}} = \frac{9c^2}{16u^{-\frac{7}{3}}}$$

$$-\frac{4}{3}u^{-\frac{7}{3}}u_x = c \qquad \Longrightarrow \qquad u_x = \frac{c}{-\frac{4}{3}u^{-\frac{7}{3}}}$$

$$\left(u^{-\frac{4}{3}}u_x\right)_x = \left(u^{-\frac{4}{3}}\frac{c}{-\frac{4}{3}u^{-\frac{7}{3}}}\right)_x = \left(-\frac{3}{4}cu\right)_x = -\frac{3c}{4}u_x = -\frac{3c}{4}\frac{c}{-\frac{4}{3}u^{-\frac{7}{3}}} = \frac{9c^2}{16u^{-\frac{7}{3}}} \tag{4.53}$$

Denklem (4.53) ile birlikte bu değerler Denklem (4.8f)'de yerine yazıldığında çözümü sağladığı açıkça görülmektedir.

O halde bir genelleme yapılabilir:

$m\neq 0$ ve $m\in R$ olmak üzere;

$$u_t=(u^m u_x)_x \tag{4.54}$$

Denklem (4.54) tipindeki lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin genel çözümü;

$$u^m=\varphi_1(t)+\varphi_2(t)x \tag{4.55}$$

Denklem (4.55) biçimindedir. Buradan;

$$\varphi_1'=\frac{1}{m}\varphi_2^2$$

$$\varphi_2'=0 \tag{4.56}$$

(4.56) adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Buradan;

$\varphi_2=c$

$$\varphi_1'=\frac{1}{m}c^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi_1=\frac{c^2}{m}t+c_1 \tag{4.57}$$

Denklem (4.57) elde edildi. O zaman Denklem (4.54)'ün genel çözümü $u^m=\frac{c^2}{m}t+c_1+cx$ biçimindedir.

Genel çözümün sağlaması;

$$mu^{m-1}u_t=\frac{c^2}{m} \qquad \Longrightarrow \qquad u_t=\frac{\frac{c^2}{m}}{mu^{m-1}}$$

$$mu^{m-1}u_x=c \qquad \Longrightarrow \qquad u_x=\frac{c}{mu^{m-1}}$$

$$(u^m u_x)_x=\left(u^m\frac{c}{mu^{m-1}}\right)_x=\left(\frac{cu}{m}\right)_x=\frac{c}{m}u_x=\frac{c}{m}u_x=\frac{c}{m}\frac{c}{mu^{m-1}}=\frac{c^2}{m^2u^{m-1}} \tag{4.58}$$

Denklem (4.58), incelenen denklemde yerine yazıldığında genel çözümü sağladığı açıkça görülmektedir.

$u_t=a(u^m u_x)_x+bu^k$ formundaki denklemler

$m=-2,\ k=1$ olsun. O halde;

$$u_t=a\left(u^{-2}u_x\right)_x+bu \tag{4.54a}$$

Denklem (4.54a) elde edilmiştir. Denklem (4.54a)'nın genel çözümü;

$$u^{-2}=\varphi(t)x^2 \tag{4.59}$$

Denklem (4.59) olsun. Bu denklemin t'ye ve x'e göre türevleri alındığında;

$$-2u^{-3}u_t=\varphi' x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad u_t=\frac{\varphi' x^2}{-2u^{-3}}$$

$$-2u^{-3}u_x=2x\varphi \qquad \Longrightarrow \qquad u_x=\frac{2x\varphi}{-2u^{-3}}$$

$$(u^{-2}u_x)_x = \left(u^{-2}\frac{2x\varphi}{-2u^{-3}}\right)_x = (-x\varphi u)_x = -\varphi u - \varphi u_x x \qquad (4.60)$$

Denklem (4.60) elde edildi. Bu bulunan değerler Denklem (4.54a)'da yerine yazıldığında;

$$\frac{\varphi' x^2}{-2u^{-3}} = -a\varphi u - a\varphi u_x x + b\varphi^{-1/2}x^{-1}$$

$$\Longrightarrow \frac{\varphi' x^2}{-2u^{-3}} = -a\varphi u + a\varphi \frac{2x\varphi}{2u^{-3}} x + b\varphi^{-1/2}x^{-1}$$

$$\Longrightarrow \varphi' x^2 = 2\varphi x^2 \varphi a - a\varphi^2 2x^2 - 2b\varphi^{-1/2}x^{-1}\varphi^{3/2}x^3$$

$$\Longrightarrow \varphi' x^2 = 2\varphi^2 x^2 a - 2\varphi^2 x^2 a - 2bx^2\varphi$$

$$\Longrightarrow \varphi' x^2 = -bx^2\varphi$$

$$\Longrightarrow \varphi' = -2b\varphi$$

$$\ln\varphi = -2bt - \ln c$$

$$\varphi c = e^{-2bt} \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi = \frac{e^{-2bt}}{c}$$

$$u^{-2} = \frac{e^{-2bt}}{c}x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad u = \left(\frac{e^{-2bt}}{c}x^2\right)^{-1/2} \qquad (4.61)$$

Çözüm (4.61) elde edildi. Denklem (4.54a)'nın genel çözümü, Adomian ayrıştırma yöntemi ile daha önce çözülmüştür(Pamuk, 2005).

4.2.2. $a(u)=\lambda e^u$, $F(u)=\lambda_1+\lambda_2 e^{-u}$ için

$$e^u = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)x + \varphi_3(t)x^2 \qquad (4.62)$$

Denklem (4.62), Denklem (4.8)'in genel çözümü olsun. O halde;

$$u_t e^u = \varphi_1' + \varphi_2' x + \varphi_3' x^2 \quad \Rightarrow \quad u_t = \frac{\varphi_1' + \varphi_2' x + \varphi_3' x^2}{e^u}$$

$$u_x e^u = \varphi_2 + 2x\varphi_3 \quad \Rightarrow \quad u_x = \frac{\varphi_2 + 2x\varphi_3}{e^u}$$

$$(a(u)u_x)_x = \left(\lambda e^u \frac{\varphi_2 + 2x\varphi_3}{e^u}\right)_x = 2\lambda\varphi_3 \tag{4.63}$$

Denklem (4.63) elde edilir ve bulunan bu değerler Denklem (4.8)'de yerine yazıldığında;

$$\varphi_1' + \varphi_2' x + \varphi_3' x^2 = 2e^u\lambda\varphi_3 + e^u\lambda_1 + \lambda_2 = (\varphi_1 + \varphi_2 x + \varphi_3 x^2).2\lambda\varphi_3 + (\varphi_1 + \varphi_2 x + \varphi_3 x^2).\lambda_1 + \lambda_2$$

$$\Longrightarrow \varphi_1' = 2\lambda\varphi_1\varphi_3 + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2$$

$$\varphi_2' = 2\lambda\varphi_2\varphi_3 + \lambda_1\varphi_2$$

$$\varphi_3' = 2\lambda\varphi_3^2 + \lambda_1\varphi_3 \tag{4.64}$$

(4.64) diferansiyel denklem sistemi elde edildi. Burada $F(u)=0$ alındığında, sıcaklığa bağlı olarak üstel termal dağılma gücünün olması durumunda bu denklem, canlılığını yitirmiş ortamdaki kararsız ısı transferinin modellenmesinde kullanılmıştır(Polyanin ve Zaitsev, 2004). Öyle ki;

$$\varphi_1' = 2\lambda\varphi_1\varphi_3 \tag{4.8.2a}$$

$$\varphi_2' = 2\lambda\varphi_2\varphi_3 \tag{4.8.2b}$$

$$\varphi_3' = 2\lambda\varphi_3^2 \tag{4.8.2c}$$

Denklem (4.8.2c)'den;

$$\varphi_3' = 2\lambda\varphi_3^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi_3}{dt} = 2\lambda\varphi_3^2 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d\varphi_3}{\varphi_3^2} = \int 2\lambda dt$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{\varphi_3} = 2\lambda t + c$$

$$\Rightarrow \varphi_3 = -\frac{1}{2\lambda t+c} \tag{4.65}$$

Denklem (4.65) elde edildi. Denklem (4.8.2b)'den;

$$\varphi_2' = -\frac{2\lambda\varphi_2}{2\lambda t+c} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = -\frac{2\lambda\varphi_2}{2\lambda t+c} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d\varphi_2}{2\lambda\varphi_2} = \int -\frac{dt}{2\lambda t+c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\lambda}\ln\varphi_2 = -\int \frac{du}{2\lambda u} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\lambda}\ln\varphi_2 = -\frac{1}{2\lambda}\ln(2\lambda t+c) + \frac{1}{2\lambda}\ln c_1$$

$$c_1 = \varphi_2(2\lambda t+c)$$

$$\varphi_2 = \frac{c_1}{2\lambda t+c} \tag{4.66}$$

Eşitlik (4.66) elde edildi. Denklem (4.8.2a)'dan;

$$\varphi_1' = 2\lambda\varphi_1 \frac{1}{(2\lambda t+c)^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{d\varphi_1}{\varphi_1} = -\int \frac{2\lambda}{2\lambda t+c} dt$$

$$\ln\varphi_1 = -\ln(2\lambda t+c) + \ln c_2$$

$$\Rightarrow \varphi_1(2\lambda t+c) = c_2$$

$$\varphi_1 = \frac{c_2}{2\lambda t+c} \tag{4.67}$$

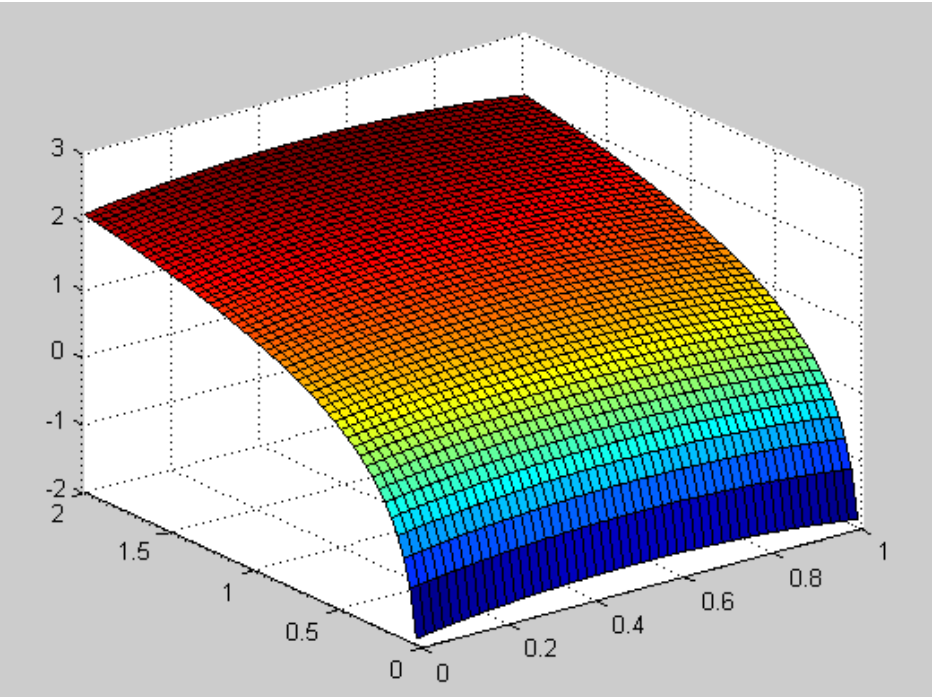
Eşitlik (4.67) elde edildi. Buradan;

$$\Longrightarrow u = \ln\left[\frac{c_2}{2\lambda t+c} + \frac{c_1 x}{2\lambda t+c} - \frac{x^2}{2\lambda t+c}\right]$$

$$= \ln\left[\frac{c_2 - x^2 + c_1 x}{2\lambda t+c}\right]$$

$= \ln\left(c_2 - x^2 + c_1 x\right) - \ln(2\lambda t + c)$ çözümü elde edildi.

c_1, c_2 keyfi sabit ve $c_1=1$, $c_2=1$, $c=2$, $\lambda=1$ değerleri için çözümün grafiği:

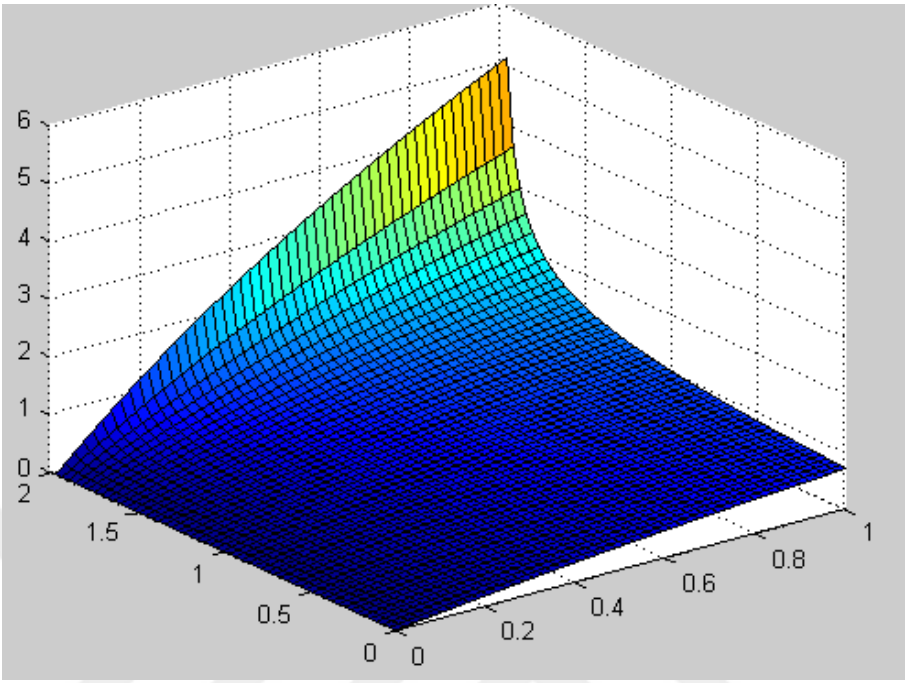


Şekil 4.4. Çözümün grafiği

Diğer çözüm(Polyanin ve Zaitsev, 2004);

$$u = 2\ln\left(\frac{x+A}{\sqrt{B-2at}}\right) \tag{4.68}$$

a,b keyfi sabit olmak üzere Denklem (4.68) gibidir. Bu çözüm kendine benzer çözümdür ve bu çözümün grafiği A=1, B=4, a=1 değerleri için aşağıdaki gibidir:



Şekil 4.5. Çözümün grafiği

4.2.3. $a(u)=\lambda u^{-3/2}$, $F(u)=\lambda_1 u+\lambda_2 u^{5/2}$ için

$$u^{-3/2}=\varphi_1(t)+\varphi_2(t)x+\varphi_3(t)x^2+\varphi_4(t)x^3 \qquad (4.69)$$

Denklem (4.69), Denklem (4.8)'in çözümü olsun. O halde;

$$-\frac{3}{2}u^{-5/2}u_t=\varphi_1'+\varphi_2'x+\varphi_3'x^2+\varphi_4'x^3$$

$$\Longrightarrow u_t=-\frac{2}{3}\frac{\varphi_1'+\varphi_2'x+\varphi_3'x^2+\varphi_4'x^3}{u^{-5/2}}$$

$$-\frac{3}{2}u^{-5/2}u_x=\varphi_2+2x\varphi_3+3x^2\varphi_4$$

$$\Longrightarrow u_x=-\frac{2}{3}\frac{\varphi_2+2x\varphi_3+3x^2\varphi_4}{u^{-5/2}}$$

$$(a(u)u_x)_x = \left(-\lambda u^{-3/2}\frac{2}{3}\frac{\varphi_2+2x\varphi_3+3x^2\varphi_4}{u^{-5/2}}\right)_x$$

$$=\left(-\frac{2}{3}\lambda u\left(\varphi_2+2x\varphi_3+3x^2\varphi_4\right)\right)_x$$

$$=-\frac{2}{3}\lambda\left[u_x\left(\varphi_2+2x\varphi_3+3x^2\varphi_4\right)+\left(2\varphi_3+6x\varphi_4\right)u\right] \qquad (4.70)$$

Denklem (4.70) elde edildi ve bulunan değerler Denklem (4.8)'de yerine yazıldığında;

$$-\frac{2}{3}\left(\varphi_1'+\varphi_2'x+\varphi_3'x^2+\varphi_4'x^3\right)=-\frac{2}{3}\lambda\left[-\frac{2}{3}\left(\varphi_2+2x\varphi_3+3x^2\varphi_4\right)\left(\varphi_2+2x\varphi_3+3x^2\varphi_4\right)+\right.$$
$$\left.+\left(2\varphi_3+6x\varphi_4\right)u^{-3/2}\right]+u^{-3/2}\lambda_1+\lambda_2$$

$$=-\frac{2}{3}\lambda\left(\varphi_2+2x\varphi_3+3x^2\varphi_4\right)\left(\varphi_2+2x\varphi_3+3x^2\varphi_4\right)+$$

$$+\lambda\left(2\varphi_3+6x\varphi_4\right)\left(\varphi_1+\varphi_2x+\varphi_3x^2+\varphi_4x^3\right)-\frac{3}{2}\left(\varphi_1\lambda_1+\varphi_2\lambda_1x+\varphi_3\lambda_1x^2+\varphi_4\lambda_1x^3+\lambda_2\right)$$

$$\Longrightarrow \varphi_1'=-\frac{2}{3}\varphi_2^2\lambda+2\lambda\varphi_3\varphi_1-\frac{3}{2}\varphi_1\lambda_1-\frac{3}{2}\lambda_2 \qquad \text{ile birlikte;}$$

$$\varphi_2'=-\frac{8}{3}\lambda\varphi_3\varphi_2+2\lambda\varphi_3\varphi_2+6\lambda\varphi_4\varphi_1-\frac{3}{2}\varphi_2\lambda_1$$

$$\varphi_3'=2\lambda\varphi_2\varphi_4-\frac{2}{3}\lambda\varphi_3^2-\frac{3}{2}\varphi_3\lambda_1 \qquad (4.71)$$

$$\varphi_4'=-\frac{3}{2}\lambda_1\varphi_4$$

(4.71) adi diferansiyel denklem sistemi elde edildi. Bu adi diferansiyel denklem sistemini çözmek demek Denklem (4.8)'i a(u) ve F(u) değerleri ile birlikte çözmek demektir.

4.2.4. $a(u)=1, \quad F(u)=(\lambda_1+\lambda_2 \ln u)u$ için

$$\ln u = \varphi_1(t)+\varphi_2(t)x \tag{4.72}$$

Denklem (4.72), Denklem (4.8)'in genel çözümü olsun. O halde;

$$\frac{1}{u}u_t=\varphi_1'+\varphi_2'x \qquad \Longrightarrow \qquad u_t=u\varphi_1'+u\varphi_2'x$$

$$\frac{1}{u}u_x=\varphi_2 \qquad \Longrightarrow \qquad u_x=\varphi_2 u$$

$$(a(u)u_x)_x=\left(u\varphi_2\right)_x=\varphi_2 u_x \tag{4.73}$$

Denklem (4.73) elde edildi ve bulunan değerler Denklem (4.8)'de yerine yazıldığında;

$$u\varphi_1'+u\varphi_2'x=\varphi_2 u_x+\lambda_1 u+\lambda_2 \ln u.u$$

$$e^{\varphi_1+\varphi_2 x}\varphi_1'+e^{\varphi_1+\varphi_2 x}\varphi_2'x=\varphi_2^2 e^{\varphi_1+\varphi_2 x}+\lambda_1 e^{\varphi_1+\varphi_2 x}+\lambda_2\left(\varphi_1+\varphi_2 x\right)e^{\varphi_1+\varphi_2 x}$$

$\varphi_1'+\varphi_2'x=\varphi_2^2+\lambda_1+\lambda_2\varphi_1+\lambda_2\varphi_2 x$ denkleminden;

$$\Longrightarrow \varphi_1'=\varphi_2^2+\lambda_1+\lambda_2\varphi_1$$

$$\varphi_2'=\lambda_2\varphi_2 \tag{4.74}$$

(4.74) adi diferansiyel denklem sistemi elde edildi. Bu adi diferansiyel denklemi çözmek demek Denklem (4.8)'i a(u) ve F(u) değerleri ile birlikte çözmek demektir.

5.MATEMATİKSEL FİZİKDEKİ DENKLEMLER İÇİN BAZI DÖNÜŞÜMLER

5.1. Bazı Özel Dönüşümler

5.1.1. $w_t=aw_{xx}+bw^2-t^2w$ (5.1)

Denklem (5.1) için $w(x,t)=e^{\frac{-t^3}{3}}v(x,t)$ dönüşümü uygulansın;

$$w_t= -t^2e^{\frac{-t^3}{3}}v(x,t) + v_t(x,t)e^{\frac{-t^3}{3}} \quad (5.2)$$

$$= e^{\frac{-t^3}{3}}(-t^2+v_t)$$

$$w_{xx}= e^{\frac{-t^3}{3}}v_{xx} \quad (5.3)$$

Denklem (5.2) ve (5.3) w_t ve w_{xx} türevleri olmak üzere bu türev değerleri Denklem (5.1)'de yerine yazıldığında;

$$e^{\frac{-t^3}{3}}\left(-t^2v+v_t-av_{xx}-be^{-2}v^2+t^2v\right) = 0 \quad (5.4)$$

Denklem (5.4) elde edildi. $e^{\frac{-t^3}{3}}\neq 0$ olduğundan, $\left(v_t-av_{xx}-be^{-2}v^2\right)= 0$ 'dır.

Bu denklemin çözümü Denklem (2.1)'den biliniyor.

5.1.2. $w_t=aw_{xx}+bw^2+w$

$$w_t=aw_{xx}+bw^2+w \quad (5.5)$$

Denklem (5.5) için $w(x,t)=e^tv(x,t)$ dönüşümü uygulansın. w'nin x'e ve t'ye göre türevleri Denklem (5.5)'de yerine yazıldığında aşağıdaki Eşitlik (5.6) elde edilir;

$$e^{t}\left(v_t - a v_{xx} - b e^{2} v^{2}\right)=0 \qquad (5.6)$$

$e^{t}\neq 0$ olduğundan , $\left(v_t - a v_{xx} - b e^{2} v^{2}\right)=0$ ‘dır. Bu denklemin çözümü Denklem (2.1)’den biliniyor.

Sonuç olarak,

$w_t = a w_{xx} + b w^2 + \alpha(t) w$ tipindeki denklemler için $w(x,t)=Av(x,t)$, $A=e^{\int \alpha dt}$ dönüşümü yapılır ve denklem $w_t - a w_{xx} - b w^2 = 0$ tipindeki bir denkleme kolayca indirgenebilir.

5.2. Nokta Dönüşümü

$w=w(x,y)$, x ve y bağımsız değişkenlerinin bir fonksiyonu olsun. Genellikle nokta dönüşümü ξ,η yeni bağımsız değişkenler ve $u= u(\xi,\eta)$ yeni bağımlı değişken olmak üzere;

$$x=X(\xi,\eta,u), \qquad y=Y(\xi,\eta,u), \qquad w=W(\xi,\eta,u), \qquad (5.7)$$

Denklem (5.7) şeklinde ifade edilir. Nokta dönüşümü sadece mertebeyi ya da orijinal denklemi korumakla kalmaz, bunun yanında denklemin yapısını da korur. Yeni denklemin en yüksek mertebeden türevleri, orijinal denklemin en yüksek mertebeli türevleri üzerinde lineer bağımlıdır.

Eğer Eşitsizlik (5.8) sağlanır ise,

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial w} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial w} \\ \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial y} & \frac{\partial W}{\partial w} \end{pmatrix} \neq 0 \qquad (5.8)$$

Dönüşüm (5.7)’nin tersi vardır.

Nokta dönüşümü (5.7), iki bağımsız değişken içeren ikinci mertebeden;

$$F\left(x,y,w,\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=0 \tag{5.9}$$

Denklem (5.9)'u;

$$G=\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta},\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta},\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)=0 \tag{5.10}$$

Denklem (5.10)'a indirger.

Eğer $u=u(\xi,\eta)$, Denklem (5.10)'un çözümü ise Formül (5.7), Denklem (5.9)'a karşılık gelen çözümü parametrik olarak tanımlar.

Nokta dönüşümleri, denklemleri daha kolay bir şekilde çözmemizi sağlar ve bu denklemlerin indirgenmiş halleri, çözümleri önceden bilinen fonksiyonlardır. Bazen de nokta dönüşümleri lineer olmayan denklemleri lineer hale getirmek için kullanılır(Polyanin ve Zaitsev, 2004)..

Örnek1:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=a\frac{\partial}{\partial x}\left(w^m\frac{\partial w}{\partial x}\right)+[xf(t)+g(t)]\frac{\partial w}{\partial x}+h(t)w \tag{5.11}$$

Denklem (5.11);

$$w(x,t)=u(z,\tau)H(t)$$

$$z=xF(t)+\int g(t)F(t)dt \tag{5.12}$$

$$\tau=\int F^2(t)H^m(t)dt$$

Dönüşüm (5.12) yardımıyla,

$$F(t)=\exp\left[\int f(t)dt\right],\quad H(t)=\exp\left[\int h(t)dt\right] \tag{5.13}$$

Denklem (5.13) olmak üzere;

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial z}\left(u^{m}\frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{5.14}$$

Denklem (5.14)'e indirgenir(Polyanin ve Zaitsev, 2004).

Örnek2:

$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+a\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+f(x,t)$ lineer olmayan denklemi $u=u(x,t)$ olmak üzere,

$u=\exp(aw)$ dönüşümü yardımıyla;

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+af(x,t)u \tag{5.15}$$

Denklem (5.15)'e indirgenebilir(Polyanin ve Zaitsev, 2004).

Örnek3:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+a\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+tx^2 \tag{5.16}$$

Denklem (5.16)'ya $u=u(x,t)$, $u=\exp(aw)$ dönüşümü uygulandığında,

$w=\frac{\ln u}{a}$ olmak üzere;

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{1}{a}\frac{u_t}{u},\quad \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{a}\frac{u_x}{u},\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{1}{a}\frac{u_{xx}u-u_x u_x}{u^2},\quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2=\frac{1}{a^2}\frac{u_x^2}{u^2}, \tag{5.17}$$

Denklem (5.17) elde edildi. Bu türevler orijinal denklemde yerine yazıldığında;

$$\frac{1}{a}\frac{u_t}{u}=\frac{1}{a}\frac{u_{xx}u-(u_x)^2}{u^2}+\frac{1}{a}\frac{(u_x)^2}{u^2}+ax^2t$$

$$\Rightarrow u_t=u_{xx}-\frac{(u_x)^2}{u}+\frac{(u_x)^2}{u}+aux^2t$$

$\Rightarrow u_t=u_{xx}+uax^2t$ elde edildi.

Kendine benzer çözüm(Polyanin ve Zaitsev, 2004);

$$u = t^{\frac{6}{2(1-k)}}\phi(\xi), \qquad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}} \tag{5.18}$$

Denklem (5.18) biçimindedir. Burada ϕ,

$\phi''_{\xi\xi}+\frac{1}{2}\xi\phi'_{\xi}+\frac{6}{2(k-1)}\phi + a\xi^2\phi=0$ adi diferansiyel denklemini sağlamaktadır.

5.3. Hodograph Dönüşümü

Bazı durumlarda lineer olmayan denklemler ve kısmi diferansiyel denklem sistemleri hodograph dönüşümü yardımıyla daha basit hale dönüştürülebilir. Aşağıda, bu dönüşümün uygulandığı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem örneği verilmiştir:

Örnek :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial y}\right]=0 \tag{5.19}$$

Denklem (5.19) aşağıdaki gibi Denklem sistemi (5.20) olarak yazılsın;

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ -f(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \tag{5.20}$$

Hodograph dönüşümü;

$x= x(w,v), \qquad y= y(w,v)$ (5.21)

olsun ve Denklem (5.21)'in x ve y'ye göre diferansiyeli alınsın;

$1=x_w w_x+x_v v_x$ (5.21a)

$0=x_w w_y+x_v v_y$ (5.21b)

$0=y_w w_x+y_v v_x$ (5.21c)

$$1=y_w w_y+y_v v_y \qquad (5.21d)$$

İlk iki denklemden, yani (5.21a) ve (5.21b) Denklemlerinden x_w çekildiğinde;

$x_w=\frac{1-x_v v_x}{w_x}$, $x_w=-\frac{x_v v_y}{w_y}$, olmak üzere;

$$\Longrightarrow \quad \frac{1-x_v v_x}{w_x}+\frac{x_v v_y}{w_y}=0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{w_y-x_v v_x w_y+x_v v_y w_x}{w_y w_x}=0$$

$$\Longrightarrow \quad x_v\left(v_y w_x-v_x w_y\right)=-w_y$$

$$\Longrightarrow \quad x_v=-\frac{w_y}{v_y w_x-v_x w_y}=-\frac{w_y}{j}, \qquad j=v_y w_x-v_x w_y$$

$$\Longrightarrow \quad x_w=\frac{v_y}{j} \qquad (5.22)$$

Denklem (5.22) elde edildi. İlk iki denklemden, yani (5.21a) ve (5.21b) denklemlerinden x_v çekildiğinde;

$x_v=\frac{1-x_w w_x}{v_x}$, $x_v=-\frac{x_w w_y}{v_y}$ olmak üzere;

$$\Longrightarrow \quad \frac{1-x_w w_x}{v_x}+\frac{x_w w_y}{v_y}=0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{v_y-x_w w_x v_y+v_x x_w w_y}{v_x v_y}=0$$

$$\Longrightarrow \quad x_w\left(v_x w_y-w_x v_y\right)=-v_y$$

$$\Longrightarrow \quad x_w=-\frac{v_y}{-j}=\frac{v_y}{j}$$

$$\Longrightarrow \quad x_v=-\frac{w_y}{j} \qquad (5.23)$$

Denklem (5.23) elde edildi. Üçüncü ve dördüncü denklemlerden, yani (5.21c) ve (5.21d) Denklemlerinden y_w çekildiğinde;

$y_w = -\frac{y_v v_x}{w_x}$, $\qquad y_w = \frac{1-y_v v_y}{w_y}$ elde edildi.

Buradan,

$$\Longrightarrow \quad \frac{1-y_v v_y}{w_y} + \frac{y_v v_x}{w_x} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{w_x - w_x y_v v_y + w_y y_v v_x}{w_y w_x} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad y_v\left(w_y v_x - w_x v_y\right) = -w_x$$

$$\Longrightarrow \quad y_v = -\frac{w_x}{-j}, \qquad y_w = -\frac{v_x}{j} \tag{5.24}$$

Denklem (5.24) elde edildi. Üçüncü ve dördüncü denklemlerden, yani (5.21c) ve (5.21d) denklemlerinden y_v çekildiğinde;

$y_v = -\frac{y_w w_x}{v_x}$, $\qquad y_v = \frac{1-y_w w_y}{v_y}$ olmak üzere;

$$\Longrightarrow \quad \frac{1-y_w w_y}{v_y} + \frac{y_w w_x}{v_x} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{v_x - v_x y_w w_y + y_w w_x v_y}{v_x v_x} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad y_w\left(w_x v_y - v_x w_y\right) = -v_x$$

$$\Longrightarrow \quad y_w = -\frac{v_x}{j} \qquad y_v = \frac{w_x}{j} \tag{5.25}$$

Denklem (5.25) elde edildi. Denklem (5.19)'da bu bulunan değerler yerine yazılsın;

$y_v.j = x_w.j \qquad \Longrightarrow \quad y_v = x_w$

$$f(w)x_v.j = -y_w.j \qquad \Longrightarrow \qquad -f(w).x_v=y_w \tag{5.26}$$

Denklem (5.26)'nın birinci denklemi w'ya göre, ikinci denklemi v'ye göre türetilip y_{wv} yok edildiğinde;

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial w}=\frac{\partial^2 x}{\partial w^2}$$

$$-f(w)\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial w \partial v}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 x}{\partial w^2}+f(w)\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=0 \tag{5.27}$$

Denklem (5.27) elde edildi. Benzer şekilde;

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 x}{\partial w \partial v}$$

$$-\frac{\partial}{\partial w}=\left[\frac{1}{f(w)}\frac{\partial y}{\partial w}\right]\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial w}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}+\frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{1}{f(w)}\frac{\partial y}{\partial w}\right]=0 \tag{5.28}$$

Denklem (5.28) elde edildi. Denklem (5.27)'nin özel çözümü olan x= x(w,v)'in Denklem sistemi (5.26)'da yerine yazılması ile y = y(w,v) bulunur. Son olarak Denklem (5.21)'de v'nin yok edilmesi ile de w= w(x,y) çözümü elde edilir.

6.SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada kısmi diferansiyel denklemlerin bazı analitik çözüm yöntemleri ele alınmıştır. Akışkanlar dinamiğinde kullanılan modellerden biri olan Burger denkleminin hareketli dalga formundaki çözümleri elde edilmiştir ve denkleme Cole-Hopf dönüşümü uygulanmıştır. Fakat burada Burger denklemini klasik ısı denklemine indirgemek yerine klasik ısı denkleminden Burger denklemi elde edilmiştir. Bu fikirden yola çıkarak, çözümü biliniyor olan bir kısmi diferansiyel denklem, gerekli dönüşümler yardımı ile çözümü istenen kısmi diferansiyel denkleme dönüştürülebilir.

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin bir diğer çözüm yöntemlerinden olan Anti-Reduction yönteminin diğer çözüm yöntemlerine kıyasla pek çok farklı denklem tipine uygulanabilir olduğunu fakat bu yöntemin uygulandığı kısmi diferansiyel denklemlere, lineerliği bozan kaynak fonksiyonu eklendiğinde denklemin çözümünün, bir diğer ifade ile denklemin indirgenmiş olduğu adi diferansiyel denklem sisteminin çözümünün bir o kadar zorlaştığı gözlemlenmiştir. Hatta bazen bu kaynak fonksiyonunun seçimine bağlı olarak bu kısmi diferansiyel denklem, adi diferansiyel denklem sistemine dahi dönüştürülememiştir. Bu noktada , genel çözüm formunda bazı değişiklikler yapılabilir.

Kısmi diferansiyel denklemlerin bir başka çözüm yöntemlerinden ve nokta dönüşümü sınıfından olan Hodograph dönüşümünün oldukça uzun bir yöntem olduğu söylenebilir. Bunun sebebi ise denklemi, denklem sistemi olarak ele alıyor olması ve denklemi, adi diferansiyel denklem ya da denklem sistemine indirgemek yerine diğer çözüm yöntemlerinden farklı olarak değişken katsayılı iki farklı lineer kısmi diferansiyel denkleme dönüştürüyor olmasıdır. Bu çözüm yöntemi ileride bir boyutlu farklı denklem tiplerine uygulanabilir.

Bu çalışmada çok boyutta ele alınan denklemler Porous Medium denklemi ile optimal kontrol teorisinde kullanılan denklem tipleridir. İleride, Anti-Reduction yöntemi ile çözümleri elde edilmiş olan bir boyutlu kısmi diferansiyel denklemler, yine Anti-Reduction metodu ile iki veya daha fazla boyutta ele alınabilir.

KAYNAKLAR

Chandraker V., Awasthi A., Jayaraj S., A Numerical treatment of Fisher Equation, *Procedia Technology*, 2015, **25**(2016), 1217-1225.

Chengri J., Mingzhu L., A New Modification of Adomian Decomposition Method for Solving a Kind of Evolution Equation, *Applied Mathematics and Computation*, 2004, **169**(2005), 953-962.

Cherniha R.M., New Ansätze and Exact Solutions for Nonlinear Reaction-Diffusion Equations Arising in Mathematical Biology, *Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics*, 1997, **1**, 138-146.

Chun C., Jafari H., Yong-II K., Numerical Method fort he Wave and Nonlinear Diffusion Equations with the Homotopy Perturbation Method, *Computers and Mathematics with Applications*, 2009, **57**(2009), 1226-1231.

Evans C.L., *Partial Differential Equations*, Berkeley :University of California, California, 1998.

Fushchych W., Zhadanov R.Z., Anti-Reduction of the Nonlinear Wave Equation, *Scientific Works*, 2003, **5**(11), 116-119.

Fushchych W., Zhdanov R., Antireduction and Exact Solutions of Nonlinear Heat Equations, *Nonlinear Mathematical Physics*, 1994, **1**(1), 60-64.

Ganji D.D., Rafei M., Solitary Wave Solutions for a Generalized Hirota-Stsuma Coupled KdV Equation by Homotopy Perturbation Method, *Physics Letters A*, 2006, **356**(2006) 131-137.

Ghorbani A., Beyond Adomian Polynomials: He Polynomials, *Chaos Solutions & Fractals*, 2007, **39**(3), 1486- 1492.

He J.-H., A Coupling Method of a Homotopy Technique and a Perturbation Technique for Non-linear Problems, *Non-Linear Mechanics*, 1999a, **35**(2000), 37-43.

He J.-H., Homotopy Perturbation Method: A New Nonlinear Analytical Technique, *Applied Mathematics and Computation*, 2002, **135**(2003), 73-79.

He J.-H., Homotopy Perturbation Technique, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1999b, **178**(1999), 257-262.

Kaya D., Aassila M., An Application for a Generalized KdV Equation by the Decomposition Method, *Physics Letters A*, 2002, **299**(2002), 201-206.

Kaya D., Yokus A., A Numerical Comparison of Partial Solutions in the Decomposition Method for Linear and Nonlinear Partial Differantial Equations, *Mathematics and Computers in Simulation*, 2002, **60**(2002), 507-512.

Noor M.A., Mohyud-Din S.T., Variational Iteration Method for Fifth-Order Boundary Value Problems Using He's Polynomials, *Mathematical Problems İn Engineering*, doi:10.1155/2008/954794.

Öziş T., Yıldırım A., Comparison Between Adomian's Method and He's Homotopy Perturbation Method, *Computers & Mathematics*, 2008, **56**(2008), 1216-1224.

Pamuk N., Series Solution for Porous Medium Equation with a Source term by Adomian's Decomposition Method, *Applied Mathematics and Computation*, 2005, **178**(2006), 480-485.

Pamuk S., A Review of Some Recent Results for the Approximate Analytical Solutions of Nonlinear Differential Equations, *Mathematical Problems in Engineering*, doi:10.1155/2009/202307.

Pamuk S., Ataç İ., Self-Similar Asymptotics for Linear and Nonlinear Mathematical Models of Tumor Angiogenesis, *Commun.Fac.Sci.Univ.Ank.Series A1*, 2014, **63**(2), 71-79.

Pamuk S., Pamuk N., He's Homotopy Perturbation Method for Continuous Population Models for Single and Interacting Species, *Computers and Mathematics with Applications*, 2009, **59**(2010), 612-621.

Pamuk S., Solution of the Porous Media Equation by Adomian's Decomposition Method, *Physics Letters A*, 2005, **344**(2005), 184-188.

Pamuk S., The Decomposition Method for Contiunuous Population Models for Single and Interacting Species, *Applied Mathematics and Computation*, 2004, **163**(2005), 79-88.

Polyanin D.A, Zaitsev F.V., *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, Chapman & Hall/CRC, New York, 2004.

Salih A., Burger's Equation, Indian Institute of Space Science and Technology, https://www.iist.ac.in/sites/default/files/people/IN08026/Burgers_equation_viscous.pdf, (Ziyaret tarihi: 5 Kasım 2017).

Shou D.-H., He J.-H., Beyond Adomian Method: the Variational Iteration Method for Solving Heat-Like and Wave-Like Equation With Variable Coefficients, *Physics Letters A*, 2007, **372**(2008), 233-237.

Wazwaz A.-M., Adomian Decomposition Method for a Reliable Treatment of the Bratu-Type Equations, *Applied Mathematics and Computation*, 2004, **166**(2005), 652-663.

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

Pamuk S., **Mavituna G**., Exact Solutions of Some Non-Linear Partial Differential Equations, *International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling ICAAM17*, İstanbul, Türkiye, 3-7 Temmuz 2017.

ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında Samsun'da doğdu. İlköğretim ve lise eğitimini Samsun'da tamamladı. 2010 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2015 yılında mezun oldu. 2015 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimini tamamlamaktadır.